实验七

第七章上机题4: 用数值积分方法近似计算

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

及圆周率

$$\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

(1) 用复合 Simpson 求积公式计算, 要求绝对误差小于 $\frac{1}{2}\times 10^{-8}$, 试根据积分余项估计步长 h 的取值范围. 按要求选择一个步长进行计算, 观察数值结果与误差要求是否相符.

(提示: 可利用 MATLAB 的符号运算工具箱求函数的高阶导数表达式, 详见命令 diff、syms 的帮助文档.)

(2) 用下面的复合 Gauss 公式计算近似积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =&\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]\\ &+\frac{(b-a)h^4}{4320}f^{(4)}(\xi_1),\quad \xi_1\in(a,b),\end{aligned}$$

其中, $h=(b-a)/n$, $x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\frac{h}{2}$. 复合 Gauss 积分的思想是: 将 $[a,b]$ 做等距划分, 即 $x_i=a+ih,\ (i=0,1,2,\cdots,n)$, 然后在每个子区间内应用两点 Gauss 公式. 试对步长 h 做先验估计 (误差要求与 (1) 同), 并计算近似积分.

---

(1) 复合 Simpson 求积公式

复合 Simpson 公式:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

其中 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 为 $[x_k,x_{k+1}]$ 的中点， $h=x_{k+1}-x_k$.

误差估计与步长选择:

复合 Simpson 公式的误差余项为:

$$E=-\frac{(b-a)h^4}{2880}f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$

其中 $\frac{h}{2}=\frac{b-a}{n}$ （n 为偶数，因为一个 Simpson 单元是在单个区间上使用 2 个端点和 1 个中点分割得到 2 个区间，所以区间数需要是偶数），要求绝对误差 $|E|<\frac{1}{2}\times 10^{-8}$.

对于 $\ln 2=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$：

- $f(x)=\frac{1}{x}$，计算四阶导数：$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}$
- 在 $[1,2]$ 上，$|f^{(4)}(x)|\leq 24$（最大值在 $x=1$ 处）。
- 误差估计：$|E|\leq \frac{(2-1)(\frac{h}{2})^4}{180}\times 24=\frac{24}{180}(\frac{h}{2})^4=\frac{2}{15}(\frac{h}{2})^4$
- 要求：
  $\frac{2}{15}(\frac{h}{2})^4<\frac{1}{2}\times 10^{-8} \implies (\frac{h}{2})^4<3.75\times 10^{-8} \implies (\frac{b-a}{n})^4<3.75\times 10^{-8} \implies n>71.86$

取 $n=72$（偶数）.

对于 $\pi=4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$：

- $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$，计算四阶导数：$g^{(4)}(x)=24\frac{5x^4-10x^2+1}{(1+x^2)^5}$
- 在 $[0,1]$ 上，$|g^{(4)}(x)|\leq 24$（最大值在 $x=0$ 处）。
- 误差估计（考虑乘以 4）：$|E_\pi|\leq 4\times \frac{(1-0)(\frac{h}{2})^4}{180}\times 24=\frac{96}{180}(\frac{h}{2})^4=\frac{8}{15}(\frac{h}{2})^4$
- 要求：
  $\frac{8}{15}(\frac{h}{2})^4<\frac{1}{2}\times 10^{-8} \implies (\frac{h}{2})^4<9.375\times 10^{-9} \implies (\frac{b-a}{n})^4<9.375\times 10^{-9} \implies n>101.63$

取 $n=102$（偶数）.

---

(2) 复合 Gauss 公式（两点）

公式与误差估计：

给定复合 Gauss 公式：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(x_{i+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]+\frac{(b-a)h^4}{4320}f^{(4)}(\xi)$$

其中 $h=\frac{b-a}{n}$，$x_{i+\frac{1}{2}}=a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h$.

误差要求： $|E| < \frac{1}{2} \times 10^{-8}$.

对于 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$ **：**

- $|f^{(4)}(x)| \le 24$（同上）。
- 误差估计：$|E| \le \frac{(2-1)h^4}{4320} \times 24 = \frac{24}{4320} h^4 = \frac{1}{180} h^4$
- 要求：$\frac{1}{180} h^4 < \frac{1}{2} \times 10^{-8} \implies h^4 < 9 \times 10^{-7} \implies h < (9 \times 10^{-7})^{1/4} \approx 0.0308$
- 取 $n = 34$（因为 $h = \frac{1}{n}$， $n > \frac{1}{0.0308} \approx 32.5$).

对于 $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ **：**

- $|g^{(4)}(x)| \le 24$（同上）。
- 误差估计（考虑乘以 4）：$|E_\pi| \le 4 \times \frac{(1-0)h^4}{4320} \times 24 = \frac{96}{4320} h^4 = \frac{1}{45} h^4$
- 要求：$\frac{1}{45} h^4 < \frac{1}{2} \times 10^{-8} \implies h^4 < 2.25 \times 10^{-7} \implies h < (2.25 \times 10^{-7})^{1/4} \approx 0.022$
- 取 $n = 46$（因为 $h = \frac{1}{n}$， $n > \frac{1}{0.022} \approx 45.91$).

输出结果

代码块

```
(1) 复合 Simpson 公式结果:
    Simpson ln2: n=72, approx=0.693147181722, error=1.16e-09
    Simpson  π: n=102, approx=3.141592653590, error=3.51e-14

(2) 复合 Gauss 公式结果:
    Gauss  ln2: n=34, approx=0.693147179586, error=9.74e-10
    Gauss   π: n=46, approx=3.141592653590, error=4.62e-14
```

结论

1. 实际误差远小于要求，说明先验步长估计是保守且有效的。
2. 复合 Gauss 公式（两点）在相同误差要求下需要的子区间数 n 更少（计算效率更高）。