实验六

1. 曲线拟合

第六章上机题3: 对物理实验中所得下列数据

t_i	1	1.5	2	2.5	3.0	3.5	4	
y_i	33.40	79.50	122.65	159.05	189.15	214.15	238.65	
t_i	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y_i	252.2	267.55	280.50	296.65	301.65	310.40	318.15	325.15

(1) 用二次函数 $y = a + bt + ct^2$ 做曲线拟合.

(2) 用指数函数 $y = ae^{bt}$ 做曲线拟合.

(3) 绘制出数据点与拟合曲线，比较上述两条拟合曲线, 哪条更好?

用最小二乘法进行函数拟合：

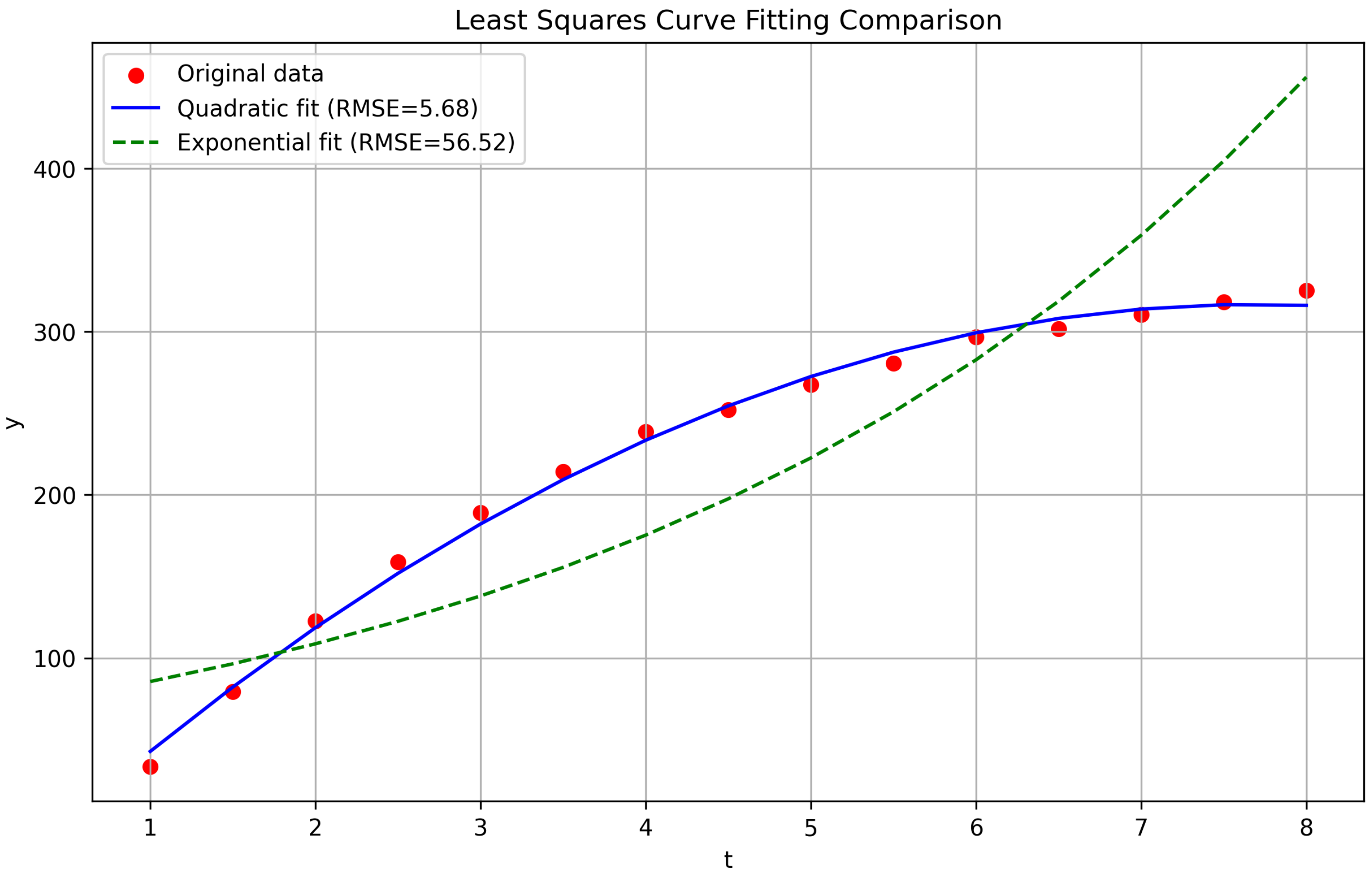
1. 二次函数拟合

- **设计矩阵**：构造 $A = [1, t, t^2]$
- **正规方程**：求解 $(A^T A)\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$， $\mathbf{x} = [a, b, c]^T$ 其中
- **数值求解**：通过 Cholesky 分解加速计算
- **误差评估**：计算均方根误差（RMSE）

2. 指数函数拟合

- **线性化处理**：对模型取对数，转化为线性问题 $\ln y = \ln a + bt$
- **设计矩阵**：构造 $A = [1, t]$）
- **正规方程**：求解 $(A^T A)\mathbf{x} = A^T \ln\mathbf{y}$，其中 $\mathbf{x} = [\ln a, b]^T$
- **数值求解**：通过 Cholesky 分解加速计算
- **参数还原**： $a = e^{\ln a}$
- **误差评估**：计算 RMSE

3. 效果对比



代码块

```
# 二次函数拟合
Quadratic fit parameters (a, b, c): [-45.29423077  94.19429218  -6.12682612]
Quadratic fit RMSE: 5.683931823476435

# 指数函数拟合
Exponential fit parameters (a, b): 67.3937925784558 0.23898343793723434
Exponential fit RMSE: 56.52224402531059
```

可见，二次函数拟合的效果更好，主要由于数据有增速减缓的特征，这点指数函数难以拟合。

2. 样条插值

第六章上机题8: 已知直升飞机旋转机翼外形曲线的采样点坐标如下:

x	0.520	3.1	8.0	17.95	28.65	39.62	50.65	78	104.6	156.6
y	5.288	9.4	13.84	20.20	24.90	28.44	31.10	35	36.9	36.6
x	208.6	260.7	312.50	364.4	416.3	468	494	507	520	
y	34.6	31.0	26.34	20.9	14.8	7.8	3.7	1.5	0.2	

以及两端点的 1 阶导数值 $y'_0 = 1.865\ 48$ 和 $y'_n = -0.046\ 115$.

利用第一种边界条件的三次样条插值函数来近似机翼外形曲线，并计算翼型曲线在 $x = 2, 30, 130, 350, 515$ 各点上的函数值及 1 阶导数、2 阶导数的近似值.

数学原理

这里我们要用三次样条插值（Cubic Spline Interpolation）方法来近似直升飞机旋转机翼外形曲线，并计算特定点的函数值及其导数。

三次样条插值的基本思想是在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造一个三次多项式 $S_i(x)$ ，使得：

1. 函数值在节点处连续： $S_i(x_i) = y_i$ ， $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
2. 一阶导数连续： $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
3. 二阶导数连续： $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$
4. 满足边界条件（这里是固定一阶导数）

三次样条函数表达式

- 在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，样条函数可以表示为：

$$S_i(x) = \frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$

- **一阶导数：**

$$S'_i(x) = -\frac{M_i(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^2}{2h_i} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1}-M_i)}{6}$$

- **二阶导数：**

$$S''_i(x) = M_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + M_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i}$$

其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$ ， $M_i = S''(x_i)$

求解 M 的三对角方程组

核心方程

对每个内部节点 $i = 1, 2, ..., n-1$：

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i$$

其中：

- $\lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$
- $\mu_i = 1 - \lambda_i$
- $d_i = \dfrac{6(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i})}{h_i + h_{i+1}}$

边界条件（固定一阶导数）

- **左边界**（给定 y_0'）：$2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right)$
- **右边界**（给定 y_n'）：$M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}\left(y_n' - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$

完整方程组形式

组合后得到三对角线性方程组：

$$\begin{cases}
2M_0 + M_1 = d_0 & \text{(左边界)} \\
\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 & \text{(内部节点1)} \\
\mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = d_2 & \text{(内部节点2)} \\
\vdots \\
\mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = d_{n-1} & \text{(内部节点n-1)} \\
M_{n-1} + 2M_n = d_n & \text{(右边界)}
\end{cases}$$

用矩阵形式表示为 $\mathbf{AM} = \mathbf{d}$：

$$\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\
 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
 & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

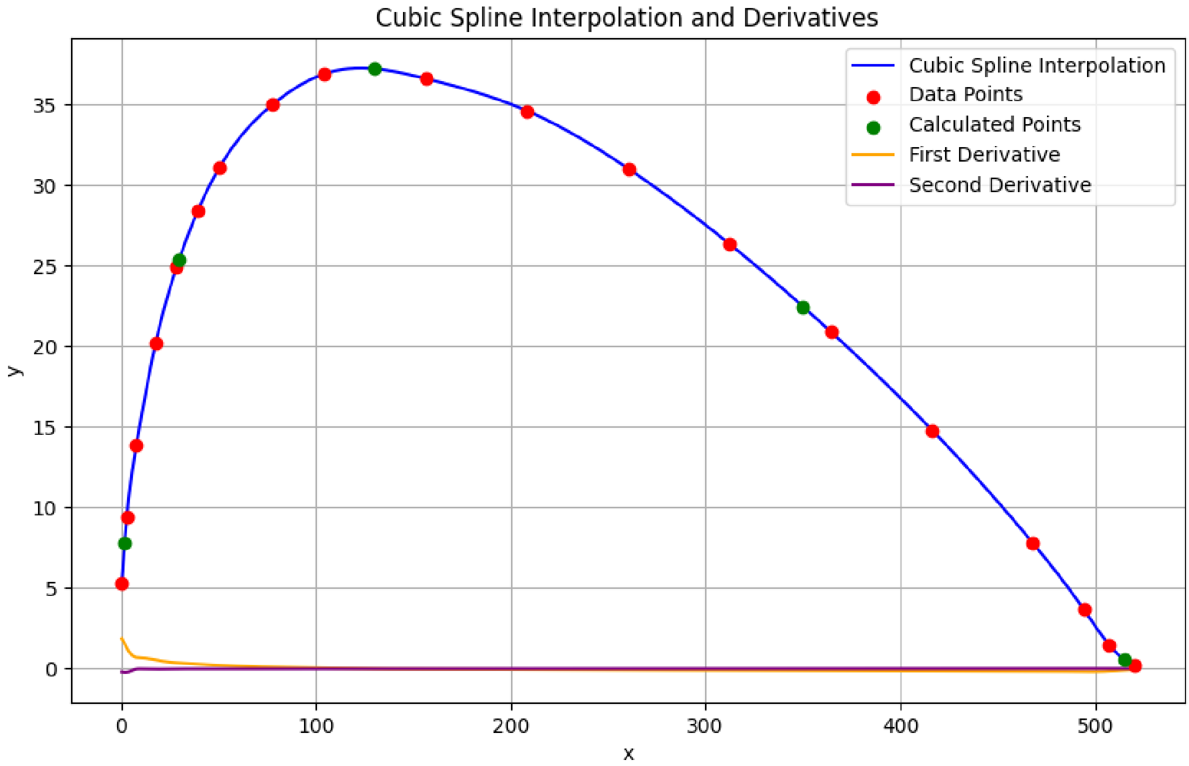
求解步骤概述

1. **计算步长** $h_i = x_i - x_{i-1}$

2. **计算系数** λ_i 和 μ_i
3. **构建右端项** d_i （包含边界条件）
4. **解三对角方程组**得到 M_i （代码中我用的是追赶法）
5. **利用** M_i **构造分段三次样条函数：**

$$S_i(x) = \frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$

结果



代码块

```
x           f(x)        f'(x)       f''(x)
2.0         7.8252      1.5568      -0.2213
30.0        25.3862     0.3549      -0.0078
130.0       37.2138     -0.0104     -0.0014
350.0       22.4751     -0.1078     -0.0002
515.0       0.5427      -0.0899     0.0081
```