Danmarks Tekniske Universitet

Kursusnavn	Introduktion til Intelligente Systemer
Kursusnummer	02461
Hjælpemidler	Alle hjælpemidler er tilladt
Varighed	2 timer
Vægtning	Alle delopgaver vægtes ens

Indhold

Opgave A: Nedbør 2

Opgave B: Personlige værdier 3

Opgave C: Unikke værdier 5

Opgave D: Frit fald 7

Opgave E: Gitterverden 9

Besvarelse af opgaverne

Alle spørgsmål skal besvares med et entydigt resultat, som skal angives med understregning sidst i hver besvarelse. Besvarelsen skal altid underbygges med relevante betragtninger og/eller beregninger. Det skal klart fremgå hvilke teorier og formler der tages udgangspunkt i, og alle relevante mellemregninger skal medtages.

Opgave A Nedbør

Vi måler hver dag nedbørsmængden i en have. I løbet af de seneste 365 dage har det regnet 180 dage og været tørt de resterende 185 dage. Andelen af dage det har regnet er dermed $p = \frac{180}{365} \approx 49\%$. Den gennemsnitlige nedbørsmængde pr. dag er målt til $m_x = 1.9$ [mm], og variansen er beregnet til $s_x^2 = 9.5$ [mm^2].

Spørgsmål A.1: Beregn et 95% konfidensinterval for andelen af regnvejrsdage på et år og angiv grænserne for intervallet.

Svar A.1: Et 95% konfidensinterval for proportionen af regnvejrsdage kan beregnes som

$$p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.49 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.49(1-0.49)}{365}} \approx 0.49\% \pm 0.05$$

Grænserne for intervallet er således [44%, 54%].

Spørgsmål A.2: Hvis vi i stedet havde talt antallet af regnvejrsdage i en 10-årig periode, hvordan ville bredden af konfidensintervallet da omtrentligt være i forhold til bredden af intervallet beregnet ovenfor?

Svar A.2: Med en større stikprøvestørrelse vil konfidensintervallet blive smallere. Da kvadratroden af stikprøvestørrelsen indgår i nævneren, vil intervallet omtrentligt være $\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.32$ gange så bredt.

Ifølge Danmarks Meteorologiske Institut er den genemsnitlige nedbørsmængde pr. dag i Danmark præcis 2.1 [mm].

Spørgsmål A.3: Kan du på baggrund af målingerne fra haven konkludere at der falder mindre regn i haven end der i gennemsnit gør i Danmark?

Svar A.3: Et 95% konfidensinterval for nedbørsmængden i haven kan beregnes som

$$m_x \pm 1.96 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 1.9 \pm 1.96 \cdot \frac{\sqrt{9.5}}{\sqrt{365}} = 1.9 \pm 0.32$$

Intervallets grænser er således [1.6, 2.2], og den gennemsnitlige nedbørsmængde i Danmark ligger inden for dette interval. Vi kan ikke konkludere at nedbørsmængden i haven er lavere en gennemsnittet i Danmark.

Vi vil nu bestemme den gennemsnitlige nedbørsmængde pr. dag i en anden have et andet sted i landet, og vi ønsker et 95% konfidensinterval med en fejlmargin på ± 0.5 [mm]. Vi vil derfor måle nedbørsmængden på n tilfældigt udvalgte dage.

Spørgsmål A.4: Hvilken stikprøvestørrelse n vil du anbefale?

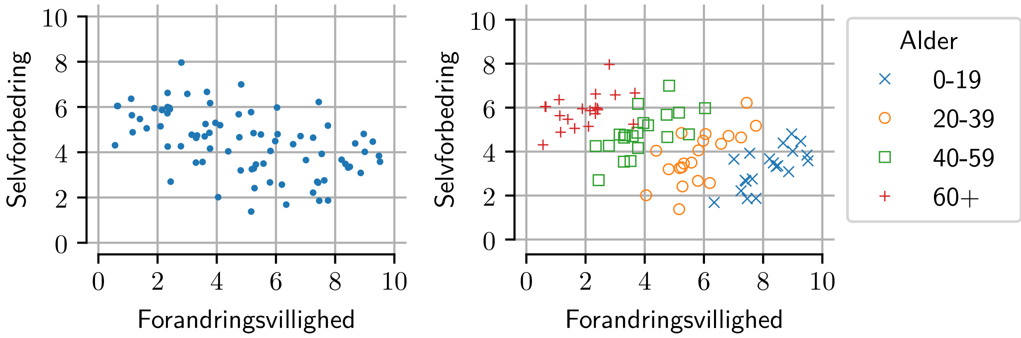
Svar A.4: Ved at løse for n i udtrykket for konfidensintervallet fås

$$n = 1.96^2 \cdot \frac{s_x^2}{e^2}$$

Da vi ikke kender variansen af nedbørsmængden i den nye have, kan vi vælge at indsætte vores bedste gæt i form af variansen fra den gamle have. Vi får dermed en stikprøvestørrelse på

$$n = 1.96^2 \cdot \frac{9.5}{0.5^2} \approx = 146 \text{ [dage]}.$$

Figurerne nedenfor viser to kvantitative målinger af de personlige værdier *forandringsvillighed* (F) og *selvforbedring* (S) som måles på en skala fra 0 til 10. Plottene viser målinger for 80 personer (taget fra en kunstig data-population). På plottet til højre er data yderligere inddelt i fire aldersgrupper.



Hvis vi kun ser på aldersgruppen 60+, så kan en lineær regressionsmodel bestemmes til

$$S = 4.6 + 0.6 \cdot F$$

Spørgsmål B.1: Hvad vil værdien af selvforbedring (S) være ifølge ovenstående model for en 60+ årig med en forandringsvillighed på $F = 6$?

Svar B.1: Selvforbedringen kan beregnes som

$$S = 4.6 + 0.6 \cdot F = 4.6 + 0.6 \cdot 6 = \underline{8.2}$$

Vi ønsker nu at forudsige selvforbedring ud fra forandringsvillighed i en samlet model for alle aldersgrupper ved hjælp af en lineær regression

$$S = w_0 + w_1 \cdot F$$

Spørgsmål B.2: Giv ud fra figuren til venstre et groft estimat af modellens parametre, w_0 og w_1.

Svar B.2: En lineær regressionslinje vil omtrentligt gå gennem punkterne ($F_0 = 0, S_0 = 6$) og ($F_1 = 10, S_1 = 3$). Ud fra disse punkter kan parametrene bestemmes til

$$w_0 \approx F_0 = \underline{6}, \qquad w_1 \approx \frac{S_1 - S_0}{F_1 - F_0} = \frac{3 - 6}{10 - 0} = \underline{-0.3}$$

(Svar i intervallet $4.5 \leq w_0 \leq 8$ og $-0.6 \leq w_1 \leq -0.2$ anses for korrekt).

Vi vil nu betragte en lineær regressionsmodel som benytter både forandingsvillighed (F) og aldersgrupe til at forudsige selvforbedring (S). I den forbindelse indfører vi fire binære variable A_{0-19}, A_{20-39}, A_{40-59}, og A_{60+}. Hver af disse variable er lig 1 for den aldersgruppe en person tilhører og ellers 0. For eksempel vil en person på 17 år have værdierne $A_{0-19} = 1$ og $A_{20-39} = A_{40-59} = A_{60+} = 0$. Vi opstiller nu en lineær regressionsligning

$$S = a \cdot F + b_1 \cdot A_{0-19} + b_2 \cdot A_{20-39} + b_3 \cdot A_{40-59} + b_4 \cdot A_{60+}$$

Spørgsmål B.3: Giv udfra figuren til højre et groft estimat af modellens hældningskoefficient a.

Svar B.3: Denne model har en hældningskoefficient der er ens for alle fire aldersgrupper, mens hver aldersgruppe har sit eget skæringspunkt. Derfor vil hældningskoefficienten omtrent være lig med den der er angivet i første delopgave for aldersgruppen 60+, nemlig $\underline{a = 0.6}$.

Vi kan også finde et estimat med udgangspunkt i en af aldersgrupperne, fx. 20–39. Her vurderes det visuelt at en regressionslinje omtrentligt vil gå gennem punkterne $(F_0 = 4, S_0 = 3)$ og $(F_1 = 8, S_1 = 5)$. Ud fra disse punkter kan parametrene bestemmes til

$$a = \frac{5-3}{8-4} \approx \underline{0.5}$$

(Svar i intervallet $0.2 \leq a \leq 1$ anses for korrekt).

Figuren til venstre viser at personer med relativt høj forandringsvillighed typisk har relativt lav selvforbedring.

Spørgsmål B.4: Hvad kan vi ud fra data sige om henholdvis korrelationen og den kausale sammenhæng mellem forandringsvillighed og selvforbedring?

Svar B.4: For den samlede population er der en negativ korrelation mellem F og S. Data siger i dette tilfælde kun noget om den statistiske sammenhæng, og vi kan ikke sige noget om den kausale sammenhæng. Vi bemærker også at der i hver af de viste aldersgrupper er der en positiv korrelation mellem F og S, hvilket underbygger at vi ikke kan sige noget om den kausale sammenhæng.

B

Opgave C Unikke værdier

Den følgende funktion tager som input en liste, `values`, og returnerer en liste med de unikke værdier i input-listen.

```
def find_unique(values):
    unique_values = []
    for x in values:
        if not x in unique_values:
            unique_values.append(x)
    return unique_values
```

Hver sammenligning og hver tilføjelse til en liste tæller som 1 operation, og længden af listen `values` er n. Det vil sige at tidskompleksiteten af operationen `x not in unique_values` er k, hvor k er længden af listen `unique_values`, og tidskompleksiteten af operationen `unique_values.append(x)` er 1.

Spørgsmål C.1: Hvad skal gælde for listen `values` for at opnå et best-case tilfælde, og hvad er best-case tidskompleksiteten $T(n)$ af funktionen målt i antal operationer?

Svar C.1: Best-case tilfældet opnås når alle værdier på listen er identiske, da listen `unique_values` således kun får længde $k = 1$.

Første værdi x sammenlignes med en tom liste (0 operationer) og tilføjes til listen af unikke værdier (1 operation). De resterende $n - 1$ værdier sammenlignes med en liste med længde $k = 1$ (1 operation) og skal ikke tilføjes da de er identiske (0 operationer). Samlet set bliver best-case tidskompleksiteten således $T(n) = n$.

Spørgsmål C.2: Hvad skal gælde for listen `values` for at opnå et worst-case tilfælde, og hvad er worst-case tidskompleksiteten $T(n)$ af funktionen målt i antal operationer?

Svar C.2: Worst-case tilfældet opnås når alle værdier på listen er forskellige, da listen `unique_values` således bliver maksimal.

Første værdi x sammenlignes med en tom liste (0 operationer) og tilføjes til listen af unikke værdier (1 operation). Næste værdi sammenlignes med en liste med længde $k = 1$ (1 operation) og tilføjes til listen af unikke værdier (1 operation). Samlet set skal der således udføres $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ operationer, og worst-case tidskompleksiteten bliver således $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Spørgsmål C.3: Hvad er worst-case kompleksiteten i store-O notation?

Svar C.3: Da største led i worst-case tidskompleksiteten er proportionalt med n^2 er kompleksiteten $O(n^2)$.

Den følgende funktion udfører samme opgave som `find_unique` men benytter en anden datastruktur til at gemme de unikke værdier.

```
def fast_find_unique(values):
    unique_set = set()
    for x in values:
        if not x in unique_set:
            unique_set.add(x)
    return unique_set
```

Denne datastruktur, kaldet `set`, har den egenskab at kompleksiteten af både operationen `x not in unique_set` og operationen `unique_set.add(x)` er $O(1)$.

Spørgsmål C.4: Hvad er worst-case kompleksiteten af funktionen `fast_find_unique` i store-O notation?

Svar C.4: Det antal operationer der skal udføres for hver værdi i listen `values` er nu af kompleksitet $O(1)$ for hvert af de n elementer, og den samlede kompleksitet bliver således $\underline{O(n)}$.

Opgave D Frit fald

Ifølge Newton's love er den tid t det tager et objekt at falde fra en højde h [m] givet ved formlen

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

hvor g er gravitationskonstanten. I et forsøg har vi målt den tid det tager et objekt at falde fra $N = 11$ forskellige højder, $h \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ [m] (se figuren til venstre nedenfor). Vi ønsker nu at bestemme sammenhængen mellem højde og falde-tid (dvs. bestemme gravitationskonstanten g) ud fra en lineær regression.

Spørgsmål D.1: Vis hvorledes formlen for falde-tiden kan omskrives til standard-formen for en lineær regression, $t = w_0 + w_1 \cdot x$, og angiv udtrykkene for w_0, w_1 (udtrykt ud fra g) og x (udtrykt ud fra h).

Svar D.1: Vi kan for eksempel omskrive formlen som

$$t = \sqrt{\tfrac{2}{g}} \cdot \sqrt{h} = w_0 + w_1 \cdot x$$

og herfra kan vi se at

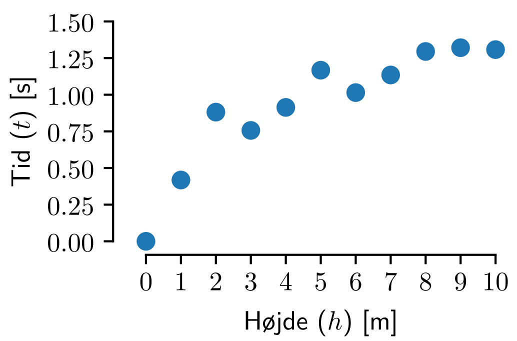
$$\underline{w_0 = 0, \quad w_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}, \quad x = \sqrt{h}}$$

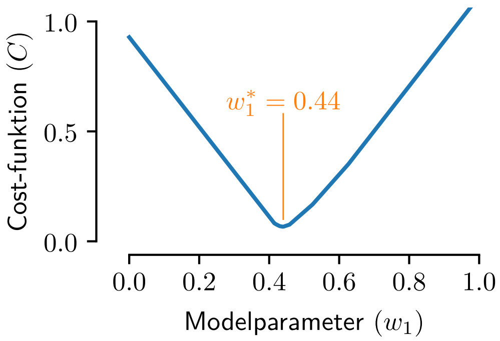
Ækvivalent kan vi gange x med en konstant c og dividere w_1 med samme konstant.

I det følgende benytter vi $w_0 = 0$ og ser på regressions-ligningen $t = w_1 \cdot x$ hvor $x = \sqrt{h}$. Vi ønsker at benytte absolut-værdien af forskellen mellem den målte og estimerede faldetid som loss-funktion—det vil sige at vi ønsker at minimere følgende cost

$$C(w_1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |t_i - w_1 \cdot x_i|$$

Et plot af cost-funktionen, som har sit minimum i $w_1^* = 0.44$ ses i figuren nedenfor til højre.





Spørgsmål D.2: Hvad er ifølge den optimale model den estimerede værdi af gravitationskonstanten g?

Svar D.2: Vi har fundet udtrykket $w_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}$, hvori vi kan isolere g og indsætte den optimale parameter-værdi $w_1^* = 0.44$:

$$g = \frac{2}{(w_1^*)^2} = \frac{2}{0.44^2} \approx \underline{10.3}$$

Spørgsmål D.3: Giv ud fra figuren et groft estimat af værdien af gradienten af cost-funktionen for parameterværdien $w_1 = 0.75$.

Svar D.3: Vi kan aflæse gradienten i figuren til højre som cost-funktionens hældning i punktet $w_1 = 0.75$. Når vi bevæger os omkring 0.5 enhed til højre på w_1-aksen svarer det til at vi går ca. 1 enhed op på C-aksen, og gradienten kan således estimeres til ca. $\underline{\nabla C \approx 2}$.

Det oplyses endvidere at summen af de observerede x-værdier er beregnet til $\sum_{i=1}^{N} x_i = 22.47$

Spørgsmål D.4: Beregn gradienten af cost-funktionen med hensyn til modellens parameter i punktet $w_1 = 0$ (som en tal-værdi). Hint: $\frac{d|z|}{dz} = \frac{z}{|z|}$.

Svar D.4: Gradienten er givet ved

$$\nabla C(w_1) = \frac{\partial C}{\partial w_1} = \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |t_i - w_1 \cdot x_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} -\frac{t_i - w_1 \cdot x_i}{|t_i - w_1 \cdot x_i|} x_i$$

Vi indsætter nu $w_1 = 0$ og får

$$\nabla C(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} -\frac{t_i}{|t_i|} x_i$$

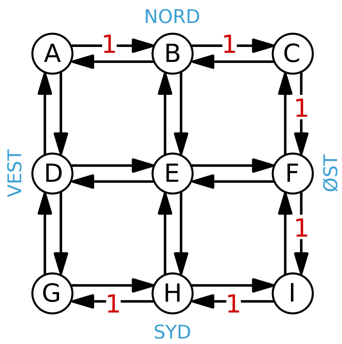
og da alle værdier t_i er positive kan vi skrive

$$\nabla C(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} -x_i = \frac{1}{11} \cdot (-22.47) \approx \underline{-2.04}$$

D

Opgave E Gitterverden

Figuren nedenfor viser en gitterverden med 9 tilstande (A–I). Pilene i figuren viser de mulige transitioner mellem tilstandene, og et tal på pilen viser den tilhørende belønning (reward). Transitioner der er angivet med en pil uden et tal har en belønning på nul. Tabellen nedenfor viser kvaliteten (quality) for hver af de mulige transitioner fundet via tabulær q-læring med en discount-faktor på $\gamma = 0.9$.



	Nord	Syd	Øst	Vest
A	—	6.66	8.23	—
B	—	?	8.03	7.40
C	—	7.81	—	7.23
D	7.40	6.00	6.50	—
E	7.23	6.30	6.81	6.66
F	7.03	7.57	—	6.50
G	6.66	—	6.30	—
H	6.50	—	6.57	7.00
I	6.81	—	—	7.30

Spørgsmål E.1: Hvad er den optimale handling (action) hvis vi står i tilstand E?

Svar E.1: Den optimale handling kan aflæses som den handling med højest værdi i q-tabellen. For tilstand E er højeste værdi 7.23 for handlingen <u>Nord</u>.

I q-tabellen mangler værdien for $q(\mathrm{B}, \mathrm{Syd})$.

Spørgsmål E.2: Beregn $q(\mathrm{B}, \mathrm{Syd})$.

Svar E.2: At gå mod syd fra tilstand B leder til tilstand E. Vi kan derfor beregne

$$q(\mathrm{B}, \mathrm{Syd}) = R(\mathrm{B}, \mathrm{Syd}) + \gamma \cdot \max\left(q(\mathrm{E}, a)\right) = 0 + 0.9 \cdot \max(\{7.23, 6.30, 6.81, 6.66\}) = 0.9 \cdot 7.23 \approx \underline{6.51}$$

Spørgsmål E.3: Hvis vi kørte q-lærings-algoritmen med en ændret discount-faktor på $\gamma = 0.99$, hvad ville der så ske med med tallene i q-tabellen? Vil de blive større, mindre, eller forblive uændret?

Svar E.3: Tallene i q-tabellen betegner den discountede kumulative belønning. Hvis γ forøges til 0.99 vil fremtidig belønning vægte højere og den kumulative belønning vil <u>blive større</u>.

Spørgsmål E.4: Hvis vi i stedet for q-læring havde benyttet *value iteration* til at løse problemet, hvad ville værdien af tilstand A, $v(\mathrm{A})$ være?

Svar E.4: Tallene i q-tabellen er, ligesom tilstands-værdierne i value iteration, et udtryk for den discountede kumulative reward. Derfor kan værdien af tilstand A aflæses som den højeste q-værdi for tilstand A

$$v(\mathrm{A}) = \max(\{6.66, 8.32\}) = \underline{8.23}$$

At dette er tilfældet kan ses ud fra definitionen af quality:

$$q(s, a) = r(s, a) + \gamma \cdot \max_{a'} q(s', a').$$

Hvis vi maksimerer over a på begge sider af lighedstegnet fås

$$\max_a q(s, a) = \max_a r(s, a) + \gamma \cdot \max_{a'} q(s', a')$$

og betegner vi $\max_a q(s,a)$ som $v(a)$ har vi

$$v(s) = \max_a r(s,a) + \gamma \cdot v(s')$$

som er den rekursive definition af value.

E