高等数学：基于 LaTeX 的个人知识总结

Advanced Math Notes: Based on LaTeX

作者：彭正萧 & PENG Zhengxiao

组织：西北农林科技大学

时间：始于 2023 年 11 月 19 日

版本：第七版 上册（同济大学数学系 编）

模板：ElegantLaTeX

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第 1 章 函数与极限

内容提要

- 你是谁
- 我是谁
- 我不知道

1.1 映射与函数

本节主要介绍映射、函数及有关概念，函数的性质与运算等。

1.1.1 映射

定义 1.1

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

.

♣

笔记

1. 构成映射的**三要素**：
   (a). 集合 X，即**定义域**$D_f = X$.
   (b). 集合 Y，即**值域**的范围 $R_f \subset Y$.
   (c). **对应法则** f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.
2. 可以一对多，不能多对一：对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.
3. 映射又称算子，根据 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称，例如：
   (a). **泛函**：从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函。
   (b). **变换**：从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换。
   (c). **函数**：从实数集 $\mathbb{R}$（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数。

定义 1.2 (逆映射)

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 $f(x)y$。于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y) = x$，这 x 满足 $f(x) = y$。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$。

♣

笔记 只有单射才存在逆映射。

定义 1.3 (复合映射)

设有两个映射

$$g : X \to Y_1, \qquad f : Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 个 f 构成的**复合映射**，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z, \ (f \circ g)(x) = f[g(x)], \ x \in X$$

♣

笔记

1. $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义。
2. **即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同。**

1.1.2 函数

定义 1.4 (函数的概念)

设数集 $D \subset \mathbb{R}$，则称映射 $f : D \to \mathbb{R}$，为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), \ x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$。 ♣

笔记

1. f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示自变量 x 对应的函数值。
2. 可以直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y = y(x)$。
3. 两个函数相同的**充分必要条件**是：两个函数的**定义域**相同，**对应法则**也相同。

定义 1.5 (函数的有界性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$。如果存在数 K_1，使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(X)$ 在 X 上的一个上界。如果存在数 K_2，使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。如果存在正数 M，使得

$$|\, f(x)\, | \leqslant M$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|\, f(x_1)\, | > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。 ♣

笔记 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的**充分必要条件**是它在 X 上既有上界又有下界。

定义 1.6 (函数的单调性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

那么称函数 $f(x)$ 早区间 I 上是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。♣

笔记 如果函数 $f(x)$ 在其定义域 D 的两个真子集 A 和 B 内单调性相同，并且 $A \cap B = \emptyset$，在描述函数单调性的时候，不能说函数 $y = f(x)$ 在 $A \cup B$ 内单调增加（或单调减少），而应该说函数 $y = f(x)$ 在 A 和 B 内单调增加（或单调减少）。

定义 1.7 (函数的奇偶性)

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为偶函数。如果对于任一 $x \in D$

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为奇函数 ♣

定义 1.8 (函数的周期性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。如果存在一个正数 I，使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$，且

$$f(x + l) = f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期 ♣

笔记 周期函数在每个长度为 l 的区间上，函数图形有相同的形状。

定义 1.9 (反函数)

设函数 $f : D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1} : f(D) \to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数。则对每个 $y \in f(D)$，有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有

$$f^{-1}(y) = x$$

这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的。♣

笔记 ① $y = f(x)$; ② $x = f^{-1}(y)$; ③ $y = f^{-1}(x)$.
①与②的函数图像相同，而①与③（或②与③）的函数图像关于直线 $y = x$ 对称。
注：相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数，而不是“原函数”。

定义 1.10 (复合函数)

设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域 $R_g \subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y = f[\,g(x)\,], \qquad x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量。函数 g 与函数 f 的复合函数，即按“先 g 后 f”的次序复合的函数，通常记为 $f \circ g$，即

$$(f \circ g)(x) = f[\,g(x)\,]$$ ♣

笔记 g 与 f 能构成符合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须包含于函数 f 的定义域 D_f，即 $R_f\subset D_f$。否则，不能构成复合函数。

定义 1.11 (初等函数)

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数

笔记 基本初等函数：

1. 幂函数：$y=x^\mu\quad(\mu\in\mathbb{R}\text{是常数})$.
2. 指数函数：$y=a^x\quad(a>0\text{且}a\neq1)$.
3. 对数函数：$y=\log_a x\quad(a>0\text{且}a\neq1$，特别当$a=e$时，记为$y=\ln x)$.
4. 三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.
5. 反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

注：非初等函数一般为分段函数。

1.2 数列的极限

1.2.1 数列极限的定义

定义 1.12 (数列极限)

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列 $\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a\quad(n\to\infty)$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散数列，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。

笔记

1. 正数 ε 可以任意给定意味着不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 表达出 x_n 与 a无限接近的意思.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{正整数}N,\text{当}n>N,|x_n-a|<\varepsilon$.

1.2.2 收敛数列的性质

定理 1.1 (极限的唯一性)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

注：用反证法证明.

定理 1.2 (收敛数列的有界性)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

定理 1.3 (收敛数列的保号性)

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $(a>0)$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论 1.1

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，那么 $a \geqslant 0$（或 $a \leqslant 0$）.

定理 1.4 (收敛数列与其子数列间的关系)

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

1.3 函数的极限

1.3.1 函数极限的定义

定义 1.13 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心领域内有定义。如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 f(x)\to A \quad (当 x\to x_0)$$

笔记

1. 定义 1.13 可以简单地表述为：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\delta>0, 当 0<|x-x_0|<\delta 时, 有 |f(x)-A|<\delta.$
2. 定义中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，所以 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 没有极限，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.
3. 左右极限：
   (a). 左极限：在 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A$$
   (b). 右极限：类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作
   $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A$$
   (c). 左极限与右极限统称为单侧极限.
4. 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的**充分必要条件**是左极限及右极限各自存在并且相等，即
   $$f(x_0^-) = f(x_0^+)$$

定义 1.14 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (当x\to\infty)$$

笔记

1. 定义 1.14 可以简单地表述为：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 当$|x|>X$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$
2. 如果 $x>0$ 且无限增大（记作 $x\to+\infty$），那么只要把定义 1.14 中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，就可以得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义.
3. 同样，如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to-\infty$），那么只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}=A$ 的定义.
4. 从几何上来说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，则总有一个正数 X 存在，使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两条直线之间. 这时，直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

1.3.2 函数极限的性质

定理 1.5 (唯一性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理 1.6 (局部有界性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 1.7 (局部保号性)

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

定理 1.8

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\,(A\neq 0)$, 那么就存在着 x_0 的某一去心领域 $\mathring{U}(x_0)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$

推论 1.2

如果在 x_0 的去心领域内 $f(x)\geqslant 0$ 或（$f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

定理 1.9 (函数极限与数列极限的关系)

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$|x_n|$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0\,(n\in N)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

笔记 所有定义的使用条件可以替换为 $x\to *$，即

$$x \to x_0 \Leftrightarrow x \to *,\text{ 其中} * \Rightarrow \begin{cases} x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0^+ \\ x_0^- \end{cases} \\ \infty \Rightarrow \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \end{cases}$$

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1 无穷小

定义 1.15 (无穷小)

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ 时的无穷小. 特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小.

♣

笔记 无穷小 $\begin{cases} \text{常数函数：} 0. \\ \text{以零为极限的函数（或数列）.} \end{cases}$

定理 1.10

在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的**充分必要条件**是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小.

♡

1.4.2 无穷大

定义 1.16 (无穷大)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$），对应的函数值 $f(X)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大.

♣

笔记

1. 无穷大与无界的比较：

$$\begin{aligned} &\text{无穷大：} && \forall M > 0,\ x \to *,\ |f(x)| > M. \\ &\text{无界：} && \forall M > 0,\ \exists x_0 \in D,\ |f(x_0)| > M. \end{aligned}$$

2. 极限不存在的常见情况：
   (a). 无界函数.
   (b). 有界函数但是极限不存在，例：$y = \sin x$.

定理 1.11

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小，反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

♡

1.5 极限运算法则

定理 1.12
两个无穷小的和是无穷小.

笔记 用数学归纳法可证：有限个无穷小之和也是无穷小.

定理 1.13
有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例题 1.1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0.$$

笔记 常数的极限是常数本身.

推论 1.3
常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1.4
有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 1.14
如果 $\lim f(x)=A$、$\lim g(x)=B$（即，若两函数极限存在），那么：

1. 和（或差）的极限等于极限的和（或差）：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;
2. 积的极限等于极限的积：$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;
3. 商的极限等于极限的商：（若又有 $B\neq 0$）

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$$

推论 1.5
如果 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，那么

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$$

笔记 这是因为 $\lim c=c$

推论 1.6
如果 $\lim f(x)$ 存在，而 u 是正整数，那么

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$$

笔记 幂的极限等于极限的幂.

定理 1.15
设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=B$$

那么

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;
3. 当 $y_n \neq 0 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ 且 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$

定理 1.16

如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，而 $\lim\varphi(x) = A$，$\lim\psi(x) = B$，那么 $A \geqslant B$

定理 1.17 (复合函数的极限运算法则)

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} = A$，且存在 $\delta_0 > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A$$

定理 1.18

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)]$ 不存在.

第 2 章 导数与微分

错题集

1. 你是谁

结论 我是 IKun.

假设 我不是 IKun.

性质 你是谁呀

解 你是谁

例题 2.1 你是谁

问题 2.1 你是谁呀

练习 2.1 你是谁

定理 2.1
你是谁

引理 2.1
你是谁

推论 2.1
你是谁

公理 2.1
你是谁

第 3 章 微分中值定理与导数的应用

第 4 章 不定积分

第 5 章 定积分

第 6 章 定积分的应用

第 7 章 微分方程

附录 I 常用的麦克劳林 (Maclaurin) 公式 (佩亚洛余项)

1.
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

3.
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

4.
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

5.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

6.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

7.
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

8.
$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

附录 II 常用的导数公式

1. $(\, C\,)' = 0.$
2. $(\, x^{\mu}\,)' = \mu x^{\mu-1}.$
3. $(\, \sin x\,)' = \cos x.$
4. $(\, \cos x\,)' = -\sin x.$
5. $(\, \tan x\,)' = \sec^2 x.$
6. $(\, \cot x\,)' = -\csc^2 x.$
7. $(\, \sec x\,)' = \sec x \cdot \tan x.$
8. $(\, \csc x\,)' = -\csc x \cdot \tan x.$
9. $(\, a^x\,)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 0).$
10. $(\, e^x\,)' = e^x.$
11. $(\, \log^a x\,)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1).$
12. $(\, \ln x\,)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\, \ln |x|\,)' = \dfrac{1}{x}.$
13.
$$(\, \arcsin x\,)' = \frac{1}{1-x^2}$$
.
14.
$$(\, \arccos x\,)' = -\frac{1}{1-x^2}$$
.
15.
$$(\, \arctan x\,)' = \frac{1}{1+x^2}$$
.
16.
$$(\, \operatorname{arccot} x\,)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
.
17.
$$(\, \ln|\sin x| + C\,)' = \cot x$$
.
18.
$$(\, -\ln|\cos x| + C\,)' = \tan x$$
.
19.
$$\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$
.
20.
$$(\, \ln|\sec x + \tan x|\,)' = \sec x$$
.

21.

$$(\ln|\csc x - \cot x|)' = \csc x$$

.

22.

$$(\sqrt{a^2+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

.

23.

$$(\sqrt{a^2-x^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

.

24. $(\operatorname{ch} x + C)' = \operatorname{sh} x.$

25. $(\operatorname{sh} x + C)' = \operatorname{ch} x.$

注：

$$\text{双曲正弦：} \operatorname{sh} x = \frac{e^2 - e^2}{2}$$

$$\text{双曲余弦：} \operatorname{ch} x = \frac{e^2 + e^2}{2}$$

附录 III 常用的三角函数公式

1. 常用三角函数关系
   (a). 倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\sin\alpha\cdot\csc\alpha=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.
   (b). 商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$、$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
   (c). 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$、$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$、$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$.
2. 诱导公式（奇变偶不变符号看象限）
   (a). $\sin(2k\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha\quad\cos(2k\pi\pm\alpha)=+\cos\alpha$
   $\tan(2k\pi\pm\alpha)=\pm\tan\alpha\quad\cot(2k\pi\pm\alpha)=\pm\cot\alpha$
   (b). $\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha\quad\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$
   $\tan(\pi\pm\alpha)=\pm\tan\alpha\quad\cot(\pi\pm\alpha)=\pm\cot\alpha$
   (c). $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\quad\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
   $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha\quad\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
   注：三角函数的**奇偶性**
   (d). $\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=+\cos\alpha\quad\cos(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$
   $\tan(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\cot\alpha\quad\cot(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\tan\alpha$
3. 二角和差公式
   (a). $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
   (b). $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\mp\cos\alpha\cdot\sin\beta$.
   (c). $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.
4. 积化和差公式
   (a). $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.
   (b). $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.
   (c). $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.
   (d). $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.
5. 和差化积公式
   (a). $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
   (b). $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
   (c). $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
   (d). $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
6. 二倍角公式
   (a). $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$.
   (b). $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha$.
   (c). $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.
7. 降幂公式
   (a). $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.
   (b). $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.
8. 半角公式
   (a). $\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.
   (b). $\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

9. 辅助角公式

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha \pm \varphi),\ \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

.

10. 万能公式

(a).

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

.

(b).

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

.

(c).

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

.

附录 IV 基本初等函数的图形

- 幂函数

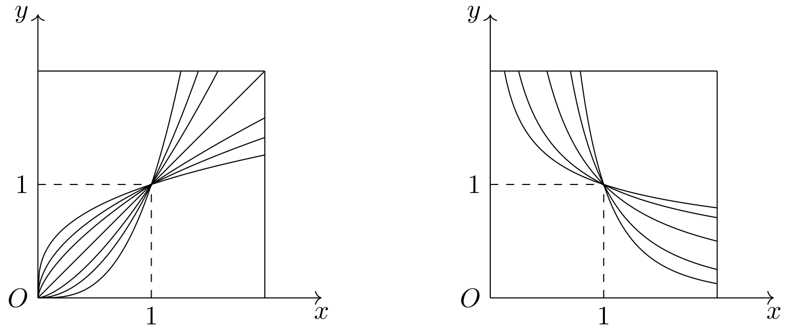

图 IV.1: $y = x^{\mu}$

- 指数函数

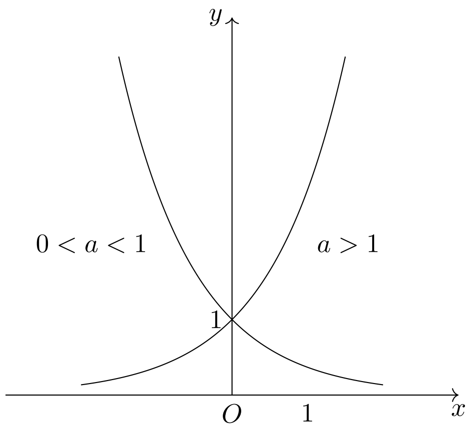

图 IV.2: $y = a^{x}$

- 对数函数

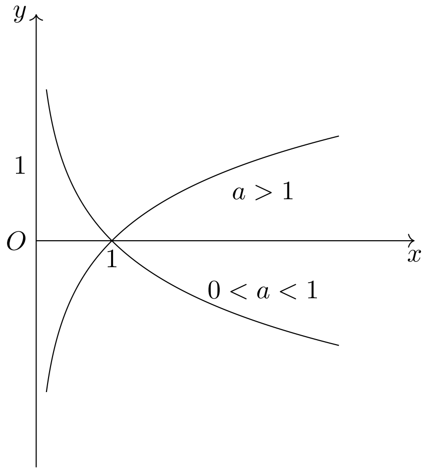

图 IV.3: $y = \log_{a} x$

- 三角函数

1. 正弦函数

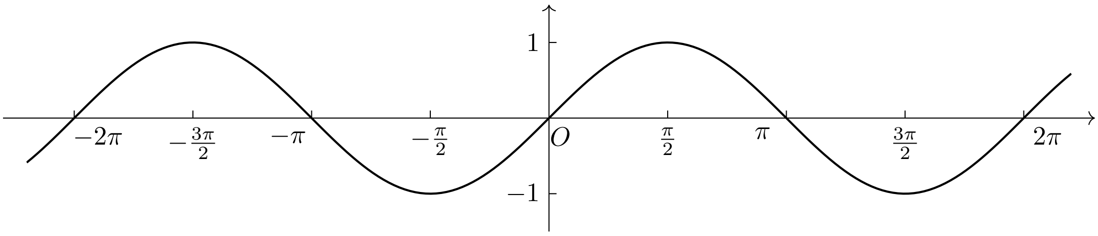

图 IV.4: $y = \sin x$

2. 余弦函数

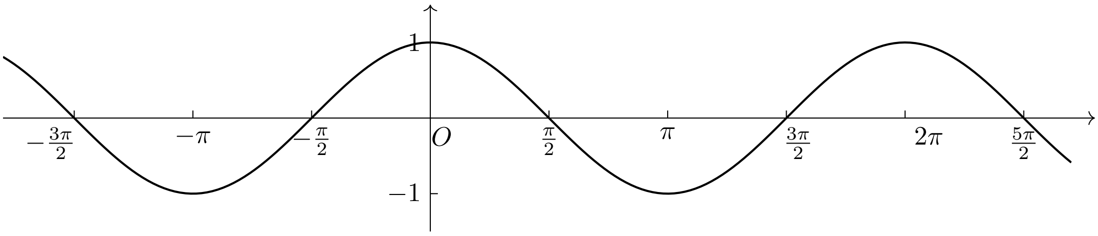

图 IV.5: $y = \cos x$

3. 正切函数

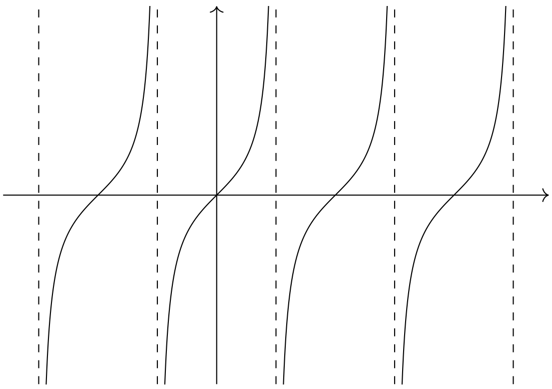

图 IV.6: $y = \tan x$

4. 余切函数

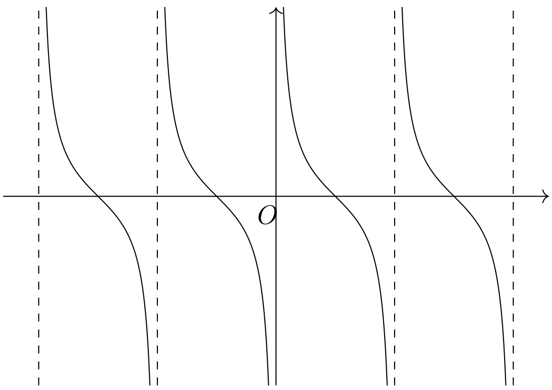

图 IV.7: $y = \cot x$

5. 正割函数

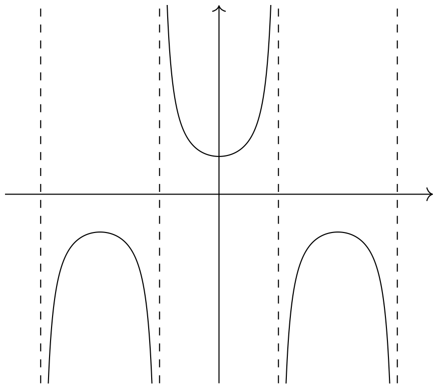

图 **IV.8:** $y = \sec x$

6. 余割函数

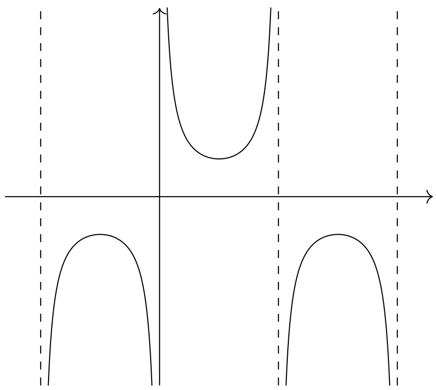

图 **IV.9:** $y = \csc x$

- 反三角函数
  1. 反正弦函数

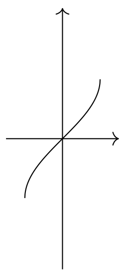

图 **IV.10:** $y = \arcsin x$

2. 反余弦函数

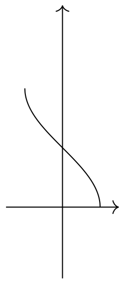

图 IV.11: $y = \arccos x$

3. 反正切函数

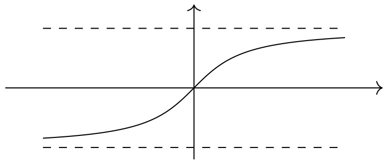

图 IV.12: $y = \arctan x$

4. 反余切函数

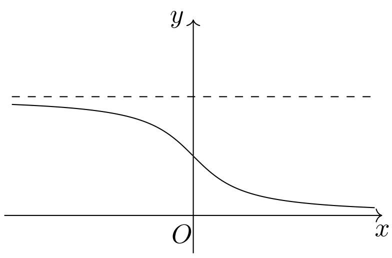

图 IV.13: $y = \operatorname{arccot} x$

附录 V 几种常见的曲线