高等数学笔记：基于 LATEX 的个人知识总结

Advanced Math Notes: Based on LATEX

作者：彭正萧 & PENG Zhengxiao

组织：西北农林科技大学

时间：始于 2023 年 11 月 19 日

版本：第七版 上册（同济大学数学系 编）

模板：ElegantLaTeX

不要以为抹消过去，重新来过，即可发生什么改变。——比企谷八幡

目录

第 1 章 函数与极限

1.1 映射与函数

本节主要介绍映射、函数及有关概念，函数的性质与运算等。

1.1.1 映射

定义 1.1

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

.

♣

笔记

1. 构成映射的**三要素**：
   (a). 集合 X，即**定义域**$D_f = X$.
   (b). 集合 Y，即**值域**的范围 $R_f \subset Y$.
   (c). **对应法则** f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.
2. 可以一对多，不能多对一：对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.
3. 映射又称算子，根据 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称，例如：
   (a). **泛函**：从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函。
   (b). **变换**：从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换。
   (c). **函数**：从实数集 $\mathbb{R}$（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数。

定义 1.2 (逆映射)

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 $f(x)y$。于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y) = x$，这 x 满足 $f(x) = y$。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = X$。

♣

笔记 只有单射才存在逆映射。

定义 1.3 (复合映射)

设有两个映射

$$g : X \to Y_1, \qquad f : Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 个 f 构成的**复合映射**，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g : X \to Z,\ (f \circ g)(x) = f[g(x)],\ x \in X$$

♣

笔记

1. $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义。
2. **即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同。**

1.1.2 函数

定义 1.4 (函数的概念)

设数集 $D \subset \mathbb{R}$，则称映射 $f : D \to \mathbb{R}$，为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$。

♣

笔记

1. f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示自变量 x 对应的函数值。
2. 可以直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y = y(x)$。
3. 两个函数相同的**充分必要条件**是：两个函数的**定义域**相同，**对应法则**也相同。

定义 1.5 (函数的有界性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$。如果存在数 K_1，使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(X)$ 在 X 上的一个上界。如果存在数 K_2，使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。如果存在正数 M，使得

$$|\, f(x)\,| \leqslant M$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|\, f(x_1)\,| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界。

♣

笔记 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的**充分必要条件**是它在 X 上既有上界又有下界。

定义 1.6 (函数的单调性)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$。如果对于区间

♣

附录 I 常用的麦克劳林 (Maclaurin) 公式 (佩亚洛余项)

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

5. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

6. $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

7. $$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

8. $$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

附录 II 常用的导数公式

1. $(\, C \,)' = 0$.
2. $(\, x^{\mu} \,)' = \mu x^{\mu - 1}$.
3. $(\, \sin x \,)' = \cos x$.
4. $(\, \cos x \,)' = -\sin x$.
5. $(\, \tan x \,)' = \sec^2 x$.
6. $(\, \cot x \,)' = -\csc^2 x$.
7. $(\, \sec x \,)' = \sec x \cdot \tan x$.
8. $(\, \csc x \,)' = -\csc x \cdot \tan x$.
9. $(\, a^x \,)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$.
10. $(\, e^x \,)' = e^x$.
11. $(\, \log^a x \,)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$.
12. $(\, \ln x \,)' = \dfrac{1}{x}, \quad (\, \ln |x| \,)' = \dfrac{1}{x}$.
13. $$(\, \arcsin x \,)' = \frac{1}{1 - x^2}$$
.
14. $$(\, \arccos x \,)' = -\frac{1}{1 - x^2}$$
.
15. $$(\, \arctan x \,)' = \frac{1}{1 + x^2}$$
.
16. $$(\, \operatorname{arccot} x \,)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$
.
17. $$(\, \ln |\sin x| + C \,)' = \cot x$$
.
18. $$(\, -\ln |\cos x| + C \,)' = \tan x$$
.
19. $$\ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right)$$
.
20. $$(\, \ln |\sec x + \tan x| \,)' = \sec x$$
.

21.

$$(\ln|\csc x - \cot x|)' = \csc x$$

.

22.

$$(\sqrt{a^2 + x^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

.

23.

$$(\sqrt{a^2 - x^2})' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

.

24. $(\operatorname{ch} x + C)' = \operatorname{sh} x$.

25. $(\operatorname{sh} x + C)' = \operatorname{ch} x$.

注：

$$\text{双曲正弦：} \operatorname{sh} x = \frac{e^2 - e^2}{2}$$

$$\text{双曲余弦：} \operatorname{ch} x = \frac{e^2 + e^2}{2}$$

附录 III 常用的三角函数公式

1. 常用三角函数关系
   (a). 倒数关系：$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\sin\alpha\cdot\csc\alpha=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$.
   (b). 商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$、$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
   (c). 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$、$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$、$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$.
2. 诱导公式（奇变偶不变符号看象限）
   (a). $$\begin{aligned}&\sin(2k\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha && \cos(2k\pi\pm\alpha)=+\cos\alpha\\&\tan(2k\pi\pm\alpha)=\pm\tan\alpha && \cot(2k\pi\pm\alpha)=\pm\cot\alpha\end{aligned}$$
   (b). $$\begin{aligned}&\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha && \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha\\&\tan(\pi\pm\alpha)=\pm\tan\alpha && \cot(\pi\pm\alpha)=\pm\cot\alpha\end{aligned}$$
   (c). $$\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin\alpha && \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\&\tan(-\alpha)=-\tan\alpha && \cot(-\alpha)=-\cot\alpha\end{aligned}$$ 注：三角函数的**奇偶性**
   (d). $$\begin{aligned}&\sin(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=+\cos\alpha && \cos(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\sin\alpha\\&\tan(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\cot\alpha && \cot(\tfrac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\tan\alpha\end{aligned}$$
3. 二角和差公式
   (a). $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
   (b). $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\mp\cos\alpha\cdot\sin\beta$.
   (c). $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.
4. 积化和差公式
   (a). $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.
   (b). $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$.
   (c). $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.
   (d). $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.
5. 和差化积公式
   (a). $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
   (b). $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
   (c). $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
   (d). $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
6. 二倍角公式
   (a). $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$.
   (b). $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-\sin^2\alpha$.
   (c). $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.
7. 降幂公式
   (a). $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.
   (b). $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.
8. 半角公式
   (a). $\tan\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.
   (b). $\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

9. 辅助角公式

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\varphi),\ \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

.

10. 万能公式

(a).

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

.

(b).

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

.

(c).

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

.

附录 IV 基本初等函数的图形

- 幂函数

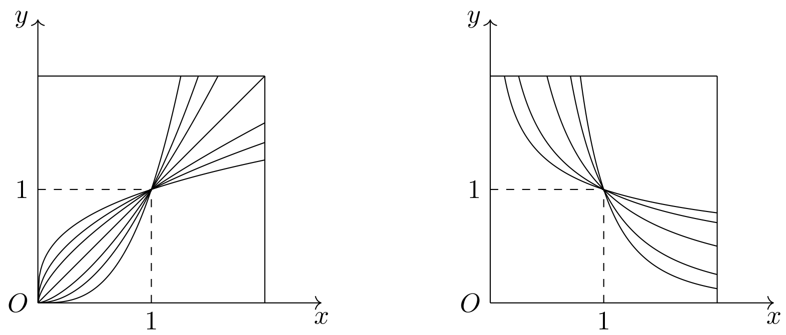

图 IV.1: $y = x^{\mu}$

- 指数函数

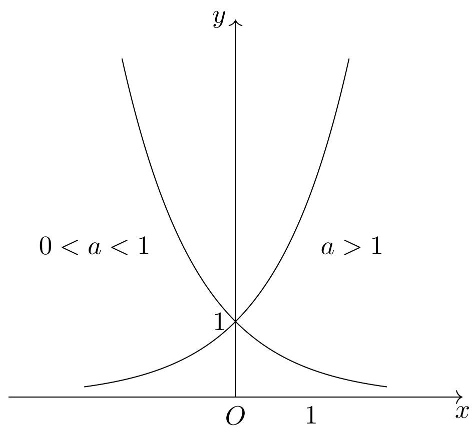

图 IV.2: $y = a^{x}$

- 对数函数

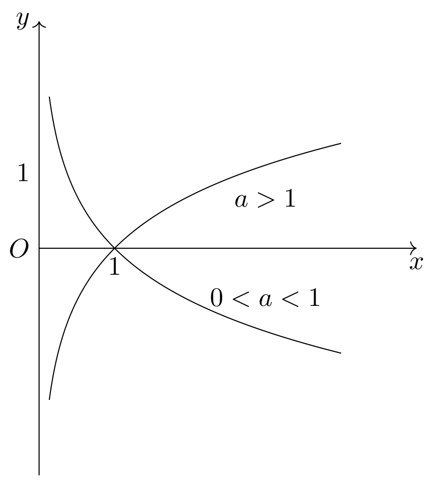

图 IV.3: $y = \log_a x$

- 三角函数

1. 正弦函数

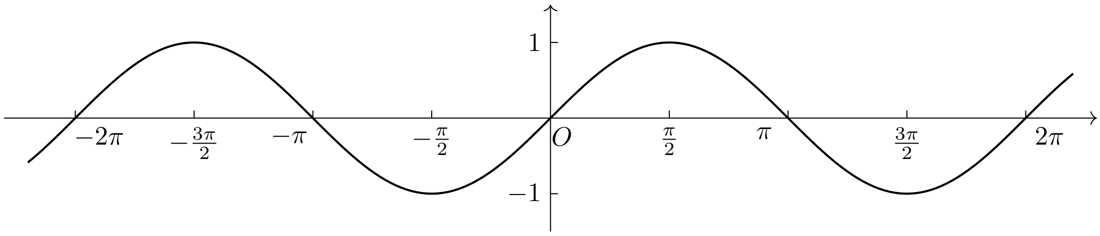

图 IV.4: $y = \sin x$

2. 余弦函数

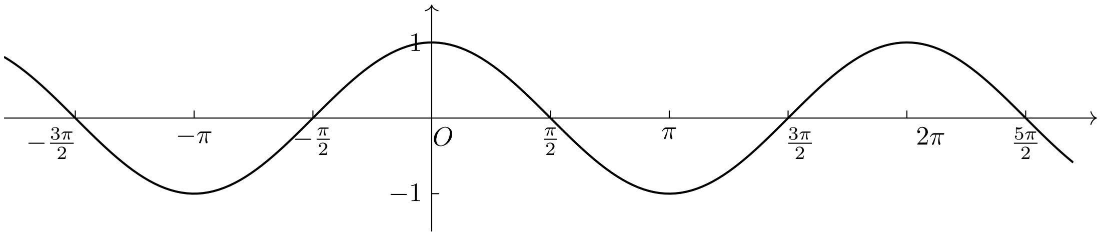

图 IV.5: $y = \cos x$

3. 正切函数

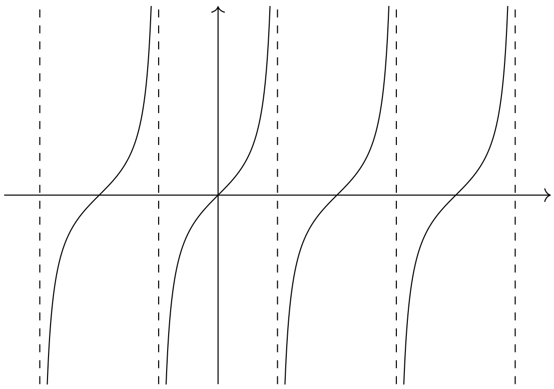

图 IV.6: $y = \tan x$

4. 余切函数

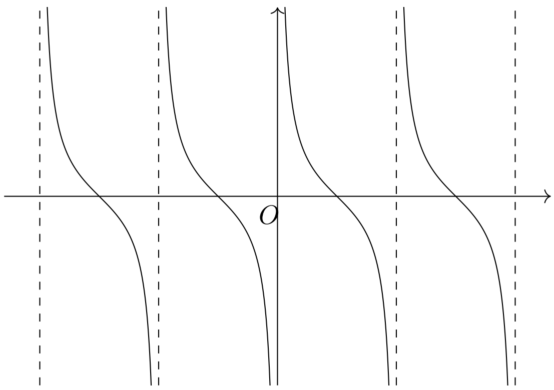

图 IV.7: $y = \cot x$

5. 正割函数

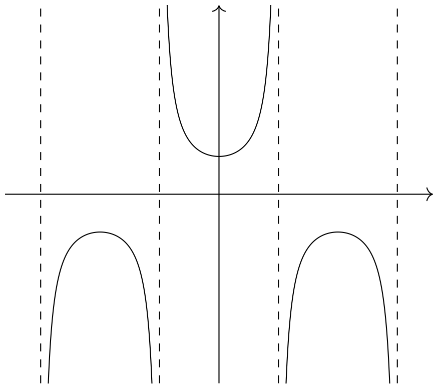

图 IV.8: $y = \sec x$

6. 余割函数

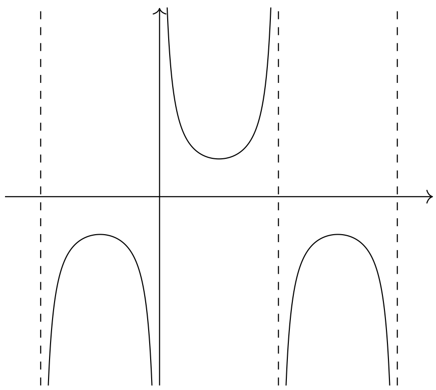

图 IV.9: $y = \csc x$

- 反三角函数

1. 反正弦函数

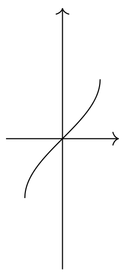

图 IV.10: $y = \arcsin x$

2. 反余弦函数

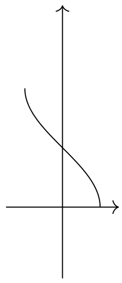

图 IV.11: $y = \arccos x$

3. 反正切函数

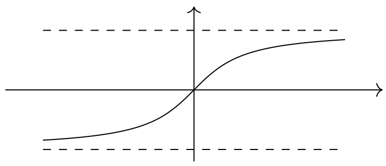

图 IV.12: $y = \arctan x$

4. 反余切函数

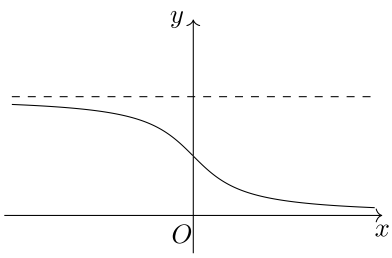

图 IV.13: $y = \operatorname{arccot} x$

附录 V 几种常见的曲线