

Claude Deschamps | François Moulin | Yoann Gentric  
Emmanuel Delsinne | François Lussier | Chloé Mullaert  
Serge Nicolas | Jean Nougayrède | Claire Tête

# MATHS

MP/MP\*-MPI/MPI\*

TOUT-EN-UN

6<sup>e</sup> édition

DUNOD

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

© Dunod, 2022  
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)  
ISBN 978-2-10-084737-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> al, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	ix
<b>Mode d'emploi</b>	x
<b>Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres</b>	1
I Anneaux, arithmétique . . . . .	2
II Anneau des polynômes à une indéterminée . . . . .	12
III Algèbres . . . . .	17
IV Approfondissements sur les groupes . . . . .	20
Exercices . . . . .	32
<b>Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire</b>	43
I Somme finie de sous-espaces vectoriels . . . . .	44
II Écriture par blocs . . . . .	50
III Sous-espaces stables et endomorphismes induits . . . . .	57
IV Polynômes d'endomorphismes / de matrices carrées . . . . .	60
Exercices . . . . .	74
<b>Chapitre 3. Réduction des endomorphismes</b>	91
I Éléments propres . . . . .	92
II Polynôme caractéristique . . . . .	100
III Diagonalisation . . . . .	109
IV Trigonalisation . . . . .	115
Exercices . . . . .	126
<b>Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien</b>	157
I Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	158
II Matrices orthogonales . . . . .	160
III Endomorphismes autoadjoints . . . . .	163
IV Isométries vectorielles . . . . .	168
Exercices . . . . .	183
<b>Chapitre 5. Espaces vectoriels normés</b>	199
I Généralités . . . . .	200
II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . . .	211
III Topologie d'un espace vectoriel normé . . . . .	215
IV Comparaison de normes . . . . .	225
Exercices . . . . .	238

## Table des matières

<b>Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité</b>	253
I    Limite d'une application . . . . .	254
II   Applications continues . . . . .	259
III   Continuité et applications linéaires / multilinéaires . . . . .	264
Exercices . . . . .	275
<b>Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie</b>	287
I    Compacité . . . . .	288
II   Connexité par arcs . . . . .	293
III   Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	296
Exercices . . . . .	308
<b>Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle</b>	337
I    Dérivation . . . . .	338
II   Intégration sur un segment . . . . .	346
III   Primitives et intégrales . . . . .	350
IV   Formules de Taylor . . . . .	351
Exercices . . . . .	362
<b>Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque</b>	375
I    Intégrale généralisée . . . . .	376
II   Propriétés de l'intégrale . . . . .	385
III   Calcul d'intégrales . . . . .	390
IV   Intégration des relations de comparaison . . . . .	396
Exercices . . . . .	406
<b>Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles</b>	423
I    Séries à valeurs dans un espace de dimension finie . . . . .	424
II   Compléments sur les séries numériques . . . . .	429
Exercices . . . . .	440
<b>Chapitre 11. Suites et séries de fonctions</b>	453
I    Modes de convergence des suites de fonctions . . . . .	454
II   Convergence uniforme et limites . . . . .	460
III   Intégration, dérivation d'une limite . . . . .	461
IV   Séries de fonctions . . . . .	463
V   Approximation uniforme . . . . .	471
Exercices . . . . .	479
<b>Chapitre 12. Séries entières</b>	505
I    Séries entières . . . . .	506
II   Régularité de la somme d'une série entière . . . . .	512
III   Développements en série entière . . . . .	516
Exercices . . . . .	526
<b>Chapitre 13. Intégrales à paramètres</b>	549
I    Suites et séries d'intégrales . . . . .	550
II   Continuité et dérivabilité . . . . .	557
Exercices . . . . .	567

<b>Chapitre 14. Dénombrabilité</b>	585
I Ensembles dénombrables . . . . .	586
II Opérations sur les ensembles dénombrables . . . . .	588
III Exemples d'ensembles infinis non dénombrables . . . . .	590
Exercices . . . . .	594
<b>Chapitre 15. Espaces probabilisés</b>	599
I Espaces probabilisés . . . . .	600
II Variables aléatoires discrètes . . . . .	608
III Couples de variables aléatoires . . . . .	613
Exercices . . . . .	622
<b>Chapitre 16. Conditionnement – Indépendance</b>	635
I Probabilités conditionnelles . . . . .	636
II Indépendance . . . . .	639
Exercices . . . . .	652
<b>Chapitre 17. Espérance – Variance</b>	677
I Espérance . . . . .	678
II Variance . . . . .	684
III Covariance . . . . .	686
IV Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres . . . . .	688
V Fonctions génératrices . . . . .	689
Exercices . . . . .	703
<b>Chapitre 18. Équations différentielles linéaires</b>	729
I Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .	730
II Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice . . . . .	736
III Systèmes différentiels à coefficients constants . . . . .	742
IV Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n$ . . . . .	747
V Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 . . . . .	749
Exercices . . . . .	767
<b>Chapitre 19. Calcul différentiel</b>	795
I Différentiabilité d'une fonction en un point . . . . .	796
II Fonctions différentiables . . . . .	805
III Vecteurs tangents à une partie . . . . .	815
IV Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	821
V Optimisation . . . . .	829
Exercices . . . . .	849

*Pour Claude*

*Notre collègue et ami Claude Deschamps  
est décédé le 11 mars 2022.*

*Difficile, Claude, de dissocier ton nom  
de celui d'André Warusfel (« Warus »)  
qui nous a quittés en 2016.*

*Vous avez tous les deux dirigé cette collection depuis 1997,  
dans la lignée d'une longue série de livres,  
dont le dernier avatar, qui porte ton nom,  
« Ramis – Deschamps – Odoux », est encore utilisé de nos jours.*

*Sous votre houlette,  
nous avons contribué à ces « Tout-en-un »  
dont l'objectif est d'être des ouvrages de référence  
pour tous les étudiants et dont le contenu,  
accessible à tous, suit à la lettre le programme officiel.*

*Toute l'équipe de cet ouvrage,  
dont certains membres ont été tes élèves,  
tient à te rendre hommage en souvenir de tous ces moments  
passés à chercher la rédaction idéale  
pour transmettre aux étudiants  
des notions mathématiques souvent délicates.*

# Avant-propos

Ce nouveau TOUT-EN-UN de mathématiques vient répondre aux attentes des nouveaux programmes de classes préparatoires, entrés en vigueur en septembre 2021 pour la première année et en septembre 2022 pour la deuxième année. Il reprend l'ambition des précédentes éditions : faire tenir en un seul volume cours complet et exercices corrigés.

Ce volume MP - MPI se veut dans la continuité du volume MPSI - MP2I : lors de son élaboration, l'équipe d'auteurs ne s'est pas contentée d'adapter l'ancien livre au nouveau programme, mais a repensé chaque chapitre en profondeur, dans un souci permanent de clarté et de concision.

Il nous tient à cœur de préciser quelques éléments clés de la structure du livre.

- Plutôt que de faire figurer systématiquement, à la suite de l'énoncé d'une proposition ou d'un théorème, sa démonstration entièrement rédigée, nous préférons parfois donner un principe de démonstration (la démonstration complète étant alors reléguée en fin de chapitre). L'objectif est double :
  - \* rendre l'exposé du cours plus concis et plus facile à lire lorsque l'étudiant ne souhaite pas s'attarder sur les démonstrations ;
  - \* l'étudiant, ayant à sa disposition un principe de démonstration, peut soit (en cas de première lecture) tenter de réfléchir par lui-même à la manière d'élaborer la preuve complète, soit (en cas lecture ultérieure) se souvenir rapidement de cette preuve.
- Chaque chapitre se conclut par une série d'exercices permettant à l'étudiant de s'exercer. Chacun de ces exercices est entièrement corrigé.
  - \* Certains de ces exercices ont pour mission de faire appliquer de manière ciblée un théorème ou une méthode ; sous le numéro de l'exercice est alors indiqué le numéro de la page du cours associée. Inversement, ces exercices sont signalés dans la marge, à l'endroit concerné du cours.  
S'il n'est pas totalement indispensable de traiter ces exercices lors d'une première lecture du cours, leur lien étroit avec celui-ci les rend particulièrement intéressants pour assimiler les nouvelles notions et méthodes.
  - \* L'étudiant trouvera également des exercices d'entraînement un peu plus ambitieux, demandant plus de réflexion. Certains, plus difficiles, sont étoilés.

Bien entendu nous sommes à l'écoute de toute remarque dont les étudiants, nos collègues, tout lecteur... pourraient nous faire part (à l'adresse électronique suivante : [touten1maths@gmail.com](mailto:touten1maths@gmail.com)). Cela nous permettra, le cas échéant, de corriger certaines erreurs nous ayant échappé et surtout ce contact nous guidera pour une meilleure exploitation des choix pédagogiques que nous avons faits aujourd'hui dans cet ouvrage.

# « Mode d'emploi » d'un chapitre

Une introduction présente le sujet traité.

## Compléments d'algèbre linéaire

2

Dans ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel sur un sous-corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$  (on se limite en pratique au cas où  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

**Les encadrés correspondent soit à des théorèmes, propositions ou corollaires, qui partagent le même système de numérotation, soit à des définitions, qui ont leur propre numérotation.**

### Corollaire 46

Dans un groupe  $G$  fini de cardinal  $n$ , on a  $\forall x \in G \quad x^n = e$ .

### Théorème 47 (Théorème d'Euler)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n$ , on a  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$ .

### Définition 7

Une **sous-algèbre** d'une algèbre  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $A$  stable par multiplication et contenant  $1_A$ .

**La démonstration de chaque résultat encadré, lorsqu'elle ne suit pas directement celui-ci, est indiquée par un renvoi.**

### Proposition 4

Étant donné une partie  $X$  de  $A$ , il existe un plus petit idéal de  $A$  contenant  $X$ .

Démonstration page 26

**Les points de méthode apparaissent sur fond grisé.**

**Point méthode** Pour définir par  $\bar{k} \mapsto \varphi(k)$  une application sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on vérifiera bien que  $\varphi(k)$  ne dépend que de la classe de congruence de  $k$  modulo  $n$ .

**Les points auxquels il faut faire particulièrement attention sont signalés par un filet vertical sur la gauche.**

**Attention** La relation  $a^n = e$  ne signifie pas que  $a$  est d'ordre  $n$ , mais seulement que son ordre divise  $n$  d'après la proposition suivante.

**Des renvois vers des exercices peuvent apparaître en marge au sein du cours.**

Exo  
2.12

**Définition 4**

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit **stable** par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

**Les exemples sont repérés par deux coins.**

Ex. 48. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le groupe  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Des exercices sont proposés en fin de chapitre, avec éventuellement un rappel du numéro de la page de cours où se trouve la notion dont l'exercice est une application.**

## S'entraîner et approfondir

### Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

10.1 Prouver la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum A^n$ , où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
→424

**Certains exercices bénéficient d'indications, et les plus difficiles sont étoilés.**

\*\* 12.30 Théorème de Bernstein

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de 0 et telle que  $f$  ainsi que toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrer que  $f$  est développable en série entière.

*Indication. On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.*

**Tous les exercices sont entièrement corrigés.**

## Solutions des exercices

1.1 Soit  $A$  un anneau fini intègre et  $a \in A$  non nul. L'application  $x \mapsto ax$  de  $A$  dans  $A$  est injective par intégrité de  $A$ . Comme  $A$  est fini, elle est bijective, donc 1 admet un antécédent ce qui signifie qu'il existe  $b \in A$  tel que  $ab = 1$ . Comme  $A$  est commutatif (puisque intègre), on a aussi  $ba = 1$  et donc  $a$  est inversible.

Ainsi,  $A$  est un corps.



# Chapitre 1 : Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

<b>I</b>	<b>Anneaux, arithmétique</b>	<b>2</b>
1	Rappels et notations	2
2	Anneau produit	3
3	Idéaux d'un anneau commutatif	3
4	Divisibilité dans un anneau intègre	4
5	Retour sur le PGCD dans $\mathbb{Z}$	6
6	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	7
7	Théorème chinois	10
8	Indicatrice d'Euler	11
<b>II</b>	<b>Anneau des polynômes à une indéterminée</b>	<b>12</b>
1	Propriétés arithmétiques élémentaires	13
2	Utilisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$	15
3	Théorème de Gauss et décomposition en produit d'irréductibles	16
<b>III</b>	<b>Algèbres</b>	<b>17</b>
1	Structure d'algèbre	17
2	Sous-algèbres	18
3	Morphismes d'algèbres	19
<b>IV</b>	<b>Approfondissements sur les groupes</b>	<b>20</b>
1	Sous-groupe engendré par une partie	20
2	Groupes monogènes, groupes cycliques	21
3	Ordre d'un élément dans un groupe	23
	<b>Exercices</b>	<b>32</b>

# Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

1

Nous revenons dans ce chapitre sur les structures algébriques usuelles introduites en première année : groupes, anneaux et corps, notamment en vue de leur utilisation en arithmétique (dans  $\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{K}[X]$ ) et nous les complétons par la notion d'*algèbre* dont deux exemples importants en algèbre linéaire (algèbres des endomorphismes et des matrices carrées) seront étudiés dans le chapitre de réduction des endomorphismes. Enfin, nous conclurons par des approfondissements sur les groupes.

Dans ce chapitre, nous supposons acquises les notions suivantes vues en première année :

- groupe, sous-groupe et morphisme de groupes,
- anneau et corps, sous-anneau et morphisme d'anneaux.

## I Anneaux, arithmétique

### 1 Rappels et notations

- Dans un anneau  $A$ , le neutre pour l'addition est noté  $0$  (ou  $0_A$ ), le neutre pour la multiplication  $1$  (ou  $1_A$ ).
- L'anneau est commutatif si la multiplication est commutative (l'addition est commutative par définition).
- Un anneau  $A$  est **trivial** si  $1_A = 0_A$  ; dans ce cas,  $A$  est réduit à cet unique élément (on dit aussi qu'il est **nul**).
- Un anneau  $A$  est intègre s'il est commutatif, non trivial, et s'il vérifie :

Exo  
1.1

$$\forall(a, b) \in A^2 \quad ab = 0 \implies (a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0).$$

- Rappelons qu'un corps est un anneau commutatif non trivial dans lequel tout élément non nul est inversible.

## 2 Anneau produit

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Proposition 1

Étant donné des anneaux  $A_1, \dots, A_n$ , les opérations terme à terme :

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, \dots, a_n) \times (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

munissent le produit cartésien  $A_1 \times \dots \times A_n$  d'une structure d'anneau.

**Démonstration.** On sait déjà que  $(A_1 \times \dots \times A_n, +)$  est un groupe (groupe produit) de neutre  $(0_{A_1}, \dots, 0_{A_n})$ . On vérifie facilement que  $(1_{A_1}, \dots, 1_{A_n})$  est neutre pour la multiplication. Enfin, les propriétés d'associativité et de distributivité se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes des anneaux  $(A_i, +, \times)$ .  $\square$

**Ex. 1.** Si  $A$  est un anneau, alors  $A^n$  est un anneau, comme produit de  $n$  exemplaires de  $A$ . En particulier,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  sont des anneaux.

**Ex. 2.** Dans un anneau produit  $A_1 \times \dots \times A_n$ , les éléments inversibles sont les  $(a_1, \dots, a_n)$ , où  $a_i$  est inversible dans  $A_i$  pour tout  $i$ , avec alors  $(a_1, \dots, a_n)^{-1} = (a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$ .

Exo  
1.2

## 3 Idéaux d'un anneau commutatif

Soit  $A$  un anneau commutatif.

### Définition 1 (Idéal d'un anneau commutatif)

On dit qu'une partie  $I$  de  $A$  est un **idéal** de  $A$  si :

- $I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$  ;
- $I$  est stable par multiplication par tout élément de  $A$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad xa \in I.$$

**Remarque** Par commutativité de  $A$ , un idéal  $I$  de  $A$  vérifie aussi :

$$\forall x \in I \quad \forall a \in A \quad ax \in I.$$

**Ex. 3.**  $A$  et  $\{0\}$  sont évidemment des idéaux de  $A$ , appelés **idéaux triviaux** de  $A$ .

**Ex. 4.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des fonctions nulles en tout point de  $X$  est un idéal de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Exo  
1.3

### Remarque

Si  $I$  est un idéal de  $A$  contenant 1, alors  $\forall a \in A \quad a = a \cdot 1 \in I$ , donc  $I = A$ .

Exo  
1.4

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

**Attention** Soit  $B$  un anneau. Le **noyau** d'un morphisme d'anneaux de  $A$  dans  $B$ , c'est-à-dire son noyau en tant que morphisme de groupes de  $(A, +)$  dans  $(B, +)$  n'est pas un sous-anneau de  $(A, +, \times)$  si  $B$  est non trivial puisqu'alors  $\varphi(1_A) = 1_B \neq 0_B$  et donc que  $1_A \notin \text{Ker } \varphi$ .

En revanche :

### Proposition 2

Le noyau de tout morphisme d'anneaux  $\varphi$  de  $A$  dans un anneau  $B$  est un idéal de  $A$ .

**Démonstration.** C'est un sous-groupe de  $(A, +)$  en tant que noyau d'un morphisme de groupes. Soit  $x \in \text{Ker } \varphi$  et  $a \in A$ . On a  $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \times 0 = 0$ . Donc  $\text{Ker } \varphi$  est un idéal de  $A$ .  $\square$

### Idéal engendré par un élément

### Proposition 3

Une intersection d'idéaux de  $A$  est un idéal de  $A$ .

Démonstration page 26

### Proposition 4

Étant donné une partie  $X$  de  $A$ , il existe un plus petit idéal de  $A$  contenant  $X$ .

Démonstration page 26

**Principe de démonstration.** C'est l'intersection de tous les idéaux de  $A$  contenant  $X$ .

### Terminologie

- On l'appelle **idéal de  $A$  engendré par  $X$** .
- Si  $x$  est un élément de  $A$ , l'**idéal engendré par  $x$**  est, par définition, l'idéal engendré par  $\{x\}$ , c'est-à-dire le plus petit idéal de  $A$  contenant  $x$ .

### Proposition 5 (Idéal engendré par un élément)

Soit  $x \in A$ . L'idéal engendré par  $x$  est  $xA = \{xa \mid a \in A\}$ .

Démonstration page 26

### Proposition 6

L'idéal de  $A$  engendré par une partie finie  $\{x_1, \dots, x_k\}$  est :

$$x_1A + \dots + x_kA = \{x_1a_1 + \dots + x_k a_k \mid (a_1, \dots, a_k) \in A^k\}.$$

C'est aussi le plus petit idéal de  $A$  contenant tous les idéaux  $x_1A, \dots, x_kA$ .

Démonstration page 26

## 4 Divisibilité dans un anneau intègre

On suppose à partir de maintenant que  $A$  est un anneau intègre.

### Définition 2

Soit  $(x, y) \in A^2$ . On dit que  $x$  **divise**  $y$ , ou que  $y$  est un **multiple** de  $x$ , s'il existe  $z \in A$  tel que  $y = xz$ . On note alors  $x \mid y$ .

## Terminologie

- Lorsque  $x$  divise  $y$ , on dit aussi que  $x$  est un **diviseur** de  $y$  ou que  $y$  est un **multiple** de  $x$ .
- Lorsque  $x$  non nul divise  $y$ , il y a, par intégrité de  $A$ , unicité de  $z \in A$  tel que  $y = xz$ . Cet élément est alors appelé **quotient** de  $y$  par  $x$ .

**Remarque** Pour tout  $(x, y) \in A^2$ , on a  $x | y \iff y \in xA$ .

La relation de divisibilité est une relation réflexive et transitive, mais n'est en général ni symétrique ni antisymétrique (ce n'est donc ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence).

**Ex. 5.** Les diviseurs de 1 sont les éléments inversibles.

**Ex. 6.** Tout élément de  $A$  divise 0, mais 0 ne divise que lui-même.

**Ex. 7.** Grâce à l'intégrité, on a, pour tout  $a \neq 0$  :

$$ax | ay \iff (\exists z \in A \quad ay = axz) \iff (\exists z \in A \quad y = xz) \iff x | y.$$

## Lien avec les idéaux

La proposition suivante permet de ramener la notion de divisibilité à une relation d'ordre (inclusion sur les idéaux).

### Proposition 7

On a, pour tout  $(x, y) \in A^2$  :

$$x | y \iff yA \subset xA.$$

**Démonstration.** Soit  $(x, y) \in A^2$ . Comme  $yA$  est le plus petit idéal de  $A$  contenant  $y$  et que  $xA$  est un idéal, l'inclusion  $yA \subset xA$  est équivalente à  $y \in xA$ , c'est-à-dire à  $x | y$ .  $\square$

**Remarque** Deux éléments engendrent le même idéal si, et seulement s'ils se divisent mutuellement. On dit alors qu'ils sont **associés**.

**Terminologie** Les idéaux engendrés par un élément sont appelés **idéaux principaux**. L'exemple qui suit montre qu'il existe des idéaux non principaux.

**Ex. 8.** Considérons l'anneau  $\mathbb{Z}[X]$  des polynômes à coefficients entiers et  $I = 2\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$  l'idéal engendré par 2 et  $X$ . Supposons que  $I$  soit principal, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $I = P\mathbb{Z}[X]$ . Les inclusions  $2\mathbb{Z}[X] \subset P\mathbb{Z}[X]$  et  $X\mathbb{Z}[X] \subset P\mathbb{Z}[X]$  montrent alors, d'après la proposition 7, que  $P$  divise 2, donc qu'il est constant, et qu'il divise  $X$ , donc que son coefficient dominant est  $\pm 1$ . Finalement,  $P = \pm 1$  et il existe donc deux polynômes  $(U, V) \in \mathbb{Z}[X]^2$  tels que  $\pm 1 = 2U + XV$ . En évaluant en 0, cela donne  $2U(0) = \pm 1$ , ce qui est absurde puisque  $U(0) \in \mathbb{Z}$ .

Donc  $I$  n'est pas principal.

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Idéaux de $\mathbb{Z}$

Commençons par un résultat sur les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ .

#### Proposition 8

Les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont les  $n\mathbb{Z}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Démonstration page 26

**Principe de démonstration.** Si  $H$  est un sous-groupe non nul de  $\mathbb{Z}$ , on considère le plus petit élément  $n$  strictement positif de  $H$  et l'on utilise la division euclidienne par  $n$  pour montrer que tout élément de  $H$  est un multiple de  $n$ .

On en déduit que tous les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont principaux :

#### Théorème 9

Les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Démonstration.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$  des multiples de  $n$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$  : c'est l'idéal de  $\mathbb{Z}$  engendré par  $n$  (cf. proposition 5 de la page 4).
- Réciproquement, un idéal étant en particulier un sous-groupe, il n'y en a pas d'autres d'après la proposition 8.  $\square$

**Remarque** Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{Z}$ . Il existe donc  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I = n\mathbb{Z}$ .

- Si  $m$  est un entier relatif tel que  $I = m\mathbb{Z}$ , alors  $n \in m\mathbb{Z}$  et  $m \in n\mathbb{Z}$ , donc  $m \mid n$  et  $n \mid m$ , ce qui donne  $m = \pm n$ .
- Réciproquement, il est clair que  $(-n)\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ .

On a ainsi montré l'unicité de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I = n\mathbb{Z}$  : on l'appelle **le générateur** de l'idéal  $I$ .

## 5 Retour sur le PGCD dans $\mathbb{Z}$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  des entiers relatifs. Nous avons vu à la proposition 6 de la page 4 que l'idéal de  $\mathbb{Z}$  engendré par les éléments  $a_1, \dots, a_n$  était  $I = a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z}$ . Cela permet de donner une nouvelle définition du PGCD.

#### Proposition 10

Étant donné des entiers  $a_1, \dots, a_n$ , il existe un unique entier naturel  $d$  tel que  $d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a la relation :

$$k \mid d \iff (\forall i \in [1, n] \quad k \mid a_i).$$

On l'appelle **PGCD** de  $a_1, \dots, a_n$  et l'on dispose de la **relation de Bézout** :

$$\exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \quad d = a_1u_1 + \dots + a_nu_n.$$

#### Démonstration.

- Considérons le générateur de l'idéal  $a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire l'unique  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z}$  (cf. remarque de la présente page).

Ainsi,  $d\mathbb{Z}$  est le plus petit idéal de  $\mathbb{Z}$  contenant  $\{a_1, \dots, a_n\}$  (proposition 6 de la page 4), donc pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , puisque  $k\mathbb{Z}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} k \mid d &\iff d\mathbb{Z} \subset k\mathbb{Z} \\ &\iff \forall i \in [1, n] \quad a_i \in k\mathbb{Z} \\ &\iff \forall i \in [1, n] \quad k \mid a_i. \end{aligned}$$

- Enfin, puisque  $d \in d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z}$ , on a par définition :

$$\exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n \quad d = a_1u_1 + \dots + a_nu_n. \quad \square$$

### Remarques

- Les diviseurs communs à  $a_1, \dots, a_n$  sont donc exactement les diviseurs de  $d$ .
- Lorsque  $d$  est non nul, c'est-à-dire lorsqu'au moins l'un des  $a_i$  est non nul, c'est donc le plus grand parmi tous les diviseurs positifs communs à  $a_1, \dots, a_n$  (et même parmi tous les diviseurs communs à  $a_1, \dots, a_n$ ).
- De la même façon, on pourrait définir le **PPCM** de  $a_1, \dots, a_n$  comme le générateur  $m$  de l'idéal  $a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z}$ , de façon à avoir, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , l'équivalence :

$$k \in m\mathbb{Z} \iff (\forall i \in [1, n] \quad k \in a_i\mathbb{Z}).$$

C'est le plus petit des multiples positifs communs à  $a_1, \dots, a_n$ .

## 6 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit  $n$  un entier naturel.

**Rappels** Nous avons vu en première année la relation de congruence modulo  $n$  définie par :

$$x \equiv y \pmod{n} \iff y - x \in n\mathbb{Z}.$$

Il s'agit une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$  qui est compatible avec les opérations de  $\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv x' \pmod{n} \\ y \equiv y' \pmod{n} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x + y \equiv x' + y' \pmod{n} \\ x \times y \equiv x' \times y' \pmod{n} \end{array} \right.$$

**Notation** On note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation.

La classe d'un élément  $k$  de  $\mathbb{Z}$  est souvent notée  $\bar{k}$ .

**Ex. 9.** La congruence modulo 0 est la relation d'égalité, donc  $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \{\{k\} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Ex. 10.** Deux entiers quelconques sont évidemment congrus modulo 1, donc  $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\bar{0}\}$ .

**Ex. 11.** Modulo 2, il y a deux classes : celle des entiers pairs et celle des entiers impairs.

Donc  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Proposition 11

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  a  $n$  éléments, et l'on a :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Démonstration page 27

**Principe de démonstration.** Utiliser la division euclidienne par  $n$ .

**Ex. 12.** Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , nous noterons  $[k]_n$  et  $[k]_p$  les classes de  $k$  respectivement modulo  $n$  et  $p$ .

Voyons à quelle condition on peut définir une application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ [k]_n &\longmapsto [k]_p. \end{aligned}$$

- Si une telle application existe, comme  $[n]_n = [0]_n$ , on doit avoir  $[n]_p = [0]_p$ , soit  $p \mid n$ .
- Supposons réciproquement que  $p$  divise  $n$ . Alors si  $k$  et  $\ell$  sont deux entiers tels que  $[k]_n = [\ell]_n$ , on a  $n \mid k - \ell$ , donc  $p \mid k - \ell$ , soit  $[k]_p = [\ell]_p$ . On peut donc bien définir l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto [k]_p \quad \text{où } k \in \alpha \end{aligned}$$

puisque la définition de l'image de  $\alpha$  ne dépend que de  $\alpha$  et non d'un de ses représentants.

**Point méthode** Pour définir par  $\bar{k} \mapsto \varphi(k)$  une application sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on vérifiera bien que  $\varphi(k)$  ne dépend que de la classe de congruence de  $k$  modulo  $n$ .

### Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

### Proposition 12

Il existe sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  des lois, notées  $+$  et  $\times$  et appelées **lois quotient**, telles que :

1.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \quad \overline{x+y} = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \overline{x \times y} = \overline{x \times y},$
  2.  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  soit un anneau commutatif d'éléments neutres  $\overline{0}$  et  $\overline{1}$ ,
  3. la **projection canonique**  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  soit un morphisme d'anneaux  
 $x \longmapsto \overline{x}$
- surjectif de noyau  $n\mathbb{Z}$ .

Démonstration page 27

**Principe de démonstration.** Pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , on définit :

$$\alpha + \beta = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \alpha \times \beta = \overline{x \times y} \quad \text{où} \quad x \in \alpha \quad \text{et} \quad y \in \beta.$$

Il faut commencer par vérifier que  $\overline{x+y}$  et  $\overline{x \times y}$  ne dépendent que de  $\alpha$  et  $\beta$ , et non des représentants  $x$  et  $y$  choisis, grâce à la compatibilité de la relation de congruence avec les lois de  $\mathbb{Z}$ .

**Notation** Le produit de deux éléments  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est souvent noté  $\alpha\beta$  plutôt que  $\alpha \times \beta$ .

**Ex. 13.** Écrivons les tables d'addition et de multiplication de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Pour alléger les notations, nous écrirons  $0, 1, 2, \dots$  à la place de  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$

		+	0	1	2	3	4		×	0	1	2	3	4	
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} :$	0	0	1	2	3	4		0	0	0	0	0	0	0	
	1	1	2	3	4	0		1	0	1	2	3	4		
	2	2	3	4	0	1		2	0	2	4	1	3		
	3	3	4	0	1	2		3	0	3	1	4	2		
	4	4	0	1	2	3		4	0	4	3	2	1		
		+	0	1	2	3	4	5	×	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} :$	0	0	1	2	3	4	5		0	0	0	0	0	0	
	1	1	2	3	4	5	0	1	0	1	2	3	4	5	
	2	2	3	4	5	0	1	2	0	2	4	0	2	4	
	3	3	4	5	0	1	2	3	0	3	0	3	0	3	
	4	4	5	0	1	2	3	4	0	4	2	0	4	2	
	5	5	0	1	2	3	4	5	0	5	4	3	2	1	

On remarque que  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  est intègre puisque pour avoir  $\alpha\beta = 0$  il est nécessaire d'avoir  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$  (absence de 0 dans la portion entourée de pointillés).

En revanche,  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  est non intègre puisque, par exemple  $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ .

**Remarque** On peut aussi prendre pour représentants des classes modulo  $n \in \mathbb{N}^*$ , n'importe quel  $n$ -uplet d'entiers consécutifs. Par exemple, pour étudier la multiplication sur  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , il pourra être intéressant d'écrire  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{-\bar{2}, -\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ .

**Ex. 14.** Pour résoudre l'équation  $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$  dans  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , il suffit de lister les carrés des éléments de  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  pour voir lesquels sont égaux à  $\bar{1}$  :

$x$	$\bar{0}$	$\pm\bar{1}$	$\pm\bar{2}$	$\pm\bar{3}$	$\pm\bar{4}$	$\pm\bar{5}$	$\bar{6}$
$x^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$-\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

On en déduit que  $x^2 - \bar{1} = \bar{0} \iff x \in \{-\bar{1}, \bar{1}, -\bar{5}, \bar{5}\}$ .

### Proposition 13 (Éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ )

La classe de  $k \in \mathbb{Z}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si, et seulement si,  $k$  est premier avec  $n$ .

Démonstration page 27

**Principe de démonstration.** L'élément  $\bar{k}$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est inversible si, et seulement s'il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $ku + nv = 1$  et son inverse est alors  $\bar{u}$ .

**Remarque** Trouver l'inverse de  $\bar{k}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  revient à trouver l'inverse de  $k$  modulo  $n$  (voir le cours de première année). Rappelons (c'est d'ailleurs aussi ce qui a été fait dans la démonstration précédente) qu'il suffit pour cela de trouver un couple  $(u, v)$  tel que  $ku + nv = 1$  (coefficients de Bézout). L'inverse de  $\bar{k}$  est alors  $\bar{u}$ .

**Ex. 15.** Déterminons l'inverse de  $\bar{13}$  dans  $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$ .

On trouve, par exemple à l'aide de l'algorithme d'Euclide (voir le cours de première année), l'égalité de Bézout  $5 \times 34 - 13 \times 13 = 1$ , donc l'inverse de  $\bar{13}$  est  $-\bar{13} = \bar{21}$  dans  $\mathbb{Z}/34\mathbb{Z}$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Théorème 14

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps si, et seulement si,  $n$  est premier.

Démonstration page 27

#### Principe de démonstration.

- Si  $n$  est premier, tous les éléments de  $[1, n - 1]$  sont premiers avec  $n$ , donc leur classe est inversible.
- Si  $n = ab$ , alors  $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{ab} = \bar{0}$ , ce qui permet de montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est non intègre si  $n$  n'est pas premier.

**Notation** Lorsque  $p$  est un nombre premier, le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est aussi noté  $\mathbb{F}_p$ .

## 7 Théorème chinois

On note ici  $[k]_n$  la classe de l'entier  $k$  modulo un entier naturel non nul  $n$ .

### Proposition 15

Soit  $n$  et  $m$  des entiers naturels premiers entre eux. Les anneaux  $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  sont isomorphes par le morphisme d'anneaux  $\varphi$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z} &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ [k]_{nm} &\longmapsto ([k]_n, [k]_m).\end{aligned}$$

Démonstration page 28

**Principe de démonstration.** Pour la définition de  $\varphi$ , vérifier que le couple  $([k]_n, [k]_m)$  ne dépend que de la classe de  $k$  modulo  $nm$ .

On démontre l'injectivité de  $\varphi$  et l'on conclut par cardinalité.

Le corollaire suivant n'est que la traduction en termes de congruence de la proposition 15.

### Corollaire 16 (Théorème chinois)

Si  $n$  et  $m$  sont des entiers premiers entre eux, alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , il existe un entier  $k$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} k \equiv a \pmod{n} \\ k \equiv b \pmod{m} \end{cases} \quad (S)$$

et les solutions de ce système sont exactement les entiers congrus à  $k$  modulo  $nm$ .

Le théorème chinois permet de ramener l'étude d'une équation sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  lorsque  $n$  n'est pas premier, à celle d'équations sur des anneaux plus simples.

**Point méthode (pour obtenir une solution de  $(S)$ )** À partir d'une relation de Bézout  $mu + nv = 1$ , on trouve deux entiers  $k_1 = mu$  et  $k_2 = nv$  vérifiant respectivement les systèmes de congruences :

$$\begin{cases} k_1 \equiv 1 \pmod{n} \\ k_1 \equiv 0 \pmod{m} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} k_2 \equiv 0 \pmod{n} \\ k_2 \equiv 1 \pmod{m} \end{cases}$$

et une solution du système  $(S)$  est alors  $k = k_1a + k_2b$  (vérification immédiate en prenant les congruences modulo  $n$  et  $m$ ).

**Ex. 16.** Trouvons les entiers  $k$  tels que  $k^2 + k + 11 \equiv 0$  [143], c'est-à-dire tels que l'on ait simultanément  $k^2 + k + 11 \equiv 0$  [11] et  $k^2 + k + 11 \equiv 0$  [13].

Cela revient à résoudre l'équation  $x^2 + x + 11 = 0$  dans  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ . Pour chaque couple de solutions  $([a]_{11}, [b]_{13})$ , le point méthode précédent donne la classe modulo 143 correspondante.

- Dans  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ , l'équation devient  $x^2 + x = 0$ , c'est-à-dire  $x(x+1) = 0$ . Comme  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  est un corps, cela équivaut à  $x = 0$  ou  $x = -1$ .
- De même, dans  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ , on obtient l'équation  $x^2 + x - 2 = 0$ , c'est-à-dire  $(x-1)(x+2) = 0$ , ce qui donne, puisque  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  est un corps, les deux solutions  $x = 1$  ou  $x = -2$ .
- On a donc 4 solutions modulo 143 à l'équation initiale données, en reprenant les notations du corollaire 16 de la page précédente, par  $a \in \{0, -1\}$  et  $b = \{1, -2\}$ .
- Une relation de Bézout entre 11 et 13 est  $6 \times 11 - 5 \times 13 = 1$ . Ainsi  $k_1 = -65$  vérifie  $k_1 \equiv 1$  [11] et  $k_1 \equiv 0$  [13]. De même,  $k_2 = 66$  vérifie  $k_2 \equiv 0$  [11] et  $k_2 \equiv 1$  [13].
- Pour chaque couple  $(a, b)$ , la solution correspondante est  $ak_1 + bk_2$ . Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	$b$	1	-2
$a$			
0	66	11	
-1	131	76	

**Remarque** L'obtention d'une telle solution est non triviale, mais il est très facile de vérifier qu'elle est effectivement solution, ce qui permet de repérer une erreur de calcul éventuelle. Par exemple il est immédiat que 76 est bien congru à -1 modulo 11 et à -2 modulo 13.

### Corollaire 17

Étant donné des entiers naturels  $n_1, \dots, n_r$  premiers entre eux deux à deux, les anneaux  $\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$  sont isomorphes.

**Démonstration.** Par récurrence sur  $r$ , en remarquant que si  $n_1, \dots, n_{r+1}$  sont premiers entre eux deux à deux, alors  $n_1 \cdots n_r$  et  $n_{r+1}$  sont premiers entre eux et  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_{r+1}\mathbb{Z})$  est isomorphe à  $((\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})) \times (\mathbb{Z}/n_{r+1}\mathbb{Z})$ .  $\square$

## 8 Indicatrice d'Euler

### Définition 3

On appelle **indicatrice d'Euler** de  $n \in \mathbb{N}^*$ , et l'on note  $\varphi(n)$ , le cardinal de l'ensemble :

$$\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : k \wedge n = 1\}.$$

### Remarques

- On a évidemment  $\varphi(1) = 1$ .
- Pour  $n \geq 2$ ,  $\varphi(n)$  est aussi le nombre d'éléments de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  premiers avec  $n$ .
- Dans tous les cas, c'est aussi le nombre d'éléments de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  premiers avec  $n$ , donc également le nombre d'éléments inversibles dans l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

Exo  
1.7

**Ex. 17.** Pour tout  $n \geq 2$ , on a  $\varphi(n) \leq n - 1$  avec égalité si, et seulement si,  $n$  est premier. En effet, d'après les remarques précédentes,  $\varphi(n)$  est le nombre d'éléments de  $[1, n - 1]$  premiers avec  $n$  (d'où l'inégalité) et  $n$  est premier si, et seulement si, tous les éléments de  $[1, n - 1]$  sont premiers avec  $n$ .

### Lemme 18

Soit  $p$  un nombre premier. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ .

**Démonstration.** Les éléments qui sont non premiers avec  $p^k$  sont les multiples de  $p$ , c'est-à-dire  $p, 2p, \dots, (p^{k-1})p$  pour ceux qui sont dans  $[1, p^k]$ . Il y en a donc  $p^{k-1}$ .  $\square$

### Proposition 19

Étant donné des entiers naturels  $n_1, \dots, n_r$  premiers entre eux deux à deux, on a  $\varphi(n_1 \cdots n_r) = \varphi(n_1) \cdots \varphi(n_r)$ .

Démonstration page 28

**Principe de démonstration.** L'isomorphisme d'anneaux du corollaire 17 de la page précédente entre  $\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$  induit une bijection entre leurs groupes des unités.

### Corollaire 20

Si  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ , avec  $p_1, \dots, p_r$  des nombres premiers distincts deux à deux et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  des entiers naturels non nuls, alors on a :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

**Démonstration.** À l'aide du résultat précédent et du lemme 18, il vient :

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdots \varphi(p_r^{\alpha_r}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1}),$$

ce qui donne le résultat après factorisation par  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ .  $\square$

## II Anneau des polynômes à une indéterminée

On considère ici un sous-corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$ . La structure d'anneau de  $\mathbb{K}[X]$ , étudiée en première année lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se définit de la même manière dans le cas général<sup>1</sup>.

On conserve en particulier la notion de degré ainsi que ses propriétés qui permettent de montrer le résultat suivant.

### Proposition 21

L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre.

Démonstration page 28

On conserve aussi le théorème de division euclidienne, dont la démonstration est exactement la même que celle qui a été faite en première année dans le cas de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$ .

1. En fait, tout ce qui est fait ici est valable pour un corps quelconque, en particulier pour un corps fini  $\mathbb{F}_p$ , avec  $p$  premier.

**Théorème 22**

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ .

Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

## 1 Propriétés arithmétiques élémentaires

Nous allons maintenant généraliser les propriétés arithmétiques de  $\mathbb{K}[X]$  vues en première année lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Ex. 18.** Un polynôme  $B$  non nul divise  $A \in \mathbb{K}[X]$  si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

**Ex. 19.** Soit  $\mathbb{K}'$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$  ainsi que  $A$  et  $B$  deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}'$ , avec  $B$  non nul. Montrons que le polynôme  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbb{K}'[X]$  si, et seulement s'il divise  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

Il est évident que si  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbb{K}'[X]$ , alors il divise  $A$  dans  $\mathbb{K}[X]$ . Réciproquement, supposons qu'il existe  $C \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = BC$ . La division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans  $\mathbb{K}'[X]$  s'écrit  $A = BQ + R$ , avec  $(Q, R) \in \mathbb{K}'[X]^2$  et  $\deg R < \deg B$ . On dispose alors des deux égalités dans  $\mathbb{K}[X]$  :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B \quad \text{et} \quad A = BC + 0 \quad \text{avec} \quad \deg 0 < \deg B$$

et l'unicité de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[X]$  donne  $R = 0$ . Donc  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbb{K}'[X]$ .

### Inversibles

**Proposition 23**

Les éléments inversibles de  $\mathbb{K}[X]$  sont les polynômes constants non nuls.

Démonstration page 28

### Polynômes associés

**Proposition 24**

Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathbb{K}[X]$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A | B$  et  $B | A$  ;
- (ii) il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $B = \lambda A$ .

On dit alors que  $A$  et  $B$  sont **associés**.

Démonstration page 28

**Ex. 20.** 0 n'est associé qu'à lui-même.

**Ex. 21.** Les éléments inversibles de  $\mathbb{K}[X]$  sont les associés de 1.

**Ex. 22.** Tout élément  $A$  non nul de  $\mathbb{K}[X]$  est associé à un unique polynôme unitaire, obtenu en divisant  $A$  par son coefficient dominant.

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Polynômes irréductibles

#### Définition 4

Un **polynôme irréductible** est un polynôme non constant dont les seuls diviseurs sont ses associés et les constantes non nulles.

**Ex. 23.** Tout polynôme de degré 1 est irréductible.

#### Proposition 25

Un élément  $A \in \mathbb{K}[X]$  est irréductible si, et seulement si :

- $A$  est non constant ;
- si  $A = BC$ , avec  $(B, C) \in \mathbb{K}[X]^2$ , alors  $B$  ou  $C$  est constant.

Démonstration page 29

Rappelons la caractérisation des irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  et  $\mathbb{C}[X]$ .

#### Proposition 26 (Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ )

- Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.
- Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

**Ex. 24.** Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré 2 ou 3 n'ayant aucune racine dans  $\mathbb{K}$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ .

En effet, s'il s'écrivait  $P = AB$ , avec  $A$  et  $B$  non constants, on aurait  $\deg A \geq 1$ ,  $\deg B \geq 1$  et  $\deg A + \deg B = \deg P \leq 3$ . L'un des deux polynômes  $A$  ou  $B$  serait donc de degré 1, donc aurait une racine dans  $\mathbb{K}$ , ce qui est impossible puisqu'il divise  $P$  qui n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$ .

**Ex. 25.** Montrons que  $P = X^3 + X + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Comme il est de degré 3, l'exemple précédent montre qu'il suffit de prouver qu'il n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$ .

Supposons donc, par l'absurde,  $P(p/q) = 0$  avec  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux et  $q \neq 0$ .

Alors  $p^3 + pq^2 + q^3 = 0$ , donc  $q \mid p^3$  et  $p \mid q^3$ . On en déduit  $p = \pm 1$  et  $q = \pm 1$  puisque  $p \wedge q = 1$ . Ainsi,  $p/q = \pm 1$ , ce qui est contradictoire puisque  $P(1) = 3 \neq 0$  et  $P(-1) = -1 \neq 0$ .

Exo  
1.10

### Polynômes premiers entre eux

#### Définition 5

Deux éléments de  $\mathbb{K}[X]$  sont **premiers entre eux** si leurs seuls diviseurs communs sont les polynômes constants non nuls de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Ex. 26.** Deux polynômes irréductibles non associés sont premiers entre eux. Considérons, en effet, deux polynômes irréductibles  $P$  et  $Q$  non premiers entre eux. Ils admettent alors un diviseur commun  $D$  non constant. Comme  $P$  et  $Q$  sont irréductibles, on en déduit que  $D$  est associé à  $P$  et à  $Q$ , donc que  $P$  et  $Q$  sont associés.

Plus généralement :

### Proposition 27

Soit  $P$  un polynôme irréductible et  $A$  un polynôme quelconque. Alors  $P$  et  $A$  sont premiers entre eux si, et seulement si,  $P$  ne divise pas  $A$ .

Démonstration page 29

## 2 Utilisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

### Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Si  $B$  est un élément de  $\mathbb{K}[X]$ , la proposition 5 de la page 4 montre que :

$$B\mathbb{K}[X] = \{BQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  : c'est l'idéal engendré par  $B$ .

Comme dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , on obtient ainsi tous les idéaux de  $\mathbb{K}[X]$ .

### Théorème 28

Les idéaux de  $\mathbb{K}[X]$  sont les  $B\mathbb{K}[X]$ , pour  $B \in \mathbb{K}[X]$ .

Démonstration page 29

**Principe de démonstration.** Si  $I$  est un idéal non nul de  $\mathbb{K}[X]$ , on considère un élément  $B$  non nul de  $I$  de degré minimal et l'on utilise la division euclidienne par  $B$  pour montrer que tout élément de  $I$  est un multiple de  $B$ .

Ainsi, tout comme  $\mathbb{Z}$ , l'anneau  $\mathbb{K}[X]$  a tous ses idéaux principaux (voir page 5). On dit que ce sont des **anneaux principaux**.

Grâce à cette propriété importante de  $\mathbb{K}[X]$ , nous allons pouvoir retrouver (et généraliser au cas d'un corps  $\mathbb{K}$  quelconque) les propriétés arithmétiques de l'anneau  $\mathbb{K}[X]$ .

### Lien avec la divisibilité

Rappelons (proposition 7 de la page 5) que la divisibilité se ramène à une inclusion d'idéaux :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad B \mid A \iff A\mathbb{K}[X] \subset B\mathbb{K}[X].$$

On en déduit, grâce à la proposition 24 de la page 13, que deux polynômes sont associés si, et seulement s'ils sont générateurs du même idéal.

### Corollaire 29

Tout idéal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  est de la forme  $A\mathbb{K}[X]$  pour un unique polynôme  $A$  nul ou unitaire. Ce polynôme  $A$  est appelé le **générateur** de  $I$ .

### PGCD de polynômes

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A_1, \dots, A_n$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Nous avons vu à la proposition 6 de la page 4 que l'idéal de  $\mathbb{K}[X]$  engendré par les éléments  $A_1, \dots, A_n$  était  $I = A_1\mathbb{K}[X] + \dots + A_n\mathbb{K}[X]$ . Cela conduit à la définition :

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Proposition 30 (Définition du PGCD)

Etant donné  $A_1, \dots, A_n$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , il existe un polynôme  $D \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $D\mathbb{K}[X] = A_1\mathbb{K}[X] + \dots + A_n\mathbb{K}[X]$ . On a, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  :

$$P \mid D \iff (\forall i \in [1, n] \quad P \mid A_i).$$

On dit que  $D$  est un **PGCD** de  $A_1, \dots, A_n$  et l'on dispose de la **relation de Bézout** :

$$\exists(U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{K}[X]^n \quad D = A_1U_1 + \dots + A_nU_n.$$

Démonstration page 29

### Remarques

- Les diviseurs communs à  $A_1, \dots, A_n$  sont donc exactement les diviseurs de  $D$ .
- Ainsi, deux PGCD de  $A_1, \dots, A_n$  se divisent mutuellement, donc sont associés.
- Lorsque  $D$  est non nul, c'est-à-dire lorsqu'au moins l'un des  $A_i$  est non nul, son degré est le plus grand parmi tous les degrés des diviseurs communs à  $A_1, \dots, A_n$ .
- Il y a unicité de  $D$  si on lui impose la condition supplémentaire d'être nul ou unitaire. On l'appelle *le* PGCD de  $A_1, \dots, A_n$  et on le note  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ .
- De la même façon, on pourrait définir un **PPCM** de  $A_1, \dots, A_n$  comme un générateur  $M$  de l'idéal  $A_1\mathbb{K}[X] \cap \dots \cap A_n\mathbb{K}[X]$ , de façon à avoir, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ , l'équivalence :

$$P \in M\mathbb{K}[X] \iff (\forall i \in [1, n] \quad P \in A_i\mathbb{K}[X]).$$

L'unique polynôme nul ou unitaire associé à  $M$  est appelé *le* PPCM de  $A_1, \dots, A_n$ .

**Ex. 27.** Deux polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux si, et seulement si,  $A \wedge B = 1$ .

## 3 Théorème de Gauss et décomposition en produit d'irréductibles

### Théorème 31 (Lemme de Gauss)

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois éléments de  $\mathbb{K}[X]$ .

Si  $A$  divise  $BC$  et si  $A$  est premier avec  $B$ , alors  $A$  divise  $C$ .

Démonstration page 29

**Principe de démonstration.** Multiplier par  $C$  une relation de Bézout  $AU + BV = 1$ .

### Corollaire 32

Un polynôme est premier avec un produit si, et seulement s'il est premier avec chacun des facteurs.

Démonstration page 30

### Théorème 33

Tout polynôme non constant de  $\mathbb{K}[X]$  est produit d'irréductibles.

Démonstration page 30

**Principe de démonstration.** Récurrence forte sur le degré de  $P$ .

Notons  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires. Les éléments de  $\mathcal{P}$  sont donc deux à deux non associés et tout polynôme irréductible est associé à un unique élément de  $\mathcal{P}$ .

**Théorème 34**

Tout polynôme  $A$  non nul de  $\mathbb{K}[X]$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$$

où  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et  $(\alpha_P)_{P \in \mathcal{P}}$  est une famille presque nulle d'entiers naturels.

Démonstration page 30

**Point méthode** Dans la pratique, on écrit la décomposition en produit d'irréductibles d'un polynôme  $A$  non nul sous l'une des formes :

- $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$  où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $P_1, \dots, P_k$  sont des éléments de  $\mathcal{P}$  distincts deux à deux et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des entiers naturels non nuls ;
- $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$  où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $P_1, \dots, P_k$  sont des éléments de  $\mathcal{P}$  distincts deux à deux et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des entiers naturels éventuellement nuls.

Avec la deuxième forme, on peut utiliser les mêmes irréductibles pour plusieurs éléments de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Ex. 28.** Soit  $A$  et  $B$  deux éléments non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  décomposés sous la deuxième forme :

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}.$$

- $B \mid A$  si, et seulement si,  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad \beta_i \leqslant \alpha_i$  ;
- le PGCD de  $A$  et  $B$  est  $D = P_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdots P_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$  ;
- le PPCM de  $A$  et  $B$  est  $M = P_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdots P_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$ .

On a ainsi  $AB = \lambda \mu DM$ .

## III Algèbres

Dans toute cette section, on suppose que  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### 1 Structure d'algèbre

#### Définition 6

Une **algèbre** est un espace vectoriel  $A$  muni d'une structure d'anneau dont les deux multiplications (interne et externe) vérifient la propriété de compatibilité :

$$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A \quad \lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y). \quad (*)$$

Lorsque le produit est commutatif, on dit que l'algèbre est **commutative**.

#### Remarques

- De même que pour les espaces vectoriels, on peut préciser «  $\mathbb{K}$ -algèbre » pour spécifier le corps de base.
- Comme dans un anneau, la multiplication interne sera souvent notée implicitement  $xy$  au lieu de  $x \times y$ .

**Ex. 29.**  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}^N$ ,  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  (pour  $X$  un ensemble quelconque) constituent des  $\mathbb{K}$ -algèbres.

**Ex. 30.**  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}(X)$ , et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont des  $\mathbb{K}$ -algèbres pour les lois usuelles, ainsi que  $\mathcal{L}(E)$  ( $E$  étant un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque).

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Proposition 35

Soit  $A$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une multiplication interne  $(x, y) \mapsto x \times y$ .

Alors  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre si, et seulement si, ce produit est bilinéaire, associatif et si  $A$  possède un élément neutre multiplicatif.

Exo  
1.13

**Démonstration.** Il suffit de montrer que la bilinéarité du produit, c'est-à-dire les relations :

$$x \times (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \times y) + \mu(x \times z) \quad \text{et} \quad (\lambda x + \mu y) \times z = \lambda(x \times z) + \mu(y \times z) \quad (**)$$

est équivalente à la distributivité et à la propriété (\*) de compatibilité.

- En supposant (\*\*), on obtient la distributivité en prenant  $\lambda = \mu = 1$  et la relation (\*) en prenant  $\mu = 0$ .

- Supposons la distributivité et (\*). Alors, pour tout  $(x, y, z) \in A^3$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  :

$$x \times (\lambda y + \mu z) = x \times (\lambda y) + x \times (\mu z) \quad \text{par distributivité}$$

$$= \lambda(x \times y) + \mu(x \times z) \quad \text{par la relation (*)}$$

et de même pour la deuxième relation de (\*\*).

□

**Attention** Comme c'est déjà le cas pour un anneau, une algèbre est **unitaire**, c'est-à-dire possède un élément neutre multiplicatif.

## 2 Sous-algèbres

### Définition 7

Une **sous-algèbre** d'une algèbre  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $A$  stable par multiplication et contenant  $1_A$ .

### Remarques

- Autrement dit, une sous-algèbre est une partie de  $A$  stable par combinaison linéaire, par multiplication et contenant l'élément neutre multiplicatif  $1_A$ .
- Une sous-algèbre est naturellement munie d'une structure d'algèbre pour les lois induites.
- Dans la plupart des cas, on démontre qu'un ensemble est muni d'une structure d'algèbre en montrant que c'est une sous-algèbre d'une algèbre connue.

**Ex. 31.** Si  $A$  est une algèbre, alors  $\text{Vect}(1_A)$  est une sous-algèbre de  $A$ .

**Ex. 32.** L'ensemble des suites convergentes à termes dans  $\mathbb{K}$  est une sous-algèbre de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

**Ex. 33.** Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

**Ex. 34.** Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre. De même pour les matrices triangulaires inférieures ou les matrices diagonales, mais pas pour les matrices symétriques lorsque  $n \geq 2$  (un produit de deux matrices symétriques est symétrique si, et seulement si, elles commutent).

### 3 Morphismes d'algèbres

#### Définition 8

Soit  $A$  et  $B$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbres. Un **morphisme d'algèbres** de  $A$  dans  $B$  est une application linéaire de  $A$  dans  $B$  qui est également un morphisme d'anneaux.

Autrement dit, un morphisme d'algèbres de  $A$  dans  $B$  est une application de  $A$  dans  $B$  qui vérifie :

- $\forall(x, y) \in A^2 \quad \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$
- $\forall(x, y) \in A^2 \quad f(xy) = f(x)f(y),$
- $f(1_A) = 1_B.$

**Terminologie** On dit que  $f$  est un **isomorphisme** lorsqu'il est bijectif, un **endomorphisme** lorsque  $A = B$  et un **automorphisme** lorsque c'est un endomorphisme bijectif.

**Ex. 35.** Pour toute algèbre  $A$  non triviale, la sous-algèbre  $\text{Vect}(1_A)$  est isomorphe à  $\mathbb{K}$  par l'isomorphisme  $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ .

**Ex. 36.** Si  $\mathcal{B}$  est une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ , l'application  $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Ex. 37.** Soit  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

L'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$  est un automorphisme d'algèbre.

#### Résultats

- Une composée de morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbres.
- La réciproque d'un isomorphisme d'algèbres est un isomorphisme d'algèbres.
- L'image (respectivement l'image réciproque) d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre.

**Attention** Un morphisme d'algèbres  $f : A \rightarrow B$  étant en particulier une application linéaire, son noyau est un sous-espace vectoriel, mais ce n'est en général pas une sous-algèbre puisqu'il ne contient pas  $1_A$  si  $B$  est non trivial. Voir page 3 la notion d'idéal d'un anneau commutatif.

#### Ex. 38. Substitution polynomiale

Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre. Pour  $u \in A$  et  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on note  $P(u)$  l'élément de  $A$  défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k.$$

Par exemple, lorsque  $A = \mathbb{K}$ , l'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$  est l'application polynomiale associée au polynôme  $P$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

Montrons que l'application  $P \mapsto P(u)$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $A$ .

- La relation  $1(u) = 1_A$  et la linéarité de  $P \mapsto P(u)$  sont immédiates.
- Soit  $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$  et  $Q = \sum_{q=0}^m b_q X^q$ . Par bilinéarité du produit polynomial, on a :

$$PQ = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q X^{p+q}$$

et donc  $(PQ)(u) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q u^{p+q}$ , par linéarité de l'application  $P \mapsto P(u)$ .

De même, par bilinéarité du produit de  $A$  :

$$P(u)Q(u) = \left( \sum_{p=0}^n a_p u^p \right) \left( \sum_{q=0}^m b_q u^q \right) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q u^{p+q}$$

d'où l'égalité  $(PQ)(u) = P(u)Q(u)$ .



## IV Approfondissements sur les groupes

Dans toute cette section, on considère un groupe  $(G, \cdot)$  dont l'élément neutre est noté  $e$ .

### 1 Sous-groupe engendré par une partie

**Proposition 36**

Une intersection de sous-groupes de  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .

Démonstration page 30.

**Proposition 37**

Soit  $A$  une partie de  $G$ . Il existe un plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $A$ . On l'appelle **sous-groupe de  $G$  engendré par  $A$** .

**Démonstration.** C'est l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  contenant  $A$ . □

**Ex. 39.** Il est immédiat que le sous-groupe de  $G$  engendré par l'ensemble vide est  $\{e\}$ .

**Ex. 40.** Le sous-groupe engendré par une partie  $A$  est l'ensemble  $H$  des produits d'éléments de  $A$  et d'inverses d'éléments de  $A$  :

$$H = \{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i \in A \text{ ou } x_i^{-1} \in A\}.$$

Montrons, en effet, que  $H$  est le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $A$ .

- $H$  contient  $A$  : pour tout  $a \in A$ , prendre  $n = 1$  et  $x_1 = a$ .
- Tout sous-groupe de  $G$  contenant  $A$  contient  $H$  :
  - \* par stabilité par produit et passage à l'inverse, il contient tous les produits  $x_1 \cdots x_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , lorsque  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i \in A \text{ ou } x_i^{-1} \in A$  ;
  - \* comme il contient  $e$ , le résultat est également vrai pour  $n = 0$ .
- $H$  est un sous-groupe de  $G$  :
  - \*  $H$  contient l'élément neutre  $e$  de  $G$  (prendre  $n = 0$  comme ci-dessus),
  - \* il est stable par produit et par passage à l'inverse (l'inverse de  $x_1 \cdots x_n$  est  $x_n^{-1} \cdots x_1^{-1}$ ).

**Définition 9**

Une partie de  $G$  est **génératrice** de  $G$  si le sous-groupe qu'elle engendre est égal à  $G$ . On dit aussi que  $A$  **engendre**  $G$ .

**Ex. 41.** Nous avons vu en première année que tout élément de  $S_n$  pouvait s'écrire comme produit de cycles (à supports disjoints). Cela montre que l'ensemble des cycles constitue une partie génératrice de  $S_n$ .

**Ex. 42.** De même, la décomposition d'une permutation comme produit de transpositions signifie donc que l'ensemble des transpositions constitue une partie génératrice de  $S_n$ .

**Point méthode** Pour montrer qu'une partie de  $G$  est génératrice de  $G$ , il suffit de montrer que l'on peut obtenir, par produit et passage à l'inverse à partir de ses éléments, tous les éléments d'une partie que l'on sait génératrice.

**Ex. 43.** Le groupe alterné  $A_n$  (ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de signature 1) est engendré par les 3-cycles. En effet, les 3-cycles sont bien dans  $A_n$  et tout élément de  $A_n$  étant produit d'un nombre pair de transpositions (les transpositions sont de signature  $-1$ ), il suffit de montrer qu'un produit de deux transpositions est aussi un produit de 3-cycles. Vérifions-le.

Soit  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux transpositions.

- Si  $\tau_1 = \tau_2$ , alors  $\tau_1\tau_2$  est produit de 3-cycles (aucun!).
- Si  $\tau_1 = (a\ b)$  et  $\tau_2 = (b\ c)$ , avec  $a, b, c$  distincts, alors  $\tau_1\tau_2 = (a\ b\ c)$  est un 3-cycle.
- Si  $\tau_1 = (a\ b)$  et  $\tau_2 = (c\ d)$ , avec  $a, b, c$  distincts, alors :

$$\tau_1\tau_2 = \tau_1(b\ c)(b\ c)\tau_2 = ((a\ b)(b\ c))((b\ c)(c\ d)) = (a\ b\ c)(b\ c\ d)$$

Exo  
1.15

est un produit de 3-cycles.

## 2 Groupes monogènes, groupes cycliques

### Sous-groupe engendré par un élément

**Proposition 38**

Le sous-groupe engendré par un élément  $a$  de  $G$  est  $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Démonstration.** Posons  $H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

- On a  $e = a^0 \in H$  et  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad a^p(a^q)^{-1} = a^{p-q} \in H$ , donc  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .
- Il contient  $a = a^1$ .
- Enfin, tout sous-groupe de  $G$  contenant  $a$  contient tous les itérés de  $a$ , donc  $H$ .

Ainsi,  $H$  est bien le plus petit sous-groupe de  $G$  contenant  $a$ . □

**Remarque** Pour un groupe noté additivement, le sous-groupe engendré par  $a$  est :

$$\{n.a \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, pour tout  $a \in \mathbb{Z}$ , le sous-groupe engendré par  $a$  est  $a\mathbb{Z}$ .

Rappelons (cf. proposition 8 de la page 6) que les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont tous de cette forme.

## Groupes monogènes

### Définition 10

Un groupe  $G$  est **monogène** s'il est engendré par l'un de ses éléments, c'est-à-dire s'il existe  $x \in G$  tel que  $G = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

Un tel élément  $x$  est alors appelé **générateur de  $G$** .

Un groupe est **cyclique** s'il est monogène et fini.

Exo  
1.16

**Ex. 44.**  $\mathbb{Z}$  est monogène, engendré par 1 (ou par  $-1$ ).

**Ex. 45.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les groupes  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{U}_n$  sont cycliques, engendrés respectivement par  $\bar{1}$  et  $e^{2i\pi/n}$ .

**Ex. 46.** Lorsque  $n = 2p - 1$  est impair,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est aussi engendré par  $\bar{2}$  puisque  $\bar{1} = p\bar{2}$ . Plus généralement, on verra à la proposition 41 de la page suivante quels sont les générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Ex. 47.** Si  $G$  est un groupe monogène, il est clair que tout groupe isomorphe à  $G$  est également monogène. En particulier, si  $p$  et  $q$  sont deux entiers naturels premiers entre eux, le théorème chinois (proposition 15 de la page 10) montre que  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  sont isomorphes en tant qu'anneaux et donc, *a fortiori*, en tant que groupes. On en déduit que  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  est cyclique.

## Structure des groupes monogènes

Soit  $G$  un groupe monogène et  $a$  un générateur de  $G$ .

L'application :

$$\begin{aligned}\varphi_a : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto a^n\end{aligned}$$

est donc surjective. Les règles de calcul sur les itérés :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \quad a^{p+q} = a^p a^q$$

montrent que  $\varphi_a$  est un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}$  dans  $G$ . Son noyau :

$$\text{Ker } \varphi_a = \{k \in \mathbb{Z} : a^k = e\}$$

est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , donc de la forme  $n\mathbb{Z}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  (cf. proposition 8 de la page 6). On obtient la description suivante de  $G$ .

### Proposition 39

Avec les notations précédentes :

- ou bien  $\varphi_a$  est injective et  $G$  est infini, isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ,
- ou bien  $\text{Ker } \varphi_a = n\mathbb{Z}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et :

$$G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$$

est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

L'entier  $n$  est alors le plus petit entier naturel  $k$  non nul tel que  $a^k = e$ .

Démonstration page 31

**Principe de démonstration.** Lorsque  $\text{Ker } \varphi_a = n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , on vérifie que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a^k \quad \text{si } x = \bar{k} \end{array}$$

et que cette dernière est un isomorphisme.

### Corollaire 40

Exo  
1.17

1. Tout groupe monogène infini est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .
2. Tout groupe cyclique de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Ex. 48.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le groupe  $\mathbb{W}_n$  des racines  $n$ -ièmes de l'unité est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### Proposition 41

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les générateurs de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont les classes des entiers premiers avec  $n$ . Il y en a donc  $\varphi(n)$ , où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler.

Démonstration page 31

**Principe de démonstration.** Remarquer que  $\bar{k}$  engendre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si, et seulement si,  $\bar{1}$  est dans le sous-groupe engendré par  $\bar{k}$ .

## 3 Ordre d'un élément dans un groupe

### Définition 11

Un élément  $a$  de  $G$  est **d'ordre fini** s'il existe un entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n = e$ . **L'ordre de  $a$**  est alors le plus petit entier naturel  $n$  non nul tel que  $a^n = e$ .

**Terminologie** Lorsqu'un élément n'est pas d'ordre fini, on dit aussi qu'il est **d'ordre infini**.

**Ex. 49.** L'élément neutre est d'ordre 1. C'est d'ailleurs le seul élément de  $G$  d'ordre 1.

**Ex. 50.** Les transpositions de  $S_n$  sont d'ordre 2.

En effet, si  $\tau$  est une transposition, alors  $\tau \neq \text{Id}_{[1,n]}$  et  $\tau^2 = \text{Id}_{[1,n]}$ .

**Attention** La relation  $a^n = e$  ne signifie pas que  $a$  est d'ordre  $n$ , mais seulement que son ordre divise  $n$  d'après la proposition suivante.

### Proposition 42

Un élément  $a$  d'un groupe  $G$  est d'ordre fini si, et seulement si, le sous-groupe engendré par  $a$  est fini et l'ordre  $p$  de  $a$  est alors le cardinal de ce sous-groupe. Il est caractérisé par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a^n = e \iff p \mid n.$$

**Démonstration.** C'est une conséquence de la proposition 39 de la page ci-contre. En particulier, le fait que  $a$  soit d'ordre fini est une traduction, par le noyau, de la non injectivité du morphisme  $\varphi_a$ .  $\square$

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

Exo  
1.18

**Remarque** L'ordre de  $a$  est donc le plus petit entier naturel non nul  $p$  tel que  $a^p = e$ , aussi bien pour l'ordre naturel de  $\mathbb{N}$  que pour la relation de divisibilité.

**Ex. 51.** Soit  $n \geq 5$ . La permutation  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$  de  $S_n$  est d'ordre 6.

En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma^k = (1\ 2)^k(3\ 4\ 5)^k$ , puisque deux cycles à supports disjoints commutent. Donc :

$$\sigma^6 = \text{Id}_{[1,n]}, \quad \sigma^2 = (5\ 4\ 3) \neq \text{Id}_{[1,n]} \quad \text{et} \quad \sigma^3 = (1\ 2) \neq \text{Id}_{[1,n]}.$$

Donc  $\sigma$  est d'ordre un diviseur de 6 mais pas un diviseur de 2 ni de 3. Ainsi, l'ordre de  $\sigma$  est égal à 6.

Exo  
1.19

### Corollaire 43

Dans un groupe fini, tout élément est d'ordre fini.

#### Remarque

- Dans un groupe infini, il y a toujours au moins un élément d'ordre fini : l'élément neutre qui est d'ordre 1. Les autres peuvent être d'ordre infini (comme dans  $\mathbb{Z}$  dont tous les éléments sauf 0 sont d'ordre infini) ou d'ordre fini.
- Il se peut même que tous les éléments soient d'ordre fini, comme le montre l'exemple suivant.

**Ex. 52.** Soit  $\mathbb{U}_\infty$  l'ensemble des racines de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}^*$  pour lesquels il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $z^n = 1$ .

- C'est un sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$ , puisqu'il contient 1, qu'il est évidemment stable par passage à l'inverse, et que si  $z_1^n = 1$  et  $z_2^p = 1$ , alors  $(z_1 z_2)^{np} = 1$ .
- Par définition, tout élément de  $\mathbb{U}_\infty$  est d'ordre fini.
- Il ne peut pas être fini de cardinal  $N$ , puisqu'il contient  $\mathbb{U}_{N+1}$ .

### Proposition 44

Un groupe  $G$  de cardinal fini  $n$  est cyclique si, et seulement s'il admet un élément d'ordre  $n$ .

**Démonstration.** Un élément de  $G$  est d'ordre  $n$  si, et seulement si, le sous-groupe qu'il engendre est de cardinal  $n$  c'est-à-dire est égal à  $G$  puisque  $G$  est de cardinal  $n$ .

Donc,  $G$  est cyclique si, et seulement s'il admet un élément d'ordre  $n$ . □

**Ex. 53.** Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls. On a vu à l'exemple 47 de la page 22 que si  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, alors  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ , donc cyclique. Montrons la réciproque par contraposition. Posons  $m$  le PPCM de  $p$  et  $q$ . On a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad p.x = 0 \quad \text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad m.x = 0 \quad \text{puisque } p \mid m.$$

Par symétrie entre  $p$  et  $q$ , on a le même résultat dans  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  et par conséquent :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \quad m.(x, y) = 0.$$

Ainsi, l'ordre de tout élément de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  divise  $m$  et donc, si  $p$  et  $q$  ne sont pas premiers entre eux, il n'y a aucun élément d'ordre  $pq$  dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$  puisqu'alors  $m < pq = \text{card}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}))$ .

**Remarque** Comme tout groupe cyclique est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , où  $n$  est son cardinal, on a ainsi montré qu'un produit de deux groupes cycliques est cyclique si, et seulement si, leurs cardinaux sont premiers entre eux.

En particulier, un produit de groupes cycliques n'est pas en général cyclique.

Exo  
1.20**Théorème 45**

L'ordre de tout élément d'un groupe fini  $G$  divise le cardinal de  $G$ .

Démonstration page 31

**Principe de démonstration dans le cas où  $G$  est commutatif**

Pour tout  $a \in G$ , on a  $\prod_{g \in G} (ag) = \prod_{g \in G} g$ .

La démonstration dans le cas général est non exigible. Elle est proposée dans l'exercice 1.21.

**Corollaire 46**

Dans un groupe  $G$  fini de cardinal  $n$ , on a  $\forall x \in G \quad x^n = e$ .

**Ex. 54.** Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique. Il est engendré par tout élément différent du neutre.

En effet, soit  $G$  un groupe de cardinal  $p$  premier. Alors  $G \neq \{e\}$ . Considérons donc un élément  $a$  de  $G$  différent de  $e$ . L'ordre de  $a$  est alors un diviseur de  $p$ , différent de 1 puisque  $a \neq e$ , donc est égal à  $p$ . Ainsi,  $G$  est cyclique (proposition 44 de la page ci-contre) et engendré par  $a$ .

**Ex. 55.** Montrons qu'un groupe cyclique  $G$  de cardinal  $n$  admet, pour tout diviseur  $d$  de  $n$ , un unique sous-groupe de cardinal  $d$  et que celui-ci est cyclique.

Comme deux groupes cycliques de cardinal  $n$  sont isomorphes, il suffit de montrer le résultat dans le cas où  $G = \mathbb{U}_n$ .

Soit  $d$  un diviseur de  $n$ .

- Le groupe  $\mathbb{U}_d$  est cyclique, de cardinal  $d$  et est un sous-groupe de  $\mathbb{U}_n$  puisque  $d \mid n$  et donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z^d = 1 \implies z^n = 1.$$

- Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{U}_n$  de cardinal  $d$ . Le corollaire 46 donne :

$$\forall z \in H \quad z^d = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad H \subset \mathbb{U}_d.$$

Cette inclusion et l'égalité des cardinaux (finis) donne alors  $H = \mathbb{U}_d$ .

Cela montre que  $\mathbb{U}_d$  est le seul sous-groupe de cardinal  $d$  de  $\mathbb{U}_n$ .

**Théorème 47 (Théorème d'Euler)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n$ , on a  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$ .

**Démonstration.** Soit  $a \in \mathbb{Z}$  premier avec  $n$ . Alors sa classe appartient au groupe des éléments inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Ce groupe étant de cardinal  $\varphi(n)$  par définition de l'indicatrice d'Euler, on en déduit que l'ordre de  $\bar{a}$  divise  $\varphi(n)$ , soit  $(\bar{a})^{\varphi(n)} = \bar{1}$ .

En termes de congruences, cela se réécrit  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$ . □

**Remarque** Lorsque  $p$  est un nombre premier, on retrouve le petit théorème de Fermat :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k \wedge p = 1 \implies k^{p-1} \equiv 1 [p] \quad \text{puis} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad k^p \equiv k [p].$$

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### Démonstrations

**Proposition 3** Soit  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'idéaux de  $A$ . Posons  $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ .

- Comme tous les  $I_\lambda$  sont des sous-groupes de  $(A, +)$ , ils contiennent 0 et sont stables par somme et passage à l'opposé. Donc leur intersection également, ce qui prouve que  $I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$ .
- Soit  $x \in I$  et  $a \in A$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $ax \in I_\lambda$  puisque  $I_\lambda$  est un idéal de  $A$ . Donc  $ax \in I$ .

**Proposition 4** Considérons l'intersection  $I$  de tous les idéaux de  $A$  contenant  $X$  (il en existe, puisque  $A$  est lui-même un idéal de  $A$  contenant  $X$ ). D'après la proposition précédente, il s'agit d'un idéal de  $A$ , il contient évidemment  $X$  et, par définition, tout idéal de  $A$  contenant  $X$  contient  $I$ .

**Proposition 5** Montrons que  $xA$  est le plus petit idéal de  $A$  contenant  $x$ .

- Par distributivité, l'application  $a \mapsto xa$  est un endomorphisme de groupe de  $(A, +)$ , donc son image  $xA$  est un sous-groupe de  $(A, +)$ .
- Pour tout  $x \in A$  et  $b \in A$ , on a  $xa \times b = x \times (ab) \in xA$ . Donc  $xA$  est un idéal de  $A$ .
- Comme  $x = x \times 1_A$ , on a bien  $x \in xA$ .
- Enfin, par définition, pour tout idéal  $I$  contenant  $x$  et pour tout  $a \in A$ , on a  $ax \in I$ , donc  $I$  contient  $xA$ .

**Proposition 6** Notons  $I = x_1A + \cdots + x_kA$  et montrons que c'est le plus petit idéal de  $A$  contenant tous les  $x_i$ .

- C'est un sous groupe de  $A$ , comme image du morphisme de groupes  $A^k \rightarrow A$   

$$(a_i)_{1 \leq i \leq k} \mapsto \sum_{i=1}^k x_i a_i.$$
- Il est clair que  $I$  est stable par multiplication par tout élément de  $A$  et qu'il contient tous les  $x_i$ .
- Enfin, par définition, tout idéal de  $A$  contenant  $x_1, \dots, x_k$ , contient  $a_1x_1, \dots, a_kx_k$ , pour tout  $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ , donc leur somme.

**Proposition 8** Soit  $H$  un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Si  $H = \{0\}$ , on a bien  $H = 0\mathbb{Z}$ . Sinon,  $H$  contient un élément  $p$  non nul et il contient aussi  $-p$ . Ainsi, l'ensemble des éléments strictement positifs de  $H$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Considérons son plus petit élément  $n$ .

- Par stabilité par addition de  $H$ , on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad kn = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{k \text{ fois}} \in H.$$

Comme  $0 \in H$ , on a  $0 \times n \in H$  puis, par stabilité par passage à l'opposé :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad kn \in H \quad \text{soit} \quad n\mathbb{Z} \subset H.$$

- Soit  $a \in H$ . La division euclidienne de  $a$  par  $n$  (qui est bien non nul par définition) s'écrit :

$$a = nq + r \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Alors  $r = a - nq$  appartient à  $H$  puisque  $a \in H$  et  $na \in n\mathbb{Z} \subset H$ . Comme  $n$  est le plus petit élément strictement positif de  $H$ , on en déduit  $r = 0$ , ce qui donne  $a = nq \in n\mathbb{Z}$ . Ainsi  $H \subset n\mathbb{Z}$ .

Conclusion :  $H = n\mathbb{Z}$ .

**Proposition 11** Grâce à la division euclidienne par  $n$ , tout entier est congru modulo  $n$  à un élément de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ .

Pour conclure, vérifions que les éléments  $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$  sont distincts deux à deux. Soit donc  $(k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$  tel que  $\overline{k} = \overline{\ell}$ . Alors  $n$  divise  $k - \ell$  et puisque  $-(n-1) \leq k - \ell \leq n-1$ , on en déduit  $k - \ell = 0$ , soit  $k = \ell$ .

**Proposition 12**

1. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Soit  $x$  et  $x'$  deux représentants de  $\alpha$  ainsi que  $y$  et  $y'$  deux représentants de  $\beta$ . On a :

$$\begin{cases} x \equiv x' [n] \\ y \equiv y' [n] \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x + y \equiv x' + y' [n] \\ x \times y \equiv x' \times y' [n] \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \overline{x+y} = \overline{x'+y'} \\ \overline{x \times y} = \overline{x' \times y'} \end{cases}$$

On peut donc poser  $\alpha + \beta = \overline{x+y}$  et  $\alpha \times \beta = \overline{x \times y}$  pour n'importe quels représentants  $x$  de  $\alpha$  et  $y$  de  $\beta$  et l'on a ainsi :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \quad \overline{x+y} = \overline{x+y} \quad \text{et} \quad \overline{x \times y} = \overline{x \times y}.$$

2. Pour l'associativité de l'addition, on écrit, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  :

$$\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x} + (\overline{y+z}) = \overline{x + (y+z)}$$

par définition de l'addition.

En utilisant l'associativité de l'addition de  $\mathbb{Z}$ , on a  $x + (y + z) = (x + y) + z$  et de la même façon que ci-dessus, on a  $\overline{(x+y)+z} = \overline{(x+y)} + \overline{z}$ .

On démontre de même l'associativité de la multiplication, la commutativité de l'addition et de la multiplication, ainsi que la distributivité.

Ensuite, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  :

$$\overline{0+x} = \overline{0+x} = \overline{x} \quad \text{et} \quad \overline{1 \times x} = \overline{1 \times x} = \overline{x}.$$

Enfin, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  :

$$\overline{x} + \overline{(-x)} = \overline{x-x} = \overline{0}$$

donc tout élément est symétrisable pour l'addition.

3. Le fait que la projection canonique soit un morphisme d'anneaux est une conséquence des relations suivantes déjà montrées :

$$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} \quad \overline{x \times y} = \overline{x} \times \overline{y} \quad \overline{x} \times \overline{1} = \overline{x}.$$

Elle est surjective par définition de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Son noyau est l'ensemble des entiers congrus à 0 modulo  $n$ , c'est-à-dire des multiples de  $n$ .

**Proposition 13** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \overline{k} \text{ inversible dans } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\iff \exists u \in \mathbb{Z} \quad \overline{k} \times \overline{u} = \overline{1} \\ &\iff \exists u \in \mathbb{Z} \quad \overline{ku} = \overline{1} \\ &\iff \exists u \in \mathbb{Z} \quad \exists v \in \mathbb{Z} \quad ku + nv = 1 \\ &\iff k \wedge n = 1 \quad (\text{théorème de Bézout}). \end{aligned}$$

**Théorème 14**

- Supposons  $n$  premier. Alors  $n \geq 2$ , donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un anneau commutatif non trivial. Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  différent de  $\overline{0}$ .

Alors il existe  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que  $\alpha = \overline{k}$  et ainsi  $k$  est premier avec  $n$  donc sa classe est inversible dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'après la proposition 13. On en déduit que  $\alpha$  est inversible.

Donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps.

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

- Supposons  $n$  non premier.

Si  $n = 1$ , alors  $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 1$  donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est non intègre puisque trivial. Sinon, il existe deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $n = ab$  avec  $1 < a < n$  et  $1 < b < n$ . Par suite :

$$\bar{a} \neq \bar{0} \quad \text{et} \quad \bar{b} \neq \bar{0} \quad \text{tandis que} \quad \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}.$$

Donc  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est non intègre et, *a fortiori*, n'est pas un corps.

### Proposition 15

- Soit  $k$  et  $\ell$  deux entiers tels que  $k \equiv \ell \pmod{nm}$ . Alors évidemment  $k$  et  $\ell$  ont même classe modulo  $n$  et même classe modulo  $m$ . L'application  $\varphi$  est donc bien définie.
- Le fait que  $\varphi$  soit un morphisme découle immédiatement de la même propriété pour les trois projections canoniques de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}$ . Par exemple :

$$\varphi([k]_{mn}[\ell]_{mn}) = \varphi([k\ell]_{mn}) = ([k\ell]_n, [k\ell]_m) = ([k]_n[\ell]_n, [k]_m[\ell]_m) = \varphi([k]_{mn})\varphi([\ell]_{mn}).$$

- Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\varphi([k]_{nm}) = ([0]_n, [0]_m)$ . Alors  $k$  est un multiple de  $n$  et  $m$ , donc un multiple de  $nm$  puisque  $n$  et  $m$  sont premiers entre eux. On en déduit  $[k]_{nm} = [0]_{nm}$ . Donc  $\varphi$  est injective (son noyau est trivial).

Comme  $\text{card}(\mathbb{Z}/(nm)\mathbb{Z}) = nm = \text{card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ , on en déduit que  $\varphi$  est bijective.

Ainsi,  $\varphi$  est un isomorphisme d'anneaux.

**Proposition 19** Les anneaux  $\mathbb{Z}/(n_1 \cdots n_r)\mathbb{Z}$  et  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$  étant isomorphes par le théorème chinois (corollaire 17 de la page 11), ils ont autant d'éléments inversibles.

Or, les inversibles de l'anneau produit  $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z})$  sont les  $(u_1, \dots, u_r)$ , où  $u_1, \dots, u_r$  sont inversibles respectivement dans  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$ .

Il y en a donc  $\varphi(n_1) \cdots \varphi(n_r)$ .

**Proposition 21** Il est clair que  $\mathbb{K}[X]$  est un anneau commutatif non réduit à  $\{0\}$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls. Écrivons :

$$A = \sum_{i=0}^p a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^q b_j X^j \quad \text{avec} \quad p = \deg A \quad \text{et} \quad q = \deg B.$$

Par définition du produit, le coefficient du terme de degré  $n = p + q$  de  $AB$  est  $a_p b_q$ , donc non nul comme produit d'éléments non nuls du corps  $\mathbb{K}$ . Ainsi  $AB \neq 0$ .

**Proposition 23** Supposons  $A$  inversible. Il existe alors  $B \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $AB = 1$  et l'on a donc  $\deg A + \deg B = \deg 1 = 0$ . Ainsi,  $\deg A \in \mathbb{N}$  et  $\deg B \in \mathbb{N}$ , puis  $\deg A = \deg B = 0$ , c'est-à-dire  $A \in \mathbb{K}^*$  et  $B \in \mathbb{K}^*$ .

Réciproquement, si  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on a  $\lambda \lambda^{-1} = 1$ , donc  $\lambda$  est inversible.

**Proposition 24** Supposons  $A \mid B$  et  $B \mid A$ . Il existe alors deux polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $B = AQ_1$  et  $A = BQ_2$ .

- Si  $A = 0$ , alors  $B = AQ_1 = 0$  et donc  $B = 1 \times A$ , avec  $1 \in \mathbb{K}^*$ .
- Sinon, on a  $A = AQ_1Q_2$  et comme  $A \neq 0$ , l'intégrité de  $\mathbb{K}[X]$  donne  $Q_1Q_2 = 1$ , donc  $Q_1$  et  $Q_2$  sont inversibles. On a alors  $A = \lambda B$ , avec  $\lambda = Q_1 \in \mathbb{K}^*$  d'après la proposition 23.

Réciproquement, si  $A = \lambda B$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , alors  $B = \lambda^{-1}A$  donc  $B \mid A$  et  $A \mid B$ .

**Proposition 25**

- Supposons  $A$  irréductible. Alors  $A$  est non constant par définition. Si  $A = BC$ , alors  $B \mid A$ , donc  $B$  est constant ou associé à  $A$ . Dans ce deuxième cas,  $A = \lambda B$ , avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , et comme  $A = BC$ , on en déduit que  $C$  est égal à la constante  $\lambda$  par intégrité de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Réciproquement, supposons  $A$  non constant (en particulier non nul) et :

$$\forall (B, C) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad A = BC \implies (B \in \mathbb{K} \text{ ou } C \in \mathbb{K}).$$

Soit  $B$  un diviseur de  $A$ . Il existe  $C \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = BC$ . Par hypothèse,  $B$  est constant (non nul, puisque  $A \neq 0$ ) ou  $C$  est constant (non nul pour la même raison) et dans ce cas  $A$  est associé à  $B$ .

Comme  $A$  est non constant, on en déduit qu'il est irréductible.

**Proposition 27** Il est évident que si  $P$  divise  $A$ , alors  $P$  et  $A$  ne sont pas premiers entre eux puisqu'ils admettent  $P$  comme diviseur commun non constant.

Supposons que  $P$  et  $A$  soient non premiers entre eux. Ils admettent alors un diviseur commun  $D$  non constant. Par suite  $D$  divise  $P$  irréductible, donc est associé à  $P$ . Comme  $D$  divise  $A$ , on en déduit que  $P$  divise  $A$ .

**Théorème 28** Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

- Si  $I = \{0\}$ , alors  $I = 0\mathbb{K}[X]$ .
- Sinon, parmi les éléments non nuls de  $I$ , il en existe un de degré minimal. Notons  $B$  un tel polynôme.

Comme  $B$  appartient à  $I$ , on a  $B\mathbb{K}[X] \subset I$  puisque  $B\mathbb{K}[X]$  est le plus petit idéal de  $\mathbb{K}[X]$  contenant  $B$ .

Réciproquement, soit  $A \in I$ . Effectuons la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :  $A = BQ + R$ , avec  $\deg R < \deg B$ . Or,  $R = A - BQ$  appartient à  $I$  puisque  $A \in I$  et  $BQ \in B\mathbb{K}[X] \subset I$ . Par minimalité du degré de  $B$  parmi les polynômes non nuls de  $I$ , on en déduit  $R = 0$ , c'est-à-dire  $A = BQ \in B\mathbb{K}[X]$ . Donc  $I \subset B\mathbb{K}[X]$ .

Finalement  $I = B\mathbb{K}[X]$ .

**Proposition 30**

- Considérons le générateur de l'idéal  $A_1\mathbb{K}[X] + \cdots + A_n\mathbb{K}[X]$ , c'est-à-dire l'unique  $D \in \mathbb{K}[X]$ , nul ou unitaire, tel que  $D\mathbb{K}[X] = A_1\mathbb{K}[X] + \cdots + A_n\mathbb{K}[X]$ . Ainsi,  $D\mathbb{K}[X]$  est le plus petit idéal de  $\mathbb{K}[X]$  contenant  $\{A_1, \dots, A_n\}$  (proposition 6 de la page 4), donc pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ , puisque  $P\mathbb{K}[X]$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  :

$$\begin{aligned} P \mid D &\iff D\mathbb{K}[X] \subset P\mathbb{K}[X] \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad A_i \in P\mathbb{K}[X] \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P \mid A_i. \end{aligned}$$

- Enfin, puisque  $D \in D\mathbb{K}[X] = A_1\mathbb{K}[X] + \cdots + A_n\mathbb{K}[X]$ , on a par définition :

$$\exists (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{K}[X]^n \quad D = A_1U_1 + \cdots + A_nU_n.$$

**Théorème 31** Supposons  $A \wedge B = 1$  et  $A \mid BC$ . D'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $AU + BV = 1$ , ce qui implique  $ACU + BCV = C$ .

Comme  $A$  divise  $ACU$  et  $BCV$ , on a  $A \mid ACU + BCV$  et donc  $A \mid C$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

**Corollaire 32** Par récurrence, il suffit de le montrer dans le cas de deux facteurs. Soit donc  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois polynômes.

- Si  $A$  est premier avec  $BC$ , il est évidemment premier avec  $B$  et avec  $C$ .
- Réciproquement, supposons  $A \wedge B = A \wedge C = 1$ . Soit  $D$  un diviseur commun à  $A$  et  $BC$ . Alors  $D$  est premier avec  $B$  (puisque il divise  $A$  qui est premier avec  $B$ ) et comme il divise  $BC$ , le théorème de Gauss nous dit que  $D$  divise  $C$ . Ainsi,  $D$  est un diviseur commun à  $A$  et  $C$  qui sont premiers entre eux, ce qui prouve que  $D$  est constant non nul. On a donc montré que  $A$  et  $BC$  étaient premiers entre eux.

**Théorème 33** Montrons par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$H_n$  : « tout polynôme  $P$  de degré  $n$  est produit d'irréductibles. »

- $H_1$  est immédiat car tout polynôme de degré 1 est irréductible.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . Supposons  $H_1, \dots, H_{n-1}$ . Soit  $P$  de degré  $n$ .
  - \* Si  $P$  est irréductible, alors il est évidemment produit d'irréductibles (un seul).
  - \* Sinon, on peut écrire  $P = AB$ , avec  $1 \leq \deg A, \deg B < n$ . Par hypothèse de récurrence, les polynômes  $A$  et  $B$  sont des produits d'irréductibles et par suite  $P = AB$  aussi.

D'où  $H_n$ .

### Théorème 34

**Existence.** Si  $A$  est constant non nul, on prend  $\lambda = A$  et  $\alpha_P = 0$  pour tout  $P \in \mathcal{P}$ .

Sinon, on utilise le théorème 33 pour écrire  $A = P_1 \cdots P_r$ , avec  $P_1, \dots, P_r$  irréductibles. En factorisant chaque  $P_i$  par son coefficient dominant, cela donne  $A = \lambda Q_1 \cdots Q_r$ , où  $\lambda$  est dans  $\mathbb{K}^*$  et  $Q_1, \dots, Q_r$  dans  $\mathcal{P}$ . Pour tout  $P \in \mathcal{P}$ , on prend alors pour  $\alpha_P$  le nombre de  $Q_i$  égaux à  $P$ .

**Unicité.** Soit  $A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\alpha_P}$  une telle décomposition. Comme les éléments de  $\mathcal{P}$  sont unitaires, le scalaire  $\lambda$  est égal au coefficient dominant de  $A$ .

Considérons une autre décomposition  $A = \lambda \prod_{P \in \mathcal{P}} P^{\beta_P}$ . Soit  $P_0 \in \mathcal{P}$ . Supposons par exemple  $\alpha_{P_0} \leq \beta_{P_0}$ . En simplifiant par  $P_0^{\alpha_{P_0}} \neq 0$  ( $\mathbb{K}[X]$  est intègre), on obtient :

$$\prod_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_0\}} P^{\alpha_P} = P_0^{\beta_{P_0} - \alpha_{P_0}} \prod_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_0\}} P^{\beta_P}.$$

Le membre de gauche de cette égalité est un polynôme premier avec  $P_0$  (produit de polynômes premiers avec  $P_0$ , cf. corollaire 32 de la page 16). Donc  $P_0^{\beta_{P_0} - \alpha_{P_0}}$  est premier avec  $P_0$ , ce qui prouve que  $\beta_{P_0} - \alpha_{P_0} = 0$ .

Les familles  $(\alpha_P)_{P \in \mathcal{P}}$  et  $(\beta_P)_{P \in \mathcal{P}}$  sont donc égales, ce qui montre l'unicité de la décomposition.

**Proposition 36** Soit  $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de sous-groupes de  $G$ . Posons  $H = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ .

- Comme tous les  $H_\lambda$  sont des sous-groupes de  $G$ , ils contiennent son élément neutre  $e$ , donc  $e \in H$ .
- Soit  $x \in H$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $x^{-1} \in H_\lambda$  puisque  $H_\lambda$  est un sous-groupe de  $G$ . Donc  $x^{-1} \in H$ .
- Soit  $(x, y) \in H^2$ . Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $xy \in H_\lambda$  puisque  $H_\lambda$  est un sous-groupe de  $G$ . Donc  $xy \in H$ .

Donc  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Proposition 39**

- Le premier cas est évident.
- Supposons  $\text{Ker } \varphi_a = n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . On peut définir l'application :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto a^k \quad \text{si } x = \bar{k}\end{aligned}$$

car si  $\bar{k} = \bar{\ell}$ , alors il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $\ell = k + nq$  et alors :

$$a^\ell = a^k a^{nq} = a^k (a^n)^q = a^k e^q = a^k,$$

donc  $a^k$  ne dépend que de la classe de  $k$  modulo  $n$ .

L'application  $\tilde{\varphi}_a$  ainsi définie de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $G$  vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \tilde{\varphi}_a(\bar{k}) = \varphi_a(k) = a^k.$$

\* C'est un morphisme de groupes de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $G$  puisque :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \quad \tilde{\varphi}_a(\bar{k} + \bar{\ell}) = \tilde{\varphi}_a(\bar{k} + \bar{\ell}) = a^{k+\ell} = a^k a^\ell = \tilde{\varphi}_a(\bar{k}) \tilde{\varphi}_a(\bar{\ell}).$$

\* Elle est surjective puisque  $a$  engendre  $G$ .

\* Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On a :

$$\tilde{\varphi}_a(\bar{k}) = e \iff \varphi_a(k) = e \iff k \in \text{Ker } \varphi_a \iff k \in n\mathbb{Z} \iff \bar{k} = 0.$$

Donc  $\text{Ker } \tilde{\varphi}_a = \{\bar{0}\}$  ce qui prouve que  $\tilde{\varphi}_a$  est injective.

Finalement,  $\tilde{\varphi}_a$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sur  $G$ .

Comme  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n-1}\}$ , on en déduit que :

$$G = \{\tilde{\varphi}_a(\bar{0}), \tilde{\varphi}_a(\bar{1}), \tilde{\varphi}_a(\bar{2}), \dots, \tilde{\varphi}_a(\bar{n-1})\} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

Par l'isomorphisme  $\tilde{\varphi}_a$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  les équivalences :

$$a^k = e \iff \bar{k} = \bar{0} \iff n \mid k$$

donc  $n$  est le plus petit entier naturel  $k$  non nul tel que  $a^k = e$ .

**Proposition 41** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est engendré par  $\bar{1}$  ce qui signifie que tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  contenant  $\bar{1}$  est égal à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Donc le sous-groupe engendré par  $\bar{k}$  est égal à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si, et seulement s'il contient  $\bar{1}$ , ce qui équivaut successivement :

- à l'existence d'un entier  $\ell$  tel que  $\ell\bar{k} = \bar{1}$ ,
- à l'existence de  $(\ell, a) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\ell k = 1 + an$ ,
- à  $k \wedge n = 1$  d'après le théorème de Bézout.

**Théorème 45** Démonstration dans le cas où  $G$  est commutatif. Notons  $n = \text{card } G$ . Soit  $a \in G$ .

L'application  $g \mapsto ag$  est une permutation de  $G$  (de réciproque  $g \mapsto a^{-1}g$ ). Comme le groupe  $G$  est commutatif, le produit  $P = \prod_{h \in G} h$  a bien un sens et, par le changement d'indice  $[h = ag]$ , on a :

$$P = \prod_{h \in G} h = \prod_{g \in G} (ag).$$

Toujours par commutativité de  $G$ , on en déduit :

$$P = a^{\text{card } G} \prod_{g \in G} g = a^n P.$$

Par régularité de  $P$ , cela donne  $a^n = e$ . D'après la proposition 42 de la page 23, cela implique que l'ordre de  $a$  divise  $n$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

### S'entraîner et approfondir

#### Anneaux, arithmétique de $\mathbb{Z}$

**1.1** Montrer que tout anneau fini intègre est un corps.

$\rightarrow^2$

**1.2** Soit  $A$  et  $B$  deux anneaux. À quelle condition l'anneau produit  $A \times B$  est-il intègre ? est-il un corps ?

**1.3** Montrer que les suites réelles convergeant vers 0 constituent un idéal de l'anneau des suites réelles bornées.

S'agit-il d'un idéal de l'anneau de toutes les suites réelles ?

**1.4** 1. Montrer qu'un idéal contenant un élément inversible de  $A$  est égal à  $A$ .

$\rightarrow^3$  2. Quels sont les idéaux d'un corps ?

3. Montrer que tout morphisme d'anneaux entre deux corps est injectif.

**1.5** Montrer qu'un anneau commutatif  $A$  non trivial ayant pour seuls idéaux  $A$  et  $\{0\}$  est un corps (réciproque de la deuxième question de l'exercice 1.4).

**1.6** Montrer que  $\mathbb{R} \times \{0\}$  muni des lois induites par celles de l'anneau produit  $\mathbb{R}^2$  est un anneau mais n'est pas un sous-anneau de  $\mathbb{R}^2$ .

#### Congruences, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

**1.7** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer :

$\rightarrow^{12}$

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

*Indication.* On pourra considérer l'ensemble des rationnels de la forme  $p/n$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ .

**1.8** Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\varphi(n)$  divise  $n$ .

**1.9** Montrer que si  $n$  est produit de nombres premiers distincts, alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \ [n].$$

#### Arithmétique des polynômes

**1.10** Le polynôme  $P = X^4 + X^2 + 1$

$\rightarrow^{14}$  1. a-t-il des racines dans  $\mathbb{C}$  ? dans  $\mathbb{R}$  ? dans  $\mathbb{Q}$  ?

2. est-il irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$  ? dans  $\mathbb{R}[X]$  ? dans  $\mathbb{Q}[X]$  ?

**1.11** Montrer que le polynôme  $P = X^4 + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

\* **1.12** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes premiers entre eux et non tous les deux constants, il existe un unique couple  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que :

$$AU + BV = 1 \quad \text{avec} \quad \deg U < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V < \deg A.$$

## Algèbres

**1.13** Montrer que toute algèbre intègre de dimension finie  $A$  est un corps.  
 $\rightarrow^{18}$

\* **1.14** Soit  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre intègre de dimension finie  $n \geq 2$ .

1. Soit  $a \in A$  tel que  $(1_A, a)$  soit une famille libre.

(a) Montrer qu'il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que  $\sum_{k=0}^n \lambda_k a^k = 0$ .

(b) En introduisant le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , montrer qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $\beta \neq 0$ , tel que  $(a - \alpha 1_A)^2 + \beta^2 1_A = 0$ .

2. Montrer qu'il existe  $u \in A$  tel que  $u^2 = -1_A$  puis que  $(1_A, u)$  est une base de  $A$ .

3. Montrer que  $\mathbb{C}$  est, à isomorphisme près, la seule  $\mathbb{R}$ -algèbre intègre de dimension finie  $n \geq 2$ .

## Groupes

**1.15** 1. Soit  $\sigma \in S_n$  et  $(a, b) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $a \neq b$ .

$\rightarrow^{21}$  Montrer que  $\sigma \circ (a \ b) \circ \sigma^{-1}$  est la transposition  $(\sigma(a) \ \sigma(b))$ .

2. Montrer que l'ensemble des transpositions du type  $(i \ i+1)$  est une partie génératrice de  $S_n$ .

3. Montrer que le groupe  $S_n$  est engendré par la transposition  $\tau = (1 \ 2)$  et le  $n$ -cycle  $\gamma = (1 \ 2 \ \dots \ n)$ .

**1.16** Montrer que  $\mathbb{Z}^2$  n'est pas monogène.  
 $\rightarrow^{22}$

**1.17**  $\rightarrow^{23}$  Montrer que  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

**1.18** Soit  $a$  un élément d'ordre  $n$  d'un groupe  $G$ .  
 $\rightarrow^{24}$

1. Montrer que pour tout diviseur  $d$  de  $n$ , l'ordre de  $a^d$  est  $n/d$ .
2. Quel est l'ordre de  $a^k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$  ?

**1.19** Montrer que si  $G$  est fini, le sous-groupe engendré par une partie  $A$  est l'ensemble des produits d'éléments de  $A$ .  
 $\rightarrow^{24}$

**1.20** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $n \mid \varphi(2^n - 1)$ .  
 $\rightarrow^{25}$

**1.21 Théorème de Lagrange**

Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On définit sur  $G$  la relation :

$$x \mathcal{R} y \iff x^{-1}y \in H.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence d'un élément  $x \in G$  est :

$$xH = \{xh \mid h \in H\}.$$

2. Montrer que les classes d'équivalence pour cette relation ont toutes même cardinal égal à celui de  $H$ .

3. En déduire que le cardinal de  $H$  divise celui de  $G$ .

4. En déduire une démonstration du théorème 45 de la page 25 : l'ordre de tout élément de  $G$  divise le cardinal de  $G$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

- 1.22 Déterminer l'ordre d'une permutation  $\sigma \in S_n$  en fonction des longueurs des cycles intervenant dans sa décomposition en cycles à supports disjoints.
- 1.23 Soit  $G$  un groupe commutatif fini, ainsi que  $a$  et  $b$  deux éléments de  $G$  d'ordres respectifs  $m$  et  $n$ .
1. (a) Montrer que si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, alors  $ab$  est d'ordre  $mn$ .  
(b) Que peut-on dire de l'ordre de  $ab$  dans le cas général ?
  2. (a) En déduire que si  $r$  est le PPCM des ordres des éléments de  $G$ , il existe un élément de  $G$  d'ordre  $r$ .  
(b) Qu'en est-il si  $G$  n'est plus supposé commutatif ?
  3. Soit  $\mathbb{K}$  un corps quelconque. Montrer, en utilisant la question 2(a), que tout sous-groupe (multiplicatif) fini de  $\mathbb{K}^*$  est cyclique.  
*Indication.* On pourra admettre que tout polynôme de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  admet au maximum  $n$  racines.

## Solutions des exercices

**1.1** Soit  $A$  un anneau fini intègre et  $a \in A$  non nul. L'application  $x \mapsto ax$  de  $A$  dans  $A$  est injective par intégrité de  $A$ . Comme  $A$  est fini, elle est bijective, donc 1 admet un antécédent ce qui signifie qu'il existe  $b \in A$  tel que  $ab = 1$ . Comme  $A$  est commutatif (puisque intègre), on a aussi  $ba = 1$  et donc  $a$  est inversible.

Ainsi,  $A$  est un corps.

**1.2** Supposons  $A \times B$  intègre (ce qui est le cas en particulier si c'est un corps). Alors l'égalité  $(1_A, 0_B) \times (0_A, 1_B) = (0_A, 0_B)$  prouve que  $(1_A, 0_B) = (0_A, 0_B)$  ou  $(0_A, 1_B) = (0_A, 0_B)$ . L'un des deux anneaux  $A$  ou  $B$  est donc trivial et ils ne peuvent pas l'être tous les deux, sinon leur produit le serait également.

Supposons maintenant  $B$  trivial. L'application  $f : A \rightarrow A \times B$  est alors une bijection  $x \mapsto (x, 0_B)$

et c'est un morphisme d'anneaux. En effet :

$$f(1_A) = (1_A, 0_B) = (1_A, 1_B) \quad \text{puisque } B \text{ est trivial,}$$

les deux autres propriétés étant évidentes.

Par l'isomorphisme  $f$ , il est alors immédiat que  $A \times B$  est intègre si, et seulement si,  $A$  est intègre et que  $A \times B$  est un corps si, et seulement si,  $A$  est un corps.

En conclusion, un produit de deux anneaux est :

- intègre si, et seulement si, l'un des deux anneaux est intègre et l'autre trivial ;
- un corps si, et seulement si, l'un des deux est un corps et l'autre trivial.

**1.3** • Notons  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  l'ensemble des suites bornées. Il s'agit d'un sous-anneau de  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  : cela traduit le fait qu'une somme, une différence et un produit de suites bornées sont des suites bornées et que la suite constante  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

L'ensemble  $C_0$  des suites tendant vers 0 est une partie de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  puisqu'une suite convergente est bornée. C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  donc en particulier un sous-groupe additif. La deuxième propriété de la définition 1 de la page 3 vient du fait que le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.

- En revanche,  $C_0$  n'est pas un idéal de  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  puisque, par exemple, le produit de la suite  $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$  par  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.

**1.4** 1. Si l'idéal  $I$  de  $A$  contient un élément inversible  $u$ , il contient aussi tout élément  $a \in A$ , puisque  $a = u \times (u^{-1}a)$ .

2. Un idéal non réduit à  $\{0\}$  d'un corps  $\mathbb{K}$  contient un élément inversible, donc est égal à  $\mathbb{K}$  d'après la question précédente.

Réiproquement,  $\mathbb{K}$  et  $\{0\}$  sont évidemment des idéaux de  $\mathbb{K}$ .

3. Un corps étant un anneau non trivial, tout morphisme d'anneaux  $\varphi$  entre deux corps  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}'$  est non nul puisque  $\varphi(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'} \neq 0_{\mathbb{K}'}$ , donc son noyau est un idéal de  $\mathbb{K}$  différent de  $\mathbb{K}$ . Il est donc réduit à  $\{0\}$  d'après la question précédente, ce qui prouve que  $\varphi$  est injectif (caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes).

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

**1.5** Soit  $A$  un anneau commutatif non trivial dans lequel les seuls idéaux sont  $A$  et  $\{0\}$ . Montrons que tout élément non nul de  $A$  est inversible.

Soit  $x \in A$  non nul. L'idéal  $xA$  engendré par  $x$  contient  $x$  donc est différent de  $\{0\}$ . On en déduit que  $xA = A$  et, en particulier, qu'il existe  $a \in A$  tel que  $xa = 1$ , ce qui prouve que  $x$  est inversible.

**1.6** •  $\mathbb{R} \times \{0\}$  est un groupe commutatif comme produit des deux groupes commutatifs  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\{0\}, +)$ .

• Il est évidemment stable par produit puisque  $(x, 0) \times (y, 0) = (xy, 0)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

• La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition comme dans l'anneau  $\mathbb{R}^2$ .

• Il est immédiat que  $(1, 0)$  est neutre pour la multiplication de  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .

Donc  $\mathbb{R} \times \{0\}$  est un anneau. Ce n'est pas un sous-anneau de  $\mathbb{R}^2$  puisqu'il ne contient pas l'élément neutre multiplicatif  $(1, 1)$  de ce dernier.

**1.7** Considérons  $A = \left\{ \frac{p}{n} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Ses éléments admettent une forme irréductible  $\frac{k}{d}$ , avec  $k \wedge d = 1$  et  $d \mid n$ . On a donc :

$$A = \bigcup_{d \mid n} A_d \quad \text{où} \quad A_d = \left\{ \frac{k}{d} \mid k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad k \wedge d = 1 \right\},$$

cette réunion étant disjointe par unicité du représentant irréductible d'un rationnel. De plus :

$$A \cap ]0, 1] = \left\{ \frac{p}{n} \mid p \in [\![1, n]\!] \right\} \quad \text{et} \quad A_d \cap ]0, 1] = \left\{ \frac{k}{d} \mid k \in [\![1, d]\!] \quad \text{et} \quad k \wedge d = 1 \right\}.$$

Donc :

$$n = \text{card}(A \cap ]0, 1]) = \sum_{d \mid n} \text{card}(A_d \cap ]0, 1]) = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

**1.8** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varphi(n) \mid n$ .

Notons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des diviseurs premiers de  $n$  et écrivons  $n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p}$ .

Alors  $\varphi(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} (p^{\alpha_p} - p^{\alpha_p - 1}) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{\alpha_p - 1}(p - 1)$ . Donc  $\prod_{p \in \mathcal{P}_n} (p - 1) \mid \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$ .

• Si  $n$  a un diviseur premier impair, on en déduit donc que  $2 \in \mathcal{P}_n$ , et il ne peut alors avoir qu'un seul diviseur premier impair puisque  $\prod_{p \in \mathcal{P}_n} p$  n'est pas divisible par 4.

Donc, soit  $n = 2^\alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ , soit  $n = 2^\alpha p^\beta$ , où  $p$  est un nombre premier impair et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Dans le deuxième cas,  $p - 1$  divise  $2p$  et comme il est premier avec  $p$ , il divise 2 d'après le théorème de Gauss, ce qui donne  $p = 3$ .

• Réciproquement :

- \*  $n = 1$  est solution puisque  $\varphi(1) = 1$ ,
- \* si  $n = 2^\alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\varphi(n) = 2^{\alpha-1} \mid n$ ,
- \* si  $n = 2^\alpha 3^\beta$ , avec  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , alors :

$$\varphi(n) = 2^{\alpha-1} \times 2 \times 3^{\beta-1} = 2^\alpha 3^{\beta-1} \mid n.$$

En conclusion, les solutions sont les entiers de la forme :

$$2^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n = 2^\alpha 3^\beta \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

**1.9** Écrivons  $n = p_1 \cdots p_r$ , où  $p_1, \dots, p_r$  sont des nombres premiers distincts.

On a donc  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$ .

Soit  $a \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Pour montrer  $a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \pmod{n}$  il suffit, par le théorème chinois, de montrer :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \pmod{p_i}.$$

Soit  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

- Si  $p_i \mid a$ , alors  $a^{1+k\varphi(n)} \equiv 0 \equiv a \pmod{p_i}$ .
- Sinon, on a  $a^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$  d'après le petit théorème de Fermat (cf. théorème 47 de la page 25) et donc  $a^{k\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p_i}$  puisque  $k\varphi(n)$  est un multiple de  $p_i - 1$ .

On en déduit  $a^{1+k\varphi(n)} \equiv a \pmod{p_i}$ .

D'où le résultat.

**1.10** 1. Le polynôme  $P$  a (au moins) une racine dans  $\mathbb{C}$  comme tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$ .

Il n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}$  et, *a fortiori*, pas dans  $\mathbb{Q}$ , puisque  $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) > 0$ .

2. Comme il est de degré 4, il n'est irréductible ni dans  $\mathbb{C}[X]$  ni dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Il n'est pas non plus irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$  comme le montrent les égalités suivantes :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

**1.11** Supposons qu'il soit réductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Comme il n'a pas de racine rationnelle (il n'a même pas de racine réelle), il ne peut pas admettre de diviseur de degré 1. Il s'écrit donc comme un produit de deux polynômes de degré 2. Comme  $X^4 + 1$  est unitaire, on peut même les supposer tous les deux unitaires. On a donc :

$$P = (X^2 + aX + b)(X^2 + \alpha X + \beta) \quad \text{avec } (a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^4.$$

Par unicité des coefficients, on a les relations :

$$a + \alpha = 0 \quad a\alpha + b + \beta = 0 \quad a\beta + ab = 0 \quad \text{et} \quad b\beta = 1.$$

On en déduit que  $b$  et  $\beta$  sont non nuls et de même signe, donc  $b + \beta \neq 0$ .

Par conséquent,  $\alpha = -a \neq 0$  et la troisième égalité, qui s'écrit  $a(\beta - b) = 0$ , donne  $b = \beta$ . Finalement,  $b = \beta = \pm 1$  et donc  $a^2 = \pm 2$ , ce qui est impossible avec  $a \in \mathbb{Q}$ .

Donc  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**1.12 Unicité.** Supposons l'existence de deux tels couples  $(U_1, V_1)$  et  $(U_2, V_2)$ . On a alors :

$$A(U_1 - U_2) = B(V_2 - V_1).$$

Donc  $A \mid B(V_2 - V_1)$  et comme  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, on a  $A \mid (V_2 - V_1)$ .

Or,  $\deg(V_2 - V_1) < \deg A$ , donc  $V_2 - V_1 = 0$ , ce qui donne  $V_1 = V_2$ . Par symétrie, on a donc aussi  $U_1 = U_2$ , d'où l'unicité.

**Existence.** Supposons, par exemple,  $\deg A > 0$ . Alors  $B \neq 0$ , sinon  $A$  serait un diviseur non constant commun à  $A$  et  $B$ . On en déduit que  $A$  et  $B$  sont tous les deux non nuls, et il en est de même, par symétrie, si  $\deg B > 0$ .

Comme  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, le théorème de Bézout nous donne deux polynômes  $U_0$  et  $V_0$  tels que  $AU_0 + BV_0 = 1$ . Notons  $Q$  et  $U$  respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de  $U_0$  par  $B$ . On a donc  $U_0 = BQ + U$  ; posons  $V = V_0 + AQ$  de sorte que l'on ait :

$$AU + BV = A(U_0 - BQ) + B(V_0 + AQ) = AU_0 + BV_0 = 1.$$

- D'une part, par définition de  $U$ , on a  $\deg U < \deg B$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

- Pour prouver que le couple  $(U, V)$  convient, il reste à montrer  $\deg V < \deg A$ . On a  $\deg(AU) = \deg A + \deg U < \deg A + \deg B$  puisque  $\deg U < \deg B$  et  $\deg A \neq -\infty$ . De plus,  $\deg 1 = 0 < \deg A + \deg B$ , donc :

$$\deg V \deg B = \deg(BV) = \deg(1 - AU) < \deg A + \deg B.$$

On en déduit  $\deg V < \deg A$  puisque  $\deg B \neq -\infty$ .

Finalement, le couple  $(U, V)$  répond à la question.

$$\deg V \deg B = \deg(BV) = \deg(1 - AU) < \deg A + \deg B.$$

- 1.13** Soit  $a \neq 0$  dans  $A$ . Par bilinéarité du produit, l'application  $x \mapsto ax$  est un endomorphisme d'espace vectoriel de  $A$ . L'intégrité de  $A$  donne son injectivité, donc sa bijectivité puisque  $A$  est un espace vectoriel de dimension finie.

Par suite, il existe un élément  $b \in A$  tel que  $ab = 1$ , donc  $a$  est inversible (on rappelle que  $A$  est commutative puisqu'intègre).

- 1.14** 1. (a) La famille  $(1_A, a, \dots, a^n)$  est liée puisque l'espace vectoriel  $A$  est de dimension  $n$ .

On en déduit l'existence de  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  non nul tel que  $\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i = 0$ .

- (b) Le polynôme non nul  $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  est donc tel que  $P(a) = 0$ . Parmi

les polynômes  $P$  non nuls tels que  $P(a) = 0$ , choisissons-en un de degré minimal. Quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut supposer un tel polynôme  $\Pi$  unitaire. Il est différent de 1 puisque  $\Pi(a) = 0_A \neq 1_A = 1(a)$ . Donc  $\deg \Pi \geq 1$ .

Supposons  $\Pi$  non irréductible. Il existe alors deux polynômes  $Q$  et  $R$  non constants tels que  $\Pi = QR$ . Comme l'application  $P \mapsto P(a)$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $A$  (exemple 38 de la page 19), on a alors  $0 = \Pi(a) = Q(a)R(a)$  et comme  $A$  est intègre, on en déduit  $Q(a) = 0$  ou  $R(a) = 0$ . C'est absurde puisque  $Q$  et  $R$  sont de degrés strictement inférieurs à  $\deg \Pi$ .

Donc  $\Pi$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- Il ne peut pas être de degré 1, sinon il serait de la forme  $\Pi = X - \alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , et alors la relation  $\Pi(a) = 0$  donnerait  $a = \alpha 1_A$  qui est contradictoire avec l'hypothèse d'indépendance de  $(1_A, a)$ .
- Il est donc de degré 2 à discriminant strictement négatif, donc de la forme :

$$\Pi = (X - \alpha)^2 + \beta^2 \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \beta \neq 0.$$

La relation  $\Pi(a) = 0$  donne alors  $(a - \alpha 1_A)^2 + \beta^2 1_A = 0$ .

2. Puisque  $n \geq 2$ , il existe un élément  $a$  de  $A$  qui n'est pas dans la droite  $\text{Vect}(1_A)$ . En utilisant les résultats et notations de la question précédente, l'élément  $u = (a - \alpha 1_A)/\beta$  vérifie donc  $u^2 = -1_A$  et  $a \in \text{Vect}(1_A, u)$ .

Montrons que  $(1_A, u)$  est une base de  $A$ .

- Elle est libre, sinon il existerait  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u = \lambda 1_A$  et alors on aurait  $u^2 = \lambda^2 1_A$  et donc  $u^2 \neq -1_A$ .
- Soit  $x \in A$ .
  - \* Si  $x \in \text{Vect}(1_A)$ , alors  $x \in \text{Vect}(1_A, u)$ .
  - \* Sinon, par ce qui précède, il existe un élément  $v \in A$  tel que  $x \in \text{Vect}(1_A, v)$ , avec  $v^2 = -1_A$ . On a alors :

$$0 = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u) \quad (\text{commutativité de } A)$$

et par intégrité de  $A$ , on en déduit  $v = \pm u$ , puis  $x \in \text{Vect}(1_A, u)$ .

Donc  $(1_A, u)$  est génératrice de  $A$ .

3. Considérons l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow A$  vérifiant  $\varphi(1) = 1_A$  et  $\varphi(i) = u$ . C'est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels puisque l'image de la base  $(1, i)$  est une base. D'autre part, un calcul élémentaire utilisant les relations  $i^2 = -1$  et  $u^2 = -1_A$  montre que pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ , on a  $\varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$ . Avec la propriété  $\varphi(1) = 1_A$ , cela prouve que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres de  $\mathbb{C}$  sur  $A$ .

Finalement,  $\mathbb{C}$  est, à isomorphisme près, la seule  $\mathbb{R}$ -algèbre intègre de dimension finie  $n \geq 2$ .

- 1.15** 1. Étudions les images des éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  par  $\sigma \circ (a \ b) \circ \sigma^{-1}$ . Comme  $\sigma$  est une bijection, on peut écrire ces éléments sous la forme  $\sigma(x)$ , avec  $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Discutons suivant les valeurs de  $x$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \llbracket 1, n \rrbracket & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \llbracket 1, n \rrbracket & \xrightarrow{(a \ b)} & \llbracket 1, n \rrbracket & \xrightarrow{\sigma} & \llbracket 1, n \rrbracket \\ \sigma(a) & \longmapsto & a & \longmapsto & b & \longmapsto & \sigma(b) \\ \sigma(b) & \longmapsto & b & \longmapsto & a & \longmapsto & \sigma(a) \\ \sigma(x) & \longmapsto & x & \longmapsto & x & \longmapsto & \sigma(x) \quad \text{si } x \notin \{a, b\}. \end{array}$$

$$\text{Donc } \sigma \circ (a \ b) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a) \ \sigma(b)).$$

2. Soit  $(i \ j)$  une transposition, avec  $j > i + 1$ . Alors, d'après la question précédente :

$$(j-1 \ j) \circ (i \ j-1) \circ (j-1 \ j) = (i \ j).$$

Il est alors facile de montrer par récurrence sur  $j - i$  que toute transposition  $(i \ j)$ , avec  $i < j$ , est un produit de transpositions du type  $(k-1 \ k)$ .

3. Soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Les relations  $\gamma^{i-1}(1) = i$  et  $\gamma^{i-1}(2) = i+1$  permettent de vérifier, grâce à la première question, que :

$$\gamma^{i-1} \circ (1 \ 2) \circ \gamma^{-(i-1)} = (i \ i+1).$$

Toute transposition de la forme  $(i \ i+1)$  s'écrit donc comme un produit des permutations  $\tau$  et  $\gamma$ .

Or, d'après la question précédente, les transpositions de la forme  $(i \ i+1)$  engendrent  $S_n$ , donc  $\{\tau, \sigma\}$  est également une partie génératrice de  $S_n$ .

- 1.16** Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .

Le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^2$  engendré par  $(a, b)$  est l'ensemble  $A = \{(na, nb) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Il est donc contenu dans le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  engendré par  $(a, b)$  qui est différent de  $\mathbb{R}^2$ , puisque de dimension inférieure ou égal à 1. Donc  $A$  ne peut pas être égal à  $\mathbb{Z}^2$  puisque ce dernier contient la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1.17** On remarque qu'en posant  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , on a  $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Donc  $G$  est monogène.

Comme il est de plus évidemment infini, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

- 1.18** 1. Posons  $n = dp$ . On a :

$$(a^d)^k = e \iff a^{dk} = e \iff n \mid dk \iff dp \mid dk \iff p \mid k.$$

Donc l'ordre de  $a^d$  est  $p = n/d$ .

## Chapitre 1. Groupes, anneaux, arithmétique, algèbres

2. Soit  $d = k \wedge n$ . Montrons que  $a^d$  et  $a^k$  engendrent le même sous-groupe.

Pour  $x \in G$ , on note ici  $\langle x \rangle$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $x$ .

En écrivant  $k = dk'$ , on a  $a^k = (a^d)^{k'} \in \langle a^d \rangle$  ce qui donne  $\langle a^k \rangle \subset \langle a^d \rangle$  puisque  $\langle a^k \rangle$  est le plus petit sous-groupe contenant  $a^k$ .

D'autre part, le théorème de Bézout donne des entiers  $u$  et  $v$  tels que  $d = uk + vn$ . Alors :

$$a^d = a^{uk}a^{vn} = (a^k)^u(a^n)^v = (a^k)^u \in \langle a^k \rangle$$

et l'on conclut comme précédemment que  $\langle a^d \rangle \subset \langle a^k \rangle$ .

On en déduit que  $a^d$  et  $a^k$  ont le même ordre : le cardinal du sous-groupe  $\langle a^d \rangle = \langle a^k \rangle$  qui, d'après la question précédente, est égal à  $n/d$ .

- 1.19** D'après la caractérisation du sous-groupe engendré par  $A$  (cf. exemple 40 de la page 20), il suffit de montrer que l'inverse de tout élément de  $A$  peut s'écrire comme produit d'éléments de  $A$ .

Soit  $a \in A$ . Comme  $G$  est fini,  $a$  est d'ordre fini, donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = e$ . On en déduit que  $a^{-1} = a^n \times a^{-1} = a^{n-1}$  est bien un produit d'éléments de  $A$ .

- 1.20** Posons  $N = 2^n - 1$ . Comme  $\varphi(N)$  est le cardinal du groupe  $G$  des inversibles de  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , il suffit de trouver un élément de  $G$  d'ordre  $n$  et d'utiliser le théorème 45 de la page 25.

On a  $2^n \equiv 1 [2^n - 1]$ , donc  $(\bar{2})^n = \bar{1}$  dans  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Cela montre que  $\bar{2} \in G$  et que son ordre divise  $n$ . Or, si  $d$  est un diviseur strict de  $n$ , on a  $1 < 2^d < 2^n$ , donc  $2^d \not\equiv 1 [2^n - 1]$ , ce qui prouve que  $(\bar{2})^d \neq \bar{1}$ .

Finalement,  $\bar{2}$  est bien d'ordre  $n$  ce qui conclut.

- 1.21** 1. • **Réflexivité** : pour tout  $x \in G$ , on a :  $x^{-1}x = e \in H$ , donc  $x \mathcal{R} x$ .

**Symétrie** : pour tout  $(x, y) \in G^2$ , on a :

$$x \mathcal{R} y \implies x^{-1}y \in H \implies y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H \implies y \mathcal{R} x.$$

**Transitivité** : pour tout  $(x, y, z) \in G^3$ , on a :

$$\begin{aligned} (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) &\implies (x^{-1}y \in H \text{ et } y^{-1}z \in H) \\ &\implies x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H \implies x \mathcal{R} z. \end{aligned}$$

- Soit  $x \in G$ . Pour tout  $y \in G$ , on a :

$$y \mathcal{R} x \iff \exists h \in H \quad x^{-1}y = h \iff \exists h \in H \quad y = xh$$

donc la classe d'équivalence de  $x$  est  $xH$ .

2. La classe de  $x \in G$  est en bijection avec  $H$  par l'application  $g_x : G \rightarrow G$  de

$$h \mapsto xh$$

réciproque  $g_{x^{-1}}$ , qui vérifie  $g_x(H) = xH$ . Donc  $xH$  et  $H$  ont même cardinal.

3. Comme  $G$  est fini, il y a un nombre fini de classes d'équivalence ; notons  $p$  ce nombre. Les classes formant une partition de  $G$  et ayant toutes le même nombre d'éléments  $\text{card } H$ , on en déduit  $\text{card } G = p \text{ card } H$ , ce qui donne  $\text{card } H \mid \text{card } G$ .

4. Soit  $a \in G$ . L'ordre de  $a$  est égal au cardinal du sous-groupe de  $G$  engendré par  $a$  et divise donc le cardinal de  $G$ .

**1.22** Supposons  $\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_r$ , avec  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  des cycles à supports disjoints de longueurs respectives  $k_1, \dots, k_r$ .

Montrons que l'ordre de  $\sigma$  est le PPCM  $m$  de  $k_1, \dots, k_r$ .

- Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $\gamma_i^{k_i} = \text{Id}$ , donc  $\gamma_i^m = \text{Id}$ . Puisque les  $\gamma_i$  sont à supports disjoints, ils commutent deux à deux, ce qui donne  $\sigma^m = \gamma_1^m \circ \cdots \circ \gamma_r^m = \text{Id}$ .
- Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma^p = \text{Id}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et  $x$  dans le support de  $\gamma_i$ , on a  $\sigma^p(x) = \gamma_i^p(x)$  puisque  $x$  est invariant par tous les autres  $\gamma_j$ . On en déduit que  $\gamma_i^p(x) = x$ , et donc  $k_i \mid p$  puisque  $\gamma_i$  est un cycle de longueur  $k_i$ .

Par suite,  $m$  divise  $p$ .

Donc l'ordre de  $\sigma$  est bien  $m$ .

**1.23** 1. (a) Comme  $G$  est commutatif, on a  $\forall k \in \mathbb{N} \quad (ab)^k = a^k b^k$ .

Donc  $(ab)^{m \vee n} = e$  et l'ordre de  $ab$  divise  $m \vee n$ .

Supposons  $m \wedge n = 1$  et montrons que l'ordre de  $ab$  est égal à  $m \vee n = mn$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(ab)^k = e$ . Alors  $a^k = b^{-k}$ . Comme  $a^k$  appartient au sous-groupe engendré par  $a$ , son ordre divise le cardinal de ce sous-groupe, c'est-à-dire  $m$ . De même, l'ordre de  $b^{-k}$  divise  $n$ . Finalement, l'ordre de  $a^k = b^{-k}$  divise  $m$  et  $n$  donc divise  $m \wedge n = 1$  et l'on en déduit que  $a^k = b^k = e$ .

Donc  $m \mid k$  et  $n \mid k$ , ce qui prouve, puisque  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, que  $mn$  divise  $k$ . Ainsi, l'ordre de  $ab$  est égal à  $mn$ .

(b) Dans le cas général, l'ordre de  $ab$  divise  $m \vee n$ , mais ne lui est pas égal en général.

Par exemple, dans  $\mathbb{U}_n$ , avec  $n \geq 2$ , les éléments  $a = e^{2i\pi/n}$  et  $b = e^{-2i\pi/n}$  sont d'ordre  $n$ , alors que leur produit est d'ordre 1.

2. (a) Pour  $x \in G$ , notons  $\text{o}(x)$  son ordre. Soit  $r$  le PPCM des ordres de tous les éléments

de  $G$ . Décomposons  $r$  en facteurs premiers :  $r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ , avec  $p_1, \dots, p_k$  premiers distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  dans  $\mathbb{N}^*$ .  
Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Notons  $v_i$  l'application « valuation  $p_i$ -adique ».

Comme  $r = \bigvee_{y \in G} \text{o}(y)$ , on a  $\alpha_i = v_i(r) = \max_{y \in G} v_i(\text{o}(y))$ , donc il existe un élément  $y_i \in G$  tel que  $v_i(\text{o}(y_i)) = \alpha_i$ , donc tel que  $\text{o}(y_i) = p_i^{\alpha_i} q_i$ , avec  $q_i \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $x_i = y_i^{q_i}$  est d'ordre  $p_i^{\alpha_i}$ . En effet  $x_i^{p_i^{\alpha_i}} = y_i^{q_i p_i^{\alpha_i}} = e$ , donc  $\text{o}(x_i)$  divise  $p_i^{\alpha_i}$ . Il ne divise pas  $p_i^{\alpha_i-1}$  puisque  $1 \leq q_i p_i^{\alpha_i-1} < q_i p_i^{\alpha_i} = \text{o}(y_i)$  et donc  $x_i^{p_i^{\alpha_i-1}} = y_i^{q_i p_i^{\alpha_i-1}} \neq e$ . Comme les  $x_i$  sont des éléments d'ordres premiers entre eux deux à deux, on déduit de la première question, par une récurrence immédiate :

$$\text{o}(x_1 \cdots x_k) = \text{o}(x_1) \cdots \text{o}(x_k) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = r.$$

(b) Le résultat ne subsiste pas sans l'hypothèse de commutativité. Par exemple, les éléments de  $G = S_3$  sont l'identité (d'ordre 1), les transpositions (d'ordre 2) et les 3-cycles (d'ordre 3). On a donc  $r = 6$ , mais il n'existe aucun élément d'ordre 6.

3. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\mathbb{K}^*$  et  $n$  son cardinal. L'ordre de tout élément de  $G$  divise  $n$ , donc le PPCM  $r$  de tous ces ordres divise  $n$ .

Le polynôme  $X^r - 1$  est de degré  $r$  et admet pour racines dans  $\mathbb{K}$  les  $n$  éléments de  $G$  donc  $n \leq r$ . On en déduit  $r = n$  et puisque  $G$  est commutatif ( $\mathbb{K}$  est commutatif par définition), la question 2(a) montre il existe un élément  $x$  de  $G$  d'ordre  $r$ . Donc le sous-groupe engendré par  $x$  est de cardinal  $n = \text{card } G$ , ce qui prouve que  $G$  est engendré par  $x$ , donc cyclique.



# Chapitre 2 : Compléments d'algèbre linéaire

<b>I</b>	<b>Somme finie de sous-espaces vectoriels . . . . .</b>	<b>44</b>
1	Somme de $p$ sous-espaces vectoriels . . . . .	44
2	Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . . .	46
3	Décomposition d'un espace en somme directe . . . . .	48
4	Cas de la dimension finie . . . . .	49
<b>II</b>	<b>Écriture par blocs . . . . .</b>	<b>50</b>
1	Matrices par blocs . . . . .	50
2	Opérations sur les matrices par blocs . . . . .	51
3	Déterminant et écriture par blocs . . . . .	56
<b>III</b>	<b>Sous-espaces stables et endomorphismes induits . . . . .</b>	<b>57</b>
1	Définitions . . . . .	57
2	Stabilité et écriture par blocs . . . . .	58
<b>IV</b>	<b>Polynômes d'endomorphismes / de matrices carrées .</b>	<b>60</b>
1	Endomorphismes / matrices nilpotent(e)s . . . . .	60
2	Substitution polynomiale . . . . .	63
3	Polynômes annulateurs . . . . .	64
4	Lemme de décomposition des noyaux . . . . .	68
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>74</b>

# Compléments d'algèbre linéaire

2

Dans ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel sur un sous-corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$  (on se limite en pratique au cas où  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

## I Somme finie de sous-espaces vectoriels

Nous généralisons ici les notions vues en première année de somme et de somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

### 1 Somme de $p$ sous-espaces vectoriels

#### Définition 1

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ . On appelle **somme** de ces sous-espaces vectoriels, et l'on note  $\sum_{i \in I} E_i$ , l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \right\}.$$

#### Remarques

- *Commutativité.* Par commutativité de l'addition dans  $E$ , une somme de sous-espaces vectoriels ne dépend pas de l'ordre de sommation.
- *Associativité.* On vérifie sans difficulté que  $\left( \sum_{i \in I} E_i \right) + \left( \sum_{i \in J} E_i \right) = \sum_{i \in I \cup J} E_i$  et, plus généralement,  $\sum_{k=1}^p \left( \sum_{i \in I_k} E_i \right) = \sum_{i \in I_1 \cup \dots \cup I_p} E_i$ .
- Une somme vide d'éléments de  $E$  valant par définition le vecteur nul, on a toujours  $\sum_{i \in \emptyset} E_i = \{0\}$ .
- Si la famille de sous-espaces considérée est sous la forme  $(E_1, \dots, E_p)$ , ce qui revient à prendre  $I = [\![1, p]\!]$  dans la définition précédente, alors la somme se note  $\sum_{k=1}^p E_k$  ou  $E_1 + \dots + E_p$ , et l'on a :

$$\sum_{k=1}^p E_k = \{x_1 + \dots + x_p \mid (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}.$$

Dans le cas  $p = 2$ , on retrouve la notion de somme de deux sous-espaces vectoriels vue en première année.

**Ex. 1.** Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , les trois droites vectorielles :

$$E_1 = \mathbb{R}, \quad E_2 = i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad E_3 = \text{Vect}(1+i)$$

sont telles que  $E_1 + E_2 + E_3 = \mathbb{C}$  puisque  $\mathbb{C} = E_1 + E_2 \subset E_1 + E_2 + E_3$ .

**Ex. 2.** Dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , notons  $E_j$  le sous-espace vectoriel constitué des matrices dont les colonnes sont toutes nulles, sauf éventuellement la  $j$ -ème. Prouvons que  $\sum_{j=1}^p E_j = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Notons  $(C_1, \dots, C_p)$  la famille des colonnes de  $A$ , et pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $A_j$  la matrice dont la famille des colonnes est  $(0, \dots, 0, C_j, 0, \dots, 0)$ . Alors on a :

*j-ème place*

$$A = \sum_{j=1}^p A_j \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad A_j \in E_j.$$

D'où  $\sum_{j=1}^p E_j = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

### Proposition 1

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Leur somme est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant tous les  $E_i$ .

#### Démonstration.

- Pour justifier que  $\sum_{i \in I} E_i$  est un sous-espace vectoriel, remarquons qu'il s'agit de l'image de l'application suivante, dont la linéarité est immédiate :  $\Phi : \prod_{i \in I} E_i \longrightarrow E$   

$$(x_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} x_i.$$
- Le sous-espace vectoriel  $\sum_{i \in I} E_i$  contient chacun des  $E_i$  puisque si l'on fixe  $i_0 \in I$ , alors tout vecteur  $x \in E_{i_0}$  s'écrit  $x = \sum_{i \in I} x_i$  avec  $x_{i_0} = x$  et  $\forall i \in I \setminus \{i_0\} \quad x_i = 0$ .
- De plus, si  $H$  est sous-espace vectoriel de  $E$  contenant chacun des  $E_i$ , alors pour toute famille  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$ , on a :

$$\forall i \in I \quad x_i \in H \quad \text{donc} \quad \sum_{i \in I} x_i \in H.$$

Par conséquent,  $H$  contient  $\sum_{i \in I} E_i$ .

□

**Ex. 3.** Soit  $a_1, \dots, a_p$  des vecteurs de  $E$ . Alors on a l'égalité suivante :

$$\text{Vect}(a_1, \dots, a_p) = \text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p).$$

En effet, étant donné un vecteur  $x \in E$ , un sous-espace vectoriel contient  $x$  si, et seulement s'il contient  $\text{Vect}(x)$ . Par conséquent, le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les  $a_i$ , c'est-à-dire  $\text{Vect}(a_1, \dots, a_p)$ , est aussi le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les  $\text{Vect}(a_i)$ , c'est-à-dire  $\text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p)$ .

## 2 Somme directe de sous-espaces vectoriels

### Définition 2

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que les  $E_i$  sont en somme directe si pour tout  $x \in \sum_{i \in I} E_i$ , la décomposition  $x = \sum_{i \in I} x_i$ , avec  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$ , est unique.

**Terminologie** On dit aussi que la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe.

**Notation** Lorsque la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe, on la note  $\bigoplus_{i \in I} E_i$ . Dans le cas d'une famille de la forme  $(E_1, \dots, E_p)$ , on note  $\bigoplus_{i=1}^p E_i$  ou  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ .

### Remarques

- Dans le cas d'une famille de deux sous-espaces vectoriels, on retrouve la définition vue en première année.
- Si  $J \subset I$  et si la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe, alors la somme  $\sum_{i \in J} E_i$  l'est aussi. En d'autres termes, une « sous-somme » d'une somme directe est directe.
- La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si, et seulement si, l'application :

$$\begin{aligned}\Phi : \quad \prod_{i \in I} E_i &\longrightarrow \sum_{i \in I} E_i \\ (x_i)_{i \in I} &\longmapsto \sum_{i \in I} x_i\end{aligned}$$

est injective. Comme elle est linéaire et surjective, cela revient à dire que c'est un isomorphisme.

En pratique, on utilise la caractérisation suivante pour prouver qu'une somme est directe.

### Proposition 2

Une somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si, et seulement si :

$$\forall (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i \quad \sum_{i \in I} x_i = 0 \implies \forall i \in I \quad x_i = 0.$$

Exo  
2.1

**Démonstration.** Reprenons l'application linéaire  $\Phi$  de la remarque précédente. La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si, et seulement si,  $\Phi$  est injective, ce qui revient à dire que son noyau est réduit à  $\{0\}$ . □

**Ex. 4.** Si  $E$  est de dimension finie, et si  $(e_1, \dots, e_n)$  en est une base, alors  $\bigoplus_{k=1}^n \text{Vect}(e_k) = E$ .

- En effet, on a  $\sum_{k=1}^n \text{Vect}(e_k) = E$  car pour  $x \in E$ , il existe  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$x = \sum_{k=1}^n \underbrace{\lambda_k e_k}_{\in \text{Vect}(e_k)}.$$

- De plus, si  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \prod_{k=1}^n \text{Vect}(e_k)$  est tel que  $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ , alors en écrivant chaque  $x_k$  sous la forme  $\lambda_k e_k$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{K}$ , la relation précédente donne, par liberté de la famille  $(e_1, \dots, e_n)$ , la nullité de tous les  $\lambda_k$ , puis de tous les  $x_k$ . Donc la somme est directe.

**Ex. 5.** Si une somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe et si, pour tout  $i \in I$ , on se donne un vecteur *non nul*  $x_i \in E_i$ , alors la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre. En effet, si  $(\lambda_i)_{i \in I}$  est une famille de scalaires vérifiant :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0,$$

alors en remarquant que  $\forall i \in I \quad \lambda_i x_i \in E_i$ , le caractère direct de la somme assure que pour tout  $i \in I$ , on a  $\lambda_i x_i = 0$ , puis, le vecteur  $x_i$  étant non nul,  $\lambda_i = 0$ .

**Attention** Comme le montre l'exemple suivant, des sous-espaces vectoriels peuvent être en somme directe deux à deux sans que leur somme soit directe.

**Ex. 6.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , notons  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  et  $u = (1, 1)$ . Alors les trois droites vectorielles :

$$D_1 = \text{Vect}(e_1); \quad D_2 = \text{Vect}(e_2) \quad \text{et} \quad D_3 = \text{Vect}(u)$$

vérifient  $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \{0\}$ , mais ne sont pas en somme directe car, par exemple, on a  $\overset{\uparrow}{e_1} + \overset{\uparrow}{e_2} + \overset{\uparrow}{(-u)} = 0$ .

$$\in D_1 \in D_2 \in D_3$$

### Proposition 3 (Associativité de la somme directe)

Supposons que  $I$  s'écrit comme une union disjointe  $I = I_1 \cup I_2$ . La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe si, et seulement si :

- les sommes  $\sum_{i \in I_1} E_i$  et  $\sum_{i \in I_2} E_i$  sont directes ;
- les sous-espaces vectoriels  $\bigoplus_{i \in I_1} E_i$  et  $\bigoplus_{i \in I_2} E_i$  sont en somme directe ;

et l'on a alors :

$$\left( \bigoplus_{i \in I_1} E_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in I_2} E_i \right) = \bigoplus_{i \in I} E_i.$$

Démonstration page 69

**Remarque** Par récurrence, le résultat précédent s'étend au cas où  $I$  s'écrit comme une union disjointe  $I = I_1 \cup \dots \cup I_p$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

### 3 Décomposition d'un espace en somme directe

Lorsque l'on dispose d'une famille  $(E_i)_{i \in I}$  de sous-espaces vectoriels telle que  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , on parle de **décomposition de  $E$  en somme directe** ou plus simplement **décomposition de  $E$** .

#### Projecteurs associés à une décomposition

D'après la proposition 3 de la page précédente, si  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , alors, pour tout  $i \in I$ , les sous-espaces vectoriels  $E_i$  et  $\bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} E_j$  sont supplémentaires.

#### Définition 3

Supposons que  $E$  se décompose  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . On appelle **famille des projecteurs associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$**  la famille  $(p_i)_{i \in I}$  où, pour tout  $i \in I$ ,  $p_i$  est la projection sur  $E_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} E_j$ .

#### Proposition 4

La famille des projecteurs associés à une décomposition  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  vérifie :

$$\sum_{i \in I} p_i = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0.$$

**Démonstration.** Soit  $x \in E$ . Il existe  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$  tel que  $x = \sum_{i \in I} x_i$ .

- Par définition, pour tout  $i \in I$ , on a  $p_i(x) = x_i$ . On a donc  $x = \sum_{i \in I} p_i(x)$ , ce qui prouve que  $\sum_{i \in I} p_i = \text{Id}_E$ .
- Soit  $(i, j) \in I^2$  tel que  $i \neq j$ . Par définition de  $p_i$  et  $p_j$ , on a  $\text{Im } p_j = E_j$  et  $\text{Ker } p_i = \bigoplus_{k \in I \setminus \{i\}} E_k$ , donc  $\text{Im } p_j \subset \text{Ker } p_i$ , autrement dit  $p_i \circ p_j = 0$ .  $\square$

#### Caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions

Dans l'énoncé suivant,  $F$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### Proposition 5

Supposons que  $E$  se décompose en  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  et que, pour tout  $i \in I$ , on dispose d'une application linéaire  $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ .

Alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall i \in I \quad u|_{E_i} = u_i.$$

Démonstration page 69

**Démonstration.** Par analyse-synthèse, on obtient  $u = \sum_{i \in I} u_i \circ p_i$ , où les  $p_i$  sont les projecteurs associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ .  $\square$

## 4 Cas de la dimension finie

### Proposition 6

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(I_1, \dots, I_p)$  un recouvrement disjoint de  $I$ .

Si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on pose  $E_k = \text{Vect}(e_i)_{i \in I_k}$ , alors on a  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ .

Démonstration page 70

### Proposition 7 (Base adaptée à une décomposition)

Supposons  $E$  de dimension finie. Supposons de plus que l'on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on considère une base  $\mathcal{B}_i$  de  $E_i$ , alors la famille constituée, dans l'ordre, des vecteurs de  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , est une base de  $E$ .

Une telle base est dite **adaptée à la décomposition**  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ .

Démonstration page 70

**Terminologie** On dit aussi qu'une base de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  est obtenue « par concaténation » des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ .

### Proposition 8

Si les sous-espaces vectoriels  $E_i$  sont de dimension finie, alors on a :

$$\dim \left( \sum_{i \in I} E_i \right) \leqslant \sum_{i \in I} \dim E_i$$

avec égalité si, et seulement si, la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe.

**Démonstration.** Considérons l'application linéaire surjective  $\Phi : \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} E_i & \longrightarrow & \sum_{i \in I} E_i \\ (x_i)_{i \in I} & \longmapsto & \sum_{i \in I} x_i. \end{array}$

Le théorème du rang donne  $\sum_{i \in I} \dim E_i = \dim \text{Im } \Phi + \dim \text{Ker } \Phi$ , i.e., par surjectivité de  $\Phi$  :

$$\sum_{i \in I} \dim E_i = \dim \left( \sum_{i \in I} E_i \right) + \dim \text{Ker } \Phi.$$

Cela prouve l'inégalité souhaitée, avec égalité si, et seulement si,  $\Phi$  est injective, c'est-à-dire si, et seulement si, la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe.  $\square$

Exo  
2.2

**Remarque** En particulier, si  $E$  est de dimension finie et si l'on dispose d'une décomposition  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ , alors on a  $\dim E = \sum_{i \in I} \dim E_i$ .

## II Écriture par blocs

### 1 Matrices par blocs

Il est parfois utile d'écrire une matrice en mettant en évidence certaines de ses sous-matrices.

**Ex. 7.** La matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 12 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  peut s'écrire par blocs  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais aussi  $M = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$  avec  $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  et  $F = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . [ ]

On appelle **écriture par blocs** toute écriture de la forme  $\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix}$ .

**Remarque** Bien évidemment, pour qu'une telle écriture ait un sens, deux blocs  $A_{i,j_1}$  et  $A_{i,j_2}$  ont le même nombre de lignes, et deux blocs  $A_{i_1,j}$  et  $A_{i_2,j}$  le même nombre de colonnes.

**Ex. 8.** La matrice  $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  s'écrit naturellement  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ .

Dans la pratique, on notera souvent plus simplement  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , en laissant implicite les tailles des trois blocs nuls.

**Ex. 9.** Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , les matrices de la projection  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  et de la symétrie  $s$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  s'écrivent par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

en notant  $n$  la dimension de  $E$  et  $r$  celle de  $F$ .

**Ex. 10.** On peut toujours écrire  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  par blocs en utilisant la famille de ses lignes ou ses colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_p \end{pmatrix}. [ ]$$

## 2 Opérations sur les matrices par blocs

### Transposition par blocs

Si  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix}$ , alors  $A^T = \begin{pmatrix} {A_{1,1}}^T & \dots & {A_{n,1}}^T \\ \vdots & & \vdots \\ {A_{1,p}}^T & \dots & {A_{n,p}}^T \end{pmatrix}$ .

### Combinaison linéaire par blocs

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de *même taille*, écrites avec des blocs de tailles *compatibles pour l'addition*, alors toute combinaison linéaire de  $A$  et  $B$  s'écrit par blocs :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,p} + \mu B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,1} & \dots & \lambda A_{n,p} + \mu B_{n,p} \end{pmatrix}.$$

### Produit par blocs

#### Proposition 9 (Produit par blocs)

Si  $A$  et  $B$  sont écrites par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \dots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

avec des blocs de tailles *compatibles pour le produit matriciel*, alors :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \dots & C_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}.$$

Démonstration (non exigible) page 71

**Attention** Le produit par blocs précédent s'effectue comme un produit usuel mais, le produit matriciel n'étant pas commutatif, il est impératif de faire attention à l'ordre dans lequel on écrit chaque produit  $A_{i,k} B_{k,j}$ .

**Ex. 11.** Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ . On a le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$  étant inversible (d'inverse elle-même), on en déduit que les matrices  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$  ont même rang.

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

- On a de plus  $\det \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n$  (on la change en la matrice  $I_{2n}$  en effectuant les  $n$  échanges de colonnes  $C_j \leftrightarrow C_{j+n}$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ). On en déduit que :

$$\det \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

**Ex. 12.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . La matrice  $M = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$  est inversible si, et seulement si,  $\lambda \neq 0$  et  $A$  inversible ; en effet, en développant par rapport à la première colonne, on obtient  $\det M = \lambda \det A$ . Si tel est le cas, alors en écrivant  $M^{-1}$  par blocs  $\begin{pmatrix} \mu & L \\ C & D \end{pmatrix}$ , on a, par produit par blocs :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu + BC & \lambda L + BD \\ AC & AD \end{pmatrix}.$$

Comme  $MM^{-1} = I_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ , on obtient  $\begin{cases} \lambda\mu + BC = 1 \\ \lambda L + BD = 0 \\ AC = 0 \\ AD = I_n. \end{cases}$

La matrice  $A$  étant inversible, on obtient  $C = 0$ ,  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D = A^{-1}$  et enfin  $L = -\frac{1}{\lambda}BA^{-1}$ . On a donc obtenu :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & L \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L = -\frac{1}{\lambda}BA^{-1}.$$

**Ex. 13.** En particulier, si  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  est inversible et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}.$$



**Terminologie** On appelle matrice **triangulaire supérieure par blocs**, de blocs diagonaux  $A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$ , une matrice carrée s'écrivant sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

où les **blocs diagonaux**  $A_{i,i}$  sont carrés.

Sur le même principe, on parle de matrice **triangulaire inférieure par blocs** et de matrice **diagonale par blocs**.

**Remarques**

- Couramment, dans l'écriture d'une matrice triangulaire par blocs, seuls les blocs diagonaux nous importent. On notera
 
$$\begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix}$$
 une telle matrice triangulaire supérieure par blocs de blocs diagonaux  $A_1, \dots, A_n$ .
- Un produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs, avec des blocs diagonaux de tailles compatibles, l'est encore. Plus précisément :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n B_n \end{pmatrix}$$

On a le même résultat pour des matrices triangulaires inférieures par blocs et, évidemment, pour des matrices diagonales par blocs.

**Notation** Une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux  $A_1, \dots, A_n$  est notée  $\text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ . Ainsi, sous condition que les tailles des blocs soient compatibles, on a :

$$\text{Diag}(A_1, \dots, A_n) \text{Diag}(B_1, \dots, B_n) = \text{Diag}(A_1 B_1, \dots, A_n B_n).$$



**Ex. 14.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Montrons que  $\text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{rg } A + \text{rg } B$ .

Soit  $(X, Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p$ . On a :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ BY \end{pmatrix},$$

donc :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \iff (X, Y) \in \text{Ker } A \times \text{Ker } B.$$

Ainsi, on a  $\text{Ker} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \varphi(\text{Ker } A \times \text{Ker } B)$  où  $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^{n+p}$  est l'isomorphisme défini par  $\varphi(X, Y) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ . Par conséquent :

$$\dim \text{Ker} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \dim \text{Ker } A \times \text{Ker } B = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B.$$

Le théorème du rang donne alors :

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= n + p - (\dim \text{Ker } A + \dim \text{Ker } B) \\ &= (n - \dim \text{Ker } A) + (p - \dim \text{Ker } B) = \text{rg } A + \text{rg } B. \end{aligned}$$

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**Ex. 15.** À l'aide du résultat précédent, on prouve par récurrence que le rang d'une matrice diagonale par blocs est égal à la somme des rangs des blocs diagonaux.

Une matrice  $A$  diagonale par blocs est donc inversible si, et seulement si, ses blocs diagonaux le sont. Dans ce cas, en notant  $A_1, \dots, A_r$  les blocs diagonaux de  $A$ , alors la matrice inverse  $A^{-1}$  a pour blocs diagonaux  $A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}$ .

**Attention** Le résultat obtenu précédemment, concernant le rang d'une matrice diagonale par blocs, ne s'étend pas à des matrices triangulaires par blocs (cf. exemple 16).

**Ex. 16.** La matrice triangulaire par blocs  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'est pas de rang nul, même si ses blocs diagonaux le sont.

Exo  
2.5

**Transvections par blocs** Dans ce qui suit, les tailles des matrices ne sont pas précisées (en particulier, on notera  $I$  la matrice identité, sans préciser sa taille). Il est implicite qu'elles sont telles que les produits par blocs envisagés aient un sens.

- Soit  $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$  une matrice écrite par blocs. Lorsqu'il peut s'effectuer, on a le produit par blocs suivant :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 T & B_1 \\ A_2 + B_2 T & B_2 \end{pmatrix}.$$

On dit alors qu'on a effectué une **transvection par blocs**.

**Notation** On notera  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 T$  la transvection par blocs ci-dessus.

On peut, si l'on veut, « coder » la transvection par blocs précédente avec des transvections « classiques » : si l'on a  $T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ , alors la ma-

trice  $\begin{pmatrix} A_1 + B_1 T & B_1 \\ A_2 + B_2 T & B_2 \end{pmatrix}$  est obtenue, à partir de  $M$ , en appliquant les transvections suivantes (dont on voit aisément qu'elles commutent) :

$$C_i \leftarrow C_i + t_{j,i} C_{j+n} \quad \text{avec } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket.$$

La lourdeur de cette chaîne de transvections met en exergue l'efficacité et la concision apportées par l'utilisation des blocs.

- Avec les mêmes notations, on peut bien sûr modifier les blocs de droite à l'aide des blocs de gauche, en effectuant la transvection par blocs  $C_2 \leftarrow C_2 + C_1 T$  :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 + A_1 T \\ A_2 & B_2 + A_2 T \end{pmatrix}.$$

- On peut également réaliser des transvections par blocs en raisonnant sur les lignes (les deux transvections par blocs suivantes sont respectivement codées  $L_1 \leftarrow L_1 + TL_2$  et  $L_2 \leftarrow L_2 + TL_1$ ) :

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + TB_1 & A_2 + TB_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 + TA_1 & B_2 + TA_2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque** Les matrices  $\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ T & I \end{pmatrix}$  sont triangulaires à diagonale composée uniquement de 1, donc sont inversibles et de déterminant 1. Par conséquent, effectuer une transvection par blocs ne modifie ni le rang, ni le déterminant.

**Ex. 17.** Soit  $(A, C) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Montrons que  $\text{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rg } A + \text{rg } C$ .

La matrice  $A$  étant inversible, on peut effectuer la transvection par blocs  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1 A^{-1} B$ , ce qui permet d'obtenir une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Par invariance du rang par transvection par blocs, on obtient :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \text{rg } A + \text{rg } C,$$

la dernière égalité étant assurée par l'exemple 14 de la page 53.

**Remarque** Le résultat obtenu subsiste, et la preuve est similaire, si c'est le bloc  $C$  qui est supposé inversible, ou si la matrice est triangulaire inférieure par blocs.

**Ex. 18.** Soit  $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrons que  $\text{rg } M = n + \text{rg } A^2$ .

Effectuons la transvection par blocs  $L_2 \leftarrow L_2 - AL_1$  :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & -A^2 \end{pmatrix}.$$

Par invariance du rang par transvection par blocs, on obtient  $\text{rg } M = \text{rg} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & -A^2 \end{pmatrix}$ . On est alors ramené à l'exemple 17, d'où :

$$\text{rg } M = n + \text{rg}(-A^2) = n + \text{rg } A^2.$$

### 3 Déterminant et écriture par blocs

**Convention** Si une matrice est de taille nulle, son déterminant vaut 1.

**Proposition 10**

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux, c'est-à-dire :

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (\star) & & A_n \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n \det A_k.$$

Démonstration page 72

Exo  
2.6

**Principe de démonstration.** Quitte à faire une récurrence sur le nombre de blocs, il suffit de prouver le résultat pour une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la forme  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

Pour cela, on remarque que  $M = \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ .

**Remarque** Une matrice triangulaire par blocs est donc inversible si, et seulement si, tous ses blocs diagonaux le sont.

**Ex. 19.** On a, en reconnaissant un déterminant triangulaire par blocs :

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 31 & 45 \\ 3 & 4 & 10 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = (-2) \times (-2) = 4.$$

**Ex. 20.** Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Montrons que  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$ .

Effectuant les deux transvections par blocs :

$$L_1 \leftarrow L_1 + I_n L_2 \quad \text{puis} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 I_n,$$

on transforme successivement la matrice  $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$  en :

$$\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{puis en} \quad \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}.$$

Puisqu'une transvection par blocs laisse inchangé le déterminant, on en déduit :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B),$$

la dernière égalité étant vraie car la matrice est triangulaire par blocs.

### III Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Dans toute la suite du chapitre, sauf mention plus précise,  $u$  désigne un endomorphisme de  $E$ .

#### 1 Définitions

Exo  
2.12

##### Définition 4

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit **stable** par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

**Notation** Lorsque  $F$  est stable par  $u$ , on dit aussi que  $u$  **stabilise**  $F$ .

##### Remarques

- Les sous-espaces vectoriels  $\{0\}$  et  $E$  sont stables par tout endomorphisme.
- L'intersection et la somme de sous-espaces vectoriels stables par  $u$  sont stables par  $u$ .
- Le noyau et l'image de  $u$  sont stables par  $u$ . Plus généralement, tout sous-espace vectoriel inclus dans le noyau de  $u$  ou contenant l'image de  $u$  est stable par  $u$ .

**Ex. 21.** Une homothétie de  $E$  stabilise tous les sous-espaces vectoriels de  $E$ . Ce sont d'ailleurs les seuls endomorphismes possédant cette propriété (cf. question 2(a) de l'exercice 2.15).

**Ex. 22.** Il existe des endomorphismes de  $E$  ne stabilisant que  $\{0\}$  et  $E$ . C'est par exemple le cas d'une rotation vectorielle  $r$  d'angle  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$  du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} r : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet, supposons que  $r$  stabilise un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  différent de  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^2$ , alors il s'agit d'une droite. En notant  $u$  un vecteur directeur de cette droite, on a  $r(u) \in \text{Vect}(u)$ , d'où l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que  $r(u) = \lambda u$ . Le vecteur  $u$  est alors dans le noyau de la matrice  $R_\theta - \lambda I_2$ , qui est par conséquent non inversible. Or, on a :

$$R_\theta - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \det(R_\theta - \lambda I_2) = (\underbrace{\cos \theta - \lambda}_{\geq 0})^2 + \underbrace{\sin^2 \theta}_{> 0} > 0,$$

ce qui est contradictoire.

##### Proposition 11

Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, c'est-à-dire si  $u \circ v = v \circ u$ , alors les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } v$  et  $\text{Im } v$  sont stables par  $u$ .

**Démonstration.** Supposons que  $u$  et  $v$  commutent.

- Soit  $x \in \text{Ker } v$ ; on a  $v(u(x)) = (v \circ u)(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(0) = 0$  par linéarité de  $u$ , donc  $u(x) \in \text{Ker } v$ . Ainsi,  $\text{Ker } v$  est stable par  $u$ .
- En utilisant le fait que  $u$  et  $v$  commutent, on a  $u(\text{Im } v) = \text{Im}(u \circ v) = \text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ , d'où le caractère stable de  $\text{Im } v$  par  $u$ .  $\square$

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

### Proposition 12

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $F$ . Alors  $F$  est stable par  $u$  si, et seulement si :

$$\forall i \in I \quad u(e_i) \in F.$$

**Démonstration.** Puisque  $F = \text{Vect}\{e_i \mid i \in I\}$ , on a  $u(F) = \text{Vect}\{u(e_i) \mid i \in I\}$ . Par conséquent, on a  $u(F) \subset F$  si, et seulement si,  $\forall i \in I \quad u(e_i) \in F$ .  $\square$

**Ex. 23.** Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . La droite  $\mathbb{K}x$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $u(x) \in \mathbb{K}x$ , i.e. s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Dans ce cas, si  $\lambda \neq 0$ , c'est-à-dire si  $x \notin \text{Ker } u$ , alors  $u(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}x$ .

**Ex. 24.** Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ , le sous-espace vectoriel :

$$E_x = \text{Vect}\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

est stable par  $u$ . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  contenant  $x$  ; on l'appelle **sous-espace cyclique engendré par  $x$** .

### Définition 5

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $u$ . On appelle **endomorphisme induit** par  $u$  sur  $F$  l'endomorphisme  $u_F \in \mathcal{L}(F)$  défini par :

$$\forall x \in F \quad u_F(x) = u(x).$$

**Attention** Ne pas confondre *endomorphisme induit* et *restriction*. On ne peut parler d'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  que si  $F$  est stable par  $u$ . Dans le cas où  $F$  est stable par  $u$ , on distinguera soigneusement :

- l'endomorphisme induit  $u_F$ , qui est un endomorphisme de  $F$  ;
- la restriction  $u|_F$  qui est une application linéaire de  $F$  vers  $E$ .

**Remarque** L'image de  $u_F$  est égale à  $u(F)$  et son noyau à  $F \cap \text{Ker } u$ .

## 2 Stabilité et écriture par blocs

Dans cette partie,  $E$  est supposé de dimension finie.

### Proposition 13 (Traduction matricielle de la stabilité)

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si l'on écrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}),$$

alors :

- $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $B = 0$  ;
- $\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $C = 0$ .

**Démonstration.** Notons  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ .

Pour  $x \in E$ , si l'on écrit  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  avec  $(X, Y) \in \mathbb{K}^r \times \mathbb{K}^{n-r}$ , l'appartenance de  $x$  à  $F$  se traduit par  $Y = 0$ . Pour  $x \in F$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad u(x) \in F \iff BX = 0.$$

Le sous-espace vectoriel  $F$  est donc stable par  $u$  si, et seulement si,  $BX = 0$  pour tout  $X \in \mathbb{K}^r$ , autrement dit  $B = 0$ .

Démonstration analogue pour la stabilité de  $\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ .  $\square$

**Remarques** Reprenons les notations de la proposition et notons :

$$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n).$$

- Dans le cas où  $B = 0$ ,
  - \*  $A$  est la matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $F$  de l'endomorphisme induit  $u_F$  ;
  - \* l'interprétation de  $D$  est plus délicate : en notant  $p \in \mathcal{L}(E)$  la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ , alors  $D$  est la matrice dans la base  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  de  $G$  de l'endomorphisme induit par  $p \circ u$  sur  $G$ .
- De même, dans le cas où  $C = 0$ ,  $D$  est la matrice dans la base  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $G$ .

**Ex. 25.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i),$$

c'est-à-dire si, et seulement si,  $u$  laisse stable chacun des  $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ .

- On retrouve le fait que, si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est triangulaire supérieure et si  $u$  est bijectif, alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$  est également triangulaire supérieure. En effet, si c'est le cas, alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $u(F_i) \subset F_i$  puis, comme  $u$  est bijectif,  $\dim u(F_i) = \dim F_i$  donc  $u(F_i) = F_i$  et enfin  $F_i = u^{-1}(u(F_i)) = u^{-1}(F_i)$ .

### Proposition 14

Soit  $E$  de dimension finie tel que  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base adaptée à cette décomposition, alors l'endomorphisme  $u$  stabilise chaque  $E_i$  si, et seulement si, sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix},$$

où, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la matrice  $A_i$  est carrée de taille  $\dim E_i$ .

Dans ce cas, chacun des blocs diagonaux  $A_i$  est la matrice de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_i$  dans la base de  $E_i$  extraite de  $\mathcal{B}$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**Démonstration.** Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $\mathcal{B}_i$  la base de  $E_i$  extraite de  $\mathcal{B}$ ; le sous-espace  $E_i$  est alors stable par  $u$  si, et seulement si, les vecteurs de  $\mathcal{B}_i$  ont pour image par  $u$  un vecteur de  $E_i$ , c'est-à-dire une combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{B}_i$ . D'où l'équivalence annoncée et l'interprétation des blocs diagonaux  $A_i$ .  $\square$

**Ex. 26.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale si, et seulement si,  $u$  stabilise chaque droite  $\text{Vect}(e_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

## IV Polynômes d'endomorphismes / de matrices carrées

### 1 Endomorphismes / matrices nilpotent(e)s

**Rappel : itérés d'un endomorphisme, puissances d'une matrice carrée** Étant donné  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on définit l'itéré  $k$ -ième de  $u$ , noté  $u^k$ , par récurrence :

$$u^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u^{k+1} = u \circ u^k.$$

On dispose des règles de compatibilité suivantes :

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \quad u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k = u^{k+\ell}.$$

Tout cela s'adapte à une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  en remplaçant la composition par le produit matriciel (avec, bien sûr,  $A^0 = I_n$ ).

#### Définition 6

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **nilpotent** s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u^k = 0$ . Le plus petit de ces entiers est alors appelé **indice de nilpotence** de  $u$ .

On a la même définition pour une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Exo  
2.18

#### Remarques

- Si  $u$  est injectif, alors, comme composée d'injections, chaque itéré de  $u$  l'est aussi. De même, si  $u$  est surjectif, chaque itéré de  $u$  l'est aussi. Par conséquent, si  $E$  n'est pas l'espace nul, un endomorphisme nilpotent n'est ni injectif ni surjectif.
- Rappelons que  $u^0 = \text{Id}_E$ . Par conséquent, sauf si  $E$  est l'espace nul, un indice de nilpotence vaut au moins 1.
- Si  $u$  est nilpotent d'indice  $p$ , alors par linéarité de  $u$ , on a  $\forall k \geq p \quad u^k = 0$ .
- Étudier la nilpotence d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  revient à étudier la nilpotence de son endomorphisme canoniquement associé.

**Ex. 27.** L'endomorphisme nul est nilpotent. Si  $E$  n'est pas l'espace nul, son indice de nilpotence vaut 1.

**Ex. 28.** Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , la matrice élémentaire  $E_{i,j}$  est non nulle et vérifie  $E_{i,j}^2 = 0$ , elle est donc nilpotente d'indice 2.

**Ex. 29.** Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  vérifient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad A^3 = B^3 = 0.$$

Elles sont donc nilpotentes d'indice 3.

**Ex. 30.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est non nulle et vérifie  $A^2 = 0$ . Elle est donc nilpotente d'indice 2.

**Attention** Les matrices  $A$  des exemples 29 et 30 sont toutes les deux de rang 2, mais n'ont pas le même indice de nilpotence. Cela montre qu'il n'y a pas de lien immédiat entre le rang et l'indice de nilpotence.

**Ex. 31.** Dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , considérons la dérivation  $D : P \mapsto P'$ . Alors on a :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad D^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0 \quad \text{et} \quad D^n(X^n) = n! \neq 0.$$

Par conséquent, on a  $D^{n+1} = 0$  et  $D^n \neq 0$ , donc  $D$  est nilpotent d'indice  $n + 1$ .

**Attention** En revanche, la dérivation, en tant qu'endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ , vérifie :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad D^n(P) = 0,$$

mais n'est pas nilpotente, car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $D^n \neq 0$  (car, par exemple,  $D^n(X^n) \neq 0$ ).

**Remarque** Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a la relation  $(\text{Id}_E - u) \circ \sum_{k=0}^{p-1} u^k = \text{Id}_E - u^p$ .

En particulier, si  $u$  est nilpotent, et si  $p$  est tel que  $u^p = 0$ , alors on a :

$$(\text{Id}_E - u) \circ \sum_{k=0}^{p-1} u^k = \text{Id}_E.$$

Comme les endomorphismes  $\text{Id}_E - u$  et  $\sum_{k=0}^{p-1} u^k$  commutent<sup>1</sup>, il en résulte que l'endomorphisme  $\text{Id}_E - u$  est bijectif et son inverse est :

$$(\text{Id}_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u^k.$$

---

1. Le fait que  $\text{Id}_E - u$  et  $\sum_{k=0}^{p-1} u^k$  commutent se vérifie à la main, mais nous verrons, plus généralement, que deux polynômes en  $u$  commutent (cf. page 63).

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

### Ex. 32. Majoration de l'indice de nilpotente par la dimension de l'espace

Supposons  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme nilpotent d'indice  $p$ , alors on a  $p \leq n$ . Par définition de  $p$ , on a  $u^{p-1} \neq 0$ ; on peut donc considérer un vecteur  $a \in E \setminus \text{Ker } u^{p-1}$ . Montrons qu'alors la famille  $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$  est libre; comme elle est de cardinal  $p$ , cela prouvera que  $p \leq n$ .

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$  tel que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(a) = 0. \quad (*)$$

Montrons que  $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \lambda_k = 0$ . Par l'absurde : supposons que l'ensemble :

$$\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket : \lambda_k \neq 0\}$$

soit non vide; notons  $k_0$  son plus petit élément. La relation  $(*)$  s'écrit alors  $\sum_{k=k_0}^{p-1} \lambda_k u^k(a) = 0$ ,

et en lui appliquant  $u^{p-k_0-1}$ , on obtient :

$$\lambda_{k_0} u^{p-1}(a) + \sum_{k=k_0+1}^{p-1} \lambda_k u^{k-k_0+p-1}(a) = 0. \quad (\diamond)$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket k_0+1, p-1 \rrbracket$ , on a :

$$k - k_0 + p - 1 \geq p \quad \text{donc} \quad u^{k-k_0+p-1} = 0 \quad \text{puis} \quad u^{k-k_0+p-1}(a) = 0.$$

La relation  $(\diamond)$  donne donc  $\lambda_{k_0} u^{p-1}(a) = 0$ . Comme  $u^{p-1}(a) \neq 0$ , on en déduit  $\lambda_{k_0} = 0$ , ce qui contredit la définition de  $k_0$ .

**Conséquence** D'un point de vue matriciel, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente, alors son indice de nilpotence vaut au plus  $n$ , et donc  $A^n = 0$ .

### Endomorphisme nilpotent d'indice maximal

**Terminologie** Supposons  $E$  de dimension  $n$ . Un endomorphisme nilpotent est dit **d'indice maximal** si son indice de nilpotence vaut  $n$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un tel endomorphisme, alors on a  $u^{n-1} \neq 0$ , donc on peut considérer un vecteur  $x \in E \setminus \text{Ker } u^{n-1}$ . D'après l'exemple 32, la famille  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est libre; comme son cardinal est la dimension de  $E$ , c'en est une base. La matrice de  $u$  dans cette base est la matrice ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Terminologie** La matrice ci-dessus est triangulaire, et tous ses coefficients diagonaux sont nuls. Une telle matrice est dite **triangulaire inférieure stricte**.

De même, une matrice est **triangulaire supérieure stricte** si elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nul.

**Remarque** Il sera vu dans le chapitre de réduction (cf. page 119) que toute matrice triangulaire supérieure stricte ou inférieure stricte est nilpotente. L'exercice 2.10 propose également une preuve de ce résultat.

## 2 Substitution polynomiale

Le principe de substitution polynomiale a déjà été présenté dans le contexte général d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre (cf. exemple 38 de la page 19). Nous le présentons ici dans le cadre plus restreint des  $\mathbb{K}$ -algèbres  $\mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition 7

Soit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Étant donné  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- on note  $P(u)$  l'endomorphisme  $P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$  ;
- on note  $P(A)$  la matrice  $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Reformulation** Avec les notations précédentes, on a :

$$P(u) = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p \quad \text{et} \quad P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p.$$

**Terminologie** On appelle :

- **polynôme en  $u$**  tout endomorphisme de la forme  $P(u)$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$  ;
- **polynôme en  $A$**  toute matrice de la forme  $P(A)$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

**Notation** L'ensemble des polynômes en  $u$  (respectivement en  $A$ ) est noté  $\mathbb{K}[u]$  (respectivement  $\mathbb{K}[A]$ ).

### Proposition 15

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les deux applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

sont des morphismes d'algèbres.

Démonstration page 72

**Principe de démonstration.** Pour la première application, les propriétés  $1(u) = \text{Id}_E$  et la linéarité de  $u \mapsto P(u)$  sont immédiates. Il s'agit donc essentiellement de vérifier que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u).$$

**Conséquence** En particulier, la propriété  $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$  implique, puisque  $PQ = QP$ , que les endomorphismes  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent.

De même, la propriété  $P(A)Q(A) = (PQ)(A)$  implique que les matrices  $P(A)$  et  $Q(A)$  commutent.

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

### Ex. 33. Sous-espace cyclique

Supposons  $E$  de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E \setminus \{0\}$ . Considérons le sous-espace cyclique engendré par  $x$  (cf. exemple 24 de la page 58) :

$$E_x = \text{Vect}\{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{ou encore} \quad E_x = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Notons  $d$  le plus grand entier tel que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$  soit libre (on a  $d \geq 1$  car  $x \neq 0$ , et  $d \leq \dim E$ ). Montrons qu'alors la famille  $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$  est une base de  $E_x$ . Cette famille étant libre par définition de  $d$ , il suffit de montrer qu'elle est génératrice.

- Par définition de  $d$ , on a  $u^d(x) \in \text{Vect } \mathcal{B}$ , donc il existe  $(a_k)_{0 \leq k \leq d-1} \in \mathbb{K}^d$  tel que :

$$u^d(x) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x).$$

En notant  $P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ , on a donc  $P(u)(x) = 0$ .

- Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , en écrivant la division euclidienne de  $X^\ell$  par  $P$  :  $X^\ell = PQ + R$  avec  $\deg R < d$ , on a :

$$u^\ell = Q(u) \circ P(u) + R(u) \quad \text{puis} \quad u^\ell(x) = Q(u) \left( \underbrace{P(u)(x)}_{=0} \right) + R(u)(x) = R(u)(x),$$

ce qui prouve, puisque  $\deg R < d$ , que  $u^\ell(x) \in \text{Vect } \mathcal{B}$ .

D'où le caractère générateur de  $\mathcal{B}$ .

### Remarques

- Avec les notations ci-dessus, on a  $E_x = \{A(u)(x) \mid A \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$ .
- Dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E_x$ , l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_x$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice s'appelle **matrice compagnon du polynôme**  $X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ .

## 3 Polynômes annulateurs

Ce qui suit est énoncé dans le cadre d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , mais s'adapte sans difficulté à une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition 8

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **annulateur** de  $u$  si  $P(u) = 0$ .

**Proposition 16**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . L'ensemble des polynômes annulateurs de  $u$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . On l'appelle l'**idéal annulateur de  $u$** .

**Démonstration.** C'est le noyau du morphisme d'anneaux  $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u). \end{array}$  □

**Remarques**

- Si  $E$  n'est pas l'espace nul, alors pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $1(u) = \text{Id}_E \neq 0$ ; par conséquent l'idéal annulateur de  $u$  n'est pas égal à  $\mathbb{K}[X]$ .
- Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , alors  $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ . Par conséquent, la famille  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n^2})$ , de cardinal  $n^2 + 1$ , est liée. Cela garantit<sup>2</sup> l'existence d'un polynôme annulateur non nul de  $u$  (de degré au plus  $n^2$ ), autrement dit que l'idéal annulateur de  $u$  est non nul (c'est-à-dire non réduit à  $\{0\}$ ).

**Attention** En revanche, dans un espace de dimension infinie, rien ne garantit *a priori* l'existence d'un polynôme annulateur non nul.

**Ex. 34.** Dans  $\mathbb{K}[X]$ , considérons l'endomorphisme  $u : P \mapsto XP$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(\text{Id}_E(1), u(1), \dots, u^n(1))$ , qui n'est rien d'autre que  $(1, X, \dots, X^n)$ , est libre. Par conséquent, la famille  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^n)$  est libre également, ce qui entraîne que  $u$  ne possède pas de polynôme annulateur de degré au plus  $n$ . Puisque  $n$  a été pris quelconque dans  $\mathbb{N}$ , cela prouve que  $u$  ne possède aucun polynôme annulateur non nul.

**Point méthode** Si  $u$  admet un polynôme annulateur  $P \in \mathbb{K}[X]$  dont 0 n'est pas racine (*i.e.* ayant un terme constant non nul), alors en écrivant  $P = \alpha + XQ$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ , puis en évaluant en  $u$ , on obtient :

$$\underbrace{P(u)}_{=0} = \alpha \text{Id}_E + u \circ Q(u) \quad \text{puis} \quad u \circ \frac{-Q(u)}{\alpha} = \text{Id}_E.$$

Puisque les endomorphismes  $u$  et  $-\frac{Q(u)}{\alpha}$  commutent (car ce sont deux polynômes en  $u$ ), il en résulte que  $u$  est bijectif et l'on a  $u^{-1} = -\frac{Q(u)}{\alpha}$ .

**Ex. 35.** Supposons que  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $u^3 - 2u^2 + 4u - 5 \text{Id}_E = 0$ . On a alors :

$$u \circ (u^2 - 2u + 4 \text{Id}_E) = 5 \text{Id}_E \quad \text{i.e.} \quad u \circ \left( \frac{u^2 - 2u + 4 \text{Id}_E}{5} \right) = \text{Id}_E.$$

Puisque  $u$  et  $\frac{1}{5}(u^2 - 2u + 4 \text{Id}_E)$  commutent,  $u$  est bijectif et l'on a  $u^{-1} = \frac{1}{5}(u^2 - 2u + 4 \text{Id}_E)$ .

2. Nous verrons dans le chapitre suivant, comme conséquence du théorème de Cayley-Hamilton, que  $u$  admet un polynôme annulateur non nul de degré au plus  $n$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

Rappelons que dans  $\mathbb{K}[X]$ , tout idéal est de la forme  $B\mathbb{K}[X]$  avec  $B \in \mathbb{K}[X]$ . Cela justifie la définition ainsi que la proposition qui suivent.

### Définition 9

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si l'idéal annulateur de  $u$  est non trivial (c'est-à-dire si  $u$  possède un polynôme annulateur non nul), on appelle **polynôme minimal** de  $u$ , et l'on note  $\pi_u$ , le générateur unitaire de l'idéal annulateur de  $u$ .

### Proposition 17

Si  $u$  admet un polynôme minimal, alors tout polynôme annulateur de  $u$  en est un multiple.

**Remarque** Si  $E$  est dimension finie, et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  représente  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans une base, alors on a  $\pi_A = \pi_u$ .

**Ex. 36.** Si  $E \neq \{0\}$ , alors pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  l'homothétie  $\lambda \text{Id}_E$  admet  $X - \lambda$  comme polynôme minimal.

**Ex. 37.** Un projecteur  $p \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $p^2 = p$ , ou encore  $p^2 - p = 0$ , il possède  $X^2 - X$  comme polynôme annulateur. Par conséquent, le polynôme minimal de  $p$ , étant un diviseur unitaire de  $X^2 - X = X(X - 1)$ , vaut  $X$ ,  $X - 1$  ou  $X^2 - X$ .

Dans le cas où  $p \neq 0$  et  $p \neq \text{Id}_E$ , on a  $\pi_p = X^2 - X$ .

**Ex. 38.** Sur le même principe, une symétrie  $s \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $s^2 - \text{Id}_E = 0$ , donc possède  $X^2 - 1$  comme polynôme annulateur. Si de plus  $s \neq \pm \text{Id}_E$ , alors  $\pi_s = X^2 - 1$ .

**Ex. 39.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent s'il admet un polynôme annulateur de la forme  $X^k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors, le polynôme minimal en étant un diviseur unitaire, il est de la forme  $\pi_u = X^p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Il est alors immédiat que  $p$  est l'indice de nilpotence de  $u$ .

**Ex. 40. Polynôme minimal d'une matrice compagnon.** Soit  $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ . Considérons la matrice compagnon du polynôme  $P = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$  (cf. exemple 33 de la page 64) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Montrons que le polynôme minimal de  $A$  est  $\pi_A = P$ . On sait que  $\pi_A = \pi_u$  où  $u$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^d$  canoniquement associé à  $A$ .

- En notant  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^d$ , on a  $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, u^{d-1}(e_1))$ . Par liberté de cette famille, on déduit que la famille  $(\text{Id}_{\mathbb{K}^d}, u, \dots, u^{d-1})$  est libre. Par conséquent,  $\pi_u$  est de degré au moins  $d$ .

- Le polynôme  $P$  étant unitaire et de degré  $d$ , pour conclure que  $\pi_u = P$ , il suffit de prouver que  $P$  est annulateur de  $u$ , ce qui peut se faire en prouvant que l'endomorphisme  $P(u)$  est nul sur la base  $\mathcal{B}$ . C'est le cas car, par définition de  $P$  :

$$P(u)(e_1) = 0 \quad \text{puis} \quad \forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad P(u)(e_k) = P(u^{k-1}(e_1)) = u^{k-1} \left( \underbrace{P(u)(e_1)}_{=0} \right) = 0.$$

### Proposition 18

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  admet un polynôme minimal, alors en notant  $d$  son degré, la famille  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

**Démonstration.** Considérons l'application  $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$

Le noyau de  $\varphi$  est, par définition, l'idéal annulateur de  $u$  : c'est donc l'ensemble des multiples du polynôme minimal  $\pi_u$ . Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ , le théorème de la division euclidienne montre l'existence et l'unicité de l'écriture suivante :

$$P = \underbrace{Q\pi_u}_{\in \text{Ker } \varphi} + \underbrace{R}_{\in \mathbb{K}_{d-1}[X]},$$

ce qui prouve que  $\text{Ker } \varphi$  et  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}[X]$ . Par conséquent,  $u$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  vers  $\text{Im } \varphi = \mathbb{K}[u]$ . L'image de la base canonique de  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  par  $\varphi$ , qui n'est rien d'autre que la famille  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ , est donc une base de  $\mathbb{K}[u]$ .  $\square$

**Point méthode** Supposons que  $u$  admette un polynôme minimal de degré  $d$ . Pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ , la division euclidienne de  $P$  par  $\pi_u$  :

$$P = \pi_u Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < d$$

donne, en évaluant en  $u$ ,  $P(u) = R(u)$ . Connaître le reste  $R$  offre alors la décomposition de  $P(u)$  dans la base  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$  de  $\mathbb{K}[u]$ .

Exo  
2.19

**Ex. 41.** Supposons que  $u \in \mathcal{L}(E)$  admette comme polynôme minimal  $\pi_u = X^2 - 3X + 2$ . Alors la famille  $(\text{Id}_E, u)$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminons l'expression de  $u^n$  dans cette base. Écrivons la division euclidienne de  $X^n$  par  $\pi_u$  :

$$X^n = \pi_u Q + R \quad \text{avec} \quad \deg R < 2. \tag{*}$$

En évaluant cette relation en  $u$ , cela donne  $u^n = R(u)$ . Pour déterminer  $R$ , remarquons que  $\pi_u(1) = \pi_u(2) = 0$ . La relation  $(*)$  donne alors  $R(1) = 1$  et  $R(2) = 2^n$ , ce qui permet de déterminer  $R$  puisque  $\deg R \leq 1$ . On obtient  $R = (2^n - 1)X + (2 - 2^n)$ , puis :

$$u^n = (2 - 2^n)\text{Id}_E + (2^n - 1)u.$$

**Remarque** Si l'on dispose d'un polynôme annulateur de  $u$  de degré  $d$ , même s'il ne s'agit pas du polynôme minimal, la technique précédente s'applique :  $R(u)$  est alors une expression de  $P(u)$  comme combinaison linéaire de  $\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1}$  (sans propriété d'unicité de l'écriture, car *a priori*  $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{d-1})$  n'est pas une base de  $\mathbb{K}[u]$ ).

## 4 Lemme de décomposition des noyaux

**Théorème 19 (Lemme de décomposition des noyaux)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P_1, \dots, P_r$  des polynômes deux à deux premiers entre eux.

Alors, en notant  $P = \prod_{k=1}^r P_k$ , on a :

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u).$$

Démonstration page 72

**Principe de démonstration.** Le cas  $r = 2$  se traite grâce à la relation de Bézout. Ensuite, effectuer une récurrence sur  $r$ .

**Conséquence** Si  $P$  est un polynôme annulateur non nul de  $u$ , et si l'on écrit  $P = \prod_{k=1}^r P_k$  avec  $P_1, \dots, P_r$  deux à deux premiers entre eux, alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u).$$

**Ex. 42.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ . Si l'on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $u$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

alors on a  $S = \text{Ker } P(T)$  avec :

$$\begin{aligned} P &= X^2 - aX - b && \text{et} && T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u &&& \longmapsto && (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Si le polynôme  $P$  a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors on a  $P = (X - r_1)(X - r_2)$  ; les polynômes  $X - r_1$  et  $X - r_2$  étant premiers entre eux, le lemme des noyaux donne :

$$\mathcal{S} = \text{Ker}(T - r_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(T - r_2 \text{Id}) = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu en première année.

**Ex. 43.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{S}$  des fonctions  $f$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f'' + af' + bf = 0$ . Il est aisément de montrer que tout élément de  $\mathcal{S}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $\mathcal{S}$  est le noyau de l'endomorphisme  $Q(D)$ , avec :

$$\begin{aligned} Q &= X^2 + aX + b && \text{et} && D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ f && \longmapsto && f' &&. \end{aligned}$$

Si le polynôme  $Q$  a deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors le lemme des noyaux donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \text{Ker}(D - r_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(D - r_2 \text{Id}) \\ &= \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}. \end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat obtenu en première année.

## Démonstrations

**Proposition 3** Notons  $F = \sum_{i \in I_1} E_i$  et  $G = \sum_{i \in I_2} E_i$ .

- Supposons la somme  $\sum_{i \in I} E_i$  directe.

- \* Comme il a déjà été remarqué, une « sous-somme » d'une somme directe est directe. Ici, les deux sommes  $\sum_{i \in I_1} E_i$  et  $\sum_{i \in I_2} E_i$  sont donc directes.
- \* Prouvons maintenant que  $F$  et  $G$  sont en somme directe. Soit  $x \in F \cap G$ . Montrons que  $x = 0$ . Par définition de  $x$ , il existe  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$  tel que :

$$x = \sum_{i \in I_1} x_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{i \in I_2} x_i \quad \text{ce qui donne} \quad 0 = x - x = \sum_{i \in I_1} x_i + \sum_{i \in I_2} (-x_i).$$

La somme  $\sum_{i \in I} E_i$  est directe, et  $I$  étant la réunion disjointe de  $I_1$  et  $I_2$ , on en déduit :

$$\forall i \in I_1 \quad x_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in I_2 \quad -x_i = 0.$$

Ainsi on a  $\forall i \in I \quad x_i = 0$ , donc  $x = 0$ , ce qui prouve le résultat.

- Réciproquement, supposons que les sommes  $\sum_{i \in I_1} E_i$ ,  $\sum_{i \in I_2} E_i$  et  $F + G$  soient directes.

Soit  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$  tel que  $\sum_{i \in I} x_i = 0$ . On a alors :

$$\underbrace{\sum_{i \in I_1} x_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i \in I_2} x_i}_{\in G} = 0.$$

Comme  $F$  et  $G$  sont en somme directe, on en déduit que  $\sum_{i \in I_1} x_i = \sum_{i \in I_2} x_i = 0$ . Puis, les sommes  $\sum_{i \in I_1} E_i$  et  $\sum_{i \in I_2} E_i$  étant directes, on obtient  $\forall i \in I \quad x_i = 0$ , d'où le résultat.

**Proposition 5** Procédons par analyse-synthèse. Soit  $(p_i)_{i \in I}$  la famille des projecteurs associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . Rappelons qu'on a  $\sum_{i \in I} p_i = \text{Id}_E$  et  $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$ .

**Analyse.** Si une telle application linéaire existe, alors, pour tout  $x \in E$ , on a :

$$u(x) = u\left(\sum_{i \in I} p_i(x)\right) = \sum_{i \in I} u\left(\underbrace{p_i(x)}_{\in E_i}\right) = \sum_{i \in I} u_i(p_i(x)).$$

On a donc  $u = \sum_{i \in I} u_i \circ p_i$ , ce qui fournit l'unicité.

**Remarque** L'écriture  $u_i \circ p_i$  est abusive car  $p_i$  a pour espace d'arrivée  $E$  alors que l'espace de départ de  $u_i$  est  $E_i$ . En toute rigueur (ce que nous ne ferons pas), il faudrait écrire  $u_i \circ \tilde{p}_i$  avec  $\tilde{p}_i : E \rightarrow E_i$  et  $x \mapsto p_i(x)$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**Synthèse.** Réciproquement, vérifions que l'application  $u = \sum_{i=1}^p u_i \circ p_i$  convient.

- L'application  $u$  est linéaire, comme somme de composées d'applications linéaires.
- Fixons  $i \in I$  et considérons  $x \in E_i$ . Alors on a  $x = p_i(x)$ , puis :

$$\begin{aligned} u(x) &= (u \circ p_i)(x) = \sum_{k \in I} (u_k \circ p_k \circ p_i)(x) \\ &= (u_i \circ p_i^2)(x) \quad (k \neq i \Rightarrow p_k \circ p_i = 0) \\ &= u_i(x), \quad (p_i(x) = x \text{ car } x \in E_i) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $u|_{E_i} = u_i$ .

### Proposition 6

- Soit  $x \in E$ . Le vecteur  $x$  est combinaison linéaire des éléments de la base  $\mathcal{B}$ . On peut donc trouver des scalaires  $(\alpha_i)_{i \in I}$  tels que  $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ . Puisque  $(I_1, \dots, I_p)$  forme un recouvrement disjoint de  $I$ , on peut écrire :

$$x = \sum_{k=1}^p \underbrace{\sum_{i \in I_k} \alpha_i e_i}_{\in E_k},$$

ce qui prouve que  $x$  appartient à  $\sum_{k=1}^p E_k$ . On a donc  $\sum_{k=1}^p E_k = E$ .

- Montrons que la somme est directe. Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que  $\sum_{k=1}^p x_k = 0$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $x_k \in E_k$ , donc par définition de  $E_k$ , il existe des scalaires  $(\alpha_i)_{i \in I_k}$  tels que  $x_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i e_i$ . La relation  $\sum_{k=1}^p x_k = 0$  s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^p \left( \sum_{i \in I_k} \alpha_i e_i \right) = 0$$

c'est-à-dire, puisque  $(I_1, \dots, I_p)$  forme un recouvrement disjoint de  $I$  :  $\sum_{i \in I} \alpha_i e_i = 0$ .

Par liberté de la famille  $(e_i)_{i \in I}$ , on en déduit que tous les coefficients  $\alpha_i$  sont nuls, et ainsi que tous les  $x_k$  sont nuls. D'où le caractère direct de la somme  $E_1 + \dots + E_p$ .

**Proposition 7** Considérons, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , une base  $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{d_i}^i)$  de  $E_i$  et montrons que la famille  $\mathcal{B} = (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, \dots, e_1^p, \dots, e_{d_p}^p)$  est une base de  $E$ .

**Caractère générateur.** Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la famille  $\mathcal{B}_i$  étant une sous-famille de  $\mathcal{B}$ , on a  $\text{Vect}(\mathcal{B}_i) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ , autrement dit  $E_i \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ . Par conséquent, on a :

$$\bigoplus_{i=1}^p E_i \subset \text{Vect}(\mathcal{B}) \quad \text{i.e.} \quad E \subset \text{Vect}(\mathcal{B}).$$

**Liberté.** Soit  $(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{d_1}^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_{d_p}^{(p)}) \in \mathbb{K}^{d_1 + \dots + d_p}$  une famille de scalaires telle que  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j^{(i)} e_j^i = 0$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , posons  $x_i = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j^{(i)} e_j^i$ . On a

alors  $\sum_{i=1}^p \underbrace{x_i}_{\in E_i} = 0$ . La somme  $\bigoplus_{i=1}^p E_i$  étant directe, on en déduit que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

on a  $x_i = 0$ , autrement dit  $\sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j^{(i)} e_j^i = 0$ . Par liberté des familles  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , on en déduit

la nullité de tous les scalaires de la famille  $(\alpha_j^{(i)})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq d_i}}$ . D'où la liberté de la famille  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 9** Rappel : si  $M$  est une matrice, nous notons  $[M]_{i,j}$  son coefficient d'indice  $(i,j)$ .

Pour  $(i, k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ , notons :

- $r_i$  le nombre de lignes des blocs de type  $A_{i,*}$  ;
- $s_k$  le nombre de colonnes des blocs de type  $A_{*,k}$  (qui est aussi le nombre de lignes des blocs de type  $B_{k,*}$ , car les blocs sont de tailles compatibles pour le produit) ;
- $t_j$  le nombre de colonnes des blocs de type  $B_{*,j}$ .

Écrivons la matrice  $AB$  par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket \quad C_{i,j} \in \mathcal{M}_{r_i, t_j}(\mathbb{K}).$$

Fixons alors  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$  et vérifions que  $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}$ .

Pour cela, fixons  $(a, b) \in \llbracket 1, r_i \rrbracket \times \llbracket 1, t_j \rrbracket$  et montrons que :

$$[C_{i,j}]_{a,b} = \left[ \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b}.$$

Notons  $\alpha = \sum_{h=1}^{i-1} r_h$ ,  $\gamma = \sum_{h=1}^{j-1} t_h$  et, pour  $k \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket$ ,  $\beta_k = \sum_{h=1}^{k-1} s_h$ . Remarquons que  $\beta_{p+1}$  désigne le nombre commun de colonnes de  $A$  et de lignes de  $B$ . On a d'une part :

$$[C_{i,j}]_{a,b} = [AB]_{\alpha+a, \gamma+b} = \sum_{m=1}^{\beta_{p+1}} [A]_{\alpha+a, m} [B]_{m, \gamma+b}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b} &= \sum_{k=1}^p [A_{i,k} B_{k,j}]_{a,b} = \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{s_k} [A_{i,k}]_{a,m} [B_{k,j}]_{m,b} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{s_k} [A]_{\alpha+a, \beta_k+m} [B]_{\beta_k+m, \gamma+b}. \end{aligned}$$

Puisque les ensembles  $([\beta_k+1, \beta_k+s_k])_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  forment un recouvrement disjoints de  $\llbracket 1, \beta_{p+1} \rrbracket$ , on obtient finalement :

$$\left[ \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j} \right]_{a,b} = \sum_{m=1}^{\beta_{p+1}} [A]_{\alpha+a, m} [B]_{m, \gamma+b} = [C_{i,j}]_{a,b},$$

ce qui donne le résultat souhaité.

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**Proposition 10** Quitte à faire une récurrence sur le nombre de blocs, prouvons le résultat pour une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la forme  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ .

Par produit par blocs, on a :

$$M = \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de  $M$  est alors le produit des déterminants de ces deux matrices.

- En développant  $r$  fois de suite par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B.$$

- De même, en développant  $n - r$  fois de suite par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \det A.$$

On a ainsi prouvé que :

$$\det(M) = \det(A) \det(B),$$

ce qui est le résultat attendu.

**Proposition 15** La relation  $1(u) = \text{Id}_E$  et la linéarité de  $P \mapsto P(u)$  sont immédiates.

Soit  $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$  et  $Q = \sum_{q=0}^m b_q X^q$ . Par bilinéarité du produit polynomial, on a :

$$PQ = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q X^{p+q}$$

et donc, par linéarité de  $P \mapsto P(u)$ , on a  $(PQ)(u) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q u^{p+q}$ .

De même, par bilinéarité de la composition dans  $\mathcal{L}(E)$  :

$$P(u) \circ Q(u) = \left( \sum_{p=0}^n a_p u^p \right) \circ \left( \sum_{q=0}^m b_q u^q \right) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq m}} a_p b_q u^{p+q}$$

d'où l'égalité  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .

La preuve est similaire pour l'application  $P \mapsto P(A)$  de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Théorème 19

Cas  $r = 2$ . Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes premiers entre eux. Notons  $P = P_1 P_2$ .

- Comme  $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$ , on a :

$$\text{Ker } P_2(u) \subset \text{Ker } P(u) \quad \text{et} \quad \text{Ker } P_1(u) \subset \text{Ker } P(u).$$

Par suite,  $\text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u) \subset \text{Ker } P(u)$ .

- Les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  étant premiers entre eux, le théorème de Bézout assure l'existence de  $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1$  ; on a alors :

$$(P_1 U_1)(u) + (P_2 U_2)(u) = \text{Id}_E.$$

Soit  $x \in \text{Ker } P(u)$  ; posons :

$$x_1 = (P_2 U_2)(u)(x) \quad \text{et} \quad x_2 = (P_1 U_1)(u)(x).$$

On a alors  $x = x_1 + x_2$  et :

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= (P_1(u) \circ (P_2 U_2)(u))(x) \\ &= (P_1 P_2 U_2)(u)(x) \\ &= (P U_2)(u)(x) = 0 \quad (P \text{ annule } u, \text{ donc } P U_2 \text{ aussi}) \end{aligned}$$

donc  $x_1 \in \text{Ker } P_1(u)$ . De même, on a  $x_2 \in \text{Ker } P_2(u)$ . On a ainsi établi l'inclusion :

$$\text{Ker } P(u) \subset \text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u)$$

et, avec le point précédent, l'égalité  $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u)$ .

- Enfin, si  $x \in \text{Ker } P_1(u) \cap \text{Ker } P_2(u)$ , l'égalité :

$$x = U_1(u) \circ P_1(u)(x) + U_2(u) \circ P_2(u)(x)$$

montre que  $x = 0$ . Par suite,  $\text{Ker } P_1(u) \cap \text{Ker } P_2(u) = \{0\}$ .

On a donc prouvé que  $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u)$ .

**Cas général.** Procédons par récurrence sur  $r \geq 1$ . Le cas  $r = 1$  est trivial. Soit donc  $r \geq 2$  tel que le résultat soit vrai au rang  $r - 1$ ; montrons-le au rang  $r$ . Considérons  $(P_1, \dots, P_r)$

une famille de  $r$  polynômes deux à deux premiers entre eux; notons  $P = \prod_{k=1}^r P_k$ .

Posons  $Q = \prod_{k=1}^{r-1} P_k$ ; les polynômes  $Q$  et  $P_r$  sont alors premiers entre eux.

Ainsi, d'après le cas  $r = 2$ , on a  $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } Q(u) \oplus \text{Ker } P_r(u)$ . Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a  $\text{Ker } Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{r-1} \text{Ker } P_k(u)$ .

Par associativité de la somme directe, on a alors  $\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u)$ , d'où le résultat.

## S'entraîner et approfondir

### Sommes de sous-espaces vectoriels

**2.1** Soit  $a_1, \dots, a_p$  des vecteurs non nuls d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

→<sup>46</sup> Montrer que la somme  $F = \text{Vect}(a_1) + \dots + \text{Vect}(a_p)$  est directe si, et seulement si, la famille  $(a_1, \dots, a_p)$  est libre.

**2.2** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $E$  est la somme directe de →<sup>49</sup> plans vectoriels si, et seulement si, sa dimension est paire.

### Écriture par blocs

**2.3** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ .

1. Expliciter les puissances de  $M$ .
2. (a) Montrer que  $\text{rg } M = n + \text{rg } A$ .  
 (b) Montrer que  $M$  est inversible si, et seulement si,  $A$  l'est.  
 (c) Déterminer alors l'inverse de  $M$ .

**2.4** 1. (a) Déterminer l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commutant avec la matrice  $J_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(b) Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et donner sa dimension.

2. Soit  $p$  un projecteur de rang  $r$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Déterminer la dimension du sous-espace des endomorphismes de  $E$  commutant avec  $p$ .

**2.5** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Montrer que :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \text{rg}(I_p - AB) + n = \text{rg}(I_n - BA) + p.$$

*Indication.* On pourra utiliser le résultat de l'exemple 17 de la page 55.

**2.6** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . En effectuant dans les deux sens le produit par blocs

entre les matrices  $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_p \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix}$ , montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda^n \det(\lambda I_p - AB) = \lambda^p \det(\lambda I_n - BA).$$

**2.7** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Considérons l'application linéaire  $u_A : \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto AM.$$

1. Déterminer le rang de  $u_A$  lorsque  $A = J_r$ .
2. Dans le cas général, déterminer le rang de  $u_A$  en fonction de celui de  $A$ .

**2.8** Soit  $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$  et  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $M$  de rang  $r$ .

1. Montrer que pour tout  $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ , il existe  $X \in \mathbb{K}^r$  tel que :

$$M \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que  $D = CA^{-1}B$ .

**2.9** Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ . On suppose que  $D$  est inversible et que  $CD = DC$ .

$$\text{Montrer que } \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

*Indication.* Obtenir, par une transvection par blocs, une matrice triangulaire par blocs.

**2.10** Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire supérieure stricte, alors on a  $A^n = 0$ .

*Indication.* Dans l'hérédité, écrire la matrice par blocs et effectuer un produit par blocs.

**2.11** Montrer qu'une matrice triangulaire réelle commute avec sa transposée si, et seulement si, elle est diagonale.

## Sous-espaces stables

**2.12** Soit  $D$  la dérivation de  $\mathbb{K}[X]$ .

- <sup>57</sup> 1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  stable par  $D$  et contenant un polynôme  $P$  non nul de degré  $d$ . Montrer que  $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ .
2. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}[X]$  stables par  $D$ .

*Indication.* Si  $F$  est stable par  $D$ , on pourra distinguer deux cas, selon que l'ensemble des degrés des polynômes de  $F$  est majoré ou non.

**2.13** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Prouver que si  $\text{Ker } u$  possède un supplémentaire  $F$  stable par  $u$ , alors  $F = \text{Im } u$ .

\* **2.14** Déterminer les sous-espaces de  $\mathbb{K}^n$  stables par tous les endomorphismes du type :

$$u_\sigma : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \text{avec} \quad \sigma \in \mathcal{S}_n.$$

**2.15 Autour des homothéties vectorielles**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  soit liée. Montrer que  $u$  est une homothétie vectorielle.

*Les deux questions suivantes utilisent la première question, et sont indépendantes entre elles.*

2. (a) Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces vectoriels de  $E$ .
- (b) Supposons  $E$  de dimension finie. Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les hyperplans de  $E$ .
3. (a) Supposons  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  
On suppose que  $u$  n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  vérifie  $a_{11} = 0$ .
- (b) En déduire que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**2.16** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $\mathcal{L}_F(E)$  l'ensemble des endomorphismes stabilisant  $F$ .

1. Montrer que  $\mathcal{L}_F(E)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  et que l'application  $\varphi : u \mapsto u_F$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$ .

2. On suppose  $F$  de dimension finie. Soit  $u \in \mathcal{L}_F(E)$  un automorphisme.

Montrer que  $u^{-1}$  stabilise aussi  $F$  et que l'on a :

$$(u^{-1})_F = (u_F)^{-1},$$

où  $u_F$  et  $(u^{-1})_F$  désignent les endomorphismes induits sur  $F$ .

3. En considérant l'endomorphisme de  $\mathbb{K}(X)$  (l'espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ) qui à  $P$  associe  $XP$ , prouver que le résultat de la question précédente est faux si  $F$  n'est pas de dimension finie.

4. On suppose que  $F$  possède un supplémentaire.

Montrer que le morphisme  $\varphi : u \mapsto u_F$  de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$  est surjectif.

**2.17** On appelle **groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**  toute partie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  stable par produit matriciel et qui, munie de la loi induite, est un groupe.

1. Montrer que tout groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inclus dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

On cherche dans la suite de l'exercice à décrire les groupes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. Soit  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On pose :

$$G_{n,r} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K}) \right\}.$$

Montrer que  $G_{n,r}$  est un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

3. Soit  $G$  un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tels que  $G$  soit un sous-groupe du groupe :

$$\{PMP^{-1} \mid M \in G_{n,r}\}.$$

*Indication.* On pourra remarquer que l'élément neutre de  $G$  est une matrice de projection.

## Polynômes d'endomorphismes

**2.18** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ . Supposons que  $u$  et  $v$  soient nilpotents et <sup>→60</sup> qu'ils commutent. Montrer que  $u \circ v$  et  $u + v$  sont nilpotents

**2.19** Soit  $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et en déduire un polynôme de degré 2 annulant  $A$ .

S'agit-il de son polynôme minimal ?

2. En déduire que  $A$  est inversible.

3. Déterminer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  puis pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

**2.20** Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Supposons que le polynôme  $P = X^2 + X + 1$  soit annulateur de  $u$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\text{Vect}(x, u(x))$  est un plan vectoriel.
2. Soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$  et  $x \notin F$ . Montrer que le plan vectoriel  $\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$  et en somme directe avec  $F$ .
3. Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs de blocs diagonaux  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et, qu'en particulier,  $n$  est pair.

**2.21** Dans cet exercice,  $E$  désigne  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

1. Considérons l'endomorphisme  $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1). \end{array}$

Montrer que  $u - \text{Id}_E$  est un endomorphisme nilpotent.

2. En déduire qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que :

$$\forall P \in E \quad P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k)$$

et déterminer une telle famille.

**2.22** Soit  $(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{K}[X]^r$  une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. On

pose  $P = \prod_{k=1}^r P_k$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in \mathcal{L}(E)$  annulé par  $P$ .

Montrer que les projecteurs associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u)$  sont des polynômes en  $u$ .

## Solutions des exercices

- 2.1** • Supposons la somme  $\text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p)$  directe.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$  tel que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i = 0$ . Montrons que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i = 0$ . Puisque :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i a_i \in \text{Vect}(a_i),$$

le caractère direct de la somme  $\text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p)$  offre :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i a_i = 0.$$

Comme les  $a_i$  sont tous non nuls, ce sont chacun des  $\lambda_i$  qui le sont.

- Supposons  $(a_1, \dots, a_p)$  libre, et montrons que  $\text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p)$  est directe.

Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in \text{Vect}(a_1) \times \cdots \times \text{Vect}(a_p)$  tel que  $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $x_i \in \text{Vect}(a_i)$ , donc il existe  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  tel que  $x_i = \lambda_i a_i$ . On a donc  $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i = 0$ . Par liberté de la famille  $(a_1, \dots, a_p)$ , tous les scalaires  $\lambda_i$  sont nuls donc tous les  $x_i$  aussi. D'où le caractère direct de la somme  $\text{Vect}(a_1) + \cdots + \text{Vect}(a_p)$ .

- 2.2** • Supposons que  $E$  soit somme directe de plans vectoriels. Il existe alors  $p \in \mathbb{N}$  tel que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \dim F_i = 2.$$

La dimension de  $E$  est alors paire, car :

$$\dim E = \sum_{i=1}^p \dim F_i = 2p.$$

- Réciproquement, supposons  $E$  de dimension paire :  $\dim E = 2p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Considérons une base  $(e_1, \dots, e_{2p})$  de  $E$ . En posant alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad F_i = \text{Vect}(e_{2i-1}, e_{2i}),$$

les sous-espaces vectoriels  $F_i$  sont des plans vectoriels et l'on a  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

- 2.3** 1. On obtient, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^{2k} = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{k+1} \\ A^k & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Pour  $(X, Y) \in (\mathbb{K}^n)^2$ , on a  $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY \\ X \end{pmatrix}$ , donc :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \text{Ker } M \iff (X = 0 \quad \text{et} \quad AY = 0) \iff (X = 0 \quad \text{et} \quad Y \in \text{Ker } A).$$

Ainsi, le noyau de  $M$  est l'image de  $\{0\} \times \text{Ker } A$  par l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (\mathbb{K}^n)^2 &\longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ (X, Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité  $\dim \text{Ker } M = \dim \text{Ker } A$  et le théorème du rang donnent :

$$\text{rg } M = 2n - \dim \text{Ker } M = 2n - \dim \text{Ker } A = n + \text{rg } A.$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$M \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{K}) \iff \operatorname{rg} M = 2n \iff \operatorname{rg} A = n \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

(c) Raisonnons par blocs en écrivant  $M^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ , les blocs étant carrés de taille  $n$ . On a alors  $MM^{-1} = \begin{pmatrix} AD & AE \\ B & C \end{pmatrix}$ , donc l'égalité  $MM^{-1} = I_{2n}$  donne :

$$AD = I_n ; \quad AE = 0 ; \quad B = 0 \quad \text{et} \quad C = I_n$$

autrement dit, puisque  $A$  est inversible :

$$D = A^{-1} ; \quad E = 0 ; \quad B = 0 \quad \text{et} \quad C = I_n.$$

$$\text{On a donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.4** 1. (a) Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ . On a :

$$MJ_r = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_r M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a  $MJ_r = J_r M \iff (B = 0 \text{ et } C = 0)$ . Par conséquent, les matrices commutant avec  $J_r$  sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (A, D) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K}).$$

(b) Notons  $\mathcal{C}_{J_r}$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commutant avec  $J_r$ . En notant  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , nous avons obtenu à la question précédente que :

$$\mathcal{C}_{J_r} = \operatorname{Vect} \{E_{i,j} \mid (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \cup \llbracket r+1, n \rrbracket^2\}.$$

Il en résulte que  $\mathcal{C}_{J_r}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , de dimension  $r^2 + (n - r)^2$ .

2. Notons  $r = \operatorname{rg} p$ . Puisque  $p$  est un projecteur, on a  $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  adaptée à cette décomposition, alors on a  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r$ .

Étant donné  $u$  un endomorphisme de  $E$ , on a alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ p) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) J_r \quad \text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p \circ u) = J_r \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Par conséquent,  $u$  commute avec  $p$  si, et seulement si,  $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  commute avec  $J_r$ . L'ensemble de ces endomorphismes est donc  $\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{J_r})$ , où  $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'isomorphisme qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel, de même dimension que  $\mathcal{C}_{J_r}$ , c'est-à-dire  $r^2 + (n - r)^2$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**2.5** • Effectuons la transvection par blocs  $L_2 \leftarrow L_2 - AL_1$  :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_p - AB \end{pmatrix}.$$

Par invariance du rang par transvection par blocs, on a :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_p - AB \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice écrite étant triangulaire par blocs, avec un bloc diagonal inversible, l'exemple 17 de la page 55 nous donne :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(I_n) + \operatorname{rg}(I_p - AB) = n + \operatorname{rg}(I_p - AB).$$

• De même, la transvection par blocs  $L_1 \leftarrow L_1 - BL_2$  donne :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n - BA & 0 \\ A & I_p \end{pmatrix},$$

puis, grâce au résultat de l'exemple 17, on obtient  $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_p \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(I_n - BA) + p$ .

**2.6** Fixons  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dispose des produits par blocs suivants :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & \lambda B \\ 0 & \lambda I_p - AB \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix}.$$

Par propriété du déterminant, on sait que  $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})^2 \quad \det(MN) = \det(M)\det(N)$ . On en déduit que :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda I_n & \lambda B \\ 0 & \lambda I_p - AB \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_p \end{pmatrix}.$$

Or, ce sont deux déterminants triangulaires par blocs. Cela donne :

$$\det(\lambda I_n) \det(\lambda I_p - AB) = \det(\lambda I_n - BA) \det(\lambda I_p),$$

d'où le résultat puisque  $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$  et  $\det(\lambda I_p) = \lambda^p$ .

**2.7** 1. Soit  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . En l'écrivant par blocs  $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$  avec  $M_1 \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ , on a :

$$J_r M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de  $u_{J_r}$  est constitué des matrices  $\begin{pmatrix} 0 \\ M_2 \end{pmatrix}$  avec  $M_2 \in \mathcal{M}_{p-r,q}(\mathbb{K})$ ; il est donc de dimension  $(p-r)q$ . D'après le théorème du rang, on a alors :

$$\operatorname{rg} u_{J_r} = \dim \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) - \dim \operatorname{Ker} u_{J_r} = pq - (p-r)q = rq.$$

2. Notons  $r$  le rang de  $A$ . Alors il existe  $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})$  telles que  $PAQ^{-1} = J_r$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On a :

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker } u_A = 0 &\iff AM = 0 \iff P^{-1}J_r Q M = 0 \iff J_r Q M = 0 \\ &\iff Q M \in \text{Ker } u_{J_r}. \end{aligned}$$

Le noyau de  $u_A$  est donc l'image de celui de  $u_{J_r}$  par l'isomorphisme  $R \mapsto Q^{-1}R$ . Par conséquent, on a  $\dim \text{Ker } u_A = \dim \text{Ker } u_{J_r}$ , puis, d'après la première question :

$$\text{rg } u_A = rq.$$

- 2.8** 1. Soit  $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ . Considérons l'application  $\varphi : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^n$

$$X \mapsto M \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}.$$

L'application  $\varphi$  est linéaire et, grâce à l'inversibilité de  $A$ , injective. Donc d'après le théorème du rang,  $\text{rg } \varphi = r = \text{rg } M$ .

Comme  $\text{Im } \varphi \subset \text{Im } M$ , on en déduit par égalité des dimensions que  $\text{Im } \varphi = \text{Im } M$ .

En particulier,  $M \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ , étant dans  $\text{Im } M$ , donc dans  $\text{Im } \varphi$ , possède au moins un antécédent par  $\varphi$  : d'où l'existence de  $X \in \mathbb{K}^r$  tel que  $M \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ .

2. Fixons  $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ . La question précédente nous permet de considérer  $X \in \mathbb{K}^r$  tel que :

$$M \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{autrement dit} \quad \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix}.$$

On a alors  $AX = BY$  et  $CX = DY$ . Par inversibilité de  $A$ , la première relation donne  $X = A^{-1}BY$ . La seconde donne alors  $CA^{-1}BY = DY$ . Cette égalité étant vraie pour tout  $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ , on en déduit que  $CA^{-1}B = D$ .

- 2.9** Effectuons la transvection par blocs  $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 D^{-1}C$  :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ C - DD^{-1}C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Une transvection par blocs laissant inchangé le déterminant, on a :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

La dernière matrice écrite étant triangulaire par blocs, on obtient finalement :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det(D) = \det(AD - BD^{-1}CD).$$

Puisque  $C$  et  $D$  commutent, on a  $BD^{-1}CD = BD^{-1}DC = BC$ , d'où le résultat.

**Remarque** En utilisant un raisonnement semblable à celui de l'exemple 14 de la page 102, on peut montrer que la formule obtenue dans cet exercice est valable même sans l'hypothèse d'inversibilité de  $D$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**2.10** Le cas  $n = 1$  est trivial, car dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  la seule matrice triangulaire supérieure stricte est la matrice nulle.

Soit  $n \geq 1$ . Supposons le résultat vrai au rang  $n$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure stricte. Écrivons  $A$  par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Un produit par blocs donne :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{L} \\ 0 & B^n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \tilde{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}).$$

Or, la matrice  $A$  étant triangulaire supérieure stricte, la matrice  $B$  l'est aussi. Comme  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'hypothèse de récurrence donne  $B^n = 0$ . Par conséquent, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{L} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et un nouveau produit par blocs donne  $A^{n+1} = AA^n = 0$ . Cela prouve le résultat souhaité.

**2.11** Il est clair qu'une matrice diagonale commute avec sa transposée. Montrons la réciproque par récurrence. Le résultat est évident pour une matrice de taille 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Supposons le résultat vrai pour les matrices de taille  $n$ . Considérons  $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  triangulaire de taille  $n + 1$  commutant avec sa transposée. Quitte à échanger  $M$  et  $M^T$ , supposons  $M$  triangulaire supérieure. Écrivons  $M$  par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La matrice  $B$  appartient alors à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et puisque  $M$  est triangulaire supérieure,  $B$  l'est aussi. On a  $M^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ L^T & B^T \end{pmatrix}$  puis par produits par blocs :

$$MM^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 + LL^T & LB^T \\ BL^T & BB^T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^TM = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda L \\ \lambda L^T & L^T L + B^T B \end{pmatrix}.$$

Puisque  $M$  et  $M^T$  commutent, on obtient  $L^T L = 0$ ; en notant  $L = (\ell_1 \dots \ell_n)$ , cela s'écrit  $\sum_{i=1}^n \ell_i^2 = 0$ . Comme les  $\ell_i$  sont réels, ils sont tous nuls, donc  $L = 0$ . La relation  $MM^T = M^TM$  donne alors  $BB^T = B^T B$ . Par hypothèse de récurrence, on en déduit que  $B$  est diagonale. Ainsi,  $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est également diagonale.

**Remarque** Le résultat est faux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , comme on le voit en considérant la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.12** 1. Comme  $P \in F$ , on a, par stabilité de  $F$  par  $D$  :

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket \quad P^{(k)} = D^k(P) \in F.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $\deg P^{(k)} = d - k$ , donc la famille  $(P^{(k)})_{0 \leq k \leq d}$  est échelonnée en degré. Elle est donc libre. Comme c'est une famille de polynômes de  $\mathbb{K}_d[X]$  de cardinal  $d + 1$ , il s'agit d'une base de  $\mathbb{K}_d[X]$ . On a donc  $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ .

2. Remarquons déjà que  $\{0\}$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont stables par  $D$ , ainsi que chacun des  $\mathbb{K}_d[X]$  avec  $d \in \mathbb{N}$ . Montrons que ce sont les seuls.

Soit  $F \neq \{0\}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  stable par  $D$ ; notons  $A$  l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de  $F$ ; il s'agit d'une partie de  $\mathbb{N}$  non vide.

- Si  $A$  est majoré, alors  $A$  admet un plus grand élément, que l'on note  $d$ ; dans ce cas :
  - \* d'une part,  $F \subset \mathbb{K}_d[X]$ , par définition de  $d$ ;
  - \* d'autre part, il existe  $P \in F$  de degré  $d$  donc, d'après la première question, on a  $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ .
 Par conséquent,  $F = \mathbb{K}_d[X]$ .
- Sinon, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P \in F$  tel que  $\deg P \geq n$ ; d'après la première question, on a alors  $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_{\deg P}[X] \subset F$ . Cette inclusion étant vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit  $F = \mathbb{K}[X]$ .

En conclusion, les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}[X]$  stables par  $D$  sont  $\{0\}$ ,  $\mathbb{K}[X]$  et les  $\mathbb{K}_d[X]$  avec  $d \in \mathbb{N}$ .

**2.13** Supposons que  $F$  soit un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  stable par  $u$ . Par le théorème du rang, on sait que  $u$  induit un isomorphisme de  $F$  sur  $\text{Im } u$ . Par conséquent, on a  $\text{Im}(u) = u(F)$ , donc, par stabilité de  $F$  par  $u$ , on a  $\text{Im } u \subset F$ .

Toujours par le théorème du rang, on a  $\dim F = \dim \text{Im } u$ . D'où l'égalité  $\text{Im } u = F$ .

**2.14** • Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  stable par les  $u_\sigma$  et  $x \in F$ . Notons  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Si l'on considère la transposition  $\tau = (1 \ 2)$ , la stabilité de  $F$  implique que  $x - u_\tau(x) \in F$ , c'est-à-dire :

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2) - (x_2 e_1 + x_1 e_2) \in F \quad \text{ou encore} \quad (x_1 - x_2)(e_1 - e_2) \in F.$$

Donc on a soit  $x_1 = x_2$  soit  $e_1 - e_2 \in F$ .

- \* Supposons que  $e_1 - e_2 \in F$ . Pour tout  $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$ , la stabilité de  $F$  par  $u_\sigma$  avec  $\sigma = (2 \ i)$ , implique que  $e_1 - e_i \in F$ . Le sous-espace vectoriel contient donc l'hyperplan engendré par ces  $n - 1$  vecteurs indépendants (qui est aussi l'hyperplan d'équation  $x_1 + \cdots + x_n = 0$ ). Ainsi, soit  $F$  est égal à cet hyperplan, soit  $F = \mathbb{K}^n$ .
- \* Supposons que  $e_1 - e_2 \notin F$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, pour tout  $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$ , la stabilité de  $F$  par permutation, implique que  $e_1 - e_i \notin F$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $x_1 = x_i$ . On en déduit que  $F$  est inclus dans la droite vectorielle  $\mathbb{K}(1, \dots, 1)$ .

- Réciproquement, il est évident que  $\{0\}$ ,  $\mathbb{K}^n$ , la droite  $\mathbb{K}(1, \dots, 1)$  ainsi que l'hyperplan d'équation  $x_1 + \cdots + x_n = 0$ , sont stables par tous les  $u_\sigma$ .

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

- 2.15** 1. Par hypothèse, pour tout  $x \in E$ , il existe un scalaire  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ .

Si le vecteur  $x$  est non nul, alors le scalaire  $\lambda_x$  est unique.

Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls de  $E$ . Montrons que  $\lambda_x = \lambda_y$ .

- Si la famille  $(x, y)$  est liée, alors il existe un scalaire  $\mu$  tel que  $x = \mu y$ . Ainsi :

$$\lambda_x \mu y = \lambda_x x = u(x) = u(\mu y) = \mu \lambda_y y.$$

Comme le vecteur  $y$  est non nul, on en déduit que  $\lambda_x \mu = \lambda_y \mu$ . Le scalaire  $\mu$  étant non nul (car  $x \neq 0$ ), on en déduit  $\lambda_x = \lambda_y$ .

- Si la famille  $(x, y)$  est libre, alors l'égalité :

$$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

implique, par liberté, que  $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$ .

Ainsi, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad u(x) = \lambda x.$$

Cette égalité étant vraie aussi pour  $x = 0$ , cela prouve que  $u$  est une homothétie.

2. (a) Il est clair qu'une homothétie stabilise tous les sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Réciproquement, soit  $u$  un endomorphisme stabilisant tout sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors, pour tout vecteur  $x$  non nul,  $\mathbb{K}x$  est stable par  $u$ , donc  $u(x) \in \mathbb{K}x$ , autrement dit la famille  $(x, u(x))$  est liée. On en déduit, grâce à la question précédente, que  $u$  est une homothétie.

- (b) Il est clair que les homothéties stabilisent les hyperplans.

Réciproquement, soit  $u$  un endomorphisme stabilisant tout hyperplan. Prouvons que pour tout vecteur  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée ; cela conclura grâce à la première question.

Supposons par l'absurde, qu'il existe un vecteur  $x$  non nul tel que  $u(x)$  n'appartienne pas à  $\mathbb{K}x$ . La famille  $(x, u(x))$  est alors libre ; complétons-là en une base  $(x, u(x), e_3, \dots, e_n)$  de  $E$  (avec  $n = \dim E$ ). L'endomorphisme  $u$  ne stabilise donc pas l'hyperplan  $\text{Vect}(x, e_3, \dots, e_n)$ , ce qui contredit l'hypothèse et offre le résultat.

3. (a) La première question assure l'existence d'un vecteur  $x$  tel que  $(x, u(x))$  soit libre.

Complétons cette famille en une base  $\mathcal{B}$ . Le coefficient d'indice  $(1, 1)$  de cette matrice est alors nul, car sa première colonne est  $(0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T$ .

- (b) Procédons par récurrence sur la taille  $n$  de la matrice. Le résultat est vrai dans  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat vrai dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  de trace nulle.

- Si  $A$  est de la forme  $\lambda I_{n+1}$ , alors  $0 = \text{tr } M = (n+1)\lambda$ , donc  $\lambda = 0$ , puis  $A = 0$ .
- Sinon, considérons l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{K}^{n+1}$  canoniquement associé à  $A$ . Comme  $A$  n'est pas une matrice scalaire,  $u$  n'est pas une homothétie, donc il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On a alors  $\text{tr } M = \text{tr } A = 0$ . L'hypothèse de récurrence assure donc l'existence de  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}MP$  ait tous ses coefficients diagonaux nuls. La

matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  est inversible, d'inverse  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ , et l'on a, par produits

par blocs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & LP \\ C & MP \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & P^{-1}MP \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M \end{pmatrix}$  est semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & LP \\ P^{-1}C & P^{-1}MP \end{pmatrix}$  qui a tous ses coefficients diagonaux nuls. Comme les matrices  $A$  et  $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & M \end{pmatrix}$  représentent toutes deux l'endomorphisme  $u$ , elles sont semblables. On conclut donc, par transitivité.

- 2.16** 1. • On a immédiatement  $\text{Id}_E \in \mathcal{L}_F(E)$  et  $\varphi(\text{Id}_E) = \text{Id}_F$ .

- Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

Pour tout  $x \in F$ , on a  $u(x) \in F$  et  $v(x) \in F$ ; par suite  $(\alpha u + \beta v)(x) \in F$ . L'application  $\alpha u + \beta v$  appartient donc à  $\mathcal{L}_F(E)$  et  $(\alpha u + \beta v)_F = \alpha u_F + \beta v_F$ . Ainsi,  $\mathcal{L}_F(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  et  $\varphi$  est linéaire.

- Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}_F(E)^2$ . Pour tout  $x \in F$ , on a  $v(x) \in F$  puis  $u(v(x)) \in F$ . Ainsi  $u \circ v$  appartient à  $\mathcal{L}_F(E)$  et  $(u \circ v)(x) = u_F(v_F(x))$ , i.e.  $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$ .

On a donc obtenu que  $\mathcal{L}_F(E)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ , et  $\varphi$  est un morphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}_F(E)$  vers  $\mathcal{L}(F)$ .

2. Puisque  $u$  est bijectif,  $u$  est injectif, donc son endomorphisme induit  $u_F$  l'est aussi (rappelons que  $\text{Ker } u_F = F \cap \text{Ker } u$ ). Comme  $F$  est de dimension finie, l'endomorphisme  $u_F$  est bijectif.

Pour tout  $x$  de  $F$ , la surjectivité de  $u_F$  assure alors que l'unique antécédent  $u^{-1}(x)$  de  $x$  par  $u$  appartient à  $F$ . Ainsi,  $F$  est stable par  $u^{-1}$ , autrement dit  $u^{-1} \in \mathcal{L}_F(E)$ . La relation  $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{Id}_E$  entraîne ensuite :

$$u_F \circ (u^{-1})_F = (u^{-1})_F \circ u_F = \text{Id}_F \quad \text{donc} \quad (u^{-1})_F = (u_F)^{-1}.$$

3. L'endomorphisme  $u : Q \mapsto XQ$  de  $\mathbb{K}(X)$  est inversible (d'inverse  $Q \mapsto \frac{Q}{X}$ ) et stabilise  $F = \mathbb{K}[X]$ , mais l'endomorphisme induit  $u_F$  n'est pas surjectif car la fraction rationnelle 1 n'appartient pas à l'image de  $\mathbb{K}[X]$  par  $u$ .

4. Fixons  $v \in \mathcal{L}(F)$  et construisons un antécédent  $u$  de  $v$  par  $\varphi$ , autrement dit construisons  $u \in \mathcal{L}(E)$ , stabilisant  $F$ , et dont l'endomorphisme induit sur  $F$  est  $v$ .

Par hypothèse, on peut considérer  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . On constate alors que l'endomorphisme  $u$  suivant, défini par ses restrictions à  $F$  et  $G$ , convient :

$$\forall x \in F \quad u(x) = v(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in G \quad u(x) = 0.$$

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**2.17** 1. Soit  $G$  un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inclus dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

- Son élément neutre  $J$  vérifie  $J^2 = J$ , donc par inversibilité,  $J = I_n$ . Ainsi  $I_n \in G$ .
- Tout élément  $M \in G$  admet un symétrique  $M'$  qui vérifie par définition,  $MM' = J = I_n$ . On a donc  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $M^{-1} = M'$ ; donc  $M^{-1} \in G$ .

Donc  $G$  est un sous-groupe de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

2. Les opérations matricielles par blocs donnent :

- que  $G_{n,r}$  est stable par produit;
- que  $G_{n,r}$  admet pour élément neutre  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- que tout élément  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  de  $G_{n,r}$  admet pour symétrique  $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Enfin, l'associativité est une conséquence de celle du produit matriciel.

Donc  $G_{n,r}$  est un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

3. • Soit  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est un automorphisme d'algèbre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; on peut alors montrer qu'elle envoie tout groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sur un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . En particulier,  $PG_{n,r}P^{-1} = \{PMP^{-1} \mid M \in G_{n,r}\}$  est un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Réciproquement, soit  $G$  un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- \* Son élément neutre  $J$  vérifie  $J^2 = J$ , donc c'est la matrice d'un projecteur et il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $J = PJ_rP^{-1}$ , où  $r = \text{rg}(J)$ .
- \* Considérons alors  $G_0 = P^{-1}GP = \{P^{-1}MP \mid M \in G\}$ ; par l'automorphisme d'algèbre  $M \mapsto P^{-1}MP$ ,  $G_0$  est un groupe de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , d'élément neutre  $J_r$ .

Soit  $M$  une matrice de  $G_0$  écrite par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}).$$

\* On a alors :

$$M = J_r M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = M J_r = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $M = J_r M = M J_r$ , on en déduit :

$$B = 0, \quad C = 0 \quad \text{et} \quad D = 0 \quad \text{donc} \quad M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

\* D'autre part,  $M$  admet un symétrique  $M' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G_0$ ; en écrivant  $MM' = J_r$ , il vient  $AA' = I_r$ , donc  $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$ .

On en déduit que  $G_0 \subset G_{n,r}$ .

- \* Comme dans la première question, on montre alors que  $G_0$  est un sous-groupe de  $G_{n,r}$ . Il s'ensuit, en écrivant  $G = PG_0P^{-1}$ , que  $G$  est un sous-groupe de  $PG_{n,r}P^{-1}$ .

**2.18** Notons  $a$  l'indice de nilpotence de  $u$ , et  $b$  celui de  $v$ .

- Puisque  $u$  et  $v$  commutent, on a  $(u \circ v)^a = u^a \circ v^a = 0$  car  $u^a = 0$ . Donc  $u \circ v$  est nilpotent, d'indice de nilpotence au plus  $a$ .

**Remarque** Puisque  $u$  et  $v$  jouent des rôles symétriques, l'indice de nilpotence de  $u \circ v$  vaut au plus  $b$ , donc au plus  $\min(a, b)$ .

- Puisque  $u$  et  $v$  commutent, la formule du binôme donne, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$(u + v)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^k \circ v^{p-k}.$$

Prenons  $p = a + b$ . Alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on a  $k \geq a$  ou  $p - k \geq b$ , donc  $u^k = 0$  ou  $v^{p-k} = 0$ . Ainsi, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket \quad u^k \circ v^{p-k} = 0 \quad \text{donc} \quad (u + v)^p = 0.$$

L'endomorphisme  $u + v$  est donc nilpotent, d'indice de nilpotence au plus  $a + b$ .

**Remarque** On pourrait montrer que l'indice de nilpotence de  $u + v$  vaut au plus  $a + b - 1$ .

**2.19** 1. On trouve  $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & -15 & -30 \\ -10 & 9 & 10 \\ 30 & -15 & -26 \end{pmatrix}$  puis  $A^2 - 5A + 6I_3 = 0$ .

Le polynôme  $X^2 - 5X + 6$  est donc annulateur de  $A$ . Si ce n'était pas le polynôme minimal, ce dernier serait de degré 1, donc  $A$  serait une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas.

Le polynôme minimal de  $A$  est donc  $\pi_A = X^2 - 5X + 6$ .

2. On en déduit que  $A(A - 5I_3) = -6I_3$ , ce qui prouve que  $A$  est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{5I_3 - A}{6}.$$

3. • Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La division euclidienne de  $X^n$  par  $\pi_A$  s'écrit :

$$X^n = Q_n \pi_A + a_n X + b_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad (a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2.$$

En évaluant cette égalité en 2 et 3 (les deux racines de  $\pi_A$ ), on obtient le système :

$$\begin{cases} 2a_n + b_n = 2^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \quad \text{soit} \quad a_n = 3^n - 2^n \quad \text{et} \quad b_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} A^n &= (3^n - 2^n)A + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)I_3 \\ &= 2^n B + 3^n C \end{aligned}$$

$$\text{avec } B = 3I_3 - A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } C = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

- Remarquons que, pour  $n = -1$ , la formule précédente donne  $\frac{5I_3 - A}{6}$  qui est la valeur de  $A^{-1}$  trouvée à la question précédente.

Prouvons plus généralement que la formule obtenue précédemment est valable pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que  $A^{-n} = 2^{-n}B + 3^{-n}C$ . Par définition,  $A^{-n}$  est la matrice inverse de  $A^n$ . Il s'agit donc de vérifier que le produit de  $2^nB + 3^nC$  par  $2^{-n}B + 3^{-n}C$  vaut  $I_3$ . On a :

$$(2^nB + 3^nC)(2^{-n}B + 3^{-n}C) = B + C + 2^n3^{-n}BC + 3^n2^{-n}CB.$$

On trouve de plus  $B^2 = B$ ,  $C^2 = C$  et  $BC = CB = 0$ . On en déduit le résultat souhaité, car  $B + C = I_3$ .

**Remarque** Les matrices  $B$  et  $C$  sont des matrices de projecteurs. Plus précisément, ce sont les matrices des projecteurs associés à la décomposition :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - 2I_3) \oplus \text{Ker}(A - 3I_3).$$

Ce sont les projecteurs spectraux de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . On pourra comparer avec l'exercice 3.20 de la page 128.

- 2.20** 1. Le polynôme  $P = X^2 + X + 1$  étant annulateur de  $u$ , on a :

$$u^2 + u + \text{Id}_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Par l'absurde : supposons que  $\text{Vect}(x, u(x))$  ne soit pas un plan. Cela signifie que la famille  $(x, u(x))$  est liée. Le vecteur  $x$  étant non nul, il existe un réel  $\lambda$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . On a alors :

$$0 = u^2(x) + u(x) + x = (\lambda^2 + \lambda + 1)x.$$

Comme  $x$  est non nul, le réel  $\lambda$  est alors une racine du polynôme  $X^2 + X + 1$ , ce qui est absurde car ce polynôme n'a pas de racine réelle. Par conséquent,  $\text{Vect}(x, u(x))$  est un plan.

2. • On a de manière évidente,  $u(x) \in \text{Vect}(x, u(x))$ , et de plus :

$$u(u(x)) = u^2(x) = -u(x) - x \in \text{Vect}(x, u(x)),$$

d'où la stabilité de  $\text{Vect}(x, u(x))$  par  $u$ .

- Par l'absurde : supposons qu'il existe  $y$  non nul dans  $F \cap \text{Vect}(x, u(x))$ . Comme cette intersection est stable par  $u$ , elle contient  $\text{Vect}(y, u(y))$ , qui, d'après la question 1, est un plan. Pour des raisons de dimensions, on a donc :

$$F \cap \text{Vect}(x, u(x)) = \text{Vect}(x, u(x)),$$

puis  $\text{Vect}(x, u(x)) \subset F$ , ce qui n'est pas possible car  $x \notin F$ .

Ainsi,  $F$  et  $\text{Vect}(x, u(x))$  sont en somme directe.

3. Obtenir la matrice souhaitée pour  $u$  revient à prouver l'existence d'une base de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ . En effet, si une telle base existe, alors pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  le plan vectoriel :

$$F_k = \text{Vect}(e_k, u(e_k))$$

est stable par  $u$ , et l'endomorphisme induit a pour matrice :

$$\text{Mat}_{(e_k, u(e_k))}(u_{F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considérons l'ensemble  $A$  des entiers  $k$  pour lesquels il existe des vecteurs  $x_1, \dots, x_k$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que la famille  $(x_1, u(x_1), \dots, x_k, u(x_k))$  soit libre.

En utilisant la question 1, on montre que  $A$  est non vide. La partie  $A$  est également bornée puisque dans  $\mathbb{R}^n$  une famille libre est de cardinal inférieur ou égal à  $n$ . La partie  $A$  admet donc un maximum : notons-le  $p$ . Il existe alors des vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que la famille  $(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p))$  soit libre. Le sous-espace :

$$F = \text{Vect}(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p)) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Vect}(x_k, u(x_k))$$

est alors stable par  $u$ . Montrons par l'absurde que  $F = \mathbb{R}^n$ . Supposons que  $F \not\subseteq \mathbb{R}^n$ . Alors il existe  $x_{p+1} \in \mathbb{R}^n \setminus F$  et, d'après la question précédente, le plan vectoriel  $\text{Vect}(x_{p+1}, u(x_{p+1}))$  est en somme directe avec  $F$ . La famille  $(x_1, u(x_1), \dots, x_{p+1}, u(x_{p+1}))$  est alors libre, ce qui contredit la définition de  $p$ . Conclusion : on a  $F = \mathbb{R}^n$ , et par conséquent  $(x_1, u(x_1), \dots, x_p, u(x_p))$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Dans cette base, la matrice de  $u$  a forme désirée. Au passage, on a  $n = 2p$ , donc  $n$  est pair.

**2.21** 1. Constatons que pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$u(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i \quad \text{puis} \quad (u - \text{Id}_E)(X^j) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i,$$

donc en particulier  $\deg((u - \text{Id}_E)(X^j)) \leq \deg(X^j) - 1$ .

Un polynôme  $P \in E$  étant combinaison linéaire des  $X^j$  pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on obtient  $\deg((u - \text{Id}_E)(P)) \leq \deg(P) - 1$ , puis par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \deg((u - \text{Id}_E)^k(P)) \leq \deg(P) - k;$$

en particulier on a  $\deg((u - \text{Id}_E)^n(P)) < 0$ , autrement dit  $(u - \text{Id}_E)^n(P) = 0$ .

On a ainsi prouvé que  $(u - \text{Id}_E)^n$  est l'endomorphisme nul. L'endomorphisme  $u - \text{Id}_E$  est donc nilpotent.

2. D'après la première question, l'endomorphisme  $u - \text{Id}_E$  est nilpotent et vérifie  $(u - \text{Id}_E)^n = 0$ . On a, par application de la formule du binôme (les endomorphismes  $u$  et  $\text{Id}_E$  commutant) :

$$0 = (u - \text{Id}_E)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k.$$

Pour  $P \in E$ , on remarque que  $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(P) = P(X+k)$ , donc l'évaluation en  $P$  de la relation précédente donne :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) = 0.$$

Par conséquent, en posant  $a_k = (-1)^{k+1-n} \binom{n}{k}$ , on a :

$$\forall P \in E \quad P(X+n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k).$$

## Chapitre 2. Compléments d'algèbre linéaire

**2.22** Fixons  $k_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Montrons que la projection sur  $\text{Ker } P_{k_0}(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r \text{Ker } P_k(u)$

est un polynôme en  $u$ . En posant  $Q = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r P_k$ , on a, par le lemme des noyaux :

$$\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r \text{Ker } P_k(u) = \text{Ker } Q(u).$$

De plus, les polynômes  $P_{k_0}$  et  $Q$  sont premiers entre eux puisque  $P_{k_0}$  est premier avec chacun des  $P_k$  pour  $k \neq k_0$  (cf. corollaire 32 de la page 16).

D'après le théorème de Bézout, il existe  $(U_1, U_2) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $P_{k_0}U_1 + QU_2 = 1$ .

On a alors  $(P_{k_0}U_1)(u) + (QU_2)(u) = \text{Id}_E$  c'est-à-dire, pour tout  $x \in E$  :

$$x = (QU_2)(u)(x) + (P_{k_0}U_1)(u)(x). \quad (\star)$$

Or, on a :

$$P_{k_0}((QU_2)(u))(x) = (P_{k_0}QU_2)(u)(x) = (PU_2)(u)(x) = 0$$

car  $P$  est annulateur de  $u$ , donc  $PU_2$  aussi ; on a ainsi obtenu  $(QU_2)(u)(x) \in \text{Ker } P_{k_0}(u)$ .

De la même manière, on a  $(P_{k_0}U_1)(u)(x) \in \text{Ker } Q(u)$ .

De la relation  $(\star)$  il résulte alors que la projection sur  $\text{Ker } P_{k_0}(u)$  parallèlement à  $\text{Ker } Q(u)$  est  $(QU_2)(u)$ , qui est bien un polynôme en  $u$ .

# Chapitre 3 : Réduction des endomorphismes

<b>I</b>	<b>Éléments propres . . . . .</b>	<b>92</b>
1	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	92
2	Propriétés . . . . .	94
3	Cas de la dimension finie . . . . .	95
4	Éléments propres d'une matrice carrée . . . . .	96
5	Utilisation d'un polynôme annulateur . . . . .	99
<b>II</b>	<b>Polynôme caractéristique . . . . .</b>	<b>100</b>
1	Polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .	100
2	Exemples de calculs de polynômes caractéristiques . . . . .	102
3	Polynôme caractéristique et spectre . . . . .	103
4	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme . . . . .	105
5	Ordre de multiplicité d'une valeur propre . . . . .	106
<b>III</b>	<b>Diagonalisation . . . . .</b>	<b>109</b>
1	Définitions et premières propriétés . . . . .	109
2	Utilisation du polynôme caractéristique . . . . .	112
3	Utilisation d'un polynôme annulateur . . . . .	113
<b>IV</b>	<b>Trigonalisation . . . . .</b>	<b>115</b>
1	Définitions . . . . .	115
2	Utilisation du polynôme caractéristique . . . . .	116
3	Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	119
4	Utilisation d'un polynôme annulateur . . . . .	119
5	Sous-espaces caractéristiques . . . . .	120
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>126</b>

# 3

# Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel de dimension quelconque sur un sous-corps  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{C}$ . On se limite dans la pratique au cas où  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On étudie, dans ce chapitre, des endomorphismes de  $E$  et, en particulier lorsque  $E$  est de dimension finie, on cherche, si c'est possible, une base de  $E$  dans laquelle un tel endomorphisme possède une matrice simple : diagonale, voire triangulaire.

Cela revient, pour une matrice carrée donnée, à chercher une matrice diagonale ou triangulaire qui lui est semblable.

## I Éléments propres

### 1 Éléments propres d'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Définition 1

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre** de  $u$  s'il existe un vecteur *non nul*  $x \in E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- On dit que  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  associé à la **valeur propre**  $\lambda \in \mathbb{K}$  s'il est *non nul* et vérifie  $u(x) = \lambda x$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u$ , le **sous-espace propre** de  $u$  associé à la **valeur propre**  $\lambda$  est :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E : u(x) = \lambda x\}.$$

Exo  
3.1

#### Remarques

- Un vecteur propre n'est associé qu'à une seule valeur propre.
- Une droite vectorielle est stable par  $u$  si, et seulement si, elle est engendrée par un vecteur propre de  $u$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u$ , les vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$  sont les vecteurs *non nuls* de  $E_\lambda(u)$ . En particulier, si  $E = \{0\}$ , il n'y a aucun vecteur propre et donc aucune valeur propre.
- Plus généralement, on notera  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Il est non réduit à  $\{0\}$  si, et seulement si,  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ .

- **Lien avec le noyau.** On a  $E_0(u) = \text{Ker } u$ , donc l'endomorphisme  $u$  admet 0 pour valeur propre si, et seulement s'il n'est pas injectif. Plus généralement,  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif.

- **Lien avec l'image.** Tout sous-espace propre associé à une valeur propre *non nulle* est inclus dans  $\text{Im } u$ .

En effet, si  $\lambda \neq 0$  et si  $x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ , alors  $x = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \text{Im } u$ .

- Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ , on a :

$$E_\lambda(u + \mu \text{Id}_E) = \text{Ker}((u + \mu \text{Id}_E) - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(u - (\lambda - \mu) \text{Id}_E) = E_{\lambda-\mu}(u),$$

donc  $\lambda$  est valeur propre de  $u + \mu \text{Id}_E$  si, et seulement si,  $\lambda - \mu$  est valeur propre de  $u$ .

**Point méthode** Pour rechercher les éléments propres d'un endomorphisme  $u$  (valeurs propres et sous-espaces propres associés) on peut résoudre l'équation  $u(x) = \lambda x$  appelée **équation aux éléments propres**.

### Ex. 1. Endomorphismes remarquables

**Homothétie.** Tout vecteur non nul est vecteur propre de l'homothétie  $\lambda \text{Id}_E$  pour la valeur propre  $\lambda$ . Par suite, si  $E \neq \{0\}$ , cette homothétie admet  $\lambda$  pour unique valeur propre et le sous-espace propre associé est  $E$ . Rappelons la réciproque classique suivante (cf. exercice 2.15 de la page 75) qui donne la réciproque : si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $\forall x \in E \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad u(x) = \lambda x$ , alors  $u$  est une homothétie.

**Rotation.** On a vu dans le chapitre précédent (cf. exemple 22 de la page 57) qu'une rotation du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  d'angle non multiple de  $\pi$  ne stabilisait aucune droite. Elle n'a donc ni valeur propre, ni vecteur propre.

**Projection.** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

Si  $\lambda$  est une valeur propre non nulle, alors  $E_\lambda(p) \subset \text{Im } p$  (voir « lien avec l'image » ci-dessus) donc  $\lambda = 1$  puisque  $p$  coïncide avec l'identité sur son image. Il ne peut donc y avoir que deux valeurs propres, 0 et 1, avec :

$$E_0(p) = \text{Ker } p \quad \text{et} \quad E_1(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \text{Im } p.$$

Réciproquement, si  $p \neq \text{Id}_E$  et  $p \neq 0$ , on a  $\text{Ker } p \neq \{0\}$  et  $\text{Im } p \neq \{0\}$ , donc 0 et 1 sont les valeurs propres de  $p$ .

**Symétries.** Soit  $F$  et  $G$  supplémentaires dans  $E$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

Rappelons que, si  $p$  est le projecteur d'image  $F$  et de noyau  $G$ , on a  $s = 2p - \text{Id}_E$ . Ainsi la relation  $s(x) = \lambda x$  équivaut à  $p(x) = \frac{\lambda+1}{2}x$ .

On déduit de ce qui a été prouvé sur les projections que, si  $s \neq \pm \text{Id}_E$ , alors  $s$  admet pour valeurs propres 1 et  $-1$  et que les sous-espaces propres associés sont respectivement  $F$  et  $G$ .

## Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Endomorphismes nilpotents.** Un endomorphisme nilpotent  $u$  n'admet que 0 pour valeur propre. En effet, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  et  $x$  un vecteur propre associé, on a  $u(x) = \lambda x$ , et par une récurrence immédiate :  $\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k x$ .

En prenant  $k$  tel que  $u^k = 0$ , cela donne  $\lambda^k = 0$  puisque  $x \neq 0$ , donc  $\lambda = 0$ .

Réiproquement, si  $E \neq \{0\}$ , 0 est valeur propre de  $u$  puisqu'un endomorphisme nilpotent est alors non injectif.

**Ex. 2.** Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Déterminons les valeurs propres et les sous-espaces propres de la dérivation  $D \in \mathcal{L}(E)$ .

Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $D$  si, et seulement si, l'équation  $f' = \lambda f$  a une solution non nulle dans  $E$ . Or les solutions de l'équation différentielle  $y' = \lambda y$  sont les éléments de la droite vectorielle engendrée par la fonction non nulle  $e_\lambda : t \mapsto \exp(\lambda t)$ .

En conclusion, tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $D$  et  $E_\lambda(D) = \text{Vect}(e_\lambda)$ .

**Ex. 3.** Soit  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Déterminons les éléments propres de  $T \in \mathcal{L}(E)$  défini par :

$$T((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}.$$

Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $T$  si, et seulement si, l'équation  $T(u) = \lambda u$  a une solution non nulle dans  $E$ . Or  $T(u) = \lambda u$  équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n,$$

donc  $E_\lambda(T)$  est l'ensemble des suites géométriques de raison  $\lambda$ .

En conclusion, tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $T$ , le sous-espace propre associé étant la droite vectorielle engendrée par la suite géométrique  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Rappelons que pour  $\lambda = 0$ , on a  $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 0, \dots)$ .

**Ex. 4.** Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $u(P) = XP$ .

Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si, l'équation  $XP = \lambda P$  a une solution non nulle dans  $E$ .

Or, pour  $P \neq 0$ , on a :

$$\deg(XP) = 1 + \deg(P) \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg(P) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

ce qui rend l'égalité  $XP = \lambda P$  impossible puisque  $\deg(\lambda P) < \deg(XP)$ .

En conclusion,  $u$  n'a pas de valeur propre.

## 2 Propriétés

### Proposition 1

Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Démonstration page 122.

Le résultat suivant est immédiat par définition d'un sous-espace propre.

**Proposition 2**

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , les valeurs propres de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  sont les valeurs propres  $\lambda$  de  $u$  telles que  $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$ . On a alors :

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

**Proposition 3**

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres de  $u$  deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres associés  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$  sont en somme directe.

Démonstration page 122

**Principe de démonstration.**

Appliquer le lemme de décomposition des noyaux à  $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$ .

**Corollaire 4**

**Exo 3.2** Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Exo 3.3** **Démonstration.** Ce sont des vecteurs non nuls appartenant à des sous-espaces vectoriels en somme directe (cf. exemple 5 de la page 47).  $\square$

**Ex. 5.** En reprenant l'exemple 2 de la page précédente, on voit que, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des scalaires deux à deux distincts, la famille de fonctions  $(e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n})$  est une famille libre de  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  (on a noté  $e_\lambda$  la fonction définie par  $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ ).

Ainsi, la famille  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$  est libre.

**Ex. 6.** En reprenant l'exemple 3 de la page ci-contre, on voit que, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des scalaires deux à deux distincts, la famille de suites géométriques  $((\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\lambda_p^n)_{n \in \mathbb{N}})$  est libre dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Ainsi, la famille  $((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})_{\lambda \in \mathbb{K}}$  est libre.

### 3 Cas de la dimension finie

**Corollaire 5**

Si  $E$  est de dimension finie et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres de  $u$  deux à deux distinctes, alors :

$$\sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(u) \leq \dim E.$$

**Démonstration.** En effet, les  $E_{\lambda_i}(u)$  étant en somme directe, on a (voir page 49) :

$$\sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \leq \dim E. \quad \square$$

**Définition 2**

Si  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de  $u$  est le **spectre** de  $u$  que l'on note  $\text{sp}(u)$ .

## Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Attention** Il arrive parfois que l'on parle du spectre d'un endomorphisme  $u$  en dimension infinie : il s'agit alors de l'ensemble des scalaires  $\lambda$  tels que  $u - \lambda \text{Id}_E$  soit non *bijectif*, alors que les valeurs propres de  $u$  sont les scalaires  $\lambda$  tels que  $u - \lambda \text{Id}_E$  soit non *injectif*. Les éléments du spectre sont appelés les **valeurs spectrales** de  $u$ .

**Ex. 7.** On a vu à l'exemple 4 de la page 94 que l'endomorphisme  $u : P \mapsto XP$  de  $\mathbb{K}[X]$  n'admettait pas de valeur propre. En particulier, 0 n'est pas valeur propre de  $u$  et pourtant  $u$  est non bijectif puisque son image est contenue dans l'hyperplan d'équation  $P(0) = 0$  (0 est donc valeur spectrale de  $u$ ).

### Corollaire 6

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  a au plus  $n$  éléments.

**Démonstration.** D'après le corollaire 4 de la page précédente, à toute famille de  $p$  valeurs propres deux à deux distinctes on peut associer une famille libre de  $p$  vecteurs propres.  $\square$

## 4 Éléments propres d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition 3

Les **éléments propres** de  $A$  sont les éléments propres de son endomorphisme canoniquement associé. Plus précisément :

- on dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre** de  $A$  s'il existe  $X \in \mathbb{K}^n$  non nul tel que  $AX = \lambda X$  ;
- on dit que  $X \in \mathbb{K}^n$  est un **vecteur propre** de  $A$  **associé à la valeur propre**  $\lambda \in \mathbb{K}$  si  $X$  est non nul et vérifie  $AX = \lambda X$  ;
- si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $A$ , le **sous-espace propre** de  $A$  **associé à la valeur propre**  $\lambda$  est :

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n : AX = \lambda X\} ;$$

- l'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé le **spectre** de  $A$  et noté  $\text{sp}(A)$ .

**Remarque** Le scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $A - \lambda I_n$  est non inversible, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ .

De plus, d'après le théorème du rang,  $\dim E_\lambda(A) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .

Exo  
3.4

### Corollaire 7

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet au plus  $n$  valeurs propres.

**Démonstration.** Le corollaire 6 nous donne le résultat pour l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .  $\square$

**Point méthode** Pour rechercher les éléments propres d'une matrice  $A$ , on peut résoudre l'équation  $AX = \lambda X$  appelée **équation aux éléments propres**.

**Remarque** On verra comment, à l'aide du polynôme caractéristique ou d'un polynôme annulateur, obtenir les valeurs propres d'une matrice sans résolution de système.

**Ex. 8.** Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont les éléments de sa diagonale. En effet, si  $A$  triangulaire a pour diagonale  $(a_1, \dots, a_n)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la matrice  $A - \lambda I_n$  est triangulaire et a pour diagonale  $(a_1 - \lambda, \dots, a_n - \lambda)$  et l'on sait qu'une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

**Ex. 9.** Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ .

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de la transposée de la matrice compagnon du polynôme  $P = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-2} - \dots - a_n$  (cf. exemple 40 de la page 66) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . En posant  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ , le système  $AX = \lambda X$  se traduit par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket \quad x_{i+1} = \lambda x_i \quad \text{et} \quad a_n x_0 + \cdots + a_1 x_{n-1} = \lambda x_{n-1}.$$

On a donc  $AX = \lambda X$  si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad x_i = \lambda^i x_0 \quad \text{et} \quad x_0 \underbrace{(a_n + a_{n-1}\lambda + \cdots + a_1\lambda^{n-1} - \lambda^n)}_{=-P(\lambda)} = 0.$$

Il y a donc une solution  $X$  non nulle si, et seulement si,  $P(\lambda) = 0$  et dans ce cas le sous-espace

propre associé est la droite engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ .

**Remarque** On peut facilement voir sans calcul que les sous-espaces propres de  $A$  sont de dimension 1. En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la matrice  $A - \lambda I_n$  est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & * & \cdots & * & 1 \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

et donc de rang au moins  $n-1$  puisque la matrice extraite indiquée ci-dessus est de rang  $n-1$  car triangulaire inférieure avec coefficients diagonaux tous non nuls.

## Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

### Proposition 8

Soit  $A$  une matrice représentant  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

On a alors  $\text{sp}(A) = \text{sp}(u)$  et, pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$  :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E_\lambda(u) \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

**Démonstration.** Si  $X$  est la matrice représentant un vecteur  $x \in E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on a l'équivalence  $u(x) = \lambda x \iff AX = \lambda X$ .  $\square$

### Corollaire 9

Deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

**Remarque** Plus précisément, si  $A = PBP^{-1}$ , alors pour tout  $\lambda \in \text{sp}(B)$  :

$$E_\lambda(A) = \{PX \mid X \in E_\lambda(B)\}.$$

### Cas des matrices réelles considérées comme matrices complexes

Soit  $A$  une matrice à coefficients réels. On peut considérer que  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ou à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

- On obtient dans le premier cas, les éléments propres réels, dans le second, les éléments propres complexes de  $A$ .
- On distinguera donc le spectre réel de  $A$ , noté  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ , de son spectre complexe  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ .

### Proposition 10

Soit  $A$  une matrice réelle et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a :

$$\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \iff \bar{\lambda} \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathbb{C}^n \quad X \in E_\lambda(A) \iff \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

**Démonstration.** Si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ , on note bien entendu  $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ .

En notant  $a_{i,j}$  les coefficients de la matrice  $A$ , l'égalité  $AX = \lambda X$  se traduit par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

Par conjugaison de ces relations, en tenant compte du fait que les  $a_{i,j}$  sont réels, on obtient :

$$AX = \lambda X \iff A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X},$$

ce qui donne les deux résultats.  $\square$

**Remarque** On peut démontrer de la même façon que si  $A$  est une matrice complexe, alors  $\text{sp}(\bar{A}) = \overline{\text{sp}(A)}$  et que, pour tout  $\lambda \in \text{sp}(A)$ , les éléments de  $E_\lambda(A)$  et de  $E_{\bar{\lambda}}(\bar{A})$  sont conjugués.

**Remarques** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- On a l'égalité  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}$ .

En effet,  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $A - \lambda I_n$  est non inversible, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Or, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le déterminant de  $A - \lambda I_n$  est le même que l'on considère cette matrice comme réelle ou complexe.

- En distinguant les deux sous-espaces propres réel et complexe de  $A$  :

$$E_{\lambda}^{(\mathbb{R})}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda X\} \quad \text{et} \quad E_{\lambda}^{(\mathbb{C})}(A) = \{X \in \mathbb{C}^n : AX = \lambda X\},$$

on a  $\dim_{\mathbb{R}} E_{\lambda}^{(\mathbb{R})}(A) = \dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda}^{(\mathbb{C})}(A)$  puisque chacune de ces deux dimensions est égale à  $n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$  d'après le théorème du rang.

**Ex. 10.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$ , donc la matrice  $A - \lambda I_2$  est non inversible si, et seulement si,  $\lambda = \pm i$ .

On a donc  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$  et  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ .

### Remarque

Plus généralement, si  $\mathbb{K}'$  est un sous-corps du corps  $\mathbb{K}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}')$ , alors :

$$\text{sp}_{\mathbb{K}'}(A) \subset \text{sp}_{\mathbb{K}}(A) \quad \text{et, plus précisément,} \quad \text{sp}_{\mathbb{K}'}(A) = \text{sp}_{\mathbb{K}}(A) \cap \mathbb{K}'.$$

## 5 Utilisation d'un polynôme annulateur

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Proposition 11

Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Si  $x \in E_{\lambda}(u)$ , on a  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .
- Si  $X \in E_{\lambda}(A)$ , on a  $P(A)X = P(\lambda)X$ .

**Démonstration.** Si  $u(x) = \lambda x$ , on établit, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k(x) = \lambda^k x. \tag{*}$$

Les deux applications  $P \mapsto P(u)(x)$  et  $P \mapsto P(\lambda)x$  sont évidemment linéaires de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $E$ . La relation (\*) montre qu'elles coïncident sur la base canonique de  $\mathbb{K}[X]$  et donc sont égales.

La démonstration est similaire pour les matrices.  $\square$

### Proposition 12

Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

On a le même résultat pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Démonstration.** Si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , alors il existe  $x$  non nul dans  $E_{\lambda}(u)$ .

D'après la proposition 11,  $P(\lambda)x = P(u)(x) = 0$  et donc  $P(\lambda) = 0$  puisque  $x \neq 0$ .  $\square$

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 11.** On retrouve ainsi que le spectre d'un projecteur  $p$  est inclus dans  $\{0, 1\}$  puisque  $p$  est annulé par le polynôme  $X^2 - X$ . De même celui d'une symétrie est inclus dans  $\{-1, 1\}$  à l'aide du polynôme  $X^2 - 1$ .

**Ex. 12.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  vérifie  $A^3 = I_3$ . En effet, son endomorphisme canoniquement associé permute circulairement les trois vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{K}^3$ . Ainsi, ses valeurs propres sont racines du polynôme  $X^3 - 1$ . Donc :

$$\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\} \quad \text{et} \quad \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}.$$

**Remarque** On peut facilement montrer que ce sont en fait des égalités en exhibant des vecteurs propres associés. On trouve, dans le cas complexe :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A) \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \in E_j(A) \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \in E_{j^2}(A),$$

et,  $X_0$  étant réel, il convient pour le cas réel.

**Attention** Lorsque l'on dispose d'un polynôme annulateur  $P$  de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , toutes les valeurs propres de  $u$  sont racines de  $P$ , mais certaines racines de  $P$  peuvent ne pas être valeurs propres de  $u$ .

Ainsi, le polynôme  $X^2 - X = X(X - 1)$  est un polynôme annulateur de  $\text{Id}_E$ , alors que 0 n'en est pas valeur propre.

#### Proposition 13

Si un endomorphisme  $u$  admet un polynôme minimal  $\pi_u$ , ses valeurs propres sont les racines de  $\pi_u$ .

Démonstration page 122

**Principe de démonstration.** Écrire  $\pi_u = (X - \mu)P$ , et prendre  $x$  tel que  $P(u)(x) \neq 0$ .

## II Polynôme caractéristique

### 1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Par définition,  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si, et seulement si, la matrice  $A - \lambda I_n$  est non inversible donc si, et seulement si,  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ .

Comme le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale en ses coefficients et que les coefficients de  $\lambda I_n - A$  sont polynomiaux en  $\lambda$ , on en déduit que  $\det(\lambda I_n - A)$  est polynomiale en  $\lambda$ . Cela permet de poser la définition suivante.

#### Définition 4

On appelle **polynôme caractéristique** de  $A$ , et l'on note  $\chi_A$ , l'unique polynôme tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

**Remarques**

- Il y a bien unicité d'un tel polynôme. En effet,  $\mathbb{K}$  étant un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , il contient  $\mathbb{Q}$ , qui est infini, et donc deux polynômes ayant même fonction polynomiale associée sont égaux.
- Par abus, on note parfois  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$  que l'on peut considérer comme déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}(X)$  des fractions rationnelles. Il s'agit d'un léger abus dans le cadre du programme. En effet, on a défini uniquement le déterminant d'une matrice à coefficients dans un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , son polynôme caractéristique  $\chi_A$  est identique que l'on considère  $A$  comme une matrice réelle ou comme une matrice complexe.

**Ex. 13.** On a  $\chi_A = \chi_{A^T}$ . En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\chi_{A^T}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A^T) = \det((\lambda I_n - A)^T) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda).$$

**Proposition 14**

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  et l'on a :

$$\chi_A = X^n - (\text{tr } A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

Démonstration page 122

Exo  
3.8

**Principe de démonstration.** Rappelons que, si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \quad (\varepsilon(\sigma) \text{ représente la signature de } \sigma).$$

On remarque que  $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A) - \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{i,i})$  est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à  $n - 1$ .

**Point méthode**

Le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est  $X^2 - (\text{tr } A)X + \det A$ .

**Remarques**

- Lorsque  $n \geq 3$ , les autres coefficients du polynôme caractéristique n'ont pas été explicités, car il n'ont pas d'expression aussi simple.
- Rappelons que, par convention, un déterminant de taille nulle est égal à 1.

Pour  $n = 0$ , on a donc  $\chi_A = 1$  et il s'agit bien d'un polynôme unitaire de degré 0.

**Proposition 15**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Démonstration.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . On a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\chi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda). \quad \square$$

## Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 14.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ . Montrons que  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

- Dans le cas où  $A$  est inversible, les matrices  $AB$  et  $BA$  sont semblables puisque  $AB = A(BA)A^{-1}$ , donc ont même polynôme caractéristique.
- Dans le cas général, pour  $t \in \mathbb{K}$ , posons  $A_t = A - tI_n$ .

Le polynôme  $\chi_A$  étant non nul, il admet un nombre fini de racines, donc il y a une infinité de scalaires  $t$  pour lesquels  $A_t$  est inversible. Pour de tels  $t$ , on a donc  $\chi_{A_t B} = \chi_{B A_t}$ .

Fixons  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a donc  $\det(A_t B - \lambda I_n) = \det(B A_t - \lambda I_n)$  pour une infinité de scalaires  $t$ . Comme les deux fonctions :

$$t \mapsto \det(A_t B - \lambda I_n) \quad \text{et} \quad t \mapsto \det(B A_t - \lambda I_n)$$

sont polynomiales (les coefficients des matrices  $A_t B - \lambda I_n$  et  $B A_t - \lambda I_n$  sont polynomiaux en  $t$ ) et qu'elles coïncident sur un ensemble infini, les polynômes associés sont égaux et donc en particulier ont la même valeur en 0, ce qui donne  $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$ .

## 2 Exemples de calculs de polynômes caractéristiques

**Ex. 15.** Si  $M$  est une matrice triangulaire supérieure par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , alors son polynôme caractéristique est  $\chi_M = \chi_A \chi_D$  puisque, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\chi_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I_p - A & -C \\ 0 & \lambda I_q - D \end{pmatrix} = \chi_A(\lambda) \chi_D(\lambda).$$

Exo 3.9 Ce résultat se généralise à toute matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) par blocs : le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux.

Exo 3.10 En particulier, pour des blocs de taille 1, on obtient le résultat suivant.

### Proposition 16

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire de diagonale  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , alors son polynôme caractéristique est égal à  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ .

**Ex. 16. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon**

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Calculons, pour commencer, le déterminant de :

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Par l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \cdots + \lambda^{n-1} L_n$  (qui conserve le déterminant comme suite de transvections), la matrice  $A - \lambda I_n$  se transforme en :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 - \lambda \end{pmatrix}$$

où  $\alpha = a_n + a_{n-1}\lambda + \cdots + a_2\lambda^{n-2} + a_1\lambda^{n-1} - \lambda^n$ .

Un développement suivant la première ligne donne alors  $(-1)^n \chi_A(\lambda) = (-1)^{n+1} \alpha$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est donc  $\chi_A(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - \cdots - a_n$ .

**Point méthode** Comme on l'a fait dans l'exemple précédent, il est parfois plus intéressant de calculer  $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$  plutôt que  $\det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$ .

### 3 Polynôme caractéristique et spectre

#### Proposition 17

Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  si, et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de  $A$ .

**Démonstration.** Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $A - \lambda I_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  c'est-à-dire si, et seulement si,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

Comme  $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$ , on en déduit le résultat. □

**Remarque** Comme on sait que le polynôme caractéristique d'une matrice de taille  $n$  est de degré  $n$  (proposition 14 de la page 101), cela permet donc de retrouver qu'une matrice carrée de taille  $n$  a au plus  $n$  valeurs propres.

**Ex. 17.** Les valeurs propres d'une matrices triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Point méthode** La proposition 17 de la page précédente montre l'importance pratique d'obtenir, dans la mesure du possible, le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant de  $A - \lambda I_n$  par opérations élémentaires afin (suivant les cas) :

- de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes,
- de se ramener à une matrice triangulaire (au moins en partie).

**Ex. 18.** Déterminons le spectre de  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ .

Commençons par remarquer que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ce qui montre que 2 est valeur propre

et que la somme des colonnes de  $A - 2I_3$  est nulle.

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ajoutons donc à la dernière colonne de  $A - \lambda I_3$  la somme des deux autres :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 & 2 - \lambda \\ 4 & 7 - \lambda & 2 - \lambda \\ 3 & 6 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 & 1 \\ 4 & 7 - \lambda & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{factorisation dans } C_3) \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1). \end{aligned}$$

On a donc  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{2, -j, -j^2\}$  et  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$ .

**Remarque** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors  $A$  a au moins une valeur propre.
  - Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et si  $n$  est impair, alors  $A$  a au moins une valeur propre réelle.
- En effet, on utilise la proposition 17 de la page précédente et :
- dans le premier cas, le théorème de d'Alembert-Gauss,
  - dans le deuxième cas, le théorème des valeurs intermédiaires.

## 4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Dans toute cette section, on suppose  $E$  de dimension finie  $n$  et l'on considère un endomorphisme  $u$  de  $E$ .

### Définition 5

On appelle **polynôme caractéristique** de  $u$ , et l'on note  $\chi_u$ , l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u),$$

c'est-à-dire le polynôme caractéristique de sa matrice dans n'importe quelle base.

En particulier, si  $u$  est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ , alors  $\chi_u = \chi_A$ .

**Attention** La notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme n'a aucun sens si  $E$  n'est pas de dimension finie.

**Ex. 19.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 1.

Pour calculer son polynôme caractéristique, écrivons sa matrice dans une base bien choisie.

Complétons une base de  $\text{Im } u$  en une base de  $E$ . Dans une telle base, la matrice de  $u$  a la forme triangulaire :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc  $X^{n-1}(X - \alpha_{1,1})$  et comme  $\alpha_{1,1}$  est la trace de  $u$ , on obtient :

$$\chi_u(X) = X^{n-1}(X - \text{tr } u).$$

### Proposition 18

Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  si, et seulement si, c'est une racine du polynôme caractéristique de  $u$ .

**Démonstration.** Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas inversible c'est-à-dire :

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0.$$

□

### Remarques

- On retrouve le fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  a au plus  $n$  valeurs propres distinctes.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.
  - \* Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors  $u$  a au moins une valeur propre.
  - \* Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et si  $\dim E$  est impair, alors  $u$  a au moins une valeur propre.

**Attention** Comme le montre l'exemple 4 de la page 94, en dimension infinie, un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel n'admet pas nécessairement de valeur propre.

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

#### Proposition 19

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  divise  $\chi_u$ .

Démonstration page 122.

#### Remarques

- On retrouve l'inclusion  $\text{sp}(u_F) \subset \text{sp } u$ .
- Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $u$  stabilisant les sous-espaces vectoriels d'une décomposition  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  est :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p \chi_{u_i},$$

où, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u_i$  est l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_i$ .

En effet, si  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  est une base de  $E$  adaptée à la décomposition considérée, la matrice de  $u$  dans cette base est  $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_p)$  où  $A_i$  est, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la matrice de  $u_i$  dans la base  $\mathcal{B}_i$  de  $E_i$ .

Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\lambda I_n - A = \text{Diag}(\lambda I_{n_1} - A_1, \dots, \lambda I_{n_p} - A_p),$$

en notant  $n_1, \dots, n_p$  les dimensions de  $E_1, \dots, E_p$ . Le résultat s'ensuit par calcul du déterminant d'une matrice diagonale par blocs.

## 5 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est toujours supposé de dimension finie.

#### Définition 6

On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de  $u$ .

On définit de même l'ordre de multiplicité des valeurs propres d'une matrice.

**Remarque** En particulier, une valeur propre de  $u$  est dite simple, double, triple... si c'est une racine simple, double, triple... du polynôme caractéristique de  $u$ .

**Notation** Dans la suite, l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  sera noté  $m(\lambda)$ .

**Attention** La notion d'ordre de multiplicité n'a pas de sens en dimension infinie.

#### Proposition 20

Pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ , on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda).$$

Démonstration page 122.

**Principe de démonstration.** On utilise la proposition 19.

**Ex. 20.** Si  $u$  est de rang inférieur ou égal à  $r$ , le polynôme  $\chi_u$  est divisible par  $X^{n-r}$ , puisque le noyau  $\text{Ker } u = E_0(u)$  est de dimension supérieure ou égale à  $n-r$ .

**Ex. 21.** Ainsi, le polynôme caractéristique de la matrice :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \alpha_{n-1} \\ \hline \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} & 0 \end{array} \right)$$

de rang inférieur ou égal à 2 est de la forme :

$$\chi_A = X^{n-2} (X^2 + aX + b).$$

Comme la trace de  $A$  est nulle, on en déduit  $a = 0$ , mais la valeur de  $b$  n'est pas facile à trouver de cette façon. Nous allons donc procéder autrement.

Supposons les  $\alpha_i$  non tous nuls (sinon,  $A = 0$  et  $\chi_A = X^n$ ). En notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , une base de l'image de l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à  $A$  est donnée par les vecteurs  $e_n$  et  $e_0 = u(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$ . Complétons  $(e_n, e_0)$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On a  $u(e_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2 e_n$ , donc en posant  $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2$ , la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme :

$$M = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & \beta & * \\ 1 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right).$$

On a donc  $\chi_A = \chi_u = \chi_M = X^{n-2}(X^2 - \beta)$ .

### Corollaire 21

Si  $\lambda$  est valeur propre simple de  $u$ , alors  $\dim E_\lambda(u) = 1$ .

**Remarque** Le spectre de  $u$  est, par définition, l'ensemble des racines de  $\chi_u$  dans  $\mathbb{K}$ . Comme dans le cas des polynômes, on distingue soigneusement les notions d'ensemble et de liste des valeurs propres de  $u$ .

- L'ensemble des valeurs propres est le spectre de  $u$ . S'il est égal à  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  distincts deux à deux, alors on a :

$$\chi_u = Q \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$$

où  $Q \in \mathbb{K}[X]$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$  et les  $m(\lambda_i)$  sont les ordres de multiplicité.

- Une liste des valeurs propres comptées avec ordre de multiplicité est une famille de scalaires répétant les valeurs propres avec leurs multiplicités. Une telle liste est unique à l'ordre près et si  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$  en est une, alors on a :

$$\chi_u = Q \prod_{i=1}^s (X - \mu_i)$$

où  $Q \in \mathbb{K}[X]$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 22.** La diagonale d'une matrice triangulaire constitue une liste de ses valeurs propres, compilées avec leur ordre de multiplicité.

- Bien sûr, la liste  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$  est formée des  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  répétés autant de fois que leur multiplicité, c'est-à-dire, à l'ordre près :

$$(\mu_1, \dots, \mu_s) = (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m(\lambda_1) \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m(\lambda_p) \text{ fois}}).$$

On a donc :

$$s = m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_p).$$

- Si  $\chi_u$  est scindé, alors on a  $s = n$  et :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)} = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i).$$

#### Proposition 22

Si  $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \mu_i)$  est scindé, alors :

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^n \mu_i.$$

**Démonstration.** Il s'agit des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme, puisque :

$$\chi_u = X^n - (\operatorname{tr} u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u. \quad \square$$

**Autre formulation** Si  $\operatorname{sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  distincts deux à deux :

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^p m(\lambda_i) \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m(\lambda_i)}.$$

#### Remarques

- Tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie a un polynôme caractéristique scindé puisque tout polynôme non nul de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé.
- Il existe des endomorphismes d'espace vectoriel réel de dimension finie dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé.

Par exemple, la rotation d'angle  $\theta \neq 0$  [ $\pi$ ] du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , de matrice, dans la base canonique :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique :

$$X^2 - 2X \cos \theta + 1.$$

Il n'est donc pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , puisque ses racines  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  sont non réelles.

## III Diagonalisation

Dans cette section,  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est supposé de dimension finie  $n$ , et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### 1 Définitions et premières propriétés

**Définition 7**

- L'endomorphisme  $u$  est dit **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.  
Une telle base s'appelle une **base de diagonalisation** de  $u$ .
- La matrice  $A$  est dite **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe  $D$  diagonale et  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Reformulation** Autrement dit,  $u$  est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

**Proposition 23**

Si  $A$  représente  $u$ , elle est diagonalisable si, et seulement si,  $u$  est diagonalisable.

**Démonstration.** Supposons que  $A$  soit la matrice de  $u$  dans une certaine base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

- Si  $u$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $u$  est diagonale et donc les matrices  $A$  et  $D$  sont semblables comme matrices d'un même endomorphisme.
- Supposons  $A$  diagonalisable et prenons une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ . Considérons alors la base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P$ . Les formules de changement de base nous disent que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}'$  est  $P^{-1}AP$ , c'est-à-dire  $D$ . Donc  $u$  est diagonalisable.  $\square$

**Corollaire 24**

La matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

### Terminologie

- **Diagonaliser** un endomorphisme  $u$  de  $E$  signifie trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale, c'est-à-dire une base de  $E$  constituée de vecteurs propres pour  $u$ .
- **Diagonaliser** une matrice signifie diagonaliser son endomorphisme canoniquement associé, ce qui revient à trouver une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Point méthode** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable et  $(E_1, \dots, E_n)$  une base de  $\mathbb{K}^n$  constituée de vecteurs propres de  $A$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Si l'on pose  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $E_1, \dots, E_n$ , alors :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 23.** Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, sa transposée est diagonalisable.

En effet, si  $A$  est diagonalisable, il existe  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Alors  $A^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D^T P^T$  est semblable à la matrice diagonale  $D^T = D$ , donc est diagonalisable.

La réciproque s'obtient en appliquant cela à la matrice  $A^T$ .

#### Proposition 25

Si  $E$  est de dimension  $n$  et si  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

De même, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $A$  est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Démonstration page 123

**Ex. 24.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  est diagonalisable. En effet, son polynôme caractéristique est  $(X - 1)(X - 4)(X - 6)$ , donc  $A$  admet trois valeurs propres distinctes.

**Attention** Il ne s'agit bien que d'une *condition suffisante* pour que  $u$  soit diagonalisable. La proposition suivante donne une caractérisation qui peut être utile dans le cas où le nombre de valeurs propres est strictement inférieur à la dimension de  $E$ .

#### Proposition 26

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable,

(ii)  $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ ,

(iii)  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ .

Démonstration page 123

#### Corollaire 27

Il y a équivalence entre :

(i) la matrice  $A$  est diagonalisable,

(ii)  $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathbb{K}^n$ ,

(iii)  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$ .

Exo  
3.15

**Ex. 25.** Un projecteur  $p$  de  $E$  est diagonalisable.

- Si  $p = 0$  ou  $p = \text{Id}_E$ , c'est immédiat.
- Sinon, on sait que  $\text{sp}(p) = \{0, 1\}$  et l'on a  $E_0(p) \oplus E_1(p) = E$ .

L'exemple 30 de la page 112 montre comment éviter de traiter les cas particuliers.

**Ex. 26.** Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet  $\lambda$  pour unique valeur propre,  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre associé est égal à  $E$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $u = \lambda \text{Id}_E$ .

De même, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet  $\lambda$  pour unique valeur propre, elle est diagonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est égal à  $\lambda \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$ , c'est-à-dire si, et seulement si,  $A = \lambda I_n$ .

**Ex. 27.** En particulier un endomorphisme nilpotent (respectivement une matrice nilpotente) n'est diagonalisable que s'il (elle) est nul(le).

**Ex. 28.** De même, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire de termes diagonaux tous égaux à  $\lambda$ , alors son polynôme caractéristique est égal à  $(X - \lambda)^n$ . La matrice  $A$  admet donc  $\lambda$  pour unique valeur propre ; elle n'est par conséquent diagonalisable que si  $A = \lambda I_n$ .

**Remarque** Les sous-espaces propres étant en somme directe, la somme de leurs dimensions est majorée par la dimension de  $E$ .

**Point méthode** Pour montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , ou une matrice de taille  $n$ , est diagonalisable, il suffit de montrer que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est supérieure ou égale à  $n$ .

**Ex. 29.** Considérons la matrice complexe  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^4$  associé à la matrice  $A$  dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Par lecture de la matrice  $A$ , une base de l'image de  $u$  est  $(e_2, e_0)$ , où  $e_0 = e_1 + ke_2 + e_3 + e_4$ . Dans une base de  $\mathbb{C}^4$  obtenue en complétant  $(e_2, e_0)$ , l'endomorphisme  $u$  a pour matrice :

$$M = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 3 & * \\ 1 & k & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donc le polynôme caractéristique de  $u$  est  $X^2(X^2 - kX - 3)$ .

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension  $4 - 2 = 2$  puisque  $u$  est de rang 2.

- Si  $k$  vérifie  $k^2 + 12 \neq 0$ , le trinôme  $X^2 - kX - 3$  a deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distinctes non nulles. Les sous-espaces propres associés étant de dimension supérieure ou égale à 1, la matrice  $A$  est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est supérieure ou égale à 4.
- Si  $k$  est égal à  $\pm 2i\sqrt{3}$ , le trinôme  $X^2 - kX - 3$  a une seule racine  $\lambda = \frac{k}{2}$ .

Le sous-espace propre est obtenu en résolvant :

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x + (k - \lambda)y + z + t = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ y - \lambda t = 0. \end{cases}$$

Il est de dimension 1, engendré par  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La dimension de la somme des sous-espaces propres valant 3, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Remarque** Si  $E$  est somme de sous-espaces vectoriels stables  $E_1, \dots, E_p$  sur chacun desquels  $u$  induit une homothétie, alors  $u$  est diagonalisable.

En effet, en prenant dans chaque  $E_i$  des vecteurs en constituant une base, on obtient une famille génératrice de  $E$ , constituée de vecteurs propres, de laquelle on peut extraire une base de  $E$ .

**Ex. 30.** Si  $p$  est un projecteur de  $E$ , on sait que l'on a  $E = E_0(p) \oplus E_1(p)$ , avec  $p_{E_0(p)} = 0$  et  $p_{E_1(p)} = \text{Id}_{E_1(p)}$ , donc  $p$  est diagonalisable.

De même, toute symétrie  $s$  de  $E$  est diagonalisable puisque  $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$ .

**Ex. 31.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  défini par  $f(A) = A + \text{tr}(A)I_n$ .

- Considérons l'hyperplan  $H$  noyau de la forme linéaire trace. On a immédiatement  $f|_H = \text{Id}_H$ .
- D'autre part,  $f(I_n) = (n+1)I_n$ , donc la droite  $D = \text{Vect}(I_n)$  est stable par l'endomorphisme  $f$  et  $f|_D = (n+1)\text{Id}_D$ .

Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = D + H$ , l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable.

## 2 Utilisation du polynôme caractéristique

Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique, la proposition 25 de la page 110 se réécrit :

### Proposition 28

Si le polynôme caractéristique de  $u$  (respectivement de  $A$ ) est scindé à racines simples, alors  $u$  (respectivement  $A$ ) est diagonalisable.

**Terminologie** Un polynôme scindé à racines simples est dit aussi **simplement scindé**.

**Attention** Il faut bien noter que le résultat précédent ne fournit qu'une condition *suffisante* pour que  $u$  soit diagonalisable comme le montre, par exemple, le cas d'une homothétie.

Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante.

### Théorème 29

Pour que  $u$  soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  ;
- pour toute valeur propre de  $u$ , la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \text{sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda).$$

On a le même résultat pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Démonstration page 123

**Principe de démonstration.** On écrit  $\chi_u = Q \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ , où  $Q$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$  et l'on utilise le fait que  $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$ , pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ .

**Remarque** Si  $\lambda$  est valeur propre simple, on a toujours  $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$  car :

$$E_\lambda(u) \neq \{0\} \quad \text{et} \quad \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda) = 1.$$

Dans la caractérisation précédente, on peut donc se limiter aux sous-espaces propres associés à des valeurs propres multiples.

**Point méthode** Pour savoir si un endomorphisme  $u$  est diagonalisable, on peut calculer son polynôme caractéristique.

- S'il n'est pas scindé, alors  $u$  n'est pas diagonalisable.
- Sinon, pour toute valeur propre multiple, on compare  $\dim E_\lambda(u)$  et  $m(\lambda)$  (par exemple en calculant le rang de  $u - \lambda \text{Id}_E$ ).

**Ex. 32.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . Donnons une condition nécessaire et suffisante

portant sur  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable.

On a  $\chi_A = (X - 1)^2(X + 1)$ ; ainsi  $\chi_A$  est scindé,  $-1$  est valeur propre simple et  $1$  est valeur propre double. La matrice  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\dim E_1(A) = 2$ .

En appliquant le théorème du rang, cela équivaut à  $\text{rg}(A - I_3) = \dim(\mathbb{K}^3) - 2 = 1$ .

Comme  $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , on a  $\text{rg}(A - I_3) = 1$  si, et seulement si, la deuxième colonne

est proportionnelle à la dernière, ce qui équivaut à  $a = 0$ .

### 3 Utilisation d'un polynôme annulateur

À lui seul, le polynôme caractéristique ne peut permettre de montrer que  $u$  est diagonalisable que s'il est scindé à racines simples. Sinon, on a besoin d'étudier en plus la dimension des sous-espaces propres.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour être diagonalisable, en utilisant cette fois-ci les polynômes annulateurs.

#### Théorème 30

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

On a le même résultat pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Démonstration page 123

**Principe de démonstration.** Considérer le polynôme  $P = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)$  pour le sens

direct et utiliser le lemme de décomposition des noyaux pour la réciproque.

**Ex. 33.** On retrouve que les projecteurs et les symétries sont diagonalisables puisque annulés respectivement par les polynômes  $X^2 - X$  et  $X^2 - 1$  scindés à racines simples.

**Ex. 34.** Une matrice carrée est diagonalisable si, et seulement si, sa transposée l'est.

En effet, si  $A$  est diagonalisable, on peut donc trouver un polynôme  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(A) = 0$  et alors  $P(A^T) = P(A)^T = 0$ , ce qui prouve que  $A^T$  est diagonalisable.

La réciproque s'obtient en appliquant ce résultat à  $A^T$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 35.** Soit  $\sigma \in S_n$ . Considérons la matrice  $A_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont tous les coefficients sont nuls excepté ceux d'indices  $(\sigma(j), j)$  qui sont égaux à 1. L'endomorphisme  $u_\sigma$  associé à  $A_\sigma$  dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  vérifie :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Il est donc clair que  $u_\sigma^k(e_j) = e_{\sigma^k(j)}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , ce qui prouve que  $u_\sigma^k = u_{\sigma^k}$ . Comme  $\sigma$  appartient au groupe fini  $S_n$ , il est d'ordre fini et il existe donc  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sigma^N = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ . Cela prouve que  $u_\sigma^N = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$  et donc que  $u_\sigma$  est annulé par le polynôme scindé à racines simples  $X^N - 1$  (ses racines sont les  $N$  racines  $N$ -ièmes de l'unité).

Ainsi,  $u_\sigma$  est diagonalisable, et donc aussi  $A_\sigma$ .

**Ex. 36.** Soit  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire par blocs. Supposons  $M$  diagonalisable et montrons qu'il en est de même de  $A$  et  $B$ .

Considérons un polynôme  $P$  scindé simple annulateur de  $M$ . Par opérations par blocs, on a :

$$0 = P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $A$  et  $B$  sont annulées par le polynôme  $P$  scindé simple, donc sont diagonalisables.

#### Corollaire 31

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples.

On a le même résultat pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Proposition 32

Exo  
3.16 Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . L'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est alors diagonalisable.

**Démonstration.** D'après le théorème 30,  $u$  admet un polynôme annulateur  $P$  scindé à racines simples. Il est clair que  $P(u_F) = 0$ , donc, d'après le même théorème,  $u_F$  est diagonalisable.  $\square$

**Ex. 37.** Retrouvons que si la matrice  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  de l'exemple 36 est diagonalisable, alors  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

- La matrice  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  représente l'endomorphisme induit, sur le sous-espace vectoriel engendré par les  $p$  premiers vecteurs de la base canonique, par l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ . Donc, par la proposition 32, elle est diagonalisable.
- Pour  $B$ , ce n'est pas aussi facile car elle n'est pas directement la matrice d'un endomorphisme induit. Mais on peut faire le même raisonnement que précédemment avec la transposée  $M^T = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ C^T & B^T \end{pmatrix}$  pour montrer que  $B^T$  est diagonalisable et utiliser le résultat de l'exemple 34 de la page précédente.

## IV Trigonalisation

Dans cette section,  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est supposé de dimension finie  $n$ , et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### 1 Définitions

#### Définition 8

- L'endomorphisme  $u$  est dit **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.  
Une telle base s'appelle une **base de trigonalisation** de  $u$ .
- La matrice  $A$  est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

#### Interprétation géométrique

Dire que la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est triangulaire supérieure revient à dire que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$  est stable par  $u$ .

Donc l'endomorphisme  $u$  est trigonalisable si, et seulement s'il existe des sous-espaces vectoriels  $F_0, \dots, F_n$  de  $E$ , stables par  $u$ , tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \dim F_i = i \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad F_{i-1} \subset F_i.$$

#### Terminologie

- **Trigonaliser** un endomorphisme  $u$  signifie trouver une base dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.
- **Trigonaliser** une matrice signifie trigonaliser son endomorphisme canoniquement associé, ce qui revient à trouver une matrice  $T$  triangulaire supérieure et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PTP^{-1}$ .

**Ex. 38.** Supposons  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $E$  euclidien. Soit  $u$  un endomorphisme trigonalisable de  $E$ . Considérons une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de trigonalisation de  $u$ . Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut alors trouver une base orthonormée  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_i).$$

D'après l'interprétation ci-dessus, la matrice de  $u$  est alors également triangulaire supérieure dans la base  $\mathcal{C}$ . Autrement dit, un endomorphisme trigonalisable de  $E$  peut être trigonalisé dans une base orthonormée.

#### Proposition 33

Si  $A$  représente  $u$ , elle est trigonalisable si, et seulement si,  $u$  est trigonalisable.

**Démonstration.** Comme pour la proposition 23 de la page 109 en remplaçant « diagonalisable » et « diagonale » respectivement par « trigonalisable » et « triangulaire supérieure ».  $\square$

#### Corollaire 34

La matrice  $A$  est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.

## Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Remarque** On aurait pu aussi choisir la forme triangulaire inférieure. En effet, si la matrice de  $u \in \mathcal{L}(E)$  dans la base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est triangulaire supérieure, alors la matrice de  $u$  dans la base  $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$  est triangulaire inférieure (attention : ce n'est pas la transposée!).

### Point méthode

- Une base de trigonalisation commençant par un vecteur propre, pour trigonaliser un endomorphisme  $u$ , on commence souvent par compléter un vecteur propre de  $u$  en une base de  $E$ , base dans laquelle la matrice de  $u$  est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}).$$

- Il suffit alors de montrer que l'on peut prendre  $A$  triangulaire supérieure pour conclure. Comme la matrice  $A$  n'est pas *a priori* la matrice d'un endomorphisme induit par  $u$ , on raisonne le plus souvent matriciellement en trigonalisant la matrice  $A$ .

### Remarques

- La démonstration du théorème 35 est une illustration de cette méthode.
- Il peut être parfois plus intéressant d'utiliser la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$$

en complétant une base du sous-espace propre  $E_\lambda(u)$  en une base de  $E$ .

## 2 Utilisation du polynôme caractéristique

### Théorème 35

**Exo 3.28** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Remarque** De plus on voit, en adaptant la démonstration ci-dessous, que quel que soit l'ordre dans lequel on écrit la liste  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  des valeurs propres de  $u$ , comptées avec ordre de multiplicité, on peut trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  pour diagonale.

**Démonstration.** D'après la proposition 33 de la page précédente, il est équivalent d'établir le résultat pour les matrices ou pour les endomorphismes.

- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est égal à celui d'une matrice triangulaire supérieure ; il est donc scindé sur  $\mathbb{K}$ , d'après la proposition 16 de la page 102.
- Montrons la réciproque par récurrence. Posons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$H_n$  : « Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. »

$H'_n$  : « Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. »

Il est clair que les deux énoncés  $H_n$  et  $H'_n$  sont équivalents, ce qui, pour l'hérédité, nous permettra de montrer l'implication  $H'_n \Rightarrow H_{n+1}$ .

**Initialisation :**  $H_1$  est immédiat.

**Hérité :** Soit  $n \geq 1$ ; supposons  $H'_n$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  soit scindé. Utilisons la méthode de la page ci-contre.

Comme  $\chi_u$  est scindé de degré  $n+1 \geq 1$ , il possède une racine. Par conséquent, il existe  $\lambda \in \text{sp}(u)$ . Prenons un vecteur propre associé et complétons-le en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de sorte que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Le calcul du polynôme caractéristique de cette matrice triangulaire par blocs donne  $\chi_u = (X - \lambda)\chi_A$ . Comme  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , on en déduit que  $\chi_A$  l'est également.

D'après  $H'_n$ , il existe donc  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

Notons  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ . Il s'agit d'une matrice inversible de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  dont l'inverse est  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$  (il suffit de vérifier que le produit vaut  $I_{n+1}$ ).

Un produit par blocs donne alors :

$$\begin{aligned} Q^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP \\ 0 & P^{-1}AP \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi  $Q^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q$ , qui est la matrice de  $u$  dans une certaine base de  $E$ , est triangulaire supérieure, ce qui permet de conclure que  $u$  est trigonalisable. Cela prouve  $H_{n+1}$ .  $\square$

**Ex. 39.** Comme une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique, on en déduit qu'une matrice  $A$  est trigonalisable si, et seulement si,  $A^T$  est trigonalisable.

**Ex. 40.** Si  $u$  est trigonalisable et si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors l'endomorphisme induit  $u_F$  est aussi trigonalisable.

En effet, le polynôme caractéristique de  $u_F$  divise celui de  $u$  qui est scindé. Ainsi, le polynôme caractéristique de  $u_F$  est scindé donc  $u_F$  est trigonalisable.

### Corollaire 36

Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

Toute matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est trigonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**Démonstration.** Le théorème de d'Alembert-Gauss nous dit que le polynôme caractéristique est scindé, ce qui permet de conclure d'après le théorème 35 de la page précédente.  $\square$

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Ex. 41.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ .

On peut remarquer que l'on a  $C_3 - C_2 = 2C_1$ , donc que  $A$  n'est pas inversible.

- Calculons  $\chi_A$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . L'opération  $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 - C_3$  donne :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & -3 \\ 1 & \lambda & -6 \\ -2 & -\lambda & \lambda + 10 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & \lambda + 10 \end{vmatrix}.$$

Les opérations élémentaires  $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ , puis un développement par rapport à la deuxième colonne, donnent :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 9 \\ -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)^2.$$

Une liste de valeurs propres de  $A$  est donc  $(0, -1, -1)$ . Comme la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 1, on a  $\dim E_{-1}(A) \neq 2 = m(-1)$ . D'après le théorème 29 de la page 112, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

- Comme  $\chi_A$  est scindé, la matrice  $A$  est trigonalisable, d'après le théorème 35 de la page 116. En étudiant les systèmes  $AX = 0$  et  $AX = -X$ , on obtient facilement que :

$$E_0(A) = \text{Vect}(u) \quad \text{avec} \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{-1}(A) = \text{Vect}(v) \quad \text{avec} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On peut compléter  $(u, v)$  en une base de  $\mathbb{K}^3$  à l'aide de  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

En notant  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ , la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  à la

base  $(u, v, w)$ , il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$  tel que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma = -1 \quad \text{puisque } \text{tr } A = -2.$$

On pourrait alors calculer  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$  pour obtenir  $P^{-1}AP$  mais il est plus

simple d'écrire  $Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u - v - w$  (par résolution d'un système) pour en dé-

duire la matrice, dans la base  $(u, v, w)$ , de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ,

$$\text{soit } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3 Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème 37 (Théorème de Cayley-Hamilton)**

Le polynôme caractéristique de  $u$  annule  $u$ , c'est-à-dire  $\chi_u(u) = 0$ .

De même, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\chi_A(A) = 0$ .

Démonstration (non exigible) page 124

**Corollaire 38**

Le polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  est de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On a le même résultat pour une matrice carrée de taille  $n$ .

**Démonstration.** En effet, le polynôme minimal, qui divise tout polynôme annulateur, divise le polynôme caractéristique qui est de degré  $n$ .  $\square$

### 4 Utilisation d'un polynôme annulateur

**Remarque** Rappelons qu'un polynôme scindé est *non nul* par définition.

**Théorème 39**

L'endomorphisme  $u$  est trigonalisable si, et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé.

On a le même résultat pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Démonstration page 124

**Principe de démonstration.**

- Si  $u$  est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé, et il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
- Pour la réciproque, on procède par récurrence, à l'aide du point méthode de la page 116.

**Corollaire 40**

L'endomorphisme  $u$  est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé.

On a le même résultat pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Cas des endomorphismes nilpotents

**Proposition 41**

- Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles.
- Une matrice est nilpotente si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

**Démonstration.**

- Un endomorphisme nilpotent est annulé par un polynôme scindé de la forme  $X^k$ , donc est trigonalisable d'après le théorème 39. D'autre part, d'après la proposition 12 de la page 99, ses valeurs propres sont racines de  $X^k$ , donc sont toutes nulles.
- Soit  $u$  un endomorphisme trigonalisable ayant toutes ses valeurs propres nulles. Son polynôme caractéristique est donc  $X^n$  et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc  $u^n = 0$ , ce qui prouve que  $u$  est nilpotent.

Le deuxième résultat est la traduction matricielle de ce que l'on vient de montrer.  $\square$

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**Remarque** En particulier, une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

#### Corollaire 42

- Si  $\dim E = n$ , un endomorphisme de  $E$  est nilpotent si, et seulement si, son polynôme caractéristique est  $X^n$ .
- Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est  $X^n$ .

**Démonstration.** C'est une reformulation de la proposition précédente en utilisant le théorème 35 de la page 116.  $\square$

## 5 Sous-espaces caractéristiques

#### Théorème 43

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont le polynôme caractéristique  $\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$  est scindé.

On a la décomposition :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}.$$

**Démonstration.** D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $\chi_u(u) = 0$  et le lemme de décomposition des noyaux donne alors le résultat puisque les polynômes  $(X - \lambda)^{m(\lambda)}$  sont premiers entre eux deux à deux.  $\square$

**Terminologie** Les sous-espaces vectoriels  $F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}$ , pour  $\lambda \in \text{sp}(u)$ , sont appelés **sous-espaces caractéristiques** de l'endomorphisme  $u$ .

Soit  $\lambda \in \text{sp}(u)$ . Comme noyau d'un polynôme en  $u$ ,  $F_\lambda$  est stable par  $u$  et l'endomorphisme  $u_\lambda$  induit par  $u$  sur  $F_\lambda$  vérifie  $(u_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda})^{m(\lambda)} = 0$ . Ainsi,  $u_\lambda$  est la somme de l'homothétie de rapport  $\lambda$  et d'un endomorphisme nilpotent.

**Remarque** Soit  $\pi_u$  le polynôme minimal d'un tel endomorphisme. Il divise  $\chi_u$  donc est de la forme  $\pi_u = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$ , avec  $n(\lambda) \leq m(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ . On

a donc également :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{n(\lambda)}.$$

#### Proposition 44

Pour toute valeur propre  $\lambda$ , la dimension de  $F_\lambda$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ .

Démonstration page 125

#### Corollaire 45

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire à coefficients diagonaux égaux.

**Démonstration.** Dans chaque sous-espace caractéristique  $F_\lambda$ , on choisit une base de trigonalisation de l'endomorphisme nilpotent induit par  $u - \lambda \text{Id}_E$  sur  $F_\lambda$ .  $\square$

**Ex. 42.** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le calcul du polynôme caractéristique de  $A$  donne  $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ .

- $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  dont un vecteur du noyau est  $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  est de rang 2 (elle est de rang strictement inférieur à 3 puisque 2 est une valeur propre et de rang au moins 2 puisque ses colonnes ne sont pas proportionnelles). Cela prouve que  $E_2(A)$  est de dimension 1, donc en particulier que  $A$  n'est pas diagonalisable. Le sous-espace vectoriel  $E_2(A)$  est engendré par  $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

D'après la proposition 44 de la page ci-contre, les sous-espaces caractéristiques de  $u$  sont donc  $F_1 = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$  de dimension 1 (valeur propre simple) et  $F_2 = \text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)^2$  de dimension 2 (valeur propre double). Il existe donc une base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $E$  dans laquelle

la matrice de  $u$  est  $\left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comme  $A$  n'est pas diagonalisable,  $\alpha$  est

non nul et, quitte à remplacer  $e_3$  par  $\frac{1}{\alpha}e_3$ , on peut donc prendre  $\alpha = 1$ .

Déterminons une telle base. Il reste donc à trouver un vecteur  $e_3$  vérifiant  $u(e_3) = 2e_3 + e_2$ , ce qui revient à résoudre le système  $(A - 2I_3)X = e_2$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2x - 3y - 5z = -1 \\ -x - 2y - 3z = -1 \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Une solution est, par exemple,  $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ . Un tel vecteur  $e_3$  est dans  $F_2$  puisque  $(u - 2\text{Id}_E)^2(e_3) = (u - 2\text{Id}_E)(e_2) = 0$  et il est indépendant de  $e_2$  puisque  $u(e_3) \neq 2e_3$ . Comme  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ , cela montre que  $(e_1, e_2, e_3)$  est libre. On a donc :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ex. 43.** Supposons  $\chi_u$  scindé. Le corollaire 45 de la page précédente nous fournit une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $A = \text{Diag}(T_1, \dots, T_r)$ , où chaque matrice  $T_i$  est somme d'une matrice scalaire  $D_i$  et d'une matrice triangulaire supérieure stricte  $N_i$ .

En prenant  $D = \text{Diag}(D_1, \dots, D_r)$  et  $N = \text{Diag}(N_1, \dots, N_r)$ , on obtient  $A = D + N$ , avec  $D$  diagonale et  $N$  triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente.

De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $D_i N_i = N_i D_i$  puisque  $D_i$  est scalaire. Donc, par produit de matrices diagonales par blocs, cela donne  $DN = ND$ .

En notant  $d$  (respectivement  $n$ ) l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $D$  (respectivement  $N$ ), on obtient  $u = d + n$ , avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent commutant avec  $d$ .

L'exercice 3.35 montre l'unicité d'un tel couple  $(d, n)$ . Cette décomposition  $u = d + n$  s'appelle la **décomposition de Dunford** de  $u$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

## Démonstrations

**Proposition 1** Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ ; comme  $u$  et  $v$  commutent, il en est de même de  $u - \lambda \text{Id}_E$  et  $v$ . D'après la proposition 11 de la page 57,  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est stable par  $v$ .

**Proposition 3** Les polynômes  $(X - \lambda_1), \dots, (X - \lambda_p)$  sont premiers entre eux deux à deux puisqu'irréductibles, unitaires et distincts. En posant  $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p)$ , le lemme de décomposition des noyaux donne :

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$$

ce qui montre que les sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$  sont en somme directe.

**Proposition 13**

- On sait, d'après la proposition 12, que toute valeur propre de  $u$  est racine de  $\pi_u$ .
- Réciproquement, soit  $\mu$  une racine de  $\pi_u$ .

On peut alors écrire  $\pi_u = (X - \mu)P$ , avec  $0 \leq \deg(P) < \deg(\pi_u)$ . Par minimalité de  $\pi_u$ , le polynôme  $P$  n'est pas annulateur de  $u$ , donc  $P(u) \neq 0$  et il existe  $x \in E$  tel que  $y = P(u)(x) \neq 0$ . Alors,  $u(y) - \mu y = (u - \mu \text{Id}_E)(P(u)(x)) = \pi_u(u)(x) = 0$ , ce qui prouve que  $\mu$  est valeur propre de  $u$ .

**Proposition 14** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Le déterminant de la matrice  $(\lambda I_n - A)$  étant donné par :

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (\lambda \delta_{\sigma(1),1} - a_{\sigma(1),1}) \cdots (\lambda \delta_{\sigma(n),n} - a_{\sigma(n),n}),$$

la fonction  $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Soit  $\sigma \in S_n$  différente de l'identité. Il existe alors au moins deux éléments distincts  $i$  et  $j$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $\delta_{\sigma(i),i}$  et  $\delta_{\sigma(j),j}$  soient nuls et le terme :

$$\varepsilon(\sigma) (X \delta_{\sigma(1),1} - a_{\sigma(1),1}) \cdots (X \delta_{\sigma(n),n} - a_{\sigma(n),n})$$

est de degré inférieur ou égal à  $n - 2$ . Les termes de degré  $n$  et  $n - 1$  de  $\chi_A$  sont donc ceux du produit qui correspond à  $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$  :

$$(X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}),$$

soit respectivement  $X^n$  et  $-(a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}) X^{n-1} = -\text{tr}(A) X^{n-1}$ .

On obtient finalement le terme constant de  $\chi_A$  en évaluant en 0.

**Proposition 19** Soit  $p$  la dimension de  $F$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  adaptée à  $F$  c'est-à-dire telle que  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  soit une base de  $F$ .

La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est alors de la forme  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , où  $A$  est la matrice de  $u_F$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ . Le polynôme caractéristique de  $u$ , égal à  $\chi_A \chi_D$  (cf. exemple 15 de la page 102), est donc divisible par le polynôme caractéristique  $\chi_A$  de  $u_F$ .

**Proposition 20** Notons  $n(\lambda)$  la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda(u)$ .

Comme  $E_\lambda(u)$  est non réduit à  $\{0\}$ , on a  $1 \leq n(\lambda)$ . De plus,  $E_\lambda(u)$  est stable par  $u$  et l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $E_\lambda(u)$  est l'homothétie  $\lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}$ ; son polynôme caractéristique vaut donc  $(X - \lambda)^{n(\lambda)}$ . D'après la proposition 19, il divise  $\chi_u(X)$ , ce qui donne  $n(\lambda) \leq m(\lambda)$ .

**Proposition 25** Supposons que  $u$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distinctes.

Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un vecteur propre  $e_i$  associé à  $\lambda_i$ , et les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants puisque ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (cf. corollaire 4 de la page 95). Donc  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , puisque  $\dim E = n$ , constituée de vecteurs propres pour  $u$ , ce qui prouve que  $u$  est diagonalisable.

Comme  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda(u)$  et que les sous-espaces propres sont de dimension au moins 1, on en

déduit  $\text{card sp}(u) \leq \dim E = n$ , ce qui prouve qu'il n'y a pas d'autre valeur propre que les  $\lambda_i$  et que les sous-espaces propres sont des droites puisque  $\sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i}(u) = n$ .

**Proposition 26**

- Supposons (i). Puisqu'il existe une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ , la somme directe  $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$  contient une base de  $E$ , ce qui implique (ii).
- La somme  $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$  étant directe d'après la proposition 3 de la page 95, on a :

$$\dim \left( \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda(u) \right) = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda(u).$$

On en déduit que (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

- Supposons (iii). En concaténant des bases de chaque sous-espace propre de  $u$ , on obtient une famille libre de  $E$ , puisque les sous-espaces propres sont en somme directe (cf. proposition 3 de la page 95). Cette famille libre est constituée de  $\dim E$  vecteurs de  $E$ . Il s'agit ainsi d'une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ ; cela prouve (i).

**Théorème 29** Écrivons  $\chi_u = Q \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ , où  $Q$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{K}$ . On a :

$$\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \leq \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} m(\lambda) = \dim E - \deg Q.$$

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$  d'après la

proposition 26 de la page 110, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\deg Q = 0$  et  $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ , ce qui est la caractérisation annoncée.

**Théorème 30**

- Supposons  $u$  diagonalisable et montrons que le polynôme  $P = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)$ , qui est scindé à racines simples, est annulateur de  $u$ . Comme  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda(u)$  par hypothèse, il suffit de montrer que la restriction de l'endomorphisme  $v = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (u - \lambda \text{Id}_E)$  à chaque sous-espace propre est nulle. Soit donc  $\mu \in \text{sp}(u)$  et  $x \in E_\mu(u)$ . On a alors  $(u - \mu \text{Id}_E)(x) = 0$  et puisque  $v = \left( \prod_{\lambda \neq \mu} (u - \lambda \text{Id}_E) \right) \circ (u - \mu \text{Id}_E)$ , on en déduit  $v(x) = 0$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- Supposons  $u$  annulé par un polynôme  $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$  scindé à racines simples. Comme  $P$  est annulateur de  $u$ , on sait que  $\text{sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  (cf. proposition 12 de la page 99). Comme les  $\lambda_i$  sont deux à deux distincts, les polynômes  $X - \lambda_i$  sont deux à deux premiers entre eux et le lemme de décomposition des noyaux donne  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ .

En supprimant les  $\lambda_i$  non valeurs propres de  $u$ , pour lesquels  $E_{\lambda_i}(u) = \{0\}$ , on obtient que la somme des sous-espaces propres de  $u$  est égale à  $E$ , donc que  $u$  est diagonalisable.

**Théorème 37** On commence par montrer le résultat dans le cas d'un endomorphisme trigonalisable, puis pour toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , ce qui le prouvera également pour tout endomorphisme.

- Montrons le résultat pour un endomorphisme trigonalisable.

Supposons donc que la matrice de  $u$  dans une base  $(e_1, \dots, e_n)$  soit triangulaire supérieure de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Posons  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , avec donc  $F_0 = \{0\}$  et  $F_n = E$ .

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par la forme triangulaire supérieure de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , on a :

- \* pour tout  $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ ,  $(u - \lambda_k \text{Id}_E)(e_i) \in F_i \subset F_{k-1}$ ,
- \*  $u(e_k) = \lambda_k e_k + x$ , avec  $x \in F_{k-1}$ . Donc  $(u - \lambda_k \text{Id}_E)(e_k) \in F_{k-1}$ .

On a alors :

$$E = F_n \xrightarrow{u - \lambda_n \text{Id}_E} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{u - \lambda_1 \text{Id}_E} F_0 = \{0\},$$

ce qui donne  $((u - \lambda_1 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n \text{Id}_E))(u) = 0$ , c'est-à-dire  $\chi_u(u) = 0$ .

Lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on a donc le résultat puisque tout endomorphisme est trigonalisable.

- Dans le cas général, puisque  $\mathbb{K}$  est supposé être un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , il suffit de considérer toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  comme matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et d'appliquer le résultat précédent.

**Autre démonstration<sup>1</sup>** Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . L'exemple 33 de la page 64 montre que le plus petit sous-espace vectoriel  $E_x$  de  $E$  contenant  $x$  est stable par  $u$  et qu'il possède une base de la forme  $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ . Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme  $u_x$  induit par  $u$  est la matrice compagnon d'un certain polynôme  $P$ . Or,  $P$  est le polynôme minimal de cette matrice (exemple 40 de la page 66) ainsi que son polynôme caractéristique (exemple 16 de la page 102). Donc le polynôme caractéristique de  $u_x$  est annulateur de  $u_x$  et comme il divise  $\chi_u$ , on a  $\chi_u(u_x) = 0$ .

Cela donne, en particulier,  $\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_x)(x) = 0$ . Comme  $x$  est quelconque non nul, on obtient bien  $\chi_u(u) = 0$  (on a  $\chi_u(u)(0) = 0$  par linéarité).

**Théorème 39**

Si  $u$  est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé, et il est annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Pour la réciproque, procédons par récurrence, à l'aide du point méthode de la page 116.

Posons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$H_n$  : « Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  annulé par un polynôme scindé est trigonalisable. »

$H'_n$  : « Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  annulée par un polynôme scindé est trigonalisable. »

**Initialisation :**  $H_1$  est immédiat.

---

1. valable sans supposer que  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$

**Hérédité :** Soit  $n \geq 1$  ; supposons  $H'_n$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$ ,  $\Pi$  un polynôme scindé et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\Pi(u) = 0$ .

Le polynôme minimal de  $u$  divise  $\Pi$ , donc est scindé. D'autre part, il est non constant puisque  $\dim E \geq 1$ . Il admet donc au moins une racine  $\lambda$ , qui est une valeur propre de  $u$  d'après la proposition 13 de la page 100.

Prenons un vecteur propre associé et complétons-le en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de sorte que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On a alors :

$$0 = \Pi(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{pmatrix} \Pi(\lambda) & * \\ 0 & \Pi(A) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \Pi(A) = 0.$$

La matrice  $A$  est ainsi annulée par le polynôme scindé  $\Pi$ , donc d'après  $H'_n$ , il existe une matrice  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

Notons  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ . Il s'agit d'une matrice inversible de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$  dont l'inverse est  $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$  (il suffit de vérifier que le produit vaut  $I_{n+1}$ ).

Un produit par blocs donne alors :

$$\begin{aligned} Q^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP \\ 0 & P^{-1}AP \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi  $Q^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q$ , qui est la matrice de  $u$  dans une certaine base de  $E$ , est triangulaire supérieure, ce qui permet de conclure que  $u$  est trigonalisable. Cela prouve  $H_{n+1}$ .  $\square$

**Proposition 44** Soit  $\lambda \in \text{sp}(u)$ . Notons  $u_\lambda$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_\lambda$ . L'endomorphisme  $u_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  étant nilpotent, son polynôme caractéristique est  $X^{\dim F_\lambda}$ , donc celui de  $u_\lambda$  est  $(X - \lambda)^{\dim F_\lambda}$ .

En utilisant la décomposition  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} F_\lambda$  comme somme directe de sous-espaces vectoriels stables, on a :

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} \chi_{u_\lambda} = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{\dim F_\lambda},$$

ce qui donne le résultat.

## S'entraîner et approfondir

### Éléments propres

- 3.1** Soit  $\varphi$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .  
 $\xrightarrow{+92}$  Déterminer les éléments propres de  $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$  en fonction de ceux de  $u$ .

- 3.2** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , notons  $f_\alpha$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_\alpha(t) = t^\alpha$ .  
 $\xrightarrow{+95}$  Montrer que la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est libre.

*Indication.* On utilisera un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ .

- 3.3** Montrer que dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la famille constituée des fonctions  $x \mapsto \cos nx$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ )  
 $\xrightarrow{+95}$  et  $x \mapsto \sin nx$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est libre.

*Indication.* On pourra penser à l'opérateur de dérivation seconde.

- 3.4** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

- $\xrightarrow{+96}$
1. Déterminer les éléments propres de la matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
  2. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ .

Déterminer les éléments propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- ★ 3.5** 1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice réelle de taille  $n$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Indication.* On pourra s'intéresser aux suites vérifiant une relation de récurrence de la forme  $u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1}$ .

2. En déduire une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

- ★ 3.6** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Montrer que  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune si, et seulement s'il existe une matrice  $U$  non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AU = UB$ .

- 3.7** Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle.

1. On suppose que  $u$  et  $v$  commutent. Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre commun.
2. On suppose que  $u \circ v - v \circ u = \alpha u$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $u$  est nilpotent et que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre commun.
3. En déduire que si  $u \circ v - v \circ u \in \text{Vect}(u, v)$ , alors  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre commun.

## Polynôme caractéristique

**3.8** Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $\lambda \neq 0$ , donner une relation entre  $\chi_A(\lambda)$  et  $\chi_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$ . En déduire une expression du coefficient de  $X$  dans  $\chi_A$  en fonction de la trace de la comatrice de  $A$ .

**3.9** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . Déterminer son spectre dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

**3.10** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice par blocs  $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$  en fonction de celui de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**3.11** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - 3A - 5I_n = 0$ .

Montrer que  $A$  est de déterminant strictement positif.

**3.12** Montrer l'égalité  $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$  pour toutes matrices  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

*Indication.* On pourra commencer par le cas où  $A = J_r$ , où  $r \in \llbracket 0, \min(n, p) \rrbracket$ .

**3.13** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que s'il existe une matrice  $U$  de rang  $r$  tel que  $AU = UB$ , alors les polynômes caractéristiques de  $A$  et  $B$  ont un facteur commun de degré  $r$ .

**3.14** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. On suppose  $u$  nilpotent. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{tr}(u^k) = 0.$$

2. On suppose :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tr}(u^k) = 0.$$

(a) Montrer que si  $n \geq 1$ , alors  $\det u = 0$ .

*Indication.* On pourra utiliser le polynôme caractéristique de  $u$ .

(b) En raisonnant par récurrence, montrer que  $u$  est nilpotent.

## Diagonalisation

**3.15** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

Si c'est le cas, fournir une matrice  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

**3.16** Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $u$  sont les  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} F_\lambda$ , où  $F_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ .

2. À quelle condition y a-t-il un nombre fini de tels sous-espaces vectoriels stables, et dans ce cas, combien y en a-t-il ?

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**3.17** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
2. Déterminer le polynôme minimal de  $A$ .

**3.18** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'endomorphisme  $v : P \mapsto (1 - X^2)P' + nXP$  de  $\mathbb{R}[X]$  induit un endomorphisme diagonalisable de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**3.19** On dit qu'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes de  $E$  est **simultanément diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle les matrices de tous les  $u_i$  sont diagonales. Une telle base s'appelle alors une base de **diagonalisation simultanée**.

1. Montrer que des endomorphismes simultanément diagonalisables commutent.
2. Montrer réciproquement qu'une famille d'endomorphismes diagonalisables de  $E$  commutant deux à deux est simultanément diagonalisable.

**3.20** 1. Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable de spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . On note  $p_{\lambda_1}, \dots, p_{\lambda_r}$ , et l'on appelle **projecteurs spectraux** de  $u$ , les projecteurs associés à la décomposition en somme directe :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}(u).$$

(a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k = \lambda_1^k p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^k p_{\lambda_r}$$

et que cette relation est vraie pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  si  $u$  est bijectif.

(b) Montrer que  $p_1, \dots, p_r$  sont des polynômes en  $u$ .

2. En utilisant les projecteurs spectraux, déterminer les puissances de :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 \\ 6 & 8 & 12 \\ -6 & -9 & -13 \end{pmatrix}.$$

**3.21** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A(A^2 + A + I_n) = 0$ . Montrer que le rang de  $A$  est pair.

**3.22** Résoudre dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  l'équation  $M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**3.23** Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  à coefficients entiers.

On suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $p$  tel que  $A^p = I_2$ .

Montrer que  $A^{12} = I_2$ .

**3.24** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ .

1. Montrer que  $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$ .
2. Discuter la diagonalisabilité de  $B$  en fonction de celle de  $A$ .

**3.25** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  l'est.

**3.26** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifiant  $AB = BA$ .

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

soit diagonalisable.

★ **3.27** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Pour  $a \in \mathcal{L}(E)$ , on définit :

$$\begin{array}{rcl} G_a : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & a \circ u \end{array} \quad \begin{array}{rcl} D_a : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u \circ a \end{array} \quad \text{et} \quad M_a = G_a - D_a.$$

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Déterminer  $P(G_a)$  et en déduire que  $G_a$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a$  est diagonalisable.
2. On admet que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables (cf. exercice 3.19). Montrer que si  $a$  est diagonalisable, alors  $M_a$  également.
3. Montrer que si  $a$  est nilpotent, alors  $M_a$  est nilpotent.
4. Montrer que si  $M_a = 0$ , alors  $a$  est une homothétie.
5. On admet que tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie s'écrit de façon unique comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent (cf. exercice 3.35). Montrer la réciproque de la question 2.

## Trigonalisation

**3.28** 1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?  
→<sup>116</sup>

2. Montrer que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et expliciter une matrice inversible  $P$  telle que  $A = PTP^{-1}$ .

**3.29** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'une famille d'endomorphismes trigonalisables de  $E$  commutant deux à deux est simultanément trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle tous les éléments de la famille ont une matrice triangulaire supérieure.

**3.30** Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de dimension strictement supérieure à  $\frac{n(n+1)}{2}$  contient une matrice nilpotente non nulle.

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

\* 3.31 Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers, unitaire et de degré  $n$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses racines complexes comptées avec ordre de multiplicité.

1. Montrer l'existence d'une matrice à coefficients entiers dont le polynôme caractéristique est  $P$ .

2. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que le polynôme  $P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k)$  est à coefficients entiers.

3. On suppose les  $\lambda_i$  tous de module inférieur ou égal à 1.

(a) Montrer que  $\{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  est fini.

(b) En déduire qu'il existe  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $k < \ell$ , tel que  $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = (\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_n^\ell)$  puisque les  $\lambda_i$  sont nuls ou des racines de l'unité.

3.32 Soit  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ .

1. La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer le polynôme minimal de la matrice  $B$ .

3. Montrer que matrice  $B$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

3.33 Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### \* 3.34 Sous-espace caractéristique associé à une valeur propre

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On écrit  $\chi_u = (X - \lambda)^m Q(X)$ , où  $m$  est l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda$ .

1. Montrer que la suite  $(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante et que si l'on note  $r$  le plus petit entier  $k$  tel que  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^k = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{k+1}$ , la suite  $(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^k)_{k \geq r}$  est constante.

On appelle **sous-espace caractéristique** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $F_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^r$ .

2. (a) Montrer :

$$\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^m = \text{Ker } Q(u) \quad \text{et} \quad E = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^m \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^m.$$

(b) En déduire  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{2m} \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^m$  puis  $F_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^m$  (on retrouve ainsi la définition des sous-espaces caractéristiques donnée dans le cours dans le cas où  $\chi_u$  est scindé).

(c) Montrer que  $\dim F_\lambda(u) = m$ .

3. (a) Montrer que la suite  $\left( (u - \lambda \text{Id}_E)^k (F_\lambda(u)) \right)_{0 \leq k \leq r}$  est strictement décroissante, puis que  $r$  est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme induit par  $(u - \lambda \text{Id}_E)$  sur  $F_\lambda(u)$ .

(b) Montrer que  $r$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme minimal de  $u$ .

### 3.35 Décomposition de Dunford

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé. On a montré, dans l'exemple 43 de la page 121, l'existence d'un couple  $(d, n)$  d'endomorphismes de  $E$ , avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent et  $u = d + n$  et  $d \circ n = n \circ d$ . Le but de l'exercice est d'en prouver l'unicité.

Considérons un tel couple  $(d, n)$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $F_\lambda$  le sous-espace caractéristique associé.

1. Vérifier que  $u$ ,  $d$  et  $n$  stabilisent  $F_\lambda$ .

On note  $u_\lambda$ ,  $d_\lambda$  et  $n_\lambda$  les endomorphismes qu'ils induisent.

2. Montrer que  $d_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  est nilpotent et en déduire que  $d_\lambda = \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$ .
3. Conclure.

### \* 3.36 Soit $E$ un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u$ un endomorphisme de $E$ .

1. On suppose  $u$  nilpotent, d'indice de nilpotence  $p$ .

- (a) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.

Montrer que  $F = \text{Vect } \mathcal{B}$  est stable par  $u$ . Donner la matrice  $M_p$ , dans la base  $\mathcal{B}$ , de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

- (b) Montrer qu'il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$ .

Montrer que  $G = \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker}(\varphi \circ u^k)$  est stable par  $u$  et que  $F \oplus G = E$ .

- (c) Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $M_r$ .
2. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $\lambda I_r + M_r$ .
3. Montrer que toute matrice carrée complexe est semblable à sa transposée.

### \* 3.37 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit :

$$\begin{array}{rccc} g_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & AM \end{array} \quad \begin{array}{rccc} d_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & MA^T \end{array} \quad \text{et} \quad m_A = g_A - d_A.$$

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Déterminer  $P(g_A)$  et en déduire que  $g_A$  est trigonalisable si, et seulement si,  $A$  est trigonalisable.
2. On admet que deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables (cf. exercice 3.29). Montrer que si  $A$  est trigonalisable, alors  $m_A$  également.
3. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre complexe de  $A$ , il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  non nulle telle que  $AM - MA^T = (\lambda - \bar{\lambda})M$ .
4. En déduire la réciproque de la question 2.

## Solutions des exercices

**3.1** Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  et pour tout scalaire  $\lambda$ , on a, par bijectivité et linéarité de  $\varphi$  :

$$u(x) = \lambda x \iff (u \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \lambda x \iff (\varphi \circ u \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \lambda \varphi(x),$$

c'est-à-dire :

$$x \in E_\lambda(u) \iff \varphi(x) \in E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}).$$

Comme  $\varphi$  est un isomorphisme, on en déduit que les endomorphismes  $u$  et  $\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$  ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par :

$$E_\lambda(\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) = \varphi(E_\lambda(u)).$$

**3.2** Notons  $u$  l'endomorphisme  $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (t \mapsto tf'(t)). \end{array}$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t > 0$ , on a  $u(f_\alpha)(t) = \alpha t^\alpha$  donc  $u(f_\alpha) = \alpha f_\alpha$  et la fonction non nulle  $f_\alpha$  est vecteur propre de  $u$  pour la valeur propre  $\alpha$ .

Par suite, si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des réels deux à deux distincts, la famille de fonctions  $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$  est une famille libre de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ .

Ainsi, la famille  $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$  est libre.

**3.3** Soit  $n \in \mathbb{N}$  ; notons  $c_n : x \mapsto \cos nx$  et  $s_n : x \mapsto \sin nx$  (avec donc  $s_0 = 0$ ). Il est clair que  $c_n$  et  $s_n$  appartiennent à  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et sont dans le sous-espace propre  $E_{-n^2}(D^2)$ , où  $D^2$  est l'opérateur de dérivation seconde.

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites presque nulles telles que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n s_n = 0$ .

Prenons  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $a_n = b_n = 0$  pour tout  $n > N$ .

En posant  $b_0 = 0$ , on obtient :

$$\sum_{n=0}^N \underbrace{(a_n c_n + b_n s_n)}_{\in E_{-n^2}(D^2)} = 0.$$

Comme les sous-espaces propres de  $D^2$ , associés aux valeurs propres deux à deux distinctes  $-n^2$ , sont en somme directe, cela donne  $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad a_n c_n + b_n s_n = 0$ . Par évaluation en 0, on en déduit la nullité de tous les  $a_n$ , puis, pour  $n \neq 0$ , de  $b_n$  puisque  $s_n$  n'est pas la fonction nulle.

Donc la famille est libre.

**3.4** 1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Un vecteur  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifie  $JX = \lambda X$  si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_i. \tag{*}$$

- Lorsque  $\lambda = 0$ , cela équivaut à l'unique équation  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . Ainsi, 0 est valeur propre de  $J$  et le sous-espace propre associé est l'hyperplan  $H$  d'équation  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ .

- Supposons  $\lambda \neq 0$  et  $X \neq 0$  tel que  $JX = \lambda X$ .

On déduit de (\*) que  $x_1 = \dots = x_n$  puis que  $\lambda = n$  puisque  $X \neq 0$ .

Réiproquement, le vecteur  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est non nul vérifie  $JU = nU$ .

Ainsi,  $n \in \text{sp}(J)$  et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par  $U$ .

2. On a  $A = \beta J + \gamma I_n$ , avec  $\gamma = \alpha - \beta$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a  $AX = \lambda X$  si, et seulement si,  $\beta JX = (\lambda - \gamma)X$ .

Donc  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $\frac{\lambda - \gamma}{\beta} \in \text{sp}(J) = \{0, n\}$ .

Ainsi,  $\text{sp}(A) = \{\gamma, \beta n + \gamma\} = \{\alpha - \beta, (n - 1)\beta + \alpha\}$  et les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{\alpha-\beta}(A) = H \quad \text{et} \quad E_{(n-1)\beta+\alpha}(A) = \text{Vect}(U).$$

- 3.5** 1. Il est difficile ici d'obtenir le polynôme caractéristique de  $A$  sous forme factorisée. On utilise donc l'équation aux éléments propres.

Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'équation  $AX = \lambda X$  est équivalente à :

$$x_2 = \lambda x_1 \quad \forall k \in [2, n-1] \quad x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \quad \text{et} \quad x_{n-1} = \lambda x_n.$$

On remarque que si l'on pose  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 0$ , cela équivaut à :

$$\forall k \in [1, n] \quad x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1}.$$

Considérons donc l'ensemble  $R_\lambda$  des suites réelles  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1} \tag{R}$$

ainsi que les conditions  $x_0 = x_{n+1} = 0$ .

- Si  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in R_\lambda$ , alors  $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$  vérifie  $AX = \lambda X$ .
- Réiproquement, si  $AX = \lambda X$ , on peut poser  $x_0 = 0$  et prolonger  $(x_0, \dots, x_n)$  en une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $R_\lambda$  par la relation de récurrence d'ordre deux définissant  $R_\lambda$ .

On remarque, d'autre part, que si  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in R_\lambda$ , alors  $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$  est non nul si, et seulement si,  $x_1 \neq 0$ .

Il s'agit donc de déterminer les  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquels  $R_\lambda$  admet un élément  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $x_1 \neq 0$ .

L'équation caractéristique associée à  $\mathcal{R}$  est  $r^2 - \lambda r + 1$  de discriminant  $\Delta = \lambda^2 - 4$ .

Commençons par le cas  $\Delta < 0$ , c'est-à-dire  $\lambda \in ]-2, 2[$ , qui équivaut à l'existence de  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $\lambda = 2 \cos \theta$ . L'équation caractéristique admet alors deux racines non réelles conjuguées  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ , donc les suites vérifiant la relation de récurrence  $(\mathcal{R})$  sont celles pour lesquelles existent des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k = \alpha \sin(k\theta) + \beta \cos(k\theta).$$

Les conditions  $x_0 = x_{n+1} = 0$  sont équivalentes à :

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \sin((n+1)\theta) = 0.$$

Il existe donc un élément non nul dans  $R_\lambda$  si, et seulement si,  $\sin((n+1)\theta) = 0$ , c'est-à-dire si, et seulement s'il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$ , et alors  $R_\lambda$  est de dimension 1 engendré par la suite  $(\sin \frac{pk\pi}{n+1})_{k \in \mathbb{N}}$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

Compte tenu de  $\theta \in ]0, \pi[$ , on en déduit que les valeurs propres de  $A$  dans  $] -2, 2[$  sont :

$$\lambda_p = 2 \cos \frac{p\pi}{n+1} \quad \text{avec} \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

et que le sous-espace propre  $E_{\lambda_p}$  est la droite engendrée par le vecteur  $(\sin \frac{pk\pi}{n+1})_{1 \leq k \leq n}$ .

Par injectivité de la fonction  $\cos$  sur  $]0, \pi[$ , la famille  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  a  $n$  éléments distincts et l'on a ainsi trouvé toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  de taille  $n$ .

Il est donc inutile d'étudier le cas où  $|\lambda| \geq 1$  (et encore moins d'envisager de chercher des valeurs propres non réelles).

2. Ayant  $n$  valeurs propres distinctes, la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable et l'on a  $A = PDP^{-1}$  où :

$$D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{et} \quad P = (X_1 \ \cdots \ X_n) = \left( \sin \frac{kp\pi}{n+1} \right)_{1 \leq k, p \leq n}.$$

**Remarque** En fait, la matrice  $A$  est symétrique réelle et le théorème spectral (voir le chapitre 4) montre qu'elle est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Cela prouve que les colonnes de  $P$  sont orthogonales et donne que le produit  $P^T P$  est une matrice diagonale. Cela facilite le calcul de  $P^{-1}$ .

Ici on trouve sans trop de difficultés que  $P^T P = \frac{n+1}{2} I_n$  (il suffit de calculer ses termes diagonaux), ce qui donne  $P^{-1} = \frac{2}{n+1} P^T = \frac{2}{n+1} P$ .

- 3.6 • Supposons qu'il existe une matrice  $U$  non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AU = UB$ . Montrons par récurrence que  $A^k U = UB^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- \* C'est immédiat lorsque  $k = 0$ .
  - \* Supposons  $A^k U = UB^k$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$A^{k+1} U = A(A^k U) = A(UB^k) = (AU)B^k = (UB)B^k = UB^{k+1}.$$

Par linéarité, on en déduit  $P(A)U = UP(B)$ , pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

En particulier,  $\pi_B(A)U = U\pi_B(B) = 0$ , donc  $\pi_B(A)$  est non inversible puisque  $U \neq 0$ .

Le polynôme  $\pi_B$  étant scindé sur  $\mathbb{C}[X]$ , on peut écrire  $\pi_B = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ , où les  $\lambda_i$  (non nécessairement distincts) sont les valeurs propres de  $B$  d'après la proposition 13 de la page 100. Donc  $\prod_{i=1}^p (A - \lambda_i I_n)$  est non inversible, ce qui prouve qu'il existe  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $A - \lambda_i I_n$  soit non inversible. Ainsi  $\lambda_i$  est une valeur propre commune à  $A$  et  $B$ .

- Réciproquement, supposons que les matrices  $A$  et  $B$  possèdent une valeur propre commune  $\lambda$ . Alors  $\lambda$  est aussi valeur propre de  $B^T$  puisqu'une matrice et sa transposée ont le même spectre. Il existe donc deux vecteurs colonnes non nuls  $X$  et  $Y$  tels que l'on ait  $AX = \lambda X$  et  $B^T Y = \lambda Y$ . La matrice  $U = XY^T$  vérifie alors :

$$AU = AX Y^T = \lambda X Y^T \quad \text{et} \quad UB = X Y^T B = X (B^T Y)^T = \lambda X Y^T.$$

Comme les vecteurs  $X$  et  $Y$  sont non nuls, la matrice  $U$  est non nulle car il existe un couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $U_{i,j} = X_i Y_j \neq 0$ .

- 3.7** 1. Comme  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle,  $u$  possède une valeur propre  $\lambda$ . Le sous-espace propre associé est stable par  $v$  car  $u$  et  $v$  commutent (proposition 1 de la page 94). L'endomorphisme  $v'$  induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$  possède alors un vecteur propre  $x$  puisque  $E_\lambda(u)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et  $x$  est donc un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = u \circ (u^k \circ v - v \circ u^k) + (u \circ v - v \circ u) \circ u^k$ , ce qui permet de prouver par récurrence sur  $k$  :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = \alpha k u^k.$$

Cela s'écrit  $\Phi(u^k) = \alpha k u^k$  en posant  $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ w & \longmapsto & w \circ v - v \circ w. \end{array}$

Or, l'endomorphisme  $\Phi$  admet un nombre fini de valeurs propres puisque  $\mathcal{L}(E)$  est de dimension finie. Ainsi, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u^k = 0$ , ce qui prouve que  $u$  est nilpotent. En particulier,  $\text{Ker } u$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  et est stable par  $v$  car si  $x \in \text{Ker } u$ , alors  $u(v(x)) = v \circ u(x) + \alpha u(x) = 0$ . L'endomorphisme induit par  $v$  sur  $\text{Ker } u$  possède alors un vecteur propre qui est un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

3. Supposons qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $u \circ v - v \circ u = \alpha u + \beta v$ .

Si  $\beta = 0$ , on conclut grâce à l'une deux questions précédentes suivant la nullité de  $\alpha$ . Sinon, l'endomorphisme  $w = \alpha u + \beta v$  vérifie alors  $u \circ w - w \circ u = \beta w$  et la question précédente implique que les endomorphismes  $u$  et  $w$  possèdent un vecteur propre  $x$  commun. Il existe donc deux nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $u(x) = \lambda x$  et  $w(x) = \mu x$ .

Comme  $\beta$  est non nul, on en déduit que  $v(x) = \frac{w(x) - \alpha u(x)}{\beta} = \frac{\mu - \alpha \lambda}{\beta} x$ .

Le vecteur  $x$  est donc un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

- 3.8** Soit  $\lambda \neq 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) = \det(A) \det(\lambda A^{-1} - I_n) \\ &= (-\lambda)^n \det(A) \det\left(\frac{1}{\lambda} I_n - A^{-1}\right) = (-1)^n \det(A) \lambda^n \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Par égalité de deux fonctions polynomiales sur l'ensemble  $\mathbb{K}^*$  qui est infini, on en déduit que le coefficient  $\alpha_1$  de  $X$  dans  $\chi_A$  est  $(-1)^n \det(A)(-\text{tr } A^{-1})$ .

Or  $\text{Com}(A)^T = \det(A) A^{-1}$ , donc  $\text{tr Com}(A) = \text{tr Com}(A)^T = \det(A) \text{tr}(A^{-1})$ . En conclusion :

$$\alpha_1 = (-1)^n \det(A)(-\text{tr } A^{-1}) = (-1)^{n-1} \text{tr}(\text{Com } A).$$

**Remarque** On verra à l'exercice 8.3 de la page 362 une autre méthode pour obtenir ce résultat, y compris pour des matrices non inversibles.

- 3.9** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En développant  $\det(\lambda I_3 - A)$  par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1) ((\lambda - \cos \theta)^2 + \sin \theta^2) = (\lambda - 1) (\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1).$$

- Si  $\theta \not\equiv 0 [ \pi ]$ , on a donc  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$  et  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ .
- Si  $\theta \equiv 0 [2\pi]$ , alors  $\chi_A = (X - 1)^3$  et  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$ .
- Si  $\theta \equiv \pi [2\pi]$ , alors  $\chi_A = (X - 1)(X + 1)^2$  et  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, -1\}$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

**3.10** Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . On a  $\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -A & \lambda I_n \end{pmatrix}$  que l'on peut calculer par la transvection par blocs  $C_2 \leftarrow C_2 + C_1(\lambda^{-1} A)$ , c'est-à-dire par multiplication à droite par  $\begin{pmatrix} I_n & \lambda^{-1} A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$  de déterminant 1. Cela donne :

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -A & \lambda I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & \lambda I_n - \lambda^{-1} A^2 \end{pmatrix}$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \lambda^n \det(\lambda I_n - \lambda^{-1} A^2) = \det(\lambda^2 I_n - A^2) \\ &= \det(\lambda I_n + A) \det(\lambda I_n - A) \\ &= (-1)^n \det(-\lambda I_n - A) \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda) \chi_A(-\lambda). \end{aligned}$$

L'égalité polynomiale  $\chi_B(\lambda) = (-1)^n \chi_A(\lambda) \chi_A(-\lambda)$  étant vraie pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}^*$ , et  $\mathbb{K}^*$  étant infini, on en déduit l'égalité de polynômes  $\chi_B(X) = (-1)^n \chi_A(X) \chi_A(-X)$ .

**3.11** La matrice  $A$  est annulée par le polynôme  $P = X^3 - 3X - 5$ . L'étude des variations de la fonction  $x \mapsto x^3 - 3x - 5$  montre que  $P$  a une unique racine réelle, et que cette racine  $\alpha$  est strictement positive. Ses deux autres racines dans  $\mathbb{C}$  sont donc complexes conjuguées, et il existe, par conséquent,  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tel que :

$$P = (X - \alpha)(X - \omega)(X - \bar{\omega}).$$

Puisque  $A$  est annulée par  $P$ , ses valeurs propres appartiennent à  $\{\alpha, \omega, \bar{\omega}\}$  donc il existe des entiers  $p$  et  $q$  tels que

$$\chi_A = (X - \alpha)^{n-p-q}(X - \omega)^p(X - \bar{\omega})^q.$$

Comme  $A$  est une matrice réelle, le polynôme  $\chi_A$  est à coefficients réels, d'où  $p = q$ . Par conséquent :

$$\det A = (-1)^n \chi_A(0) = \alpha^{n-2p} |\omega|^{2p} > 0.$$

**3.12** • Supposons  $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ . En écrivant  $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$  par blocs, avec  $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ , on obtient :

$$J_r B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B J_r = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0_{p-r} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\chi_{J_r B} = \chi_{B_1} X^{n-r}$  et  $\chi_{B J_r} = \chi_{B_1} X^{p-r}$ . Le résultat s'ensuit immédiatement.

- La matrice  $A$  est équivalente à la matrice  $J_r$  utilisée ci-dessus, où  $r = \operatorname{rg} A$ . Il existe donc deux matrices inversibles  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que  $A = P J_r Q$ . Posons  $B_0 = Q B P$ . On a alors :

$$AB = P J_r Q B = P J_r B_0 P^{-1} \quad \text{et} \quad BA = B P J_r Q = Q^{-1} B_0 J_r Q$$

donc  $AB$  et  $BA$  sont respectivement semblables à  $J_r B_0$  et  $B_0 J_r$ . À l'aide du point précédent, on déduit :

$$X^p \chi_{AB} = X^p \chi_{J_r B_0} = X^n \chi_{B_0 J_r} = X^n \chi_{BA}.$$

- 3.13** Supposons qu'il existe une matrice  $U$  de rang  $r$  tel que  $AU = UB$ . Il existe alors deux matrices inversibles  $P$  et  $Q$  telles que  $U = PJ_rQ$ . La relation  $APJ_rQ = PJ_rQB$  donne alors  $A'J_r = J_rB'$  avec  $A' = P^{-1}AP$  et  $B' = QBQ^{-1}$ . Si l'on écrit :

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ A'_3 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (A'_1, B'_1) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})^2,$$

alors on a  $A'J_r = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ A'_3 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J_rB' = \begin{pmatrix} B'_1 & B'_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc  $A'_1 = B'_1$ ,  $A'_3 = 0$  et  $B'_2 = 0$ , ce qui donne :

$$A' = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 \\ 0 & A'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} A'_1 & 0 \\ B'_3 & B'_4 \end{pmatrix}.$$

Par suite,  $\chi_A = \chi_{A'} = \chi_{A'_1}\chi_{A'_4}$  et  $\chi_B = \chi_{B'} = \chi_{A'_1}\chi_{B'_4}$ .

Ainsi,  $\chi_A$  et  $\chi_B$  ont le facteur  $\chi_{A'_1}$  de degré  $r$  en commun.

- 3.14** 1. Si  $u$  est nilpotent, il existe une base dans laquelle la matrice  $A$  de  $u$  est triangulaire supérieure stricte. Les matrices  $A^k$  étant triangulaires supérieures strictes pour tout  $k > 0$ , on a  $\text{tr}(u^k) = 0$  pour tout  $k > 0$ .
2. (a) Soit  $\chi_u = \alpha_0 + \alpha_1X + \cdots + \alpha_nX^n$  le polynôme caractéristique de  $u$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a :

$$\alpha_0 \text{Id}_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_n u^n = \chi_u(u) = 0.$$

En appliquant la trace à cette égalité, on obtient  $n\alpha_0 = 0$ , donc  $\det u = 0$  puisque  $n \geq 1$  et  $\alpha_0 = (-1)^n \det u$ .

- (b) Prouvons maintenant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

$H_n$  : « Tout endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  vérifiant  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tr}(u^k) = 0$  est nilpotent. »

**Initialisation.** Si  $\dim E = 0$ ,  $\mathcal{L}(E)$  ne possède que l'endomorphisme nul qui est nilpotent.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; supposons le résultat acquis en toute dimension strictement inférieure à  $n$ . Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tr}(u^k) = 0$ .

D'après la question précédente (on a supposé  $n \geq 1$ ),  $u$  n'est pas bijective, donc  $\text{Im } u$  est de dimension  $r < n$ .

Dans une base adaptée à  $\text{Im } u$ , la matrice de  $u^k$  est :

$$\begin{pmatrix} B^k & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$  est la matrice de l'endomorphisme  $v$  induit par  $u$  sur  $\text{Im } u$ .

On en déduit que  $\text{tr}(v^k) = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . L'hypothèse  $H_r$  nous dit alors que  $v$  est nilpotent, donc il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $v^k = 0$ .

Ainsi, pour tout  $y \in \text{Im } u$ , on a  $u^k(y) = 0$ . Par conséquent, pour tout  $x \in E$  :

$$u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) = 0,$$

donc  $u^{k+1} = 0$ , ce qui montre  $H_n$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- 3.15** • Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Pour le calcul de  $\chi_A(\lambda)$ , l'opération  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$  donne :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & -2 \\ \lambda - 1 & \lambda - 5 & -2 \\ 1 - \lambda & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & \lambda - 5 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$  donnent ensuite :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Une liste de ses valeurs propres est donc  $(1, 2, 2)$ .

- On obtient le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant le système  $AX = X$ , soit :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0. \end{cases}$$

Notons  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  les équations de ce système.

En effectuant les opérations  $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$  et  $E_3 \leftarrow E_3 + E_1$ , on montre que ce système est équivalent à  $x = y = -z$ .

$$\text{Ainsi } E_1(A) = \mathbb{K}v_1, \text{ où } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

équivalent à  $2x - 3y - 2z = 0$ . On obtient  $E_2(A) = \mathbb{K}v_2 \oplus \mathbb{K}v_3$  où :

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ils forment une famille libre, car ce sont deux vecteurs non proportionnels).

- La somme des dimensions des sous-espaces propres valant 3, la matrice  $A$  est diagonalisable et une base de vecteurs propres est  $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ .

On peut donc conclure que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , où  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{C}$ .

- 3.16** 1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Notons  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ . Il est diagonalisable d'après la proposition 32 de la page 114, et ses valeurs propres appartiennent au spectre de  $u$ . On peut donc écrire :

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(v)} \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_F) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} \text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_F),$$

la dernière égalité provenant du fait que  $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_F) = \{0\}$  si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  mais pas de  $v$ . Comme  $\text{Ker}(v - \lambda \text{Id}_F) \subset E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ ,

on en déduit que  $F$  s'écrit  $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} F_\lambda$ , avec  $F_\lambda$  sous-espace vectoriel de  $E_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in \text{sp}(u)$ .

Réiproquement, il est clair qu'un tel sous-espace vectoriel de  $E$  est stable par  $u$  puisque tout sous-espace vectoriel d'un sous-espace propre est évidemment stable.

2. • Pour qu'il n'y ait qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables, il faut en particulier que les sous-espaces propres de  $u$  ne contiennent qu'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, et donc que ce soient des droites. En effet, si un espace vectoriel contient deux vecteurs  $a$  et  $b$  linéairement indépendants, il contient toutes les droites  $\text{Vect}(a + \lambda b)$ , pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , et ces droites sont distinctes par liberté de la famille  $(a, b)$ . Il faut donc que  $u$  possède exactement  $n = \dim E$  valeurs propres car il est diagonalisable.
- Réiproquement, si  $u$  admet exactement  $n$  valeurs propres, ses sous-espaces propres sont des droites, chacune contenant exactement 2 sous-espaces vectoriels : elle-même et  $\{0\}$ .

En notant  $(e_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$  une base de vecteurs propres de  $u$ , les sous-espaces vectoriels stables par  $u$  sont, d'après la première question, les sous-espaces vectoriels engendrés par certains des  $e_\lambda$ . Ce sont donc les  $F_I = \text{Vect}((e_\lambda)_{\lambda \in I})$ , où  $I$  est une partie quelconque de  $\text{sp}(u)$ .

Par indépendance de la famille  $(e_\lambda)_{\lambda \in \text{sp}(u)}$ , l'application  $I \mapsto F_I$  est injective, donc il y a autant de sous-espaces vectoriels stables que de parties de  $\text{sp}(u)$ , c'est-à-dire  $2^n$ .

**3.17** 1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & 2 \\ \lambda - 1 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & 2 \\ 1 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \quad (\text{factorisation}) \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc 1 de multiplicité 1 et  $-1$  de multiplicité 2.

On détermine le sous-espace propre  $E_1$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à  $x = y = z$ . On a donc  $E_1 = \mathbb{K}f_1$  avec  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

On détermine le sous-espace propre  $E_{-1}$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent à  $x + y - z = 0$  donc  $E_{-1}$  est de dimension 2 et :

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ainsi } E_{-1} = \mathbb{K}f_2 \oplus \mathbb{K}f_3 \text{ avec } f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\dim E_1 + \dim E_{-1} = 3$ , la matrice  $A$  est diagonalisable et  $(f_1, f_2, f_3)$  est une base de diagonalisation. Par conséquent :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Puisque  $A$  est diagonalisable de spectre  $\{-1, 1\}$ , le polynôme minimal de  $A$  est :

$$\pi_A(X) = (X - 1)(X + 1)$$

(polynôme unitaire scindé à racines simples dont les racines sont 1 et  $-1$ ).

**3.18** Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$v(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1} \in \mathbb{R}_{k+1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$$

et  $v(X^n) = nX^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Donc l'endomorphisme  $v$  laisse stable le sous-espace vectoriel  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

Considérons alors l'endomorphisme  $u$  induit par  $v$  sur  $E$ .

La matrice de  $u$  dans la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique ne paraissant pas facile à calculer, on peut rechercher les valeurs propres de  $u$  par l'équation aux éléments propres.

Soit  $P \in E$  non nul de factorisation  $\beta \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{n_k}$  sur  $\mathbb{C}$ , où les  $\alpha_k$  sont des complexes deux à deux distincts et  $\beta \neq 0$ .

Le polynôme  $P$  est un vecteur propre de  $u$  si, et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(1 - X^2)P' + nXP = \lambda P,$$

soit :

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX - \lambda}{X^2 - 1} = \frac{n - \lambda}{2(X - 1)} + \frac{n + \lambda}{2(X + 1)}.$$

Comme :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{n_k}{X - \alpha_k},$$

il suffit que  $(n - \lambda)/2$  et  $(n + \lambda)/2$  soient des entiers naturels et que l'on prenne :

$$r = 2, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad n_1 = (n - \lambda)/2 \quad \text{et} \quad n_2 = (n + \lambda)/2$$

pour que  $P$  soit vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Posons donc, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$\lambda_k = n - 2k \quad \text{et} \quad P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k} \in \mathbb{R}[X].$$

Alors les polynômes  $P_0, \dots, P_n$  sont des vecteurs propres de  $u$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes.

Ainsi,  $u$  possède (au moins)  $n + 1$  valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.

- 3.19** 1. Dans une base de diagonalisation simultanée, les matrices des endomorphismes sont diagonales, donc commutent deux à deux.  
 2. Raisonnons par récurrence forte sur la dimension de  $E$ . Le résultat est évident en dimension inférieure égale à 1 puisqu'alors toute matrice est diagonale.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; supposons le résultat vrai pour tout espace vectoriel de dimension strictement inférieure à  $n$ . Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes de  $E$  diagonalisables et commutant deux à deux.

- Si tous les  $u_i$  sont des homothéties, n'importe quelle base de  $E$  convient.
- Supposons alors que  $u_{i_0}$  avec  $i_0 \in I$  ne soit pas une homothétie. On peut alors écrire :

$$E = F \oplus G$$

où  $F$  est un sous-espace propre de  $u_{i_0}$  et  $G$  la somme des autres sous-espaces propres. Ces sous-espaces vectoriels sont stables par  $u_i$  pour tout  $i$  par hypothèse de commutation. Les familles  $(u'_i)_{i \in I}$  et  $(u''_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes induits sur  $F$  et  $G$  sont alors formées d'endomorphismes commutant deux à deux, et diagonalisables puisque ce sont des endomorphismes induits par des diagonalisables sur un sous-espace vectoriel stable (cf. proposition 32 de la page 114). Or,  $F \neq \{0\}$  (c'est un sous-espace propre) et  $F \neq E$  (puisque  $u_{i_0}$  n'est pas une homothétie) donc les dimensions de  $F$  et  $G$  sont strictement inférieures à  $n$ . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base  $\mathcal{B}'$  de diagonalisation simultanée des  $u'_i$  et de même une base  $\mathcal{B}''$  de  $G$  pour les  $u''_i$ . Les vecteurs de  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  fournissent alors une base de diagonalisation simultanée des  $(u_i)_{i \in I}$ .

- 3.20** 1. Rappelons que les projecteurs  $p_i$  vérifient les relations :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad \text{et} \quad p_1 + \dots + p_r = \text{Id}_E.$$

- (a) • L'égalité  $p_1 + \dots + p_r = \text{Id}_E = u^0$  donne la relation demandée pour  $k = 0$ .  
 • Vérifions-la pour  $k = 1$ . Comme l'endomorphisme induit par  $u$  sur chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_i}(u)$  est l'homothétie de rapport  $\lambda_i$ , les endomorphismes  $u$  et  $\lambda_1 p_{\lambda_1} + \dots + \lambda_r p_{\lambda_r}$  coïncident sur chacun des sous-espaces propres, donc sont égaux puisque  $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a :

$$(\lambda_1 p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r p_{\lambda_r}) \circ (\lambda_1^k p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^k p_{\lambda_r}) = \lambda_1^{k+1} p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^{k+1} p_{\lambda_r}$$

puisque  $p_{\lambda_i}^2 = p_{\lambda_i}$  pour tout  $i$  et que tous les autres termes en  $p_{\lambda_i} \circ p_{\lambda_j}$ , avec  $i \neq j$ , sont nuls. On a alors immédiatement, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u^k = \lambda_1^k p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^k p_{\lambda_r}.$$

- Supposons maintenant  $u$  bijectif. Toutes ses valeurs propres sont donc non nulles. De la même façon que précédemment, pour tout  $k \in \mathbb{Z}_-$  :

$$(\lambda_1^{-k} p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^{-k} p_{\lambda_r}) \circ (\lambda_1^k p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^k p_{\lambda_r}) = p_{\lambda_1} + \cdots + p_{\lambda_r} = \text{Id}_E,$$

ce qui prouve :

$$\lambda_1^k p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^k p_{\lambda_r} = (\lambda_1^{-k} p_{\lambda_1} + \cdots + \lambda_r^{-k} p_{\lambda_r})^{-1} = (u^{-k})^{-1} = u^k.$$

- (b) Par combinaison linéaire, les relations précédentes donnent :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(u) = P(\lambda_1) p_1 + \cdots + P(\lambda_r) p_r.$$

En prenant les polynômes de Lagrange  $(L_1, \dots, L_r)$  associés aux scalaires deux à deux distincts  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , cela donne  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad p_i = L_i(u)$ , donc les projecteurs spectraux sont des polynômes en  $u$ .

2. La matrice  $A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}$  est de rang 1. Cela prouve que  $-1$  est valeur propre de  $A$  d'ordre de multiplicité au moins 2. Comme la trace de  $A$  est nulle, la troisième valeur propre est 2 et  $\dim E_{-1}(A) + \dim E_2(A) \geq 3$ . Donc  $A$  est diagonalisable de spectre  $\{-1, 2\}$ .

Les projecteurs spectraux ont des matrices  $P$  et  $Q$  vérifiant donc  $P + Q = I_3$  et  $PQ = QP = 0$ . Pour les calculer, on peut utiliser les polynômes de Lagrange comme vu dans la question précédente, mais on peut aussi résoudre le système :

$$\begin{cases} P + Q = I_3 \\ -P + 2Q = A. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne immédiatement :

$$P = \frac{2I_3 - A}{3} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{A + I_3}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad A^k = (-1)^k P + 2^k Q.$$

- 3.21** Comme  $A$  est annulée par le polynôme  $X(X^2 + X + 1)$  scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , elle est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et la dimension de son noyau est égal à la multiplicité de 0 dans  $\chi_A$ . De plus, ses valeurs propres appartiennent à  $\{0, j, j^2\}$  donc il existe des entiers  $p$  et  $q$  tels que son polynôme caractéristique  $\chi_A$  soit égal à :

$$\chi_A = X^{n-p-q} (X - j)^p (X - j^2)^q.$$

La matrice  $A$  étant réelle, son polynôme caractéristique aussi, donc ses deux racines non réelles conjuguées  $j$  et  $j^2$  ont même ordre de multiplicité, ce qui donne  $p = q$ . Le théorème du rang donne alors  $\text{rg } A = 2p$ .

**3.22** Raisonnons par analyse-synthèse.

- Considérons une matrice  $M$  solution. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M^2 + M$  est annulée par son polynôme caractéristique  $\chi_A = X(X - 2)$ , donc le polynôme :

$$\chi_A(X^2 + X) = (X^2 + X)(X^2 + X - 2) = X(X+1)(X-1)(X+2)$$

annule  $M$ . Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que  $M$  est diagonalisable.

Soit  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ .

On a alors  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \alpha & 0 \\ 0 & \beta^2 + \beta \end{pmatrix}$  donc  $\{\alpha^2 + \alpha, \beta^2 + \beta\} = \{0, 2\}$ .

Cela donne  $\alpha \in \{-1, 0\}$  et  $\beta \in \{-2, 1\}$  (les racines des deux polynômes  $X^2 + X$  et  $X^2 + X - 2$ ) ou le contraire.

La matrice  $M$  a donc comme polynôme caractéristique (et donc annulateur) l'un des quatre polynômes suivants :  $X(X - 1)$ ,  $X(X + 2)$ ,  $(X + 1)(X - 1)$  ou  $(X + 1)(X + 2)$ .

- \* Dans le premier cas, les relations  $M^2 + M = A$  et  $M^2 - M = 0$  donnent  $M = \frac{1}{2}A$  ;
- \* dans le deuxième cas, les relations  $M^2 + M = A$  et  $M^2 + 2M = 0$  donnent  $M = -A$  ;
- \* dans le troisième cas, les relations  $M^2 + M = A$  et  $M^2 - I_n = 0$  donnent  $M = A - I_n$  ;
- \* dans le quatrième cas, les relations  $M^2 + M = A$  et  $M^2 + 3M + 2I_n = 0$  donnent  $M = -\frac{1}{2}A - I_n$ .

- Réciproquement, on vérifie facilement que les quatre matrices précédentes conviennent.

Par conséquent  $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$ .

**3.23** La matrice  $A$  est annulée par le polynôme  $X^p - 1$  dont les racines complexes sont simples. Elle est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et ses valeurs propres sont des racines  $p$ -ièmes de l'unité. Ainsi,  $A$  est semblable à une matrice diagonale  $\text{Diag}(\alpha, \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des racines  $p$ -ièmes de l'unité.

D'un autre côté, le polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = X^2 + aX + b$  de  $A$  est à coefficients entiers. La relation  $a = -\text{tr } A = -(\alpha + \beta)$  montre, du fait de l'inégalité triangulaire, que  $a$  est un entier de module inférieur ou égal à 2 et que  $b = \det A = \alpha\beta$  est un entier de module 1 c'est-à-dire  $b = \pm 1$ .

- Si  $A$  possède une valeur propre réelle, alors comme  $a$  est réel, l'autre valeur propre est également réelle. Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont des racines  $p$ -ièmes de l'unité, la matrice  $A$  est alors semblable à  $\text{Diag}(1, 1)$ ,  $\text{Diag}(1, -1)$  ou  $\text{Diag}(-1, -1)$ , donc  $A^2 = I_2$ .
- Si  $A$  possède une valeur propre non réelle,  $e^{i\theta}$  avec  $\theta \not\equiv 0 [\pi]$ , alors l'autre est conjuguée et leur produit  $b$  vaut 1. On en déduit que  $a = -2\cos\theta \in \{-1, 0, 1\}$  car  $a$  est un entier et  $\theta \not\equiv 0 [\pi]$ . Le polynôme caractéristique est alors égal à  $X^2 + X + 1$ ,  $X^2 - X + 1$  ou  $X^2 + 1$ . La matrice  $A$  est semblable à :
  - \*  $\text{Diag}(j, j^2)$  et dans ce cas  $A^3 = I_2$  ;
  - \*  $\text{Diag}(-j^2, -j)$  et dans ce cas  $A^6 = I_2$  ;
  - \* ou  $\text{Diag}(i, -i)$  et dans ce cas  $A^4 = I_2$ .

Dans tous les cas, on a  $A^{12} = I_2$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- 3.24** 1. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En utilisant la transvection par blocs  $C_2 \leftarrow C_2 + C_1(\lambda I_n)$ , c'est-à-dire en multipliant  $\lambda I_{2n} - B$  à droite par la matrice bloc  $\begin{pmatrix} I_n & \lambda I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda I_n & -A + \lambda^2 I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

En échangeant les deux « colonnes » de cette matrice, c'est-à-dire en effectuant les opérations élémentaires  $C_i \leftrightarrow C_{i+n}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} -A + \lambda^2 I_n & \lambda I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = (-1)^n \det(-A + \lambda^2 I_n) \det(-I_n) \\ &= \det(\lambda^2 I_n - A) = \chi_A(\lambda^2). \end{aligned}$$

Donc,  $\chi_B(X) = \chi_A(X^2)$ .

2. • Un nombre complexe  $\lambda$  est valeur propre de  $B$  si, et seulement si,  $\lambda^2$  est valeur propre de  $A$ . Si l'on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  les valeurs propres distinctes de  $A$  et  $m_{\lambda_1}, \dots, m_{\lambda_d}$  leurs ordres de multiplicité dans  $\chi_A$ , alors :

$$\chi_B(X) = \prod_{i=1}^d (X^2 - \lambda_i)^{m_{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^d (X - \mu_i)^{m_{\lambda_i}} (X + \mu_i)^{m_{\lambda_i}},$$

en choisissant, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , une racine carrée  $\mu_i$  de  $\lambda_i$ .

On en déduit que toute valeur propre  $\mu$  non nulle de  $B$ , a une multiplicité dans  $\chi_B$  égale à  $m_{\mu^2}$ , et que si 0 est valeur propre de  $A$ , alors il est valeur propre de  $B$  d'ordre  $2m_0$ .

- Déterminons la dimension des sous-espaces propres de  $B$  en fonction de ceux de  $A$ .

Soit  $\mu$  une valeur propre de  $B$ . Un vecteur  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  avec  $(X, Y) \in (\mathbb{C}^n)^2$  appartient au sous-espace propre  $E_\mu(B)$  si, et seulement si, l'on a :

$$\begin{cases} AY = \mu X \\ X = \mu Y \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire si, et seulement si,} \quad \begin{cases} AY = \mu^2 Y \\ X = \mu Y, \end{cases}$$

ou encore si, et seulement si,  $Y \in E_{\mu^2}(A)$  et  $X = \mu Y$ . L'application :

$$\begin{aligned} E_{\mu^2}(A) &\longrightarrow E_\mu(B) \\ Y &\longmapsto \begin{pmatrix} \mu Y \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est donc bijective, et comme elle est évidemment linéaire, c'est un isomorphisme.

D'où  $\dim E_\mu(B) = \dim E_{\mu^2}(A)$  pour tout  $\mu \in \text{sp } B$ .

Comme  $B$  est diagonalisable si, et seulement si, pour tout  $\mu \in \text{sp}(B)$  la dimension de  $E_\mu(B)$  est égale à la multiplicité de  $\mu$  dans  $\chi_B$ , on en déduit que :

- \* lorsque 0 n'est pas valeur propre de  $A$ , la matrice  $B$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  l'est ;
- \* lorsque 0 est valeur propre de  $A$ , la matrice  $B$  n'est pas diagonalisable.

**3.25** On étudie la matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique,  $X^2 - 3X + 2$ , est simplement scindé de racines 1 et 2, donc la matrice  $U$  est diagonalisable.

- Comme  $U - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ , on obtient  $E_1(U) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .
- De même, puisque  $U - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ , on trouve  $E_2(U) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

En posant  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , on a donc  $U = PDP^{-1}$ . On trouve facilement  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ . Donc :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant des produits par blocs, on vérifie alors que :

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

et que :

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = I_{2n},$$

ce qui prouve que la matrice  $B$  est semblable à  $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ .

- Si  $B$  est diagonalisable, alors la matrice  $C$  aussi, donc il existe un polynôme  $Q$  scindé à racines simples tel que  $Q(C) = 0$ . Or,  $Q(C) = \begin{pmatrix} Q(A) & 0 \\ 0 & Q(2A) \end{pmatrix}$ . Donc  $Q(A) = 0$ , ce qui prouve que la matrice  $A$  est diagonalisable puisque  $Q$  est scindé à racines simples.
- Si  $A$  est diagonalisable, alors il existe une matrice  $R$  inversible et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = RDR^{-1}$ . On a alors, par produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ainsi,  $C$  est diagonalisable, donc  $B$  aussi.

**3.26** En utilisant la commutation de  $A$  et  $B$ , on prouve facilement par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la relation :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} \tag{*}$$

est valable lorsque  $P = X^k$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et de façon évidente lorsque  $P = 1$ . Par linéarité, elle est donc vraie pour tout polynôme  $P$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- En particulier, si  $M$  est diagonalisable, alors il existe un polynôme  $P$  scindé à racines simples qui annule  $M$ . On en déduit, que  $P(A) = 0$  puis que  $A$  est diagonalisable. Elle est donc semblable à une matrice diagonale  $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , donc  $P'(A)$  est semblable à  $\text{Diag}(P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n))$ . Or, les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  sont racines de  $P$  (cf. proposition 12 de la page 99), donc ne sont pas racines de  $P'$ , puisque  $P$  est à racines simples. On en déduit que  $P'(A)$  est inversible. Comme  $P'(A)B = 0$ , il vient  $B = 0$ .
- Réciproquement, si  $A$  est diagonalisable et  $B = 0$ , en prenant un polynôme  $P$  scindé à racines simples annulant  $A$ , on a  $P(M) = 0$  d'après la relation (\*). Donc  $M$  est diagonalisable.

Par conséquent,  $M$  est diagonalisable si, et seulement si, la matrice  $A$  est diagonalisable et la matrice  $B$  est nulle.

- 3.27** 1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On montre facilement par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $G_a^k(u) = a^k \circ u$ . On en déduit, pour tout  $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$  :

$$P(G_a)(u) = \sum_{k=0}^N \alpha_k G_a^k(u) = \sum_{k=0}^N \alpha_k a^k \circ u = P(a) \circ u.$$

On en déduit l'égalité  $P(G_a) = G_{P(a)}$ . Donc si  $P(a) = 0$ , alors  $P(G_a) = 0$  et réciproquement, si  $P(G_a) = 0$ , alors  $G_{P(a)} = 0$  et en particulier  $P(a) = G_{P(a)}(\text{Id}_E) = 0$ .

Les idéaux annulateurs de  $a$  et  $G_a$  sont donc égaux, ce qui prouve que  $a$  possède un polynôme annulateur scindé à racines simples si, et seulement si,  $G_a$  possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Par le théorème 30 de la page 113, on en déduit que  $G_a$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a$  est diagonalisable.

2. De la même façon, on prouve que  $D_a$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a$  est diagonalisable. Donc, si  $a$  est diagonalisable, les deux endomorphismes  $G_a$  et  $D_a$  de  $\mathcal{L}(E)$  sont diagonalisables. Par ailleurs, ils commutent par associativité de la composition.

D'après le résultat admis, il existe donc une base de  $\mathcal{L}(E)$  constituée de vecteurs propres communs à  $G_a$  et  $D_a$  et donc également vecteurs propres de  $M_a = G_a - D_a$ .

3. Supposons  $a$  nilpotent. En utilisant le premier résultat de la première question, puisque  $a$  est annulé par un polynôme de la forme  $X^k$ , alors il en est de même de  $G_a$ . On a évidemment le même résultat pour  $D_a$ , donc si  $a$  est nilpotent, alors  $G_a$  et  $D_a$  sont nilpotents.

Considérons un entier  $p$  tel que  $G_a^p = D_a^p = 0$ . Par commutation de  $G_a$  et  $D_a$ , la formule du binôme de Newton donne :

$$M_a^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \binom{2p}{k} G_a^{2p-k} D_a^k.$$

Or,  $D_a^k = 0$  pour tout  $k \geq p$  et  $G_a^{2p-k} = 0$  pour tout  $k \leq p$ . Donc  $M_a^{2p} = 0$  et  $M_a$  est nilpotent.

4. La nullité de  $M_a$  équivaut à dire que  $a$  commute avec tout endomorphisme de  $E$ . Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . Considérons un supplémentaire  $H$  de la droite  $\mathbb{C}x$  et la projection  $p$  sur  $\mathbb{C}x$  parallèlement à  $H$ . Comme  $a$  commute avec  $p$ , il stabilise  $E_1(p) = \mathbb{C}x$ .

Ainsi,  $a$  stabilise toutes les droites vectorielles de  $E$  ce qui, classiquement (cf. exercice 2.15 de la page 75), nous montre que  $a$  est une homothétie.

5. Écrivons  $a = d + n$ , avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent et  $d \circ n = n \circ d$ . Il est clair que  $G_a = G_d + G_n$  et  $D_a = D_d + D_n$ . Finalement,  $M_a = M_d + M_n$ . La deuxième question nous dit que  $M_d$  est diagonalisable et la troisième que  $M_n$  est nilpotent. De plus :

$$M_d \circ M_n = (G_d - D_d) \circ (G_n - D_n) = G_d \circ G_n - G_d \circ D_n - D_d \circ G_n + D_d \circ D_n.$$

Par commutation de  $d$  et  $n$ , on a  $G_d \circ G_n = G_n \circ G_d$  et de même  $D_d \circ D_n = D_n \circ D_d$ . Par le même argument que dans la deuxième question, on a aussi  $G_d \circ D_n = D_n \circ G_d$  et  $D_d \circ G_n = G_n \circ D_d$ . Donc  $M_d$  et  $M_n$  commutent.

Si maintenant on suppose  $M_a$  diagonalisable, alors les deux égalités :

$$M_a = M_d + M_n \quad \text{et} \quad M_a = M_a + 0$$

sont des décompositions de  $M_a$  comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent qui commutent. L'unicité admise donne alors  $M_n = 0$ . La question précédente nous dit donc qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $n = \lambda \text{Id}_E$ . Comme  $n$  est nilpotent, cela donne  $\lambda = 0$ , donc  $n = 0$ . Ainsi,  $a = d$ , donc  $a$  est diagonalisable.

**3.28** 1. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & -18 & -18 \\ 6 & \lambda + 7 & 9 \\ 2 & 3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$ .

En retranchant la deuxième colonne de la troisième, il vient :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 14 & -18 & 0 \\ 6 & \lambda + 7 & -\lambda + 2 \\ 2 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix}.$$

En ajoutant la dernière ligne à la deuxième, puis en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 14 & -18 & 0 \\ 8 & \lambda + 10 & 0 \\ 2 & 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 14 & -18 \\ 8 & \lambda + 10 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Ainsi  $\chi_A$  est scindé et admet 2 pour racine triple. Comme  $A \neq 2I_3$ , la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable (cf. exemple 26 de la page 110).

En revanche, elle est trigonalisable, puisque  $\chi_A$  est scindé.

2. Pour trigonaliser  $A$  sous la forme  $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  demandée, on a donc besoin de

trouver deux vecteurs propres non colinéaires  $U$  et  $V$  et un troisième vecteur  $W$ , indépendant de  $(U, V)$ , tel que  $AW = 2V + W$ .

On cherche donc une base  $(U, V, W)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$(*) \quad \begin{cases} (A - 2I_3)U = 0 \\ (A - 2I_3)V = 0 \\ (A - 2I_3)W = V. \end{cases}$$

Les vecteurs  $U$  et  $V$  sont donc à chercher dans le sous-espace propre de  $A$  pour la valeur propre 2. Comme  $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 18 \\ -6 & -9 & -9 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$  est de rang 1, le sous-espace

propre  $E_2(A)$  est le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $2x + 3y + 3z = 0$ .

De plus, le vecteur  $V$  doit appartenir à  $\text{Im}(A - 2I_3) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

Prenons donc  $V = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ , puis  $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et enfin  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs  $U$  et  $V$  forment une base du plan  $E_2(A)$  d'équation  $2x + 3y + 3z = 0$  et  $W \notin E_2(A)$  donc la famille  $(U, V, W)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $(\star)$ .

On a alors :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.29** Raisonnons par récurrence sur la dimension de  $E$  en posant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$H_n$  : « Pour tout espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et pour toute famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'endomorphismes trigonalisables de  $E$  commutant deux à deux, il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de tous les  $u_i$  sont triangulaires supérieures. »

$H'_n$  : « Pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  trigonalisables et commutant deux à deux, il existe une matrice inversible  $P$  telle que, pour tout  $i \in I$ , la matrice  $P^{-1}A_iP$  soit triangulaire supérieure. »

Il est clair que  $H'_n$  est la traduction matricielle de  $H_n$ .

**Initialisation.**  $H_0$  est évident.

**Héritéité.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; supposons  $H'_0, \dots, H'_{n-1}$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes trigonalisables de  $E$  commutant deux à deux.

Si tous les  $u_i$  sont des homothéties, toute base de  $E$  les trigonalise simultanément.

Sinon, prenons  $i_0 \in I$  tel que  $u_{i_0}$  ne soit pas une homothétie. Considérons l'une de ses valeurs propres  $\lambda$  (qui existe car  $u_{i_0}$  est trigonalisable et  $\dim E > 0$ ) et prenons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée au sous-espace propre  $E_\lambda(u_{i_0})$ . Sa dimension  $p$  vérifie  $1 \leq p \leq n$  (un sous-espace propre n'est pas nul) et  $p < n$  (puisque  $u_{i_0}$  n'est pas une homothétie). Soit  $i \in I$ . Comme  $u_i$  commute avec  $u_{i_0}$ , il stabilise ce sous-espace propre. Dans la base  $\mathcal{B}$ , la matrice de  $u_i$  est de la forme :

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i & * \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B_i \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Comme  $u_i$  est trigonalisable, il existe un polynôme  $P$  scindé tel que  $P(M_i) = 0$ . On a alors  $P(A_i) = 0$  et  $P(B_i) = 0$ , donc les matrices  $A_i$  et  $B_i$  sont trigonalisables.

D'autre part, l'hypothèse de commutation des  $u_i$  donne, par produit par blocs, les relations  $A_i A_j = A_j A_i$  et  $B_i B_j = B_j B_i$  pour tout  $(i, j) \in I^2$ .

Les hypothèses  $H'_p$  et  $H'_{n-p}$  nous donnent donc l'existence de deux matrices inversibles  $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $R \in \mathcal{GL}_{n-p}(\mathbb{K})$  telles que, pour tout  $i \in I$  :

$$T_i = Q^{-1}A_iQ \in \mathcal{T}_p^+ \quad \text{et} \quad T'_i = R^{-1}B_iR \in \mathcal{T}_{n-p}^+.$$

En posant  $P = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ , qui est inversible, d'inverse  $P^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$ , on obtient, pour tout  $i \in I$  :

$$P^{-1}M_iP = \begin{pmatrix} T_i & * \\ 0 & T'_i \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}).$$

Dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $P$  soit la matrice passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , les matrices des  $u_i$  sont donc triangulaires supérieures, ce qui achève de démontrer  $H_n$ .

- 3.30** Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de dimension strictement supérieure à  $n(n+1)/2$ . Considérons le sous-espace vectoriel  $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$  constitué des matrices triangulaires supérieures strictes. Il est de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ , donc  $\dim E + \dim \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) > n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Il existe donc, dans  $E$ , une matrice non nulle triangulaire supérieure stricte, et une telle matrice est nilpotente (cf. proposition 41 de la page 119).

- 3.31** 1. D'après l'exemple 16 de la page 102, le polynôme  $P = X^n - a_1X^{n-1} - \cdots - a_n$  est le polynôme caractéristique de sa matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $P$  est à coefficients entiers, la matrice  $A$  est bien à coefficients entiers.

2. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La matrice  $A$ , ayant  $P$  comme polynôme caractéristique, est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Donc  $A^k$  est semblable à une matrice triangulaire de diagonale  $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ . Son polynôme caractéristique est donc  $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k)$  et il est à coefficient entiers puisque  $A^k$ , comme  $A$ , est à coefficients entiers.

3. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Le coefficient  $c_{k,\ell}$  du terme de degré  $\ell$  de  $P_k$  vérifie :

$$|c_{k,\ell}| = \left| \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} \lambda_{i_1}^k \cdots \lambda_{i_\ell}^k \right| \leqslant \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} |\lambda_{i_1}^k \cdots \lambda_{i_\ell}^k| \leqslant \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} 1 = \binom{n}{\ell}.$$

Comme les  $c_{k,\ell}$  sont des entiers, ils ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et il en est donc de même pour les polynômes  $P_k$ .

- (b) Notons  $R = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k^{-1} \{0\}$  l'ensemble des racines des polynômes  $P_k$ . C'est un ensemble

fini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes  $P_k$  et que chacun a un nombre fini de racines.

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La suite  $(\lambda_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans l'ensemble fini  $R$ , donc il existe  $k < \ell$  tels que  $\lambda_i^k = \lambda_i^\ell$ . Cela entraîne  $\lambda_i^k (\lambda_i^{\ell-k} - 1) = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda_i = 0$  ou  $\lambda_i^{\ell-k} = 1$ . Ainsi,  $\lambda_i$  est nul ou racine de l'unité.

- 3.32** 1. En développant par rapport à la deuxième colonne, on trouve facilement que  $\chi_B = (X+1)^3$ . La matrice  $B$  n'a donc qu'une valeur propre :  $-1$ . Si elle était diagonalisable, alors elle serait égale à la matrice  $-I_3$ , ce qui n'est pas le cas. La matrice  $B$  n'est donc pas diagonalisable.
2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de  $B$  est un diviseur de  $(X+1)^3$ .

Posons alors  $C = B + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ . On a  $C \neq 0$  et  $C^2 = 0$ .

Le polynôme minimal de  $B$  est donc  $\pi_B = (X+1)^2$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

3. Soit  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$  et  $v = u + \text{Id}_{\mathbb{K}^3}$ . On veut montrer

l'existence d'une base  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $\mathbb{K}^3$  dans laquelle la matrice de  $v$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire telle que  $f_1$  et  $f_2$  soient dans le noyau de  $v$  et que  $v(f_3) = f_2$ .

Comme  $C^2 = 0$ , on en déduit  $\text{Im } v \subset \text{Ker } v$ .

Par ailleurs, comme  $\text{rg}(C) = 1$ , on a  $\dim \text{Im } v = 1$  et  $\dim \text{Ker } v = 2$ .

Prenons donc une base  $(f_2)$  de  $\text{Im } v$  que l'on complète en  $(f_1, f_2)$  une base de  $\text{Ker } v$ . Ensuite, on choisit un antécédent  $f_3$  de  $f_2$  par  $v$ . Comme  $v(f_3) = f_2 \neq 0$ , le vecteur  $f_3$  n'appartient pas à  $\text{Ker } v = \text{Vect}(f_1, f_2)$ , donc  $(f_1, f_2, f_3)$  est libre et par conséquent une base de  $\mathbb{K}^3$ . Dans cette base, la matrice de  $v$  a la forme cherchée, ce qui prouve le résultat.

**Remarque** On peut finir les calculs, en posant :

$$f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne  $B = PTP^{-1}$ , avec :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3.33** • Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = (X - 1)^2(X + 1)$  (développement par rapport à la dernière ligne).

\* La matrice  $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est de rang 2 et admet dans son noyau le vecteur non nul  $e_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{-1}(u) = \mathbb{R}e_{-1}$ .

\* La matrice  $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2 et admet dans son noyau le vecteur non nul  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Donc  $E_1(u) = \mathbb{R}e_1$ .

\* La matrice  $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 1, et le sous-espace caractéristique  $F_1(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$  de  $A$  associé à la valeur propre 1 est le plan d'équation  $2x - 2y - z = 0$ .

Comme  $E_{-1}(u)$ ,  $E_1(u)$  et  $F_1(u)$  sont des noyaux d'endomorphismes commutant avec  $u$ , puisque polynômes en  $u$ , ils sont stables par  $u$ , ainsi que  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^3$ . On remarque également que  $E_{-1}(u) \oplus E_1(u)$  est stable par  $u$ , comme somme de deux sous-espaces vectoriels stables.

- Montrons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit  $F$  un sous-espaces stable par  $u$ .
  - \* Si  $F$  est de dimension 0 ou 3, il est respectivement égal à  $\{0\}$  ou  $\mathbb{R}^3$ .
  - \* Si  $F$  est de dimension 1, alors  $F$  est une droite stable, donc engendrée par un vecteur propre de  $u$  c'est-à-dire  $F = \mathbb{R}e_1$  ou  $F = \mathbb{R}e_{-1}$ .
  - \* Si  $F$  est de dimension 2, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est un polynôme de degré 2 divisant  $\chi_A$ . Il vaut donc  $(X - 1)^2$  ou  $(X - 1)(X + 1)$ .
    - \* Dans le premier cas,  $F$  est contenu dans le noyau de  $(u - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$  qui est égal à  $F_1(u)$ , donc qui lui est égal pour des raisons de dimension.
    - \* Dans le second cas,  $F$  contient un vecteur propre associé à 1 et un vecteur propre associé à -1. Il est donc égal à  $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_{-1}$ .

**3.34** Dans tout l'exercice, nous noterons  $v = u - \lambda \text{Id}_E$ .

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $x \in \text{Ker}(v^k)$ , on a  $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = 0$ , donc  $\text{Ker}(v^k) \subset \text{Ker}(v^{k+1})$ .

La suite  $(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$  est donc croissante, ainsi donc que  $(\dim \text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$  qui est à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , où  $n$  est la dimension de  $E$ .

Il existe donc  $k$  tel que  $\dim \text{Ker}(v^{k+1}) = \dim \text{Ker}(v^k)$ , ce qui donne  $\text{Ker}(v^{k+1}) = \text{Ker}(v^k)$  avec l'inclusion précédemment montrée. Notons  $r$  le plus petit tel entier  $k$ .

Soit  $p \geq r$  et  $x \in \text{Ker}(v^{p+1})$ . On a alors  $v^{p+1}(v^{p-r}(x)) = 0$ , ce qui donne :

$$v^{p-r}(x) \in \text{Ker}(v^{p+1}) = \text{Ker}(v^r)$$

et, par suite,  $x \in \text{Ker}(v^p)$ .

Cela prouve l'inclusion réciproque de celle obtenue précédemment :  $\text{Ker}(v^{p+1}) \subset \text{Ker}(v^p)$ .

On a donc montré que la suite  $(\text{Ker}(v^p))_{p \geq r}$  était constante.

2. (a) Puisque  $m$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ , le polynôme  $Q$  n'admet pas  $\lambda$  pour racine, donc est premier avec  $(X - \lambda)^m$ . Comme  $\chi_u = (X - \lambda)^m Q$ , le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux nous donnent  $E = F_\lambda(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ . D'autre part, toujours par le fait que  $\chi_u$  est annulateur de  $u$ , on a l'inclusion  $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^m \subset \text{Ker } Q(u)$ . C'est en fait une égalité, puisque, par la formule du rang,  $\dim \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^m = n - \dim F_\lambda(u) = \dim \text{Ker } Q(u)$ . Finalement, on a :

$$E = F_\lambda(u) \oplus \text{Ker } Q(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^m \oplus \text{Im}(u - \lambda \text{Id}_E)^m = \text{Ker}(v^m) \oplus \text{Im}(v^m). \quad (*)$$

- (b) Si  $x \in \text{Ker}(v^{2m})$ , alors  $v^m(x) \in \text{Ker}(v^m) \cap \text{Im}(v^m)$ , donc  $v^m(x) = 0$ .

Cela prouve l'inclusion  $\text{Ker}(v^{2m}) \subset \text{Ker}(v^m)$  et donc, par la première question :

$$\text{Ker}(v^m) \subset \text{Ker}(v^{m+1}) \subset \text{Ker}(v^{2m}) \subset \text{Ker}(v^m).$$

On en déduit  $\text{Ker}(v^m) = \text{Ker}(v^{m+1})$  ce qui, par définition de  $r$ , donne  $m \geq r$ .

La suite  $(\text{Ker}(v^p))_{p \geq r}$  étant constante égale à  $F_\lambda(u)$ , on a bien l'égalité demandée  $F_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^m$ .

- (c) L'endomorphisme  $v^m$  est un polynôme en  $v$ , donc commute avec  $v$ . Ainsi, son noyau et son image sont stables par  $v$ . Notons  $v_1$  et  $v_2$  les endomorphismes induits par  $v$  respectivement sur  $\text{Ker}(v^m)$  et  $\text{Im}(v^m)$ .

- Il est clair que  $v_1$  est nilpotent donc que  $\chi_{v_1} = X^{\dim \text{Ker}(v^m)}$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

- Comme  $\text{Ker}(v) \cap \text{Im}(v^m) \subset \text{Ker}(v^m) \cap \text{Im}(v^m) = \{0\}$ , on en déduit que  $v_2$  est injectif. Donc 0 n'est pas racine de  $\chi_{v_2}$ .

La relation (\*) donne l'égalité  $\chi_v = \chi_{v_1}\chi_{v_2}$  qui prouve que l'ordre de multiplicité de 0 en tant que valeur propre de  $v$  est égal à  $\dim \text{Ker}(v^m)$ .

En revenant à  $u$ , cela donne  $m = \dim F_\lambda(u)$ .

3. (a) La suite  $(\text{Ker}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$  étant strictement croissante jusqu'au rang  $r$  puis constante.

Par le théorème du rang, la suite  $(\text{Im}(v^k))_{k \in \mathbb{N}}$ , qui est évidemment décroissante, est strictement décroissante jusqu'au rang  $r$  puis constante.

Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $v^k(E) = v^k(\text{Ker}(v^m)) + v^k(\text{Im}(v^m))$  à l'aide des décompositions (\*), et la somme est directe par stabilité de  $\text{Ker}(v^m)$  et  $\text{Im}(v^m)$  par  $v^k$ . Avec les notations de la question 2(c), l'endomorphisme  $v_2$  de  $\text{Im}(v^m)$  est bijectif, donc  $v^k(\text{Im}(v^m)) = \text{Im}(v^m)$  pour tout  $k$ .

Ainsi, la suite  $(\dim v^k(\text{Ker}(v^m)))_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante jusqu'au rang  $r$  puis constante, et elle stationne à 0 puisque  $v^m(\text{Ker}(v^m)) = \{0\}$ .

Comme  $v^k(\text{Ker}(v^m)) = (u - \lambda \text{Id}_E)^k(F_\lambda(u))$ ,  $r$  est le plus petit des entiers  $k$  tels que  $(u - \lambda \text{Id}_E)^k(F_\lambda(u)) = \{0\}$ , c'est-à-dire est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme induit par  $(u - \lambda \text{Id}_E)$  sur  $F_\lambda(u)$ .

- (b) Comme  $\text{Ker}(v^m) = \text{Ker}(v^r)$ , les décompositions (\*) s'écrivent aussi :

$$E = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^r \oplus \text{Ker } Q(u),$$

ce qui permet de montrer facilement que  $u$  est annulé par le polynôme  $(X - \lambda)^r Q$ . Le polynôme  $\pi_u$  est donc un diviseur de  $(X - \lambda)^r Q$ . Si  $\pi_u$  admettait  $\lambda$  comme racine d'ordre de multiplicité strictement inférieur à  $r$ , il diviserait  $(X - \lambda)^{r-1} Q$  qui serait alors annulateur de  $u$ . Mais c'est impossible puisque :

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{r-1} \oplus \text{Ker } Q(u) \subsetneq \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^r \oplus \text{Ker } Q(u) = E.$$

- 3.35**
- Le sous-espace vectoriel  $F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}$  est stable par  $u$  comme noyau d'un polynôme en  $u$  qui commute donc avec  $u$ . De plus,  $d$  commute avec  $n$ , donc avec  $u = d + n$  puis avec tout polynôme en  $u$ . Donc  $d$  stabilise  $F_\lambda$ . Enfin,  $n = u - d$  le stabilise également.
  - Par définition de  $F_\lambda$ , l'endomorphisme  $u_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  est nilpotent. De plus,  $d_\lambda - u_\lambda = -n_\lambda$  est également nilpotent. Puisque  $n$  et  $u$  commutent,  $-n_\lambda = d_\lambda - u_\lambda$  commute avec  $u_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$ . Il est alors facile de montrer, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que leur différence  $d_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  est également un endomorphisme nilpotent (voir par exemple l'exercice 2.18 de la page 76). Les valeurs propres de  $d_\lambda - \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  sont donc toutes nulles, et comme il est diagonalisable, comme endomorphisme induit par  $d - \lambda \text{Id}_E$  qui est diagonalisable, il est nul. Donc  $d_\lambda = \lambda \text{Id}_{F_\lambda}$ .
  - On en déduit que  $d$  est l'unique endomorphisme de  $E$  coïncidant avec  $\lambda \text{Id}_{F_\lambda}$  sur chaque  $F_\lambda$  (caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions à une décomposition). Cela prouve donc l'unicité de  $d$ , puis celle de  $n = u - d$ .

**3.36** 1. (a) Comme  $E \neq \{0\}$ , on a  $p \geq 1$  donc, par définition de l'indice,  $u^{p-1} \neq 0$ . On prend alors un vecteur de  $E$  n'appartenant pas à  $\text{Ker}(u^{p-1})$  et l'on montre facilement que la famille  $\mathcal{B}$  est libre (voir l'exemple 32 de la page 62).

La stabilité de  $F$  par  $u$  vient du fait que  $u(\mathcal{B}) = (u(x), \dots, u^{p-1}(x), 0) \in F^p$ . La matrice de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est alors immédiatement :

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b)
- Complétons la famille libre  $\mathcal{B}$  en une base de  $E$ . Il est clair que la forme linéaire coordonnée dans cette base correspondant au vecteur  $u^{p-1}(x)$  convient ; notons-la  $\varphi$ .
  - Soit  $y \in G$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on a donc  $\varphi(u^k(y)) = 0$ , donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket \quad \varphi(u^k(u(y))) = \varphi(u^{k+1}(y)) = 0.$$

Comme de plus  $u^p(y) = 0$ , cela donne aussi  $\varphi(u^{p-1}(u(y))) = 0$ . Donc  $u(y) \in G$ , ce qui montre la stabilité de  $G$  par  $u$ .

- Puisque  $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$ , la forme linéaire  $\varphi \circ u^{p-1}$  est non nulle, et il en est donc de même de  $\varphi \circ u^k$ , pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ .

Ainsi,  $G$  est l'intersection de  $p$  hyperplans, ce qui prouve, d'après le cours de première année, que sa dimension est supérieure ou égale à  $\dim E - p$ . Comme  $F$  est de dimension  $p$ , pour montrer l'égalité  $E = F \oplus G$ , il suffit de montrer que  $F \cap G = \{0\}$ .

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une famille non nulle  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$  telle que  $y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \in G$ . Considérant le plus petit  $k$  tel que  $\lambda_k \neq 0$ , on a alors :

$$0 = (\varphi \circ u^{p-1-k})(y) = \sum_{i=k}^{p-1} \lambda_i \varphi(u^{p-1-i}(x)) = \lambda_k \varphi(u^{p-1}(x))$$

car les autres termes de la somme sont nuls par l'hypothèse  $u^p = 0$ . C'est contradictoire, puisque  $\lambda_k \neq 0$  et  $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$ .

- (c) Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété suivante.

$H_n$  : « Tout endomorphisme nilpotent  $u$  d'un espace vectoriel de dimension  $n$  peut-être représenté une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $M_p$ . »

**Initialisation.** La propriété  $H_0$  est immédiate (aucun bloc diagonal).

**Hérédité.** Soit  $n \geq 1$  ; supposons  $H_k$ , pour tout  $k < n$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ . Comme  $n \geq 1$ , on peut appliquer ce qui précède et obtenir une décomposition de  $E$  comme somme de deux sous-espaces  $F$  et  $G$ , stables par  $u$ , tels que la matrice, dans une certaine base de  $F$ , de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  soit  $M_p$ , où  $p = \dim F \geq 1$ .

### Chapitre 3. Réduction des endomorphismes

L'endomorphisme  $u_G$  est évidemment nilpotent. En appliquant l'hypothèse de récurrence  $H_{n-p}$ , on peut donc trouver une base de  $G$  dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $M_k$ . En concaténant ces bases de  $F$  et de  $G$ , on obtient bien une base de  $E$  dans laquelle la matrice est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $M_k$  (le premier étant  $M_p$ ). Cela prouve  $H_n$ .

2. On commence par décomposer  $E$  en somme des sous-espaces caractéristiques de  $u$ , c'est-à-dire  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} F_\lambda(u)$ . Sur chaque  $F_\lambda(u)$ ,  $u$  induit un endomorphisme  $u_\lambda$  somme de

l'homothétie de rapport  $\lambda$  et d'un endomorphisme nilpotent  $n_\lambda$ . On peut donc, d'après ce qui précède, trouver une base de  $F_\lambda(u)$  dans laquelle la matrice de  $n_\lambda$  est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $M_r$  et donc la matrice de  $u_\lambda$  diagonale par blocs, avec des blocs de la forme  $\lambda I_r + M_r$ .

Cela prouve le résultatat.

3. On remarque alors que si un endomorphisme  $u$  admet  $\lambda I_r + M_r$  pour matrice dans une base  $(e_1, \dots, e_r)$ , alors sa matrice dans  $(e_n, \dots, e_1)$  est  $\lambda I_r + M_r^T$ . Donc les matrices  $\lambda I_r + M_r^T$  et  $\lambda I_r + M_r$  sont semblables.

Le résultatat s'ensuit, d'après la question précédente, en travaillant bloc par bloc.

- 3.37** 1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On montre facilement par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $g_A^k(M) = A^k M$ .

On en déduit, pour tout  $P = \sum_{k=0}^N \alpha_k X^k$  :

$$P(g_A)(M) = \sum_{k=0}^N \alpha_k g_A^k(M) = \sum_{k=0}^N \alpha_k A^k M = P(A)M.$$

On en déduit l'égalité  $P(g_A) = g_{P(A)}$ . Donc si  $P(A) = 0$ , alors  $P(g_A) = 0$  et réciproquement, si  $P(g_A) = 0$ , alors  $g_{P(A)} = 0$  et en particulier  $P(A) = g_{P(A)}(I_n) = 0$ .

Les idéaux annulateurs de  $A$  et  $g_A$  sont donc égaux, ce qui prouve que  $A$  possède un polynôme annulateur scindé si, et seulement si,  $g_A$  possède un polynôme annulateur scindé. Par le théorème 39 de la page 119, on en déduit que  $g_A$  est trigonalisable si, et seulement si,  $A$  est trigonalisable.

2. De la même façon, on prouve que  $d_A$  est trigonalisable si, et seulement si,  $A^T$  est trigonalisable c'est-à-dire si, et seulement si,  $A$  est trigonalisable. Donc, si  $A$  est trigonalisable, les deux endomorphismes  $g_A$  et  $d_A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont trigonalisables. Par ailleurs, ils commutent par associativité du produit matriciel.

D'après le résultatat admis, il existe donc une base de trigonalisation commune à  $g_A$  et  $d_A$ , qui est donc également une base de trigonalisation pour  $m_A = g_A - d_A$ .

3. Soit  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . Considérons un vecteur propre associé  $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  et  $M = X\bar{X}^T$ .

On a  $AM = AX\bar{X} = \lambda X\bar{X}$  et :

$$MA^T = X\bar{X}^T A^T = (A\bar{X}X^T)^T = (\bar{A}\bar{X}X^T)^T = (\bar{\lambda}\bar{X}X^T)^T = \bar{\lambda}M.$$

$A$  réelle

Donc  $AM - MA^T = (\lambda - \bar{\lambda})M$ , c'est-à-dire  $m'_A(M) = (\lambda - \bar{\lambda})M$ , où  $m'_A$  est le prolongement naturel de  $m_A$  à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire  $m'_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{ccc} M & \longmapsto & AM - MA^T \end{array}$$

Enfin, la matrice  $M$  est non nulle, puisqu'en notant  $(x_1, \dots, x_n)$  les coefficients de  $X$ , il existe  $i \in [1, n]$  tel que  $x_i \neq 0$  et qu'alors le coefficient de  $M$  d'indice  $(i, i)$  est  $|x_i|^2 \neq 0$ . Donc  $M$  est un vecteur propre, associé à la valeur propre  $\lambda - \bar{\lambda}$ , de l'endomorphisme  $m'_A$ .

4. Si  $A$  n'est pas trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ , elle admet une valeur propre  $\lambda$  non réelle et alors  $\lambda - \bar{\lambda}$  est une valeur propre non réelle de  $m'_A$ .

Or, puisque la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est constituée de matrices réelles, les endomorphismes  $m_A$  et  $m'_A$  ont la même matrice dans les bases canoniques respectives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . En notant  $P \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$  cette matrice, ce qui précède montre que  $P$  admet une valeur propre non réelle, donc n'est pas triagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi,  $m_A$  n'est pas trigonalisable. Par contraposition, on obtient la réciproque de la question 2.



# Chapitre 4 : Endomorphismes d'un espace euclidien

<b>I</b>	<b>Adjoint d'un endomorphisme . . . . .</b>	<b>158</b>
1	Définition . . . . .	158
2	Propriétés . . . . .	159
<b>II</b>	<b>Matrices orthogonales . . . . .</b>	<b>160</b>
1	Définition . . . . .	160
2	Le groupe orthogonal . . . . .	161
3	Espaces vectoriels euclidiens orientés . . . . .	162
<b>III</b>	<b>Endomorphismes autoadjoints . . . . .</b>	<b>163</b>
1	Généralités . . . . .	163
2	Réduction des endomorphismes autoadjoints . . . . .	165
3	Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs . . . . .	167
<b>IV</b>	<b>Isométries vectorielles . . . . .</b>	<b>168</b>
1	Généralités . . . . .	168
2	Isométries en dimension 2 . . . . .	171
3	Réduction des isométries vectorielles . . . . .	172
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>183</b>

# 4

# Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans ce chapitre, on considère un espace euclidien  $E$  dont le produit scalaire sera noté  $( \cdot | \cdot )$ . La norme et la distance euclidiennes associées seront respectivement notées  $\| \cdot \|$  et  $d$ .

## I Adjoint d'un endomorphisme

### 1 Définition

Pour tout vecteur  $a$ , l'application  $x \mapsto (a | x)$  est une forme linéaire sur  $E$ . Le théorème de Riesz permet de montrer réciproquement que toute forme linéaire sur  $E$  est de cette forme.

#### Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$ .

Il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que :  $\forall x \in E \quad \varphi(x) = (a | x)$ .

**Démonstration.** Comme  $E$  est un espace euclidien, il possède une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $a \in E$ . La forme linéaire  $x \mapsto (a | x)$  est égale à  $\varphi$  si, et seulement si, elle coïncide avec  $\varphi$  sur une base. Donc le vecteur  $a$  est solution si, et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (a | e_i) = \varphi(e_i)$$

c'est-à-dire si, et seulement si,  $a = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$  puisque la base est orthonormée. On en déduit

Exo 4.1 qu'il existe un unique vecteur solution :  $a = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$ .

Le théorème de Riesz permet de définir l'adjoint d'un endomorphisme de  $E$ .

### Définition 1

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \mapsto (x \mid u(y))$  est une forme linéaire sur  $E$  donc il existe un unique vecteur, que l'on notera  $u^*(x)$ , vérifiant :

$$\forall y \in E \quad (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y).$$

L'application  $u^*$  définie de  $E$  vers  $E$  est appelée **adjoint** de l'endomorphisme  $u$ .

## 2 Propriétés

### Proposition 2

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $u^* \in \mathcal{L}(E)$ .

Démonstration page 175

### Proposition 3

- L'application  $u \mapsto u^*$  est linéaire sur  $\mathcal{L}(E)$ .

- Pour tout  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ , on a :

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^* \quad \text{et} \quad (u^*)^* = u.$$

Démonstration page 175

**Remarque** De la propriété précédente découle que  $u \mapsto u^*$  est une symétrie de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ .

### Proposition 4

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$ .

Démonstration page 175

**Remarque** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont on note  $\varphi_A$  l'endomorphisme canoniquement. Alors  $(\varphi_A)^*$  est l'endomorphisme canoniquement associé à  $A^T$  car la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormée.

### Corollaire 5

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors on a :

$$\det u^* = \det u, \quad \text{tr } u^* = \text{tr } u \quad \text{et} \quad \text{rg } u^* = \text{rg } u.$$

Exo  
4.2

**Démonstration.** C'est une conséquence de la conservation du déterminant, de la trace et du rang par la transposition des matrices carrées.  $\square$

### Proposition 6

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors on a :

$$\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp.$$

Démonstration page 175

Exo  
4.3

**Remarque** En remplaçant  $u$  par  $u^*$  et en utilisant  $(u^*)^* = u$ , on a aussi :

$$\text{Ker } u = (\text{Im } u^*)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im } u = (\text{Ker } u^*)^\perp.$$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Proposition 7

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ .

Alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

**Démonstration.** Soit  $x \in F^\perp$ . Pour tout  $y \in F$ , on a  $u(y) \in F$  puis :

$$(u^*(x) | y) = (x | u(y)) = 0.$$

On en déduit  $u^*(x) \in F^\perp$ , donc  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .  $\square$

## II Matrices orthogonales

### 1 Définition

#### Définition 2

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est une **matrice orthogonale** si  $A^T A = I_n$ .

**Notation** On note  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{O}(n)$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont on note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes et  $L_1, \dots, L_n$  les lignes (vues comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ).

#### Proposition 8

La matrice  $A$  est orthogonale si, et seulement si, l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i)  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $A^T = A^{-1}$  ;
- (ii) la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base orthonormée ;
- (iii) la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base orthonormée.

Démonstration page 176

**Point méthode** Une famille orthonormée de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  étant évidemment une base de  $\mathbb{R}^n$ , il suffira de vérifier le caractère orthonormé de la famille des colonnes (ou des lignes) d'une matrice carrée pour démontrer que la matrice est orthogonale.

**Ex. 1.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas une matrice orthogonale. En effet, sa deuxième colonne n'est pas unitaire.

**Ex. 2.** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la matrice  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est orthogonale. En effet, les deux colonnes sont évidemment orthogonales et aussi unitaires car :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

**Ex. 3.** La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  étant une base orthonormée, toute matrice obtenue en permutant les colonnes et/ou les lignes de la matrice  $I_n$  est orthogonale.

**Ex. 4.** Si l'un des coefficients d'une matrice orthogonale vaut 1 ou  $-1$ , alors tous les autres coefficients de sa ligne et de sa colonne sont nuls.

La propriété suivante exprime que les matrices de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  sont les matrices de changement de base orthonormée dans n'importe quel espace euclidien de dimension  $n$ .

### Proposition 9

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormée si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

Démonstration page 176

### Définition 3

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont dites **orthogonallement semblables** si :

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad A = PBP^{-1}.$$

**Remarque** Deux matrices qui représentent un même endomorphisme dans deux bases orthonormées sont orthogonallement semblables, d'après les formules de changement de base et la proposition 9.

**Point méthode** Pour montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont orthogonallement semblables, on pourra montrer qu'il existe une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  a pour matrice  $B$ .

Exo  
4.5

## 2 Le groupe orthogonal

**Remarque** Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A^T A = I_n$  puis, par passage au déterminant et conservation du déterminant par la transposition :

$$1 = \det I_n = \det(A^T A) = \det A^T \det A = (\det A)^2.$$

On en déduit  $\det A \in \{1, -1\}$ , ce qui justifie la définition qui suit.

### Définition 4

Une matrice  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est dite :

- **positive**, ou **directe**, si  $\det A = 1$  ;
- **négative**, ou **indirecte**, si  $\det A = -1$ .

**Notation** On note  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , également appelées **matrices de rotations**.

**Ex. 5.** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la matrice  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est orthogonale positive. En effet, les deux colonnes sont évidemment orthogonales et aussi unitaires car :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Comme  $\det R(\theta) = 1$ , on a bien  $R(\theta) \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ .

**Ex. 6.** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  n'est pas une matrice orthogonale (positive). En effet, sa deuxième colonne n'est pas unitaire. En revanche, on a  $\det A = 1$ .

**Attention** Comme le montre l'exemple 6 de la page précédente, ces conditions sur le déterminant ne sont pas des conditions *suffisantes* d'appartenance à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , ou  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ , pour une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Proposition 10

Les ensembles  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-groupes de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Démonstration page 176.

**Terminologie** Ces groupes sont appelés respectivement **groupe orthogonal** d'ordre  $n$  et **groupe spécial orthogonal** d'ordre  $n$ .

## 3 Espaces vectoriels euclidiens orientés

### Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle

Dans cette sous-section,  $E$  désigne un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle. Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$ , le réel  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  est non nul.

On définit sur l'ensemble des bases de  $E$  la relation suivante :

$$\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

Lorsque  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$ , on dit que les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont **même orientation**.

### Proposition 11

La relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $E$ . Elle possède deux classes d'équivalences.

Démonstration page 177.

Choisir une orientation de  $E$ , c'est choisir une classe d'équivalence et donc un représentant  $\mathcal{B}_0$  de cette classe. Fixons une telle base.

### Définition 5

On dit qu'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est :

- **directe** si  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}_0$ , c'est-à-dire si  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  ;
- **indirecte** sinon.

**Remarque** En pratique, dans  $\mathbb{R}^n$ , on choisit toujours la base canonique comme base directe de référence.

### Bases orthonormées directes

Dans cette sous-section, on suppose que  $E$  est un espace euclidien non nul orienté.

### Proposition 12

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormée de même orientation que  $\mathcal{B}$  si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

**Démonstration.** L'équivalence souhaitée résulte des deux propriétés suivantes :

- la base  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormée de  $E$  si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ;
- la base  $\mathcal{B}'$  a même orientation que  $\mathcal{B}$  si, et seulement si,  $\det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ .

On en déduit l'équivalence souhaitée. □

**Remarque** Les matrices orthogonales positives sont donc les matrices de changement de bases orthonormées directes. En particulier,  $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  si, et seulement si, la famille des colonnes de  $A$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^n$ .

### Corollaire 13

Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées directes de  $E$ . Alors, on a :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}.$$

**Démonstration.** On a  $\det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$  donc  $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$  d'après la formule de changement de base pour les déterminants.  $\square$

**Terminologie** Pour  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ , le réel  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ , indépendant de la base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  choisie, est appelé **produit mixte** de  $(u_1, \dots, u_n)$  et parfois noté  $[u_1, \dots, u_n]$ .

## III Endomorphismes autoadjoints

### 1 Généralités

#### Définition 6

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est **autoadjoint** si  $u^* = u$  c'est-à-dire si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x | u(y)) = (u(x) | y).$$

**Notation** L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de  $E$  est noté  $\mathcal{S}(E)$ .

**Terminologie** Un endomorphisme autoadjoint est parfois appelé **endomorphisme symétrique**, ce qui explique la notation  $\mathcal{S}(E)$ .

#### Proposition 14

L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Démonstration.** C'est le noyau de l'application linéaire  $u \mapsto u - u^*$ .  $\square$

#### Proposition 15

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** On a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T$ , car  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée, donc  $u^* = u$  si, et seulement si,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , soit  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Remarque** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique, si bien que la base canonique est une base orthonormée. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$  est autoadjoint si, et seulement si,  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Attention** L'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  n'est en général pas stable par composition. En effet, si  $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$ , on a :

$$v \circ u \in \mathcal{S}(E) \iff (v \circ u)^* = v \circ u \iff u^* \circ v^* = v \circ u \iff u \circ v = v \circ u.$$

Ainsi, la composée  $v \circ u$  est autoadjointe si, et seulement si,  $u$  et  $v$  commutent, et il est facile de trouver un contre-exemple en dimension supérieure ou égale à 2.

### Corollaire 16

L'espace vectoriel  $\mathcal{S}(E)$  est de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ .

L'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{S}(E)$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc :

$$\dim \mathcal{S}(E) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

### Proposition 17

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors l'endomorphisme induit  $u_F$  est autoadjoint.

**Démonstration.** La relation  $(x | u(y)) = (u(x) | y)$  pour tout  $(x, y) \in E^2$  montre que :

$$\forall (x, y) \in F^2 \quad (x | u_F(y)) = (u_F(x) | y). \quad \square$$

### Projecteurs orthogonaux

#### Définition 7

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont **orthogonaux**, et l'on note  $F \perp G$ , si :

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad (x | y) = 0.$$

**Notation** Si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, la somme  $F + G$  est une somme directe que l'on peut noter  $F \overset{\perp}{\oplus} G$ .

#### Proposition 18

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors :

- $F \perp G$  si, et seulement si,  $G \subset F^\perp$  ;
- si  $E = F \oplus G$ , on a :

$$F \perp G \iff G = F^\perp.$$

Démonstration page 177

#### Définition 8

Soit  $p$  un projecteur de  $E$ . On dit que  $p$  est un **projecteur orthogonal** si  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux.

**Remarque** Si  $p$  est un projecteur orthogonal, on a la décomposition :

$$E = \text{Im } p \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker } p \quad \text{donc} \quad \text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp.$$

**Proposition 19**

Un projecteur de  $E$  est un projecteur orthogonal si, et seulement s'il est autoadjoint.

Démonstration page 177

**Remarque** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . L'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est un projecteur orthogonal de  $\mathbb{R}^n$  si, et seulement si,  $A^2 = A$  et  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

## 2 Réduction des endomorphismes autoadjoints

**Lemme 20**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie non nulle.

Alors il existe une droite ou un plan stable par  $u$ .

Démonstration page 177

**Principe de démonstration.** Utiliser un facteur irréductible d'un polynôme annulateur de  $u$ .

**Proposition 21**

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la proposition 7 de la page 160 et du fait que  $u^* = u$ .  $\square$

**Proposition 22**

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration page 178

Dans le théorème suivant et dans le reste du chapitre,  $E_\lambda(u)$  désigne le sous-espace propre de l'endomorphisme  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Théorème 23 (Théorème spectral)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $u$  est autoadjoint ;

(ii)  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda(u)$  ;

(iii) il existe une base orthonormée de  $E$  diagonalisant  $u$ .

Démonstration page 178

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Ex. 7.** Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

Utilisons le théorème spectral pour expliciter les extrema de  $x \mapsto (x | u(x))$  sur la sphère unité de  $E$ . Notons  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la liste croissante des valeurs propres de  $u$  comptées avec multiplicité ainsi que  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres associés respectivement

à  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Pour  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$  un vecteur unitaire, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1, \quad (x | u(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_1 x_k^2 \leq \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_n x_k^2.$$

Par somme, on obtient  $\lambda_1 \leq (x | u(x)) \leq \lambda_n$ .

De plus,  $(e_1 | u(e_1)) = \lambda_1$  et  $(e_n | u(e_n)) = \lambda_n$  donc :

Exo  
4.9

$$\min_{\|x\|=1} (x | u(x)) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \max_{\|x\|=1} (x | u(x)) = \lambda_n.$$

### Corollaire 24

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique si, et seulement si, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

**Démonstration.** On applique le théorème spectral à l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$ .  $\square$

**Remarque** Le corollaire 24 fournit une condition suffisante extrêmement simple de diagonalisabilité d'une matrice réelle : il suffit qu'elle soit symétrique.

**Attention** On aura garde de croire que ce résultat reste vrai pour les matrices complexes : la matrice complexe symétrique  $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$  est nilpotente, non nulle, donc n'est pas diagonalisable.

**Ex. 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .

- On a  $\operatorname{rg} A = 1$  donc 0 est valeur propre de multiplicité 2 puisque  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Le noyau de  $A$  est le plan d'équation  $x + y + z = 0$  dont  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormée, avec :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Par ailleurs,  $\operatorname{tr} A = 3$  donc 3 est la dernière valeur propre et  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre unitaire associé.
- On pose  $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  la matrice dont les colonnes sont  $(e_1, e_2, e_3)$  et, par les formules de changements de bases, on a :

Exo  
4.11

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{Diag}(0, 0, 3) \quad \text{et} \quad P^{-1} = P^T.$$

### 3 Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs

#### Définition 9

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ .

- On dit que  $u$  est **autoadjoint positif** si :

$$\forall x \in E \quad (x \mid u(x)) \geqslant 0.$$

- On dit que  $u$  est **autoadjoint défini positif** si :

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad (x \mid u(x)) > 0.$$

**Notation** L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (respectivement définis positifs) de  $E$  est noté  $\mathcal{S}^+(E)$  (respectivement  $\mathcal{S}^{++}(E)$ ).

**Remarque** Si  $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ , alors l'application :

$$(x, y) \mapsto (x \mid u(y))$$

est un produit scalaire sur  $E$ .

**Ex. 9.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$ .

En effet, on a  $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$  donc  $u^* \circ u \in \mathcal{S}(E)$ .

Par ailleurs, pour tout  $x \in E$ , on a :

$$(x \mid u^*(u(x))) = (u(x) \mid u(x)) = \|u(x)\|^2 \geqslant 0.$$

**Ex. 10.** L'exemple précédent et le fait qu'un endomorphisme de  $E$  est bijectif si, et seulement si, son noyau est nul montre que  $u^* \circ u \in \mathcal{S}^{++}(E)$  si, et seulement si,  $u \in \mathcal{GL}(E)$ .

La propriété suivante fournit une caractérisation des endomorphismes autoadjoints (définis) positifs à l'aide de leur spectre.

#### Proposition 25

Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$ . On a les équivalences suivantes :

$$u \in \mathcal{S}^+(E) \iff \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Démonstration page 178

#### Principe de démonstration.

Calculer  $(x \mid u(x))$  en décomposant  $x$  sur une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$ .

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. En appliquant les définitions et caractérisations qui précèdent à l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à une matrice, on obtient les définitions suivantes.

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Définition 10

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $A$  est une matrice :

- **symétrique positive** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x | Ax) \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+;$$

- **symétrique définie positive** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x | Ax) > 0 \quad \text{ou encore} \quad \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

**Notation** On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices respectivement symétriques positives et symétriques définies positives.

**Ex. 11.** La matrice nulle est une matrice symétrique positive.

**Ex. 12.** Par caractérisation par le spectre, si une matrice symétrique est définie positive, elle a une trace et un déterminant strictement positifs. La réciproque est fausse lorsque  $n \geq 3$  comme le montre l'exemple de la matrice  $\text{Diag}(-1, -1, 3, \dots, 3)$ .

**Ex. 13.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad a_{i,i} = (e_i | Ae_i).$$

Une matrice symétrique (définie) positive a donc tous ses coefficients diagonaux (strictement) positifs.

**Ex. 14.** Soit  $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ . Montrons que :

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{tr } A > 0 \quad \text{et} \quad \det A > 0.$$

La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Notons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines réelles éventuellement confondues du polynôme caractéristique de  $A$ . On a alors :

$$\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

- Supposons  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ . Alors,  $\text{sp } A \subset \mathbb{R}_+^*$  donc :

$$\text{tr } A > 0 \quad \text{et} \quad \det A > 0.$$

- Supposons  $\text{tr } A > 0$  et  $\det A > 0$ . Alors :

$$\lambda_1 + \lambda_2 > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 > 0.$$

La deuxième relation montre que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe strict. La première relation montre alors que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont strictement positifs. Donc  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

Exo  
4.12

Exo  
4.13

Exo  
4.14

## IV Isométries vectorielles

### 1 Généralités

#### Définition 11

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est une **isométrie vectorielle** si :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exo  
4.19

**Notation** On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ .

**Proposition 26**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u \in \mathcal{O}(E)$  ;
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) | u(y)) = (x | y)$  ;
- (iii)  $u \in \mathcal{GL}(E)$  et  $u^{-1} = u^*$  ;
- (iv)  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  ;
- (v) La famille  $u(\mathcal{B})$  est une base orthonormée de  $E$ .

Démonstration page 179

**Terminologie** Une isométrie étant un élément de  $\mathcal{GL}(E)$ , on parle parfois d'**automorphisme orthogonal** pour désigner un tel élément, ce qui explique la notation  $\mathcal{O}(E)$ .

**Proposition 27**

Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Alors,  $\det u \in \{-1, 1\}$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence directe du point (iv) de la proposition 26 et de la remarque de la page 161.  $\square$

**Définition 12**

Une isométrie vectorielle  $u \in \mathcal{O}(E)$  est dite :

- **positive ou directe** si  $u$  est de déterminant 1 ;
- **négative ou indirecte** si  $u$  est de déterminant  $-1$ .

**Notation** On note  $\mathcal{SO}(E)$  l'ensemble des isométries positives de  $E$ , aussi appelées **rotations** de  $E$ .

**Proposition 28**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors on a :

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** Puisque  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée, on a les équivalences suivantes :

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff \begin{cases} u \in \mathcal{O}(E) \\ \det u = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 1 \end{cases} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

$\square$

**Conséquence** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . La matrice  $A$  est orthogonale (respectivement orthogonale positive) si, et seulement si, l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  est une isométrie (respectivement isométrie directe).

**Proposition 29**

Les ensembles  $\mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{SO}(E)$  sont des sous-groupes de  $\mathcal{GL}(E)$ .

Démonstration page 180

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Terminologie** Les groupes  $\mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{SO}(E)$  sont appelés respectivement **groupe orthogonal de  $E$**  et **groupe spécial orthogonal de  $E$** .

Dans la propriété suivante, on suppose que  $E$  est orienté par le choix d'une base directe de référence.

### Proposition 30

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe de  $E$ . Alors  $u \in \mathcal{SO}(E)$  si, et seulement si, l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$  est une base orthonormée directe de  $E$ .

### Démonstration.

- Supposons  $u \in \mathcal{SO}(E)$ . Comme  $u$  est une isométrie vectorielle,  $u$  envoie la base orthonormée  $\mathcal{B}$  sur une base orthonormée. Par ailleurs,  $\det u > 0$  donc l'endomorphisme  $u$  conserve l'orientation des bases. Ainsi, l'image de  $\mathcal{B}$  par  $u$  est une base orthonormée directe de  $E$ .
- Supposons que  $u$  envoie la base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  sur une base orthonormée directe  $\mathcal{B}'$ . Comme  $u$  envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, on a  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Par ailleurs,  $\det u = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$  donc  $\det u = 1$ , ce qui conclut.  $\square$

## Symétries orthogonales

### Définition 13

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

### Terminologie

- Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée **réflexion**.
- Lorsque  $F$  est une droite, la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  est appelée **symétrie d'axe  $F$** .

### Proposition 31

Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie orthogonale. Alors  $s \in \mathcal{O}(E)$ .

Démonstration page 180.

**Ex. 15.** Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  une réflexion par rapport à un hyperplan  $H$ . En considérant une base orthonormée  $\mathcal{B}$  adaptée à la décomposition  $E = H^\perp \oplus H^\perp$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det s = -1.$$

Par ailleurs,  $s$  est une isométrie vectorielle puisque c'est une symétrie orthogonale.

Une réflexion est donc une isométrie indirecte.

**Ex. 16.** Soit  $s$  une symétrie de  $E$  vérifiant  $s \in \mathcal{O}(E)$ . Alors on a :

$$s^2 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad s^* \circ s = \text{Id}_E \quad \text{donc} \quad s = s^*.$$

Comme  $s$  est un endomorphisme autoadjoint, les sous-espaces propres  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  sont orthogonaux, donc  $s$  est une symétrie orthogonale.

## 2 Isométries en dimension 2

**Proposition 32**

Soit  $A \in M_2(\mathbb{R})$ .

- $A \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .
- $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

Démonstration page 180

**Proposition 33**

L'application suivante :

$$\begin{aligned} R : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (SO_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes surjectif de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$ .

Démonstration page 180

**Proposition 34**

Le groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  est commutatif et isomorphe à  $\mathbb{U}$ .

Démonstration page 180

Dans le reste de cette section,  $E$  désigne un plan euclidien orienté, c'est-à-dire un espace euclidien de dimension 2 que l'on oriente par le choix d'une base directe de référence.

**Proposition 35**

Soit  $u \in SO(E)$ . Il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , unique modulo  $2\pi$ , tel que pour toute base orthonormée directe  $\mathcal{B}$  on ait :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration page 181

**Terminologie** Un tel élément de  $SO(E)$  est appelé **rotation d'angle  $\theta$** .

**Remarque** Si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base orthonormée indirecte de  $E$  et  $u$  une rotation d'angle  $\theta$ , alors  $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2)$  est une base orthonormée directe de  $E$ , donc on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = R(\theta)$  puis  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(-\theta)$  par vérification immédiate.

**Proposition 36**

Le groupe  $SO(E)$  est commutatif et isomorphe à  $\mathbb{U}$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence directe de la proposition 34.  $\square$

**Remarque** Soit  $(u, v) \in SO(E)^2$  deux rotations d'angles respectifs  $\theta$  et  $\theta'$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée directe de  $E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta'),$$

donc  $u \circ v$  est la rotation d'angle  $\theta + \theta'$ .

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Proposition 37

Soit  $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ . Alors  $u$  est une réflexion de  $E$ .

Démonstration page 181

### Angles orientés de vecteurs dans $E$

### Proposition 38

Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs unitaires de  $E$ . Il existe une unique rotation  $u \in \mathcal{SO}(E)$  telle que  $u(x) = y$ .

Démonstration page 181

### Définition 14

Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls du plan  $E$ .

- Il existe une unique rotation  $u$  telle que  $u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$ .
- L'angle de cette rotation est appelé **angle orienté des vecteurs  $x$  et  $y$** .

**Notation** L'angle orienté des vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  est noté  $(x, y)$ .

### Proposition 39 (Relation de Chasles)

Soit  $(x, y, z) \in E^3$  trois vecteurs non nuls. Alors on a :

$$(x, z) = (x, y) + (y, z) [2\pi].$$

Démonstration page 181

## 3 Réduction des isométries vectorielles

### Proposition 40

L'endomorphisme induit sur un sous-espace vectoriel stable par une isométrie vectorielle est aussi une isométrie vectorielle.

**Démonstration.** La propriété de conservation de la norme reste vraie par restriction à un sous-espace stable.  $\square$

### Proposition 41

Soit  $u$  une isométrie vectorielle et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

Démonstration page 182

**Principe de démonstration.** Montrer que  $F^\perp$  est stable par  $u^{-1}$  puis utiliser les dimensions.

### Théorème 42

Soit  $u$  une isométrie vectorielle. Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux :

- de taille 1 de la forme  $(\gamma)$  avec  $\gamma \in \{-1, 1\}$  ;
- de taille 2 et de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration page 182

Autrement dit, la matrice d'une isométrie dans une telle base orthonormée peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ -I_q & R(\theta_1) & & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r.$$

Exo  
4.20

**Conséquence** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice de la forme précédente.

### Rotations en dimension 3

Dans le reste de cette section,  $E$  désigne un espace euclidien de dimension 3 que l'on oriente par le choix d'une base directe de référence.

#### Proposition 43

Si  $u \in \mathcal{SO}(E)$ , alors il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Démonstration page 182

**Conséquence** On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

#### Corollaire 44

Exo  
4.21

Si  $u$  est une isométrie vectorielle directe de  $E$ , il existe une droite  $D$  et un plan  $P$  orthogonal à  $D$  tel que  $u|_D = \text{Id}_D$  et tel que  $u|_P$  soit une rotation.

**Démonstration.** D'après la proposition 43, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

On définit la droite  $D$  et le plan  $P$  par :

$$D = \text{Vect}(e_1) \quad \text{et} \quad P = \text{Vect}(e_2, e_3).$$

Par construction,  $D$  et  $P$  sont orthogonaux,  $u|_D = \text{Id}_D$  et  $u|_P$  est une rotation du plan  $P$  car sa matrice dans la base orthonormée  $(e_2, e_3)$  est la matrice de rotation  $R(\theta)$ .  $\square$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Remarques

- On dit qu'une telle isométrie vectorielle directe de  $E$  est une **rotation** d'angle  $\theta$ . L'angle  $\theta$  de la rotation peut être déterminé, au signe près, par  $\text{tr}(u) = 1 + 2 \cos \theta$ .
- Si  $u \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$  est une isométrie indirecte, alors  $-u \in \mathcal{SO}(E)$ . En effet,  $u$  conserve la norme donc  $-u$  également et donc  $-u \in \mathcal{O}(E)$ . Par ailleurs,  $\det(-u) = (-1)^3 \det u = 1$ .

D'après la proposition 43 de la page précédente, il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(-u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta + \pi) \end{pmatrix}.$$

Exo  
4.22

## Démonstrations

**Proposition 2** Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall e \in E \quad (x + \lambda y \mid u(e)) &= (x \mid u(e)) + \lambda(y \mid u(e)) && (\text{bilinéarité du produit scalaire}) \\ &= (u^*(x) \mid e) + \lambda(u^*(y) \mid e) && (\text{définition de l'adjoint}) \\ &= (u^*(x) + \lambda u^*(y) \mid e). && (\text{bilinéarité du produit scalaire}) \end{aligned}$$

On en déduit  $u^*(x + \lambda y) = u^*(x) + \lambda u^*(y)$  par définition de l'adjoint.

**Proposition 3** Fixons  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Soit  $x \in E$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall y \in E \quad (x \mid (u + \lambda v)(y)) &= (x \mid u(y)) + \lambda(x \mid v(y)) && (\text{bilinéarité du produit scalaire}) \\ &= (u^*(x) \mid y) + \lambda(v^*(x) \mid y) && (\text{définition de l'adjoint}) \\ &= ((u^* + \lambda v^*)(x) \mid y). && (\text{bilinéarité du produit scalaire}) \end{aligned}$$

On en déduit  $(u + \lambda v)^*(x) = (u^* + \lambda v^*)(x)$  par définition de l'adjoint, donc  $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$ .

- Soit  $x \in E$ . On a :

$$\forall y \in E \quad (u^*(v^*(x)) \mid y) = (v^*(x) \mid u(y)) = (x \mid v(u(y))),$$

ce qui montre que  $(v \circ u)^*(x) = u^*(v^*(x))$  pour tout  $x \in E$  donc  $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ .

On a aussi :

$$\forall y \in E \quad (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y)),$$

ce qui montre que  $u(x) = (u^*)^*(x)$  pour tout  $x \in E$  donc  $(u^*)^* = u$ .

**Proposition 4** Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$ .

Par expression des coordonnées dans une base orthonormée et définition de l'adjoint, on a :

$$b_{i,j} = (u^*(e_j) \mid e_i) = (e_j \mid u(e_i)) = a_{j,i}.$$

On en déduit  $B = A^T$ .

### Proposition 6

- Soit  $x \in E$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } u^* &\iff u^*(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in E \quad (u^*(x) \mid y) = 0 \\ &\iff \forall y \in E \quad (x \mid u(y)) = 0 \\ &\iff \forall z \in \text{Im } u \quad (x \mid z) = 0 \\ &\iff x \in (\text{Im } u)^\perp. \end{aligned}$$

- En passant à l'orthogonal dans l'égalité  $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$ , on obtient  $\text{Im } u = (\text{Ker } u^*)^\perp$ . Vu que  $u^* \in \mathcal{L}(E)$ , on peut remplacer  $u$  par  $u^*$  dans cette égalité. En observant que  $(u^*)^* = u$ , il vient  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ .

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Proposition 8

- Par caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée, on a directement :

$$A^T A = I_n \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^T = A^{-1}.$$

- Les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (A^T A)_{i,j} = \delta_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (C_i \mid C_j) = \delta_{i,j} \end{aligned}$$

montrent que  $A$  est une matrice orthogonale si, et seulement si, la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base orthonormée.

- Enfin,  $(L_1, \dots, L_n)$  étant la famille des colonnes de  $A^T$ , d'après le point précédent, c'est une base orthonormée si, et seulement si,  $A^T \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  c'est-à-dire si, et seulement si,  $AA^T = I_n$ . Par caractérisation de l'inversibilité, on retrouve la propriété (i) qui caractérise que  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 9** Posons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  ainsi que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ . En utilisant l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  et en notant  $(C_1, \dots, C_n)$  les colonnes de  $A$ , on obtient que  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormée de  $E$  si, et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j} \quad \text{c'est-à-dire} \quad C_i^T C_j = \delta_{i,j}.$$

Cette dernière propriété traduit le fait que  $(C_1, \dots, C_n)$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , ou encore que  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 10** Montrons que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-groupes de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- On a déjà les inclusions  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .
- Ensuite,  $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  puisque  $I_n^T I_n = I_n^2 = I_n$  et  $I_n \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  car  $\det I_n = 1$ .
- Soit  $(A, B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ .

\* Par propriété de la transposition, on a :

$$\begin{aligned} (A^{-1}B)^T A^{-1}B &= B^T (A^{-1})^T A^{-1}B \\ &= B^{-1} A A^{-1} B = I_n, \quad (A^T = A^{-1} \quad \text{et} \quad B^T = B^{-1}) \end{aligned}$$

donc  $A^{-1}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

\* Si de plus,  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ , on a aussi :

$$\det(A^{-1}B) = (\det A)^{-1} \det B = 1$$

puisque  $\det A = 1$  et  $\det B = 1$ . Donc  $A^{-1}B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque** L'application  $\det$  permet de définir un morphisme de groupes de  $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$  sur  $(\mathbb{R}^*, \times)$  et  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$  est le noyau de ce morphisme.

**Proposition 11** La relation  $\mathcal{R}$  est :

réflexive car pour toute base  $\mathcal{B}$ , on a  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ , donc  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}$  ;

symétrique car pour toutes bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , les réels  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  et  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$  sont non nuls et inverses l'un de l'autre, donc de même signe strict ;

transitive car pour toutes bases  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$ , on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$$

donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$  est un réel strictement positif dès que  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}' \mathcal{R} \mathcal{B}''$ .

Choisissons une base  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  et posons  $\mathcal{B}'_0 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors deux alternatives sont possibles :

- $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  donc  $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}_0$  ;
- ou  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$  et dans ce cas, on a :

$$\det_{\mathcal{B}'_0}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}'_0}(\mathcal{B}_0) \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = -\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0 \quad \text{donc } \mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}'_0.$$

Les bases  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'_0$  ne sont pas en relation car  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}'_0) = -1 < 0$  donc la relation  $\mathcal{R}$  possède exactement deux classes d'équivalences.

**Proposition 18**

- Le premier point est une conséquence directe des définitions.
- Supposons  $E = F \oplus G$ .

**Sens direct** Supposons  $F \perp G$ . Déjà, on a  $G \subset F^\perp$ . Ensuite, si  $x \in F^\perp$ , on peut noter  $x = a + b$  sa décomposition sur la somme directe  $F \oplus G$ . Comme  $b \in G \subset F^\perp$ , on a  $x - b \in F^\perp$  donc  $(a | a) = (x - b | a) = 0$  puis  $a = 0$  et enfin,  $x = b \in G$ .

**Sens réciproque** C'est une conséquence immédiate du premier point.

**Proposition 19** Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .

- Supposons que  $p$  soit un projecteur orthogonal. Soit  $(x, y) \in E^2$ . On a :

$$(p(x) | y) = (p(x) | p(y) + y - p(y)) = (p(x) | p(y))$$

puisque  $p(x)$  appartient à  $\text{Im } p$  et  $y - p(y)$  à  $\text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$ .

Le résultat étant symétrique en  $(x, y)$ , on en déduit :

$$(p(x) | y) = (p(y) | x) = (x | p(y)),$$

ce qui montre que  $p$  est autoadjoint.

- Si  $p$  est un projecteur autoadjoint, alors pour tout  $(x, y) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$ , on a :

$$(x | y) = (x | p(y)) = (p(x) | y) = (0 | y) = 0.$$

Ainsi,  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux, ce qui prouve que  $p$  est un projecteur orthogonal.

**Lemme 20** Comme  $u$  possède un polynôme annulateur dans  $\text{IR}[X]$ , il existe des polynômes unitaires  $P_1, \dots, P_r$  de degré 1 ou 2 tels que :

$$(P_1 \dots P_r)(u) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad P_1(u) \circ \dots \circ P_r(u) = 0,$$

avec  $r \geq 1$  puisque  $E \neq \{0\}$ .

Parmi les endomorphismes  $P_1(u), \dots, P_r(u)$  l'un d'entre eux est donc non injectif. Sans perdre de généralité, on suppose qu'il s'agit de  $P_1(u)$  et l'on considère  $x \in \text{Ker } P_1(u)$  non nul.

Comme  $P_1$  est de degré inférieur ou égal à 2, on a  $u^2(x) \in \text{Vect}(x, u(x))$ . Par conséquent,  $\text{Vect}(x, u(x))$  est une droite ou un plan stable par  $u$ .

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Proposition 22** Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs propres d'un endomorphisme autoadjoint  $u$  associés à des valeurs propres différentes  $\lambda$  et  $\mu$ . On a alors :

$$\lambda(x \mid y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = \mu(x \mid y)$$

donc  $(\lambda - \mu)(x \mid y) = 0$ , puis  $(x \mid y) = 0$ , car  $\lambda - \mu \neq 0$ , ce qui prouve que les vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux.

**Théorème 23** On commence par le lemme suivant.

### Lemme

Tout endomorphisme autoadjoint  $u$  d'un espace euclidien  $E$  de dimension 1 ou 2 possède un vecteur propre.

**Démonstration.** Il suffit de montrer que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ . Le résultat est évident si l'espace est une droite. Supposons  $E$  de dimension 2 et fixons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est une matrice symétrique réelle que

l'on peut noter  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . On a ensuite  $\chi_u(X) = X^2 - (a+c)X + (ac-b^2)$ , polynôme du second degré de discriminant :

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0,$$

donc scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ . □

Passons à la démonstration du théorème spectral.

- La propriété (ii) implique la propriété (iii) : il suffit de choisir une base orthonormée adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}^{\perp} E_{\lambda}(u)$ .
- Si l'on suppose (iii), alors il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  soit diagonale et en particulier symétrique. D'après la proposition 15 de la page 163, on en déduit que  $u^* = u$ .
- Supposons (i). Le sous-espace vectoriel  $G = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_{\lambda}(u)$  est stable par  $u$ . Son supplémentaire orthogonal  $G^{\perp}$  l'est aussi d'après la proposition 21 de la page 165.

L'endomorphisme  $u'$  induit par  $u$  sur  $G^{\perp}$  est autoadjoint. Si  $G^{\perp}$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ , l'endomorphisme autoadjoint  $u'$  possède une droite ou un plan stable (cf. lemme 20 de la page 165), donc au moins un vecteur propre (d'après le lemme ci-dessus), ce qui contredit  $G \cap G^{\perp} = \{0\}$  puisque tout vecteur propre de  $u'$  appartient aussi à  $G$ . Il vient alors  $G^{\perp} = \{0\}$  puis  $G = E$ .

**Proposition 25** Fixons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres de  $u$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres associées. Soit  $x \in E$  que l'on écrit :

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Alors, on a  $u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k$  puis, d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$(x \mid u(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2.$$

- Supposons  $u \in \mathcal{S}^+(E)$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en prenant  $x = e_j$  dans ce qui précède, il vient :

$$(e_j \mid u(e_j)) = \lambda_j \quad \text{donc} \quad \lambda_j \geq 0.$$

Si  $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ , comme le vecteur  $e_j$  est non nul, on a  $\lambda_j > 0$ .

- Réciproquement, si l'on suppose que  $\text{sp } u \subset \mathbb{R}_+$ , on a immédiatement  $(x \mid u(x)) \geq 0$ , avec égalité si, et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_k x_k^2 = 0.$$

Ainsi, en supposant que  $\text{sp } u \subset \mathbb{R}_+^*$ , on a  $(x \mid u(x)) > 0$  dès que le vecteur  $x$  est non nul.

### Proposition 26

- Supposons (i) et montrons (ii). D'après une identité de polarisation, on a pour tout  $(x, y) :$

$$\begin{aligned} (u(x) \mid u(y)) &= \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad (\text{conservation de la norme}) \\ &= (x \mid y). \quad (\text{identité de polarisation}) \end{aligned}$$

- Supposons (ii) et montrons (iii). Soit  $y \in E$ . On a pour tout  $x \in E :$

$$(x \mid (u^* \circ u)(y)) = (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) \quad \text{donc} \quad (x \mid (u^* \circ u)(y) - y) = 0,$$

ce qui prouve  $(x \mid (u^* \circ u)(y) - y) = 0$  puis  $(u^* \circ u)(y) = y$ . On en déduit  $u^* \circ u = \text{Id}_E$  puis, par caractérisation de l'inversibilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on a :

$$u \in \mathcal{GL}(E) \quad \text{et} \quad u^{-1} = u^*.$$

- Supposons (iii) et montrons (iv).

On a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^* u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$  puis  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = I_n$  et enfin :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = I_n,$$

ce qui montre que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

- Supposons (iv) et montrons (v). Alors, la matrice de la famille  $u(\mathcal{B})$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  est une matrice orthogonale. D'après la proposition 9 de la page 161,  $u(\mathcal{B})$  est une base orthonormée de  $E$ .

- Supposons (v) et montrons (i). On pose  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Soit  $x \in E$  dont on note  $(x_1, \dots, x_n)$  la famille des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

Par expression de la norme dans une base orthonormée, on a :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On a aussi  $u(x) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k)$  et, par expression de la norme dans la base orthonormée  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ , il vient :

$$\|u(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \|x\|,$$

ce qui conclut.

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Proposition 29** L'application  $\text{Mat}_B^{-1}$  est un isomorphisme de groupes de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  vers  $\mathcal{GL}(E)$  qui envoie le sous-groupe  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ) sur  $\mathcal{O}(E)$  (respectivement  $\mathcal{SO}(E)$ ). Comme l'image d'un sous-groupe est un sous-groupe,  $\mathcal{O}(E)$  et  $\mathcal{SO}(E)$  sont des sous-groupes de  $\mathcal{GL}(E)$ .

**Proposition 31** Soit  $x \in E$  dont on note  $x = a + b$  la décomposition sur  $F \oplus F^\perp$ . On a alors  $s(x) = a - b$  puis, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|s(x)\|^2 = \|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a + b\|^2 = \|x\|^2.$$

Par positivité de la norme, on a  $\|s(x)\| = \|x\|$  donc  $s \in \mathcal{O}(E)$ .

### Proposition 32

- Soit  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ . Par orthogonalité des colonnes, il vient  $ac + bd = 0$  qui se réécrit  $\begin{vmatrix} -b & c \\ a & d \end{vmatrix} = 0$ . Comme la première colonne de ce déterminant est non nulle (car unitaire), il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $(c, d) = \lambda(-b, a)$ . Par passage à la norme, il vient  $|\lambda| = 1$  donc  $(c, d) = \pm(-b, a)$  et :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Dans le premier cas, on a  $\det A = a^2 + b^2 = 1$  et dans le second cas, on a  $\det A = -1$ . Par ailleurs, comme  $a^2 + b^2 = 1$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  (unique modulo  $2\pi$ ) tel que  $a = \cos \theta$  et  $b = \sin \theta$  donc :

- \* si  $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ , alors on est dans le premier cas et  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ;
- \* si  $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ , alors on est dans le second cas et  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

- Les deux sens réciproques sont des vérifications immédiates.

### Proposition 33

- Soit  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ . Un calcul direct utilisant les formules d'addition donne :

$$R(\theta)R(\theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} = R(\theta + \theta'),$$

ce qui montre que  $R$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  sur  $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ .

- La surjectivité découle de la proposition 32 de la page 171.
- Un réel  $\theta$  appartient au noyau de  $R$  si, et seulement si,  $R(\theta) = I_2$  c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\cos \theta = 1 \quad \text{et} \quad \sin \theta = 0,$$

soit  $\theta \equiv 0 [2\pi]$ . Ainsi,  $\text{Ker } R = 2\pi\mathbb{Z}$ .

### Proposition 34

- Soit  $(A, B) \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})^2$ . Il existe  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  tels que  $A = R(\theta)$  et  $B = R(\theta')$ . On a alors :

$$AB = R(\theta + \theta') = R(\theta' + \theta) = BA.$$

- Posons  $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \left( \begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right) & \longmapsto & a + ib. \end{matrix}$

La fonction  $\varphi$  est bien définie, injective et surjective.

Soit  $A = \left( \begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right)$  et  $B = \left( \begin{array}{cc} c & -d \\ d & c \end{array} \right)$  deux matrices orthogonales positives. Alors on a :

$$AB = \left( \begin{array}{cc} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{array} \right) \quad \text{et} \quad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad),$$

ce qui achève de montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de groupes.

**Proposition 35** Soit  $\mathcal{B}_0$  une base orthonormée directe de  $E$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}_0$  appartient à  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ , donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  (unique modulo  $2\pi$ ) tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = R(\theta)$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée directe de  $E$ , la matrice  $P$  de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$  est aussi dans  $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ . Comme ce groupe est commutatif, on en déduit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}R(\theta)P = R(\theta).$$

**Proposition 37** Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$  donc est de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{cc} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{array} \right) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}).$$

On a donc  $\chi_u = X^2 - 1$  et  $u \in \mathcal{S}(E)$ . Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc  $u$  est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1, et orthogonaux car  $u \in \mathcal{S}(E)$ . On a donc :

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \dim \text{Ker}(u + \text{Id}_E) = 1.$$

Ainsi,  $u$  est une symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ .

### Proposition 38

**Existence.** Le vecteur  $x$  est unitaire donc il existe  $e_2 \in E$  tel que  $(x, e_2)$  soit une base orthonormée de  $E$ . Quitte à remplacer  $e_2$  par  $-e_2$ , on peut supposer que  $(x, e_2)$  est une base orthonormée directe de  $E$ . De même, il existe  $e'_2 \in E$  tel que  $(y, e'_2)$  soit une base orthonormée directe de  $E$ . L'unique endomorphisme  $u$  de  $E$  qui envoie la base orthonormée directe  $(x, e_2)$  sur la base orthonormée directe  $(y, e'_2)$  est un élément de  $\mathcal{SO}(E)$  et vérifie  $u(x) = y$ .

**Unicité.** Comme dans la partie existence, fixons  $\mathcal{B} = (x, e_2)$  une base orthonormée directe de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{SO}(E)$  tel que  $u(x) = y$ . Notons  $\theta$  l'angle de cette rotation et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y = ax + be_2$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée directe de  $E$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$  donc  $y = \cos \theta x + \sin \theta e_2$  puis  $\cos \theta = a$  et  $\sin \theta = b$ , ce qui détermine l'angle  $\theta$  de façon unique modulo  $2\pi$  et achève la preuve de l'unicité.

**Proposition 39** Notons  $u$  et  $v$  les rotations du plan qui envoient respectivement  $\frac{x}{\|x\|}$  sur  $\frac{y}{\|y\|}$  et  $\frac{y}{\|y\|}$  sur  $\frac{z}{\|z\|}$ .

Alors  $v \circ u \in \mathcal{SO}(E)$  et cette rotation envoie  $\frac{x}{\|x\|}$  sur  $\frac{z}{\|z\|}$ .

Par ailleurs, si  $u$  est d'angle  $\theta$  et  $v$  d'angle  $\theta'$ , alors  $v \circ u$  est la rotation d'angle  $\theta + \theta'$ , ce qui conclut.

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**Proposition 41** Supposons  $F$  stable par  $u$ . Comme  $u \in \mathcal{O}(E)$ , on a  $u^{-1} = u^*$  donc  $F^\perp$  est stable par  $u^{-1}$  (cf. proposition 7 de la page 160). On en déduit  $u^{-1}(F^\perp) \subset F^\perp$  puis  $F^\perp \subset u(F^\perp)$ . Comme  $u$  est un isomorphisme,  $u(F^\perp)$  et  $F^\perp$  ont même dimension finie. Par inclusion et égalité des dimensions, il vient  $u(F^\perp) = F^\perp$  et en particulier,  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

**Théorème 42** On va démontrer le résultat par récurrence sur la dimension de  $E$ .

Si  $E$  est de dimension 1, alors le résultat est trivial.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat vrai pour toute isométrie d'un espace euclidien de dimension inférieure ou égale à  $n-1$  et considérons  $u$  une isométrie d'un espace euclidien de dimension  $n$ .

- Supposons que  $u$  possède une valeur propre réelle  $\lambda$ .

Soit  $e_1$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . On a alors  $E = \mathbb{R}e_1 \bigoplus (\mathbb{R}e_1)^\perp$ . Comme  $\mathbb{R}e_1$  est stable par l'isométrie  $u$ , son orthogonal aussi.

Par hypothèse de récurrence, comme l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $(\mathbb{R}e_1)^\perp$  est une isométrie, il existe une base orthonormée de  $(\mathbb{R}e_1)^\perp$  dans laquelle sa matrice est de la forme annoncée. Il suffit de la compléter avec  $\frac{e_1}{\|e_1\|}$  pour obtenir une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme annoncée. En effet,  $u$  étant une isométrie,  $\lambda = \pm 1$ .

- Supposons que  $u$  ne possède pas de valeur propre réelle. Alors  $u$  possède un plan stable  $P$  (cf. lemme 20 de la page 165). Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $P$  et  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $P$ . La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est alors une matrice de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  sans valeur propre réelle.

Or, d'après la proposition 32 de la page 171, les matrices de  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$  sont de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comme  $u$  ne possède pas de valeur propre réelle,  $\tilde{u}$  non plus et ce n'est donc pas une symétrie. On en déduit que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme  $R(\theta)$  avec  $\sin \theta \neq 0$ .

Par hypothèse de récurrence, comme l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $P^\perp$  est une isométrie, il existe une base orthonormée de  $P^\perp$  dans laquelle sa matrice est de la forme annoncée. Il suffit de la compléter avec une base orthonormée de  $P$  pour obtenir une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme annoncée.

**Proposition 43** D'après le théorème de réduction des isométries vectorielles (cf. théorème 42 de la page 172), il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & (0) & & \\ & -I_q & & & & \\ & & R(\theta_1) & & & \\ (0) & & & \ddots & & \\ & & & & R(\theta_r) & \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r.$$

Pour la disjonction de cas qui suit, on observe que  $p+q+2r=3$  et que  $(-1)^q = \det u = 1$  donc  $q$  est un entier pair puis  $(p, q, r) \in \{(3, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 0)\}$ .

- Si  $(p, q, r) = (3, 0, 0)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(0) \end{pmatrix}$ .
- Si  $(p, q, r) = (1, 0, 1)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta_1) \end{pmatrix}$ .
- Si  $(p, q, r) = (1, 2, 0)$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\pi) \end{pmatrix}$ .

## S'entraîner et approfondir

### Adjoint d'un endomorphisme

**4.1** Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

→<sup>158</sup> Montrer qu'il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \text{tr}(AM).$$

**4.2** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker } u$  et  $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$ .

→<sup>159</sup>

**4.3** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer l'équivalence :

$$(u^2 = 0 \quad \text{et} \quad u + u^* \in \mathcal{GL}(E)) \iff \text{Ker } u = \text{Im } u.$$

### Matrices orthogonales

**4.4** Montrer que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  à coefficients entiers (relatifs) est un ensemble →<sup>160</sup> fini et déterminer son cardinal.

**4.5** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire supérieure.

#### 4.6 Inégalité d'Hadamard

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  dont on note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes.

1. Montrer qu'il existe  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $R \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$  une matrice triangulaire supérieure telles que  $A = QR$ .

*Indication.* On pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille des colonnes de  $A$ .

2. Montrer que  $|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \|C_j\|$ .

**4.7** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$  telle que  $A^T A = A^3$ .

1. Montrer que  $\text{Im } A = \text{Im } A^3$ .

2. Montrer qu'il existe  $B \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R})$  telle que  $B^3 = I_r$  et  $A$  soit orthogonalement semblable à la matrice s'écrivant par blocs  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

★ **4.8** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{tr } u = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire  $\varepsilon_1$  tel que  $(u(\varepsilon_1) \mid \varepsilon_1) = 0$ .

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est à diagonale nulle.

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

### Endomorphismes autoadjoints

- 4.9** On note  $S$  l'ensemble des vecteurs unitaires de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{S}(E)$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la liste →<sup>166</sup> croissante des valeurs propres de  $u$  comptées avec multiplicité ainsi que  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de vecteurs propres associés. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. On pose  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Montrer que :

$$\lambda_k = \max_{x \in F_k \cap S} (x \mid u(x)).$$

2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $k$ . Montrer que :

$$\sup_{x \in F \cap S} (x \mid u(x)) \geq \lambda_k.$$

*Indication.* On pourra commencer par vérifier que l'intersection  $F \cap G_k$  est non nulle, avec  $G_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ .

- 4.10** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MM^T M = I_n$ .

- <sup>166</sup>
1. Montrer que  $M$  est inversible et symétrique.
  2. Montrer que  $M = I_n$ .

- 4.11** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que pour toute matrice  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $P^{-1}AP$  est →<sup>166</sup> à diagonale nulle. Montrer que  $A$  est antisymétrique.

*Indication.* On pourra s'intéresser à la matrice  $A + A^T$ .

- 4.12** Soit  $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff r > 0 \quad \text{et} \quad rt > s^2.$$

- 4.13** Pour  $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ , on note  $A \leq B$  lorsque  $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- <sup>168</sup> Montrer que  $\leq$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- 4.14** Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- <sup>168</sup>
1. Montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $A^{-1} = C^2$ .
  2. Montrer qu'il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  une matrice diagonale à coefficients positifs tels que :

$$A = P P^T \quad \text{et} \quad B = P D P^T.$$

*Indication.* On pourra montrer que  $CBC \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

3. Montrer que  $\det A + \det B \leq \det(A + B)$ .

- 4.15** Soit  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien  $E$ .

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x \in F$  tel que  $q(x) \in F^\perp$ . Montrer que  $q(x) = 0$ .
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que l'endomorphisme induit  $u_{\text{Im } u}$  est diagonalisable et  $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ . Montrer que  $u$  est diagonalisable.
3. Montrer que  $p \circ q$  est diagonalisable.

- 4.16** 1. Soit  $u \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$ . Montrer qu'il existe un unique  $v \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$  tel que  $u = v^2$ .

2. Soit  $f \in \mathcal{GL}(E)$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(g, h) \in \mathcal{O}(E) \times \mathcal{S}_n^{++}(E)$  tel que  $f = g \circ h$ .

**4.17** Soit  $f \in \mathcal{GL}(E)$ . Montrer qu'il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  soit une base orthogonale.

**4.18** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

Montrer que  $p$  est une projection orthogonale si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

*Indication.* On pourra, pour tout couple  $(x, y) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$ , considérer les vecteurs  $y + \lambda x$ .

## Isométries vectorielles

**4.19** Soit  $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ . On suppose que  $(1 - \lambda)u + \lambda v \in \mathcal{O}(E)$ . Montrer que  $u = v$ .  
→<sup>168</sup>

**4.20** Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- <sup>173</sup> (i)  $\exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad A = B + B^T$  ;  
(ii)  $\text{sp}(A) \subset [-2, 2]$  et les valeurs propres de  $A$  dans  $]-2, 2[$  sont de multiplicité paire.

**4.21** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
→<sup>173</sup>

Montrer que  $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$  et expliciter  $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**4.22** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension 4. Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$  tel que  $u^2 = -\text{Id}_E$ . Montrer  
→<sup>174</sup> qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\pi/2) & 0 \\ 0 & R(\pi/2) \end{pmatrix}.$$

**4.23** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :

- (i)  $\forall x \in E \quad (x | u(x)) = 0$  ;  
(ii)  $u^* = -u$ .

2. Montrer que deux quelconques des trois propositions suivantes impliquent la troisième :

- (i)  $u$  est une isométrie ;  
(ii)  $u^2 = -\text{Id}_E$  ;  
(iii)  $\forall x \in E \quad (x | u(x)) = 0$ .

**4.24** Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tel que  $f^* \circ f = g^* \circ g$ .

1. Montrer que  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ .

2. Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{O}(E)$  tel que  $g = u \circ f$ .

**4.25** Soit  $E$  un espace euclidien. Montrer que le groupe  $\mathcal{O}(E)$  des automorphismes orthogonaux est engendré par l'ensemble des réflexions.

*Indication.* On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de  $E$  et utiliser le lemme 20 de la page 165.

## Solutions des exercices

**4.1** L'application  $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$  étant un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (le produit scalaire canonique), le théorème de Riesz prouve l'existence d'une unique matrice  $B$  telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = \text{tr}(B^T M).$$

En posant  $A = B^T$ , on en déduit le résultat (l'unicité découlant de l'injectivité de l'application transposition).

**4.2** • On a déjà l'inclusion  $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^* \circ u)$ . Soit  $x \in \text{Ker}(u^* \circ u)$ . Pour montrer que  $u(x) = 0$ , calculons le carré de la norme de ce vecteur :

$$\|u(x)\|^2 = (u(x) | u(x)) = (x | u^*(u(x))) = (x | 0) = 0.$$

Par caractère défini du produit scalaire, on en déduit  $u(x) = 0$ .

- On a immédiatement  $\text{Im}(u^* \circ u) \subset \text{Im } u^*$  et d'après le théorème du rang et le point précédent :

$$\dim \text{Im}(u^* \circ u) = \dim E - \dim \text{Ker}(u^* \circ u) = \dim E - \dim \text{Ker } u = \text{rg } u.$$

Par ailleurs,  $\text{rg } u = \text{rg } u^*$  d'après le corollaire 5 de la page 159.

On obtient donc l'égalité  $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$  par inclusion et égalité des dimensions.

**4.3 Sens direct** Supposons  $u^2 = 0$  et  $u + u^* \in \mathcal{GL}(E)$ .

De l'égalité  $u^2 = 0$  on déduit  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .

Soit  $x \in \text{Ker } u$ . Par surjectivité de  $u + u^*$ , il existe  $a \in E$  tel que  $x = u(a) + u^*(a)$ . Comme  $u(x) = 0$  et  $u^2 = 0$ , on a  $u(u^*(a)) = 0$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \|u^*(a)\|^2 &= (u^*(a) | u^*(a)) \\ &= (a | u(u^*(a))) \quad (\text{car } (u^*)^* = u) \\ &= 0 \quad \text{donc } u^*(a) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit  $x = u(a)$  donc  $x \in \text{Im } u$ .

**Sens réciproque** Supposons  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ .

De l'inclusion  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ , on déduit  $u^2 = 0$ .

Soit  $x \in \text{Ker}(u + u^*)$ . Alors  $u(x) + u^*(x) = 0$ .

D'après la proposition 6 de la page 159, on a  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ . Par hypothèse, on en déduit  $\text{Im } u^* = (\text{Im } u)^\perp$ . Ainsi,  $\text{Im } u^*$  et  $\text{Im } u$  sont orthogonaux donc en somme directe. Il vient donc  $u(x) = u^*(x) = 0$  puis :

$$x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } u^* = \text{Ker } u \cap (\text{Im } u)^\perp = \text{Ker } u \cap (\text{Ker } u)^\perp$$

donc  $x = 0$ . Cela prouve l'injectivité de  $u$ .

L'espace  $E$  étant de dimension finie, l'injectivité de  $u + u^*$  assure que  $u + u^* \in \mathcal{GL}(E)$ .

- 4.4** • Tout d'abord, toute matrice obtenue en permutant les colonnes de la matrice  $I_n$  et en changeant ou non le signe de chaque colonne est une matrice orthogonale à coefficients entiers. Il y a  $2^n \times n!$  telles matrices.
- Vérifions que ce sont les seules matrices orthogonales à coefficients entiers. Soit donc  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  une telle matrice à coefficients entiers relatifs. Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a alors :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

Si au moins deux coefficients de cette  $j$ -ème colonne sont non nuls, alors on a :

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \geq 2.$$

Comme  $C_j(A)$  n'est pas la colonne nulle, il existe un unique  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :

$$a_{i,j}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \quad a_{k,j} = 0.$$

On a alors  $C_j(A) = \pm e_i$ , en notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme deux colonnes d'une matrice orthogonale sont non colinéaires, la famille des colonnes de  $A$  constitue, aux signes près, une permutation de la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , ce qui conclut.

- 4.5** Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

Comme le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , l'endomorphisme  $u$  est trigonalisable et il existe une base de trigonalisation  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Notons  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  la base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_j)$  donc  $\mathcal{B}'$  est encore une base de trigonalisation de  $u$ .

Ainsi, la matrice  $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$  est triangulaire supérieure et orthogonalement semblable à la matrice  $A$  car ces deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases orthonormées.

- 4.6** 1. Notons  $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_n)$  la famille des colonnes de  $A$ . La matrice  $A$  étant inversible,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . En appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}$ , on obtient une base orthonormée  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Vect}(C_1, \dots, C_j) = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_j),$$

propriété qui implique que la matrice de passage  $R = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$  est une matrice triangulaire supérieure. Par ailleurs, si l'on note  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}')$ , la matrice  $Q$  est orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées. Enfin, grâce aux relations entre les matrices de changement de base, on a :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = QR,$$

ce qui conclut.

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

2. On reprend les notations précédentes. Comme  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , on a  $|\det Q| = 1$  donc :

$$|\det A| = |\det R|,$$

puis,  $R$  étant triangulaire :

$$|\det A| = \prod_{j=1}^n |r_{j,j}|.$$

Vu que  $R$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  vers  $\mathcal{B}$  et que  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormée, l'expression des coordonnées dans une base orthonormée donne :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad r_{j,j} = (C_j \mid e'_j).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |r_{j,j}| \leq \|C_j\| \|e'_j\| = \|C_j\|.$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut conclure :

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^n \|C_j\|.$$

**Remarque** En suivant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a même :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (C_j \mid e'_j) > 0$$

donc la matrice  $R$  obtenue dans la première question est à coefficients diagonaux strictement positifs.

**4.7** 1. On a déjà  $\text{Im } A^3 \subset \text{Im } A$ . On a aussi :

$$\text{rg } A^3 = n - \dim \text{Ker } A^3 = n - \dim \text{Ker } A^T A.$$

Par ailleurs, si  $x \in \text{Ker } A^T A$ , alors  $(Ax \mid Ax) = (x \mid A^T Ax) = 0$  donc  $x \in \text{Ker } A$ . L'inclusion  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^T A$  est évidente donc on a  $\text{Ker } A^T A = \text{Ker } A$ , puis :

$$\text{rg } A^3 = n - \dim \text{Ker } A = \text{rg } A.$$

Par inclusion et égalité des dimensions, on a  $\text{Im } A^3 = \text{Im } A$ .

2. • Montrons que  $\mathbb{R}^n = \text{Im } A \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker } A$ . On a tout d'abord :

$$\text{Im } A = \text{Im } A^3 = \text{Im } A^T A \subset \text{Im } A^T = (\text{Ker } A)^\perp.$$

D'après la formule du rang, on a aussi :

$$\dim \text{Im } A = n - \dim \text{Ker } A = \dim(\text{Ker } A)^\perp,$$

donc  $\text{Im } A = (\text{Ker } A)^\perp$  par inclusion et égalité des dimensions, ce qui montre :

$$\mathbb{R}^n = \text{Im } A \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker } A.$$

• Notons  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  adaptée à la décomposition ci-dessus ainsi que  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

\* Par stabilité de  $\text{Im } A$  par  $u$ , il existe  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\text{Im } A$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } A$ , l'endomorphisme induit  $u_{\text{Im } A}$  est un automorphisme et la matrice  $B$  est inversible.

- \* Par ailleurs, les matrices  $A$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  sont orthogonalement semblables donc il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}AP$ . Comme  $P$  est une matrice orthogonale,  $P^{-1} = P^T$  donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T = P^{-1}A^TP$  puis :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}A^TP = P^{-1}A^3P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^3.$$

Un calcul par blocs donne alors  $B^TB = B^3$  puis  $B^T = B^2$  par inversibilité de  $B$ . On a ensuite :

$$B = (B^T)^T = (B^2)^T = (B^T)^2 = B^4,$$

puis  $B^3 = I_r$  par inversibilité de  $B$  et enfin :

$$B^TB = B^3 = I_r \quad \text{donc} \quad B \in \mathcal{O}_r(\mathbb{R}).$$

- 4.8** 1. Soit  $A$  la matrice de  $u$  dans une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ . On a :

$$0 = \text{tr } u = \sum_{i=1}^n (u(e_i) \mid e_i).$$

- S'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $(u(e_i) \mid e_i) = 0$ , alors il suffit de prendre  $\varepsilon_1 = e_i$ .
- Sinon, il existe  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $(u(e_i) \mid e_i) < 0 < (u(e_j) \mid e_j)$ .

Pour tout réel  $t$ , on pose  $e(t) = (1-t)e_i + te_j$ . La fonction  $t \mapsto (u(e(t)) \mid e(t))$  est alors polynomiale, négative en 0 et positive en 1. Il existe donc un réel  $t_0$  tel que le vecteur  $e(t_0)$  vérifie  $(u(e(t_0)) \mid e(t_0)) = 0$ . Les vecteurs  $e_i$  et  $e_j$  étant non colinéaires, le vecteur  $e(t_0)$  est non nul. Par conséquent, le vecteur  $\varepsilon_1 = \frac{e(t_0)}{\|e(t_0)\|}$  convient.

2. Montrons le résultat par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ . C'est clair pour  $n = 1$ . Soit  $n \geq 2$ . Supposons le résultat acquis au rang  $n - 1$  et démontrons-le au rang  $n$ .

D'après la question précédente, il existe un vecteur unitaire  $\varepsilon_1$  tel que  $(u(\varepsilon_1) \mid \varepsilon_1) = 0$ . Complétons  $\varepsilon_1$  en une base orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ . On peut écrire par blocs la matrice de  $u$  dans cette base :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Comme  $u$  est de trace nulle, la matrice  $B$  l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence il existe donc une matrice  $P \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}BP$  soit à diagonale nulle.

Il suffit alors de poser  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$  pour avoir :

$$Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Q^{-1}AQ \quad \text{à diagonale nulle.}$$

Il existe donc une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est à diagonale nulle.

- 4.9** 1. Soit  $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$  un vecteur unitaire de  $F_k$ . Alors on a :

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 = 1 \quad \text{puis} \quad (x \mid u(x)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k.$$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

Par ailleurs, on a  $e_k \in F_k \cap S$  et :

$$(e_k | u(e_k)) = (e_k | \lambda_k e_k) = \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k,$$

ce qui conclut.

2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $k$ . Comme on a :

$$\dim F + \dim G_k = k + (n - k + 1) = n + 1 > \dim E,$$

les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G_k$  ne sont pas en somme directe donc il existe  $y \in F \cap G_k$

non nul. Notons  $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i$  le vecteur unitaire  $\frac{y}{\|y\|}$ .

On a alors :

$$\sum_{i=k}^n x_i^2 = 1 \quad \text{puis} \quad (x | u(x)) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k.$$

On obtient donc l'inégalité souhaitée.

- 4.10** 1. On a  $\det M^3 = \det(MM^T M) = \det I_n = 1$  donc  $\det M \neq 0$  puis  $M$  est inversible.

Ensuite, on a  $M^{-1} = M^T M$  donc  $M^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  puis  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

2. Par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = PDP^{-1}$ .

La relation  $MM^T M = I_n$  se réécrit :

$$M^3 = I_n \quad \text{puis} \quad D^3 = I_n.$$

Notons  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i^3 = 1 \quad \text{donc} \quad \lambda_i = 1.$$

On obtient ainsi  $D = I_n$  puis  $M = PP^{-1} = I_n$ .

- 4.11** La matrice  $A + A^T$  est symétrique réelle donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale  $D$ . Notons  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}(A + A^T)P = D$ . Par hypothèse, la matrice  $P^{-1}AP$  est à diagonale nulle. Par ailleurs, on a :

$$P^{-1}A^TP = P^TA^TP = (P^TAP)^T = (P^{-1}AP)^T$$

donc  $P^{-1}A^TP$  est également à diagonale nulle. Par somme,  $D$  est à diagonale nulle donc  $D = 0$  puis  $A + A^T = 0$ , autrement dit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

- 4.12** La matrice  $A$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Notons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines réelles éventuellement confondues du polynôme caractéristique de  $A$ . On a alors :

$$r + t = \text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad rt - s^2 = \det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

- Supposons  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ . Alors,  $\text{sp } A \subset \mathbb{R}_+^*$  donc  $rt - s^2 > 0$ .

En posant  $e = (1, 0)$  qui est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ , on a :

$$(e | Ae) = r \quad \text{donc} \quad r > 0.$$

- Supposons  $r > 0$  et  $rt - s^2 > 0$ . La relation  $\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2$  montre que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe strict. Supposons  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ . Alors  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$  donc  $r + t < 0$  puis  $t < -r$ . En multipliant par le réel strictement positif  $r$ , il vient  $rt < -r^2$  ou encore  $s^2 < -r^2 < 0$  : absurde. Ainsi, on a  $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$  donc  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

**4.13 Réflexivité** La matrice nulle est évidemment une matrice symétrique positive donc pour tout  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on a  $A \leq A$ .

**Antisymétrie** Soit  $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ . Supposons  $A \leq B$  et  $B \leq A$ .

Alors  $\text{sp}(B - A) \subset \mathbb{R}_+$  et  $\text{sp}(A - B) \subset \mathbb{R}_+$  donc  $\text{sp}(B - A) \subset \mathbb{R}_-$ .

Ainsi, on a  $\text{sp}(B - A) \subset \{0\}$ . Or  $B - A$  est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable, ce qui permet de conclure :

$$B - A = 0 \quad \text{donc} \quad A = B.$$

**Transitivité** Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^3$ . Supposons  $A \leq B$  et  $B \leq C$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$$(x | (C - A)x) = (x | C - B)x + (x | (B - A)x) \geq 0$$

comme somme de deux termes positifs ou nuls. On a donc  $C - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  puis  $A \leq C$ .

**4.14** 1. D'après le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que  $A = PDP^{-1}$ . On pose  $E = \text{Diag}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}})$  puis  $C = PEP^{-1}$ .

Vérifions que  $C$  convient.

- Tout d'abord,  $C^2 = P E^2 P^{-1} = P D^{-1} P^{-1} = A^{-1}$ .
- Ensuite, on a :

$$(PEP^{-1})^T = (PEP^T)^T = PE^TP^T = PEP^{-1},$$

car  $E \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Donc  $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

- Enfin,  $C$  est semblable à la matrice diagonale  $E$  donc  $\text{sp}(C) = \text{sp}(E) \subset \mathbb{R}_+^*$ , ce qui conclut.

2. • Les matrices  $C$  et  $B$  sont symétriques réelles donc :

$$(CBC)^T = CBC \quad \text{puis} \quad CBC \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Les matrices  $C$  et  $B$  sont respectivement symétrique et symétrique positive donc :

$$(x | CBCx) = (Cx | BCx) \geq 0 \quad \text{puis} \quad CBC \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

- D'après le théorème spectral, il existe  $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  une matrice diagonale à coefficients diagonaux positifs telles que  $CBC = QDQ^{-1}$ .
- On pose  $P = C^{-1}Q$ . Par stabilité par produit, on a  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . Par ailleurs, on a :

$$P^T = Q^T C^{-1} = Q^{-1} C^{-1}$$

donc  $PP^T = C^{-2} = A$  et  $PDP^T = C^{-1}QDQ^{-1}C^{-1} = C^{-1}CBCC^{-1} = B$ .

3. Reprenons les matrices  $P$  et  $D$  de la question précédente. On a alors :

$$\det A = (\det P)^2, \quad \det B = (\det P)^2 \det D \quad \text{et} \quad \det(A + B) = (\det P)^2 \det(I_n + D).$$

Comme  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , on a  $(\det P)^2 > 0$  et l'inégalité à démontrer revient à :

$$1 + \det D \leq \det(I_n + D).$$

En notant  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , par positivité des réels  $\lambda_i$ , on a :

$$1 + \det D = 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \det(I_n + D).$$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**4.15** 1. Calculons la norme de  $q(x)$  :

$$\begin{aligned}\|q(x)\|^2 &= (q(x) \mid q(x)) = (x \mid (q^* \circ q)(x)) \\ &= (x \mid q(x)) \quad (q^* = q \text{ et } q^2 = q) \\ &= 0. \quad (x \in F \text{ et } q(x) \in F^\perp)\end{aligned}$$

On en déduit  $q(x) = 0$ .

2. Par hypothèse, il existe  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im } u$  constituée de vecteurs propres de  $u_{\text{Im } u}$ . Fixons  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\text{Ker } u$  (ce sont des vecteurs propres de  $u$ , associés à la valeur propre 0). La famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  (adaptée à la décomposition  $E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u$ ), constituée de vecteurs propres de  $u$ , donc  $u$  est diagonalisable.
3. D'après la question précédente, il suffit de montrer que  $E = \text{Im}(p \circ q) \oplus \text{Ker}(p \circ q)$  et que l'endomorphisme induit par  $p \circ q$  sur  $\text{Im}(p \circ q)$  est diagonalisable.

- Vérifions que  $\text{Im}(p \circ q)$  et  $\text{Ker}(p \circ q)$  sont en somme directe.

Soit  $x \in \text{Im}(p \circ q) \cap \text{Ker}(p \circ q)$ .

On a  $q(x) \in \text{Ker } p = (\text{Im } p)^\perp$ . Comme  $x \in \text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p$ , on en déduit  $q(x) = 0$  d'après la question 1.

On peut choisir  $a \in E$  tel que  $x = p(q(a))$ . Pour démontrer que  $x = 0$ , calculons  $\|x\|^2$  :

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= (x \mid x) = (p(q(a)) \mid x) \\ &= (q(a) \mid p(x)) \quad (p^* = p) \\ &= (q(a) \mid x) \quad (x \in \text{Im } p \text{ donc } p(x) = x) \\ &= (a \mid q(x)) = 0. \quad (q^* = q \text{ et } q(x) = 0)\end{aligned}$$

On en déduit  $x = 0$  donc  $\text{Im}(p \circ q)$  et  $\text{Ker}(p \circ q)$  sont en somme directe.

D'après la formule du rang, on a  $\dim \text{Im}(p \circ q) + \dim \text{Ker}(p \circ q) = \dim E$ .

Par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on a :

$$E = \text{Im}(p \circ q) \oplus \text{Ker}(p \circ q).$$

- Montrons que l'endomorphisme induit par  $p \circ q$  sur  $\text{Im}(p \circ q)$  est diagonalisable en montrant que c'est un endomorphisme autoadjoint. Pour tout  $(x, y) \in (\text{Im}(p \circ q))^2$ , on a :

$$\begin{aligned}(x \mid p(q(y))) &= (p(x) \mid q(y)) \quad (p^* = p) \\ &= (x \mid q(y)) \quad (x \in \text{Im } p \text{ donc } p(x) = x) \\ &= (q(x) \mid y) \quad (q^* = q) \\ &= (q(x) \mid p(y)) \quad (y \in \text{Im } p \text{ donc } y = p(y)) \\ &= (p(q(x)) \mid y), \quad (p^* = p)\end{aligned}$$

ce qui conclut.

**4.16 1. Existence** D'après le théorème spectral, on peut fixer  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ . Notons  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres associées, strictement positives car  $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ .

Notons  $v \in \mathcal{L}(E)$  l'unique endomorphisme tel que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . La matrice  $\text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  est symétrique définie positive et  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée donc  $v \in \mathcal{S}^{++}(E)$ .

Par ailleurs, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v^2) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)^2 = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \quad \text{donc} \quad v^2 = u.$$

**Unicité** Soit  $v \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$  tel que  $v^2 = u$ . Comme  $u$  est un endomorphisme autoadjoint, le théorème spectral donne :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)}^{\perp} E_{\lambda}(u).$$

Les endomorphismes  $v$  et  $v^2 = u$  commutent donc  $v$  stabilise les sous-espaces propres de  $u$ .

Soit  $\lambda \in \text{sp}(u)$ . Comme  $v$  est autoadjoint,  $v$  est diagonalisable et son endomorphisme induit sur  $E_{\lambda}(u)$  l'est également. Soit  $\mu \in \mathbb{R}$  une valeur propre de cet endomorphisme induit et  $x \in E_{\lambda}(u) \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé. La relation  $v^2(x) = u(x)$  se réécrit alors  $\mu^2 x = \lambda x$  donc  $\mu^2 = \lambda$  puisque  $x$  est non nul. Comme les valeurs propres de  $v$  sont positives, on en déduit  $\mu = \sqrt{\lambda}$ . Ainsi, par diagonalisabilité, la restriction de  $v$  à  $E_{\lambda}(u)$  est l'homothétie de rapport  $\sqrt{\lambda}$  puis :

$$v = \sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \sqrt{\lambda} p_{\lambda},$$

où  $p_{\lambda}$  est le projecteur orthogonal sur  $E_{\lambda}(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{\mu \in \text{sp}(u) \setminus \{\lambda\}}^{\perp} E_{\mu}(u)$ .

L'unicité est démontrée.

**Remarque** La partie existence aurait pu se traiter après l'unicité, en prouvant que  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(u)} \sqrt{\lambda} p_{\lambda}$  convenait.

**2. Unicité.** Soit  $(g, h) \in \mathcal{O}(E) \times \mathcal{S}_n^{++}(E)$  tel que  $f = g \circ h$ . On a alors :

$$\begin{aligned} f^* \circ f &= h^* \circ g^* \circ g \circ h \\ &= h^* \circ h && (g^* \circ g = \text{Id}_E) \\ &= h^2. && (h^* = h) \end{aligned}$$

Comme  $f \in \mathcal{GL}(E)$ , l'endomorphisme  $f^* \circ f$  est autoadjoint défini positif et  $h$  est l'unique élément de  $\mathcal{S}_n^{++}(E)$  vérifiant  $h^2 = f^* \circ f$  (cf. question précédente). L'unicité de  $h$  implique l'unicité de  $g = f \circ h^{-1}$ .

**Existence.** Comme signalé ci-dessus, on a  $f \in \mathcal{GL}(E)$  donc  $f^* \circ f \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$  et l'on peut poser  $h \in \mathcal{S}_n^{++}(E)$  tel que  $f^* \circ f = h^2$ . Ensuite, on pose  $g = f \circ h$  et un calcul similaire à celui posé dans le premier point montre que  $g^* \circ g = \text{Id}_E$  donc  $g \in \mathcal{O}(E)$ .

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

**4.17** L'endomorphisme  $f^* \circ f$  est autoadjoint. Par le théorème spectral, il existe  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f^* \circ f$ . Notons  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  les valeurs propres associées.

Comme image d'une base par un automorphisme de  $E$ , la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $E$ .

Vérifions qu'il s'agit d'une base orthogonale. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . On a alors :

$$(f(e_i) \mid f(e_j)) = (e_i \mid f^*(f(e_j))) = \lambda_j (e_i \mid e_j) = 0.$$

En conclusion, la base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  convient.

**4.18** • Supposons que  $p$  soit une projection orthogonale.

Pour tout  $x \in E$ , on a  $(x - p(x), p(x)) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$  donc  $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$ , puisque  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux.

Ainsi,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .

• Supposons que pour tout  $u \in E$ , on ait  $\|p(u)\| \leq \|u\|$ .

Soit  $(x, y) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $p(x + \lambda y) = \lambda y$  donc :

$$\lambda^2 \|y\|^2 = \|\lambda y\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y) + \lambda^2 \|y\|^2.$$

La fonction affine  $\lambda \mapsto \|x\|^2 + 2\lambda(x \mid y)$  est donc positive, ce qui implique que son coefficient directeur est nul, donc  $(x \mid y) = 0$ .

Ainsi,  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont orthogonaux. Par conséquent,  $p$  est une projection orthogonale.

**4.19** Soit  $x \in E$ . Puisque  $(1 - \lambda)u + \lambda v$  est une isométrie vectorielle, il conserve la norme :

$$\|(1 - \lambda)u(x) + \lambda v(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

D'autre part, par propriétés de calcul du produit scalaire et par conservation de la norme par  $u$  et  $v$ , on a :

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)u(x) + \lambda v(x)\|^2 &= (1 - \lambda)^2 \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \|v(x)\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(u(x) \mid v(x)) \\ &= (1 - \lambda)^2 \|x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(u(x) \mid v(x)) \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)((u(x) \mid v(x)) - \|x\|^2). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$2\lambda(1 - \lambda)((u(x) \mid v(x)) - \|x\|^2) = 0,$$

puis, étant donné que  $\lambda \notin \{0, 1\}$ , on obtient  $(u(x) \mid v(x)) = \|x\|^2 = \|u(x)\| \|v(x)\|$ . Les vecteurs  $u(x)$  et  $v(x)$  vérifient donc le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz (sans valeur absolue), ils sont donc positivement colinéaires. Comme ils ont même norme, ils sont égaux.

On a donc obtenu :

$$\forall x \in E \quad u(x) = v(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u = v.$$

- 4.20** • Supposons qu'il existe  $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = B + B^T$ . Par conséquence du théorème de réduction des isométries directes (cf. théorème 42 de la page 172), il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$B = P \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ -I_q & R(\theta_1) & & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad (\theta_1, \dots, \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r.$$

On a ensuite :

$$A = B + B^T = P \begin{pmatrix} 2I_p & & & (0) \\ -2I_q & R(\theta_1) + R(\theta_1)^T & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) + R(\theta_r)^T \end{pmatrix} P^{-1}$$

car  $P$  est une matrice orthogonale donc  $P^{-1} = P^T$ . Comme pour tout réel  $\theta$ , on a :

$$R(\theta) + R(\theta)^T = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 2 \cos \theta \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\chi_A = (X - 2)^p (X + 2)^q \prod_{k=1}^r (X - 2 \cos \theta_k)^2.$$

On obtient ainsi l'inclusion  $\text{sp}(A) \subset [-2, 2]$  et toutes les valeurs propres de  $A$  dans  $]-2, 2[$  sont de multiplicité paire.

- Supposons que  $\text{sp}(A) \subset [-2, 2]$  et que les valeurs propres de  $A$  dans  $]-2, 2[$  soient de multiplicité paire. Notons  $p$  (respectivement  $q$ ) la multiplicité de la valeur propre 2 (respectivement  $-2$ ). Les valeurs propres de  $A$  dans l'intervalle  $]-2, 2[$  sont de multiplicités paires. Notons-les  $(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_r)$ , comptées avec leurs multiplicités. Par surjectivité de la fonction  $\cos$  de  $]0, \pi[$  sur  $]-1, 1[$ , il existe  $(\theta_1, \dots, \theta_r) \in ]0, \pi[^r$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket \quad \lambda_k = 2 \cos \theta_k.$$

D'après le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$  avec :

$$D = \begin{pmatrix} 2I_p & & & (0) \\ -2I_q & 2 \cos \theta_1 I_2 & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & 2 \cos \theta_r I_2 \end{pmatrix}.$$

En posant alors  $B = P \begin{pmatrix} 2I_p & & & (0) \\ -2I_q & R(\theta_1) & & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1}$ , on constate que :

$$B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = B + B^T.$$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

- 4.21** • Les colonnes de  $A$  sont une permutation de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  donc  $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ . Par ailleurs, on a  $\det A = 1$ , ce qui achève de montrer que  $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ .

- Posons  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors le vecteur  $e_1$  est unitaire et vérifie  $Ae_1 = e_1$ .

La famille  $(u_2, u_3)$  avec  $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est une base du sous-espace

vectoriel  $\{e_1\}^\perp$ . En lui appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on dispose d'une base orthonormée  $(e_2, e_3)$  avec :

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par construction, la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  (adaptée à la décomposition  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1)^\perp \oplus \{e_1\}^\perp$ ).

En notant  $\varphi_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice dont les colonnes sont  $e_1, e_2$  et  $e_3$  et le réel  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  conviennent.

- 4.22** De la relation  $u^2 = -\text{Id}_E$ , on déduit que l'endomorphisme  $u$  ne possède aucune valeur propre réelle.

Par théorème de réduction des isométries vectorielles, il existe donc  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$  une base orthonormée de  $E$  et  $(\theta_1, \theta_2) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^2$  tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & 0 \\ 0 & R(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

De la relation  $u^2 = -\text{Id}_E$ , on déduit  $R(2\theta_1) = R(2\theta_2) = -I_2$  donc pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$2\theta_i \equiv \pi [2\pi] \quad \text{puis} \quad \theta_i \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

On obtient alors :

$$R(\theta_1) = R(\pm\pi/2) \quad \text{et} \quad R(\theta_2) = R(\pm\pi/2).$$

Si  $R(\theta_1) = R(-\pi/2)$ , on remplace  $(e_1, e_2)$  par  $(-e_1, e_2)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On procède de même avec les vecteurs  $e_3$  et  $e_4$  si  $R(\theta_2) = R(-\pi/2)$ .

On a alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R(\pi/2) & 0 \\ 0 & R(\pi/2) \end{pmatrix}$ .

**4.23** 1. • Supposons (i) et montrons (ii).

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors  $x + y \in E$  et l'on a :

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y \mid u(x + y)) = (x \mid u(x)) + (y \mid u(x)) + (x \mid u(y)) + (y \mid u(y)) \\ &= (y \mid u(x)) + (x \mid u(y)). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mid u(y)) = (-u(x) \mid y),$$

ce qui montre que  $u^* = -u$ .

• Supposons  $u^* = -u$  et montrons (i). Soit  $x \in E$ . On a alors :

$$(x \mid u(x)) = (u^*(x) \mid x) = -(u(x) \mid x) \quad \text{donc} \quad (x \mid u(x)) = 0.$$

2. • Supposons (i) et (ii) et montrons (iii).

Soit  $x \in E$ . On a :

$$(x \mid u(x)) = (u(x) \mid u^2(x)) = (u(x) \mid -x) = -(x \mid u(x))$$

donc  $(x \mid u(x)) = 0$ .

• Supposons (ii) et (iii) et montrons (i).

En utilisant la question précédente, on a  $u^* = -u$  et, comme  $u^2 = -\text{Id}_E$ , il vient  $u^* \circ u = \text{Id}_E$  donc  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

• Supposons (i) et (iii) et montrons (ii).

D'après la question précédente, on a  $u^* = -u$  et, comme  $u$  est une isométrie,  $u^* \circ u = \text{Id}_E$ , ce qui donne  $u^2 = -\text{Id}_E$ .

**4.24** 1. Soit  $x \in \text{Ker } f$ . Alors on a :

$$\|g(x)\|^2 = (g(x) \mid g(x)) = (x \mid g^*(g(x))) = (x \mid f^*(f(x))) = 0 \quad \text{donc} \quad g(x) = 0.$$

Cela montre que  $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$ .

Par symétrie du problème en  $f$  et  $g$ , on a  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$ .

2. Notons  $r$  le rang de  $f$  et posons  $(y_1, \dots, y_r)$  une base orthonormée de  $\text{Im } f$  puis  $(e_1, \dots, e_r) \in E^r$  tel que  $y_i = f(e_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

La famille  $(g(e_1), \dots, g(e_r))$  est une famille orthonormée car :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \quad (g(e_i) \mid g(e_j)) &= (e_i \mid g^*(g(e_j))) = (e_i \mid f^*(f(e_j))) \\ &= (f(e_i) \mid f(e_j)) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Par le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe  $(y_{r+1}, \dots, y_n)$  et  $(z_{r+1}, \dots, z_n)$  des vecteurs de  $E$  tels que  $\mathcal{B} = (f(e_1), \dots, f(e_r), y_{r+1}, \dots, y_n)$  et  $\mathcal{B}' = (g(e_1), \dots, g(e_r), z_{r+1}, \dots, z_n)$  soient des bases orthonormées de  $E$ .

Notons  $u$  l'unique endomorphisme de  $E$  qui envoie les vecteurs de  $\mathcal{B}$  sur les vecteurs de  $\mathcal{B}'$ . Comme  $u$  envoie une base orthonormée sur une base orthonormée, on a  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

Vérifions que  $g = u \circ f$ . Posons  $x \in E$ . Alors  $f(x) \in \text{Im } f$  et il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$  tel que  $f(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(e_k)$ . On a alors :

$$f\left(x - \sum_{k=1}^r \lambda_k e_k\right) = 0 \quad \text{puis} \quad g\left(x - \sum_{k=1}^r \lambda_k e_k\right) = 0 \quad \text{car} \quad \text{Ker } f = \text{Ker } g.$$

$$\text{On en déduit : } g(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k g(e_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k u(f(e_k)) = u\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k f(e_k)\right) = u(f(x)).$$

## Chapitre 4. Endomorphismes d'un espace euclidien

- 4.25**
- Le résultat est immédiat lorsque  $\dim E = 1$  car  $\mathcal{O}(E) = \{\pm \text{Id}_E\}$ ,  $-\text{Id}_E$  est une réflexion et  $\text{Id}_E = (-\text{Id}_E)^2$ .
  - Supposons  $E$  de dimension 2. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base orthonormée de  $E$  et  $s$  la réflexion d'axe  $\text{Vect}(e_1)$ . Si  $u \in \mathcal{SO}(E)$ , alors  $s \circ u$  est une isométrie négative du plan  $E$  donc une réflexion. La relation  $u = s \circ (s \circ u)$  montre que  $u$  est le produit de deux réflexions. Si  $u$  est une isométrie négative du plan  $E$ , c'est une réflexion.  
Le résultat est donc vérifié lorsque  $\dim E = 2$ .
  - Supposons  $\dim E \geq 3$  et supposons que le résultat soit vérifié pour tout espace euclidien  $E'$  vérifiant  $\dim E' \leq \dim E - 1$ . Soit  $u \in \mathcal{O}(E)$ .
    - \* D'après le lemme 20 de la page 165, il existe un plan ou une droite  $F$  stable par  $u$ . D'après la proposition 41 de la page 172,  $F^\perp$  est également stable par  $u$  et les endomorphismes induits par  $u$  sur  $F$  et  $F^\perp$  sont des isométries vectorielles. Par hypothèse de récurrence, ce sont des produits de réflexions :

$$u_F = s_1 \circ \cdots \circ s_k \quad \text{et} \quad u_{F^\perp} = s_{k+1} \circ \cdots \circ s_j.$$

- \* Soit  $s$  une réflexion de  $F$ . Notons  $\sigma$  l'unique endomorphisme de  $E$  qui coïncide avec  $s$  sur  $F$  et avec  $\text{Id}_{F^\perp}$  sur  $F^\perp$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $F$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(s) = \text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$  et, en complétant  $\mathcal{B}'$  par une base orthonormée de  $F^\perp$  pour former une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$  donc  $\sigma$  est une réflexion de  $E$ . Étant donné une réflexion  $s$  de  $F^\perp$ , on procède de façon symétrique pour la prolonger en une réflexion  $\sigma$  de  $E$  vérifiant  $\sigma_F = \text{Id}_F$ .
- \* En appliquant ce procédé aux réflexions  $s_1, \dots, s_j$ , on dispose de réflexions de  $E$  notées  $\sigma_1, \dots, \sigma_j$  et vérifiant :

$$u = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_j,$$

car ces deux endomorphismes coïncident évidemment sur les sous-espaces vectoriels supplémentaires  $F$  et  $F^\perp$ .

# Chapitre 5 : Espaces vectoriels normés

<b>I</b>	<b>Généralités . . . . .</b>	<b>200</b>
1	Définition . . . . .	200
2	Inégalités triangulaires . . . . .	202
3	Distance associée à une norme . . . . .	203
4	Boules ouvertes, boules fermées . . . . .	205
5	Parties convexes . . . . .	206
6	Parties bornées, applications bornées . . . . .	207
7	Exemples d'espaces vectoriels normés . . . . .	207
8	Produit fini d'espaces vectoriels normés . . . . .	210
<b>II</b>	<b>Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . . .</b>	<b>211</b>
1	Suite convergente . . . . .	211
2	Suite à valeurs dans un espace produit . . . . .	213
3	Suites extraites, valeurs d'adhérence . . . . .	213
<b>III</b>	<b>Topologie d'un espace vectoriel normé . . . . .</b>	<b>215</b>
1	Parties ouvertes . . . . .	215
2	Parties fermées . . . . .	217
3	Voisinage d'un point . . . . .	219
4	Point intérieur, intérieur d'une partie . . . . .	220
5	Point adhérent, adhérence d'une partie . . . . .	220
6	Densité . . . . .	222
7	Frontière . . . . .	222
8	Voisinage relatif, ouvert relatif, fermé relatif . . . . .	223
<b>IV</b>	<b>Comparaison de normes . . . . .</b>	<b>225</b>
1	Domination de normes . . . . .	226
2	Normes équivalentes . . . . .	227
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>238</b>

# Espaces vectoriels normés

5

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels réels ou complexes.

## I Généralités

### 1 Définition

#### Définition 1

Étant donné un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on appelle **norme sur  $E$**  toute application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

- **homogénéité** :  $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  ;
- **inégalité triangulaire** :  $\forall(x, y) \in E^2 \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  ;
- **séparation** :  $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \implies x = 0$ .

Exo  
5.1

#### Définition 2

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

#### Notations

- On note  $(E, N)$  l'espace vectoriel  $E$  muni de la norme  $N$ . Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté quant à la norme utilisée, on peut ne pas la préciser et se contenter de noter  $E$  cet espace vectoriel normé.
- Il est souvent d'usage de noter  $\|\cdot\|$  la norme utilisée, et donc  $\|x\|$  la norme d'un vecteur  $x$ .

**Remarque** Si  $\|\cdot\|$  est une norme, la propriété d'homogénéité implique les propriétés suivantes, que nous utiliserons librement :

$$\|0\| = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \| -x \| = \|x\|.$$

**Ex. 1.** L'application  $x \mapsto |x|$  est une norme sur  $\mathbb{K}$  (où  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$  si  $\mathbb{K}$  vaut  $\mathbb{R}$  et le module de  $x$  si  $\mathbb{K}$  vaut  $\mathbb{C}$ ). Dans la suite, c'est cette norme que nous utiliserons sur  $\mathbb{K}$ .

**Ex. 2.** Les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & \max(|x|, |y|) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & |x| + |y| \end{array}$$

sont des normes sur  $\mathbb{K}^2$  (une justification sera donnée à la page 208, dans le cadre plus général de l'espace  $\mathbb{K}^n$ ), appelées respectivement **norme infinie** et **norme 1**, et notées  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$ .

**Remarque** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors la norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  induit naturellement une structure d'espace vectoriel normé sur  $F$ , par sa restriction à  $F$  :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

Cette restriction est appelée **norme induite** sur  $F$  par la norme  $\|\cdot\|$ .

**Ex. 3.** La valeur absolue est la norme induite sur  $\mathbb{R}$  par le module sur  $\mathbb{C}$ .

### Proposition 1

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ . Alors l'application :

$$x \mapsto \sqrt{(x | x)}$$

est une norme sur  $E$ .

Démonstration page 229

**Principe de démonstration.** L'inégalité triangulaire est obtenue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Terminologie** Avec les notations précédentes, la norme définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)}$$

est appelée **norme euclidienne** associée au produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

De la proposition 1 on déduit que les espaces préhilbertiens réels suivants sont naturellement munis d'une structure d'espace vectoriel normé :

**Ex. 4.** l'espace  $\mathbb{R}^2$ , muni du produit scalaire canonique :

$$\left( (x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \right) = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

dont la norme associée est donnée par  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  ;

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Ex. 5.** plus généralement, l'espace  $\mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire canonique :

$$\left( (x_1, \dots, x_n) \mid (y_1, \dots, y_n) \right) = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

dont la norme associée est donnée par  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  ;

**Ex. 6.** l'espace  $C([a, b], \mathbb{R})$  (avec  $a < b$ ) des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni du produit scalaire  $(f \mid g) = \int_a^b fg$ , dont la norme associée est donnée par  $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2}$ . [ ]

**Terminologie** Dans chacun des trois exemples précédents, la norme euclidienne considérée est appelée **norme 2** (cf. section I.7 page 207) et est notée  $\|\cdot\|_2$ .

Dans toute la suite de ce chapitre, et sauf mention du contraire,  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé (et la norme  $\|\cdot\|$  n'est pas supposée euclidienne).

### Vecteur unitaire

#### Définition 3

Un vecteur  $x$  de  $E$  est dit **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .

**Ex. 7.** Dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ , étant donné  $x$  un vecteur non nul, il existe un unique vecteur unitaire colinéaire à  $x$  et de même sens que lui.

En effet, par homogénéité de la norme, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|.$$

Ainsi, le vecteur  $\lambda x$  est unitaire si, et seulement si,  $|\lambda| \times \|x\| = 1$ , c'est-à-dire  $\lambda = \pm \frac{1}{\|x\|}$ .

Il existe donc deux vecteurs unitaires colinéaires à  $x$  qui sont  $\frac{x}{\|x\|}$  de même sens que  $x$  et  $-\frac{x}{\|x\|}$  de sens opposé à  $x$ . [ ]

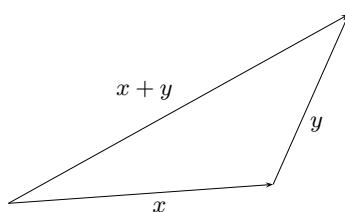
**Terminologie** Étant donné un vecteur non nul  $x$  de  $E$ , le vecteur  $\frac{x}{\|x\|}$  est appelé **vecteur unitaire associé à  $x$** .

## 2 Inégalités triangulaires

Nous avons énoncé l'inégalité triangulaire (propriété vérifiée par toute norme d'après la définition 1 de la page 200) ainsi :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Cette inégalité s'interprète en disant que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.



De manière plus complète, nous regroupons sous le nom *inégalités triangulaires* les inégalités du résultat suivant :

**Proposition 2 (Inégalités triangulaires)**

Soit  $x$  et  $y$  des vecteurs de  $E$ . Alors on a :

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration page 229

**Principe de démonstration.** Constater qu'il s'agit essentiellement de montrer que :

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

**Terminologie** L'inégalité  $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x \pm y\|$  est appelée *seconde inégalité triangulaire*.

**Attention** Si la norme considérée est *euclidienne*, c'est-à-dire si elle est associée à un produit scalaire, alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est celui où les deux vecteurs sont positivement colinéaires (résultat vu en première année, conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). En revanche, si la norme est « quelconque », et comme le montre l'exemple suivant, on peut *a priori* se trouver dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire sans que les deux vecteurs considérés soient colinéaires.

**Ex. 8.** Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la *norme 1* définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

et considérons les vecteurs  $u = (1, 0)$  et  $v = (0, 1)$ .

On a  $u+v = (1, 1)$ , donc  $\|u+v\|_1 = 2$ . Comme  $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 1$ , les vecteurs  $u$  et  $v$  vérifient le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Pourtant, ils ne sont pas colinéaires.

**Inégalité triangulaire généralisée** La propriété d'homogénéité de la norme combinée à l'inégalité triangulaire permet, par récurrence, de montrer que si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires, alors on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\|.$$

### 3 Distance associée à une norme

**Définition 4**

On appelle **distance associée à la norme**  $\|\cdot\|$  l'application :

$$\begin{aligned} d : \quad E^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto \|y - x\|. \end{aligned}$$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Remarques** Avec les notations précédentes, on dispose des propriétés suivantes :

- *séparation* :  $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$  ;
- *symétrie* :  $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$  ;
- *invariance par translation* :  $\forall (x, y, u) \in E^3 \quad d(x + u, y + u) = d(x, y)$  ;
- $\forall x \in E \quad \|x\| = d(0, x)$ , i.e. la norme de  $x$  est sa distance au vecteur nul.

### Formulation des inégalités triangulaires en terme de distance

#### Proposition 3

Pour tout  $(u, v, w) \in E^3$ , on a :

$$|d(u, v) - d(v, w)| \leq d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

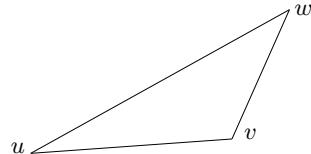
**Démonstration.** On applique la proposition 2 aux vecteurs  $x = v - u$  et  $y = w - v$ .  $\square$

De manière moins formelle, l'inégalité :

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

signifie que les propriétés « géométriquement intuitives » suivantes sont vraies :

- dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres ;
- *un* plus court chemin entre deux points est la ligne droite.



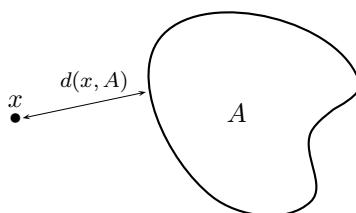
**Attention** Le choix de l'article indéfini *un* dans la phrase « *un* plus court chemin entre deux points » n'est pas anodin : la ligne droite est *un* plus court chemin entre deux points, mais pas nécessairement le seul (cf. exemple 8 de la page précédente).

Dans la suite, et sauf mention du contraire,  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé et  $d$  désigne la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$ .

#### Distance à une partie

#### Définition 5

Étant donné une partie  $A$  non vide de  $E$  ainsi que  $x$  un élément de  $E$ , on appelle **distance de  $x$  à  $A$** , et l'on note  $d(x, A)$ , la quantité :



$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Exo  
5.2

**Remarques** Avec les notations de la définition précédente :

- le caractère non vide de  $A$  implique que  $\{d(x, a) \mid a \in A\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$ , ce qui assure d'une part l'existence de sa borne inférieure  $d(x, A)$ , et d'autre part que  $d(x, A) \geq 0$  ;
- par définition de la distance  $d$ , on a aussi :

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

**Attention** Si  $x$  appartient à  $A$ , alors il est clair que  $d(x, A) = 0$ . En revanche, la réciproque est fausse. Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  muni de la valeur absolue, on a  $d(0, \mathbb{R}_+^*) = 0$  et pourtant  $0 \notin \mathbb{R}_+^*$ . Cela prouve au passage qu'il n'existe pas toujours d'élément  $a \in A$  tel que  $d(x, A) = d(x, a)$ .

**Terminologie** Lorsqu'il existe un élément  $a \in A$  tel que  $d(x, A) = d(x, a)$ , on dit que la distance de  $x$  à  $A$  est **atteinte**.

#### Proposition 4

Étant donné  $A$  une partie non vide de  $E$ , et  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Démonstration page 229

**Principe de démonstration.** Par symétrie en  $x$  et  $y$ , il suffit de montrer l'inégalité sans les valeurs absolues  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ .



**Remarque** Le résultat précédent se reformule en disant que l'application  $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  est 1-lipschitzienne.

$$x \mapsto d(x, A)$$

## 4 Boules ouvertes, boules fermées

#### Définition 6

Soit  $a$  un élément de  $E$  et  $r$  un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$**  la partie :

$$B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}.$$

- On appelle **boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$**  la partie :

$$B_f(a, r) = \{x \in E : d(a, x) \leq r\}.$$

- On appelle **sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$**  la partie :

$$S(a, r) = \{x \in E : d(a, x) = r\}.$$

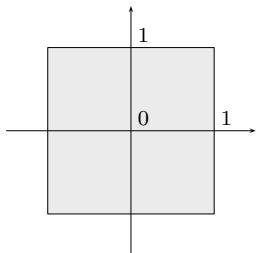
Exo  
5.3

#### Remarques

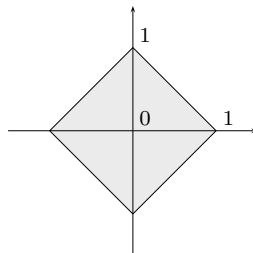
- On a  $S(a, r) = B_f(a, r) \setminus B(a, r)$ .
- Par défaut, la notation  $B(a, r)$  désigne une boule ouverte. En cas de risque de confusion, on pourra la noter  $B_O(a, r)$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

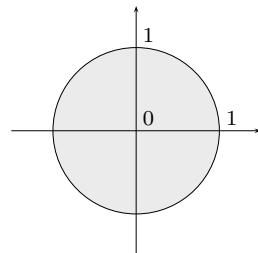
**Ex. 9.** Dans  $\mathbb{R}^2$  muni successivement des normes infinie, un et deux, dessinons la **boule unité fermée** (i.e. la boule fermée de centre 0 et de rayon 1) :



pour la norme infinie



pour la norme 1



pour la norme 2

**Notation** Lorsque l'on travaille dans un espace euclidien de dimension 2, on parle généralement de *disque* plutôt que de *boule*, et l'on utilise alors respectivement les notations  $D(a, r)$  et  $D_f(a, r)$  au lieu de  $B(a, r)$  et  $B_f(a, r)$ .

## 5 Parties convexes

Dans cette section, l'espace  $E$  est supposé *réel*.

Exo  
5.4

### Définition 7

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **convexe** si :

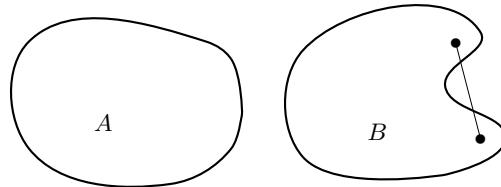
$$\forall(x, y) \in A^2 \quad \forall\lambda \in [0, 1] \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

**Terminologie** Étant donné deux points  $x$  et  $y$ , l'ensemble des points de la forme :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \quad \text{avec } \lambda \in [0, 1]$$

est appelé **segment**  $[x, y]$ .

**Interprétation** Dire qu'une partie  $A$  est convexe signifie qu'étant donné deux points de  $A$ , le segment reliant ces deux points est inclus dans  $A$ . Dans les dessins ci-contre, la partie  $A$  est convexe, mais la partie  $B$  ne l'est pas.



**Ex. 10.** L'ensemble vide est convexe.

**Ex. 11.** Tout singleton est convexe.

**Ex. 12.** Les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

### Proposition 5

Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe.

Démonstration page 230

## 6 Parties bornées, applications bornées

### Parties bornées

Exo  
5.6

#### Définition 8

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **bornée** s'il existe un réel positif  $R$  tel que :

Exo  
5.7

$$\forall a \in A \quad \|a\| \leq R.$$

### Applications bornées, suites bornées

#### Définition 9

Soit  $X$  un ensemble non vide. Une application  $f : X \rightarrow E$  est dite **bornée** si  $f(X)$  est une partie bornée de  $E$ , autrement dit s'il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq R.$$

### Remarques

- Une suite d'éléments de  $E$  n'étant rien d'autre qu'une application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ , la définition précédente s'applique. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée s'il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\| \leq R.$$

- Il est facile de vérifier que l'ensemble des applications bornées de  $X$  dans  $E$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(X, E)$  des fonctions de  $X$  dans  $E$ .

**Notation** L'espace des applications bornées de  $X$  dans  $E$  est noté  $\mathcal{B}(X, E)$ .

**Remarque** Il est clair, d'après la définition, que la notion de partie bornée (et donc de fonction ou suite bornée) dépend de la norme utilisée. Nous verrons :

- qu'il est possible qu'une partie soit bornée pour une norme mais ne le soit pas pour une autre (cf. exemple 48 de la page 226) ;
- que, néanmoins, des normes équivalentes définissent les mêmes parties bornées (cf. proposition 39 de la page 228).

227

## 7 Exemples d'espaces vectoriels normés

Le résultat suivant sera utile, en particulier pour prouver des propriétés d'homogénéité.

#### Lemme 6

Étant donné  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\sup(kA) = k \sup(A).$$

Démonstration page 230

**Remarque** Ce résultat s'applique en particulier si la partie  $A$  admet un plus grand élément, et l'on a dans ce cas  $\max(kA) = k \max(A)$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Si  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{K}^n$ , on note  $(x_1, \dots, x_n)$  ses composantes, et l'on pose :

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| ; \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

#### Proposition 7

Les trois applications suivantes sont des normes :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\|_\infty \end{array} ; \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\|_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}.$$

Démonstration page 230

**Terminologie** Ces normes sont respectivement appelées **norme infinie**, **norme 1** et **norme 2**.

**Attention** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors on a  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , mais si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la présence des modules est indispensable pour que la définition de  $\|x\|_2$  ait un sens.

### Généralisation à tout espace vectoriel de dimension finie

#### Proposition 8

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

Pour  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ , posons :

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| ; \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Alors les applications  $x \mapsto \|x\|_\infty$ ,  $x \mapsto \|x\|_1$  et  $x \mapsto \|x\|_2$  sont des normes sur  $E$ , appelées respectivement **norme infinie**, **norme 1** et **norme 2** dans la base  $\mathcal{B}$ .

Démonstration page 231

**Principe de démonstration.** En utilisant l'isomorphisme qui à un vecteur de  $E$  associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ , on peut exploiter les propriétés des trois normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$ .

### Espace des fonctions bornées

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $X$  un ensemble non vide. L'ensemble  $\mathcal{B}(X, E)$  des applications bornées de  $X$  dans  $E$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(X, E)$  des applications de  $X$  dans  $E$ .

#### Proposition 9

L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}(X, E) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \|f\|_\infty \end{array} \quad \text{où} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur  $\mathcal{B}(X, E)$ , appelée **norme infinie**.

Démonstration page 232

**Terminologie** On parle aussi de **norme de la convergence uniforme**.

**Remarque** En particulier, on peut considérer la norme infinie sur l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$  des suites bornées à valeurs dans  $E$ . Pour  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ , on a :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|.$$

### Espace des fonctions continues sur un segment à valeurs scalaires

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On note  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues du segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$ . On sait que  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ , et même de  $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$  (car toute fonction continue sur un segment est bornée).

Outre la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , on dispose sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  des deux normes classiques suivantes :

#### Proposition 10 (Norme 1 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ )

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_1 \end{array} \quad \text{où} \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , appelée **norme 1**.

Démonstration page 232

#### Proposition 11 (Norme 2 sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ )

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_2 \end{array} \quad \text{où} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , appelée **norme 2**.

Démonstration page 233

**Principe de démonstration.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors la norme 2 n'est rien d'autre que la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  défini par  $(f | g) = \int_a^b fg$ . Pour traiter le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se ramener au cas réel en remarquant que  $\|f\|_2 = \||f|\|_2$ .

**Attention** Contrairement à la norme infinie, on ne peut pas étendre les normes 1 et 2 à l'espace  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions continues par morceaux de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{K}$ , puisque la propriété de séparation serait mise en défaut. En effet, toute fonction nulle sauf en un nombre fini de points vérifie  $\int_a^b |f| = \int_a^b |f|^2 = 0$  (par exemple la fonction  $\mathbb{1}_{\{a\}}$ ).

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Espace des polynômes

Sur  $\mathbb{K}[X]$ , plusieurs normes classiques peuvent être considérées :

- celles utilisant la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des coefficients d'un polynôme  $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ , dont on sait qu'elle est presque nulle (*i.e.* nulle à partir d'un certain rang) :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|;$$

*pour une justification que ce sont bien des normes, on pourra se référer à l'exercice 5.12 de la page 239, qui traite la situation plus générale d'un espace vectoriel muni d'une base ;*

- celles définies à l'aide de la fonction polynomiale  $t \mapsto P(t)$  ; dans ce qui suit,  $a$  et  $b$  désignent deux réels vérifiant  $a < b$  :

$$\|P\|_1 = \int_a^b |P(t)| dt, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |P(t)|;$$

dans ce cas, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire proviennent du fait que  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  définissent des normes sur  $C([a,b], \mathbb{K})$  ; pour la séparation, on utilise de plus le fait qu'un polynôme dont la fonction polynomiale associée est nulle sur  $[a,b]$  admet une infinité de racines, donc est nul.

## 8 Produit fini d'espaces vectoriels normés

### Proposition 12

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  ainsi que  $p$  espaces vectoriels normés  $(E_1, \varphi_1), \dots, (E_p, \varphi_p)$  sur  $\mathbb{K}$ . L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 \times \cdots \times E_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \max(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p)) \end{aligned}$$

est une norme sur  $E_1 \times \cdots \times E_p$ , appelée **norme produit**.

Démonstration page 233

**Ex. 13.** La norme infinie sur  $\mathbb{K}^n$  est la norme produit obtenue en considérant, sur  $\mathbb{K}$ , la norme  $x \mapsto |x|$ .

**Remarque** En plus de la norme produit présentée dans la proposition précédente, d'autres normes peuvent être construites sur un espace produit (cf. exercice 5.8).

## II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On rappelle qu'une suite  $a$  à valeurs dans  $E$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ . Une telle suite est souvent notée  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , voire plus simplement  $(a_n)$ .

On appelle  $a_n$  le **terme général** de la suite  $a$ .

### 1 Suite convergente

#### Définition 10

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  ainsi que  $\ell \in E$ . On dit que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge** vers  $\ell$  si la suite réelle  $(\|a_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\ell$  si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|a_n - \ell\| \leq \varepsilon,$$

ou encore, en terme de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad d(a_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

**Notation** Pour signifier qu'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , on écrit  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$  ou plus simplement  $a_n \rightarrow \ell$ .

#### Proposition 13 (Unicité de la limite)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  ainsi que  $\ell_1$  et  $\ell_2$  appartenant à  $E$ . Si  $a_n \rightarrow \ell_1$  et  $a_n \rightarrow \ell_2$ , alors  $\ell_1 = \ell_2$ .

**Démonstration.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergeant à la fois vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

L'inégalité triangulaire donne :

$$0 \leq d(\ell_1, \ell_2) \leq \underbrace{d(\ell_1, a_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(a_n, \ell_2)}_{\rightarrow 0}.$$

En passant à la limite, on obtient  $d(\ell_1, \ell_2) = 0$ , c'est-à-dire  $\ell_1 = \ell_2$ . □

#### Définition 11

- Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **convergente** s'il existe un élément  $\ell$  de  $E$  tel que  $a_n \rightarrow \ell$ . Cet élément  $\ell$  est alors appelé **limite** de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On le note  $\lim a_n$ .
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

**Attention** La convergence d'une suite dépend de la norme utilisée. Une suite peut converger pour une norme et diverger pour une autre (cf. exemple suivant).

**Ex. 14.** Dans l'espace  $C([0, 1], \mathbb{R})$ , considérons la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_n(x) = x^n$ .

- D'une part, on a  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ , donc la suite  $(f_n)$  converge, au sens de la norme 1, vers la fonction nulle.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

- Montrons désormais que la suite  $(f_n)$  n'est pas convergente au sens de la norme infinie. Par l'absurde : supposons que  $(f_n)$  converge, et notons  $f$  sa limite (dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ).

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , donc la suite réelle  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$ . Il vient alors que  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Cela constitue une contradiction, car la fonction  $f$  obtenue n'est pas continue.

**Remarque** Nous verrons cependant que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes (cf. proposition 40 de la page 228).

### Opérations algébriques sur les suites convergentes

#### Proposition 14 (Combinaison linéaire de deux suites convergentes)

Si deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux scalaires, alors la suite de terme général  $\lambda a_n + \mu b_n$  converge vers  $\lambda \ell_1 + \mu \ell_2$ .

**Démonstration.** Cela découle de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité de la norme :

$$\begin{aligned} \|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda \ell_1 + \mu \ell_2)\| &= \|\lambda(a_n - \ell_1) + \mu(b_n - \ell_2)\| \\ &\leq |\lambda| \underbrace{\|a_n - \ell_1\|}_{\rightarrow 0} + |\mu| \underbrace{\|b_n - \ell_2\|}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

□

### Remarques

- Par récurrence, on généralise le résultat précédent à une combinaison linéaire quelconque de suites : si  $(a_n^{(1)}), \dots, (a_n^{(p)})$  sont  $p$  suites, convergeant respectivement vers  $\ell_1, \dots, \ell_p$ , alors pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ , la suite de terme général  $\sum_{k=1}^p \lambda_k a_n^{(k)}$  converge vers  $\sum_{k=1}^p \lambda_k \ell_k$ .
- La proposition 14 nous indique que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$  des suites à valeurs dans  $E$ .

#### Proposition 15

Si une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , alors la suite de terme général  $\|a_n\|$  converge vers  $\|\ell\|$ .

**Démonstration.** Cela découle de la seconde inégalité triangulaire :

$$0 \leq \|\|a_n\| - \|\ell\|\| \leq \underbrace{\|a_n - \ell\|}_{\rightarrow 0}.$$

□

### Corollaire 16

Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration.** Utilisons le résultat déjà connu pour les suites réelles. Supposons que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente. D'après la proposition précédente, la suite réelle  $(\|a_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est également convergente, donc bornée.

□

## 2 Suite à valeurs dans un espace produit

Soit  $(E_1, \varphi_1), \dots, (E_p, \varphi_p)$  des espaces vectoriels normés. On rappelle (cf. proposition 12 de la page 210) que l'espace  $E_1 \times \dots \times E_p$  est muni d'une structure d'espace vectoriel normé grâce à la norme produit définie par :

$$\|(x_1, \dots, x_p)\| = \max (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p)).$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on considère  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $E_k$ , et l'on s'intéresse à la convergence, au sens de la norme produit, de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , à valeurs dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ , de terme général :

$$a_n = (a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)}).$$

La proposition suivante énonce que la convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  revient à celle de chacune des suites  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Proposition 17

La suite de terme général  $(a_n^{(1)}, \dots, a_n^{(p)})$  converge si, et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite de terme général  $a_n^{(k)}$  converge.

En notant alors  $\ell_k$  la limite de la suite  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'élément  $(\ell_1, \dots, \ell_p)$  de  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

Démonstration page 234.

**Ex. 15.** Une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}^p$  converge au sens de la norme infinie si, et seulement si, chacune des suites composantes converge. L'étude de la convergence d'une telle suite revient donc à l'étude de  $p$  suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

## 3 Suites extraites, valeurs d'adhérence

Comme dans le cas des suites réelles ou complexes, on appelle **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $\varphi$  est une **extraction**, c'est-à-dire une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

On l'appelle aussi **fonction extractrice**.

### Proposition 18

Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.

**Démonstration.** Utilisons le résultat déjà connu pour les suites réelles. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente vers  $\ell$ , et si  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  en est une sous-suite, alors la suite réelle de terme général  $\|a_{\varphi(n)} - \ell\|$  tend vers 0 car c'est une sous-suite de la suite réelle  $(\|a_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0.  $\square$

### Définition 12

On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tout élément de  $E$  qui est limite d'une sous-suite de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque** D'après la proposition 18, une suite convergente ne possède qu'une seule valeur d'adhérence : sa limite.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Point méthode** Pour montrer qu'une suite est divergente, on peut utiliser la contraposée de la remarque précédente : il suffit de montrer qu'elle possède au moins deux valeurs d'adhérence.

**Ex. 16.** La suite réelle de terme général  $(-1)^n$  est divergente, car elle possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence.

**Ex. 17.** Soit  $(x, y) \in E^2$ , avec  $x \neq 0$ . La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_n = (-1)^n x + 2^{-n} y$  ne converge pas car possède  $x$  et  $-x$  comme valeurs d'adhérence. En effet :

- on a  $a_{2n} \rightarrow x$  car  $\|a_{2n} - x\| = \|2^{-2n}y\| = 2^{-2n}\|y\| \rightarrow 0$  ;
- on a  $a_{2n+1} \rightarrow -x$  car  $\|a_{2n+1} + x\| = \|2^{-2n-1}y\| = 2^{-2n-1}\|y\| \rightarrow 0$ .

**Attention** Comme le montre l'exemple suivant, ce n'est pas parce qu'une suite ne possède qu'une seule valeur d'adhérence qu'elle converge.

Nous verrons néanmoins que c'est le cas si elle est à valeurs dans une partie compacte (cf. théorème 5 de la page 291).

**Ex. 18.** Considérons la suite de terme général  $a_n = n(1 + (-1)^n)$ .

- La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, car sa sous-suite  $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
- Montrons néanmoins que  $(a_n)$  possède 0 comme unique valeur d'adhérence.
  - \* On voit facilement que 0 est valeur d'adhérence, car c'est la limite de la sous-suite  $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - \* Montrons qu'il n'y a pas d'autres valeurs d'adhérence.Pour cela, considérons un réel  $x$  non nul ainsi qu'une sous-suite  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et montrons que  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers  $x$ .
  - \* Si  $\varphi$  prend une infinité de valeurs impaires, alors  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  possède 0 comme valeur d'adhérence ;
  - \* sinon,  $\varphi$  prend une infinité de valeurs paires, et alors  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite tendant vers  $+\infty$ .

Dans les deux cas, la sous-suite  $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers  $x$ .

### Proposition 19 (Caractérisation des valeurs d'adhérence)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $E$ . Un élément  $x \in E$  est valeur d'adhérence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \|a_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration page 234

# III Topologie d'un espace vectoriel normé

## 1 Parties ouvertes

### Définition 13

Soit  $U$  une partie de  $E$ . On dit que  $U$  est un **ouvert de  $E$** , ou une **partie ouverte de  $E$** , si :

$$\forall x \in U \quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \subset U.$$

**Remarque** Dans la définition ci-dessus, on peut remplacer la boule ouverte  $B(x, r)$  par la boule fermée  $B_f(x, r)$ , car :

- si  $B_f(x, r) \subset U$ , alors  $B(x, r) \subset U$  ;
- si  $B(x, r) \subset U$ , alors  $B_f\left(x, \frac{r}{2}\right) \subset U$ .

**Ex. 19.** Il est clair, d'après la définition, que  $E$  et  $\emptyset$  sont des parties ouvertes de  $E$ .

**Ex. 20.** Supposons que  $E$  ne soit pas l'espace nul. Un singleton n'est pas une partie ouverte de  $E$ . En effet, pour tout  $x \in E$  et  $r > 0$ , on a  $B(x, r) \not\subset \{x\}$  car, si  $u$  désigne un vecteur unitaire, on a  $x + \frac{r}{2}u \in B(x, r) \setminus \{x\}$ .

**Terminologie** Pour signifier qu'une partie  $U$  est un ouvert de  $E$ , on dit aussi que  $U$  est **ouverte dans  $E$** .

**Abus de langage** Parfois, on se permet de parler d'ouverts et de parties ouvertes, sans préciser « de  $E$  ». Comme l'illustre l'exemple 21, cela nécessite qu'il n'y ait aucune ambiguïté sur ce qu'est l'espace  $E$  dans lequel on se place.

### Proposition 20

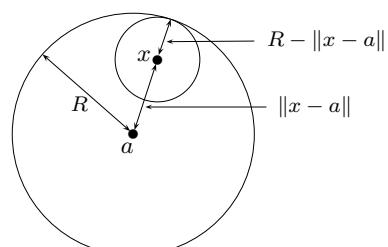
Toute boule ouverte est ouverte.

Démonstration page 234

### Principe de démonstration.

Pour  $x$  appartenant à une boule de centre  $a$  de rayon  $R$ , considérer la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon :

$$R - \|x - a\|.$$



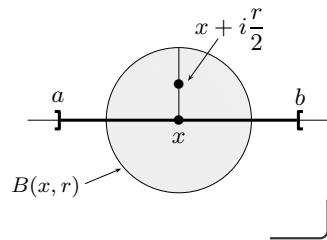
**Remarque** Le dessin fait lors de la démonstration précédente correspond à une norme euclidienne, mais nous a permis de trouver une démonstration valable pour toute norme. Cette représentation des boules n'induit en général pas de fausse intuition lors de considérations topologiques, c'est pourquoi on l'utilise couramment.<sup>1</sup>

1. Concrètement, le risque majeur de cette vision euclidienne concerne le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (cf. le « Attention » de la page 203).

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Ex. 21.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

- L'intervalle  $]a, b[$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$  (muni de la valeur absolue), car c'est la boule de centre  $\frac{a+b}{2}$  et de rayon  $\frac{b-a}{2}$ .
- L'intervalle ouvert  $]a, b[$  n'est en revanche pas ouvert dans  $\mathbb{C}$  (muni du module). En effet, pour  $x \in ]a, b[$  et  $r > 0$ , la boule ouverte de centre  $x$  de rayon  $r > 0$  n'est pas incluse dans  $]a, b[$ . Par exemple, le nombre complexe  $x + i\frac{r}{2}$  appartient à cette boule mais pas à l'intervalle  $]a, b[$ .



**Remarque** Plus généralement, tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire de la forme  $]-\infty, b[, ]a, b[$  ou  $]a, +\infty[$ , est ouvert dans  $\mathbb{R}$  mais pas dans  $\mathbb{C}$ .

**Attention** Comme l'illustre l'exemple précédent, le caractère ouvert ou non d'un ensemble n'est pas une notion intrinsèque à cet ensemble, mais dépend de l'espace dans lequel on le considère.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors une partie ouverte dans  $F$  n'est en général pas ouverte dans  $E$ .

### Proposition 21

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte.
- L'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte.

Démonstration page 234

**Remarque** En particulier, une réunion quelconque de boules ouvertes est un ouvert de  $E$ . En fait, la réciproque de ceci est vraie (comme l'illustre l'exemple suivant).

**Ex. 22.** Toute partie ouverte de  $E$  peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.

Soit en effet  $U$  une partie ouverte de  $E$ . Pour tout  $x \in U$ , il existe  $r_x > 0$  tel que  $B(x, r_x) \subset U$ , et l'on a alors  $U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x)$ .

**Attention** Une intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être ouverte, comme l'illustre l'exemple suivant.

**Ex. 23.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $U_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ . On a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$ . Ainsi, bien que chacun des  $U_n$  soit ouvert, leur intersection ne l'est pas.

### Proposition 22

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit. Si  $U_1, \dots, U_p$  sont ouverts dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, alors  $U_1 \times \dots \times U_p$  est ouvert dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

Démonstration page 235

## 2 Parties fermées

### Définition 14

On dit qu'une partie de  $E$  est un **fermé de  $E$** , ou une **partie fermée de  $E$** , si son complémentaire est ouvert.

**Remarque** D'après la définition, il est clair que  $E$  et  $\emptyset$  sont des parties fermées de  $E$ , puisque leurs complémentaires, respectivement  $\emptyset$  et  $E$ , sont ouverts dans  $E$ .

**Terminologie** Pour signifier qu'une partie  $F$  est un fermé de  $E$ , on dit aussi que  $F$  est **fermée dans  $E$** .

**Abus de langage** Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace  $E$  dans lequel on se place, on se permet parfois de parler de fermés et de parties fermées, sans préciser « de  $E$  ».

**Ex. 24.** Dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle fermé, i.e. de la forme  $]-\infty, b]$ ,  $[a, b]$  ou  $[a, +\infty[$ , est fermé. En effet, leurs complémentaires sont respectivement  $]b, +\infty[$ ,  $]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  et  $]-\infty, a[$ , qui sont ouverts.

**Attention** Il ne faut pas croire, par jeu de mots, qu'une partie qui n'est pas ouverte est nécessairement fermée. En effet, dans tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé non réduit à  $\{0\}$ , il existe des parties ni ouvertes ni fermées (cf. exemple suivant), et il existe également des parties à la fois ouvertes et fermées ( $\emptyset$  et  $E$ ).

**Ex. 25.** Dans  $\mathbb{R}$ , l'intervalle  $I = [0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé. En effet :

- il n'est pas ouvert car  $0 \in I$  mais, pour tout  $r > 0$ , on a  $]r, r[ \not\subset I$ ;
- il n'est pas fermé car on a  $\mathbb{R} \setminus I = ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ , donc  $1 \in \mathbb{R} \setminus I$  mais, pour tout  $r > 0$ , on a  $]1 - r, 1 + r[ \not\subset \mathbb{R} \setminus I$ .

### Proposition 23 (Caractérisation séquentielle des parties fermées)

Une partie  $A \subset E$  est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de  $A$  appartient à  $A$ .

Démonstration page 235

**Ex. 26.** Tout singleton est fermé. En effet, étant donné  $x \in E$ , la seule suite à valeurs dans le singleton  $\{x\}$  est la suite constante égale à  $x$ , qui converge évidemment vers  $x$ .

**Ex. 27.** Pour justifier que l'intervalle  $[0, 1[$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$ , on peut considérer la suite de terme général  $1 - 2^{-n}$ , à valeurs dans  $[0, 1[$ , mais convergeant vers  $1 \notin [0, 1[$ .

**Ex. 28.** Montrons que si  $E$  est un espace préhilbertien réel et  $A$  une partie de  $E$ , alors l'orthogonal de  $A$  est une partie fermée. Par caractérisation séquentielle : soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $A^\perp$ . Supposons que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell$  et montrons que  $\ell \in A^\perp$ . Soit  $a \in A$ . Par bilinéarité du produit scalaire puis inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|(x_n | a) - (\ell | a)| = |(x_n - \ell | a)| \leq \|x_n - \ell\| \|a\| \rightarrow 0 \quad \text{donc} \quad (x_n | a) \rightarrow (\ell | a).$$

Comme on a :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (x_n | a) = 0$ , on en déduit que  $(\ell | a) = 0$ , autrement dit  $\ell \in A^\perp$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Proposition 24

Toute boule fermée est fermée.

**Démonstration.** Procérons par caractérisation séquentielle.

Soit  $B$  une boule fermée. Notons  $\omega$  son centre et  $R$  son rayon. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente à valeurs dans  $B$ . Montrons que sa limite  $\ell$  appartient à  $B$ . Le fait que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit à valeurs dans  $B$  se traduit ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n - \omega\| \leq R.$$

Or, puisque  $a_n \rightarrow \ell$ , on a  $a_n - \omega \rightarrow \ell - \omega$ , puis  $\|a_n - \omega\| \rightarrow \|\ell - \omega\|$ . Par passage à la limite dans une inégalité large, on en déduit que  $\|\ell - \omega\| \leq R$ , autrement dit  $\ell \in B$ .

Cela prouve, par caractérisation séquentielle, que  $B$  est une partie fermée de  $E$ .  $\square$

### Proposition 25

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.
- La réunion d'une famille finie de fermés est fermée.

**Démonstration.** En considérant les complémentaires, ce résultat découle de la proposition 21 de la page 216. En effet, si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille de fermés, alors on a :

$$E \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus A_i) \quad \text{et} \quad E \setminus \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i). \quad \square$$

**Ex. 29.** Soit  $S$  une sphère. Notons  $a$  son centre et  $r$  son rayon.

Par définition, on a  $S = B_f(a, r) \setminus B(a, r)$ , c'est-à-dire  $S = B_f(a, r) \cap (E \setminus B(a, r))$ .

La sphère  $S$  est donc fermée, comme intersection de deux parties fermées.

**Attention** Une réunion quelconque de fermés peut ne pas être fermée, comme l'illustre l'exemple suivant.

**Ex. 30.** Dans  $\mathbb{R}$ , notons, pour tout  $n \geq 2$ ,  $F_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ . On a  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = [0, 1[$ . Ainsi, bien que chacun des  $F_n$  soit fermé, leur réunion ne l'est pas (cf. exemple 27 de la page précédente).

**Remarque** Plus généralement, toute partie  $A$  peut être obtenue comme une réunion de fermés : il suffit d'écrire  $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ .

### Proposition 26

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On munit l'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit. Si  $F_1, \dots, F_p$  sont fermés dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, alors  $F_1 \times \dots \times F_p$  est fermé dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

Démonstration page 235

**Principe de démonstration.** On peut procéder par caractérisation séquentielle.

### 3 Voisinage d'un point

#### Définition 15

Exo  
5.14

Étant donné  $V$  une partie de  $E$  et  $a \in E$ , on dit que  $V$  est un **voisinage de  $a$**  s'il existe  $r > 0$  tel que la boule ouverte  $B(a, r)$  soit incluse dans  $V$ .

#### Remarques

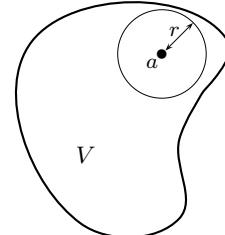
- Dire que  $V$  est un voisinage de  $a$  signifie qu'il existe  $r > 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x - a\| < r \implies x \in V ;$$

autrement dit, être suffisamment proche du point  $a$  assure d'être dans  $V$ .

En particulier, tout voisinage de  $a$  contient  $a$ .

- On peut, sans en changer la signification, remplacer « boule ouverte » par « boule fermée » dans la définition 15.



**Ex. 31.** Étant donné  $a \in E$ , tout ouvert contenant  $a$  est un voisinage de  $a$ .

En effet, si  $U$  est un tel ouvert, le caractère ouvert de  $U$  assure qu'il existe  $r > 0$  tel que la boule  $B(a, r)$  soit incluse dans  $U$ , donc  $U$  est un voisinage de  $a$ .

#### Proposition 27

Soit  $a \in E$  ainsi que  $V$  un voisinage de  $a$ . Si  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  est une suite convergeant vers  $a$ , alors il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \in V.$$

**Démonstration.** Immédiat d'après les définitions de voisinage et de suite convergente, car :

- $V$  étant un voisinage de  $a$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$  ;
- si une suite  $(u_n)$  converge vers  $a$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0 \quad u_n \in B(a, r)$ .  $\square$

**Remarque** Le résultat s'applique en particulier à tout ouvert contenant  $a$ , puisqu'un tel ouvert est un voisinage de  $a$ .

#### Opérations sur les voisinages

#### Proposition 28

Soit  $x$  un élément de  $E$ .

- Une intersection finie de voisinages de  $x$  est encore un voisinage de  $x$ .
- Si  $V$  est un voisinage de  $x$ , alors toute partie de  $E$  contenant  $V$  est également un voisinage de  $x$ .

Démonstration page 236

**Remarque** Le second point de la proposition précédente implique qu'une réunion quelconque non vide de voisinages de  $x$  en est encore un.

## 4 Point intérieur, intérieur d'une partie

### Définition 16

- On dit qu'un point  $x$  est **intérieur** à une partie  $A$  de  $E$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ , i.e. s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .
- L'ensemble des points intérieurs à  $A$  est appelé **intérieur de  $A$**  ; on le note  $\overset{\circ}{A}$  ou  $\text{Int}(A)$ .

### Remarques

- On a vu que si  $A$  est un voisinage de  $x$ , alors  $x \in A$ . On en déduit que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .
- Un ouvert étant un voisinage de chacun de ses points, il est clair qu'un ouvert est son propre intérieur.
- La proposition 28 de la page précédente donne les résultats suivants :
  - \* si  $x$  est intérieur à un nombre fini de parties de  $E$ , alors  $x$  est intérieur à leur intersection ;
  - \* si  $A$  et  $B$  sont deux parties vérifiant  $A \subset B$ , alors on a  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

**Attention** La réciproque du dernier point évoqué est fausse : on peut trouver deux parties  $A$  et  $B$  vérifiant  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$  sans pour autant avoir  $A \subset B$ .

On peut même trouver deux ensembles qui ne sont pas égaux mais qui ont même intérieur. Par exemple, dans  $\mathbb{R}$ , si  $A = [0, 1]$  et  $B = [0, 1[$ , alors on a  $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = ]0, 1[$ , et pourtant  $A \neq B$ .

### Proposition 29

L'intérieur d'une partie  $A$  est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) qui soit inclus dans  $A$ .

Démonstration page 236.

### Conséquences

- L'intérieur d'une partie  $A$  est la réunion de tous les ouverts inclus dans  $A$ . En effet, la réunion de tous les ouverts inclus dans  $A$  est un ouvert (d'après la proposition 21 de la page 216), il est inclus dans  $A$ , et il contient de manière évidente tout ouvert inclus dans  $A$ .
- Une partie  $A$  est ouverte si, et seulement si,  $\overset{\circ}{A} = A$ .

## 5 Point adhérent, adhérence d'une partie

### Définition 17

- On dit qu'un point  $x$  est **adhérent** à une partie  $A$  de  $E$  si pour tout  $r > 0$ , on a  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .
- L'ensemble des points adhérents à  $A$  est appelé **adhérence** de  $A$  ; on le note  $\overline{A}$  ou  $\text{Adh}(A)$ .

### Remarques

- Si  $x \in A$ , alors  $x$  est adhérent à  $A$ , car alors toute boule ouverte centrée en  $x$  contient  $x$  et donc rencontre  $A$ . On a donc  $A \subset \text{Adh}(A)$ .
- Dire qu'un point  $x$  n'appartient pas à l'adhérence de  $A$  signifie qu'on peut trouver  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A = \emptyset$  (ou encore  $B(x, r) \subset E \setminus A$ ), ce qui signifie que  $x$  appartient à l'intérieur de  $E \setminus A$ . On a donc la relation :

$$E \setminus (\text{Adh } A) = \text{Int}(E \setminus A),$$

ce qui mène également aux deux relations suivantes :

$$\text{Adh } A = E \setminus \text{Int}(E \setminus A) \quad \text{et} \quad \text{Int } A = E \setminus \text{Adh}(E \setminus A).$$

- L'intérieur d'une partie est toujours un ouvert, la première des relations ci-dessus nous assure que l'adhérence d'une partie est toujours fermée.

### Proposition 30

L'adhérence d'une partie  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

Démonstration page 236

### Conséquences

- L'adhérence d'une partie  $A$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ . En effet, l'intersection de tous les fermés contenant  $A$  est fermée, contient  $A$ , et est contenue dans tout fermé contenant  $A$ .
- Une partie  $A$  est fermée si, et seulement si,  $A = \overline{A}$ .

Le résultat suivant donne une caractérisation très importante des points adhérents.

### Proposition 31 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Exo  
5.15

Un point  $x$  est adhérent à une partie  $A$  si, et seulement s'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

Démonstration page 236

**Reformulation** L'adhérence d'une partie  $A$  est l'ensemble des limites des suites convergentes à valeurs dans  $A$ .

**Ex. 32.** Prouvons qu'étant donné  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ , on a :

$$x \in \text{Adh}(A) \iff d(x, A) = 0.$$

- Supposons  $d(x, A) = 0$ . Alors, pour tout  $r > 0$ , il existe  $a \in A$  vérifiant  $d(x, a) < r$ , et donc  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . On en déduit  $x \in \text{Adh}(A)$ .
- Réciproquement, supposons  $x \in \text{Adh}(A)$ . Alors, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que  $a_n \rightarrow x$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq d(x, A) \leq d(x, a_n).$$

Comme  $d(x, a_n) \rightarrow 0$ , on en déduit  $d(x, A) = 0$ .

**Conséquence** Une partie fermée étant égale à son adhérence, on en déduit que si  $F$  est une partie fermée de  $E$ , alors :

$$\forall x \in E \setminus F \quad d(x, F) > 0.$$

## 6 Densité

### Définition 18

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Une partie  $D$  de  $A$  est dite **dense** dans  $A$  si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) l'adhérence de  $D$  contient  $A$  ;
- (ii) pour tout  $a \in A$  et pour tout  $r > 0$ , il existe  $x \in D$  tel que  $\|x - a\| \leq r$  ;
- (iii) pour tout  $a \in A$ , il existe une suite d'éléments de  $D$  qui converge vers  $a$ .

### Remarques

- Dans la définition précédente, les propriétés (ii) et (iii) ne sont que des reformulations de la propriété  $A \subset \overline{D}$ .
- Une partie  $D$  est dense dans  $E$  si, et seulement si,  $\overline{D} = E$ .

**Ex. 33.** Les ensembles  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{D}$  (nombres décimaux) sont denses dans  $\mathbb{R}$  (cf. cours de première année).

**Ex. 34.** L'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . En effet, toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la limite de la suite de terme général  $A_k = A - 2^{-k}I_n$ , car, en notant  $\|\cdot\|$  la norme dont on a muni  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\|A - A_k\| = \|2^{-k}I_n\| = 2^{-k}\|I_n\| \rightarrow 0$ . Or, puisque  $A$  admet un nombre fini de valeurs propres, tous les termes de la suite  $(A_k)$  sont inversibles à partir d'un certain rang.

**Ex. 35.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . L'ensemble  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est dense dans  $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . C'est une reformulation du théorème d'approximation par des fonctions en escalier vu en première année.

**Ex. 36.** Nous verrons (cf. le théorème 19 de la page 471) que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

## 7 Frontière

### Définition 19

Soit  $A$  une partie de  $E$ . La **frontière de  $A$** , notée  $\text{Fr}(A)$ , est l'ensemble :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

### Remarques

- Dire qu'un point  $x$  appartient à la frontière de  $A$  signifie que  $x \in \overline{A}$  et  $x \notin \overset{\circ}{A}$ , i.e. :

$$\forall r > 0 \quad (B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(x, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset)$$

ou encore que  $x \in \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$ . On a donc :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}.$$

- Du point précédent il résulte que :

- \* la frontière de  $A$  est fermée (car elle est l'intersection de deux fermés) ;
- \*  $A$  et  $E \setminus A$  ont même frontière.

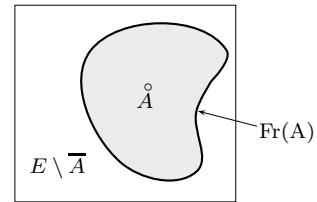
**Ex. 37.** Si  $B$  désigne une boule de centre  $a \in E$  et de rayon  $r > 0$ , alors  $\text{Fr}(B)$  est la sphère de mêmes centre et rayon.

**Ex. 38.** Si  $a$  et  $b$  sont deux réels vérifiant  $a < b$ , et si  $I$  est un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ , alors on a  $\text{Int}(I) = ]a, b[$  et  $\text{Adh}(I) = [a, b]$ , donc  $\text{Fr}(I) = \{a, b\}$ .

**Remarque** Pour toute partie  $A$  de  $E$ , les trois parties :

$$\overset{\circ}{A}, \quad \text{Fr}(A) \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{A}$$

forment un recouvrement disjoint de  $E$  : elles sont deux à deux disjointes et leur réunion vaut  $E$ . En effet, sachant que  $\overset{\circ}{A} \subset \overline{A}$ , la relation  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  assure que  $\overset{\circ}{A}$  et  $\text{Fr}(A)$  sont disjointes et que leur réunion vaut  $\overline{A}$ . Par conséquent, les ensembles  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\text{Fr}(A)$  et  $E \setminus \overline{A}$  forment un recouvrement disjoint de  $E$ .



## 8 Voisinage relatif, ouvert relatif, fermé relatif

### Voisinage relatif

#### Définition 20

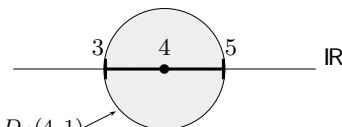
Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $a$  un point de  $A$ . Une partie  $V$  de  $A$  est un **voisinage relatif de  $a$  dans  $A$**  s'il existe un voisinage  $\tilde{V}$  de  $a$  dans  $E$  tel que  $V = A \cap \tilde{V}$ .

**Ex. 39.** On se place dans  $\mathbb{C}$  (muni du module).

L'intervalle  $[3, 5]$ , bien qu'il ne soit pas un voisinage du point 4, en est un voisinage relatif dans  $\mathbb{R}$ . En effet :

$$[3, 5] = \mathbb{R} \cap D_f(4, 1)$$

où  $D_f(4, 1)$  est le disque fermé de centre 4 et de rayon 1.



#### Proposition 32

Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $a \in A$ . Une partie  $V$  de  $A$  est un voisinage relatif de  $a$  dans  $A$  si, et seulement si, il existe  $r > 0$  tel que  $A \cap B(a, r) \subset V$ .

### Démonstration.

- Si  $V$  est un voisinage relatif de  $a$  dans  $A$ , alors il existe un voisinage  $\tilde{V}$  de  $a$  tel que  $V = A \cap \tilde{V}$ . Puisque  $\tilde{V}$  est un voisinage de  $a$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset \tilde{V}$ . On a alors  $A \cap B(a, r) \subset A \cap \tilde{V}$ , i.e.  $A \cap B(a, r) \subset V$ .
- Réciproquement, s'il existe un réel  $r > 0$  tel que  $A \cap B(a, r) \subset V$ , alors, l'ensemble  $\tilde{V} = V \cup B(a, r)$  est un voisinage de  $a$  vérifiant  $V = A \cap \tilde{V}$ .  $\square$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Ex. 40.** Soit  $A$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Tout point de  $A$  possède un voisinage relatif dans  $A$  qui est un segment. En effet, étant donné  $a \in A$  :

- si  $a \in \text{Int}(A)$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $[a - r, a + r] \subset A$  ;
- si  $a$  est une extrémité de  $A$  alors :
  - \* si  $a = \max(A)$ , alors,  $A$  étant d'intérieur non vide, il existe  $r > 0$  tel que  $[a - r, a] \subset A$ , et alors  $[a - r, a] = [a - r, a + r] \cap A$ , donc  $[a - r, a]$  est un voisinage relatif de  $a$  dans  $A$  ;
  - \* si  $a = \min(A)$ , alors de même il existe  $r > 0$  tel que  $[a, a + r] \subset A$ , et alors  $[a, a + r]$  est un voisinage relatif de  $a$  dans  $A$ .

### Ouvert relatif, fermé relatif

#### Définition 21

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

- Une partie  $U$  de  $A$  est un **ouvert relatif de  $A$**  si  $U$  est un voisinage relatif de chacun de ses points dans  $A$ .
- Une partie  $F$  de  $A$  est un **fermé relatif de  $A$**  s'il existe  $U$  un ouvert relatif de  $A$  tel que  $F = A \setminus U$ .

#### Proposition 33

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $U$  une partie de  $A$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $U$  est un ouvert relatif de  $A$  ;
- (ii) pour tout  $x \in U$ , il existe  $r > 0$  tel que  $A \cap B(x, r) \subset U$  ;
- (iii) il existe un ouvert  $\tilde{U}$  de  $E$  tel que  $U = A \cap \tilde{U}$ .

Démonstration page 236

**Ex. 41.** L'ensemble vide est un ouvert relatif de toute partie de  $E$ .

**Ex. 42.** Si  $A$  est un ouvert de  $E$ , alors les ouverts relatifs de  $A$  sont les ouverts de  $E$  inclus dans  $A$ . En effet, étant donné  $U$  une partie de  $A$  :

- si  $U$  est un ouvert de  $E$ , alors l'écriture  $U = A \cap U$  montre que  $U$  est un ouvert relatif de  $A$  ;
- si  $U$  est un ouvert relatif de  $A$ , alors il existe un ouvert  $\tilde{U}$  de  $E$  tel que  $U = A \cap \tilde{U}$ , et alors  $U$  est un ouvert de  $E$ , comme intersection de deux ouverts de  $E$ .

#### Proposition 34

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $F$  une partie de  $A$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  est un fermé relatif de  $A$  ;
- (ii) il existe un fermé  $\tilde{F}$  de  $E$  tel que  $F = A \cap \tilde{F}$ .

Démonstration page 237

**Ex. 43.** Si  $A$  est un fermé de  $E$ , alors les fermés relatifs de  $A$  sont les fermés de  $E$  inclus dans  $A$ . En effet, étant donné  $F$  une partie de  $A$  :

- si  $F$  est un fermé de  $E$ , alors l'écriture  $F = A \cap F$  montre que  $F$  est un fermé relatif de  $A$  ;
- si  $F$  est un fermé relatif de  $A$ , alors il existe un fermé  $\tilde{F}$  de  $E$  tel que  $F = A \cap \tilde{F}$ , et alors  $F$  est un fermé de  $E$ , comme intersection de fermés de  $E$ .

**Ex. 44.** Toute partie  $A$  de  $E$  est à la fois un ouvert relatif et un fermé relatif d'elle-même. En effet, on a  $A = A \cap E$ , et  $E$  est à la fois un ouvert et un fermé de  $E$ .

**Remarque** Si  $A$  est égal à  $E$ , alors les notions de voisinage, ouvert et fermé relatifs coïncident avec les notions déjà vues de voisinage, ouvert et fermé. En revanche, ce n'est pas le cas si  $A$  est quelconque, comme l'illustrent les exemples suivants.

On se place dans  $\mathbb{R}$  (muni de la valeur absolue).

**Ex. 45.** L'intervalle  $[0, 1[$ , bien qu'il ne soit pas un ouvert de  $\mathbb{R}$ , est un ouvert relatif de  $[0, 1]$ , car on peut écrire :

$$[0, 1[ = [0, 1] \cap ]-1, 1[.$$

**Ex. 46.** L'intervalle  $[0, 1[$ , bien qu'il ne soit pas un fermé de  $\mathbb{R}$ , est un fermé relatif de  $[-1, 1[$ , car on peut écrire :

$$[0, 1[ = [-1, 1[ \cap [0, 1].$$

### Proposition 35 (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Étant donné une partie  $F$  de  $A$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  est un fermé relatif de  $A$  ;
- (ii) pour toute suite d'éléments de  $F$  convergeant vers  $\ell \in A$ , on a  $\ell \in F$ .

Démonstration page 237

## IV Comparaison de normes

Il est fréquent de rencontrer plusieurs normes sur un même espace vectoriel. Une question apparaît alors : si une propriété (comme la convergence d'une suite ou le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie) est vraie pour une norme, l'est-elle également pour les autres ?

La réponse est négative dans le cas général, comme l'illustre l'exemple suivant.

**Ex. 47.** Dans  $C([0, 1], \mathbb{K})$ , considérons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_n(x) = x^n.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers la fonction nulle pour la norme 1, mais pas pour la norme infinie.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Ex. 48.** En reprenant la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  précédente, et en notant  $g_n = (n+1)f_n$ , on constate que la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée pour la norme 1 (tous ses termes sont unitaires), mais pas pour la norme infinie.

Cependant, nous allons voir ici que sous des conditions supplémentaires, certaines propriétés sont conservées lors du passage d'une norme à une autre.

### 1 Domination de normes

#### Définition 22

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . On dit que  $N_1$  est **dominée** par  $N_2$  s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ , ou encore :

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leq \alpha N_2(x).$$

**Terminologie** Pour signifier que  $N_1$  est dominée par  $N_2$ , on dit aussi que  $N_2$  est **plus fine** que  $N_1$ .

Le résultat suivant assure que pour étudier le caractère dominé de la norme  $N_1$  par la norme  $N_2$ , on peut se contenter de considérer des éléments  $x \in E$  tels que  $N_2(x) = 1$ .

Exo  
5.23

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . La norme  $N_1$  est dominée par la norme  $N_2$  si, et seulement s'il existe un réel  $\alpha$  strictement positif tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \implies N_1(x) \leq \alpha.$$

Démonstration page 237

#### Proposition 36

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$  telles que  $N_1$  soit dominée par  $N_2$ .

Si une partie de  $E$  est bornée pour la norme  $N_2$ , alors elle l'est également pour la norme  $N_1$ .

**Démonstration.** Soit  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$  et  $A$  une partie bornée pour la norme  $N_2$ . Comme  $A$  est bornée pour la norme  $N_2$ , on peut considérer  $M$  un réel positif vérifiant :

$$\forall a \in A \quad N_2(a) \leq M.$$

Alors, la relation suivante, valable pour tout  $a \in A$  :

$$N_1(a) \leq \alpha N_2(a) \leq \alpha M,$$

montre que  $A$  est également bornée pour la norme  $N_1$ . □

**Remarque** Avec les notations de la proposition précédente, si une application  $f$  à valeurs dans  $E$  (et donc en particulier une suite d'éléments de  $E$ ) est bornée pour la norme  $N_2$ , alors elle l'est également pour la norme  $N_1$ .

#### Proposition 38

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$  telles que  $N_1$  soit dominée par  $N_2$ .

Si une suite converge vers un élément  $\ell$  de  $E$  pour la norme  $N_2$ , alors elle converge également vers  $\ell$  pour la norme  $N_1$ .

**Démonstration.** Soit  $\alpha > 0$  tel que  $N_1 \leq \alpha N_2$ .

Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite tendant vers  $\ell$  pour la norme  $N_2$ , alors l'encadrement :

$$0 \leq N_1(a_n - \ell) \leq \alpha \underbrace{N_2(a_n - \ell)}_{\rightarrow 0}$$

montre que  $(a_n)$  tend aussi vers  $\ell$  pour la norme  $N_1$ . □

**Remarque** Étant donné deux normes  $N_1$  et  $N_2$ , pour montrer que  $N_1$  n'est pas dominée par  $N_2$ , il suffit, d'après la proposition précédente, d'exhiber une suite qui converge pour la norme  $N_2$  mais pas pour la norme  $N_1$ .

**Point méthode** Dans la pratique, pour montrer que  $N_1$  n'est pas dominée par  $N_2$  on cherche souvent une suite qui, au choix, tend vers 0 pour  $N_2$  mais pas pour  $N_1$ , ou est bornée pour  $N_2$  mais pas pour  $N_1$ .

**Ex. 49.** L'exemple 47 de la page 225 prouve que, dans l'espace  $C([0, 1], \mathbb{K})$ , la norme infinie n'est pas dominée par la norme 1.

**Ex. 50.** Dans  $\mathbb{K}[X]$ , considérons les deux normes :

$$\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad \text{où} \quad P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n.$$

- La norme  $\|\cdot\|_\infty$  est dominée par la norme  $\|\cdot\|_1$  car :  $\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \|P\|_\infty \leq \|P\|_1$ .
- En revanche, la norme  $\|\cdot\|_1$  n'est pas dominée par la norme  $\|\cdot\|_\infty$  car, si l'on pose  $P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n X^k$ , on a  $\|P_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}$  et  $\|P_n\|_1 = 1$ , donc la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  mais pas pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

## 2 Normes équivalentes

### Définition 23

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ . On dit que  $N_1$  et  $N_2$  sont **équivalentes** s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

**Remarque** À partir de la définition précédente, on obtient aisément que :

- deux normes sont équivalentes si, et seulement si, chacune est dominée par l'autre ;
- l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

Beaucoup de propriétés sont conservées lorsque l'on passe d'une norme à une autre qui lui est équivalente. Donnons trois résultats, dont les deux premiers sont des conséquences immédiates des propositions 37 et 38 et de la remarque précédente.

### Proposition 39 (Conservation du caractère borné d'une partie)

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ . Une partie est bornée pour la norme  $N_1$  si, et seulement si, elle l'est pour la norme  $N_2$ .

**Remarque** Ce résultat s'applique en particulier aux applications bornées et aux suites bornées.

### Proposition 40 (Conservation du caractère convergent d'une suite)

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ . Une suite converge vers un élément  $\ell \in E$  pour la norme  $N_1$  si, et seulement si, elle converge vers  $\ell$  pour la norme  $N_2$ .

### Proposition 41 (Conservation des ouverts et des fermés)

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ . Une partie  $A$  de  $E$  est :

- ouverte pour  $N_1$  si, et seulement si, elle l'est pour  $N_2$  ;
- fermée pour  $N_1$  si, et seulement si, elle l'est pour  $N_2$ .

Démonstration page 237

**Point méthode** Les résultats précédents nous assurent que, pour étudier la convergence d'une suite ou encore le caractère borné, ouvert ou fermé d'une partie (et donc, par extension, tout résultat reposant sur ces notions), et si l'on dispose de plusieurs normes équivalentes, alors on pourra choisir celle que l'on préfère.

## Équivalence des normes en dimension finie

Le théorème suivant sera démontré dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie (cf. théorème 13 de la page 296) .

### Théorème 42

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

## Démonstrations

**Proposition 1** Pour alléger l'écriture, notons  $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$  (même si cette notation est abusive tant que nous n'avons pas encore démontré qu'il s'agit d'une norme).

- L'homogénéité et la séparation sont faciles à vérifier :
  - \* en effet, si  $x \in E$  vérifie  $\|x\| = 0$ , alors on a  $(x|x) = 0$ , ce qui, comme un produit scalaire est *défini positif*, entraîne que  $x$  est nul;
  - \* pour  $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ , la bilinéarité du produit scalaire donne :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \times \|x\|.$$

- Il reste à démontrer l'inégalité triangulaire. Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) && \text{(bilinéarité et symétrie)} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  souhaitée.

### Proposition 2

- Commençons par montrer l'encadrement :

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (1)$$

qui se reformule ainsi :

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\| \quad \text{et} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ces deux inégalités résultent de l'inégalité triangulaire de la définition d'une norme (cf. définition 1 de la page 200) appliquée :

- \* pour la première, aux vecteurs  $x + y$  et  $-y$  (puisque, par homogénéité,  $\|-y\| = \|y\|$ );
- \* pour la seconde, aux vecteurs  $x$  et  $y$ .

- L'encadrement (1) étant valable pour tous  $x$  et  $y$ , on peut échanger leurs rôles :

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y + x\| \leq \|y\| + \|x\|. \quad (2)$$

Les encadrements (1) et (2) donnent alors :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (3)$$

- Il reste, pour conclure, à montrer que :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Cela résulte de l'encadrement (3) appliqué aux vecteurs  $x$  et  $-y$  (du fait que  $\|-y\| = \|y\|$ ).

**Proposition 4** Soit  $a \in A$ . On a, par définition de  $d(x, A)$  et par inégalité triangulaire :

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Il en résulte que  $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ . Cette inégalité étant vraie pour tout  $a \in A$ , on en déduit que  $d(x, A) - d(x, y)$  minore l'ensemble  $\{d(y, a) \mid a \in A\}$ , et donc :

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A) \quad \text{ce qui donne} \quad d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

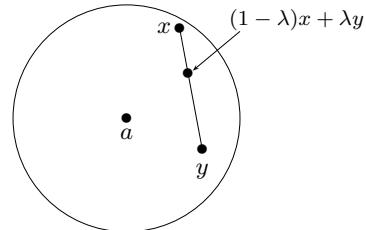
Un argument de symétrie du problème en  $x$  et  $y$  permet alors d'obtenir le résultat souhaité.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Proposition 5

Soit  $B$  une boule (ouverte ou fermée). Donnons-nous deux éléments  $x$  et  $y$  de  $B$  et  $\lambda \in [0, 1]$ , et montrons que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B$ . Pour cela, il suffit de montrer qu'en notant  $a$  le centre de  $B$ , on a :

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| \leq \max(\|x - a\|, \|y - a\|).$$



Cela s'obtient en écrivant :

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| &= \|(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)\| \\ &\leq \|(1 - \lambda)(x - a)\| + \|\lambda(y - a)\| \quad (\text{inégalité triangulaire}). \end{aligned}$$

Par homogénéité, et par positivité de  $1 - \lambda$  et  $\lambda$ , on obtient :

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| \leq (1 - \lambda)\|x - a\| + \lambda\|y - a\| \leq \max(\|x - a\|, \|y - a\|).$$

### Lemme 6

- Si  $k = 0$ , alors  $kA = \{0\}$ , donc  $\sup(kA) = 0 = k \sup(A)$  (rappelons que par convention on a  $0 \times (+\infty) = 0$ , ce qui rend la formule vraie dans le cas où  $\sup(A) = +\infty$ ).
- Supposons  $k > 0$ . Si  $A$  n'est pas majorée, alors  $kA$  ne l'est pas non plus. Dans ce cas, on a  $\sup(kA) = +\infty = k \sup(A)$ . Supposons donc  $A$  majorée.
  - \* Pour tout  $x \in A$ , on a  $kx \leq k \sup(A)$ , donc le réel  $k \sup(A)$  est un majorant de  $kA$ .
  - \* D'autre part, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow \sup A$ . La suite  $(kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors à valeurs dans  $kA$  et tend vers  $k \sup(A)$ . Toujours par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, cela prouve que  $\sup(kA) = k \sup(A)$ .

### Proposition 7

Notons  $E = \mathbb{K}^n$ .

- **Norme infinie**

- \* *Séparation.* Si  $x \in E$  vérifie  $\|x\|_\infty = 0$ , alors on a  $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| = 0$ , et donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0.$$

- \* *Homogénéité.* Pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \max \{ |\lambda x_k| \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \} \\ &= \max \{ |\lambda| |x_k| \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \} \\ &= |\lambda| \max \{ |x_k| \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \} \quad (\text{lemme 6}) \\ &= |\lambda| \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

- \* *Inégalité triangulaire.* Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\|x + y\|_\infty = \max \{ |x_k + y_k| \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \}.$$

Comme pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

il en résulte que  $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$  majore l'ensemble  $\{ |x_k + y_k| \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \}$ . On en déduit  $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

- Norme 1

- \* *Séparation.* Si  $x \in E$  vérifie  $\|x\|_1 = 0$ , alors on a  $\sum_{k=1}^n |x_k| = 0$ , et donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0.$$

- \* *Homogénéité.* Pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^n (|\lambda| |x_k|) = |\lambda| \sum_{k=1}^n |x_k| = |\lambda| \|x\|_1.$$

- \* *Inégalité triangulaire.* Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a :

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

- Norme 2

- \* Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\|x\|_2 = \sqrt{\varphi(x, x)}$ , où  $\varphi$  est l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^n)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k. \end{aligned}$$

L'application  $\varphi$  est alors le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , ce qui permet d'affirmer que l'application  $x \mapsto \|x\|_2$  est une norme, car c'est la norme euclidienne associée.

- \* Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . L'argument précédent ne s'applique pas.

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ , notons  $\tilde{x}$  l'élément  $(|x_1|, \dots, |x_n|)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Il est immédiat de voir que :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|x\|_2 = \|\tilde{x}\|_2.$$

Pour obtenir les propriétés de séparation, d'homogénéité et d'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{C}^n$ , utilisons ces mêmes propriétés, déjà établies, pour la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

- \* *Séparation.* Si  $x \in \mathbb{C}^n$  vérifie  $\|x\|_2 = 0$ , alors  $\|\tilde{x}\|_2 = 0$ , et donc, par propriété de séparation de la norme 2 sur  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\tilde{x} = 0$  puis  $x = 0$ .
- \* *Homogénéité.* En utilisant la propriété d'homogénéité de la norme 2 sur  $\mathbb{R}^n$ , on a, pour tout  $(x, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  :

$$\|\lambda x\|_2 = \|\widetilde{\lambda x}\|_2 = \||\lambda| \tilde{x}\|_2 = |\lambda| \|\tilde{x}\|_2 = |\lambda| \|x\|_2.$$

- \* *Inégalité triangulaire.* Pour  $(x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2$ , on a  $\|x + y\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^2 \right)^{1/2}$ .

Or, par inégalité triangulaire sur le module, on a  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ , ce qui donne :

$$\|x + y\|_2 \leq \left( \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^2 \right)^{1/2} = \|\tilde{x} + \tilde{y}\|_2.$$

Par inégalité triangulaire sur la norme 2 sur  $\mathbb{R}^n$ , on en déduit :

$$\|x + y\|_2 \leq \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**Proposition 8** Soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  l'isomorphisme qui à un vecteur de  $E$  associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrons que si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ , alors on définit une norme sur  $E$  en posant :

$$\forall x \in E \quad N(x) = \|\varphi(x)\|.$$

Il suffira alors d'appliquer cela aux trois normes usuelles déjà connues sur  $\mathbb{K}^n$ .

**Séparation.** Si  $x \in E$  vérifie  $N(x) = 0$ , alors  $\|\varphi(x)\| = 0$ . Par séparation de la norme sur  $\mathbb{K}^n$ , on a  $\varphi(x) = 0$ , puis par injectivité de  $\varphi$ , on obtient  $x = 0$ .

**Homogénéité.** Soit  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ . On a, par linéarité de  $\varphi$  puis par homogénéité de la norme sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$N(\lambda x) = \|\varphi(\lambda x)\| = \|\lambda \varphi(x)\| = |\lambda| \|\varphi(x)\| = |\lambda| N(x).$$

**Inégalité triangulaire.** Pour  $(x, y) \in E^2$ , on a, par linéarité de  $\varphi$  puis par inégalité triangulaire de la norme sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$\begin{aligned} N(x+y) &= \|\varphi(x+y)\| = \|\varphi(x) + \varphi(y)\| \\ &\leq \|\varphi(x)\| + \|\varphi(y)\| = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

**Proposition 9** Tout d'abord,  $X$  étant non vide et  $f$  étant bornée, la partie :

$$\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$$

possède une borne supérieure, comme toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . Vérifions les trois axiomes de la définition d'une norme.

**Séparation** Si  $f$  vérifie  $\|f\|_\infty = 0$ , alors on a  $\forall x \in X \quad \|f(x)\| = 0$ , autrement dit  $f$  est la fonction nulle.

**Homogénéité** Soit  $f \in \mathcal{B}(X, E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

En notant  $A = \{\|f(x)\| \mid x \in X\}$ , on a, par homogénéité :

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup \{\|\lambda f(x)\| \mid x \in X\} = \sup \{|\lambda| \|f(x)\| \mid x \in X\} = \sup(|\lambda| A)$$

donc, grâce au lemme 6 de la page 207 :

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \sup(A) = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

**Inégalité triangulaire** Soit  $(f, g) \in \mathcal{B}(X, E)^2$ . Montrons que :

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

En notant  $A$  l'ensemble  $\{\|f(x)+g(x)\| \mid x \in X\}$ , cela revient à montrer que  $A$  est majoré par  $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . C'est évident, car pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(x)+g(x)\| &\leq \underbrace{\|f(x)\|}_{\leq \|f\|_\infty} + \underbrace{\|g(x)\|}_{\leq \|g\|_\infty}. \end{aligned}$$

**Proposition 10** Vérifions les trois axiomes de la définition d'une norme.

**Séparation** Si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  vérifie  $\|f\|_1 = 0$ , alors  $|f|$  est la fonction nulle car continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), et donc  $f$  est nulle.

**Homogénéité** Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f| = \int_a^b (|\lambda| |f|) = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \|f\|_1.$$

**Inégalité triangulaire** Pour  $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})^2$ , on a :

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f+g| \leq \int_a^b (|f| + |g|) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

**Proposition 11** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors la norme 2 est la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  défini par  $(f | g) = \int_a^b fg$ .

Supposons désormais  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Vérifions les trois axiomes de la définition d'une norme.

**Séparation** Si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  vérifie  $\|f\|_2 = 0$ , alors  $|f|^2$  est la fonction nulle, en tant que fonction continue, positive et d'intégrale nulle (l'intervalle d'intégration étant d'intérieur non vide), donc  $f$  est la fonction nulle.

**Homogénéité** Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\|\lambda f\|_2^2 = \int_a^b |\lambda f|^2 = \int_a^b |\lambda|^2 |f|^2 = |\lambda|^2 \int_a^b |f|^2 = |\lambda|^2 \|f\|_2^2.$$

Les quantités considérées étant positives, on obtient  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$ .

**Inégalité triangulaire** Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ . On a :

$$\|f + g\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f + g|^2} \leq \sqrt{\int_a^b (|f| + |g|)^2} = \||f| + |g|\|_2. \quad (1)$$

Mais alors, comme l'application  $f \mapsto \|f\|_2$  est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , nous pouvons appliquer l'inégalité triangulaire associée avec les fonctions  $|f|$  et  $|g|$  :

$$\||f| + |g|\|_2 \leq \||f|\|_2 + \||g|\|_2. \quad (2)$$

Comme on a  $\||f|\|_2 = \|f\|_2$  et  $\||g|\|_2 = \|g\|_2$ , les relations (1) et (2) permettent de conclure.

**Proposition 12** Notons  $E$  l'espace  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .

**Séparation** Si  $x = (x_1, \dots, x_p)$  vérifie  $\varphi(x) = 0$ , alors, par définition de  $\varphi$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \varphi_k(x_k) = 0,$$

ce qui, par propriété de séparation des normes  $\varphi_k$ , entraîne  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x_k = 0$ , i.e.  $x = 0$ .

**Homogénéité** Pour  $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :

$$\varphi(\lambda x) = \varphi((\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)) = \max(\varphi_1(\lambda x_1), \dots, \varphi_p(\lambda x_p))$$

L'homogénéité de chacune des normes  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  donne alors :

$$\varphi(\lambda x) = \max(|\lambda| \varphi_1(x_1), \dots, |\lambda| \varphi_p(x_p)) = |\lambda| \varphi(x).$$

**Inégalité triangulaire** Soit  $x = (x_1, \dots, x_p)$  et  $y = (y_1, \dots, y_p)$  dans  $E$ . On a :

$$\varphi(x + y) = \varphi((x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)) = \max(\varphi_1(x_1 + y_1), \dots, \varphi_p(x_p + y_p)).$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a, par inégalité triangulaire sur  $\varphi_k$  puis par définition de  $\varphi$  :

$$\varphi_k(x_k + y_k) \leq \varphi_k(x_k) + \varphi_k(y_k) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

Ainsi,  $\varphi(x) + \varphi(y)$  est un majorant de l'ensemble  $\{\varphi_k(x_k + y_k) \mid k \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ , d'où :

$$\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Proposition 17

- Supposons que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge, et notons  $\ell_k$  sa limite. En notant alors  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ , la relation suivante, valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|a_n - \ell\| &= \max \left( \varphi_1(a_n^{(1)} - \ell_1), \dots, \varphi_p(a_n^{(p)} - \ell_p) \right) \\ &\leq \underbrace{\varphi_1(a_n^{(1)} - \ell_1)}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\varphi_p(a_n^{(p)} - \ell_p)}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

prouve la convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\ell$ .

- Réciproquement, si la suite de terme général  $a_n$  converge vers un élément  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  de  $E_1 \times \dots \times E_p$ , alors l'inégalité  $\varphi_k(a_n^{(k)} - \ell_k) \leq \|a_n - \ell\|$ , valable pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , assure la convergence de chaque suite  $(a_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\ell_k$ .  $\square$

### Proposition 19

- Supposons que  $x$  soit valeur d'adhérence de la suite  $(a_n)$ . Soit alors  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction strictement croissante telle que la suite  $(a_{\varphi(n)})$  converge vers  $x$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Montrons qu'il existe  $n \geq n_0$  tel que  $\|a_n - x\| \leq \varepsilon$ . Comme  $a_{\varphi(n)} \rightarrow x$ , il existe un rang  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall p \geq n_1 \quad \|a_{\varphi(p)} - x\| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\varphi \xrightarrow{+\infty} +\infty$ , on peut trouver  $p \geq n_1$  tel que  $\varphi(p) \geq n_0$ . En posant alors  $n = \varphi(p)$ , on a  $n \geq n_0$  et  $\|a_n - x\| \leq \varepsilon$ .

- Réciproquement, supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \|a_n - x\| \leq \varepsilon, \tag{*}$$

et montrons qu'il existe une sous-suite de  $(a_n)$  qui tend vers  $x$ .

Pour cela, construisons une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|a_{\varphi(p)} - x\| \leq \frac{1}{2^p}.$$

\* Tout d'abord, la propriété (\*) assure qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\|a_n - x\| \leq \frac{1}{2^0}$ .

Posons  $\varphi(0)$  égal à une telle valeur de  $n$ .

\* Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , supposons construits  $\varphi(0), \dots, \varphi(p-1)$ . La propriété (\*) assure qu'il existe  $n \geq \varphi(p-1) + 1$  tel que  $\|a_n - x\| \leq \frac{1}{2^p}$ .

Il suffit alors de poser  $\varphi(p)$  égal à une telle valeur de  $n$ .

### Proposition 20

Soit  $B$  une boule ouverte. Notons  $a$  son centre et  $R$  son rayon.

Pour  $x \in B$ , on a  $d(a, x) < R$ , et, d'après l'inégalité triangulaire, la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $R - d(a, x)$  est contenue dans  $B$ .

En effet, si  $u$  vérifie  $d(x, u) < R - d(a, x)$ , alors on a :

$$d(a, u) \leq d(a, x) + d(x, u) < d(a, x) + R - d(a, x) = R.$$

Donc  $B$  est une partie ouverte.

**Proposition 21**

- Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts, et  $U$  leur réunion. Pour  $x \in U$ , on peut trouver  $i \in I$  tel que  $x$  appartienne à  $U_i$ . Comme  $U_i$  est ouvert, il existe une boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon strictement positif qui soit contenue dans  $U_i$ , et donc dans  $U$ . Il en résulte que  $U$  est ouvert.
- Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille finie d'ouverts, et  $U$  leur intersection.
  - \* Le cas où  $I$  est vide est évident, car une intersection vide vaut, par convention, l'espace entier.
  - \* Supposons  $I$  non vide. Soit  $x \in U$ . Pour tout  $i \in I$ , l'ensemble  $U_i$  est ouvert, donc on peut trouver  $r_i > 0$  tel que la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r_i$  soit contenue dans  $U_i$ . Puisque  $I$  est fini, le nombre réel  $r = \min_{i \in I} r_i$  existe et est strictement positif. La boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $r$  est alors contenue dans chacun des  $U_i$ , et donc dans leur intersection  $U$ . D'où le caractère ouvert de  $U$ .

**Proposition 22** Supposons que  $U_1, \dots, U_p$  soient ouverts dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement.

Montrons que  $U = U_1 \times \dots \times U_p$  est ouvert dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ . Soit  $x = (x_1, \dots, x_p) \in U$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $x_k \in U_k$ , donc, par caractère ouvert de  $U_k$ , il existe  $r_k > 0$  tel que  $B(x_k, r_k) \subset U_k$ . Posons  $r = \min(r_1, \dots, r_p)$ . Si  $y = (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  vérifie  $\|y - x\| < r$ , alors, par définition de la norme produit, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \|y_k - x_k\| < r \leq r_k \quad \text{donc} \quad y_k \in U_k.$$

On en déduit que  $y \in U$ , ce qui prouve que  $U$  est ouvert dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

**Proposition 23**

- Supposons  $A$  fermée. Donnons-nous  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in E$  tels que  $a_n \rightarrow \ell$ , et montrons que  $\ell \in A$ . Par l'absurde : supposons que  $\ell \in E \setminus A$ . Comme  $A$  est fermée, son complémentaire  $E \setminus A$  est ouvert. Ainsi, il existe  $r > 0$  tel que  $B(\ell, r) \subset E \setminus A$ . Puisque la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ , il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \in B(\ell, r).$$

Pour tout  $n \geq n_0$ , on a donc  $a_n \in E \setminus A$ , ce qui contredit le fait que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit à valeurs dans  $A$ .

- Réciproquement, supposons que la partie  $A$  ne soit pas fermée, et construisons une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ , convergente, dont la limite n'est pas dans  $A$ . Puisque  $A$  n'est pas fermée,  $E \setminus A$  n'est pas ouvert. Ainsi, il existe  $x \in E \setminus A$  tel que :

$$\forall r > 0 \quad B(x, r) \not\subset E \setminus A.$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $B(x, 2^{-n}) \not\subset E \setminus A$ ; l'ensemble  $B(x, 2^{-n}) \cap A$  est donc non vide, ce qui nous permet d'y choisir un élément  $a_n$ . On construit ainsi une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$ , ce qui donne le résultat souhaité car  $x \notin A$ .

**Proposition 26** Supposons  $F_1, \dots, F_p$  fermés dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement. Montrons que  $F = F_1 \times \dots \times F_p$  est fermé dans  $E_1 \times \dots \times E_p$ . Par caractérisation séquentielle : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$  une suite convergente ; montrons que sa limite  $\ell$  appartient à  $F$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrivons  $u_n = (u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)})$ . En notant  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ , on a alors (cf. proposition 17 de la page 213), pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$u_n^{(k)} \rightarrow \ell_k.$$

La suite  $(u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  étant à valeurs dans  $F_k$ , et par caractère fermé de  $F_k$ , cela donne  $\ell_k \in F_k$ .

Il en résulte que  $\ell \in F$ , d'où le caractère fermé de  $F$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

### Proposition 28

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $V_1, \dots, V_n$  sont des voisinages de  $x$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut trouver  $r_k > 0$  tel que  $B(x, r_k) \subset V_k$ .

Alors en notant  $r = \min(r_1, \dots, r_n)$ , on a  $r > 0$  et  $B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^n V_k$ .

Cela montre que  $\bigcap_{k=1}^n V_k$  est un voisinage de  $x$ .

- Le deuxième point est évident, car si  $V$  est un voisinage de  $x$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset V$ . Si  $\tilde{V}$  est une partie contenant  $V$ , alors on a  $B(x, r) \subset \tilde{V}$ , ce qui montre que  $\tilde{V}$  est un voisinage de  $x$ .

**Proposition 29** On sait déjà que  $\overset{\circ}{A} \subset A$ . Il suffit donc de montrer que  $\overset{\circ}{A}$  est ouvert, et que tout ouvert inclus dans  $A$  l'est aussi dans  $\overset{\circ}{A}$ .

- Soit  $x \in \overset{\circ}{A}$ . On peut trouver  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ . On a alors  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$ . Or,  $B(x, r)$  étant ouvert, il est son propre intérieur. Il en résulte que  $B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}$ . Cela montre que  $\overset{\circ}{A}$  est ouvert.
- Soit  $U$  un ouvert inclus dans  $A$ . On a alors  $\overset{\circ}{U} \subset \overset{\circ}{A}$ . Or,  $U$  étant ouvert, on a  $\overset{\circ}{U} = U$ . Cela montre que  $U \subset \overset{\circ}{A}$ , et donne le résultat souhaité.

**Proposition 30** Il a déjà été signalé que l'adhérence de  $A$  est un fermé contenant  $A$ . Il reste à démontrer que c'est le plus petit, c'est-à-dire que tout fermé contenant  $A$  contient aussi son adhérence.

Soit  $F$  un fermé contenant  $A$ . Alors  $E \setminus F$  est un ouvert inclus dans  $E \setminus A$ , ce qui entraîne  $E \setminus F \subset \text{Int}(E \setminus A)$  puisque  $\text{Int}(E \setminus A)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $E \setminus A$ . En prenant le complémentaire de chacun des ensembles, on obtient :

$$\underbrace{E \setminus (\text{Int}(E \setminus A))}_{=\text{Adh}(A)} \subset F,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

### Proposition 31

- Soit  $x$  un point adhérent à  $A$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $B(x, 2^{-n}) \cap A$  est non vide, ce qui nous permet d'y choisir un élément  $a_n$ . On construit ainsi une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n - x\| < 2^{-n}$ , donc convergeant vers  $x$ .
- Réciproquement, supposons que  $x$  soit limite d'une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$ , et montrons que  $x$  est adhérent à  $A$ . Soit  $r > 0$ . Montrons que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Comme  $a_n \rightarrow x$ , on peut trouver un entier  $n_0$  tel que  $\|a_{n_0} - x\| < r$ . Alors,  $a_{n_0}$  appartient à la fois à  $A$  et à  $B(x, r)$ , ce qui prouve que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Proposition 33** L'équivalence  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  est immédiate d'après la proposition 32 de la page 223.

$(iii) \Rightarrow (ii)$  Supposons qu'il existe un ouvert  $\tilde{U}$  de  $E$  tel que  $U = A \cap \tilde{U}$ . Alors, pour tout  $x \in U$ , on a  $x \in \tilde{U}$  et donc, puisque  $\tilde{U}$  est un ouvert de  $E$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \tilde{U}$ . On a alors  $A \cap B(x, r) \subset \tilde{U} \cap A$ , c'est-à-dire  $A \cap B(x, r) \subset U$ .

$(ii) \Rightarrow (iii)$  Supposons  $(ii)$ . Pour tout  $x \in U$ , il existe ainsi  $r_x > 0$  tel que  $A \cap B(x, r_x) \subset U$ . On a alors :

$$U = A \cap \tilde{U} \quad \text{avec} \quad \tilde{U} = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x).$$

Cela prouve  $(iii)$  car  $\tilde{U}$ , en tant que réunion d'ouverts de  $E$ , est un ouvert de  $E$ .

**Proposition 34**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons qu'il existe un ouvert relatif  $U$  de  $A$  tel que  $F = A \setminus U$ . Puisque  $U$  est un ouvert relatif de  $A$ , il existe  $\tilde{U}$  un ouvert de  $E$  tel que  $U = \tilde{U} \cap A$ . On a alors :

$$F = A \setminus (\tilde{U} \cap A) = A \setminus \tilde{U} = A \cap (E \setminus \tilde{U}).$$

Cela prouve (ii), car, en tant que complémentaire d'un ouvert,  $E \setminus \tilde{U}$  est un fermé de  $E$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons qu'il existe un fermé  $\tilde{F}$  de  $E$  tel que  $F = A \cap \tilde{F}$ . En notant  $\tilde{U} = E \setminus \tilde{F}$ , on a alors :

$$F = A \setminus \tilde{U} \quad \text{ce qui s'écrit aussi} \quad F = A \setminus (A \cap \tilde{U}).$$

Comme  $\tilde{U}$  est un ouvert de  $E$  (car son complémentaire,  $F$ , est un fermé de  $E$ ), l'ensemble  $A \cap \tilde{U}$  est un ouvert relatif de  $A$ , d'où le résultat.

**Proposition 35**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons que  $F$  soit un fermé relatif de  $A$ . Alors, il existe un fermé  $G$  de  $E$  tel que  $F = A \cap G$ . Si  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $F$  qui converge vers  $\ell \in A$ , alors, comme  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in G$ , le caractère fermé de  $G$  assure que  $\ell \in G$ .

Par suite, on a  $\ell \in A \cap G$  i.e.  $\ell \in F$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons (ii) et montrons que  $F = A \cap \text{Adh}(F)$ . Comme  $\text{Adh}(F)$  est un fermé de  $E$ , cela prouvera (i).

- L'inclusion  $F \subset A \cap \text{Adh}(F)$  est immédiate, puisque  $F \subset A$  et  $F \subset \text{Adh}(F)$ .
- Pour prouver l'autre inclusion, donnons-nous  $\ell \in A \cap \text{Adh}(F)$ , et montrons que  $\ell \in F$ .

Comme  $\ell \in \text{Adh}(F)$ , il existe une suite  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $\ell$ . Comme  $\ell \in A$ , la propriété (ii) nous assure que  $\ell \in F$ .

**Proposition 36** Le sens direct découle directement de la définition.

Montrons l'autre : supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad N_2(x) = 1 \implies N_1(x) \leq \alpha, \tag{*}$$

et montrons que  $N_1$  est dominée par  $N_2$ . Plus précisément, montrons que :

$$\forall y \in E \quad N_1(y) \leq \alpha N_2(y).$$

Si  $y \in E$  est non nul, alors  $N_2(y) \neq 0$ , et la propriété (\*) appliquée à  $\frac{y}{N_2(y)}$  donne :

$$N_1\left(\frac{y}{N_2(y)}\right) \leq \alpha,$$

ce qui, par homogénéité de  $N_1$ , donne  $N_1(y) \leq \alpha N_2(y)$ . Cette inégalité reste évidemment vraie si  $y = 0$ .

**Proposition 41**

- Supposons  $A$  fermée pour l'une des deux normes, par exemple  $N_1$ , et montrons que  $A$  est également fermée pour  $N_2$ . Procérons par caractérisation séquentielle. Supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $N_2$ , et montrons que  $\ell \in A$ . La suite  $(u_n)$  convergeant vers  $\ell$  pour la norme  $N_2$ , elle converge également vers  $\ell$  pour la norme  $N_1$  (cf. proposition 40 de la page 228), donc le caractère fermé de  $A$  pour la norme  $N_1$  assure que  $\ell \in A$ .
- Une partie étant ouverte si, et seulement si, son complémentaire est fermé, les deux normes  $N_1$  et  $N_2$  définissent les mêmes ouverts puisqu'elles définissent les mêmes fermés.

## S'entraîner et approfondir

### Généralités

**5.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  une  $(n+1)$ -liste de scalaires deux à deux distincts.

→<sup>200</sup> Montrer que l'on définit une norme sur  $\mathbb{K}_n[X]$  en posant :

$$\|P\| = \max \{|P(a_1)|, \dots, |P(a_{n+1})|\}.$$

**5.2** Dans  $\mathbb{R}^2$ , soit  $u$  le point  $(-1, 1)$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = 2x$ . Pour chacune des →<sup>204</sup> normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ , déterminer la distance de  $u$  à  $\mathcal{D}$ .

**5.3** Soit  $B$  une boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r > 0$ , et  $x$  un élément de  $E$ . Exprimer, →<sup>205</sup> en fonction de  $a$ ,  $r$  et  $x$ , la distance de  $x$  à  $B$ .

**5.4** Soit  $E$  un espace vectoriel normé réel. Montrer que tout sous-espace affine de  $E$  est une →<sup>206</sup> partie convexe.

#### 5.5 Convexité et stabilité par passage au barycentre à coefficients positifs

→<sup>206</sup> Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé réel  $E$ . Montrer que si  $A$  est convexe, alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in A^p \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0, 1]^p \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k \in A.$$

*Indication.* Procéder par récurrence.

**5.6** Montrer que si une partie  $A$  est contenue dans une boule quelconque (non nécessairement →<sup>207</sup> centrée en l'origine et non nécessairement fermée), alors  $A$  est bornée.

**5.7** 1. Montrer que si  $A$  est une partie non vide et bornée, alors l'ensemble :

$$\{d(x, y) \mid (x, y) \in A^2\}$$

possède une borne supérieure. *Cette borne supérieure est appelée diamètre de  $A$ .*

2. Déterminer, en fonction de son rayon  $r$ , le diamètre d'une boule  $B$  (ouverte ou fermée).

#### 5.8 Norme 1 et norme 2 dans un espace produit

→<sup>210</sup> Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  ainsi que  $p$  espaces vectoriels normés  $(E_1, \varphi_1), \dots, (E_p, \varphi_p)$  sur  $\mathbb{K}$ . Montrer que les applications  $N_1$  et  $N_2$  respectivement définies par :

$$\begin{aligned} N_1 : E_1 \times \cdots \times E_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & \text{et} \quad N_2 : E_1 \times \cdots \times E_p &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) & (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \sqrt{\sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k)^2} \end{aligned}$$

sont des normes sur l'espace produit  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .

**5.9** Montrer que tout élément du segment  $[-1, 1]$  est valeur d'adhérence de la suite  $a$  de terme →<sup>214</sup> général  $a_n = \sin \sqrt{n}$ .

*Indication.* Pour  $x \in [-1, 1]$ , on a  $x = \sin \sqrt{t_k}$  avec  $t_k = (2k\pi + \arcsin x)^2$ .

- 5.10** 1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Supposons que l'on dispose d'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ , ainsi que d'une application linéaire injective  $u : F \rightarrow E$ .  
Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} N : & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|u(x)\| \end{array}$$

est une norme sur  $F$ .

2. Soit  $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  l'espace des suites bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Montrer que l'application suivante est une norme sur  $E$  :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{|a_n|}{2^n} \right). \end{array}$$

- 5.11** Montrer que l'application  $N : P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$  est une norme sur  $\mathbb{K}[X]$ .

- 5.12** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ .

Étant donné  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ , notons :

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in I} (|x_i|); \quad \|x\|_1 = \sum_{i \in I} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i \in I} |x_i|^2}.$$

Montrer que les applications  $x \mapsto \|x\|_\infty$ ,  $x \mapsto \|x\|_1$  et  $x \mapsto \|x\|_2$  sont des normes sur  $E$ .

Ces trois normes sont respectivement appelées **norme infinie**, **norme 1** et **norme 2** dans la base  $\mathcal{B}$ .

- 5.13** On se place dans l'espace des suites réelles bornées, que l'on munit de la norme infinie. Notons  $a = (a_n)$  la suite constante égale à 1 et  $\mathcal{C}_0$  le sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0. Déterminer la distance de  $a$  à  $\mathcal{C}_0$ .

## Topologie d'un espace vectoriel normé

- 5.14** Soit  $V$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ , ainsi que  $a \in E$ . Montrer que  $V$  est un voisinage de  $a$  si, et seulement s'il existe un ouvert contenant  $a$  et inclus dans  $V$ .

- 5.15** Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

- <sup>221</sup> 1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que l'adhérence de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
2. Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . Montrer que  $H$  est soit fermé soit dense dans  $E$ .

- 5.16** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1. Montrer que si  $F$  est ouvert, alors  $F = E$ .
2. Montrer que si  $F$  n'est pas d'intérieur vide, alors  $F = E$ .

- 5.17** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. On munit  $E \times F$  de la norme produit. Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  et  $F$  respectivement.

1. Montrer que  $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$ .
2. Montrer que  $\text{Adh}(A \times B) = \text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$ .
3. Montrer que  $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Adh}(A) \times \text{Fr}(B)) \cup (\text{Fr}(A) \times \text{Adh}(B))$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

- 5.18** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, et  $C$  une partie convexe de  $E$ . Montrer que l'adhérence et l'intérieur de  $C$  sont convexes.
- 5.19** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des fonctions s'annulant en 0 et en 1.

Déterminer l'adhérence de  $F$  pour les normes infinie et 1 :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

- 5.20** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé  $E$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note :

$$A_p = \{u_n \mid n \geq p\}.$$

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

$$\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}.$$

2. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est fermé.

- \* **5.21** On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \quad \|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

1. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{U}$  des polynômes unitaires est fermé.
2. (a) Montrer que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , unitaire et de degré  $r \in \mathbb{N}$ , alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^r.$$

- (b) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des polynômes unitaires et scindés dans  $\mathbb{R}[X]$  est un fermé.

- \* **5.22** Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

1. Quelles sont les parties de  $E$  dont la frontière est vide ?
2. Quelles sont les parties de  $E$  qui sont à la fois ouvertes et fermées ?

### Comparaison de normes

- 5.23** La relation de domination des normes est-elle une relation d'ordre ?

→<sup>226</sup>

- 5.24** On se place dans l'espace  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  (avec  $a < b$ ).

→<sup>226</sup>

1. Montrer que les normes 1 et 2 sont dominées par la norme infinie.
2. Montrer que la norme 1 est dominée par la norme 2.

*Indication.* On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- 5.25 Équivalence des normes 1, 2 et infinie dans  $\mathbb{K}^n$**

→<sup>227</sup> Montrer que pour  $x \in \mathbb{K}^n$  on a :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

- 5.26** Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on considère les normes  $N_1$  et  $N_2$  définies par :

$$N_1(P) = \int_0^1 |P(t)| dt \quad \text{et} \quad N_2(P) = \int_0^2 |P(t)| dt.$$

Montrer que  $N_1$  est dominée par  $N_2$ , mais que  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ .

## Solutions des exercices

**5.1 Séparation.** Si  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  vérifie  $\|P\| = 0$ , alors  $P$  possède  $n + 1$  racines distinctes :  $a_1, \dots, a_{n+1}$ , donc, puisque  $\deg P \leq n$ , le polynôme  $P$  est nul.

**Homogénéité.** Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned}\|\lambda P\| &= \max \{ |\lambda P(a_1)|, \dots, |\lambda P(a_{n+1})| \} \\ &= |\lambda| \max \{ |P(a_1)|, \dots, |P(a_{n+1})| \} = |\lambda| \|P\|.\end{aligned}$$

**Inégalité triangulaire.** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ . On a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad |(P+Q)(a_k)| \leq |P(a_k)| + |Q(a_k)| \leq \|P\| + \|Q\|,$$

donc :

$$\|P+Q\| = \max_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} |(P+Q)(a_k)| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

**5.2** Les points de  $\mathcal{D}$  sont de la forme  $a_t = (t, 2t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$ .

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned}\|u - a_t\|_\infty &= \|(t+1, 2t-1)\|_\infty \\ &= \max(|t+1|, |2t-1|) \\ &= \begin{cases} 1-2t & \text{si } t < 0 \\ t+1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2t-1 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Cette quantité est minimale pour  $t = 0$  et vaut alors 1. Le point  $a_0 = (0, 0)$  est donc le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $u$  au sens de la norme infinie, et :

$$d_\infty(u, \mathcal{D}) = \|u - a_0\|_\infty = 1.$$

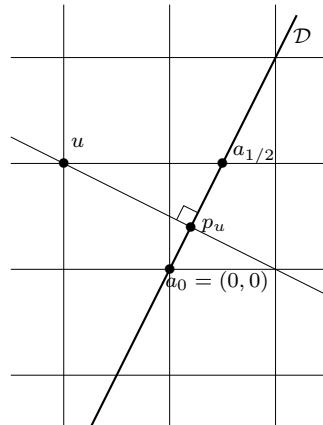
- Au sens de la norme euclidienne, le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $u$  est son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$ . Il s'agit du point  $p_u = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ , et l'on a :

$$d_2(x, A) = \|x - p_u\|_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\|u - a_t\|_1 = \|(t+1, 2t-1)\|_1 = |t+1| + |2t-1| = \begin{cases} -3t & \text{si } t < -1 \\ -t+2 & \text{si } -1 \leq t < 1/2 \\ 3t & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Cette quantité est minimale pour  $t = \frac{1}{2}$  et vaut alors  $\frac{3}{2}$ . Le point  $a_{1/2} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  est donc le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $u$  au sens de la norme 1, et  $d_1(u, \mathcal{D}) = \frac{3}{2}$ .



## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**5.3** Il est clair que si  $x \in B$ , alors  $d(x, B) = 0$ .

Supposons que  $x \notin B$  et montrons que :

$$d(x, B) = d(x, a) - r.$$

En notant  $A$  l'ensemble  $\{d(x, y) \mid y \in B\}$ , cela revient à montrer que  $\inf A = d(x, a) - r$ .

- Soit  $y \in B$ . L'inégalité triangulaire donne :

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Comme  $d(y, a) \leq r$ , on obtient :

$$d(x, a) - r \leq d(x, y).$$

Donc  $d(x, a) - r$  est un minorant de  $A$ .

- Comme  $a \in B$  et  $x \notin B$ , on a  $x - a \neq 0$ , donc  $\|x - a\| \neq 0$ .

Posons  $u = \frac{x - a}{\|x - a\|}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $y_n = a + \left(r - \frac{1}{n}\right)u$ .

Alors, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  assez grand pour que  $r - \frac{1}{n} > 0$ , on a :

\* d'une part,  $d(a, y_n) = r - \frac{1}{n} < r$ , donc  $y_n \in B$  ;

\* d'autre part :

$$d(x, y_n) = \left\| x - a - \left(r - \frac{1}{n}\right)u \right\| = \left\| \left(d(x, a) - r + \frac{1}{n}\right)u \right\| ;$$

le vecteur  $u$  étant unitaire, on a, par homogénéité et puisque  $d(x, a) - r \geq 0$  :

$$d(x, y_n) = \left| d(x, a) - r + \frac{1}{n} \right| = d(x, a) - r + \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad d(x, y_n) \rightarrow d(x, a) - r.$$

Par caractérisation de la borne inférieure, cela montre que  $\inf A = d(x, a) - r$ .

**5.4** Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $E$ , passant par  $a$  et dirigé par  $F$ . Soit  $(x, y, \lambda) \in \mathcal{F}^2 \times [0, 1]$ .

On peut trouver  $(u, v) \in F^2$  tel que  $x = a + u$  et  $y = a + v$ , et alors, en exploitant la stabilité de  $F$  par combinaisons linéaires :

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)(a + u) + \lambda(a + v) = a + \underbrace{(1 - \lambda)u + \lambda v}_{\in F} \in \mathcal{F},$$

d'où la convexité de  $\mathcal{F}$ .

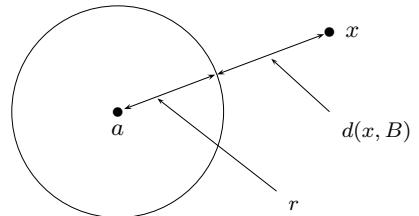
**5.5** Procédons par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$ . Le cas  $p = 1$  étant trivial, il s'agit de prouver l'hérédité. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété vraie au rang  $p$  et montrons-la au rang  $p+1$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in A^{p+1}$ , ainsi que  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in [0, 1]^{p+1}$  tel que  $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k = 1$ .

Montrons que  $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k \in A$ .

- Si  $\lambda_{p+1} = 1$ , alors  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_k = 0$ , donc  $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k = x_{p+1} \in A$ .
- Supposons  $\lambda_{p+1} \neq 1$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , posons  $\tilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{p+1}}$ .
  - \* D'une part, on a :

$$\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k = (1 - \lambda_{p+1}) \sum_{k=1}^p \tilde{\lambda}_k x_k + \lambda_{p+1} x_{p+1}. \tag{*}$$



\* D'autre part :

- ★ on a  $\lambda_{p+1} \in [0, 1]$ , donc  $1 - \lambda_{p+1} \geq 0$ , et ainsi  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \tilde{\lambda}_k \geq 0$  ;
- ★ puisque  $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k = 1$ , on a  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 - \lambda_{p+1}$ , donc  $\sum_{k=1}^p \tilde{\lambda}_k = 1$  ; les  $\tilde{\lambda}_k$  étant positifs, cette dernière relation assure qu'ils appartiennent à  $[0, 1]$ .

L'hypothèse de récurrence assure donc que  $\sum_{k=1}^p \tilde{\lambda}_k x_k \in A$ .

Par convexité de  $A$  et puisque  $\lambda_{p+1} \in [0, 1]$ , la relation (★) offre alors  $\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k x_k \in A$ .

D'où le résultat.

**5.6** Soit  $A$  une partie contenue dans une boule  $B$  de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Que la boule  $B$  soit fermée ou ouverte, on a toujours  $B \subset B_f(a, r)$ , et donc  $A \subset B_f(a, r)$ . Alors, par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in A \quad \|x\| = \|a + x - a\| \leq \|a\| + \|x - a\| \leq \|a\| + r,$$

donc  $A$  est bornée.

**5.7** 1. Notons  $\Gamma$  l'ensemble  $\{d(x, y) \mid (x, y) \in A^2\}$ .

- Le caractère non vide de  $A$  assure que  $\Gamma$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .
- Montrons que  $\Gamma$  est majorée.

Soit  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall a \in A \quad \|a\| \leq R$  (un tel  $R$  existe car  $A$  est bornée). Alors  $\Gamma$  est majorée par  $2R$ , car on a :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2R.$$

Donc  $\Gamma$  possède une borne supérieure car c'est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .

2. Notons  $a$  le centre de  $B$ , et  $\Gamma$  l'ensemble  $\{d(x, y) \mid (x, y) \in B^2\}$ .

- L'inégalité triangulaire assure que l'ensemble  $\Gamma$  est majoré par  $2r$ . En effet :

$$\forall (x, y) \in B^2 \quad d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) \leq r + r = 2r.$$

- D'autre part, soit  $u$  un vecteur unitaire de  $E$  (un tel vecteur existe car  $E$  n'est pas l'espace nul). Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les éléments :

$$x_n = a + r(1 - 2^{-n})u \quad \text{et} \quad y_n = a - r(1 - 2^{-n})u$$

appartiennent à  $B$  et vérifient :

$$d(x_n, y_n) = 2r(1 - 2^{-n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2r.$$

Cela montre, par caractérisation de la borne supérieure, que  $\sup(\Gamma) = 2r$ , c'est-à-dire que  $B$  a pour diamètre  $2r$ .

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**5.8** Dans ce qui suit,  $x = (x_1, \dots, x_p)$  et  $y = (y_1, \dots, y_p)$  sont deux éléments de l'espace produit, et  $\lambda$  est un scalaire.

- Montrons que  $N_1$  est une norme.

**Séparation.** Si  $N_1(x) = 0$ , alors  $\sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) = 0$ , donc  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \varphi_k(x_k) = 0$ , puis, par propriété de séparation des normes  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x_k = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0.$$

**Homogénéité.** On a :

$$N_1(\lambda x) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(\lambda x_k) = \sum_{k=1}^p |\lambda| \varphi_k(x_k) = |\lambda| \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) = |\lambda| N_1(x).$$

**Inégalité triangulaire.** On a :

$$\begin{aligned} N_1(x + y) &= \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k + y_k) \leq \sum_{k=1}^p (\varphi_k(x_k) + \varphi_k(y_k)) \\ &= \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k) + \sum_{k=1}^p \varphi_k(y_k) = N_1(x) + N_1(y). \end{aligned}$$

- Montrons que  $N_2$  est une norme.

**Séparation.** Si  $N_2(x) = 0$ , alors  $\sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k)^2 = 0$ , donc  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \varphi_k(x_k) = 0$ , puis, par propriété de séparation des normes  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad x_k = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0.$$

**Homogénéité.** On a

$$N_2(\lambda x)^2 = \sum_{k=1}^p \varphi_k(\lambda x_k)^2 = \sum_{k=1}^p |\lambda|^2 \varphi_k(x_k)^2 = |\lambda|^2 N_2(x)^2,$$

ce qui, les nombres considérés étant positifs, donne  $N_2(\lambda x) = |\lambda| N_2(x)$ .

**Inégalité triangulaire.** Notons  $\|\cdot\|_2$  la norme 2 sur  $\mathbb{R}^p$ , et considérons les vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  suivants :

$$X = (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p)) \quad \text{et} \quad Y = (\varphi_1(y_1), \dots, \varphi_p(y_p)).$$

Alors, l'inégalité triangulaire avec les normes  $\varphi_k$  et la norme  $\|\cdot\|_2$  donne :

$$\begin{aligned} N_2(x + y) &= \left( \sum_{k=1}^p \varphi_k(x_k + y_k)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^p (\varphi_k(x_k) + \varphi_k(y_k))^2 \right)^{1/2} && \text{(inégalité triangulaire des normes } \varphi_k) \\ &= \|X + Y\|_2 \\ &\leq \|X\|_2 + \|Y\|_2 && \text{(inégalité triangulaire de la norme } \|\cdot\|_2) \\ &= N_2(x) + N_2(y). \end{aligned}$$

- 5.9** Soit  $x \in [-1, 1]$ . Montrons que  $x$  est valeur d'adhérence de la suite  $a$  à l'aide de la proposition 19 de la page 214. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Montrons qu'il existe un entier  $n \geq n_0$  tel que  $\|a_n - x\| \leq \varepsilon$ .

La fonction  $f : t \mapsto \sin \sqrt{t}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et :

$$\forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}}.$$

Comme  $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , on peut considérer  $R > 0$  tel que  $\forall t \geq R \quad |f'(t)| \leq \varepsilon$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , le réel  $t_k = (2k\pi + \text{Arcsin } x)^2$  vérifie  $f(t_k) = x$ . Fixons une valeur de  $k$  telle que  $t_k \geq \max(n_0, R)$ , et notons  $n = \lfloor t_k \rfloor + 1$ . L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[t_k, n]$  assure alors que :

$$|a_n - x| = |f(n) - f(t_k)| \leq \varepsilon(n - t_k) \leq \varepsilon.$$

Comme  $n \geq t_k \geq n_0$ , cela montre le résultat souhaité.

- 5.10** 1. Vérifions les trois axiomes de la définition d'une norme.

**Séparation.** Si  $x \in F$  vérifie  $N(x) = 0$ , c'est-à-dire  $\|u(x)\| = 0$ , alors la propriété de séparation de  $\|\cdot\|$  implique  $u(x) = 0$ , puis l'injectivité de  $u$  offre  $x = 0$ .

**Homogénéité.** Pour  $(x, \lambda) \in F \times \mathbb{K}$ , on a, par linéarité de  $u$  et homogénéité de  $\|\cdot\|$  :

$$N(\lambda x) = \|u(\lambda x)\| = \|\lambda u(x)\| = |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| N(x).$$

**Inégalité triangulaire.** Pour  $(x, y) \in F^2$ , on a, par linéarité de  $u$  et par inégalité triangulaire sur  $\|\cdot\|$  :

$$N(x+y) = \|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| = N(x) + N(y).$$

2. Pour tout  $a \in E$ , on a  $N(a) = \|u(a)\|_\infty$ , où  $u$  est l'application :

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto \left( \frac{a_n}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

dont on montre aisément qu'elle est linéaire et injective. Le résultat de la première question assure donc que  $N$  est une norme sur  $E$ .

- 5.11** • Comme la fonction  $t \mapsto P(t) - P'(t)$  est continue, elle est bornée sur le segment  $[0, 1]$ ; l'application  $N$  est donc bien définie.

- Notons  $\|\cdot\|_\infty$  la norme de la convergence uniforme sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ .

**Homogénéité.** Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On a, par homogénéité de  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$N(\lambda P) = \|\lambda P - \lambda P'\|_\infty = \left\| \lambda(P - P') \right\|_\infty = |\lambda| \|P - P'\|_\infty = |\lambda| N(P).$$

**Inégalité triangulaire.** Pour  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ , l'inégalité triangulaire de  $\|\cdot\|_\infty$  donne :

$$\begin{aligned} N(P+Q) &= \left\| (P+Q) - (P'+Q') \right\|_\infty \\ &= \left\| (P-P') + (Q-Q') \right\|_\infty \\ &\leq \|P - P'\|_\infty + \|Q - Q'\|_\infty = N(P) + N(Q). \end{aligned}$$

**Séparation.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $N(P) = 0$ . La fonction  $t \mapsto P(t) - P'(t)$  est alors nulle sur  $[0, 1]$ , et donc le polynôme  $P - P'$ , admettant une infinité de racines, est le polynôme nul. On en déduit  $P = P'$ , et donc  $\deg(P) = \deg(P')$ . Or, on sait que  $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ . On a donc nécessairement  $\deg P = -\infty$ , autrement dit  $P$  est le polynôme nul.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**5.12** Nous allons exploiter les normes déjà connues sur un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base (cf. proposition 8 de la page 208). Faisons la preuve dans le cas de la norme infinie ; la preuve est similaire pour la norme 1 et la norme 2.

Notons  $N$  l'application  $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \|u\|_\infty \end{array}$  et prouvons que  $N$  est une norme sur  $E$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Écrivons  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$  et  $y = \sum_{i \in I} y_i e_i$ . Notons  $I_x$  et  $I_y$  les supports des suites presque nulles  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_i)_{i \in I}$ , c'est-à-dire :

$$I_x = \{i \in I : x_i \neq 0\} \quad \text{et} \quad I_y = \{i \in I : y_i \neq 0\}.$$

Les ensembles  $I_x$  et  $I_y$  étant finis, leur réunion  $J = I_x \cup I_y$  l'est aussi. En notant  $F = \text{Vect}(e_i \mid i \in J)$ , la restriction  $N|_F$  de l'application  $N$  à  $F$  n'est rien d'autre que la norme infinie associée à la base  $(e_i)_{i \in J}$  de  $F$ , donc possède les propriétés d'une norme. On prouve alors aisément que  $N$  est une norme.

**Séparation.** Si  $N(x) = 0$ , alors  $N|_F(x) = 0$ , donc, par propriété de séparation de la norme  $N|_F$ , on a  $x = 0$ .

**Homogénéité.** Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $N(\lambda x) = N|_F(\lambda x) = |\lambda|N|_F(x) = |\lambda|N(x)$ .

**Inégalité triangulaire.** On a  $N(x+y) = N|_F(x+y) \leq N|_F(x) + N|_F(y) = N(x) + N(y)$ .

**5.13** • La suite nulle appartient à  $\mathcal{C}_0$ , et est à une distance 1 de la suite  $(a_n)$ .

On a donc  $d(a, \mathcal{C}_0) \leq 1$ .

• D'autre part, si  $u = (u_n)$  est une suite tendant vers 0, alors on a :

$$|a_n - u_n| = |1 - u_n| \rightarrow 1,$$

et donc  $\|a - u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - u_n| \geq 1$ . Cela prouve que  $d(a, \mathcal{C}_0) \geq 1$ .

Par double inégalité, on en déduit  $d(a, \mathcal{C}_0) = 1$ .

**5.14** • Si  $V$  est un voisinage de  $a$ , alors il existe  $r > 0$  tel que la boule ouverte  $B(a, r)$  (qui est une partie ouverte) soit incluse dans  $V$ .

• Réciproquement, s'il existe un ouvert  $U$  inclus dans  $V$  et contenant  $a$ , alors, comme  $U$  est ouvert, on peut trouver une boule ouverte centrée en  $a$  et de rayon strictement positif qui soit incluse dans  $U$  donc dans  $V$ .

**5.15** 1. • Tout d'abord,  $\overline{F}$  contient  $F$ , donc contient le vecteur nul.

• Soit  $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times \overline{F}^2$ ; montrons que  $\lambda x + y \in \overline{F}$ . Comme  $x$  et  $y$  appartiennent à  $\overline{F}$ , il existe des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  d'éléments de  $F$  convergeant vers  $x$  et  $y$  respectivement. La suite  $(\lambda x_n + y_n)$  est alors à valeurs dans  $F$  et converge vers  $\lambda x + y$ ; cela prouve, par caractérisation séquentielle, que  $\lambda x + y \in \overline{F}$ .

2. Supposons que  $H$  ne soit pas fermé et montrons que  $H$  est dense dans  $E$ , i.e.  $\overline{H} = E$ . Procédons par double inclusion.

- Tout d'abord,  $H$  étant une partie de l'espace vectoriel normé  $E$ , on a  $\overline{H} \subset E$ .
- Comme  $H$  n'est pas fermé, l'inclusion  $H \subset \overline{H}$  est stricte. Considérons  $a \in \overline{H} \setminus H$ . Comme  $a \notin H$  et que  $H$  est un hyperplan de  $E$ , les sous-espaces  $H$  et  $\text{Vect}(a)$  sont supplémentaires dans  $E$ . Comme de plus on a  $H \subset \overline{H}$  et  $a \in \overline{H}$ , on obtient :

$$E = H \oplus \text{Vect}(a) \subset \overline{H}.$$

- 5.16** 1. Supposons que  $F$  soit ouvert. Étant donné que  $0 \in F$  (car  $F$  est un sous-espace vectoriel) et que  $F$  est ouvert, on peut trouver  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \subset F$ .

Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . Alors le vecteur  $u = \frac{r}{2\|x\|}x$  appartient à  $B(0, r)$  et donc à  $F$ . Comme  $F$  est un sous-espace vectoriel et que  $x = \frac{2\|x\|}{r}u$ , on a  $x \in F$ . D'où  $F = E$ .

2. Supposons que  $F$  ne soit pas d'intérieur vide. On peut trouver  $x \in F$  et  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset F$ . Pour tout  $u \in B(0, r)$ , on a  $x + u \in B(x, r)$ , donc  $x + u \in F$ , puis :

$$u = \underbrace{(x + u)}_{\in F} - \underbrace{x}_{\in F} \in F.$$

On a donc  $B(0, r) \subset F$  et l'on est ramené au raisonnement fait à la question précédente.

- 5.17** On note indifféremment  $\|\cdot\|$  les normes de  $E$ ,  $F$  et  $E \times F$ . Rappelons que, par définition de la norme produit, on a :

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

1. • On a déjà  $\text{Int}(A) \subset A$  et  $\text{Int}(B) \subset B$ , donc  $\text{Int}(A) \times \text{Int}(B) \subset A \times B$ . De plus,  $\text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$ , comme produit d'ouverts, est ouvert (cf. proposition 22 de la page 216). On en déduit l'inclusion  $\text{Int}(A) \times \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \times B)$  (car  $\text{Int}(A \times B)$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A \times B$ ).

- Montrons l'autre inclusion.

Soit  $(a, b) \in \text{Int}(A \times B)$ . Montrons que  $a \in \text{Int}(A)$  et  $b \in \text{Int}(B)$ . Par symétrie du problème en  $a$  et  $b$ , contentons-nous de prouver que  $a \in \text{Int}(A)$ .

Comme  $(a, b) \in \text{Int}(A \times B)$ , on peut trouver  $r > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|(x, y) - (a, b)\| < r \implies (x, y) \in A \times B.$$

Si  $x \in E$  vérifie  $\|x - a\| < r$ , alors par définition de la norme produit on a :

$$\|(x, b) - (a, b)\| = \|(x - a, 0)\| = \|x - a\| < r,$$

donc  $(x, b) \in A \times B$ , i.e.  $x \in A$ . Cela prouve que  $B(a, r) \subset A$ , donc  $a \in \text{Int}(A)$ .

2. • On a  $A \subset \text{Adh}(A)$  et  $B \subset \text{Adh}(B)$ , donc  $A \times B \subset \text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$ . De plus, comme produit de fermés,  $\text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$  est fermé (cf. proposition 26 de la page 218). On en déduit l'inclusion  $\text{Adh}(A \times B) \subset \text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$  (car  $\text{Adh}(A \times B)$  est le plus petit fermé contenant  $A \times B$ ).

- Montrons l'inclusion réciproque.

Soit  $(x, y) \in \text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)$ . Alors on peut considérer  $(a_n)$  et  $(b_n)$  des suites d'éléments de  $A$  et  $B$  convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ . Mais alors, par définition de la norme produit, la suite  $((a_n, b_n))$ , à valeurs dans  $A \times B$ , converge vers  $(x, y)$ .

On a donc  $(x, y) \in \text{Adh}(A \times B)$ .

3. Par définition, on a :

$$\text{Fr}(A \times B) = \text{Adh}(A \times B) \setminus \text{Int}(A \times B).$$

En utilisant les deux premières questions, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \times B) &= (\text{Adh}(A) \times \text{Adh}(B)) \setminus (\text{Int}(A) \times \text{Int}(B)) \\ &= \left( (\text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)) \times \text{Adh}(B) \right) \cup \left( \text{Adh}(A) \times (\text{Adh}(B) \setminus \text{Int}(B)) \right) \\ &= (\text{Fr}(A) \times \text{Adh}(B)) \cup (\text{Adh}(A) \times \text{Fr}(B)). \end{aligned}$$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

- 5.18** • Montrons que  $\text{Adh}(C)$  est convexe. Soit  $(x, y, \lambda) \in \text{Adh}(C)^2 \times [0, 1]$ ; montrons que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{Adh}(C)$ .

Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, on peut trouver deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  d'éléments de  $C$  convergeant vers  $x$  et  $y$  respectivement. Par convexité de  $C$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1 - \lambda)u_n + \lambda v_n \in C.$$

De plus, comme  $u_n \rightarrow x$  et  $v_n \rightarrow y$ , on a  $(1 - \lambda)u_n + \lambda v_n \rightarrow (1 - \lambda)x + \lambda y$ , ce qui prouve que  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{Adh}(C)$ .

- Montrons que  $\text{Int}(C)$  est convexe. Soit  $(x, y, \lambda) \in \text{Int}(C)^2 \times [0, 1]$ ; montrons que  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{Int}(C)$ . Puisque  $x$  et  $y$  appartiennent à l'intérieur de  $C$ , il existe  $r_1 > 0$  et  $r_2 > 0$  tels que :

$$B(x, r_1) \subset C \quad \text{et} \quad B(y, r_2) \subset C.$$

Posons  $r = \min(r_1, r_2)$ ; on a alors :

$$B(x, r) \subset C \quad \text{et} \quad B(y, r) \subset C.$$

Montrons alors qu'on a  $B(z, r) \subset C$ , ce qui prouvera que  $z \in \text{Int}(C)$ .

Soit  $u \in E$  vérifiant  $\|u\| < r$ ; montrons que  $z + u \in C$ .

En notant  $\tilde{x} = x + u$  et  $\tilde{y} = y + u$ , on a :

$$\begin{aligned} z + u &= (1 - \lambda)x + \lambda y + (1 - \lambda)u + \lambda u \\ &= (1 - \lambda)\tilde{x} + \lambda\tilde{y}. \end{aligned}$$

Comme  $B(x, r) \subset C$  et  $B(y, r) \subset C$ , on a  $\tilde{x} \in C$  et  $\tilde{y} \in C$ . Puis, comme  $C$  est convexe, on a  $z + u \in C$ . D'où le résultatat.

- 5.19 Adhérence au sens de la norme infinie.** Montrons qu'au sens de la norme infinie,  $F$  est un fermé, donc égal à son adhérence. Par caractérisation séquentielle : soit  $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $f \in E$ ; montrons que  $f \in F$ .

Pour  $x \in [0, 1]$ , on a, par définition de la norme infinie :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{\infty},$$

donc, puisque  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ , on obtient  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

En particulier, on a  $f_n(0) \rightarrow f(0)$  et  $f_n(1) \rightarrow f(1)$ .

Cela assure que  $f(0) = f(1) = 0$ , i.e.  $f \in F$ .



**Remarque** Pour montrer que  $F$  est un fermé au sens de la norme infinie, on peut aussi utiliser la proposition 17 de la page 262 en remarquant que  $F$  est l'image réciproque du fermé  $\{(0, 0)\}$  par l'application (linéaire) continue  $f \mapsto (f(0), f(1))$ .

- Adhérence au sens de la norme 1.** Montrons qu'au sens de la norme 1,  $F$  est dense dans  $E$ , i.e.  $\text{Adh}(F) = E$ . Soit  $f \in E$ . Pour tout  $n \geq 3$ , notons  $f_n$  l'unique fonction égale à  $f$  sur  $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ , nulle en 0 et en 1, et affine sur les intervalles  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$  et  $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$ . On a alors :

$$f_n \in F \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_1 \leq \frac{4}{n} \|f\|_{\infty} \rightarrow 0.$$

La suite  $(f_n)$  est donc une suite d'éléments de  $F$  qui converge vers  $f$  (au sens de la norme  $\|\cdot\|_1$ ). D'où le résultatat.

- 5.20** 1. • Soit  $a$  une valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)$ . Montrons que  $a$  est adhérent à chacune des parties  $A_p$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Comme  $a$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)$ , on peut considérer une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $a$ . De plus, pour tout  $n \geq p$ , on a  $\varphi(n) \geq n \geq p$ , donc  $u_{\varphi(n)} \in A_p$ . La suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq p}$  est donc une suite à valeurs dans  $A_p$  qui tend vers  $a$ , ce qui montre que  $a$  est adhérent à  $A_p$ .
- Réciproquement, donnons-nous  $a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$  et montrons que  $a$  est valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)$ . Pour cela, utilisons la caractérisation de la proposition 19 de la page 214 : soit  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ ; montrons qu'il existe  $n \geq n_0$  tel que  $\|u_n - a\| \leq \varepsilon$ . Comme  $a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p}$ , on a  $a \in \overline{A_{n_0}}$ . Il existe donc  $b \in A_{n_0}$  tel que  $\|b - a\| \leq \varepsilon$ , ce qui, par définition de  $A_{n_0}$ , revient à dire qu'il existe  $n \geq n_0$  tel que  $\|u_n - a\| \leq \varepsilon$ . D'où le résultat.
2. D'après la question précédente, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite s'écrit comme une intersection de fermés de  $E$ , donc est fermé.

- 5.21** 1. Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés. Soit  $(P_n)$  une suite de polynômes unitaires convergeant vers  $P$ . Montrons que  $P$  est unitaire.

- Tout d'abord, les polynômes  $P_n$  étant unitaires, et par définition de  $\|\cdot\|_\infty$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n\|_\infty \geq 1,$$

et donc, puisque  $\|P_n\|_\infty \rightarrow \|P\|_\infty$ , on a  $\|P\|_\infty \geq 1$ . En particulier,  $P$  est non nul.

- Notons  $r$  le degré de  $P$  et  $c$  son coefficient dominant. Comme  $P_n \rightarrow P$ , il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|P_n - P\|_\infty \leq \frac{\min(|c|, 1)}{2}.$$

Pour  $n \geq n_0$ , on a donc nécessairement  $\deg(P_n) = r$  car :

- \* si  $\deg(P_n) < r$ , alors le coefficient devant le terme de degré  $r$  de  $P_n - P$  vaut  $c$ , et alors  $\|P_n - P\|_\infty \geq |c| > \frac{\min(|c|, 1)}{2}$ .
- \* si  $\deg(P_n) > r$ , alors le polynôme  $P_n - P$  est unitaire, et par conséquent :

$$\|P_n - P\|_\infty = 1 > \frac{\min(|c|, 1)}{2}.$$

- Pour  $n \geq n_0$ , comme  $P_n$  est de degré  $r$  et unitaire, on a alors :

$$\|P_n - P\|_\infty \geq |1 - c|.$$

Comme  $\|P_n - P\|_\infty \rightarrow 0$ , on a nécessairement  $|1 - c| = 0$  i.e.  $c = 1$ .

2. (a) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme unitaire et scindé de degré  $r$ . En notant  $z_1, \dots, z_r$  ses racines (réelles) comptées avec multiplicités, on a :

$$P = \prod_{k=1}^r (X - z_k) \quad \text{et donc} \quad |P(z)| = \prod_{k=1}^r |z - z_k|.$$

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on a, puisque les  $z_k$  sont réels :

$$\forall k \in [1, r] \quad |z - z_k| = \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{Re} z - z_k)^2} \geq |\operatorname{Im} z|,$$

d'où :

$$|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^r.$$

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

(b) Procédons par caractérisation séquentielle. Soit  $(P_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{S}$  convergeant vers  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrons que  $P \in \mathcal{S}$ . D'après la question 1, on sait déjà que  $P$  est unitaire. Il s'agit donc de montrer que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , c'est-à-dire, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, que  $P$  ne possède pas de racine complexe non réelle. Donnons-nous donc  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et prouvons que  $P(z) \neq 0$ .

- Tout d'abord, il a été établi à la question 1 que si l'on note  $r = \deg P$  (on a  $r \in \mathbb{N}$  car  $P$  est unitaire donc non nul), alors il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0 \quad \deg P_n = r$ . La question 2(a) assure alors que :

$$\forall n \geq n_0 \quad |P_n(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^r. \quad (*)$$

- Il suffit alors de montrer que  $P_n(z) \rightarrow P(z)$ . En effet, un passage à la limite dans la relation  $(*)$  donnera  $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^r > 0$  et donc  $P(z) \neq 0$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a  $\deg P_n = r$  et donc on peut écrire :

$$P_n = \sum_{k=0}^r a_k^{(n)} X^k \quad \text{et} \quad P = \sum_{k=0}^r a_k X^k$$

et ainsi :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^r a_k^{(n)} z^k \quad \text{et} \quad P(z) = \sum_{k=0}^r a_k z^k.$$

Par définition de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , la convergence  $P_n \rightarrow P$  donne la convergence de chacune des suites de coefficients :  $\forall k \in [0, r] \quad a_k^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_k$ . Par opérations sur les limites, on obtient alors  $P_n(z) \rightarrow P(z)$ .

**5.22** 1. Il est clair que  $E$  et  $\emptyset$  ont une frontière vide. Montrons que ce sont les seules. Soit  $A$  une partie vérifiant  $A \neq E$  et  $A \neq \emptyset$ .

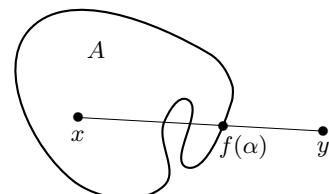
Montrons que la frontière de  $A$  est non vide, i.e.  $\overline{A} \cap \overline{E \setminus A} \neq \emptyset$ .

Comme  $A \neq E$  et  $A \neq \emptyset$ , on peut prendre  $x \in A$  et  $y \in E \setminus A$ .

Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow E \\ \lambda &\longmapsto (1 - \lambda)x + \lambda y. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Gamma = \{\lambda \in [0, 1] : f(\lambda) \in A\}$  est non vide (car contient 0) et majoré (par 1); notons  $\alpha$  sa borne supérieure.



Prouvons alors que  $f(\alpha) \in \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ , ce qui terminera le raisonnement.

- Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on peut trouver une suite  $(\lambda_n)$  d'éléments de  $\Gamma$  qui converge vers  $\alpha$ . Par opérations sur les limites, on a  $f(\lambda_n) \rightarrow f(\alpha)$ . Comme  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in A$ , on obtient  $f(\alpha) \in \overline{A}$ .
- Il reste à prouver que  $f(\alpha) \in \overline{E \setminus A}$ .

\* Si  $\alpha = 1$ , alors  $f(\alpha) = y \in E \setminus A \subset \overline{E \setminus A}$ .

\* Si  $\alpha \in [0, 1[$ , on peut considérer  $(\lambda_n)$  une suite à valeurs dans  $\]0, 1]$  tendant vers  $\alpha$ . On alors  $f(\lambda_n) \rightarrow f(\alpha)$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\lambda_n) \in E \setminus A$ .

Il en résulte que  $f(\alpha) \in \overline{E \setminus A}$ .

2. On sait que les parties  $E$  et  $\emptyset$  sont à la fois ouvertes et fermées dans  $E$ . Montrons que ce sont les seules. Soit  $A$  une partie à la fois ouverte et fermée.

- Comme  $A$  est fermée, on a  $\overline{A} = A$ .
- Comme  $A$  est ouverte,  $E \setminus A$  est fermée et donc  $\overline{E \setminus A} = E \setminus A$ .

On a alors :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = A \cap (E \setminus A) = \emptyset.$$

D'après la question précédente, on a  $A = E$  ou  $A = \emptyset$ .

### 5.23 Antisymétrie.

- Si  $E$  est l'espace nul, alors il existe une unique norme sur  $E$  : l'application nulle (et dans ce cas la relation de domination est une relation d'ordre).
- En revanche, si  $E$  n'est pas l'espace nul et que l'on dispose d'au moins une norme  $N$  sur  $E$ , alors en considérant l'application  $\tilde{N} : x \mapsto 2N(x)$ , on constate que  $N$  et  $\tilde{N}$  sont deux normes distinctes et dominées l'une par l'autre. L'antisymétrie est alors mise en défaut.

L'exercice est résolu. Constatons tout de même que les propriétés de réflexivité et transitivité sont quant à elles vérifiées :

**Reflexivité.** Toute norme est dominée par elle-même (prendre  $\alpha = 1$  dans la définition).

**Transitivité.** Si  $N_1$  est dominée par  $N_2$  et si  $N_2$  dominée par  $N_3$ , alors on peut trouver des constantes  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$  telles que :

$$\forall x \in E \quad (N_1(x) \leq \alpha_1 N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leq \alpha_2 N_3(x)).$$

La norme  $N_1$  est alors dominée par la norme  $N_3$ , car :

$$\forall x \in E \quad N_1(x) \leq \alpha_1 \alpha_2 N_3(x).$$

### 5.24 1. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

On a, par croissance de l'intégrale :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \leq \int_a^b \|f\|_\infty = (b - a) \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que la norme 1 est dominée par la norme infinie.

De même, on a :

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b \|f\|_\infty^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(b - a) \|f\|_\infty^2} = \sqrt{b - a} \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que la norme 2 est dominée par la norme infinie.

### 2. Pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|f\|_1 = \int_a^b 1 \cdot |f| \leq \left( \int_a^b 1^2 \right)^{1/2} \left( \int_a^b |f|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{b - a} \|f\|_2,$$

ce qui prouve que la norme 1 est dominée par la norme 2.

## Chapitre 5. Espaces vectoriels normés

**5.25** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ .

- On a  $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2$ . Cela donne  $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2$ , donc  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ .
- On a  $\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2$ . Cela donne  $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$ , donc  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ .
- Enfin, on a  $\sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \left( \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| \right)$ , c'est-à-dire  $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ .

**5.26** Tout d'abord, justifions que  $N_1$  et  $N_2$  sont bien des normes sur  $\mathbb{R}[X]$  : l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes, quant à la propriété de séparation, il suffit, par exemple pour  $N_1$ , de constater que si  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifie  $N_1(P) = 0$ , alors, la fonction  $t \mapsto |P(t)|$  étant continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ , on a :

$$\forall t \in [0, 1] \quad P(t) = 0,$$

ce qui assure que  $P$  est le polynôme nul (car admettant une infinité de racines).

- Puisque  $[0, 1] \subset [0, 2]$ , on a, par croissance de l'intégrale,  $N_1 \leq N_2$ , donc  $N_1$  est dominée par  $N_2$ .
- Montrons que  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ . Pour cela, considérons la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $P_n = X^n$ . On a :

$$N_1(P_n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad N_2(P_n) = \int_0^2 t^n dt = \frac{2^n}{n+1} \rightarrow +\infty.$$

Il en résulte que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers le polynôme nul pour la norme  $N_1$  mais pas pour la norme  $N_2$ . Donc  $N_2$  n'est pas dominée par  $N_1$ .

# Chapitre 6 : Étude locale d'une application, continuité

<b>I</b>	<b>Limite d'une application . . . . .</b>	<b>254</b>
1	Définitions, généralités . . . . .	254
2	Cas d'une application à valeurs réelles : limites infinies . .	256
3	Limites en l'infini . . . . .	257
4	Application à valeurs dans un espace produit . . . . .	258
5	Prolongement par continuité . . . . .	258
6	Opérations sur les limites . . . . .	258
<b>II</b>	<b>Applications continues . . . . .</b>	<b>259</b>
1	Définition . . . . .	259
2	Application lipschitzienne . . . . .	260
3	Opérations sur les applications continues . . . . .	261
4	Continuité et densité . . . . .	262
5	Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue . . . . .	262
6	Continuité uniforme . . . . .	263
<b>III</b>	<b>Continuité et applications linéaires / multilinéaires . .</b>	<b>264</b>
1	Critère de continuité d'une application linéaire . . . . .	264
2	Espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ , norme subordonnée . . . . .	265
3	Critère de continuité des applications multilinéaires . . . . .	268
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>275</b>

# Étude locale d'une application, continuité

Dans tout le chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . En l'absence de précision supplémentaire,  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et  $A$  désigne une partie de  $E$ .

## I Limite d'une application

### 1 Définitions, généralités

#### Définition 1

Soit  $f : A \rightarrow F$  une application, ainsi que  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

**Notation** Pour signifier que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , on écrit :

$$f \xrightarrow[a]{} \ell \quad \text{ou encore} \quad f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell.$$

#### Remarques

- La définition précédente peut s'écrire :

\* en termes de distance :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad d(x, a) \leq \eta \implies d(f(x), \ell) \leq \varepsilon;$$

\* en termes de boules<sup>1</sup> :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in B_f(a, \eta) \cap A \quad f(x) \in B_f(\ell, \varepsilon);$$

ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad f(B_f(a, \eta) \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon).$$

- Dans la définition précédente, on peut, sans que cela ait de conséquences, changer les normes sur  $E$  et  $F$  en des normes qui leur sont équivalentes.

1. La notation  $B_f$  utilisée ici désigne une boule fermée et n'a aucun lien avec le nom  $f$  de l'application considérée.

Dans toute la suite, en l'absence de précision supplémentaire,  $f$  désigne une application de  $A$  dans  $F$ ,  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell$  un élément de  $F$ .

### Proposition 1

L'application  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si, et seulement si, pour tout voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\ell$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que  $f(\mathcal{V} \cap A) \subset \mathcal{W}$ .

Démonstration page 270

### Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante va nous permettre d'utiliser les résultats déjà obtenus sur les suites au chapitre précédent pour établir rapidement de nombreuses propriétés sur les limites d'applications.

### Proposition 2 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Exo  
6.1

L'application  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si, et seulement si, pour tout suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ , on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ .

Démonstration page 270

**Remarque** Lorsque l'on utilise le sens direct de l'équivalence donnée par la proposition précédente, on dit en général simplement « par composition de limites », réservant ainsi le terme « caractérisation séquentielle de la limite » au sens réciproque.

**Ex. 1.** Si  $f : A \rightarrow F$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , alors  $\ell$  est adhérent à  $f(A)$ . En effet, dans ce cas, le point  $a$  étant adhérent à  $A$ , on peut trouver une suite  $(u_n)$  tendant vers  $a$ , et alors, par composition de limites, on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ .

### Unicité de la limite

### Proposition 3 (Unicité de la limite)

Si deux éléments  $\ell_1$  et  $\ell_2$  de  $F$  vérifient  $f \xrightarrow[a]{} \ell_1$  et  $f \xrightarrow[a]{} \ell_2$ , alors  $\ell_1 = \ell_2$ .

**Démonstration.** Supposons que  $\ell_1$  et  $\ell_2$  soient tels que  $f \xrightarrow[a]{} \ell_1$  et  $f \xrightarrow[a]{} \ell_2$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$  (une telle suite existe car  $a$  est adhérent à  $A$ ). D'après la proposition 2, on a alors  $f(u_n) \rightarrow \ell_1$  et  $f(u_n) \rightarrow \ell_2$ . Par unicité de la limite d'une suite, il en résulte que  $\ell_1 = \ell_2$ .

### Définition 2

On dit que  $f$  admet une limite en  $a$  s'il existe  $\ell \in F$  tel que  $f \xrightarrow[a]{} \ell$ . Cet unique élément  $\ell$  s'appelle alors la **limite de  $f$  en  $a$**  et se note  $\lim_a f$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

### Proposition 4 (Stabilité par restriction)

Si  $f : A \rightarrow F$  tend vers une limite  $\ell$  en  $a$  et si  $B$  est une partie de  $A$  dont l'adhérence contient  $a$ , alors la restriction de  $f$  à  $B$  tend également vers  $\ell$  en  $a$ .

**Démonstration.** Procédons par caractérisation séquentielle. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $B$  tendant vers  $a$ , alors,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant aussi une suite à valeurs dans  $A$ , et comme  $f \xrightarrow[a]{} \ell$ , on a  $f(a_n) \rightarrow \ell$ , donc  $f|_B(a_n) \rightarrow \ell$ . D'où  $f|_B \xrightarrow[a]{} \ell$ .  $\square$

### Proposition 5 (Caractère local de la limite)

Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $a$ . Alors  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$  si, et seulement si, la restriction de  $f$  à  $A \cap \mathcal{V}$  tend vers  $\ell$  en  $a$ .

Démonstration page 270

## Continuité en un point

### Définition 3

On dit que  $f$  est continue en  $a \in A$  si  $f$  admet une limite en  $a$ .

**Remarque** Si  $a$  appartient à  $A$  et si  $f$  admet une limite en  $a$ , alors celle-ci vaut  $f(a)$  (on le voit par exemple par composition de limites en considérant la suite constante  $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ ). Par conséquent, dire que  $f$  est continue en  $a \in A$  signifie que  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$ .

### Corollaire 6 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

L'application  $f$  est continue en  $a \in A$  si, et seulement si, pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ , on a  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ .

## 2 Cas d'une application à valeurs réelles : limites infinies

### Définition 4

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application, et  $a$  un point adhérent à  $A$ .

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  si :

$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \geq R.$$

- On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  si :

$$\forall R \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies f(x) \leq R.$$

**Notation** On note  $f \xrightarrow[a]{} +\infty$  ou encore  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} +\infty$  pour signifier que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$ . On dit également que  $f$  admet  $+\infty$  comme limite en  $a$ , et l'on note  $\lim_a f = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

Même principe pour  $-\infty$ .

**Remarque** La caractérisation séquentielle de la limite (cf. proposition 2 de la page précédente), donnée dans le cas où  $\ell \in F$ , s'étend naturellement aux cas  $\ell = \pm\infty$ .

### 3 Limites en l'infini

**Limite lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$**

**Définition 5**

Soit  $f : A \rightarrow F$  une application. Supposons que  $A$  ne soit pas bornée.

On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \geq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow[\|x\| \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

**Cas de la variable réelle : limites en  $-\infty$  et  $+\infty$**

Pour une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ , on étend la définition de point adhérent (définition 17 de la page 220) de la manière suivante : on dit qu'un élément  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  est adhérent à  $A$  s'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui tend vers  $x$ .

Ainsi,  $-\infty$  (respectivement  $+\infty$ ) est adhérent à  $A$  s'il existe une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $-\infty$  (respectivement  $+\infty$ ).

On constate que :

- $-\infty$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si,  $A$  n'est pas minorée ;
- $+\infty$  est adhérent à  $A$  si, et seulement si,  $A$  n'est pas majorée.

**Définition 6**

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow F$  une application et  $\ell \in F$ .

- Si  $-\infty$  est adhérent à  $A$ , on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $-\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

- Si  $+\infty$  est adhérent à  $A$ , on dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \geq M \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

**Ex. 2.** Une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  étant une application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ , la définition précédente permet d'envisager la convergence de la suite en  $+\infty$ . On constate que cette définition est la même que celle donnée par la définition 10 de la page 211.

**Remarque** La caractérisation séquentielle de la limite ainsi que la propriété d'unicité de la limite données dans le cas d'une limite en un point  $a \in \text{Adh}(A)$  (cf. proposition 2 et proposition 3 de la page 255) s'étendent naturellement au cas d'une limite en l'infini.

Dans toute la suite du chapitre, en l'absence de précision supplémentaire,  $a$  désigne un point adhérent à  $A$  en l'un des sens suivants :

- **premier sens** :  $a$  est un élément de  $E$  appartenant à  $\text{Adh}(A)$  ;
- **deuxième sens** :  $A$  est une partie non majorée de  $\mathbb{R}$  et  $a = +\infty$  ;
- **troisième sens** :  $A$  est une partie non minorée de  $\mathbb{R}$  et  $a = -\infty$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

### 4 Application à valeurs dans un espace produit

Dans l'énoncé suivant,  $E_1, \dots, E_p$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et l'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$  est muni de la norme produit.

Une application  $f : A \rightarrow E_1 \times \dots \times E_p$  est caractérisée par  $p$  applications  $f_1, \dots, f_p$ , à valeurs dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

#### Proposition 7

Étant donné  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ , on a l'équivalence :

$$(f \xrightarrow{a} \ell) \iff (\forall k \in [1, p] \quad f_k \xrightarrow{a} \ell_k).$$

Démonstration page 270

**Principe de démonstration.** On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le résultat sur la convergence d'une suite à valeurs dans un espace produit.

### 5 Prolongement par continuité

#### Définition 7

Si  $f$  possède une limite  $\ell \in F$  en un point  $a \in \overline{A} \setminus A$ , alors l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A \cup \{a\} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en  $a$  ; on l'appelle **prolongement de  $f$  par continuité en  $a$** .

**Remarque** L'unicité de la limite entraîne que l'application  $\tilde{f}$  de la définition précédente est l'*unique* prolongement de  $f$  à  $A \cup \{a\}$  qui soit continu en  $a$ .

### 6 Opérations sur les limites

Les résultats suivants sont obtenus par caractérisation séquentielle de la limite et par opérations sur les suites convergentes.

#### Proposition 8 (Limite d'une combinaison linéaire)

Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux applications de  $A$  dans  $F$  ainsi que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux scalaires.

Si  $f_1 \xrightarrow{a} \ell_1 \in F$  et  $f_2 \xrightarrow{a} \ell_2 \in F$ , alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \xrightarrow{a} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

Démonstration page 271

#### Proposition 9 (Produit par une fonction à valeurs scalaires)

Si  $f \xrightarrow{a} \ell \in F$  et si  $\varphi$  est une fonction de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  tendant vers  $\lambda \in \mathbb{K}$  en  $a$ ,

alors  $\varphi f : A \rightarrow F$  tend vers  $\lambda \ell$  en  $a$ .

Démonstration page 271

**Proposition 10 (Inverse)**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction ne s'annulant pas. Si  $f \xrightarrow[a]{} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , alors  $\frac{1}{f} \xrightarrow[a]{} \frac{1}{\ell}$ .

Démonstration page 271

**Remarque** Si la fonction  $f$  s'annule sur  $A$ , alors la fonction  $\frac{1}{f}$  n'est pas définie sur  $A$  tout entier. En revanche, si  $f \xrightarrow[a]{} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , alors,  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  étant un voisinage de  $\ell$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que la restriction de  $f$  à  $\mathcal{V} \cap A$  ne s'annule pas. C'est à cette restriction que la proposition 10 s'applique.

**Quotient d'applications à valeurs scalaires** Il résulte des deux résultats précédents que si  $f_1 : A \rightarrow F$  et  $f_2 : A \rightarrow \mathbb{K}$  vérifient  $f_1 \xrightarrow[a]{} \ell_1$  et  $f_2 \xrightarrow[a]{} \ell_2 \neq 0$ , et si  $f_2$  ne s'annule pas, alors :

$$\frac{f_1}{f_2} \xrightarrow[a]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

**Proposition 11 (Limite d'une fonction composée)**

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, ainsi que  $A \subset E$  et  $B \subset F$ .

Soit  $f : A \rightarrow F$  et  $g : B \rightarrow G$  deux applications, avec  $f(A) \subset B$ .

- Si  $f \xrightarrow[a]{} b$ , alors  $b$  est adhérent à  $B$ .
- Si de plus on a  $g \xrightarrow[b]{} \ell$ , alors  $g \circ f \xrightarrow[a]{} \ell$ .

Démonstration page 271

**Conséquences en terme de continuité ponctuelle**

Les résultats précédents sur les limites donnent des résultats analogues sur les applications continues en un point :

- toute combinaison linéaire d'applications continues en  $a$  est continue en  $a$  ;
- tout produit d'une fonction continue en  $a$  par une fonction scalaire continue en  $a$  est continue en  $a$  ;
- si  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  est continue en  $a$  et ne s'annule pas, alors  $\frac{1}{f}$  est continue en  $a$  ;
- si  $f : A \rightarrow F$  et  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$  sont continues en  $a$  et si  $g$  ne s'annule pas, alors  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$  ;
- si  $f : A \rightarrow F$  est continue en  $a$  et  $g : B \rightarrow G$  vérifie  $f(A) \subset B$  et est continue en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

## II Applications continues

### 1 Définition

**Définition 8**

On dit qu'une application est **continue** si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

### Proposition 12

Soit  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Pour tout partie non vide  $B \subset A$ , la restriction  $f|_B$  est continue.

Démonstration page 271

## 2 Application lipschitzienne

### Définition 9

- Soit  $k \geq 0$ . On dit que l'application  $f$  est  **$k$ -lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport  $k$**  si :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

- On dit que  $f$  est **lipschitzienne** s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne.

### Remarques

- Cette définition dépend des normes utilisées sur  $E$  et  $F$ . En revanche, des normes équivalentes définissent les mêmes applications lipschitziennes.
- Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, alors  $f$  est  $k'$ -lipschitzienne pour tout  $k' \geq k$ .
- Si  $f_1$  et  $f_2$  sont lipschitziennes de rapports respectifs  $k_1$  et  $k_2$  et si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux scalaires, alors l'application  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est lipschitzienne, de rapport  $|\lambda_1|k_1 + |\lambda_2|k_2$ .
- La composée d'une application  $k_1$ -lipschitzienne et d'une application  $k_2$ -lipschitzienne est une application  $k_1 k_2$ -lipschitzienne.

### Proposition 13

Toute application lipschitzienne est continue.

Démonstration page 271

Les applications suivantes sont 1-lipschitziennes, donc continues :

**Ex. 3.** l'application *norme* :  $E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \|x\|$  ;

**Ex. 4.** pour  $A$  une partie non vide de  $E$ , l'application *distance* à  $A$  :  $E \rightarrow \mathbb{R}$   
(cf. proposition 4 de la page 205) ;  $x \mapsto d(x, A)$  ;

**Ex. 5.** pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  *$k$ -ième composante* ( $E_1 \times \cdots \times E_n$  étant muni de la norme produit) :

$$\begin{aligned} E_1 \times \cdots \times E_n &\rightarrow E_k \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_k. \end{aligned}$$

**Ex. 6.** L'application *distance* ( $E^2$  étant muni de la norme produit) :  $E^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto d(x, y)$  est 2-lipschitzienne, donc continue; en effet, pour  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  dans  $E^2$ , on a, par

utilisation des inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}
 |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| &= \left| \|y_1 - x_1\| - \|y_2 - x_2\| \right| \leqslant \|(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2)\| \\
 &= \|(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2)\| \\
 &\leqslant \|x_2 - x_1\| + \|y_1 - y_2\| \\
 &\leqslant 2\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.
 \end{aligned}$$

### 3 Opérations sur les applications continues

Les résultats suivants sont les versions globales des propositions 8 à 11.

**Proposition 14 (Combinaison linéaire, produit, composée)**

- Une combinaison linéaire d'applications continues est continue.
- Le produit d'une application continue avec une application continue à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est continue.
- La composée de deux applications continues est continue.

#### Remarques

- L'application nulle étant continue, l'ensemble des applications continues de  $A$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(A, F)$ . On le note  $\mathcal{C}(A, F)$ .
- L'application constante égale à 1 étant continue, l'ensemble  $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ .

**Ex. 7.** L'application  $E \rightarrow E$  est continue, comme produit des deux applications continues  $E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\text{Id}_E$ .

$x$	$\mapsto$	$\ x\ x$
$x$	$\mapsto$	$\ x\ $

**Ex. 8.** Si  $f$  est continue, alors l'application  $x \mapsto \|f(x)\|$  est continue, comme composée des deux applications continues  $f$  et  $E \rightarrow \mathbb{R}$

$y$	$\mapsto$	$\ y\ $
-----	-----------	---------

**Proposition 15 (Inverse)**

Si  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  est une application continue ne s'annulant pas, alors  $\frac{1}{f}$  est continue.

**Conséquence** Si  $f : A \rightarrow F$  et  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$  sont deux applications continues à valeurs scalaires, et si de plus  $g$  ne s'annule pas, alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est continue, comme produit des deux applications continues  $f$  et  $\frac{1}{g}$ .

## 4 Continuité et densité

### Proposition 16

Exo  
6.2

Deux applications continues  $f : A \rightarrow F$  et  $g : A \rightarrow F$  coïncidant sur une partie dense dans  $A$  sont égales.

Démonstration page 271

**Principe de démonstration.** Si  $D$  est une partie dense dans  $A$ , alors tout élément de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $D$ .

## 5 Images réciproques d'ouverts et de fermés par une application continue

### Proposition 17

Soit  $f : A \rightarrow F$  une application continue.

- L'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  est un fermé relatif de  $A$ .
- L'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ .

Démonstration page 272

**Ex. 9.** On munit l'espace produit  $E \times F$  de la norme produit. Montrons que si  $f : A \rightarrow F$  est une application continue, alors le graphe de  $f$  :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

est un fermé relatif de  $A \times F$ . Pour cela, considérons l'application  $\varphi : A \times F \longrightarrow F$   
 $(x, y) \longmapsto y - f(x)$ .

La continuité des applications :

$$\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & E, & E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x & (x, y) & \longmapsto & y \end{array} \quad \text{et} \quad f$$

assurent la continuité de  $\varphi$ . De plus, on a  $\Gamma_f = \varphi^{-1}(\{0\})$  car, pour  $(x, y) \in A \times F$  :

$$(x, y) \in \Gamma_f \iff y = f(x) \iff \varphi((x, y)) = 0.$$

Dans le cas où  $f$  est définie sur  $E$  tout entier, les notions d'ouvert et fermé relatifs coïncident avec les notions d'ouvert et fermé de  $E$ , ce qui donne le résultat suivant.

### Corollaire 18

Exo  
6.3

Étant donné  $f : E \rightarrow F$  une application continue,

- l'image réciproque par  $f$  de tout fermé est fermée ;
- l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert est ouverte.

**Ex. 10.** Le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^2$  car c'est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}_+^*$  par l'application continue  $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x. \end{array}$

**Ex. 11.** Une manière efficace d'obtenir qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée est de constater qu'en notant  $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, a) \end{array}$ ,  $\varphi$  est continue et :

$$B(a, r) = \varphi^{-1}([-\infty, r]) \quad \text{et} \quad B_f(a, r) = \varphi^{-1}([-\infty, r]).$$

**Ex. 12.** Nous verrons que l'application  $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$  est continue (cf. corollaire 21 de la page 300). Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , car c'est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{K}^*$  par  $\det$ .

## 6 Continuité uniforme

La définition suivante généralise la notion de continuité uniforme déjà vue en première année pour les fonctions d'une variable réelle.

### Définition 10

On dit que l'application  $f$  est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

### Proposition 19

Si  $f$  est uniformément continue, alors  $f$  est continue.

**Démonstration.** Supposons  $f$  uniformément continue. Pour  $a \in A$  fixé, la définition de l'uniforme continuité de  $f$ , dans laquelle on fixe à  $a$  la variable quantifiée  $y$ , donne :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que  $f$  est continue au point  $a$ .

Cela étant valable pour tout  $a \in A$ , l'application  $f$  est continue.  $\square$

### Proposition 20

Si  $f$  est lipschitzienne, alors  $f$  est uniformément continue.

**Démonstration.** Supposons que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne, avec  $k > 0$ . Alors, pour  $\varepsilon > 0$ , le réel  $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$  est tel que pour tout  $(x, y) \in A^2$  vérifiant  $\|x - y\| \leq \eta$ , on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \leq k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \quad \square$$

**Attention** Les réciproques des deux résultats précédents sont fausses ! À ce titre, rappelons que (exemples classiques de première année) :

- $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue, mais pas uniformément continue ;  
 $x \longmapsto \ln x$
- $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue, mais pas lipschitzienne.  
 $x \longmapsto \sqrt{x}$

### III Continuité et applications linéaires / multilinéaires

#### 1 Critère de continuité d'une application linéaire

**Proposition 21**

Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue si, et seulement s'il existe  $C \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Démonstration page 272

**Ex. 13.** Munissons  $E^2$  de la norme produit. L'application  $f : E^2 \rightarrow E$  est continue car elle est linéaire et vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x, y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2\|(x, y)\|.$$

**Ex. 14.** Munissons  $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K})$  de la norme infinie. La forme linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt \end{aligned}$$

est continue car pour  $f \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K})$ , on a :

$$|\varphi(f)| \leq \int_0^\pi |f(t) \sin t| dt \leq \left( \int_0^\pi |\sin t| dt \right) \times \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

**Ex. 15.** Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Étant donné  $a \in E$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de justifier que l'application linéaire  $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue; en effet :

$$x \longmapsto (a | x)$$

$$\forall x \in E \quad |\varphi_a(x)| = |(a | x)| \leq \|a\| \|x\|.$$

Si  $A$  est une partie de  $E$ , on retrouve ainsi le fait que  $A^\perp$  est fermée (propriété déjà obtenue à l'exemple 28 de la page 217), car on peut l'écrire comme une intersection de fermés :

$$A^\perp = \bigcap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(\{0\}).$$

**Corollaire 22**

Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la boule unité.

Démonstration page 272

**Principe de démonstration.** Utiliser la linéarité de  $u$  et l'homogénéité de la norme.

**Ex. 16.** Munissons  $\mathbb{K}[X]$  de la norme infinie définie par  $\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \right\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ .

La dérivation  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  n'est pas continue. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|D(X^n)\|_\infty = \|nX^{n-1}\|_\infty = n \quad \text{et} \quad \|X^n\|_\infty = 1,$$

donc  $D$  n'est pas bornée sur la boule unité de  $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|_\infty)$ .

**Point méthode** Pour prouver qu'une application linéaire  $u$  n'est pas continue, on peut prouver qu'elle n'est pas continue en 0. Comme  $u(0) = 0$  par linéarité, il suffit d'exhiber une suite  $(x_n)$  tendant vers 0 mais telle que la suite  $(u(x_n))$  ne tends pas vers 0.

**Ex. 17.** Dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  muni de la norme  $\| \cdot \|_1$ , la forme linéaire :

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(1)\end{aligned}$$

n'est pas continue. En effet, en posant  $f_n : t \mapsto t^n$ , on a, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\varphi(f_n) = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi la suite  $(f_n)$  tend vers 0, mais  $(\varphi(f_n))$  ne tend pas vers 0. On en déduit que l'application  $\varphi$  n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue.

Nous verrons dans le prochain chapitre le théorème suivant (cf. théorème 19 de la page 298).

### Théorème 23

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si  $E$  est de dimension finie, alors toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

## 2 Espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ , norme subordonnée

**Notation** On note  $\mathcal{L}_c(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque** La relation  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}(E, F)$  assure que  $\mathcal{L}_c(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, F)$ .

Dans la suite de cette section, on suppose que  $E$  n'est pas l'espace nul.

### Proposition 24

Soit  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ . L'ensemble des réels  $C \geq 0$  tels que  $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$  admet un plus petit élément, appelé **norme subordonnée** de  $u$  et noté  $\|u\|$ .  
On a de plus :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$

Démonstration page 273

**Terminologie** La norme subordonnée est aussi appelée **norme triple**, ou encore **norme d'opérateur**, et notée  $\|\cdot\|_{\text{op}}$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

### Remarques

- Par définition de la norme subordonnée, on a :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leqslant \|u\| \|x\|.$$

- La norme subordonnée dépend des normes dont ont été munis les espaces  $E$  et  $F$ . Si l'on change une de ces normes, on change *a priori* la norme subordonnée.
- En particulier, on peut considérer la norme subordonnée d'un endomorphisme continu. Dans ce cas, on choisit en général la même norme au départ et à l'arrivée.

**Ex. 18.** Quelle que soit la norme utilisée sur  $E$ , on a  $\|\text{Id}_E\| = 1$ .

**Ex. 19.** Munissons  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de la norme infinie :  $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ ,

et munissons  $\mathbb{K}$  du module. Considérons la forme linéaire  $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} A &\mapsto \text{tr}(A). \end{aligned}$$

- Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{k=1}^n a_{k,k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{k,k}| \leq n \|A\|_\infty$  ; cela prouve que  $\text{tr}$  est continue, et  $\|\text{tr}\| \leq n$ .
- En remarquant de plus que  $|\text{tr}(I_n)| = n = n \|I_n\|_\infty$ , on obtient  $\|\text{tr}\| = n$ .

**Ex. 20.** Dans l'espace  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$  des suites bornées à valeurs dans  $E$ , muni de la norme infinie, considérons le sous-espace  $\mathcal{C}$  des suites convergentes, ainsi que l'application  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow E$  qui à une suite associe sa limite. L'application  $\varphi$  est linéaire.

- Si  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  est une suite convergente, on a, par définition de la norme infinie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| \leq \|a\|_\infty$$

donc par passage à la limite, on obtient  $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|_\infty$ . Cela prouve que  $\varphi$  est continue et que  $\|\varphi\| \leq 1$ .

- En constatant de plus que si  $a$  est une suite constante égale à  $x \in E \setminus \{0\}$ , on a  $\|\varphi(a)\| = \|x\| = \|a\|_\infty$ , on peut conclure que  $\|\varphi\| = 1$ .

**Ex. 21.** Dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  muni de la norme infinie, considérons le sous-espace :

$$F = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}) : f(0) = 0\}.$$

Considérons de plus  $g : x \mapsto 1 - x$ . Montrons que l'endomorphisme  $u : F \rightarrow F$  est

$$\begin{aligned} f &\mapsto fg \end{aligned}$$

continu, et déterminons  $\|u\|$ .

- Pour  $f \in F$  et  $x \in [0, 1]$ , on a  $|u(f)(x)| = (1 - x)|f(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ , d'où  $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ . Cela prouve que  $u$  est continu et que  $\|u\| \leq 1$ .
- Pour  $n \geq 2$ , considérons la fonction  $f_n$ , affine sur les segments  $[0, \frac{1}{n}]$  et  $[\frac{1}{n}, 1]$ , vérifiant  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(\frac{1}{n}) = 1$  et  $f_n(1) = 1$ . On a alors :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad 1 \geq \|u(f_n)\|_\infty \geq (f_ng)\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{\|u(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} \rightarrow 1.$$

On en déduit que  $\|u\| = 1$ .

**Point méthode** Pour montrer que la norme subordonnée de  $u$  vaut  $C$ , on commence généralement par montrer que  $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$ , puis :

- si l'on y arrive (cf. exemples 19 et 20), on exhibe un vecteur  $x$  non nul vérifiant  $\|u(x)\| = C\|x\|$  ;
- sinon (cf. exemple 21), on cherche à exhiber une suite  $(x_n)$  de vecteurs non nuls telle que  $\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \rightarrow C$ .

 Exo  
6.11

 Exo  
6.12


**Remarque** Si  $E$  est de dimension finie, alors  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$  (cf. théorème 19 de la page 298). Nous verrons aussi, comme conséquence du théorème des bornes atteintes, que si  $E$  est de dimension finie non nulle et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , il existe toujours un vecteur  $x \neq 0$  tel que  $\|u(x)\| = \|u\| \|x\|$ .

### Proposition 25

L'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E, F) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$  est une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

Démonstration page 273

 Exo  
6.13

### Proposition 26 (Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur)

Pour  $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G)$ , on a  $\|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|$ .

**Démonstration.** Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G)$ .

Pour  $x \in E$ , on a, par définition de  $\|v\|$  et  $\|u\|$  :

$$\|(v \circ u)(x)\| \leq \|v\| \|u(x)\| \quad \text{et} \quad \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|,$$

d'où  $\|(v \circ u)(x)\| \leq \|v\| \|u\| \|x\|$ . Par définition de  $\|v \circ u\|$ , on en déduit  $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$ .  $\square$

**Attention** En général, on n'a pas égalité dans l'inégalité précédente. Par exemple, si  $u \in \mathcal{L}_c(E)$  est nilpotent d'indice 2, on a  $u^2 = 0$ , donc  $\|u^2\| = 0$ , mais  $u \neq 0$  donc  $\|u\|^2 > 0$ .

### Adaptation matricielle

#### Définition 11

Supposons  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$  chacun muni d'une norme. Étant donné  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on appelle **norme subordonnée** de  $A$ , et l'on note  $\|A\|$ , la norme subordonnée de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**Remarque** La norme subordonnée de  $A$  est donc le plus petit réel  $C$  vérifiant  $\forall X \in \mathbb{K}^p \quad \|AX\| \leq C\|X\|$ , et l'on a aussi :

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|.$$

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**Ex. 22.** On a  $\|I_n\| = 1$  (indépendamment de la norme utilisée sur  $\mathbb{K}^n$ ).

**Ex. 23.** Munissons  $\mathbb{K}^n$  de la norme un. Étant donné  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\|A\| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

En effet, en notant  $K = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$  :

- pour  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^n \left( |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \leq \sum_{j=1}^n (|x_j| K) = K \|x\|_1, \end{aligned}$$

d'où  $\|A\| \leq K$  ;

- si  $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  vérifie  $K = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}|$ , alors en notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  :

$$\|Ae_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = K = K \|e_{j_0}\|_1 \quad \text{d'où} \quad \|A\| = K.$$

Exo  
6.14

### 3 Critère de continuité des applications multilinéaires

Dans la suite,  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et l'espace  $E_1 \times \dots \times E_p$  est muni de la norme produit.

#### Définition 12

Une application  $\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  est dite **multilinéaire**, ou  **$p$ -linéaire**, si pour toute famille  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application :

$$\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{array}$$

est linéaire.

#### Proposition 27

Une application multilinéaire  $\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  est continue si, et seulement s'il existe  $C \geq 0$  tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|\varphi(u_1, \dots, u_p)\| \leq C \prod_{k=1}^p \|u_k\|.$$

Démonstration (non exigible) page 274

Exo  
6.15

**Ex. 24.** L'application bilinéaire  $\varphi : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  est continue car, par homogénéité de la norme sur  $E$ , on a  $\|\varphi(\lambda, x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .

**Ex. 25.** Si  $E$  est un espace préhilbertien réel, l'application produit scalaire est continue car elle est bilinéaire et vérifie, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Ex. 26.** L'application  $\varphi : \mathcal{L}_c(E, F) \times E \rightarrow F$  est continue car elle est bilinéaire et

$$(u, x) \mapsto u(x)$$

vérifie  $\|\varphi(u, x)\| = \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$ .

**Ex. 27.** Si  $\mathcal{L}_c(E, F)$  et  $\mathcal{L}_c(F, G)$  sont chacun muni de la norme subordonnée, alors l'application bilinéaire  $\mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G) \rightarrow \mathcal{L}_c(E, G)$  est continue car, d'après la proposition 26

$$(u, v) \mapsto v \circ u$$

de la page 267, on a  $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G) \quad \|v \circ u\| \leq \|u\| \|v\|$ .

**Remarque** Il sera vu dans le chapitre suivant que, si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire  $\varphi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  est continue (cf. théorème 22 de la page 300).

## Démonstrations

### Proposition 1

- Supposons que pour tout voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\ell$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que  $f(\mathcal{V} \cap A) \subset \mathcal{W}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la boule  $B_f(\ell, \varepsilon)$  étant un voisinage de  $\ell$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $a$  tel que  $f(\mathcal{V} \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$ . Comme  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $a$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $B_f(a, \eta) \subset \mathcal{V}$ . On a alors  $f(B_f(a, \eta) \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$ , ce qui prouve que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ .
- Réciproquement, supposons que  $f$  tende vers  $\ell$  en  $a$ . Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de  $\ell$ . Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_f(\ell, \varepsilon) \subset \mathcal{W}$ . Par définition de la limite, il existe  $\eta > 0$  tel que  $f(B_f(a, \eta) \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$ . Cela prouve le résultat, puisque la boule  $B_f(a, \eta)$  est un voisinage de  $a$ .

### Proposition 2

- Supposons que  $f$  tende vers  $\ell$  en  $a$ .

Soit  $(u_n)$  une suite tendant vers  $a$ . Montrons que  $f(u_n) \rightarrow \ell$ . Pour cela, fixons  $\varepsilon > 0$ , et montrons qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|f(u_n) - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Comme  $f \xrightarrow[a]{} \ell$ , on peut trouver  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

La convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $a$  assure l'existence de  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|u_n - a\| \leq \eta.$$

Un tel rang  $n_0$  vérifie la propriété  $(*)$ .

- Montrons l'autre implication par la contraposée : supposons que  $f$  ne tende pas vers  $\ell$  en  $a$ , et construisons une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$  telle que la suite  $(f(u_n))$  ne tende pas vers  $\ell$ . Le fait que  $f$  ne tende pas vers  $\ell$  en  $a$  s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\| > \varepsilon.$$

Cela nous assure de pouvoir trouver, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un élément  $u_n \in A$  vérifiant :

$$\|u_n - a\| \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \|f(u_n) - \ell\| \geq \varepsilon.$$

On construit ainsi une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  qui tend vers  $a$  et telle que la suite  $(f(u_n))$  ne tende pas vers  $\ell$ .

### Proposition 5

- Le sens direct est immédiat grâce à la proposition 4.
- Pour le sens réciproque, utilisons la proposition 1 de la page 255. Supposons que la restriction  $f|_{A \cap V}$  tende vers  $\ell$  en  $a$ . Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de  $\ell$ . Comme  $f|_{A \cap V}$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , il existe un voisinage  $V'$  de  $a$  tel que  $f(A \cap V \cap V') \subset \mathcal{W}$ . Cela prouve que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $a$ , car, comme intersection de deux voisinages de  $a$ ,  $V \cap V'$  en est un.

### Proposition 7

- Supposons que  $f$  tende vers  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  en  $a$ .
  - Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $A$  tendant vers  $a$ . La suite  $(f(u_n))$ , à valeurs dans l'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$ , converge vers  $\ell$ .
- D'après la proposition 17 de la page 213, il en résulte que les suites  $(f_1(u_n)), \dots, (f_p(u_n))$  tendent vers  $\ell_1, \dots, \ell_p$  respectivement. Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que les applications  $f_1, \dots, f_p$  tendent respectivement vers  $\ell_1, \dots, \ell_p$  en  $a$ .

- Réiproquement, supposons que  $f_1, \dots, f_p$  tendent respectivement vers  $\ell_1, \dots, \ell_p$  en  $a$ . Montrons que pour toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ , on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$ . Cela conclura par caractérisation séquentielle de la limite.

Soit  $(u_n)$  une telle suite. Alors, les suites :

$$(f_1(u_n)), \dots, (f_p(u_n))$$

tendent vers  $\ell_1, \dots, \ell_p$  respectivement, ce qui entraîne (cf. proposition 17 de la page 213) que la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $\ell$ . D'où le résultat.

**Proposition 8** Supposons que  $f_1 \xrightarrow{a} \ell_1$  et  $f_2 \xrightarrow{a} \ell_2$ . Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ . Alors on a  $f_1(u_n) \rightarrow \ell_1$  et  $f_2(u_n) \rightarrow \ell_2$ . Par opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général  $\lambda_1 f_1(u_n) + \lambda_2 f_2(u_n)$  tend alors vers  $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2$ .

Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \xrightarrow{a} \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2.$$

**Proposition 9** Supposons que  $f \xrightarrow{a} \ell$  et  $\varphi \xrightarrow{a} \lambda$ . Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ . Alors on a  $f(u_n) \rightarrow \ell$  et  $\varphi(u_n) \rightarrow \lambda$ . Par produit d'une suite convergente avec une suite convergente à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , la suite de terme général  $\varphi(u_n)f(u_n)$  tend alors vers  $\lambda\ell$ . Par caractérisation séquentielle de la limite, cela montre que  $\varphi f \xrightarrow{a} \lambda\ell$ .

**Proposition 10** Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$ .

On a alors  $f(u_n) \rightarrow \ell$  donc, comme  $\ell \neq 0$ , on a  $\frac{1}{f(u_n)} \rightarrow \frac{1}{\ell}$ .

Par caractérisation séquentielle de la limite, cela prouve que  $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{\ell}$ .

**Proposition 11** Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $A$  tendant vers  $a$  (une telle suite existe car  $a$  est adhérent à  $A$ ). Alors, comme  $f \xrightarrow{a} b$ , la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $b$ . Cela montre déjà que  $b$  est un point adhérent à  $f(A)$ , donc à  $B$ .

Puis, comme  $g \xrightarrow{b} \ell$ , la suite de terme général  $g(f(u_n))$  tend vers  $\ell$ .

Par caractérisation séquentielle de la limite, cela prouve que  $g \circ f \xrightarrow{a} \ell$ .

**Proposition 12** Pour tout  $b \in B$ , comme l'application  $f$  est continue, donc en particulier continue en  $b$ , on a  $f \xrightarrow{b} f(b)$ . Par stabilité de la limite par restriction (cf. proposition 4 de la page 256), on a donc également  $f|_B \xrightarrow{b} f(b) = f|_B(b)$ . Ainsi,  $f|_B$  est continue en  $b$ .

**Proposition 13** Soit  $f : A \rightarrow F$  une application  $k$ -lipschitzienne. Montrons que  $f$  est continue en tout point  $a \in A$ . Par caractérisation séquentielle : si  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  est une suite tendant vers  $a$ , alors par caractère  $k$ -lipschitzien de  $f$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f(u_n) - f(a)\| \leq k\|u_n - a\| \rightarrow 0,$$

ce qui montre que  $f(u_n) \rightarrow f(a)$ .

**Proposition 16** Soit  $D$  une partie dense dans  $A$ .

Supposons que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $D$ , c'est-à-dire vérifient :

$$\forall x \in D \quad f(x) = g(x),$$

et montrons que  $f$  et  $g$  sont égales, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

Soit  $x \in A$ . Par densité de  $D$  dans  $A$ , on peut considérer une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  tendant vers  $x$ . Par hypothèse, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = g(u_n).$$

Puis, par continuité de  $f$  et  $g$  sur  $A$ , donc en particulier au point  $x$ , on a :

$$f(u_n) \rightarrow f(x) \quad \text{et} \quad g(u_n) \rightarrow g(x).$$

Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit  $f(x) = g(x)$ .

### Proposition 17

- Soit  $Y$  un fermé de  $F$ . Montrons que  $f^{-1}(Y)$  est un fermé relatif de  $A$ . Par caractérisation séquentielle : donnons-nous  $(a_n) \in f^{-1}(Y)^{\mathbb{N}}$  une suite tendant vers  $a \in A$  et montrons que  $a \in f^{-1}(Y)$ , i.e.  $f(a) \in Y$ . La suite  $(f(a_n))$  est à valeurs dans  $Y$  et, par continuité de  $f$  en  $a$ , tend vers  $f(a)$ . Comme  $Y$  est fermé, on en déduit que  $f(a) \in Y$ , d'où le résultat.
- Soit  $U$  un ouvert de  $F$ . Montrons que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert relatif de  $A$ . Soit  $Y$  le complémentaire de  $U$  dans  $F$ . D'après le premier point déjà démontré, l'image réciproque de  $Y$  par  $f$  est un fermé relatif de  $A$ , c'est-à-dire qu'il existe un fermé  $X$  de  $E$  tel que :

$$f^{-1}(Y) = A \cap X.$$

On a alors :

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(F \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y) = A \setminus (A \cap X) = A \cap (E \setminus X).$$

L'ensemble  $X$  étant fermé dans  $E$ , l'ensemble  $E \setminus X$  est ouvert, ce qui montre le résultat.

### Proposition 21

- Supposons qu'il existe  $C \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Alors, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a, par linéarité de  $u$  :

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|.$$

Cela prouve que  $u$  est  $C$ -lipschitzienne donc continue.

- Réciproquement, supposons  $u$  continue. En particulier,  $u$  est continue en 0, donc il existe  $\eta > 0$  vérifiant :

$$\forall z \in E \quad \|z\| \leq \eta \implies \|u(z)\| \leq 1.$$

Pour tout vecteur  $x \in E$  non nul, on a  $\left\| \frac{\eta}{\|x\|} x \right\| = \eta$ , donc  $\left\| u\left(\frac{\eta}{\|x\|} x\right) \right\| \leq 1$  d'après la propriété précédente, puis par linéarité de  $u$  :

$$\|u(x)\| \leq C\|x\| \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{\eta}.$$

Cette inégalité étant aussi vérifiée pour  $x = 0$ , cela prouve le résultat.

### Corollaire 22

- Si  $f$  est continue, alors il existe  $C > 0$  telle que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\| \quad \text{donc} \quad \forall x \in E \quad \|x\| \leq 1 \implies \|u(x)\| \leq C.$$

- Réciproquement, si  $f$  est bornée sur la boule unité, alors il existe  $C > 0$  telle que :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \implies \|u(x)\| \leq C.$$

Alors, pour tout vecteur non nul  $x \in E$ , on a  $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C$ , puis par linéarité de  $u$  et homogénéité de la norme,  $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ . Cette inégalité étant aussi vérifiée par le vecteur nul, cela prouve que  $f$  est continue.

**Proposition 24**

- Notons  $\Gamma = \{k \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq k\|x\|\}$ . Montrons que  $\Gamma$  possède un plus petit élément.

\* L'application linéaire étant continue, il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq M\|x\| \quad \text{donc} \quad \forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq M.$$

L'ensemble  $\Omega = \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , non vide (car  $E$  n'est pas l'espace nul) et majoré (par  $M$ ) ;  $\Omega$  possède donc une borne supérieure appartenant à  $\mathbb{R}$ .

- Par linéarité de  $u$ , on a  $u(0) = 0$ , donc l'inégalité  $\|u(0)\| \leq k\|0\|$  est vraie pour tout réel  $k$ , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} k \in \Gamma &\iff \forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq k\|x\| \iff \forall x \in E \setminus \{0\} \quad \|u(x)\| \leq k\|x\| \\ &\iff \forall x \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq k \\ &\iff \forall \omega \in \Omega \quad \omega \leq k. \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Gamma$  est donc l'ensemble des majorants de  $\Omega$ . Il admet donc un plus petit élément : la borne supérieure de  $\Omega$ . Cela justifie l'existence de  $\|u\|$ , et donne déjà :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

- Justifions maintenant que  $\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$  ; prouvons pour cela que  $\Omega = \tilde{\Omega}$  avec :

$$\tilde{\Omega} = \{ \|u(x)\| \mid \|x\| = 1 \}.$$

L'inclusion  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  est évidente. De plus, pour  $x \in E \setminus \{0\}$ , on a  $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \|u(\tilde{x})\|$  avec  $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$ , ce qui prouve  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ .

- Justifions enfin que  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ .

\* L'inégalité  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$  est évidente.

\* Pour prouver l'autre inégalité, constatons que pour tout  $x$  non nul vérifiant  $\|x\| \leq 1$ , le vecteur  $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$  est de norme 1 et vérifie  $\|u(\tilde{x})\| = \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\| \geq \|u(x)\|$ .

**Proposition 25**

**Séparation.** Si  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$  vérifie  $\|u\| = 0$ , alors, par définition, le réel  $C = 0$  vérifie  $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|$ , et donc  $\forall x \in E \quad u(x) = 0$ , d'où  $u = 0$ .

**Homogénéité.** Soit  $(u, \lambda) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times \mathbb{K}$ . On a, par homogénéité de la norme sur  $F$  :

$$\|\lambda u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\lambda u)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left( |\lambda| \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \right).$$

Ainsi (en utilisant le lemme 6 de la page 207) :

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|u\|.$$

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**Inégalité triangulaire.** Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}_c(E, F)^2$ . Pour  $x \in E$ , on a, par inégalité triangulaire de la norme sur  $F$  :

$$\|(u + v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\|.$$

Puis, par définition de  $\|u\|$  et  $\|v\|$  :

$$\|(u + v)(x)\| \leq \|u\| \|x\| + \|v\| \|x\| = (\|u\| + \|v\|) \|x\|.$$

Ainsi, le réel  $C = \|u\| + \|v\|$  vérifie  $\forall x \in E \quad \|(u + v)(x)\| \leq C \|x\|$ , d'où :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

### Proposition 27

- Supposons  $\varphi$  continue. Par définition de la continuité en 0, il existe  $r > 0$  tel que :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|(u_1, \dots, u_p)\| \leq r \implies \|\varphi(u_1, \dots, u_p)\| \leq 1. \quad (\star)$$

Montrons alors qu'en posant  $C = r^{-p}$ , on a :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leq C \prod_{k=1}^p \|x_k\|.$$

Fixons  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ .

- C'est évident si l'un des vecteurs  $x_k$  est nul car alors, par linéarité de  $\varphi$  par rapport à la  $k$ -ième variable, on a  $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ .
- Supposons les vecteurs  $x_1, \dots, x_p$  tous non nuls.

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $u_k = \frac{r}{\|x_k\|} x_k$ . On a alors  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \|u_k\| = r \leq r$ , donc, par définition de la norme produit, on a  $\|(u_1, \dots, u_p)\| \leq r$ . La propriété  $(\star)$  donne alors :

$$\|\varphi(u_1, \dots, u_p)\| \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\| \varphi\left(\frac{r}{\|x_1\|} x_1, \dots, \frac{r}{\|x_p\|} x_p\right) \right\| \leq 1.$$

Par multilinéarité de  $\varphi$ , il vient alors  $\|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leq r^{-p} \prod_{k=1}^p \|x_k\|$ , qui est l'inégalité souhaitée.

- Réciproquement, supposons qu'il existe  $C \geq 0$  tel que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\| \leq C \prod_{k=1}^p \|x_k\|.$$

Soit  $a = (a_1, \dots, a_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ . Montrons que  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \varphi(a)$ .

Écrivons  $x = (x_1, \dots, x_p)$  et posons, pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\delta_k(x) = (a_1, \dots, a_{k-1}, x_k - a_k, x_{k+1}, \dots, x_p).$$

La multilinéarité de  $\varphi$  puis un télescopage permettent d'écrire :

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \sum_{k=1}^p \varphi(\delta_k(x)). \quad (\star\star)$$

Fixons  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'après l'hypothèse faite sur  $\varphi$ , on a :

$$\|\varphi(\delta_k(x))\| \leq C \left( \prod_{j=1}^{k-1} \|a_j\| \right) \underbrace{\|x_k - a_k\|}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \rightarrow a}} \left( \prod_{j=k+1}^p \underbrace{\|x_j\|}_{\substack{\longrightarrow \|a_j\| \\ x \rightarrow a}} \right) \quad \text{et donc} \quad \varphi(\delta_k(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Par somme finie de limites, la relation  $(\star\star)$  offre alors  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \varphi(a)$ .

## S'entraîner et approfondir

### Généralités sur la continuité

**6.1** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et  $f : A \rightarrow F$  une application continue, où  $A$  est une partie non vide de  $E$ . Montrer que l'image par  $f$  d'une partie dense dans  $A$  est dense dans  $f(A)$ .<sup>→<sub>255</sub></sup>

**6.2** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés.

Montrer qu'une application continue  $f : E \rightarrow F$  est linéaire si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

#### 6.3 Séparation de fermés disjoints

Soit  $A$  et  $B$  deux fermés disjoints non vides d'un espace vectoriel normé  $E$ .

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) - d(x, B). \end{aligned}$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in A \quad \varphi(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in B \quad \varphi(x) > 0.$$

2. En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  vérifiant  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

#### 6.4 Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité

Soit  $f$  une application définie sur une partie non vide  $A$  d'un espace vectoriel normé.<sup>→<sub>263</sub></sup>

1. Montrer que  $f$  est uniformément continue si, et seulement si, pour toutes suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telles que  $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ , on a  $\|f(a_n) - f(b_n)\| \rightarrow 0$ .
2. En déduire que la fonction  $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$  n'est pas uniformément continue.

**6.5** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés, et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

Soit  $f : A \rightarrow F$  une application.

1. Montrer que si l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ , alors  $f$  est continue.
2. Montrer que si l'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  est un fermé relatif de  $A$ , alors  $f$  est continue.

\* **6.6** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $X$  une partie dense dans  $E$  ainsi que  $f : X \rightarrow F$  une application continue. On suppose que  $f$  admet une limite finie en tout point de  $E \setminus X$ . Montrer que  $f$  admet un prolongement continu  $\tilde{f} : E \rightarrow F$ .

**6.7** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et  $f : E \rightarrow F$  une application.

Montrer que  $f$  est continue si, et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(f(A)).$$

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**6.8** Munissons  $\mathbb{R}^2$  de l'une de ses normes usuelles.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $f_x$  et  $f_y$  les applications partielles :

$$\begin{array}{rclcrcl} f_x & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{et} & f_y & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & f(x, t) & & & & t & \longmapsto & f(t, y). \end{array}$$

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que si  $f$  est continue en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors ses applications partielles  $f_x$  et  $f_y$  sont continues respectivement en  $y$  et en  $x$ .

L'objectif de la suite de l'exercice est de montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

2. Vérifier que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , les applications partielles  $f_x$  et  $f_y$  sont continues.
3. Montrer que, pourtant, l'application  $f$  n'est pas continue.

**6.9 Une limite dans chaque direction, mais pas de limite**

Munissons  $\mathbb{R}^2$  de l'une de ses normes usuelles. Notons  $\Delta$  la première bissectrice, i.e. :

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

et considérons l'application  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}.$$

1. Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ , l'application :

$$\begin{array}{rcl} f_\theta & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & r & \longmapsto & f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$

possède une limite en 0.

2. Montrer que, néanmoins,  $f$  ne possède pas de limite en  $(0, 0)$ .

## Continuité et (multi)linéarité

**6.10** Montrer qu'une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  est continue si, et seulement si, sa restriction →<sup>264</sup> à la sphère unité est bornée.

**6.11** On munit  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  de la norme infinie. Étant donné  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée, →<sup>267</sup> montrer que la forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)}{2^n} \end{array}$$

est continue et déterminer sa norme subordonnée.

**6.12** On munit l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  de la norme un.

→<sup>267</sup> Considérons l'application  $\varphi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  qui à une fonction associe sa primitive s'annulant en 0. Montrer que  $\varphi$  est continue et déterminer sa norme triple.

- 6.13** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Montrer que si  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont deux normes équivalentes sur  $E$ , alors les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ , subordonnées à  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  respectivement, sont des normes équivalentes sur  $\mathcal{L}_c(E)$ .<sup>267</sup>

- 6.14** On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme infinie. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :<sup>268</sup>

$$\|A\| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

- 6.15** On munit l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  de la norme un. L'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})^2 &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K}) \\ (f, g) &\longmapsto fg \end{aligned}$$

est-elle continue ?

- 6.16** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $u$  est continue si, et seulement si, la partie  $A = \{x \in E : \|u(x)\| = 1\}$  est fermée.

- \* **6.17** Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $\varphi$  est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

- \* **6.18** On note  $\ell^1$  l'espace des suites réelles  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que la série  $\sum x_n$  converge absolument. On munit  $\ell^1$  de la norme :

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|.$$

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $e^{(n)}$  la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice  $n$  qui vaut 1. Montrer que :

$$F = \text{Vect}(e^{(n)} \mid n \in \mathbb{N})$$

est dense dans  $\ell^1$ .

2. Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle bornée. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_a : \quad \ell^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur  $\ell^1$ , et déterminer sa norme subordonnée.

3. Réciproquement, montrer que toute forme linéaire continue sur  $\ell^1$  est de la forme  $\varphi_a$  avec  $a$  une suite réelle bornée.

- 6.19** Soit  $E$  un espace euclidien (muni, donc, de sa norme euclidienne). Si  $f$  est un endomorphisme autoadjoint de  $E$ , on appelle **rayon spectral** de  $f$  le réel positif :

$$\rho(f) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{sp}(f)\}.$$

1. Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{S}(E)$ , on a  $\|f\| = \rho(f)$ .
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que l'endomorphisme  $u^* \circ u$  est autoadjoint positif et que :

$$\|u\| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}.$$

## Solutions des exercices

- 6.1** Soit  $D$  une partie dense dans  $A$ . Montrons par caractérisation séquentielle que  $f(D)$  est dense dans  $f(A)$ . Soit  $y \in f(A)$ . Considérons  $a \in A$ , un antécédent de  $y$  par  $f$ . Comme  $D$  est dense dans  $A$ , il existe une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $D$  convergeant vers  $a$ . Comme  $f$  est continue et par composition de limites, on a alors :

$$f(u_n) \rightarrow f(a) = y.$$

Comme  $(f(u_n))$  est une suite d'éléments de  $f(D)$ , cela prouve la densité de  $f(D)$  dans  $f(A)$ .

- 6.2** Supposons que  $f : E \rightarrow F$  soit continue et vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{*}$$

et montrons que  $f$  est linéaire. Comme  $f$  vérifie  $(*)$ , il suffit de montrer que :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Fixons  $x \in E$  et montrons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

- Tout d'abord,  $f$  étant un morphisme de groupes de  $(E, +)$  vers  $(F, +)$ , on a :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad f(px) = pf(x).$$

- On obtient ensuite :

$$\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(qx) = qf(x)$$

car, pour  $q \in \mathbb{Q}$ , en notant  $q = \frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , on a, en utilisant la propriété précédente :

$$bf(qx) = f(bqx) = f(ax) = af(x) \quad \text{donc} \quad f(qx) = \frac{a}{b}f(x) = qf(x).$$

- Un argument de continuité permet alors d'étendre le résultat précédent à  $\mathbb{R}$  tout entier. Pour cela, il suffit de constater que les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ \lambda & \mapsto & f(\lambda x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ \lambda & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

sont continues et coïncident sur  $\mathbb{Q}$  ; comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , elles coïncident donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

- 6.3**
- Pour  $x \in A$ , on a  $d(x, A) = 0$ , et, comme  $x \notin B$  et que  $B$  est fermé, on a  $d(x, B) > 0$  (cf. exemple 32 de la page 221), donc  $\varphi(x) < 0$ . De même, pour  $x \in B$ , on a  $\varphi(x) > 0$ .
  - D'après la première question, on a  $A \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$  et  $B \subset \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ . De plus, par continuité des fonctions  $x \mapsto d(x, A)$  et  $x \mapsto d(x, B)$ , la fonction  $\varphi$  est continue sur  $E$ . Puisque  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ , il en résulte que  $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$  et  $V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$  sont des ouverts.

Ils sont disjoints et contiennent respectivement  $A$  et  $B$ .

- 6.4** 1. • Supposons  $f$  uniformément continue. Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites d'éléments de  $A$  telles que  $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ . Montrons que  $\|f(a_n) - f(b_n)\| \rightarrow 0$  en revenant à la définition de la convergence vers 0 d'une suite : fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|f(a_n) - f(b_n)\| \leq \varepsilon.$$

Comme  $f$  est uniformément continue, on peut considérer  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Comme  $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$ , on peut considérer un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|a_n - b_n\| \leq \eta.$$

Cela fournit le résultat car  $\|f(a_n) - f(b_n)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq n_0$ .

- Réciproquement, supposons que  $f$  ne soit pas uniformément continue. Cela signifie qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad (\|x - y\| \leq \eta \text{ et } \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon).$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut considérer  $(a_n, b_n) \in A^2$  vérifiant :

$$\|a_n - b_n\| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f(a_n) - f(b_n)\| > \varepsilon.$$

On construit ainsi deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  d'éléments de  $A$  vérifiant  $\|a_n - b_n\| \rightarrow 0$  mais telles que  $\|f(a_n) - f(b_n)\|$  ne tende pas vers 0.

2. En posant  $a_n = \frac{1}{n}$  et  $b_n = \frac{1}{2n}$ , on a  $|a_n - b_n| \rightarrow 0$  et pourtant :

$$\ln a_n - \ln b_n = \ln 2 \quad \text{donc} \quad |\ln a_n - \ln b_n| \not\rightarrow 0.$$

Cela prouve que la fonction  $x \mapsto \ln x$  n'est pas uniformément continue.

- 6.5** 1. Supposons que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  soit un ouvert relatif de  $A$ , et montrons que  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

Pour cela, donnons-nous  $a \in A$  et  $\varepsilon > 0$ , et montrons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

La boule  $B(f(a), \varepsilon)$  est un ouvert de  $F$  contenant  $f(a)$ , donc son image réciproque par  $f$  est un ouvert relatif de  $A$  contenant  $a$ , i.e. s'écrit sous la forme  $A \cap U$ , avec  $U$  un ouvert de  $E$  contenant  $a$ . Le caractère ouvert de  $U$  offre alors l'existence de  $\eta > 0$  tel que  $B(a, \eta) \subset U$ . Il est alors clair que  $\eta$  vérifie la propriété  $(*)$ .

2. Supposons que l'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  soit un fermé relatif de  $A$ . Ramenons-nous à la première question en montrant que l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $F$ . L'ensemble  $Y = F \setminus U$  étant fermé dans  $F$ , son image réciproque par  $f$  est un fermé relatif de  $A$ . Il existe donc un fermé  $X$  de  $E$  tel que :

$$f^{-1}(Y) = A \cap X.$$

On a alors :

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(F \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y) = A \setminus (A \cap X) = A \cap (E \setminus X).$$

Or,  $X$  étant fermé dans  $E$ , son complémentaire  $E \setminus X$  est ouvert, ce qui montre que  $f^{-1}(U)$  est un ouvert relatif de  $A$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**6.6** Par hypothèse,  $f$  possède une limite finie en tout point de  $E \setminus X$ . Comme de plus  $f$  est continue sur  $X$ , elle possède également une limite finie en tout point de  $X$ . On peut donc considérer l'application :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \lim_x f \end{array}$$

qui est bien un prolongement de  $f$  à  $E$  puisque, pour tout  $x \in X$ , on a  $f(x) = \lim_x f = \tilde{f}(x)$ .

Soit  $a \in E$ . Montrons que  $\tilde{f}$  est continue en  $a$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in B(a, \eta) \quad \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| \leq \varepsilon.$$

Puisque  $\tilde{f}(a) = \lim_a f$ , il existe  $r > 0$  tel que :

$$\forall z \in X \cap B(a, r) \quad \|f(z) - \tilde{f}(a)\| \leq \varepsilon.$$

En posant  $\eta = \frac{r}{2}$ , alors pour tout  $x \in B(a, \eta)$ , on a  $B(x, \eta) \subset B(a, r)$ , donc :

$$\forall z \in X \cap B(x, \eta) \quad \|f(z) - \tilde{f}(a)\| \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite quand  $z$  tend vers  $x$  dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left\| \lim_x f - \tilde{f}(a) \right\| \leq \varepsilon \quad \text{autrement dit} \quad \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)\| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat.

**6.7** • Supposons  $f$  continue. Soit  $y \in f(\text{Adh}(A))$ . Montrons que  $y \in \text{Adh}(f(A))$  en prouvant que  $y$  est limite d'une suite à valeurs dans  $f(A)$ . Puisque  $y \in f(\text{Adh}(A))$ , il existe  $x \in \text{Adh}(A)$  tel que  $f(x) = y$ . Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe une suite  $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \rightarrow x$ . La continuité de  $f$  donne alors :

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(a_n) \rightarrow y.$$

Cela prouve le résultat souhaité, car la suite  $(f(a_n))$  est à valeurs dans  $f(A)$ .

• Réciproquement, supposons que  $f$  ne soit pas continue et montrons qu'il existe  $A \subset E$  tel que  $f(\text{Adh}(A)) \not\subset \text{Adh}(f(A))$ . Soit  $x \in E$  tel que  $f$  ne soit pas continue en  $x$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists u \in E \quad (\|u - x\| \leq \eta \quad \text{et} \quad \|f(u) - f(x)\| \geq \varepsilon).$$

En utilisant cette propriété avec  $\eta = 2^{-n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut construire une suite  $(a_n)$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n - x\| \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \|f(a_n) - f(x)\| \geq \varepsilon.$$

L'ensemble  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est alors tel que  $f(\text{Adh}(A)) \not\subset \text{Adh}(f(A))$  car :

- \*  $x \in \text{Adh}(A)$  puisque  $x$  est la limite de la suite  $(a_n)$  ;
- \*  $f(x) \notin \text{Adh}(f(A))$  puisque, pour tout  $a \in A$ , on a  $\|f(a) - f(x)\| \geq \varepsilon$ .

**6.8 1.** • Constatons que :

$$\begin{aligned} f_x &= f \circ \varphi_1 \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x, t). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi_1$  est continue car elle est 1-lipschitzienne. Par continuité de  $\varphi_1$  en  $y$  et de  $f$  en  $\varphi_1(y) = (x, y)$ , l'application  $f_x$  est continue en  $y$ .

- Pour justifier la continuité de  $f_y$  en  $x$ , on procède de même en constatant que :

$$\begin{aligned} f_y &= f \circ \varphi_2 \quad \text{avec} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, y). \end{aligned}$$

2. Les cas de  $f_x$  et  $f_y$  se traitent de la même manière. Intéressons-nous à  $f_x$ .

- Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , la continuité de  $f_x$  s'obtient par opérations sur les fonctions continues, puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_x(t) = \frac{xt}{x^2 + t^2}.$$

- Pour la continuité de  $f_0$ , constatons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f_0(t) = \frac{0 \times t}{0^2 + t^2} = 0 = f(0, 0) = f_0(0).$$

L'application  $f_0$  est donc l'application nulle ; en particulier elle est continue.

3. Montrons que  $f$  n'est pas continue au point  $(0, 0)$ .

Remarquons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad f(t, t) = \frac{t \times t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

En notant  $g$  la fonction  $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t) \end{array}$ , la fonction  $f \circ g$  n'est pas continue puisqu'elle

vaut  $\frac{1}{2}$  sur  $\mathbb{R}^*$  et 0 en 0.

Comme  $g$  est continue, la fonction  $f$  ne peut pas l'être. Plus précisément, la fonction  $f \circ g$  n'étant pas continue en 0, la fonction  $f$  n'est pas continue en  $g(0)$ , i.e. en  $(0, 0)$ .

**6.9 1.** Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi \mathbb{Z} \right\}$ . Pour  $r \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$f_\theta(r) = \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r \cos \theta - r \sin \theta} = \frac{r}{\cos \theta - \sin \theta}.$$

Il en résulte que la fonction  $f_\theta$  tend vers 0 en 0.

- De la question précédente il vient que si  $f$  admet une limite en  $(0, 0)$ , celle-ci vaut nécessairement 0.
- D'autre part, on constate qu'en posant  $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \\ t & \longmapsto & (t + t^2, t) \end{array}$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad (f \circ g)(t) = \frac{(t + t^2)^2 + t^2}{(t + t^2) - t} = 2 + 2t + t^2.$$

La fonction  $f \circ g$  tend donc vers 2 en 0. Comme  $g$  tend vers  $(0, 0)$  en 0, il s'ensuit que si  $f$  admet une limite en  $(0, 0)$ , alors celle-ci vaut nécessairement 2.

Des deux points précédents on déduit que  $f$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

- 6.10** • Si  $u$  est continue, alors, d'après la proposition 21 de la page 264, il existe  $C \geq 0$  telle que :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

On a alors immédiatement :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \implies \|u(x)\| \leq C,$$

donc la restriction de  $u$  à la sphère unité est bornée.

- Réciproquement, supposons qu'il existe  $C \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = 1 \implies \|u(x)\| \leq C.$$

Pour tout vecteur  $x$  non nul, on a  $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C$ , donc par linéarité de  $u$  :

$$\|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Cette dernière inégalité étant aussi vérifiée pour  $x = 0$ , cela prouve que  $u$  est continue (cf. proposition 21 de la page 264).

- 6.11** L'application  $u$  est bien définie et linéaire.

- Pour  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ , on a :

$$|u(f)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|f\|_\infty.$$

Cela montre que  $u$  est continue et assure que  $\|u\| \leq 2$ .

- On a en fait  $\|u\| = 2$  car si  $f$  est la fonction constante égale à 1, alors :

$$u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 = 2\|f\|_\infty.$$

- 6.12** • Pour  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ , on a, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\|\varphi(f)\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^x f \right| dx \leq \int_0^1 \left( \int_0^x |f| \right) dx.$$

Une intégration par parties donne (en prenant  $x \mapsto x - 1$  comme primitive de  $x \mapsto 1$ ) :

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \underbrace{\left[ (x-1) \int_0^x |f| \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (x-1)|f(x)| dx = \int_0^1 (1-x)|f(x)| dx.$$

Puisque  $\forall x \in [0, 1] \quad (1-x)|f(x)| \leq |f(x)|$ , on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\|\varphi(f)\|_1 \leq \|f\|_1.$$

Cela prouve que  $\varphi$  est continue et que  $\|\varphi\| \leq 1$ .

- Montrons désormais que  $\|\varphi\| = 1$ .

Pour cela, exhibons une suite  $(f_n) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})^\mathbb{N}$  telle que  $\frac{\|\varphi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} \rightarrow 1$ .

Posons  $f_n : x \mapsto (1-x)^n$ . On a alors  $\varphi(f_n) : x \mapsto \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ , puis :

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|\varphi(f_n)\|_1 = \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) \sim \frac{1}{n}.$$

Cela prouve le résultat souhaité, car  $\frac{\|\varphi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} \rightarrow 1$ .

**6.13** Par symétrie du problème, il suffit de prouver que la norme  $\|\cdot\|_1$  est dominée par la norme  $\|\cdot\|_2$ . Il s'agit de prouver l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E) \quad \|u\|_1 \leq C\|u\|_2.$$

Les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  étant équivalentes, il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que :

$$\forall a \in E \quad \alpha\|a\|_2 \leq \|a\|_1 \leq \beta\|a\|_2.$$

Pour  $u \in \mathcal{L}_c(E)$  et  $x \in E$ , on a :

$$0 \leq \|u(x)\|_1 \leq \beta\|u(x)\|_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \|x\|_2 < \frac{1}{\alpha}\|x\|_1,$$

donc :

$$\|u(x)\|_1 \leq \beta\|u(x)\|_2 \leq \beta\|u\|_2\|x\|_2 \leq \frac{\beta\|u\|_2}{\alpha}\|x\|_1.$$

Cela offre  $\|u\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha}\|u\|_2$ , et prouve que  $\|\cdot\|_1$  est dominée par  $\|\cdot\|_2$ .

**6.14** • Pour tout  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a par définition de la norme infinie :

$$\|AX\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right|.$$

Par inégalité triangulaire puis en majorant  $|x_j|$  par  $\|X\|_\infty$ , on a, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty$$

ce qui donne, en notant  $C = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$  :

$$\|AX\|_\infty \leq C \|X\|_\infty \quad \text{donc} \quad \|A\| \leq C.$$

• Pour obtenir l'égalité  $\|A\| = C$ , montrons qu'il existe  $X \in \mathbb{R}^n$  non nul vérifiant :

$$\|AX\|_\infty = C \|X\|_\infty.$$

Par définition de  $C$ , il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $C = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ .

En considérant alors le vecteur  $X$  dont les composantes valent  $\pm 1$ , les signes étant choisis de telle sorte que la  $j$ -ème composante de  $X$  soit de même signe que  $a_{i_0,j}$ , on constate que la  $i_0$ -ième composante de  $AX$  vaut  $C$ , ce qui assure que :

$$\|AX\|_\infty \geq C.$$

Puisque  $\|X\|_\infty = 1$ , on obtient  $\|AX\|_\infty \geq C\|X\|_\infty$ . L'inégalité dans l'autre sens étant vraie d'après le premier point, cela donne le résultat souhaité.

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**6.15** Montrons que  $\pi$  n'est pas continue. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $f_n : t \mapsto t^n$ . On a d'une part :

$$\|\pi((f_n, f_n))\|_1 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$$

et d'autre part :

$$\|f_n\|_1^2 = \left( \int_0^1 t^n dt \right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par conséquent, il n'existe aucune constante  $C \geq 0$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\pi((f_n, f_n))\|_1 \leq C \|f_n\|_1^2,$$

donc *a fortiori* il n'existe aucun constante  $C \geq 0$  vérifiant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})^2 \quad \|\pi((f, g))\|_1 \leq C \|f\|_1 \|g\|_1.$$

L'application bilinéaire  $\pi$  n'est donc pas continue.

**6.16** • Si  $u$  est continue, alors  $A$  est un fermé de  $E$ , comme image réciproque du fermé  $\{1\}$

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|u(x)\|. \end{aligned}$$

• Réciproquement, supposons que  $u$  ne soit pas continue. Alors,  $u$  n'est pas bornée sur la boule  $B_f(0, 1)$  (cf. corollaire 22 de la page 264). Cela signifie qu'on peut trouver une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $B_f(0, 1)$  telle que  $\|u(x_n)\| \rightarrow +\infty$ .

En posant alors (pour  $n$  assez grand de telle sorte que  $u(x_n) \neq 0$ ) :

$$y_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|},$$

on obtient une suite  $(y_n)$  d'éléments de  $A$  tendant vers 0. Comme  $0 \notin A$ , cela prouve que  $A$  n'est pas un fermé de  $E$ .

**6.17** Si  $\varphi$  est l'application nulle, alors elle est continue et son noyau est fermé (car c'est l'espace  $E$  lui-même). Supposons désormais  $\varphi$  non nulle.

- On a  $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$  donc, si  $\varphi$  est continue, son noyau est fermé, en tant qu'image réciproque du fermé  $\{0\}$  par  $\varphi$ .
- Réciproquement, supposons  $\text{Ker } \varphi$  fermé et montrons que  $\varphi$  est continue en prouvant qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in E \quad |\varphi(x)| \leq C \|x\|.$$

L'inégalité précédente étant évidemment vraie pour tout  $x \in \text{Ker } \varphi$ , on peut se limiter à  $x \in E \setminus \text{Ker } \varphi$ . L'application  $\varphi$  étant non nulle, on peut fixer  $e \in E \setminus \text{Ker } \varphi$ . Par caractère fermé de  $\text{Ker } \varphi$ , on a  $d(e, \text{Ker } \varphi) > 0$  (cf. exemple 32 de la page 221). Puisque  $E = \text{Vect}(e) \oplus \text{Ker } \varphi$ , tout vecteur  $x \in E \setminus \text{Ker } \varphi$  s'écrit  $x = \lambda e + x_0$  avec  $(\lambda, x_0) \in \mathbb{K}^* \times \text{Ker } \varphi$ , et alors :

$$|\varphi(x)| = |\lambda \varphi(e)| = |\lambda| |\varphi(e)| \quad \text{et} \quad \|x\| = |\lambda| \left\| e - \underbrace{\frac{-x_0}{\lambda}}_{\in \text{Ker } \varphi} \right\| \geq |\lambda| d(e, \text{Ker } \varphi),$$

ce qui donne  $|\varphi(x)| \leq C \|x\|$  avec  $C = \frac{|\varphi(e)|}{d(e, \text{Ker } \varphi)}$ .

**6.18** 1. De manière évidente, on a  $F \subset \ell_1$ . Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$ , notons :

$$u^{(N)} = \sum_{n=0}^N x_n e^{(n)} = (x_0, x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots).$$

On a, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\|x - u^{(N)}\| = \left\| x - \sum_{n=0}^N x_n e^{(n)} \right\| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n| \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0.$$

L'élément  $x$  est donc limite de la suite  $(u^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$ . Cela prouve que  $F$  est dense dans  $\ell^1$ .

2. • La suite  $a$  étant bornée, on a  $a_n x_n = O(x_n)$ , donc la convergence absolue de  $\sum x_n$  implique la convergence absolue, donc la convergence, de  $\sum a_n x_n$ ; l'application  $\varphi_a$  est donc bien définie. La linéarité de  $\varphi_a$  quant à elle découle de la linéarité de la somme d'une série numérique convergente :

$$\begin{aligned} \forall (x, y, \lambda) \in (\ell^1)^2 \times \mathbb{R} \quad \varphi_a(\lambda x + y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y_n = \lambda \varphi_a(x) + \varphi_a(y). \end{aligned}$$

- Considérons  $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \in \mathbb{R}_+$ . Pour  $x \in \ell^1$ , on a :

$$|\varphi_a(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} s |x_n| = s \|x\|.$$

On en déduit que  $\varphi_a$  est continue et l'on a  $\|\varphi_a\| \leq s$ .

- Montrons que  $\|\varphi_a\| = s$ . Pour cela, fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe  $x \in \ell_1$  telle que  $|\varphi_a(x)| > (s - \varepsilon)\|x\|$ . Par définition de  $s$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|a_{n_0}| > s - \varepsilon$ . En reprenant la notation  $e^{(n)}$  introduite à la question 1, on constate qu'on a alors :

$$|\varphi_a(e^{(n_0)})| = |a_{n_0}| > s - \varepsilon = (s - \varepsilon)\|e^{(n_0)}\|.$$

3. Soit  $\varphi$  une forme linéaire continue sur  $\ell^1$ . Soit  $x \in \ell^1$ . On a, d'après la réponse de la question 1 :

$$u^{(N)} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} x \quad \text{avec} \quad u^{(N)} = \sum_{n=0}^N x_n e^{(n)}.$$

Comme  $\varphi$  est continue, on a donc :

$$\varphi(u^{(N)}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \varphi(x). \tag{1}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $a_n = \varphi(e^{(n)})$ . On a, par linéarité de  $\varphi$  :  $\varphi(u^{(N)}) = \sum_{n=0}^N a_n x_n$ .

Comme les suites  $e^{(n)}$  sont toutes de norme 1 et que  $\varphi$  est continue, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Donc, par comparaison, la convergence absolue de la série  $\sum x_n$  donne la convergence absolue de la série  $\sum a_n x_n$ , donc sa convergence. On a ainsi :

$$\varphi(u^{(N)}) = \sum_{n=0}^N a_n x_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n = \varphi_a(x). \tag{2}$$

D'après (1) et (2) et par unicité de la limite, on obtient  $\varphi(x) = \varphi_a(x)$ .

Cela étant vrai pour tout  $x \in \ell^1$ , on a  $\varphi = \varphi_a$ .

## Chapitre 6. Étude locale d'une application, continuité

**6.19** 1. Soit  $f \in \mathcal{S}(E)$ . Notons  $n = \dim E$ .

- Le théorème spectral assure l'existence d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées. Quitte à permutez les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ , supposons  $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ .

On a alors  $\rho(f) = |\lambda_n|$ . Pour  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ , on a :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k.$$

La base  $\mathcal{B}$  étant orthonormée, on en déduit :

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2,$$

ce qui donne :

$$\|f(x)\| \leq |\lambda_n| \|x\| = \rho(f) \|x\|.$$

Cela prouve que  $\|f\| \leq \rho(f)$ .

- Remarquons de plus que :

$$\|f(e_n)\| = \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n| \|e_n\| = \rho(f) \|e_n\|.$$

Le vecteur  $e_n$  étant non nul, on en déduit que  $\|f\| = \rho(f)$ .

2. • Le caractère autoadjoint de  $u^* \circ u$  se vérifie ainsi :

$$(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u,$$

et son caractère positif ainsi :

$$\forall x \in E \quad ((u^* \circ u)(x) \mid x) = (u(x) \mid u(x)) = \|u(x)\|^2 \geq 0.$$

- \* Pour  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= (u(x) \mid u(x)) = ((u^* \circ u)(x) \mid x) \quad (\text{propriété de l'adjoint}) \\ &\leq \|(u^* \circ u)(x)\| \|x\| \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq \|u^* \circ u\| \|x\|^2 \quad (\text{par définition de } \|u^* \circ u\|) \\ &= \rho(u^* \circ u) \|x\|^2 \quad (\text{d'après la première question}) \end{aligned}$$

d'où  $\|u(x)\| \leq \sqrt{\rho(u^* \circ u)} \|x\|$ . On en déduit que  $\|u\| \leq \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$ .

- Pour obtenir l'égalité souhaitée, remarquons que,  $u^* \circ u$  étant positif, son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , donc on a  $\rho(u^* \circ u) \in \text{sp}(u^* \circ u)$ . En notant  $x$  un vecteur propre de  $u$  associé à  $\rho(u^* \circ u)$ , on a :

$$\|u(x)\|^2 = ((u^* \circ u)(x) \mid x) = (\rho(u^* \circ u)x \mid x) = \rho(u^* \circ u) \|x\|^2,$$

d'où  $\|u(x)\| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)} \|x\|$ . Cela prouve que  $\|u\| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$ .

# Chapitre 7 : Compacité, connexité par arcs, dimension finie

<b>I</b>	<b>Compacité . . . . .</b>	<b>288</b>
1	Définition . . . . .	288
2	Applications continues sur une partie compacte . . . . .	291
<b>II</b>	<b>Connexité par arcs . . . . .</b>	<b>293</b>
1	Chemins . . . . .	293
2	Composantes connexes par arcs . . . . .	293
3	Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ . . . . .	295
4	Image continue d'un connexe par arcs . . . . .	295
<b>III</b>	<b>Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .</b>	<b>296</b>
1	Équivalence des normes . . . . .	296
2	Utilisation des coordonnées dans une base . . . . .	296
3	Parties compactes en dimension finie . . . . .	297
4	Continuité des applications (multi)linéaires et polynomiales	298
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>308</b>	

# Compacité, connexité par arcs, dimension finie

7

Ce chapitre présente les notions de compacité et de connexité par arcs. En particulier, il propose des généralisations des deux résultats suivants vus en première année :

- le théorème affirmant que l'image d'un segment par une application continue est un segment (généralisé via la notion de compacité) ;
- le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé via la notion de connexité par arcs).

Dans tout ce chapitre, la lettre  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

## I Compacité

### 1 Définition

#### Définition 1

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **compacte** si toute suite d'éléments de  $A$  possède au moins une valeur d'adhérence dans  $A$ .

**Terminologie** On dit aussi que  $A$  est un **compact** de  $E$ .

**Reformulation** Une partie  $A$  est compacte si toute suite d'éléments de  $A$  possède une sous-suite convergente dont la limite appartient à  $A$ .

**Remarque** La définition d'une partie compacte s'appuie sur la convergence de suites. Elle dépend donc de la norme utilisée. Cependant, deux normes équivalentes définissent les mêmes parties compactes.

**Ex. 1.** L'ensemble vide est compact car il n'existe aucune suite à valeurs dans l'ensemble vide, et car toute assertion logique de la forme «  $\forall x \in \emptyset \quad P(x)$  » est vraie.

**Ex. 2.** Tout singleton est compact. Plus généralement, toute partie finie est compacte, car toute suite à valeurs dans une partie finie possède au moins une sous-suite constante.

**Ex. 3.** Toute partie fermée bornée de  $\mathbb{R}$  ou de  $\mathbb{C}$  est compacte. En effet, si  $A$  est une partie bornée et si  $(a_n)$  est une suite d'éléments de  $A$ , alors le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que l'on peut extraire de  $(a_n)$  une sous-suite convergente. Si de plus  $A$  est un fermé, alors la limite de cette sous-suite appartient à  $A$ .

**Remarque** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $A$  une partie de  $F$  alors  $A$  est un compact de  $E$  si, et seulement si,  $A$  est un compact de  $F$ . En effet, le fait que toute suite d'éléments de  $A$  possède une valeur d'adhérence dans  $A$  ne dépend pas de savoir si l'on considère  $A$  comme une partie de  $E$  ou comme une partie de  $F$ .

La compacité est donc une notion intrinsèque : le caractère compact d'une partie ne dépend que de la norme utilisée, et non de l'espace vectoriel normé  $E$  dans lequel on se place.

Sur ce point, la notion de compact diffère de la notion d'ouvert et de fermé.

### Proposition 1

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Démonstration page 302

**Principe de démonstration.** Par contraposition.

**Remarque** Dans l'énoncé de la proposition 1, il faudrait en toute rigueur préciser « fermée dans  $E$  », puisque la notion de fermé dépend a priori de l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Cependant, puisque la notion de compact, elle, n'en dépend pas, la conclusion est valable quel que soit l'espace vectoriel : une partie compacte est donc un fermé de n'importe quel espace vectoriel normé qui la contient.

**Attention** La réciproque de la proposition 1 est vraie si  $E$  est de dimension finie (cf. théorème 16 de la page 297), mais fausse dans le cas général (cf. exemple 4).

**Point méthode** Si une suite  $(u_n)$  est telle qu'il existe  $\alpha > 0$  vérifiant :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \implies \|u_n - u_p\| \geq \alpha,$$

alors  $(u_n)$  ne possède aucune sous-suite convergente. Ainsi, pour montrer qu'une partie  $A$  n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une telle suite d'éléments de  $A$ .

### Ex. 4. Une partie fermée et bornée mais non compacte

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ , muni de la norme  $\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} |a_k|$ . Montrons que la boule unité fermée  $A = B_f(0, 1)$ , bien qu'étant fermée et bornée, n'est pas compacte.

- Tout d'abord,  $A$  est une boule fermée, donc  $A$  est une partie fermée et bornée.
- Considérons la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Tous les termes de cette suite sont de norme 1, donc appartiennent à  $A$ . En revanche, pour tout  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n_1 \neq n_2$ , on a  $\|X^{n_1} - X^{n_2}\|_\infty = 1$ . Il est donc impossible d'extraire de la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente. Donc  $A$  n'est pas compacte.

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### Proposition 2

Toute fermé relatif d'une partie compacte est compact.

**Démonstration.** Soit  $A$  une partie compacte, et  $B$  une partie fermée de  $A$ . On peut trouver  $F$  un fermé de  $E$  tel que  $B = A \cap F$ . Constatons déjà que  $B$  est fermé, comme intersection de fermés. De plus, si  $(b_n)$  est une suite d'éléments de  $B$ , alors, puisque  $B \subset A$  et par compacité de  $A$ , on peut extraire de  $(b_n)$  une sous-suite  $(b_{\varphi(n)})$  convergeant vers un élément de  $A$ . Comme cette sous-suite  $(b_{\varphi(n)})$  est à valeurs dans le fermé  $B$ , sa limite appartient aussi à  $B$ . D'où le caractère compact de  $B$ .  $\square$

**Reformulation** Tout fermé inclus dans un compact est compact.

### Proposition 3

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. On munit l'espace  $E \times F$  de la norme produit. Si  $A$  et  $B$  sont respectivement des parties compactes de  $E$  et  $F$ , alors  $A \times B$  est une partie compacte de l'espace produit  $E \times F$ .

Démonstration page 302

**Principe de démonstration.** Étant donné une suite à valeurs dans  $A \times B$ , on procède à deux extractions successives.

Une récurrence permet de généraliser le résultat précédent à un nombre fini quelconque de parties compactes.

### Corollaire 4

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels normés. On munit l'espace  $E_1 \times \dots \times E_p$  de la norme produit. Si  $A_1, \dots, A_p$  sont des parties compactes de  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, alors le produit  $A_1 \times \dots \times A_p$  est une partie compacte de l'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$ .

**Ex. 5.** Si  $(u_n^{(1)}), \dots, (u_n^{(p)})$  sont  $p$  suites respectivement à valeurs dans des compacts  $A_1, \dots, A_p$ , alors le résultat précédent appliqué à la suite  $(v_n)$  de terme général :

$$v_n = (u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(p)})$$

assure l'existence d'une fonction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que la suite  $(v_{\varphi(n)})$  converge, c'est-à-dire telle que les suites  $(u_{\varphi(n)}^{(1)}), \dots, (u_{\varphi(n)}^{(p)})$  convergent.

### Ex. 6. Parties compactes de $\mathbb{K}^p$ muni de la norme infinie

Une partie de  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$  est compacte si, et seulement si, c'est une partie fermée bornée.

- Un des sens est donné par la proposition 1 de la page précédente : pour qu'une partie soit compacte, il est nécessaire qu'elle soit fermée et bornée.
- Réciproquement, soit  $A$  une partie fermée et bornée de  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ .  
En considérant  $M$  un réel vérifiant :

$$\forall a \in A \quad \|a\|_\infty \leq M,$$

et en notant  $D_f(0, M) = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq M\}$ , on a  $A \subset D_f(0, M)^p$ .

Comme  $D_f(0, M)$  est un compact (en tant que partie fermée et bornée de  $\mathbb{K}$ ), le corollaire 4 assure que le produit  $D_f(0, M)^p$  est un compact de  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ .

On en déduit que  $A$  est compacte, en tant que partie fermée incluse dans un compact (cf. proposition 2).

**Remarque** Cette caractérisation des parties compactes, obtenue ici dans  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ , est en fait vraie dans tout espace de dimension finie (cf. théorème 16 de la page 297).

### Théorème 5

Une suite à valeurs dans un compact est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence. Sa limite est alors son unique valeur d'adhérence.

Démonstration page 302

**Principe de démonstration.** Pour le sens non trivial : si une suite possède une unique valeur d'adhérence  $a$  mais ne converge pas, alors on peut en extraire une sous-suite ne possédant pas  $a$  comme valeur d'adhérence, et donc qui en possède une autre...

**Remarques** Étant donné une suite  $(u_n)$ , à valeurs dans un compact  $A$ , dont on veut démontrer qu'elle converge :

- on sait déjà que  $(u_n)$  possède au moins une valeur d'adhérence, il s'agit donc de prouver qu'elle en possède au plus une ;
- un compact étant fermé, tout valeur d'adhérence de  $(u_n)$  est dans  $A$ .

**Point méthode** Pour prouver qu'une suite à valeurs dans un compact  $A$  converge vers  $\ell$ , on considère une valeur d'adhérence  $\alpha \in A$  de cette suite et l'on montre que  $\alpha = \ell$ .

Exo  
7.1

**Ex. 7.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ ,  $B$  une partie de  $F$ , et  $f : A \rightarrow B$  une application continue et bijective. Montrons que  $f^{-1}$  est continue.

Soit  $y \in B$ . Montrons que  $f^{-1}$  est continue en  $y$ . Par caractérisation séquentielle : donnons-nous  $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$  telle que  $y_n \rightarrow y$ , et montrons que  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$ . La suite  $(f^{-1}(y_n))$  étant à valeurs dans le compact  $A$ , prouver qu'elle converge vers  $f^{-1}(y)$  revient à montrer que toute valeur d'adhérence vaut  $f^{-1}(y)$ . Soit  $\ell \in A$  une telle valeur d'adhérence. Il existe une sous-suite  $(f^{-1}(y_{\varphi(n)}))$  telle que  $f^{-1}(y_{\varphi(n)}) \rightarrow \ell$ . Par continuité de  $f$ , on obtient, en composant,  $y_{\varphi(n)} \rightarrow f(\ell)$ . Or, comme  $y_n \rightarrow y$ , on a aussi  $y_{\varphi(n)} \rightarrow y$ . Par unicité de la limite, on en déduit  $f(\ell) = y$ , i.e.  $\ell = f^{-1}(y)$ .

## 2 Applications continues sur une partie compacte

### Théorème 6 (Image d'un compact par une application continue)

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Démonstration page 302

### Cas des fonctions à valeurs réelles

Exo  
7.2

### Corollaire 7 (Théorème des bornes atteintes)

Soit  $A$  une partie compacte non vide. Alors, toute application continue de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration page 303

Exo  
7.3

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**Ex. 8.** Soit  $A$  une partie compacte non vide de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Alors l'application  $\|f\| : A \rightarrow \mathbb{R}$ , étant continue, est bornée et atteint ses bornes.

**Ex. 9. Distance à un compact**

Soit  $A$  une partie compacte non vide de  $E$ , et  $x_0 \in E$ . L'application  $x \mapsto d(x_0, x)$  est continue, donc sa restriction à  $A$  est bornée et atteint ses bornes ; en particulier cette restriction est minorée et atteint sa borne inférieure. Cela assure l'existence de  $a \in A$  tel que la distance de  $x_0$  à  $A$  soit atteinte en  $a$ , i.e. :

$$d(x_0, A) = d(x_0, a).$$

**Ex. 10. Distance entre deux compacts**

Soit  $A$  et  $B$  deux compacts non vides de  $E$ . Alors  $A \times B$  est compact, donc l'application :

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

étant continue, est bornée et atteint ses bornes. En particulier, cela assure l'existence d'un couple  $(a, b) \in A \times B$  réalisant la distance entre  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire tel que :

$$d(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} d(x, y) = d(A, B).$$

### Uniforme continuité de toute application continue sur un compact

Exo  
7.4

**Théorème 8 (Théorème de Heine)**

Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

Démonstration page 303

**Ex. 11.** Munissons  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  de la norme infinie, notées respectivement  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{K})$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , notons  $f_x$  l'application partielle  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} y &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Montrons que l'application  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  est continue.

$$x \longmapsto f_x$$

Pour cela, montrons que  $\varphi$  est uniformément continue. Soit  $\varepsilon > 0$ . L'application  $f$  étant continue sur le compact  $[0, 1]^2$ , elle est uniformément continue. Il existe donc  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $(x_1, y_1) \in [0, 1]^2$  et  $(x_2, y_2) \in [0, 1]^2$  :

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \leq \eta \implies |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

En particulier, si  $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$  vérifie  $|x_1 - x_2| \leq \eta$ , alors, pour tout  $y \in [0, 1]$  :

$$\|(x_1, y) - (x_2, y)\| \leq \eta \quad \text{donc} \quad |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui offre  $\|f_{x_1} - f_{x_2}\|_\infty \leq \varepsilon$ . Par conséquent, la fonction  $\varphi$  est uniformément continue, donc *a fortiori* continue.

## II Connexité par arcs

### 1 Chemins

#### Définition 2

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé, ainsi que  $(x, y) \in A^2$ .

- Un **chemin joignant  $x$  à  $y$  dans  $A$**  est une application continue  $p$ , définie sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $A$  et telle que  $p(a) = x$  et  $p(b) = y$ .
- Si un tel chemin existe, on dit que les points  $x$  et  $y$  sont **reliés par un chemin dans  $A$** .

**Ex. 12.** Si  $A$  est une partie convexe, alors deux points quelconques  $x$  et  $y$  de  $A$  sont reliés dans  $A$  par le chemin

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto (1 - t)x + ty. \end{aligned}$$

**Remarque** Soit  $x$  et  $y$  deux points d'une partie  $A$ . S'il existe un chemin  $p : [a, b] \rightarrow A$  reliant  $x$  à  $y$ , alors pour tout segment  $[c, d]$  avec  $c < d$ , l'application  $\tilde{p} : [c, d] \rightarrow A$  définie par :

$$\tilde{p}(t) = p\left(a + \frac{t - c}{d - c}(b - a)\right)$$

est un chemin reliant  $x$  à  $y$ . Ainsi, si deux points sont reliés par un chemin, on peut considérer un chemin reliant ces deux points défini sur n'importe quelle segment non réduit à un point. Il est courant de considérer un tel chemin défini sur le segment  $[0, 1]$ .

### 2 Composantes connexes par arcs

#### Proposition 9

**Exo 7.15** Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé. La relation « être relié par un chemin dans  $A$  » est une relation d'équivalence sur  $A$ .

Démonstration page 303

**Terminologie** Les classes d'équivalences de cette relation sont appelées les **composantes connexes par arcs** de  $A$ .

#### Remarques

- Par transitivité, pour montrer que deux points  $x$  et  $y$  de  $A$  sont reliés par un chemin dans  $A$ , il suffit de trouver une suite finie  $(u_0, \dots, u_n)$  de points de  $A$  avec  $u_0 = x$ ,  $u_n = y$  et telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $u_k$  et  $u_{k+1}$  sont reliés par un chemin dans  $A$ .
- Toute partie est la réunion de ses composantes connexes par arcs.
- Les composantes connexes par arcs d'une partie sont deux à deux disjointes.

#### Définition 3

On dit que  $A$  est **connexe par arcs** s'il n'a qu'une seule composante connexe par arcs, ou, de manière équivalente, si deux éléments quelconques de  $A$  sont reliés par un chemin dans  $A$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**Ex. 13.** Toute composante connexe par arcs est connexe par arcs.

**Ex. 14.** Toute partie convexe est connexe par arcs.

**Ex. 15.** Tout sous-espace affine d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

**Ex. 16.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  n'est pas connexe par arcs, et ses composantes connexes par arcs sont  $]-\infty, a[$  et  $]a, +\infty[$ . En effet :

- si  $x \in ]-\infty, a[$  et  $y \in ]a, +\infty[$ , alors  $x$  et  $y$  ne sont pas reliés par un chemin dans  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ; en effet, le théorème des valeurs intermédiaires assure que toute application continue  $p : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $p(\alpha) = x$  et  $p(\beta) = y$  prend au moins une fois la valeur  $a$  et donc n'est pas à valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ;
- les deux intervalles  $]-\infty, a[$  et  $]a, +\infty[$  sont quant à eux connexes par arcs car convexes.

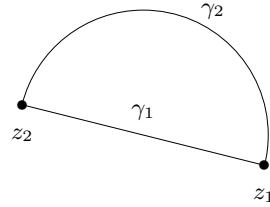
**Ex. 17.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Montrons que l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  est connexe par arcs. Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux éléments de  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

Considérons les deux chemins suivants :

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\longmapsto (1-t)z_1 + tz_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \theta &\longmapsto \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2}e^{i\theta}.\end{aligned}$$



Le chemin  $\gamma_1$  a pour image le segment reliant  $z_1$  à  $z_2$ , et le chemin  $\gamma_2$  a pour image un demi-cercle de diamètre  $[z_1 z_2]$ .

Comme les seuls points communs à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont  $z_1$  et  $z_2$ , il est clair qu'au moins l'un de ces deux chemins ne passe pas par  $a$ , et permet donc de relier  $z_1$  à  $z_2$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

Cela prouve la connexité par arcs de  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ .

**Ex. 18.** Montrons que si  $E$  est de dimension (éventuellement infinie) au moins 2, alors  $E \setminus \{0\}$  est connexe par arcs. Pour cela, donnons-nous  $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$  et montrons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $E \setminus \{0\}$ .

- Si la famille  $(x, y)$  est libre, on a :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \neq 0,$$

et alors l'application  $\begin{aligned}[0, 1] &\longrightarrow E \setminus \{0\} \\ \lambda &\longmapsto (1 - \lambda)x + \lambda y\end{aligned}$  est un chemin reliant  $x$  à  $y$ .

- Sinon, prenons  $z \in E \setminus \text{Vect}(x, y)$  (un tel  $z$  existe car  $E$  est de dimension au moins 2). Alors, les familles  $(x, z)$  et  $(y, z)$  sont libres. D'après le premier point,  $x$  et  $z$  d'une part, et  $y$  et  $z$  d'autre part, sont reliés par un chemin dans  $E \setminus \{0\}$ . On conclut par transitivité.

**Attention** En général, l'intersection de parties connexes par arcs n'est pas connexe par arcs.

**Ex. 19.** Dans  $\mathbb{C}$ , les ensembles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{U}$  sont connexes par arcs, mais pas leur intersection car :

$$\mathbb{R} \cap \mathbb{U} = \{-1, 1\}.$$

**Définition 4**

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé.

- Étant donné  $a \in A$ , on dit que  $A$  est **étoilée par rapport à  $a$**  si :

$$\forall x \in A \quad [a, x] \subset A.$$

- On dit que  $A$  est **étoilée** si  $A$  est étoilée par rapport à l'un de ses points.

**Ex. 20.** Toute partie étoilée est connexe par arcs. En effet, si  $A$  est une partie étoilée, il existe donc  $a \in A$  tel que  $A$  soit étoilée par rapport à  $a$  et alors, si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $A$  :

- comme  $[a, x] \subset A$ ,  $a$  et  $x$  sont reliés par un chemin dans  $A$  ;
  - comme  $[a, y] \subset A$ ,  $a$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A$  ;
- donc, par transitivité,  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A$ .

**Remarque** La réciproque de ce résultat est fausse ; par exemple, dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1 est connexe par arcs mais n'est pas étoilé.

### 3 Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

**Proposition 10**

Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

Démonstration page 304

**Principe de démonstration.** Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont ses parties convexes. Il reste donc à montrer qu'une partie de  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs si, et seulement si, elle est convexe.

### 4 Image continue d'un connexe par arcs

**Théorème 11**

Exo 7.16 L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Démonstration page 304

**Ex. 21.** Si  $E$  est un espace vectoriel normé réel de dimension (éventuellement infinie) au moins 2, la sphère unité de  $E$  est connexe par arcs. C'est en effet l'image de  $E \setminus \{0\}$  (qui est connexe par arcs, d'après l'exemple 18 de la page ci-contre) par l'application continue :

$$\begin{aligned} E \setminus \{0\} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

**Ex. 22.** Montrons qu'il n'existe pas de bijection continue de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{R}$ . Par l'absurde : supposons qu'une telle bijection continue  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  existe. Alors, l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ z &\longmapsto \varphi(z) \end{aligned}$$

est également bijective et continue. Or, l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \{\varphi^{-1}(0)\}$  est connexe par arcs (cf. exemple 17 de la page précédente) alors que  $\mathbb{R}^*$  ne l'est pas. Cela est en contradiction avec le théorème 11.

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### Corollaire 12

Exo  
7.18

Si  $f$  est une application continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors l'image par  $f$  de toute partie connexe par arcs est un intervalle.

**Démonstration.** C'est immédiat d'après le théorème 11 de la page précédente puisque les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.  $\square$

**Remarque** Ce résultat est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires vu en première année disant que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

## III Espaces vectoriels normés de dimension finie

### 1 Équivalence des normes

#### Théorème 13

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration (non exigible) page 304

**Remarque** Ce résultat entraîne que, dans un espace de dimension finie, beaucoup de notions sont indépendantes de la norme choisie :

- caractère ouvert, fermé, borné d'une partie ;
- intérieur, adhérence, frontière d'une partie ;
- limites de suites, limites de fonctions, continuité ;
- parties compactes, connexes par arcs.

Pour évoquer ces notions, il n'est pas nécessaire de préciser la norme choisie. Ainsi, la phrase « Soit  $E$  un espace de dimension finie et  $A$  une partie bornée de  $E$  » a un sens : le caractère borné de  $A$  ne dépend pas de la norme dont  $E$  est muni.

### 2 Utilisation des coordonnées dans une base

Le résultat suivant indique que, dans un espace de dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à celle de ses suites composantes dans une base.

#### Proposition 14

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ .

Soit  $(a_n)$  une suite à valeurs dans  $E$ . Notons  $(a_n^{(1)}), \dots, (a_n^{(p)})$  les **suites composantes** (ou **coordonnées**) de  $(a_n)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \sum_{k=1}^p a_n^{(k)} e_k.$$

Étant donné  $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$  appartenant à  $E$ , il est équivalent de dire :

- la suite  $(a_n)$  converge vers  $\ell$  ;
- pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite  $(a_n^{(k)})$  converge vers  $\ell_k$ .

Démonstration page 305

**Principe de démonstration.** Utiliser la norme infinie dans la base  $\mathcal{B}$ .

De la même façon, si  $f$  est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la limite de  $f$  en un point, ou encore l'étude de la continuité de  $f$ , se ramène à celle de ses applications composantes dans une base.

### Proposition 15

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ . Soit  $f : A \rightarrow E$  une application à valeurs dans  $E$  ( $A$  étant une partie quelconque d'un espace vectoriel normé). Notons  $(f_1, \dots, f_p)$  les **applications composantes** (ou **coordonnées**) de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)e_k.$$

Pour  $a \in A$  et  $\ell = \sum_{k=1}^p \ell_k e_k$  appartenant à  $E$ , il est équivalent de dire :

- (i) l'application  $f$  admet  $\ell$  comme limite en  $a$  ;
- (ii) pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application  $f_k$  tend vers  $\ell_k$  en  $a$ .

Démonstration page 305

**Principe de démonstration.** Utiliser la norme infinie dans la base  $\mathcal{B}$ .

## 3 Parties compactes en dimension finie

### Théorème 16

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Démonstration page 305

### Théorème 17 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence, i.e. admet au moins une sous suite convergente.

Démonstration page 305

### Ex. 23. Distance à un fermé en dimension finie

Supposons  $E$  de dimension finie. Soit  $F$  un fermé non vide de  $E$  et  $x_0 \in E$ . Montrons qu'il existe  $a \in F$  tel que :

$$d(x_0, F) = d(x_0, a).$$

Cela revient à prouver que l'application  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  admet un minimum.

$$\begin{aligned} x &\mapsto d(x_0, x) \end{aligned}$$

Fixons  $b \in F$  et notons  $r = d(x_0, b)$ . L'ensemble  $F \cap B_f(x_0, r)$  est compact, comme intersection d'un fermé et d'un compact. L'application  $f$  est continue, donc sa restriction au compact  $F \cap B_f(x_0, r)$ , non vide car contenant  $b$ , est bornée et atteint ses bornes. En particulier cette restriction possède un minimum  $m$ .

Puisque  $\forall x \in F \setminus B_f(x_0, r) \quad f(x) \geq f(b)$ , on en déduit que  $f$  est minorée par  $\min(f(b), m)$ . Ce minorant étant atteint par  $f$ , c'est un minimum.

**Proposition 18**

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Démonstration page 305

**Principe de démonstration.** Par caractérisation séquentielle.

**Attention** L'exemple suivant illustre l'importance de l'hypothèse «  $F$  est de dimension finie » dans la proposition 18.

**Ex. 24. Un sous-espace vectoriel non fermé** Soit  $E$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , muni de la norme infinie  $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .

Montrons que le sous-espace vectoriel  $F$  des suites presque nulles n'est pas un fermé de  $E$ .

Pour cela, exhibons une suite d'éléments de  $F$  qui converge vers un élément de  $E \setminus F$ .

Notons  $u$  la suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n+1}$  puis, pour  $p \in \mathbb{N}$ , notons  $u^{(p)}$  la suite de terme général  $u_n^{(p)} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Cet exemple prouve le résultat souhaité, car :

- pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\|u^{(p)} - u\|_\infty = \frac{1}{p+2} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $u^{(p)} \rightarrow u$  ;
- pour  $p \in \mathbb{N}$ , la suite  $u^{(p)}$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc appartient à  $F$  ;
- la suite  $u$  n'appartient pas à  $F$ , car possède une infinité de termes non nuls.

## 4 Continuité des applications (multi)linéaires et polynomiales

### Applications linéaires

**Théorème 19**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés. Si  $E$  est de dimension finie, alors toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

Démonstration page 306

**Principe de démonstration.** Utiliser la caractérisation de la continuité d'une application linéaire donnée par la proposition 21 de la page 264.

**Ex. 25.** Si  $E$  est de dimension finie, alors toute forme linéaire sur  $E$  est continue.

En particulier, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors, pour tout  $k \in [\![1, n]\!]$ , la forme linéaire «  $k$ -ième coordonnée dans la base  $\mathcal{B}$  » est continue :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & x_k. \end{array}$$

**Remarque** Si  $E$  est de dimension finie non nulle, on a donc  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ . De plus, la norme subordonnée de  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  vérifiant :

$$\|u\| = \sup \{ \|u(x)\| \mid x \in B_f(0, 1) \},$$

la continuité de l'application  $x \mapsto \|u(x)\|$  et la compacité de la boule  $B_f(0, 1)$  de  $E$  assurent, par le théorème des bornes atteintes, l'existence d'un vecteur  $x$  unitaire vérifiant  $\|u(x)\| = \|u\|$ , ou encore d'un vecteur  $x$  non nul vérifiant  $\|u(x)\| = \|u\| \|x\|$ .

## Applications polynomiales

On appelle fonction polynomiale sur  $\mathbb{K}^n$  toute application  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  s'écrivant comme une combinaison linéaire d'applications elles-mêmes produits d'applications composantes. Plus précisément :

### Définition 5

Une application  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires  $(\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$  telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

**Ex. 26.** L'application  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & xy - x^3z^4 + 4xyz^2 \end{array}$  est polynomiale.

La notion de fonction polynomiale se généralise à tout espace de dimension finie :

### Définition 6

Supposons  $E$  de dimension finie. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Une application  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **polynomiale** s'il existe une famille presque nulle de scalaires  $(\lambda_{k_1, \dots, k_n})_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$  telle que :

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \quad f(x) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

**Remarque** La définition précédente ne dépend pas de la base de  $E$  choisie. En effet, si  $\mathcal{B}'$  est une autre base de  $E$  et  $x$  un vecteur de  $E$ , alors en notant  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ , on a  $X = PY$  où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{B}'$ . Par conséquent, si l'on peut écrire  $f(x)$  sous la forme de la définition précédente à l'aide de  $x_1, \dots, x_n$ , on peut aussi le faire à l'aide de  $y_1, \dots, y_n$ .

### Proposition 20

Toute application polynomiale est continue.

**Démonstration.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  une application polynomiale. Alors, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $f$  s'obtient par produits et combinaisons linéaires à partir des formes linéaires coordonnées :

$$\pi_k : \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_k,$$

qui sont continues car linéaires avec un espace de départ de dimension finie. □

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### Corollaire 21

Exo  
7.23

L'application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est continue.  
 $M \mapsto \det(M)$

**Démonstration.** L'application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est polynomiale car  $\det(M) = \det(M)$

apparaît comme une expression polynomiale des coefficients de  $M$ , c'est-à-dire des composantes de  $M$  dans la base canonique. Par conséquent, l'application  $\det$  est continue.  $\square$

**Ex. 27.** Soit  $n \geq 1$ . L'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application  $\det : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  est surjective ( $\forall x \in \mathbb{R}^* \exists M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det(M) = x$ ) et continue. Si  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  était connexe par arcs, alors  $\mathbb{R}^*$  le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

**Remarque** Sur la connexité par arcs et les ensembles  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ , on pourra regarder les exercices 7.32 et 7.33.

## Applications multilinéaires

### Théorème 22

Exo  
7.24

Soit  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  des espaces vectoriels normés. Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie, alors toute application  $p$ -linéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans  $F$  est continue.

Démonstration page 306

**Principe de démonstration.** Si  $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$  est  $p$ -linéaire, alors  $f$  s'exprime à l'aide des applications coordonnées dans une base.

**Ex. 28.** Étant donné  $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ , l'application  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$   
 $(A, B) \mapsto AB$

est bilinéaire, donc continue puisque  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  sont de dimension finie.

**Ex. 29.** Si  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors l'application bilinéaire  $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$  est continue.  
 $(u, v) \mapsto v \circ u$

**Ex. 30.** Si  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, alors l'application bili-néaire  $\mathcal{L}(E, F) \times E \rightarrow F$  est continue.  
 $(u, x) \mapsto u(x)$

**Ex. 31.** Si  $E$  est de dimension finie, et si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors l'application :

$$\begin{aligned} E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) &\mapsto \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est continue car  $n$ -linéaire.

**Remarque** Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie et si  $f$  est une application  $p$ -linéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans  $F$ , alors  $f$  est continue, donc, par la proposition 27 de la page 268, il existe une constante positive  $C$  vérifiant :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq C \|x_1\| \times \dots \times \|x_p\|.$$

**Ex. 32.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Munissons l'espace  $\mathbb{K}_n[X]$  de la norme définie par  $\|P\| = \int_0^1 |P(t)|dt$ . Puisque  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension finie, l'application bilinéaire  $\mathbb{K}_n[X]^2 \rightarrow \mathbb{K}$  est continue. On en déduit qu'il existe une constante  $C$  vérifiant :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2 \quad \left| \int_0^1 P(t)Q(t)dt \right| \leq C \int_0^1 |P(t)|dt \int_0^1 |Q(t)|dt.$$

**Remarque** Ce résultat est faux sur  $\mathbb{K}[X]$ . En effet, si l'on prend  $P_n = Q_n = X^n$ , alors :

$$\int_0^1 P_n(t)Q_n(t)dt = \frac{1}{2n+1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 |P_n(t)|dt \int_0^1 |Q_n(t)|dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

**Ex. 33. Norme sous-multiplicative sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie**

Soit  $(E, +, \cdot, \times)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie. L'application  $\varphi : E^2 \rightarrow E$  qui à un couple de deux éléments de  $E$  associe leur produit est bilinéaire. Comme  $E$  est de dimension finie, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x \times y\| \leq C \|x\| \times \|y\|.$$

L'application  $N : x \mapsto C\|x\|$  est alors une norme sur  $E$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad N(x \times y) \leq N(x) N(y).$$

## Démonstrations

**Proposition 1** Soit  $A$  une partie compacte.

- Supposons que  $A$  ne soit pas fermée. Alors on peut trouver une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge mais dont la limite n'appartient pas à  $A$ . L'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente étant sa limite, la suite  $(a_n)$  ne possède pas de valeur d'adhérence dans  $A$ .
- Supposons que  $A$  ne soit pas bornée. Alors :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \|a\| > M.$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver un élément  $a_n \in A$  vérifiant  $\|a_n\| > n$ . On construit ainsi une suite  $(a_n)$  d'éléments de  $A$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_n\| > n \quad \text{donc} \quad \|a_n\| \rightarrow +\infty.$$

Alors, toute sous-suite  $(a_{\varphi(n)})$  vérifie  $\|a_{\varphi(n)}\| \rightarrow +\infty$ , donc est divergente (car non bornée).

Dans chacun des cas, on a trouvé une suite à valeurs dans  $A$  n'ayant aucune valeur d'adhérence dans  $A$ , donc  $A$  n'est pas compacte.

**Proposition 3** Soit  $((x_n, y_n))$  une suite d'éléments de  $A \times B$ .

- Comme  $A$  est compacte, on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\varphi_1(n)})$  convergeant vers un élément  $a$  de  $A$ .
- Puis, comme  $B$  est compacte, on peut extraire de  $(y_{\varphi_1(n)})$  une sous-suite  $(y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$  convergeant vers un élément  $b$  de  $B$ .
- Comme  $(x_{\varphi_1(n)})$  converge vers  $a$ , il en est de même pour sa sous-suite  $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$ . La suite de terme général  $(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}, y_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$  est alors une sous-suite de  $((x_n, y_n))$  qui converge vers l'élément  $(a, b)$  de  $A \times B$ .

Cela montre que  $A \times B$  est une partie compacte.

**Théorème 5** Soit  $A$  un compact et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ .

- Un sens est évident : si la suite  $(a_n)$  est convergente, alors elle possède sa limite comme unique valeur d'adhérence.
- Montrons l'autre sens. Supposons que la suite  $(a_n)$  possède une unique valeur d'adhérence  $\alpha$  et montrons que  $(a_n)$  converge vers  $\alpha$ .

Par l'absurde : supposons que  $(a_n)$  ne converge pas vers  $\alpha$ .

Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \|a_n - \alpha\| > \varepsilon.$$

Cela permet de construire une sous-suite  $(b_n) = (a_{\varphi(n)})$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|b_n - \alpha\| > \varepsilon. \tag{*}$$

La suite  $(b_n)$  étant à valeurs dans le compact  $A$ , elle possède au moins une valeur d'adhérence  $\beta$ . La propriété (\*) assure  $\|\beta - \alpha\| \geq \varepsilon$ , donc  $\beta \neq \alpha$ . Comme  $\beta$  est valeur d'adhérence d'une sous-suite de  $(a_n)$ ,  $\beta$  est également valeur d'adhérence de  $(a_n)$ . La suite  $(a_n)$  possède donc au moins deux valeurs d'adhérence, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

**Théorème 6** Soit  $A$  une partie compacte et  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Montrons que  $f(A)$  est une partie compacte de  $F$ . Soit  $(b_n)$  une suite d'éléments de  $f(A)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $a_n \in A$  tel que  $f(a_n) = b_n$ . Puisque  $A$  est compacte, on peut extraire de  $(a_n)$  une sous-suite convergente  $(a_{\varphi(n)})$ . Notons  $\alpha \in A$  la limite de  $(a_{\varphi(n)})$  ; alors, par continuité de  $f$ , on a  $f(a_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\alpha)$ , c'est-à-dire  $b_{\varphi(n)} \rightarrow f(\alpha)$ . La suite  $(b_n)$  possède donc une valeur d'adhérence dans  $f(A)$ . Cela montre que  $f(A)$  est compacte.

**Corollaire 7** Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue, où  $A$  est une partie compacte non vide. D'après le théorème 6, l'image de  $A$  par  $f$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc :

- $f(A)$  est bornée, ce qui assure que  $f$  est bornée ;
- $f(A)$  est fermée, ce qui assure que les bornes de  $f$  sont atteintes.

**Théorème 8** Soit  $A$  une partie compacte de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Raisonnons par l'absurde en supposant que  $f$  n'est pas uniformément continue. En niant la définition de l'uniforme continuité, on obtient l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$\forall \eta > 0 \quad \exists (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leq \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - f(y)\| > \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un couple  $(x_n, y_n) \in A^2$  vérifiant :

$$\|x_n - y_n\| \leq 2^{-n} \quad \text{et} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| > \varepsilon. \quad (*)$$

On construit ainsi deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  d'éléments de  $A$ . Par compacité de  $A$ , on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  convergeant vers un élément  $\alpha$  de  $A$ . L'inégalité suivante, valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \|y_{\varphi(n)} - \alpha\| &\leq \underbrace{\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|}_{\leq 2^{-\varphi(n)} \rightarrow 0} + \underbrace{\|x_{\varphi(n)} - \alpha\|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

montre alors que la suite  $(y_{\varphi(n)})$  converge également vers  $\alpha$ .

Par continuité de  $f$ , on a alors  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\alpha)$  et  $f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\alpha)$ .

Il en résulte que  $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| \rightarrow 0$ , ce qui est une contradiction car la propriété  $(*)$  impose que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon.$$

### Proposition 9

**Réflexivité.** Soit  $x \in A$ . La fonction constante  $[0, 1] \xrightarrow[t \mapsto x]{} A$  est un chemin reliant  $x$

à lui-même.

**Symétrie.** Si  $p : [a, b] \rightarrow A$  est un chemin reliant deux points  $x$  à  $y$  de  $A$ , alors :

$$\begin{aligned} \tilde{p} : [a, b] &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto p(a + b - t) \end{aligned}$$

est un chemin reliant  $y$  à  $x$ .

**Transitivité.** Soit  $x, y$  et  $z$  trois points de  $A$  tels que :

- il existe un chemin  $p_1$  reliant  $x$  à  $y$  dans  $A$  ;
- il existe un chemin  $p_2$  reliant  $y$  à  $z$  dans  $A$ .

Quitte à changer de paramétrage (cf. remarque de la page 293), on peut supposer que  $p_1$  et  $p_2$  sont définis respectivement sur  $[0, 1]$  et  $[1, 2]$ .

Considérons l'application  $p : [0, 2] \rightarrow A$  définie par :

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ p_2(t) & \text{si } t \in [1, 2], \end{cases}$$

cette définition étant non ambiguë car  $p_1(1) = p_2(1)$ . L'application  $p$  est continue par continuité de  $p_1$  et  $p_2$  ; en particulier, la continuité de  $p_1$  (respectivement  $p_2$ ) assure la continuité de  $p$  à gauche (respectivement à droite) en 1. Cette application  $p$  constitue donc un chemin reliant  $x$  à  $z$  dans  $A$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### Proposition 10

- Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est convexe donc connexe par arcs.
- Réciproquement soit  $I$  un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $I$ , alors il existe un chemin joignant  $x$  et  $y$  dans  $I$ ; par le théorème des valeurs intermédiaires, ce chemin prend alors toutes les valeurs entre  $x$  et  $y$ . Cela assure que toutes les valeurs comprises entre  $x$  et  $y$  appartiennent à  $I$ . En conclusion,  $I$  est un intervalle.

**Théorème 11** Soit  $A$  une partie connexe par arcs,  $F$  un espace vectoriel normé, ainsi que  $f : A \rightarrow F$  une application continue. Montrons que  $f(A)$  est connexe par arcs.

Soit  $(y_1, y_2) \in (f(A))^2$ . Considérons  $(x_1, x_2) \in A^2$  tel que  $f(x_1) = y_1$  et  $f(x_2) = y_2$ .

Comme  $A$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  reliant  $x_1$  à  $x_2$ .

Alors, l'application  $f \circ \gamma$  :

- est continue, comme composée de deux applications continues ;
- est à valeurs dans  $f(A)$  ;
- vérifie  $(f \circ \gamma)(a) = f(x_1) = y_1$  et  $(f \circ \gamma)(b) = f(x_2) = y_2$  ;

c'est donc un chemin reliant  $y_1$  à  $y_2$  dans  $f(A)$ . Donc  $f(A)$  est connexe par arcs.

**Théorème 13** Commençons par le lemme suivant :

#### Lemme

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Donnons-nous une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , et munissons  $E$  de la norme infinie associée. Alors, les compacts de  $E$  sont les fermés bornés.

**Démonstration du lemme.** Notons  $p = \dim E$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ .

Considérons l'isomorphisme :

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathbb{K}^p &\longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \sum_{k=1}^p x_k e_k.\end{aligned}$$

En munissant  $\mathbb{K}^p$  de la norme infinie, on constate que  $\varphi$  conserve la norme :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \|\varphi(x_1, \dots, x_p)\|_\infty = \|x\|_\infty.$$

Par conséquent,  $\varphi$  est continue, et son inverse  $\varphi^{-1}$  conserve aussi la norme et est aussi continu. On en déduit qu'une partie  $A$  de  $E$  est compacte (respectivement fermée, bornée) si, et seulement si,  $\varphi(A)$  est compacte (respectivement fermée, bornée). Or, dans  $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ , on sait que les compacts sont les fermés bornés (cf. exemple 6 de la page 290). Par conséquent, on a la même propriété dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .  $\square$

#### Démonstration du théorème 13.

Notons  $p = \dim E$  et considérons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Notons  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie associée à la base  $\mathcal{B}$ . Pour obtenir que sur  $E$  toutes les normes sont équivalentes, montrons que toute norme est équivalente à la norme infinie. Cela conclura par transitivité.

Soit  $N$  une norme sur  $E$ .

- Tout d'abord, pour  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ , on a :

$$N(x) = N\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^p |x_k| N(e_k) \leqslant M \|x\|_\infty \quad \text{avec} \quad M = \sum_{k=1}^p N(e_k).$$

Par conséquent,  $N$  est dominée par la norme infinie.

- D'autre part, la seconde inégalité triangulaire donne, pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq M\|x - y\|_\infty.$$

Il en résulte que l'application  $N$  est  $M$ -lipschitzienne donc continue sur  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .

La sphère unité  $S_\infty(0, 1)$  de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  étant fermée et bornée, elle est compacte d'après le lemme. La restriction de  $N$  à  $S_\infty(0, 1)$  est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure  $m$  en un point  $x_m$  de  $S_\infty(0, 1)$ .

Puisque  $x_m$  est non nul, la propriété de séparation de  $N$  assure que  $m > 0$ .

Pour tout vecteur non nul  $x$ , on a  $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0, 1)$ , donc :

$$m \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty} \quad \text{ce qui donne} \quad \|x\|_\infty \leq \frac{1}{m} N(x).$$

Cela prouve que la norme infinie est dominée par  $N$ , et termine la preuve.  $\square$

**Proposition 14** Comme  $E$  est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons  $E$  de la norme infinie dans la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire la norme  $N_\infty$  définie par :

$$N_\infty(x) = \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_k| \quad \text{où} \quad x = \sum_{k=1}^p x_k e_k.$$

L'équivalence souhaitée résulte alors de la relation suivante, valable pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n^{(k)} - \ell_k| \leq N_\infty(a_n - \ell) \leq \sum_{i=1}^p |a_n^{(i)} - \ell_i|.$$

**Proposition 15** Comme  $E$  est de dimension finie, on peut le munir de la norme que l'on souhaite. Munissons  $E$  de la norme infinie dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$N_\infty(x) = \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} |x_k| \quad \text{où} \quad x = \sum_{k=1}^p x_k e_k.$$

L'équivalence souhaitée résulte alors de la relation suivante, valable pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\forall x \in A \quad |f_k(x) - \ell_k| \leq N_\infty(f(x) - \ell) \leq \sum_{i=1}^p |f_i(x) - \ell_i|.$$

**Théorème 16** Supposons  $E$  de dimension finie. Il a été établi (par le lemme figurant dans la démonstration du théorème 13, de la page précédente) que si l'on munit  $E$  de la norme infinie associée à une base, alors les compacts sont les fermés bornés. Cela fournit le résultat car, par équivalence des normes en dimension finie, toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes, donc définissent les mêmes parties compactes, fermées, bornées.

**Théorème 17** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente. Étant convergente, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Il existe donc  $R > 0$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in B_f(0, R).$$

L'espace  $E$  étant de dimension finie, la boule fermée  $B_f(0, R)$  est compacte. Par conséquent, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs dans un compact, donc possède au moins une sous-suite convergente.

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**Proposition 18** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . Soit  $(u_n)$  une suite convergente à valeurs dans  $F$ . Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ , et montrons que  $\ell \in F$ .

Comme la suite  $(u_n)$  converge, elle est bornée. Comme  $(u_n)$  est une suite bornée à valeurs dans  $F$  et que  $F$  est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que  $(u_n)$  possède au moins une valeur d'adhérence dans  $F$ . Comme la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente est sa limite, on en déduit que  $\ell \in F$ .

**Théorème 19** Supposons  $E$  de dimension finie. Munissons  $E$  d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , et travaillons avec la norme infinie associée à cette base :

$$N_\infty(x) = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| \quad \text{avec} \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire. Pour montrer que  $u$  est continue, il suffit, d'après la proposition 21 de la page 264, de montrer qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que :

$$\forall x \in E \quad N_\infty(u(x)) \leq C \times N_\infty(x).$$

Pour  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  appartenant à  $E$ , on a, par linéarité de  $u$  :

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k)$$

puis, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N_\infty(u(x)) &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| N_\infty(u(e_k)) \\ &\leq C \times N_\infty(x), \quad \text{avec} \quad C = \sum_{k=1}^n N_\infty(u(e_k)). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**Théorème 22** Soit  $f : E_1 \times \cdots \times E_p \rightarrow F$  une application  $p$ -linéaire.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , notons  $n_k = \dim E_k$  ainsi que  $\mathcal{B}_k = (e_1^{(k)}, \dots, e_{n_k}^{(k)})$  une base de  $E_k$ . En notant alors  $g_{k,i}$  l'élément de  $E_1 \times \cdots \times E_p$  :

$$g_{k,i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème place}}}{e_i^{(k)}}, 0, \dots, 0),$$

la famille  $\mathcal{B} = (g_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq i \leq n_k}}$  est une base de  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .

Soit  $u = (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ . En écrivant chaque  $u_k$  dans la base  $\mathcal{B}_k$  :

$$u_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)},$$

il vient, par  $p$ -linéarité de  $f$  :

$$f(u) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)}\right) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_p}^{(p)} f(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_p}^{(p)}).$$

Si pour  $\ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 1, n_\ell \rrbracket$ , on note  $\pi_{\ell,i}$  l'application :

$$\begin{aligned} \pi_{\ell,i} : \quad & E_1 \times \cdots \times E_p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \left( \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(k)} e_i^{(k)} \right)_{1 \leq k \leq p} & \longmapsto & x_i^{(\ell)} \end{aligned}$$

alors  $f$  s'écrit à l'aide des  $\pi_{\ell,i}$  :

$$f = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} f(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_p}^{(p)}) \pi_{1,i_1} \cdots \pi_{p,i_p}.$$

Comme les  $\pi_{\ell,i}$  sont des formes linéaires sur l'espace de dimension finie  $E_1 \times \cdots \times E_p$ , elles sont continues. Par opérations sur les applications continues, l'expression obtenue pour  $f$  assure alors sa continuité.

### Remarques

- Les formes linéaires  $\pi_{k,i}$  considérées ici ne sont rien d'autre que les formes linéaires coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .
- L'expression obtenue pour  $f$  lors du calcul précédent permet de montrer que, dans le cas où  $F$  est de dimension finie, si l'on en considère une base, alors les applications composantes de  $f$  sont des fonctions polynomiales.

## S'entraîner et approfondir

### Compacité

**7.1** Soit  $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  l'application qui à un complexe  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  associe son unique racine carrée dont l'argument principal appartient à  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , i.e. de partie réelle strictement positive. Montrer que  $f$  est continue.  
 $\rightarrow^{291}$

**7.2** Soit  $A$  un compact non vide. Montrer qu'il existe  $(a_1, a_2) \in A^2$  tel que le **diamètre** de  $A$ ,  
 $\rightarrow^{291}$  noté  $\delta(A)$ , soit la distance de  $a_1$  à  $a_2$ , c'est-à-dire tel que :

$$d(a_1, a_2) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y) = \delta(A).$$

**7.3** Considérons la fonction  $g :$   
 $\rightarrow^{291}$   $\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$

- Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , il existe  $R > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad |g(x, y)| > a.$$

- Montrer que  $g$  possède un minimum sur  $\mathbb{R}^2$ .

**7.4** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  une fonction continue et périodique.  
 $\rightarrow^{292}$  Montrer que  $f$  est uniformément continue.

**7.5** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$  une fonction continue admettant une  
 $\rightarrow^{292}$  limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est uniformément continue.

### 7.6 Enveloppe convexe d'une famille finie de vecteurs

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Montrer que l'ensemble suivant est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$  :

$$K = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}.$$

- Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille finie d'éléments de  $E$ . On appelle **enveloppe convexe** de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de  $x_1, \dots, x_n$ , i.e. les combinaisons linéaires  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  où les coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont positifs et de somme 1. Montrer que l'enveloppe convexe de  $(x_1, \dots, x_n)$  est une partie compacte.

### \* 7.7 Compact/fermé versus fermé/fermé

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Étant donné  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ , on note :

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\},$$

et l'on appelle distance de  $A$  à  $B$  la quantité :

$$d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b).$$

- On suppose dans cette question que  $A$  est un compact et  $B$  un fermé.

- Montrer que  $A + B$  est un fermé de  $E$ .
- Montrer que la distance de  $A$  à  $B$  est atteinte, i.e. :

$$\exists (a_0, b_0) \in A \times B \quad d(A, B) = d(a_0, b_0).$$

2. Montrer que, sous la seule hypothèse que  $A$  et  $B$  sont des fermés, alors :

- $A + B$  n'est pas nécessairement un fermé ;
- la distance de  $A$  à  $B$  n'est pas nécessairement atteinte.

*Indication.* On pourra expliciter deux parties  $A$  et  $B$  pertinentes, par exemple dans  $\mathbb{R}^2$ .

**7.8** Soit  $K$  un compact non vide, et  $f : K \rightarrow K$  une application vérifiant :

$$\forall(x, y) \in K^2 \quad x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|. \quad (\star)$$

1. Montrer que  $f$  possède un unique point fixe.

*Indication.* On pourra introduire la fonction  $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$ .

2. Soit  $x \in K$ . Montrer que la suite récurrente  $(x_n)$  définie par :

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers l'unique point fixe de  $f$ .

**7.9** Soit  $C$  un compact convexe non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$  et  $f$  un endomorphisme continu de  $E$  laissant stable  $C$ .

Le but est de montrer que  $f$  possède au moins un point fixe.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Prouver que  $f_n$  est un endomorphisme continu de  $E$  laissant stable  $C$ .

2. Montrer qu'il existe une constante  $M$  telle que :

$$\forall y \in f_n(C) \quad \|f(y) - y\| \leq \frac{2M}{n}.$$

3. Prouver alors que  $f$  possède au moins un point fixe.

**7.10** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  est dite de **Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq n_0 \quad d(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

2. Montrer que si  $E$  est de dimension finie, alors toute suite de Cauchy est convergente.

**7.11** On se place dans un espace vectoriel normé  $E$ .

1. **Théorème des compacts emboîtés**

Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de compacts non vides emboîtés, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K_n \neq \emptyset \quad \text{et} \quad K_{n+1} \subset K_n.$$

Montrer que l'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$  est non vide.

2. **Premier théorème de Dini (version allégée)**

Soit  $K$  un compact. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, i.e. vérifie :

$$\forall(n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \leq p \implies \forall x \in K \quad f_n(x) \geq f_p(x).$$

On suppose de plus que pour tout  $x \in K$ , on a  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Montrer que  $\|f_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

*Indication.* Pour  $\varepsilon > 0$ , on pourra introduire  $K_n = \{x \in K : f_n(x) \geq \varepsilon\}$  et montrer que c'est un compact.

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### \* 7.12 Théorème de Baire

On se place dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

1. Montrer qu'une partie de  $E$  est dense dans  $E$  si, et seulement si, elle rencontre tout ouvert non vide.
2. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses dans  $E$ .

- (a) Soit  $O$  un ouvert non vide de  $E$ . Montrer qu'il existe une suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boules ouvertes emboîtées (*i.e.*  $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} \subset B_n$ ) et non vides vérifiant :

$$B_0 \subset O \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n \subset U_n.$$

- (b) En déduire que l'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  est dense dans  $E$ .

*Indication.* On pourra utiliser le théorème des compacts emboîtés (première question de l'exercice 7.11).

### \* 7.13 Théorème de Riesz

On souhaite démontrer le théorème de Riesz. Celui-ci affirme qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte.

1. Justifier le sens « facile » du théorème.
2. Réciproquement, supposons que  $E$  soit un espace vectoriel normé de dimension infinie, et montrons que sa boule unité fermée  $B_f(0, 1)$  n'est pas compacte.
  - (a) Soit  $F$  un sous-espace de dimension finie de  $E$ , et  $x \in E \setminus F$ .
    - i. Justifier l'existence de  $y \in F$  tel que  $d(x, F) = \|x - y\|$ .
    - ii. En déduire qu'il existe un vecteur unitaire  $u$  vérifiant :

$$d(u, F) = 1.$$

- (b) Conclure alors en construisant une suite d'éléments de  $B_f(0, 1)$  ne possédant pas de valeur d'adhérence.

### \*\* 7.14 Procédé diagonal

On note  $\ell^\infty$  l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  complexes bornées, que l'on munit de la norme :

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Soit  $A$  le sous-ensemble de  $\ell^\infty$  formé des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq \frac{1}{2^n}. \tag{*}$$

1. Soit  $\ell = (\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $A$  et  $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u^{(p)}$  est donc un élément de  $A$  ; son  $n$ -ième terme est noté  $u_n^{(p)}$ .

Montrer que  $u^{(p)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \ell$  si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0.$$

2. Montrer que  $A$  est compact.

## Connexité par arcs

**7.15** Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux connexes par arcs d'intersection non vide. Montrer que  $A_1 \cup A_2$  est connexe par arcs.<sup>→<sub>293</sub></sup>

- 7.16** 1. Montrer que les composantes connexes par arcs d'un ouvert sont des ouverts.  
<sup>→<sub>295</sub></sup> 2. Montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

*Cet exercice utilise la notion de dénombrabilité (cf. chapitre 14).*

- 7.17** 1. Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{U}$ , l'ensemble  $\mathbb{U} \setminus \{a\}$  est connexe par arcs.  
<sup>→<sub>295</sub></sup> 2. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de  $\mathbb{U}$  vers  $[0, 1]$ , où  $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**7.18** Soit  $A$  une partie connexe par arcs de  $E$ .

- <sup>→<sub>296</sub></sup> 1. Soit  $B$  une partie de  $A$ . Montrer que si  $B$  est à la fois un ouvert relatif de  $A$  et un fermé relatif de  $A$ , alors on a  $B = \emptyset$  ou  $B = A$ .

*Indication.* Considérer la restriction à  $A$  de la fonction indicatrice de  $B$ .

2. Montrer que  $A$  ne peut pas s'écrire comme la réunion de deux ouverts relatifs non vides et disjoints.

**7.19** Soit  $X$  une partie au plus dénombrable de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que l'ensemble  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  est connexe par arcs.

*On pourra se contenter de raisonner géométriquement.*

*Cet exercice utilise la notion de dénombrabilité (cf. chapitre 14).*

**7.20** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés ainsi que  $A$  et  $B$  deux parties non vides respectivement de  $E$  et  $F$ . On munit  $E \times F$  de la norme produit. Montrer que  $A \times B$  est connexe par arcs si, et seulement si,  $A$  et  $B$  le sont.

**7.21** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $F$  un fermé dont la frontière  $\text{Fr}(F)$  est connexe par arcs. Montrer que  $F$  est connexe par arcs.

**7.22** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ , et  $H$  un hyperplan de  $E$ .

- Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors  $E \setminus H$  n'est pas connexe par arcs.
- Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors  $E \setminus H$  est connexe par arcs.

*Indication.* L'ensemble  $\mathbb{C}^*$  est connexe par arcs (cf. exemple 17 de la page 294).

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

### Topologie des espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- 7.23** 1. Montrer que l'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \xrightarrow{\quad 300 \quad} & A & \longmapsto \text{Com } A \end{array}$  est continue.
2. En déduire que l'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$  est continue.
- 7.24** 1. Justifier la continuité de l'application  $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \xrightarrow{\quad 300 \quad} & A & \longmapsto A^T A. \end{array}$
2. Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est un compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- \* **7.25** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Montrer que, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'ensemble des matrices de rang au plus  $r$  est fermé.
- 7.26** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'ensemble  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- 7.27** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
1. Montrer la continuité de l'application  $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$  qui à une matrice associe son polynôme caractéristique.
  2. On prend ici  $n \geq 2$ . Montrer que l'application  $\Pi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & \pi_A \end{array}$  qui à une matrice associe son polynôme minimal n'est pas continue.
- \* **7.28** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
1. Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que l'ensemble  $\mathcal{D}$  des matrices diagonalisables est dense.  
*Indication. Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , toute matrice est trigonalisable.*
  2. On souhaite prouver que, dès que  $n \geq 2$ , ce résultat est faux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Considérons la matrice d'écriture par blocs :
- $$A = \left( \begin{array}{c|c} B & (0) \\ \hline (0) & I_{n-2} \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- (a) Montrer que si  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  converge vers  $A$ , alors  $\chi_{A_p}(i) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  (où  $i$  est le nombre complexe imaginaire pur).
  - (b) En déduire que  $A$  n'appartient pas à l'adhérence de  $\mathcal{D}$ .
- Remarque** L'exercice 7.30 de la page ci-contre établit que, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'adhérence de l'ensemble des matrices  $\mathbb{R}$ -diagonalisables est l'ensemble des matrices  $\mathbb{R}$ -trigonalisables.
- \* **7.29 Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.**  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des matrices diagonalisables.
1. Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \text{sp}(A)$ .
    - (a) Montrer que  $\chi_{A_p}(\lambda) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ .
    - (b) En déduire que :
 
$$d(\lambda, \text{sp}_{\mathbb{C}}(A_p)) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0.$$
  2. Montrer que l'intérieur de  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des matrices possédant  $n$  valeurs propres distinctes.

- ★ **7.30** On note  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des matrices trigonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $\mathcal{T}_n$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  puis que c'est l'adhérence de  $\mathcal{D}_n$ .

- ★ **7.31** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note  $S(A)$  la classe de similitude de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices semblables à  $A$  :

$$S(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

1. Montrer que l'adhérence de  $S(A)$  contient au moins une matrice diagonale.

*Indication.* Trigonaliser  $A$ .

2. Montrer que  $S(A)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.

- 7.32** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1. Soit  $T$  une matrice triangulaire inversible. Montrer que  $T$  peut être reliée à  $I_n$  par un chemin à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .
2. En déduire que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

### 7.33 Composantes connexes par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le but est de démontrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  possède deux composantes connexes par arcs :

$$\mathcal{C}_+ = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_- = \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*).$$

Notons  $\mathcal{C}_0$  la composante connexe par arcs de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  contenant  $I_n$ .

1. (a) On note  $E_{i,j}$  l'élément d'indice  $(i, j)$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $T$  une matrice de transvection, i.e. une matrice de la forme :

$$T = I_n + \lambda E_{i,j} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $T \in \mathcal{C}_0$ .

- (b) Soit  $D$  une matrice de dilatation de déterminant positif, i.e. une matrice de la forme :

$$D = \text{Diag}(1, \dots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ème place}}}{\mu}, 1, \dots, 1) \quad \text{avec} \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \mu > 0.$$

Montrer que  $D \in \mathcal{C}_0$ .

- (c) En déduire que tout élément  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  peut être relié, par un chemin à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , à une matrice diagonale de diagonale constituée de  $\pm 1$ .
2. Soit  $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^2$ . Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables et si  $B$  appartient à  $\mathcal{C}_0$ , alors  $A$  également.
  3. Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  vérifiant  $p + 2q = n$ . On note :

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{2q} \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $J_{p,q} \in \mathcal{C}_0$ .

*Indication.* Utiliser des matrices de rotation de taille 2.

4. Déduire des questions précédentes que si  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $\det A > 0$ , alors  $A \in \mathcal{C}_0$ .
5. Conclure.

## Solutions des exercices

**7.1** Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Montrons que  $f$  est continue en  $z$  par caractérisation séquentielle. Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)^{\mathbb{N}}$  telle que  $z_n \rightarrow z$ . Montrons que  $f(z_n) \rightarrow f(z)$ .

- Tout d'abord, puisque la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, elle est bornée. Comme  $f(z_n)^2 = z_n$ , on a  $|f(z_n)|^2 = |z_n|$ , donc la suite  $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est également bornée. Comme on est en dimension finie, il suffit, pour prouver sa convergence vers  $f(z)$ , de prouver qu'elle ne possède pas d'autre valeur d'adhérence que  $f(z)$ .
- Soit  $\ell \in \mathbb{C}$  une valeur d'adhérence de la suite  $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrons que  $\ell = f(z)$ . Soit  $(f(z_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente vers  $\ell$ . Puisque  $f(z_{\varphi(n)}) \rightarrow \ell$ , on a  $f(z_{\varphi(n)})^2 \rightarrow \ell^2$ , autrement dit  $z_{\varphi(n)} \rightarrow \ell^2$ . Par unicité de la limite, on en déduit  $\ell^2 = z$ .
- Puisque  $\ell$  et  $f(z)$  sont des racines carrées de  $z$ , on a  $\ell = \pm f(z)$ . Pour conclure que  $\ell = f(z)$ , il reste à prouver que  $\ell \neq -f(z)$ . Par définition de  $f$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Re} f(z_{\varphi(n)}) > 0$$

donc par passage à la limite,  $\operatorname{Re}(\ell) \geq 0$ . Ainsi, on a  $\ell \neq -f(z)$  car  $\operatorname{Re}(-f(z)) < 0$ .

**7.2** La fonction  $f : \begin{array}{ccc} A^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{array}$  est continue et définie sur une partie compacte

(comme  $A$  est compacte,  $A^2$  l'est aussi) non vide. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum, ce qui justifie l'existence d'un couple  $(x, y) \in A^2$  tel que  $\delta(A) = d(x, y)$ .

**7.3** 1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On remarque que  $g(x, y) = \varphi(\|(x, y)\|_2)$  avec  $\varphi : r \mapsto \frac{e^{r^2}}{1 + r^2}$ .

Par croissances comparées, on a  $\varphi(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

On en déduit qu'il existe  $R > 0$  tel que :

$$\forall r > R \quad |\varphi(r)| > a,$$

et donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad |g(x, y)| > a.$$

2. D'après la question précédente, appliquée pour  $a = g(0, 0)$ , il existe  $R > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad |g(x, y)| \geq g(0, 0). \quad (*)$$

Comme  $g$  est continue et que le disque fermé  $D_f(0, R)$  est compact (fermé borné en dimension finie), le théorème des bornes atteintes assure que la restriction de  $g$  à  $D_f(0, R)$  est bornée et atteint ses bornes ; notons  $m$  son minimum.

Comme  $(0, 0) \in D_f(0, R)$ , on a  $m \leq g(0, 0)$  ; la propriété  $(*)$  donne donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f(0, R) \quad |g(x, y)| \geq m.$$

Par conséquent,  $m$  est le minimum de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**7.4** Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Soit  $T > 0$  une période de  $f$ . Puisque  $f$  est continue, le théorème de Heine assure que la restriction de  $f$  au segment  $[-T, 2T]$  est uniformément continue. On peut donc trouver  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [-T, 2T]^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Quitte à changer  $\eta$  en  $\min(\eta, T)$ , on peut supposer  $\eta \leq T$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $|x - y| \leq \eta$ . En posant alors  $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$ , on a  $x - nT \in [0, T]$ .

Puis, comme  $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| \leq \eta \leq T$ , on a  $y - nT \in [-T, 2T]$ . On a ainsi :

$$(x - nT, y - nT) \in [-T, 2T]^2$$

donc la propriété  $(*)$  s'applique et donne :

$$\|f(x - nT) - f(y - nT)\| \leq \varepsilon \quad i.e. \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

**7.5** Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Puisque  $f \xrightarrow{+\infty} \ell$ , il existe  $R \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \geq R \quad \|f(x) - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall (x, y) \in [R, +\infty[^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

En appliquant le théorème de Heine à la restriction de  $f$  au segment  $[0, R + 1]$ , on peut considérer  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, R + 1]^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Quitte à changer  $\eta$  en  $\min(\eta, 1)$ , on peut supposer  $\eta \leq 1$ .

Alors, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  vérifiant  $|x - y| \leq \eta$ , on a soit  $(x, y) \in [0, R + 1]^2$ , soit  $(x, y) \in [R, +\infty[^2$ , et dans les deux cas  $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ .

**7.6** 1. Puisque  $\mathbb{R}^n$  est de dimension finie, montrer que  $K$  est compact revient à montrer que c'est un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$ . Travaillons avec la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- L'ensemble  $K$  est borné car pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K$  :

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

- D'autre part,  $K$  est un fermé relatif de  $(\mathbb{R}_+)^n$  car il s'écrit  $\varphi^{-1}(\{1\})$  où  $\varphi$  est l'application continue (car c'est la restriction d'une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie) :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad (\mathbb{R}_+)^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 + \dots + \lambda_n. \end{aligned}$$

Comme  $(\mathbb{R}_+)^n$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  (car produit de fermés), il en résulte que  $K$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

2. L'enveloppe convexe de  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'image de  $K$  par l'application :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \end{aligned}$$

Puisque  $K$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$  d'après la première question et que l'application  $f$  est continue (elle est linéaire et son espace de départ est de dimension finie), on en déduit que l'enveloppe convexe de  $(x_1, \dots, x_n)$  est compacte.

**7.7** 1. (a) Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs dans  $A + B$ . Supposons  $(u_n)$  convergente et montrons que sa limite  $\ell$  appartient à  $A + B$ .

Puisque  $(u_n)$  est à valeurs dans  $A + B$ , on peut écrire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{avec } (a_n, b_n) \in A \times B.$$

La suite  $(a_n)$  étant à valeurs dans le compact  $A$ , on peut en extraire une sous-suite convergente  $(a_{\varphi(n)})$ . Alors, la sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  converge également, en tant que sous-suite d'une suite convergente. La relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$$

prouve alors que la suite  $(b_{\varphi(n)})$  converge elle aussi. Alors :

- puisque  $A$  est compact donc fermé, en notant  $\ell_1 = \lim a_{\varphi(n)}$ , on a  $\ell_1 \in A$  ;
- puisque  $B$  est fermé, en notant  $\ell_2 = \lim b_{\varphi(n)}$ , on a  $\ell_2 \in B$  ;
- puisque  $\ell = \lim u_n$ , on a aussi  $\ell = \lim u_{\varphi(n)}$ .

En passant à la limite dans la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)},$$

on obtient alors  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ , ce qui prouve que  $\ell \in A + B$ .

**Remarque** On constate que l'hypothèse «  $E$  de dimension finie » n'a pas été utilisée dans le raisonnement précédent. Le résultat reste donc vrai sans cette hypothèse.

(b) Fixons  $\alpha \in A$  et  $\beta \in B$ . On a alors  $d(A, B) \leq d(\alpha, \beta)$ .

Comme  $A$  est compact, c'est une partie bornée, donc il existe  $M$  tel que :

$$A \subset B_f(\alpha, M).$$

Par inégalité triangulaire, on a, pour tout  $y \in B \setminus B_f(\alpha, M + d(\alpha, \beta))$  :

$$\forall x \in A \quad d(x, y) \geq \underbrace{d(\alpha, y)}_{>M+d(\alpha,\beta)} - \underbrace{d(\alpha, x)}_{\leq M} > d(\alpha, \beta) \geq d(A, B).$$

On en déduit qu'en notant  $\tilde{B} = B \cap B_f(\alpha, M + d(\alpha, \beta))$ , on a :

$$d(A, B) = d(A, \tilde{B}).$$

Comme  $\tilde{B}$  est fermé (car intersection de deux fermés) et borné, il est compact (car  $E$  est de dimension finie). Puisque  $A$  et  $\tilde{B}$  sont compacts, il en est de même pour  $A \times \tilde{B}$ . Il en résulte que l'application continue :

$$\begin{aligned} A \times \tilde{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

est bornée et atteint ses bornes, donc en particulier possède un minimum. Cela prouve l'existence d'un couple  $(a_0, b_0) \in A \times \tilde{B}$  tel que :

$$d(a_0, b_0) = d(A, \tilde{B}).$$

Comme  $\tilde{B} \subset B$ , ce couple  $(a_0, b_0)$  appartient à  $A \times B$ . D'où le résultat.

2. Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^2$ , et posons :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}.$$

Les parties  $A$  et  $B$  sont fermées car sont respectivement les images réciproques du fermé  $\{0\}$  par les applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy - 1. \end{array}$$

Les parties  $A$  et  $B$  s'écrivent également :

$$A = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

et

$$B = \left\{ \left( b, \frac{1}{b} \right) \mid b \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

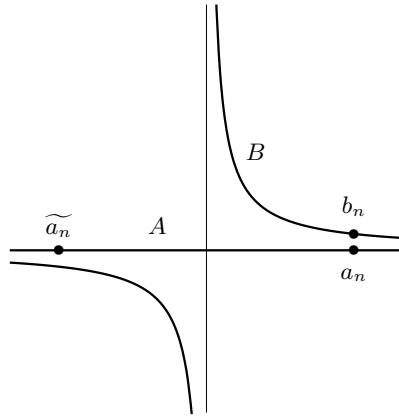
On constate que  $A$  et  $B$  sont disjoints et que  $(0, 0) \notin A + B$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$a_n = (n, 0) \in A;$$

$$\tilde{a}_n = (-n, 0) \in A;$$

$$b_n = \left( n, \frac{1}{n} \right) \in B.$$



- Comme  $b_n - a_n \rightarrow 0$ , on a  $d(A, B) = 0$ . Comme  $A$  et  $B$  sont disjoints, cela prouve que la distance de  $A$  à  $B$  n'est pas atteinte.
- De plus, la suite de terme général  $\tilde{a}_n + b_n$  tend vers  $(0, 0)$ . Comme  $(0, 0) \notin A + B$ , cela prouve que  $A + B$  n'est pas fermé.

**7.8 1. Existence.** Soit  $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\varphi(x) = \|f(x) - x\|$ . Étant donné que  $\varphi$  est continue (comme composée des deux applications continues  $x \mapsto f(x) - x$  et  $u \mapsto \|u\|$ ) et que  $K$  est un compact non vide,  $\varphi$  admet un minimum. Notons  $\alpha$  un point de  $K$  en lequel ce minimum est atteint. Si  $f(\alpha) \neq \alpha$ , alors, d'après la propriété  $(\star)$  vérifiée par  $f$  :

$$\varphi(f(\alpha)) = \|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|f(\alpha) - \alpha\| = \varphi(\alpha),$$

ce qui est absurde. On a donc  $f(\alpha) = \alpha$ , i.e.  $\alpha$  est un point fixe de  $f$ .

**Unicité.** Si l'on suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux points fixes distincts, alors, d'après la propriété  $(\star)$  vérifiée par  $f$  :

$$\|\beta - \alpha\| = \|f(\beta) - f(\alpha)\| < \|\beta - \alpha\|,$$

ce qui est absurde.

2. Notons  $d_n = \|x_n - \alpha\|$ , où  $\alpha$  est le point fixe de  $f$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$d_{n+1} = \|x_{n+1} - \alpha\| = \|f(x_n) - f(\alpha)\| \leq \|x_n - \alpha\| = d_n.$$

La suite  $(d_n)$ , étant décroissante et minorée par 0, converge vers une limite  $a \geq 0$ .

L'ensemble  $K$  est compact. Pour prouver que la suite  $(x_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$  converge vers  $\alpha$ , considérons  $\ell \in K$  une valeur d'adhérence de  $(x_n)$  et montrons que  $\ell = \alpha$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

Soit  $(x_{\varphi(n)})$  une sous-suite convergente de  $(x_n)$ . En notant  $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$ , on a :

$$d_{\varphi(n)} = \|x_{\varphi(n)} - \alpha\| \rightarrow \|\ell - \alpha\|.$$

Puisque d'autre part  $d_{\varphi(n)} \rightarrow a$ , on a, par unicité de la limite :

$$a = \|\ell - \alpha\|. \quad (1)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f(x_{\varphi(n)}) = x_{1+\varphi(n)}$ .

Ainsi, par continuité de  $f$ , la suite  $(f(x_{1+\varphi(n)}))$  tend vers  $f(\ell)$ . On a alors :

$$d_{1+\varphi(n)} = \|x_{1+\varphi(n)} - \alpha\| \rightarrow \|f(\ell) - \alpha\| = \|f(\ell) - f(\alpha)\|.$$

Puisque d'autre part  $d_{1+\varphi(n)} \rightarrow a$ , on a par unicité de la limite :

$$a = \|f(\ell) - f(\alpha)\|. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent  $\|f(\ell) - f(\alpha)\| = \|\ell - \alpha\|$ . La propriété  $(\star)$  vérifiée par  $f$  offre alors  $\ell = \alpha$ .

- 7.9** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'endomorphisme  $f$  est continu par hypothèse, donc ses itérés le sont aussi. Par conséquent,  $f_n$  est un endomorphisme continu, car combinaison linéaire d'itérés de  $f$ . Soit  $x \in C$ . Comme  $f$  laisse stable  $C$ , il en est de même pour ses itérés :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad f^k(x) \in C.$$

L'ensemble  $C$  étant convexe, il est stable par passage au barycentre à coefficients positifs

$$(cf. exercice 5.5 de la page 238). En particulier, on a  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \in C$ .$$

2. Comme  $C$  est compact, il est borné donc inclus dans une boule  $B_f(0, M)$ .

Soit  $y \in f_n(C)$ . On a, en notant  $x$  un antécédent de  $y$  par  $f_n$  :

$$f(y) - y = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(x) - \sum_{k=0}^n f^k(x) \right) = \frac{1}{n} (f^n(x) - x).$$

Comme  $x$  et  $f^n(x)$  sont dans  $C$ , et par définition de  $M$ , on a  $\|f^n(x) - x\| \leq 2M$ , ce qui offre :

$$\|f(y) - y\| \leq \frac{2M}{n}.$$

3. Comme  $C$  est non vide, les ensembles  $f_n(C)$  sont tous non vides. On peut donc considérer  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \in f_n(C).$$

Comme  $C$  est stable par chaque  $f_n$ , la suite  $(x_n)$  est à valeurs dans  $C$ .

Comme  $C$  est compact, on peut en extraire une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})$ .

D'après la question 2, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{2M}{\varphi(n)} \rightarrow 0.$$

Notons  $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$ . Comme  $f$  est continue, on a  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell)$ , puis :

$$\|f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \rightarrow \|f(\ell) - \ell\|.$$

Il en résulte que  $\|f(\ell) - \ell\| = 0$ , i.e.  $f(\ell) = \ell$ .

- 7.10** 1. Soit  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  une suite convergente. Fixons  $\varepsilon > 0$ . En notant  $\ell = \lim u_n$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad d(u_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq n_0 \quad d(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

Donc  $(u_n)$  est une suite de Cauchy.

2. Supposons  $E$  de dimension finie. Soit  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  une suite de Cauchy.

- En utilisant la définition pour  $\varepsilon = 1$ , on peut considérer un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq n_0 \quad d(u_n, u_p) \leq 1.$$

En particulier, pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $\|u_n - u_{n_0}\| \leq 1$ , c'est-à-dire  $u_n \in B_f(u_{n_0}, 1)$ . Il en résulte que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée, donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  également.

- On peut donc considérer  $R > 0$  tel que la suite  $(u_n)$  soit à valeurs dans la boule fermée  $B_f(0, R)$  qui, puisque  $E$  est de dimension finie, est un compact. Par conséquent, pour prouver que la suite  $(u_n)$  converge, il suffit de prouver qu'elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.
- Soit  $a_1$  et  $a_2$  deux valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ . Montrons que  $a_1 = a_2$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

- \* La suite  $(u_n)$  étant de Cauchy, il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq n_0 \quad d(u_n, u_p) \leq \varepsilon.$$

- \* Puisque  $a_1$  est valeur d'adhérence de  $(u_n)$ , on peut trouver  $n_1 \geq n_0$  tel que  $d(u_{n_1}, a_1) \leq \varepsilon$ .

- \* De même on peut trouver  $n_2 \geq n_0$  tel que  $d(u_{n_2}, a_2) \leq \varepsilon$ .

On a alors, par inégalité triangulaire :

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, u_{n_1}) + d(u_{n_1}, u_{n_2}) + d(u_{n_2}, a_2) \leq 3\varepsilon.$$

Cela étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $d(a_1, a_2) = 0$ , i.e.  $a_1 = a_2$ .

- 7.11** 1. Les  $K_n$  étant tous non vides, on peut considérer une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in K_n.$$

Comme le compact  $K_0$  contient tous les autres, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est en particulier une suite à valeurs dans  $K_0$ . Par compacité de  $K_0$ , on peut en extraire une sous-suite convergente  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ; notons  $x$  la limite d'une telle sous-suite.

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Le caractère emboîté de la suite  $(K_n)$  assure que la suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est à valeurs dans  $K_p$ ; il en est alors *a fortiori* de même pour la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \geq p}$ ; le caractère fermé (car compact) de  $K_p$  assure alors que  $x \in K_p$ .

On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad x \in K_p \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

D'où le caractère non vide de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

2. Pour montrer que  $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ , fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons :

$$K_n = \{x \in K : f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Alors, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

- par continuité de la fonction  $f_n$ , l'ensemble  $K_n$  est un fermé du compact  $K$ , donc est compact ;
- la décroissance de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  entraîne  $K_{n+1} \subset K_n$ .

Par conséquent,  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de compacts emboîtés. Si ces compacts étaient tous non vides, la première question offrirait le caractère non vide de l'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , mais alors un élément  $a$  appartenant à cette intersection vérifierait :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(a) \geq \varepsilon,$$

ce qui contredirait l'hypothèse initiale imposant  $f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Par conséquent, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $K_{n_0} = \emptyset$ . Mais alors, les compacts  $K_n$  étant emboîtés, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad K_n = \emptyset \quad \text{autrement dit} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat.

**7.12** 1. Soit  $A$  une partie de  $E$ .

- Si  $A$  rencontre tout ouvert non vide, alors en particulier  $A$  est d'intersection non vide avec toute boule ouverte de rayon strictement positif. Par définition de la densité, cela prouve que  $A$  est dense dans  $E$ .
- Réciproquement, supposons  $A$  dense dans  $E$ . Alors  $A$  rencontre toute boule de rayon strictement positif. Soit  $U$  un ouvert non vide. Considérons  $x \in U$ ; puisque  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$ . On a alors  $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ , donc  $A \cap U \neq \emptyset$ .

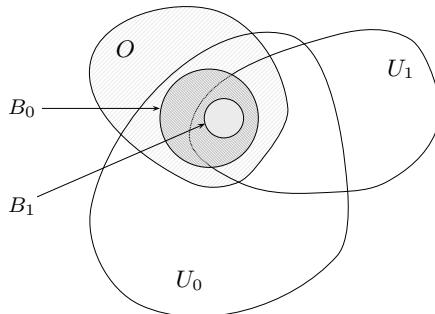
**Remarque** L'hypothèse «  $E$  de dimension finie » n'est pas utile pour cette question.

2. (a) Construisons une telle suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence.

- **Construction de  $B_0$ .** Comme  $U_0$  est dense, l'ensemble  $U_0 \cap O$  est non vide; comme c'est un ouvert (car intersection de deux ouverts), il est d'intérieur non vide, i.e. contient au moins une boule ouverte  $B_0$  de rayon non nul.
- **Construction de  $B_n$ .** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ; supposons  $B_0, \dots, B_{n-1}$  construites. Comme  $U_n$  est dense et  $B_{n-1}$  ouverte, l'ensemble  $U_n \cap B_{n-1}$  est non vide, donc, étant ouvert, il contient au moins une boule ouverte  $B_n$  de rayon non nul.

La suite de boules  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite vérifie bien les conditions souhaitées.

*Le dessin ci-contre illustre la construction des deux premières boules  $B_0$  et  $B_1$  (bien sûr, il n'est pas réaliste car ne retranscrit pas le caractère dense des ouverts  $U_0$  et  $U_1$ ).*



(b) Montrons que l'intersection :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

est dense. D'après la première question, une partie est dense si, et seulement si, elle rencontre tout ouvert non vide. Considérons donc une partie ouverte non vide  $O$  et montrons que :

$$A \cap O \neq \emptyset.$$

Considérons une suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boules ouvertes telle que construite à la question précédente. Notons alors  $F_n$  la boule fermée de même centre que  $B_n$  et de rayon deux fois plus petit. On obtient ainsi une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boules fermées emboîtées et non vides. Toute boule fermée étant compacte en dimension finie, on peut appliquer le théorème des compacts emboîtés (cf. première question de l'exercice 7.11 de la page 309) : l'intersection  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est non vide.

Si  $x$  est un élément de cette intersection, alors  $x$  appartient :

- à chacun des ouverts  $U_n$  puisque  $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \subset B_n \subset U_n$  ;
- à  $O$  puisque  $F_0 \subset B_0 \subset O$ .

Cela prouve que  $A \cap O \neq \emptyset$ .

- 7.13** 1. Il est clair que si  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors sa boule unité fermée est compacte (cf. théorème 16 de la page 297).
2. (a) **Remarque** L'existence de  $x \in E \setminus F$  vient du fait que, comme  $F$  est de dimension finie et que  $E$  ne l'est pas,  $F$  est un sous-espace strict de  $E$ .

- i. Il s'agit de prouver que l'application  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  admet un minimum.  

$$\begin{aligned} u &\mapsto d(x, u) \end{aligned}$$

Fixons  $b \in F$  ; notons  $r = d(x, b)$ . L'ensemble  $F \cap B_f(x, r)$  est une partie de  $F$ , fermée comme intersection de fermés ( $F$  est fermé car de dimension finie), et bornée, donc c'est un compact, toujours car  $F$  est de dimension finie. L'application  $f$  est continue, donc sa restriction au compact  $F \cap B_f(x, r)$ , non vide car contenant  $b$ , est bornée et atteint ses bornes. En particulier, cette restriction possède un minimum  $m$ .

Puisque  $\forall u \in F \setminus B_f(x, r) \quad f(u) \geq f(b)$ , on en déduit que  $f$  est minorée par  $\min(f(b), m)$ . Ce minorant étant atteint par  $f$ , c'est un minimum.

- ii. Comme  $x \notin F$ , on a  $y \neq x$ . En posant  $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ , on constate que :
- le vecteur  $u$  est unitaire donc  $d(u, F) \leq d(u, 0) = \|u\| = 1$  ;
  - pour tout  $z \in F$ , on a :

$$\|u-z\| = \frac{1}{\|x-y\|} \times \|x - (y + \|x-y\|z)\|.$$

Comme  $y + \|x-y\|z \in F$ , on a :

$$\|x - (y + \|x-y\|z)\| \geq d(x, F) = \|x-y\|,$$

et donc  $\|u-z\| \geq 1$  ; on a ainsi  $d(u, F) \geq 1$ .

Par double inégalité, on a obtenu  $d(u, F) = 1$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

(b) Construisons une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $B_f(0, 1)$  vérifiant :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq p \implies d(u_n, u_p) \geq 1. \quad (\star)$$

Cela donnera le résultat car une telle suite ne possède aucune sous-suite convergente. Construisons-la terme à terme.

- Fixons  $u_0$  un élément unitaire quelconque de  $E$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $u_0, \dots, u_{n-1}$  sont déjà construits. L'espace :

$$F_n = \text{Vect}(u_0, \dots, u_{n-1})$$

étant de dimension finie, la question 2(a)ii. assure que l'on peut choisir  $u_n$  un vecteur unitaire tel que  $d(u_n, F_n) = 1$ . Cet élément  $u_n$  vérifie alors :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad d(u_n, u_k) \geq 1.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi construite vérifie la propriété  $(\star)$ .

**7.14** 1. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\|u^{(p)} - \ell\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n^{(p)} - \ell_n|. \quad (\star\star)$$

- Un sens est évident. En effet, par définition de  $\|u^{(p)} - \ell\|$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \leq \|u^{(p)} - \ell\|;$$

donc, si  $u^{(p)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \ell$ , i.e. si  $\|u^{(p)} - \ell\| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $|u_n^{(p)} - \ell_n| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- Réciproquement, supposons que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  et montrons que  $\|u^{(p)} - \ell\| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons l'existence de  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall p \geq p_0 \quad \|u^{(p)} - \ell\| \leq \varepsilon. \quad (\diamond)$$

Soit  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2^a} \leq \varepsilon$ .

\* On a d'une part, par hypothèse de l'énoncé :

$$\forall n \geq a+1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \leq \frac{2}{2^n} \leq \frac{1}{2^a} \leq \varepsilon.$$

\* D'autre part, pour tout  $n \in \llbracket 0, a \rrbracket$ , la suite  $(|u_n^{(p)} - \ell_n|)$  tendant vers 0, on peut trouver un rang  $r_n$  tel que :

$$\forall p \geq r_n \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \leq \varepsilon.$$

En posant alors  $p_0 = \max(r_0, \dots, r_a)$ , et par disjonction de cas suivant que  $n \leq a$  ou  $n \geq a+1$ , on vérifie que :

$$\forall p \geq p_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(p)} - \ell_n| \leq \varepsilon.$$

Ce rang  $p_0$  satisfait donc la propriété  $(\diamond)$ , d'où le résultat.

2. Pour montrer que  $A$  est compact, donnons-nous  $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  et montrons qu'on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un élément de  $A$ .

Pour extraire de  $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  une sous-suite convergente, nous allons procéder par extractions successives ; cette démarche s'appelle le **procédé diagonal**.

Tout d'abord, on constate que la condition  $(\star)$  d'appartenance à  $A$  entraîne que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  est bornée.

- La suite  $(u_0^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  étant bornée, il est possible d'en extraire une sous-suite convergente  $(u_0^{(\varphi_0(p))})_{p \in \mathbb{N}}$ .

- La suite  $(u_1^{(\varphi_0(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente  $(u_1^{(\varphi_0 \circ \varphi_1(p))})_{p \in \mathbb{N}}$ . On constate alors que la suite  $(u_0^{(\varphi_0 \circ \varphi_1(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  est également convergente, comme sous-suite de la suite convergente  $(u_0^{(\varphi_0(p))})_{p \in \mathbb{N}}$ .
- On poursuit ainsi de suite : pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on dispose ainsi d'une fonction extractrice  $\varphi_n$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la suite  $(u_k^{(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  converge.
- Considérons alors la fonction  $\psi$  définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \psi(p) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p).$$

On constate que :

- \* la fonction  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante ; en effet, pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$p \leq \varphi_{p+1}(p) < \varphi_{p+1}(p+1),$$

chacune des deux inégalités étant due au fait que  $\varphi_{p+1}$ , en tant que fonction extractrice, est strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  ; en composant alors par l'application  $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p$ , strictement croissante comme composée d'applications strictement croissantes, il vient :

$$\psi(p) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p) < \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1}(p)) = \psi(p+1);$$

- \* pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(u_n^{(\psi(p))})_{p \geq n}$  est une sous-suite de la suite convergente  $(u_n^{(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_n(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  ; donc la suite  $(u_n^{(\psi(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  est convergente.

- Soit alors  $\ell$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ell_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_n^{(\psi(p))}.$$

Prouvons que  $u^{(\psi(p))} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \ell$ , ce qui donnera le résultat souhaité.

- \* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|u_n^{(\psi(p))} - \ell_n| \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- \* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(\psi(p))}| \leq \frac{1}{2^n}$ , ce qui donne, en passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $|\ell_n| \leq \frac{1}{2^n}$ , et assure que  $\ell \in A$ .

Le résultat de la question 1 appliqué à la suite  $(u^{(\psi(p))})_{p \in \mathbb{N}}$  permet alors de conclure.

**7.15** Soit  $(x, y) \in (A_1 \cup A_2)^2$ . Montrons que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A_1 \cup A_2$ .

- Si  $x$  et  $y$  appartiennent tous les deux à  $A_1$ , c'est évident car  $A_1$  est connexe par arcs. De même, si  $x$  et  $y$  appartiennent tous les deux à  $A_2$ , c'est évident.
- Supposons l'un des deux points dans  $A_1$  et l'autre dans  $A_2$ . Par symétrie en  $x$  et  $y$ , on peut supposer  $x \in A_1$  et  $y \in A_2$ . Comme  $A_1$  et  $A_2$  sont d'intersection non vide, il existe  $z \in A_1 \cap A_2$ .
  - \* Comme  $A_1$  est connexe par arcs,  $x$  et  $z$  sont reliés par un chemin dans  $A_1$ , donc dans  $A_1 \cup A_2$ .
  - \* Comme  $A_2$  est connexe par arcs,  $z$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A_2$ , donc dans  $A_1 \cup A_2$ .

Donc, par transitivité,  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A_1 \cup A_2$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

- 7.16** 1. Soit  $A$  une partie ouverte d'un espace vectoriel normé, et  $C$  une composante connexe par arcs de  $A$ . Soit  $x \in C$ . Montrons qu'il existe  $r > 0$  tel que la boule  $B(x, r)$  soit incluse dans  $C$ .

Comme  $A$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ . Soit alors  $y \in B(x, r)$ . Le segment  $[x, y]$ , étant inclus dans  $B(x, r)$ , l'est aussi dans  $A$ . Par suite  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin dans  $A$ , donc appartiennent à la même composante connexe. On a donc  $y \in C$ .

Cela montre que  $B(x, r) \subset C$ , et prouve le résultat souhaité.

2. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Les composantes connexes par arcs de  $U$  :

- d'une part, sont connexes par arcs, donc sont des intervalles (d'après la proposition 10 de la page 295) ;
- d'autre part, sont des ouverts de  $\mathbb{R}$  (car  $U$  est ouvert, et d'après la première question).

On en déduit que  $U$  s'écrit comme une réunion d'intervalles ouverts :

$$U = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I,$$

où  $\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $U$ .

Il reste à démontrer que cette réunion est dénombrable, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}$  est au plus dénombrable. Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , tout intervalle ouvert non vide contient au moins un rationnel. L'application qui à un rationnel de  $U$  associe l'unique composante connexe par arcs de  $U$  à laquelle il appartient constitue donc une application surjective de  $U \cap \mathbb{Q}$  vers  $\mathcal{C}$ . Comme  $U \cap \mathbb{Q}$  est dénombrable, cela assure que  $\mathcal{C}$  est au plus dénombrable.

- 7.17** 1. Si l'on considère deux points de  $\mathbb{U} \setminus \{a\}$ , ils peuvent s'écrire sous la forme  $e^{i\theta_1}$  et  $e^{i\theta_2}$  avec  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$ . Alors, les deux chemins :

$$\begin{array}{ccc} [\theta_1, \theta_2] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} [\theta_2, \theta_1 + 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

n'ayant en commun que les points  $e^{i\theta_1}$  et  $e^{i\theta_2}$ , l'un des deux ne contient pas  $a$ .

2. Supposons qu'une telle bijection  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow [0, 1]$  existe.

Alors, en notant  $a = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ , on constate que :

$$\varphi(\mathbb{U} \setminus \{a\}) = [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Ceci contredit la continuité de  $\varphi$  puisque l'ensemble  $\mathbb{U} \setminus \{a\}$  est connexe par arcs alors que  $[0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$  ne l'est pas.

- 7.18** 1. Considérons la restriction à  $A$  de la fonction indicatrice de  $B$  :

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Prouvons que la fonction  $\varphi$  est constante au voisinage de tout point, ce qui impliquera sa continuité. Soit  $a \in A$ .
  - \* Si  $a \in B$ , alors,  $B$  étant un ouvert de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $A \cap V \subset B$ . La restriction de  $\varphi$  à  $A \cap V$  est alors constante (égale à 1) donc continue.
  - \* Si  $a \notin B$ , alors,  $A \setminus B$  étant un ouvert de  $A$  (car  $B$  est un fermé de  $A$ ), il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $A \cap V \subset A \setminus B$ . La restriction de  $\varphi$  à  $A \cap V$  est alors constante (égale à 0) donc continue.

Dans les deux cas, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que la restriction  $\varphi|_{A \cap V}$  soit continue, donc continue, ce qui prouve que  $\varphi$  est continue en  $a$ , par caractère local de la continuité.

- Comme  $\varphi$  est continue et que  $A$  est connexe par arcs, le corollaire 12 de la page 296 assure que  $\varphi(A)$  est un intervalle. Comme  $\varphi(A) \subset \{0, 1\}$ , il en résulte que :
  - \* ou bien  $\varphi$  est constante égale à 0, c'est-à-dire  $B = \emptyset$  ;
  - \* ou bien  $\varphi$  est constante égale à 1, c'est-à-dire  $B = A$ .
- 2. Par l'absurde : supposons qu'il existe  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts relatifs de  $A$ , disjoints, non vides et tels que  $U_1 \cup U_2 = A$ .

Montrons que  $U_1$  est un fermé relatif de  $A$ . Pour cela, utilisons le fait que  $U_1$  est le complémentaire dans  $A$  de l'ouvert relatif  $U_2$ . Comme  $U_2$  est un ouvert relatif de  $A$ , on peut trouver  $O$  un ouvert de  $E$  tel que  $U_2 = A \cap O$ , et alors :

$$\begin{aligned} U_1 &= A \cap (E \setminus U_2) = A \cap (E \setminus (A \cap O)) \\ &= A \cap ((E \setminus A) \cup (E \setminus O)) \\ &= (\underbrace{A \cap (E \setminus A)}_{=\emptyset}) \cup (A \cap (E \setminus O)) = A \cap (E \setminus O). \end{aligned}$$

Comme  $O$  est un ouvert de  $E$ ,  $E \setminus O$  est un fermé de  $E$ . Par suite,  $U_1$  est un fermé relatif de  $A$  (car intersection de  $A$  avec un fermé).

Ainsi,  $U_1$  est à la fois un ouvert relatif de  $A$  et un fermé relatif de  $A$ . Comme  $U_1 \neq \emptyset$  et  $U_1 \neq A$  (car  $U_2 \neq \emptyset$ ), cela est en contradiction avec le résultat de la première question.

**7.19** Soit  $A_1$  et  $A_2$  deux points de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ . Montrons que l'on peut relier  $A_1$  et  $A_2$  par un chemin ne rencontrant pas  $X$ .

Raisonnons géométriquement.

- Il y a une infinité non dénombrable de droites passant par le point  $A_1$ . Ces droites ne se rencontrent qu'au point  $A_1$ , et comme  $A_1 \notin X$ , il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas  $X$  ; soit  $\mathcal{D}_1$  une telle droite.
- De même, parmi l'infinité non dénombrable de droites passant par le point  $A_2$ , il est possible d'en sélectionner une qui ne rencontre pas  $X$  et qui ne soit pas parallèle à  $\mathcal{D}_1$  ; soit  $\mathcal{D}_2$  une telle droite.

Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  n'étant pas parallèles, elles se croisent en un point  $B$  ; en parcourant alors de manière continue les segments  $[A_1B]$  puis  $[BA_2]$ , on passe de  $A_1$  à  $A_2$  sans rencontrer  $X$ .

**7.20** • Supposons  $A \times B$  connexe par arcs. Comme  $A$  et  $B$  sont non vides, on les obtient comme images respectives de  $A \times B$  par les applications continues :

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E & \text{et} & E \times F & \longrightarrow & F \\ (x, y) & \longmapsto & x & & (x, y) & \longmapsto & y. \end{array}$$

La connexité par arcs de  $A$  et  $B$  découle donc de celle de  $A \times B$ .

- Réciproquement, supposons  $A$  et  $B$  connexes par arcs.

Soit  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  deux éléments de  $A \times B$ .

Comme  $A$  et  $B$  sont connexes par arcs, il existe deux chemins  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$  et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$  reliant respectivement  $a_1$  à  $a_2$  et  $b_1$  à  $b_2$ . L'application :

$$t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

est alors un chemin reliant  $(a_1, b_1)$  à  $(a_2, b_2)$  dans  $A \times B$  (la continuité de  $\gamma$  provenant de celle de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ).

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**7.21** Si  $F = E$ , alors  $F$  est connexe par arcs. Supposons désormais  $F \subsetneq E$ .

Remarquons que,  $F$  étant fermé, on a  $\text{Fr}(F) = F \setminus \text{Int}(F)$ . En particulier,  $\text{Fr}(F)$  est inclus dans  $F$ .

Intéressons-nous aux composantes connexes par arcs de  $F$ . Comme  $\text{Fr}(F)$  est connexe par arcs et inclus dans  $F$ , tous les points de  $\text{Fr}(F)$  appartiennent à la même composante connexe par arcs de  $F$ . Par transitivité, il nous suffit donc de montrer que tous les autres points de  $F$ , c'est-à-dire ceux de  $\text{Int}(F)$ , appartiennent à la même composante connexe par arcs que ceux de  $\text{Fr}(F)$ . Concrètement, montrons que tout point de  $\text{Int}(F)$  est relié, par un chemin à valeurs dans  $F$ , à un point de  $\text{Fr}(F)$ .

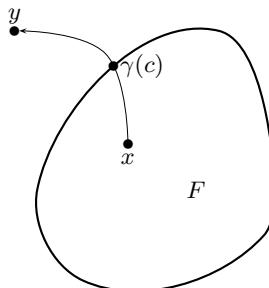
Soit  $x \in \text{Int}(F)$ . Prenons  $y \in E \setminus F$  (un tel  $y$  existe car  $F \subsetneq E$ ). Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  une application continue vérifiant  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$  (une telle application existe car l'espace  $E$  est connexe par arcs). Posons :

$$c = \inf \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \notin F\}.$$

Le réel  $c$  est bien défini car l'ensemble :

$$\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \notin F\}$$

est non vide (il contient 1) et minoré.



Si l'on montre que  $\gamma(c) \in \text{Fr}(F)$ , c'est terminé car alors la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[0, t_0]$  constituera un chemin de  $F$  reliant  $x$  à un point de  $\text{Fr}(F)$ . Montrer que  $\gamma(c) \in \text{Fr}(F)$  revient à montrer que :

$$\gamma(c) \in \text{Adh}(F) \cap \text{Adh}(E \setminus F).$$

- Tout d'abord, par définition de  $c$  comme borne inférieure, on peut trouver une suite  $(t_n)$  à valeurs dans  $[c, 1]$  tendant vers  $c$  et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma(t_n) \notin F.$$

Comme  $\gamma$  est continue, on a  $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(c)$ , ce qui montre que  $\gamma(c) \in \text{Adh}(E \setminus F)$ .

- Étant donné que  $\gamma(c) \in \text{Adh}(E \setminus F)$  et que  $x = \gamma(0) \in \text{Int}(F)$ , on est assuré que  $c > 0$ . Soit  $(t_n)$  une suite à valeurs dans  $[0, c[$  tendant vers  $c$ . Alors la suite  $(\gamma(t_n))$  est à valeurs dans  $F$  et, par continuité de  $\gamma$ , tend vers  $\gamma(c)$ . On a donc  $\gamma(c) \in \text{Adh}(F)$ .

D'où le résultat.

**7.22** 1. Supposons  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Comme  $H$  est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle  $f$  dont  $H$  est le noyau. On a alors, par surjectivité de  $f$  :

$$f(E \setminus H) = \mathbb{R}^*.$$

Comme  $f$  est continue (car c'est une application linéaire dont l'espace de départ  $E$  est de dimension finie) et que  $\mathbb{R}^*$  n'est pas connexe par arcs, cela prouve que  $E \setminus H$  ne l'est pas non plus.

2. Supposons  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $u$  un vecteur de  $E$  n'appartenant pas à  $H$ . Les sous-espaces  $H$  et  $\text{Vect}(u)$  sont alors supplémentaires dans  $E$ . Soit  $x$  et  $y$  deux vecteurs appartenant à  $E \setminus H$ . Ces vecteurs s'écrivent :

$$x = x_1 + \alpha u \quad \text{et} \quad y = y_1 + \beta u \quad \text{avec} \quad (x_1, y_1) \in H^2 \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2.$$

- Comme  $H$  est un sous-espace vectoriel, il est connexe par arcs. Il existe donc un chemin  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow H$  reliant  $x_1$  à  $y_1$ .

- Comme  $\mathbb{C}^*$  est connexe par arcs (cf. exemple 17 de la page 294), il existe un chemin  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  reliant  $\alpha$  à  $\beta$ .

L'application :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\longrightarrow E \setminus H \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) + \gamma_2(t)u\end{aligned}$$

est alors un chemin reliant  $x$  à  $y$  dans  $E \setminus H$ .

- 7.23** 1. Pour prouver que l'application  $\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto & \text{Com } A\end{array}$  est continue, prouvons que ses applications composantes dans la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  le sont.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $\text{Com } A$  vaut :

$$(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

où  $\Delta_{i,j}$  est le déterminant de la sous-matrice de  $A$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  : il s'agit donc d'une expression polynomiale en les coefficients de  $A$ . Cela prouve le résultat, puisque toute application polynomiale est continue.

2. Pour  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Com } A)^T.$$

- L'application  $\begin{array}{rcl}\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow & \mathbb{K} \\ A &\longmapsto & \det(A)\end{array}$  est continue et ne s'annule pas.
- D'autre part, l'application  $\begin{array}{rcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto & (\text{Com } A)^T\end{array}$  est continue comme composition des deux applications continues  $A \mapsto \text{Com } A$  et  $M \mapsto M^T$ .

Donc, par quotient d'applications continues, l'application :

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto & A^{-1}\end{array}$$

est continue.

- 7.24** 1. On a  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$  avec :

$$\begin{array}{rcl}\varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 &\longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) &\longmapsto & MN\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl}\varphi_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ A &\longmapsto & (A^T, A).\end{array}$$

- L'application  $\varphi_1$  est bilinéaire donc, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, elle est continue.
- L'application  $\varphi_2$  est linéaire donc, comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, elle est continue.

Donc, comme composée d'applications continues,  $\varphi$  est continue.

2. Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, il suffit de montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie fermée et bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Tout d'abord, une matrice  $A$  est orthogonale si, et seulement si,  $A^T A = I_n$ . L'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  apparaît donc comme l'image réciproque de  $\{I_n\}$  par l'application continue  $\varphi$ , donc est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- D'autre part,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est une partie bornée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , par exemple au sens de la norme infinie, puisque chaque coefficient d'une matrice orthogonale a une valeur absolue au plus égale à 1.

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**7.25** Procédons par caractérisation séquentielle des fermés. Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Supposons que les matrices  $A_p$  soient toutes de rang au plus  $r$  et montrons qu'il en est de même pour  $A$ .

Pour cela, montrons qu'aucune sous-matrice carrée de  $A$  de taille  $r+1$  n'est inversible.

Sélectionnons  $r+1$  indices de lignes et  $r+1$  indices de colonnes ; notons respectivement  $\tilde{A}$  et  $\tilde{A}_p$  les sous-matrices de  $A$  et  $A_p$  associées. Puisqu'il y a convergence coefficient par coefficient, la suite de matrices  $(\tilde{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\tilde{A}$  dans  $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$ .

Puisque les matrices  $A_p$  sont de rang au plus  $r$ , aucune des matrices  $\tilde{A}_p$  n'est inversible. On a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \det(\tilde{A}_p) = 0.$$

En passant à la limite, et par continuité du déterminant, on obtient  $\det(\tilde{A}) = 0$ .

Ainsi, la matrice  $\tilde{A}$  n'est pas inversible, d'où le résultat.

**7.26** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrons qu'il existe une suite  $(A_p)$  de matrices inversibles qui converge vers  $A$ .

L'application  $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$  est polynomiale de degré  $n$  (c'est la fonction polynomiale associée au polynôme caractéristique de  $-A$ ) ; elle s'annule donc en un nombre fini de points. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , notons :

$$A_p = 2^{-p} I_n + A.$$

D'après ce qui précède, les matrices  $A_p$  sont inversibles car de déterminant non nul, sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles. On peut donc trouver un rang  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p \geq p_0$ , la matrice  $A_p$  soit inversible.

La suite  $(A_p)_{p \geq p_0}$  est alors une suite de matrices inversibles convergeant vers  $A$ .

**7.27** 1. Munissons  $\mathbb{K}_n[X]$  de la base  $(L_0, \dots, L_n)$  des polynômes de Lagrange associés à la liste  $(0, 1, \dots, n)$ . Prouver la continuité de l'application  $\Psi : A \mapsto \chi_A$  revient à prouver celle de ses applications composantes dans la base  $(L_0, \dots, L_n)$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\begin{aligned} \Psi(A) = \chi_A &= \sum_{k=0}^n \chi_A(k) L_k \\ &= \sum_{k=0}^n \det(kI_n - A) L_k. \end{aligned}$$

Les applications composantes de  $\Psi$  sont donc les applications  $A \mapsto \det(kI_n - A)$ , pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  ; elles sont continues, par continuité des applications  $A \mapsto kI_n - A$  et  $\det$ .

2. Pour prouver que l'application  $\Pi$  n'est pas continue, exhibons un exemple.

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , posons :

$$A_p = \begin{pmatrix} 2^{-p} & & (0) \\ 0 & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

- la suite  $(A_p)$  converge vers la matrice nulle, dont le polynôme minimal est  $X$  ;
- pourtant, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\pi_{A_p} = X(X - 2^{-p}) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} X^2$ .

- 7.28** 1. Montrons que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est la limite d'une suite  $(A_p)$  de matrices diagonalisables. Toute matrice étant trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on peut écrire  $A = PTP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $T$  triangulaire supérieure.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $T$ , i.e. :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n & \end{pmatrix}.$$

Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont donc les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , notons  $T_p$  la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de  $T$  en modifiant uniquement sa diagonale, de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} & \end{pmatrix}.$$

Justifions que, pour  $p$  assez grand, les coefficients diagonaux de la matrice  $T_p$  sont deux à deux distincts :

- si les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont tous égaux, alors c'est vrai pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  ;
- sinon, alors en notant  $\delta$  l'écart minimal entre deux valeurs propres distinctes de  $A$ , i.e. :

$$\delta = \min_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ \lambda_i \neq \lambda_j}} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

la propriété est vérifiée dès que  $\frac{n}{p} < \delta$  ; en effet, dans ce cas, si l'on considère deux indices distincts  $i$  et  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , alors :

- \* si  $\lambda_i = \lambda_j$ , on a  $\lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}$  ;
- \* si  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , on a  $|\lambda_i - \lambda_j| \geq \delta$ , puis par inégalité triangulaire :

$$\left| \left( \lambda_i + \frac{i}{p} \right) - \left( \lambda_j + \frac{j}{p} \right) \right| = \left| (\lambda_i - \lambda_j) + \frac{i-j}{p} \right| \geq \underbrace{|\lambda_i - \lambda_j|}_{\geq \delta} - \underbrace{\frac{|i-j|}{p}}_{\leq \frac{n}{p} < \delta} > 0,$$

$$\text{donc } \lambda_i + \frac{i}{p} \neq \lambda_j + \frac{j}{p}.$$

Ainsi, pour  $p$  assez grand, la matrice  $A_p = PT_pP^{-1}$  est diagonalisable.

Enfin, puisque  $T_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} T$  et comme l'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$  est continue (car linéaire ayant un espace de départ de dimension finie), on a  $A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} A$ .

2. (a) Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $A$ . Alors on a :

$$iI_n - A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} iI_n - A$$

donc par continuité du déterminant :

$$\det(iI_n - A_p) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \det(iI_n - A) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \chi_{A_p}(i) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \chi_A(i).$$

Cela prouve le résultat car,  $i$  étant valeur propre de  $A$  (car  $i$  est valeur propre de  $B$ ), on a  $\chi_A(i) = 0$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

- (b) • Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice  $\mathbb{R}$ -diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , donc s'écrit :

$$\chi_M = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$$

et l'on a alors :

$$|\chi_M(i)|^2 = \prod_{k=1}^n |i - \lambda_k|^2 = \prod_{k=1}^n (\lambda_k^2 + 1) \geq 1.$$

- Du point précédent il résulte que si  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  est une suite de matrices  $\mathbb{R}$ -diagonalisables, alors on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |\chi_{A_p}(i)| \geq 1$$

donc, d'après la question précédente, la suite  $(A_p)$  ne tend pas vers  $A$ . Par conséquent, la matrice  $A$  n'appartient pas à l'adhérence de  $\mathcal{D}$ . Donc  $\mathcal{D}$  n'est pas dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**7.29** 1. (a) Puisque  $A_p \rightarrow A$ , on a :

$$\lambda I_n - A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \lambda I_n - A.$$

Ainsi, par continuité du déterminant :

$$\det(\lambda I_n - A_p) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \det(\lambda I_n - A) \quad \text{autrement dit} \quad \chi_{A_p}(\lambda) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \chi_A(\lambda).$$

D'où le résultat car,  $\lambda$  étant valeur propre de  $A$ , on a  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

- (b) Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres complexes de  $A_p$ , comptées avec multiplicités. On a alors :

$$\chi_{A_p} = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad \text{donc} \quad \chi_{A_p}(\lambda) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k).$$

En passant au module, on obtient :

$$|\chi_{A_p}(\lambda)| = \prod_{k=1}^n |\lambda - \lambda_k| \geq d(\lambda, \text{sp}(A_p))^n.$$

Le résultat de la question précédente assure alors que  $d(\lambda, \text{sp}(A_p)) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$ .

2. • Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrons que  $A \in \text{Int}(\mathcal{D})$ . Pour cela, considérons  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tendant vers  $A$  et montrons que pour  $p$  assez grand,  $A_p$  est diagonalisable.

Puisque  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont deux à deux distinctes, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que les boules  $B(\lambda_1, \varepsilon), \dots, B(\lambda_n, \varepsilon)$  soient deux à deux disjointes ( $\mathbb{K}$  étant naturellement muni de la valeur absolue ou du module).

Pour  $k \in [\![1, n]\!]$ , le résultat de la question 1 nous dit que :

$$d(\lambda_k, \text{sp}(A_p)) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0,$$

ce qui assure l'existence d'un rang  $r_k \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geq r_k \implies B(\lambda_k, \varepsilon) \cap \text{sp}(A_p) \neq \emptyset.$$

Posons  $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$  et prenons  $p \geq r$ . Il existe au moins une valeur propre de  $A_p$  dans chacune des  $n$  boules  $B(\lambda_1, \varepsilon), \dots, B(\lambda_n, \varepsilon)$ . Ces boules étant deux à deux disjointes, cela nous fournit  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes pour  $A_p$ , et assure que la matrice  $A_p$  est diagonalisable.

- Considérons maintenant  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonalisable dont les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes, et montrons que  $A \notin \text{Int}(\mathcal{D})$  en prouvant que  $A$  est la limite d'une suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de matrices non diagonalisables.

L'hypothèse faite sur  $A$  assure l'existence d'une valeur propre  $\lambda$  au moins double. La matrice  $A$  peut alors s'écrire :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & & & (0) \\ & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Posons alors, pour  $p \in \mathbb{N}$  :

$$A_p = PD_pP^{-1} \quad \text{avec} \quad D_p = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-p} & & (0) \\ 0 & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , la matrice  $D_p$  n'est pas diagonalisable. En effet, son endomorphisme canoniquement associé laisse stable le plan vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique, et l'endomorphisme induit correspondant n'est pas diagonalisable car a pour matrice  $\begin{pmatrix} \lambda & 2^{-p} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Par conséquent, les matrices  $A_p$  ne sont pas diagonalisables non plus. De plus, on a  $D_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} D$  et donc  $A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} A$ .

- 7.30** • Procédons par caractérisation séquentielle. Soit  $(A_p)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{T}_n$  convergant vers  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrons que  $A \in \mathcal{T}_n$ .

Pour cela, montrons que  $\text{sp}_{\mathfrak{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ . Soit  $\lambda \in \text{sp}_{\mathfrak{C}}(A)$ . Comme  $A_p \rightarrow A$ , on a :

$$\lambda I_n - A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \lambda I_n - A$$

donc par continuité du déterminant :

$$\chi_{A_p}(\lambda) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \chi_A(\lambda) = 0.$$

Or, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A_p$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc son polynôme caractéristique est unitaire et scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ . En écrivant  $\chi_{A_p}$  sous forme scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis en passant au module, on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |\chi_{A_p}(\lambda)| \geq |\text{Im } \lambda|^n.$$

Le fait que  $\chi_{A_p}(\lambda) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  assure alors que  $\text{Im } \lambda = 0$ , autrement dit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

- Prouvons désormais que  $\mathcal{T}_n = \text{Adh}(D_n)$ . Puisque  $\mathcal{T}_n$  est un fermé contenant  $D_n$ , on a  $\text{Adh}(D_n) \subset \mathcal{T}_n$ . Il reste à prouver l'autre inclusion.  
Soit  $A \in \mathcal{T}_n$ . Montrons que  $A \in \text{Adh}(D_n)$  en prouvant que  $A$  est limite d'une suite  $(A_p)$  à valeurs dans  $D_n$ .

Cela se fait par la même méthode que celle utilisée à la première question de l'exercice 7.28. Comme  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut écrire :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n & \end{pmatrix}.$$

Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont donc les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , notons  $T_p$  la matrice triangulaire supérieure obtenue à partir de  $T$  en modifiant uniquement sa diagonale de la manière suivante :

$$T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{p} & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{n}{p} & \end{pmatrix}$$

On justifie alors que, pour  $p$  assez grand, les coefficients diagonaux de la matrice  $T_p$  sont deux à deux distincts (cf. corrigé de l'exercice 7.28).

On obtient alors, en posant  $A_p = PT_pP^{-1}$  :

$$(\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A_p \in D_n) \quad \text{et} \quad A_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} A.$$

- 7.31** 1. Travaillant dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe une matrice triangulaire supérieure semblable à  $A$ , donc ayant la même classe de similitude. Sans perte de généralité, supposons donc  $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ .

Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ , ainsi que  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , notons  $A_\varepsilon$  la matrice de  $u$  dans la base :

$$(e_1, \varepsilon e_2, \varepsilon^2 e_3, \dots, \varepsilon^{n-1} e_n).$$

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A_\varepsilon$  est représentée ci-contre.

**Remarque** En notant  $P_\varepsilon = \text{Diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$ , on a :

$$A_\varepsilon = P_\varepsilon^{-1} A P_\varepsilon.$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{j-1} a_{1,j} \\ \vdots \\ \varepsilon^2 a_{j-2,j} \\ \varepsilon a_{j-1,j} \\ a_{j,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que la suite  $(A_{1/p})_{p \in \mathbb{N}^*}$  tend vers la matrice diagonale  $\text{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$  (la convergence s'obtenant facilement coefficient par coefficient). Cela prouve le résultat, puisque chacune des matrices  $A_{1/p}$  est semblable à  $A$ .

2. • Un sens découle de la question précédente. Celle-ci assure en effet l'existence d'une matrice diagonale dans l'adhérence de  $S(A)$ . Or, on sait qu'une partie fermée est égale à son adhérence. Donc, si  $S(A)$  est fermée, il existe une matrice diagonale dans  $S(A)$ , autrement dit  $A$  est diagonalisable.
- Réciproquement, supposons  $A$  diagonalisable.
- Montrons que  $S(A)$  est fermé par caractérisation séquentielle. Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in S(A)^{\mathbb{N}}$  une suite convergeant vers  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; montrons que  $B \in S(A)$ .
- \* La matrice  $A$  étant diagonalisable, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , scindé à racines simples, annulateur de  $A$ . Par continuité de l'application  $M \mapsto Q(M)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans lui-même, on a  $Q(A_p) \rightarrow Q(B)$ . Or, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la matrice  $A_p$  étant semblable à  $A$ , on a  $Q(A_p) = 0$ . Par passage à la limite, on en déduit que  $Q(B) = 0$ . Le polynôme  $Q$  étant scindé à racines simples, cela prouve que  $B$  est diagonalisable.
  - \* Pour conclure que  $A$  et  $B$  sont semblables, il suffit alors de prouver qu'elles ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicités, autrement dit même polynôme caractéristique. Par continuité de l'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique (cf. exercice 7.27 de la page 312), on a  $\chi_{A_p} \rightarrow \chi_B$ . Cela prouve que  $\chi_B = \chi_A$  car  $\forall p \in \mathbb{N} \quad \chi_{A_p} = \chi_A$ .

**7.32** 1. Notons  $t_{i,j}$  les coefficients de  $T$ .

- Comme  $T$  est triangulaire inversible, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Comme  $\mathbb{C}^*$  est connexe par arcs (cf. exemple 17 de la page 294), on peut considérer, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , un chemin  $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  reliant  $1$  à  $t_{k,k}$ .
- Pour  $x \in [0, 1]$ , notons  $M(x)$  la matrice suivante :

$$M(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & x t_{1,2} & \cdots & x t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n(x) \end{pmatrix}.$$

- \* Pour tout  $x \in [0, 1]$ , la matrice  $M(x)$  est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls.
- \* On a  $M(0) = I_n$  et  $M(1) = T$ .
- \* Enfin, l'application  $x \mapsto M(x)$  est continue, puisque chacune de ses applications composantes est continue.

L'application :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ x &\longmapsto M(x) \end{aligned}$$

est donc un chemin reliant  $I_n$  à  $T$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .

2. Montrons que tout élément de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  peut être relié à  $I_n$  par un chemin à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ . Toute matrice étant trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on peut considérer  $P$  inversible et  $T$  triangulaire supérieure telles que :

$$A = PTP^{-1}.$$

D'après la question précédente, il existe  $M : [0, 1] \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  reliant  $I_n$  à  $T$ . Il est alors facile de constater que l'application :

$$x \mapsto PM(x)P^{-1}$$

est un chemin reliant  $I_n$  à  $A$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .

## Chapitre 7. Compacité, connexité, dimension finie

**7.33** 1. (a) Posons, pour tout  $t \in [0, 1]$  :  $\gamma(t) = I_n + \lambda t E_{i,j}$ . Alors  $\gamma$  est un chemin reliant  $I_n$  à  $T$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , car :

- pour tout  $t \in [0, 1]$ , la matrice  $\gamma(t)$  est inversible, car triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls ;
- l'application  $\gamma$  est continue, puisque ses applications composantes le sont ;
- on a  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma(1) = T$ .

Donc  $T \in \mathcal{C}_0$ .

(b) On a  $D = I_n + (\mu - 1)E_{i,i}$ . En posant alors, pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\gamma(t) = I_n + t(\mu - 1)E_{i,i},$$

l'application  $\gamma$  est un chemin reliant  $I_n$  à  $D$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . Donc  $D \in \mathcal{C}_0$ .

(c) Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

En appliquant l'algorithme du pivot on sait, via des transvections et des échanges de lignes, transformer  $A$  en une matrice diagonale inversible. Dans cet algorithme, un échange est réalisé à chaque choix de pivot, afin de rendre le coefficient diagonal non nul si celui-ci l'est initialement. À ce moment précis, un tel échange peut être remplacé par la transvection  $L_j \leftarrow L_j + L_k$  où  $j$  est l'indice de la colonne considérée et  $k > j$  un indice tel que le coefficient d'indice  $(j, k)$  soit non nul.

Par conséquent :

- on sait transformer  $A$  en une matrice diagonale inversible, uniquement à l'aide de transvections sur les lignes ;
- puis, grâce à des dilatations de déterminant positif, transformer  $A$  en une matrice diagonale  $\tilde{A}$  dont la diagonale est constituée de  $\pm 1$ .

En notant  $M_1, \dots, M_N$  les matrices d'opérations élémentaires associées à ces transformations, on a :

$$\tilde{A} = M_N \cdots M_1 A.$$

Les questions précédentes nous permettent alors de considérer des chemins continus  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ , définis sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ , reliant  $I_n$  à  $M_1, \dots, M_N$  respectivement. L'application continue définie sur  $[0, 1]$  :

$$t \mapsto \gamma_N(t) \cdots \gamma_1(t) A$$

est alors un chemin reliant  $A$  et  $\tilde{A}$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ .

2. Supposons  $A$  et  $B$  semblables. On peut alors écrire :

$$A = P^{-1}BP \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Si  $B \in \mathcal{C}_0$ , on peut considérer  $\gamma$  un chemin reliant  $B$  à  $I_n$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Alors l'application :

$$t \mapsto P^{-1}\gamma(t)P$$

est continue, à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , et relie  $A$  à  $I_n$ , d'où  $A \in \mathcal{C}_0$ .

3. Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , notons  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Alors l'application définie sur  $[0, \pi]$  :

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & R_\theta & \\ & & \ddots \\ (0) & & R_\theta \end{pmatrix} \quad (\text{avec } q \text{ blocs } R_\theta)$$

est continue, à valeurs dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , et relie  $I_n$  à  $J_{p,q}$ .

4. Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\det A > 0$ . D'après la question 1(c),  $A$  est reliée dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  à une matrice diagonale avec une diagonale constituée de  $\pm 1$  ; notons  $\tilde{A}$  une telle matrice et  $\gamma$  un chemin associé.

L'application  $t \mapsto \det(\gamma(t))$  est alors continue et ne s'annule pas, donc est de signe constant. On en déduit que  $\det A$  et  $\det \tilde{A}$  sont de même signe, et donc  $\det \tilde{A} > 0$ .

Il en résulte que la diagonale de  $\tilde{A}$  est constituée par un nombre pair de  $-1$ , donc  $\tilde{A}$  est semblable à une matrice de la forme  $J_{p,q}$ .

Les questions 2 et 3 assurent alors que  $\tilde{A} \in \mathcal{C}_0$ , puis, par transitivité, que  $A \in \mathcal{C}_0$ .

5. • Il résulte de la question précédente que l'ensemble  $\mathcal{C}_+$  est connexe par arcs : en effet, deux éléments de  $\mathcal{C}_+$  sont reliés dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  à  $I_n$ , donc, par transitivité, son reliés entre eux.
- En notant alors  $A$  la matrice diagonale  $\text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , on constate que  $\mathcal{C}_-$  est l'image de  $\mathcal{C}_+$  par l'application continue  $M \mapsto AM$ . La connexité par arcs de  $\mathcal{C}_+$  offre alors celle de  $\mathcal{C}_-$ .
  - Puisque  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$ , cet ensemble apparaît comme la réunion de deux parties connexes par arcs. Comme il n'est lui-même pas connexe par arcs (car son image par l'application continue  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathbb{R}^*$ , qui n'est pas connexe par arcs), on en déduit le résultat souhaité :  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  possède deux composantes connexes par arcs, qui sont  $\mathcal{C}_+$  et  $\mathcal{C}_-$ .



# Chapitre 8 : Fonctions vectorielles de la variable réelle

<b>I</b>	<b>Dérivation . . . . .</b>	<b>338</b>
1	Dérivée en un point . . . . .	338
2	Fonction dérivée . . . . .	340
3	Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	340
4	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	343
<b>II</b>	<b>Intégration sur un segment . . . . .</b>	<b>346</b>
1	Fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ . . . . .	346
2	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	347
3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	347
<b>III</b>	<b>Primitives et intégrales . . . . .</b>	<b>350</b>
1	Primitives des fonctions continues . . . . .	350
2	Théorème fondamental . . . . .	350
3	Inégalité des accroissements finis . . . . .	351
<b>IV</b>	<b>Formules de Taylor . . . . .</b>	<b>351</b>
1	Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	351
2	Inégalité de Taylor-Lagrange . . . . .	352
3	Développements limités . . . . .	352
4	Formule de Taylor-Young . . . . .	353
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>362</b>

# Fonctions vectorielles de la variable réelle

Le but de ce chapitre est de généraliser aux fonctions vectorielles les notions de dérivation, d'intégration sur un segment et de primitive déjà vues en première année pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel *non nul* de dimension finie, et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

## I Dérivation

### 1 Dérivée en un point

On considère ici une fonction  $f : I \rightarrow E$  et  $a$  un point de  $I$ .

#### Définition 1

L'application  $f$  est **dérivable** en  $a$  si son **taux d'accroissement en  $a$**  :

$$\begin{aligned}\tau_a(f) : I \setminus \{a\} &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}\end{aligned}$$

admet une limite dans  $E$  en  $a$ , alors appelée **dérivée de  $f$  en  $a$**  et notée :

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dt}(a).$$

**Remarque** La dérivée de  $f$  en  $a$  est parfois appelée **vecteur dérivé** de  $f$  en  $a$ .

#### Proposition 1

La fonction  $f$  est dérivable en  $a \in I$  si, et seulement s'il existe un vecteur  $\ell \in E$  et une fonction  $\alpha : I \rightarrow E$  tendant vers 0 en  $a$  tels que :

$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t - a)\ell + (t - a)\alpha(t).$$

On a alors  $f'(a) = \ell$ .

Démonstration page 354

**Interprétation cinématique** Lorsque la fonction  $f$  représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur  $f'(t_0)$  représente la **vitesse instantanée** du point à l'instant  $t_0$ .

**Proposition 2**

Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$ .

Démonstration page 354

**Rappel : fonctions coordonnées** Si l'on munit  $E$  d'une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , les **fonctions coordonnées** de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont les fonctions  $f_1, \dots, f_n$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , définies par :

$$\forall t \in I \quad f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i.$$

**Proposition 3**

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si, et seulement si, chacune de ses fonctions coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  est dérivable en  $a$ .

Dans ce cas, si l'on note  $f_i$  ces fonctions coordonnées, on a :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i.$$

Démonstration page 354

**Principe de démonstration.** Écrire les fonctions coordonnées du taux d'accroissement de  $f$  en  $a$ .

**Remarque** On retrouve ainsi qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable en  $a$  si, et seulement si, les fonctions  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le sont puisque ces dernières sont les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $(1, i)$  du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .

**Ex. 1.** Considérons l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie par  $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$ .

Les fonctions coordonnées dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ( $t \mapsto \cos t$ ,  $t \mapsto \sin t$ ,  $t \mapsto \cos 2t$  et  $t \mapsto \sin 2t$ ) étant dérivables en tout point,  $f$  est dérivable en tout point et l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix}.$$

**Dérivabilité à droite et à gauche****Définition 2**

- Si  $a$  n'est pas l'extrémité droite de  $I$ , on dit que  $f$  est **dérivable à droite** en  $a$  si la restriction  $f|_{I \cap [a, +\infty[}$  est dérivable en  $a$ . Par définition, la **dérivée à droite de  $f$  en  $a$**  est  $(f|_{I \cap [a, +\infty[})'(a)$ . Elle est notée  $f'_d(a)$ .
- On définit de même la **dérivabilité à gauche** et la **dérivée à gauche** en  $a$  lorsque  $a$  n'est pas l'extrémité gauche de  $I$ . La dérivée à gauche se note  $f'_g(a)$ .

**Remarques**

- Si  $I$  admet un maximum  $a$ , la notion de dérivabilité à droite en  $a$  n'a pas de sens, puisque  $I \cap [a, +\infty[ = \{a\}$ . Dans ce cas, la dérivabilité à gauche de  $f$  en  $a$  est équivalente à sa dérivabilité en  $a$  et, sous réserve d'existence,  $f'_g(a) = f'(a)$ .
- De la même façon, si  $I$  admet un minimum  $a$ , seule la dérivabilité à droite a un sens et elle est alors équivalente à la dérivabilité en  $a$ .

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

**Résultats** Soit  $a$  un point intérieur à  $I$ .

- La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en  $a$  et  $f'_g(a) = f'_d(a)$ .
- Une fonction dérivable à droite et à gauche en  $a$  est continue en  $a$ , car elle est continue à droite et à gauche en  $a$ .

### 2 Fonction dérivée

**Définition 3**

On dit que  $f$  est **dérivable** sur  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ . On note alors  $f'$  ou  $\frac{df}{dt}$ , l'application qui à tout  $t \in I$  associe le vecteur dérivé de  $f$  en  $t$ . On l'appelle l'**application dérivée** de  $f$ , ou plus simplement la **dérivée de  $f$** .

**Notation** L'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  dans  $E$  se note  $\mathcal{D}(I, E)$ .

**Proposition 4**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . La fonction  $f : I \rightarrow E$  est dérivable sur  $I$  si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans  $\mathcal{B}$  sont dérivables sur  $I$ .

Exo 8.1 Les fonctions coordonnées de  $f'$  sont alors les dérivées des fonctions coordonnées de  $f$ .

**Démonstration.** C'est la version globale de la proposition 3. □

### Caractérisation des fonctions constantes

**Théorème 5**

Une application est constante sur l'intervalle  $I$  si, et seulement si, elle est dérivable et de dérivée nulle en tout point de  $I$ .

**Démonstration.** Utilisons, en passant par les fonctions coordonnées, le résultat déjà connu pour les fonctions numériques. Puisque  $E$  est de dimension finie, la fonction  $f$  est constante si, et seulement si, ses fonctions coordonnées le sont. Puisque l'on travaille sur un intervalle, cela revient à dire que les fonctions coordonnées ont une dérivée nulle, ce qui, en utilisant la proposition 3, revient à dire que  $f'$  est nulle. □

### 3 Opérations sur les fonctions dérivables

**Proposition 6**

Soit  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow E$  deux fonctions dérivables en  $a \in I$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$  et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

**Démonstration.** Il suffit de considérer les fonctions coordonnées et d'utiliser le résultat analogue vu pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . □

**Corollaire 7 (Linéarité de la dérivation)**

Soit  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow E$  deux fonctions dérivables sur  $I$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors  $\lambda f + \mu g$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

**Remarque** Il s'ensuit que  $\mathcal{D}(I, E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$  et que l'application  $f \mapsto f'$  définie sur  $\mathcal{D}(I, E)$  à valeurs dans  $\mathcal{F}(I, E)$  est linéaire.

**Proposition 8**

Soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie. Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  alors  $L \circ f$  est dérivable en  $a$  et :

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a)).$$

**Démonstration.** Comme  $E$  est de dimension finie, l'application linéaire  $L$  est continue. Si  $\tau_a(f)$  est le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$ , alors, puisque  $L$  est linéaire,  $L \circ \tau_a(f)$  est le taux d'accroissement de  $L \circ f$  en  $a$ . Puisque  $\tau_a(f) \xrightarrow{a} f'(a)$ , on a, par continuité de  $L$  :

$$L \circ \tau_a(f) \xrightarrow{a} L(f'(a)).$$

Cela prouve la dérivabilité de  $L \circ f$  en  $a$  et donne  $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$ . □

**Corollaire 9**

Soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie. Si  $f$  est dérivable sur  $I$  alors  $L \circ f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

**Notation** La fonction  $L \circ f$  se note également  $L(f)$ .

Plus généralement, si  $M : E_1 \times \cdots \times E_p \rightarrow F$  est une application multilinéaire et si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions de  $I$  dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, alors on note :

$$\begin{aligned} M(f_1, \dots, f_p) : I &\longrightarrow F \\ t &\longmapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t)). \end{aligned}$$

**Proposition 10**

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  des espaces vectoriels de dimension finie et  $B$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $G$ .

Si  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  sont dérivables en  $a \in I$ , alors  $B(f, g)$  est dérivable en  $a$  et :

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

Démonstration page 354

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

### Corollaire 11

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  des espaces vectoriels de dimension finie et  $B$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $G$ .

Si  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $B(f, g)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exo  
8.2

**Ex. 2.** Si  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et si  $f$  est dérivable sur  $I$  à valeurs dans  $E$ , alors  $\varphi f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$

**Ex. 3.** Soit  $E$  un espace euclidien.

- Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors  $(f | g)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g').$$

- En particulier, si  $f$  est dérivable sur  $I$ , l'application  $\|f\|^2$  est dérivable sur  $I$  et l'on a :

$$(\|f\|^2)' = 2(f | f'). \quad (*)$$

- Si de plus  $f$  ne s'annule pas, la fonction  $\sqrt{\phantom{x}}$  étant dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\|f\| = \sqrt{\|f\|^2}$ , on déduit de  $(*)$  :

$$\|f\|' = \frac{(f | f')}{\|f\|}.$$

- On déduit également de  $(*)$  que si  $f$  est dérivable et l'application  $\|f\|$  constante, alors, pour tout  $t \in I$ , les vecteurs  $f(t)$  et  $f'(t)$  sont orthogonaux.

### Proposition 12

Soit  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimension finie, avec  $p \geq 1$ , ainsi que  $M$  une application multilinéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans  $F$ .

Si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions de  $I$  dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, dérivables en  $a \in I$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable en  $a$  et :

$$\begin{aligned} M(f_1, \dots, f_p)'(a) &= M(f'_1, f_2, \dots, f_p)(a) + M(f_1, f'_2, \dots, f_p)(a) \\ &\quad + \dots + M(f_1, f_2, \dots, f'_p)(a). \end{aligned}$$

Démonstration page 355

**Principe de démonstration.** Adapter la démonstration de la proposition 10 de la page précédente.

### Corollaire 13

Soit  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimension finie, avec  $p \geq 1$ , ainsi que  $M$  une application multilinéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans  $F$ .

Si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions dérivables de  $I$  dans  $E_1, \dots, E_p$  respectivement, alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable et :

$$M(f_1, \dots, f_p)' = M(f'_1, f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f'_2, \dots, f_p) + \dots + M(f_1, f_2, \dots, f'_p).$$

Exo  
8.3

**Ex. 4.** En particulier, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  de dimension  $p$  et si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions dérivables définies sur  $I$  à valeurs dans  $E$ , alors  $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_p))' = \det_{\mathcal{B}}(f'_1, f_2, \dots, f_p) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f'_2, \dots, f_p) + \dots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f'_p).$$

### Proposition 14

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles, ainsi que  $f : I \rightarrow E$  et  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions telles que  $\varphi(J) \subset I$ . Si  $\varphi$  est dérivable en  $a \in J$  et  $f$  est dérivable en  $b = \varphi(a)$ , alors  $f \circ \varphi$  est dérivable en  $a$  et l'on a :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'(\varphi(a)).$$

**Démonstration.** En fixant une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$ , les fonctions coordonnées de  $f \circ \varphi$  vérifient  $(f \circ \varphi)_i = f_i \circ \varphi$ . Le résultat découle alors du résultat vu pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  $\square$

### Corollaire 15

Étant donné deux intervalles  $I$  et  $J$ , ainsi que deux fonctions dérivables  $f : I \rightarrow E$  et  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ , la fonction  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $I$  et l'on a :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

**Ex. 5.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  une fonction dérivable. La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(t) = f(t^2)$  est alors dérivable et  $g'(t) = 2tf'(t^2)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Attention** Bien écrire  $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$  lorsque  $f$  est une fonction vectorielle, le point désignant la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Le produit  $(f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$  n'a de sens que lorsque  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{K}$  (scalaires devant les vecteurs).

## 4 Fonctions de classe $C^k$

### Définition 4

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $f : I \rightarrow E$ .

On dit que  $f$  est  **$k$  fois dérivable** s'il existe  $(\varphi_0, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{F}(I, E)^{k+1}$  tel que :

$$f = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \varphi'_i = \varphi_{i+1}.$$

Une telle suite est alors unique. On note  $f^{(k)} = \varphi_k$  la **dérivée  $k$ -ième** de  $f$ .

### Notations

- La dérivée  $k$ -ième se note également  $\frac{d^k f}{dt^k}$ .
- $\mathcal{D}^k(I, E)$  désigne l'ensemble des fonctions  $k$  fois dérивables de  $I$  dans  $E$ .

**Interprétation cinématique** Lorsque la fonction  $f$  représente le mouvement d'un point matériel en fonction du temps, le vecteur  $f''(t_0)$  représente le **vecteur accélération** du point à l'instant  $t_0$ .

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

**Remarque** Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  et  $f : I \rightarrow E$ . La fonction  $f$  est  $i + j$  fois dérivable si, et seulement si, elle est  $i$  fois dérivable et  $f^{(i)}$  est  $j$  fois dérivable. Dans ce cas :

$$f^{(i+j)} = (f^{(i)})^{(j)}.$$

En particulier,  $f$  est  $i + 1$  fois dérivable si, et seulement si, elle est dérivable et  $f'$  est  $i$  fois dérivable.

### Définition 5

Soit  $f : I \rightarrow E$ .

- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La fonction  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^k$**  si elle est  $k$  fois dérivable et  $f^{(k)}$  est continue.
- La fonction  $f$  est de **classe  $\mathcal{C}^\infty$**  si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Notation** Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on note  $\mathcal{C}^k(I, E)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  dans  $E$ .

### Remarques

- Les fonctions de classe  $\mathcal{C}^0$  sont les fonctions continues.
- On a l'inclusion  $\mathcal{C}^1(I, E) \subset \mathcal{C}^0(I, E)$ , car toute fonction dérivable est continue.
- Plus généralement, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $\mathcal{C}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E)$ .
- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{F}(I, E)$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  si, et seulement si,  $f$  est dérivable et  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  ou encore si, et seulement si,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $f^{(k)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .  
Lorsque l'on procède par récurrence, c'est en général en utilisant l'une de ces deux propriétés que l'on montre qu'une fonction est de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- On a  $\mathcal{C}^\infty(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^k(I, E)$ .

### Proposition 16 (Linéarité de la dérivation)

Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un espace vectoriel et l'application  $f \mapsto f^{(k)}$  est linéaire.  
Démonstration page 355

**Principe de démonstration.** Procéder par récurrence.

### Corollaire 17

$\mathcal{C}^\infty(I, E)$  est un espace vectoriel et l'application  $f \mapsto f'$  est un endomorphisme.

**Remarque** Si l'on note  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(I, E)$  définie par  $\Delta(f) = f'$ , on a  $f^{(k)} = \Delta^k(f)$ , pour  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

**Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$** 

Dans cette section,  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

**Proposition 18**

Soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $F$ . Si  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$  alors  $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ . De plus, si  $k$  est entier, on a :

$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

Démonstration page 356

**Corollaire 19**

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ . La fonction  $f : I \rightarrow E$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  le sont. En notant alors  $f_i$  ces fonctions coordonnées, lorsque  $k$  est entier, on a :

$$f^{(k)} = \sum_{i=1}^n f_i^{(k)} e_i.$$

Démonstration page 356

**Proposition 20 (Formule de Leibniz)**

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et  $B$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $G$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$  et  $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$ , alors  $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ . De plus, si  $k$  est un entier, la dérivée d'ordre  $k$  de  $B(f, g)$  est donnée par la *formule de Leibniz* :

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)}).$$

Démonstration page 356

**Principe de démonstration.** Procéder par récurrence et utiliser la relation de Pascal sur les coefficients binomiaux.

**Proposition 21**

Soit  $E_1, \dots, E_p$ ,  $F$  des espaces vectoriels de dimension finie, avec  $p \geq 1$ , et  $M$  une application multilinéaire de  $E_1 \times \dots \times E_p$  dans  $F$ . Si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $I$  dans  $E_1, \dots, E_p$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Démonstration page 357

**Principe de démonstration.** On procède par récurrence. Pour montrer que  $M(f_1, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , on prouve que sa dérivée est de classe  $\mathcal{C}^k$  en utilisant le corollaire 13.

**Proposition 22**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles, ainsi que deux fonctions  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{IR})$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ . La fonction  $f \circ \varphi$  est élément de  $\mathcal{C}^k(J, E)$ .

Démonstration page 358

**Principe de démonstration.** Pour établir le résultat pour  $k \in \mathbb{N}$ , procéder par récurrence, en appliquant la proposition 20.

## II Intégration sur un segment

Dans cette section, les fonctions sont définies sur un segment  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ) et à valeurs dans  $E$ .

### 1 Fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$

#### Définition 6

On dit que  $f : [a, b] \rightarrow E$  est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on puisse prolonger  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  en une fonction continue sur  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Une telle subdivision est dite **adaptée** à  $f$ .

**Reformulation** La fonction  $f$  est continue par morceaux s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  de  $[a, b]$  telle que :

- pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la fonction  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  soit continue,
- pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la fonction  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  admette des limites finies en  $a_i$  et  $a_{i+1}$ .

**Notation** On note  $\mathcal{CM}([a, b], E)$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ .

**Ex. 6.** Toute fonction continue est continue par morceaux.

**Ex. 7.** On dit que  $f : [a, b] \rightarrow E$  est **en escalier** s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  de  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la fonction  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  soit constante. Une telle fonction est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .

#### Proposition 23

Une fonction définie sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$  est continue par morceaux si, et seulement si, chacune de ses fonctions coordonnées l'est.

Démonstration page 358

**Principe de démonstration.** Utiliser les caractérisations de la limite et de la continuité d'une fonction à l'aide de ses fonctions coordonnées.

#### Proposition 24

Toute fonction continue par morceaux définie sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$  est bornée.

Démonstration page 358

#### Proposition 25

L'ensemble  $\mathcal{CM}([a, b], E)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}([a, b], E)$ .

Démonstration page 358

## 2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

### Proposition 26

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Le vecteur  $\sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i \right) e_i$  ne dépend alors pas de la base de  $E$  choisie.

Ce vecteur est l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

Démonstration page 359

**Principe de démonstration.** Utiliser la linéarité de l'intégrale des fonctions scalaires et utiliser la formule de changement de base pour donner les coordonnées du vecteur  $\sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i \right) e_i$  dans une nouvelle base  $\mathcal{B}'$ .

**Notation** L'intégrale sur  $[a, b]$  est notée  $\int_{[a, b]} f$  ou  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(t) dt$ .

**Ex. 8.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction en escalier et  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  une subdivision adaptée. En notant  $u_i$  la valeur de  $f$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ , pour  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) u_i.$$

**Point méthode** Une fois une base de  $E$  fixée, pour établir des propriétés de l'intégrale d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow E$ , on peut souvent se ramener aux fonctions coordonnées.

## 3 Propriétés de l'intégrale

### Linéarité

### Proposition 27

L'application  $f \mapsto \int_a^b f$  définie sur  $\mathcal{CM}([a, b], E)$  à valeurs dans  $E$  est linéaire.

**Démonstration.** Conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , appliquée aux fonctions coordonnées.  $\square$

### Corollaire 28

Deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de  $[a, b]$  ont des intégrales égales.

Démonstration page 359

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

### Image par une application linéaire

#### Proposition 29

Soit  $L$  une application linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $F$ .

Si  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ , alors  $L \circ f \in \mathcal{CM}([a, b], F)$  et :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f.$$

Démonstration page 359

**Ex. 9.** Soit  $u \in E$ , ainsi que  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. L'application  $L : x \mapsto xu$  définie sur  $\mathbb{R}$  étant linéaire, on obtient :

$$\int_a^b \varphi(t) u dt = \left( \int_a^b \varphi(t) dt \right) u.$$

**Ex. 10.** Si  $(u, v) \in E^2$ , alors la fonction  $t \mapsto u + tv$  définie sur  $[a, b]$  est continue et :

$$\int_a^b (u + tv) dt = \int_a^b u dt + \int_a^b tv dt = (b - a) u + \frac{b^2 - a^2}{2} v.$$

### Relation de Chasles

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Comme pour les fonctions scalaires, on dit que  $f : I \rightarrow E$  est **continue par morceaux sur  $I$**  si la restriction de  $f$  à tout segment de  $I$  est continue par morceaux.

**Notation** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Pour tout couple  $(a, b) \in I^2$ , on étend la notation  $\int_a^b f$  au cas où  $a \geq b$ , de la manière suivante :

$$\int_a^b f = - \int_b^a f \quad \text{si } a > b \quad \text{et} \quad \int_a^b f = 0 \quad \text{si } a = b.$$

**Attention** La relation  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$  n'est valable que si  $a \leq b$ .

Sans hypothèse sur  $a$  et  $b$ , on peut écrire :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f(t)\| dt,$$

où  $[a, b]$  est le segment d'extrémités  $a$  et  $b$ .

Avec les notations précédentes, on obtient la proposition suivante.

#### Proposition 30 (Relation de Chasles)

Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux et  $(a, b, c) \in I^3$ . On a :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

**Démonstration.** On applique la relation de Chasles aux fonctions coordonnées. □

## Sommes de Riemann

### Définition 7

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle **somme de Riemann d'ordre  $n$**  associée à  $f$  le vecteur :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

**Rappel** Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ . Alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

En appliquant ce résultat à chacune des fonctions coordonnées d'une fonction continue par morceaux, on obtient le théorème suivant.

### Théorème 31 (Convergence des sommes de Riemann)

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ . Alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

## Inégalités

### Proposition 32 (Inégalité triangulaire)

On a pour toute fonction  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$  :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|.$$

Démonstration page 360

**Principe de démonstration.** D'abord démontrer le résultat pour les fonctions en escalier. Étendre ensuite le résultat aux fonctions continues par morceaux à l'aide de sommes de Riemann.

Rappelons qu'une fonction  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$  est bornée, donc  $\|f\|_\infty$  est définie.

### Corollaire 33

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ . Alors :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

**Démonstration.** En effet :

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\| \leq \int_a^b \|f\|_\infty dt = (b-a) \|f\|_\infty.$$

□

## III Primitives et intégrales

### 1 Primitives des fonctions continues

#### Définition 8

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E)$ . Une application  $g$  de  $I$  dans  $E$  est une **primitive** de  $f$  si  $g$  est dérivable sur  $I$  avec  $g' = f$ .

#### Proposition 34

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E)$ . Deux primitives sur  $I$  de  $f$  diffèrent d'une constante.

**Démonstration.** En effet, la dérivée de leur différence est nulle sur l'intervalle  $I$ .  $\square$

**Remarque** La réciproque est immédiate : si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G = F + a$ , où  $a \in E$ , alors  $G$  est une primitive de  $f$ .

## 2 Théorème fondamental

#### Théorème 35

Soit  $f \in \mathcal{C}(I, E)$  et  $a \in I$ .

1. L'application :

$$\begin{aligned} g_a : I &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \int_a^t f(s) \, ds \end{aligned}$$

est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

2. Pour toute primitive  $g$  de  $f$  et tout couple  $(\alpha, \beta)$  de  $I^2$ , on a :

$$\int_\alpha^\beta f(t) \, dt = g(\beta) - g(\alpha).$$

Démonstration page 360

**Principe de démonstration.** Raisonnez sur les fonctions coordonnées.

**Remarque** Si la fonction  $f$  est seulement continue par morceaux sur  $I$ , l'application  $g_a$  du théorème précédent est encore continue puisque localement lipschitzienne, comme on peut le prouver en utilisant l'inégalité :

$$\|g_a(x) - g_a(y)\| \leq |x - y| \sup_J \|f\|,$$

où  $J$  est un segment contenant  $a$ ,  $x$  et  $y$ .

De plus on a la dérivabilité de  $g_a$  en tout point  $x$  de continuité de  $f$  avec  $g'_a(x) = f(x)$ .

#### Corollaire 36

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ . Pour tout  $(a, b) \in I^2$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) \, dt.$$

**Corollaire 37 (Changement de variable)**

Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction continue et  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ .

Pour tout  $(a, b) \in J^2$ , on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b \varphi'(s) f(\varphi(s)) ds.$$

**Démonstration.** Si  $g$  est une primitive de  $f$ , alors  $g \circ \varphi$  est une primitive de  $\varphi' \cdot (f \circ \varphi)$ .

Par suite :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = \int_a^b \varphi'(s) f(\varphi(s)) ds. \quad \square$$

**3 Inégalité des accroissements finis****Théorème 38 (Inégalité des accroissements finis)**

Soit  $f \in C(I, E)$  de classe  $C^1$  sur l'intérieur de  $I$ .

S'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall t \in \overset{\circ}{I} \quad \|f'(t)\| \leq \lambda$ , alors on a :

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \|f(b) - f(a)\| \leq \lambda |b - a|.$$

**Démonstration.** Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire 36 de la page précédente et de l'inégalité triangulaire pour les intégrales.  $\square$

**Interprétation cinématique** Un mobile qui se déplace à une vitesse instantanée de norme inférieure à  $v$  pendant un temps  $t$ , se trouve au maximum à une distance  $vt$  de son point de départ.

**IV Formules de Taylor**

Dans cette section,  $p$  est un entier naturel.

**1 Formule de Taylor avec reste intégral****Théorème 39 (Formule de Taylor avec reste intégral)**

Étant donné une fonction  $f \in C^{p+1}(I, E)$ , on a pour tout  $(a, b) \in I^2$  :

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_p$$

avec :

$$R_p = \int_a^b \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) dx.$$

**Démonstration.** La formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$  aux fonctions coordonnées de  $f$ .  $\square$

**Remarque** Avec le changement de variable  $[x = a+t(b-a)]$ , on obtient l'expression suivante du reste intégral :

$$R_p = (b-a)^{p+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(a + t(b-a)) dt,$$

qui peut être utile lors de majorations de normes.

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

**Ex. 11.** Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors la fonction :

$$g : x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f(t) dt$$

est de classe  $C^{p+1}$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on a  $g^{(p+1)} = f$ . En effet, on a :

$$g : x \mapsto F(x) - \sum_{k=0}^p \frac{(x-a)^k}{k!} F^{(k)}(a),$$

où  $F$  est une primitive  $(p+1)$ -ième de  $f$ , ce qui démontre, par opérations sur les fonctions de classe  $C^{p+1}$ , que  $g$  est une fonction de classe  $C^{p+1}$ . La relation  $g^{(p+1)} = f$  vient de ce que la dérivée  $p+1$ -ième d'une fonction polynomiale de degré au plus  $p$  est la fonction nulle.

## 2 Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème 40 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**

Étant donné une fonction  $f \in C^{p+1}(I, E)$ , on a pour tout  $(a, b) \in I^2$  :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} M_{p+1}$$

où  $M_{p+1}$  est un majorant de  $\|f^{(p+1)}\|$  entre  $a$  et  $b$ .

Démonstration page 360

## 3 Développements limités

**Proposition 41**

Si  $f \in C(I, E)$  admet un développement limité à l'ordre  $p$  en  $a \in I$  :

$$f(x) = \alpha_0 + (x-a)\alpha_1 + \cdots + (x-a)^p \alpha_p + o((x-a)^p),$$

alors toute primitive  $g$  de  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $p+1$  en  $a$ , obtenu en primitivant terme à terme le développement limité de  $f$  :

$$g(x) = g(a) + (x-a)\alpha_0 + \frac{(x-a)^2}{2}\alpha_1 + \cdots + \frac{(x-a)^{p+1}}{p+1}\alpha_p + o((x-a)^{p+1}).$$

Démonstration page 361

**Convention** Dans ce contexte, la notation  $o((x-a)^p)$  signifie une certaine fonction  $\varphi : I \rightarrow E$  telle que  $\|\varphi(x)\| = o((x-a)^p)$ .

Le développement limité de  $f$  de la proposition 41 ci-dessus peut donc aussi s'écrire :

$$f(x) = \alpha_0 + (x-a)\alpha_1 + \cdots + (x-a)^p \alpha_p + (x-a)^p \varepsilon(x),$$

où  $\varepsilon : I \rightarrow E$  est une fonction tendant vers 0 en  $a$ .

## 4 Formule de Taylor-Young

### Théorème 42 (Formule de Taylor-Young)

Toute fonction  $f \in \mathcal{C}^p(I, E)$  admet un développement limité à l'ordre  $p$  en  $a \in I$  donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^p).$$

Démonstration page 361

**Ex. 12.** On peut dériver terme à terme le développement limité à l'ordre  $p$  d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^p$ .

En effet, d'après l'unicité du développement limité, il s'agit du développement de Taylor-Young de  $f$ , dont la dérivée est le développement de  $f'$ .

**Remarque** On notera bien la différence entre d'un côté la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange et de l'autre la formule de Taylor-Young. Cette dernière donne un résultat local sur le comportement de la fonction au voisinage de  $a$ . Les deux premières sont des résultats globaux, donnant des informations sur les valeurs prises par la fonction sur la totalité de l'intervalle.

## Démonstrations

**Proposition 1**

- Supposons qu'il existe  $\ell \in E$  et  $\alpha : I \rightarrow E$  tels que  $\alpha(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$  et :

$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t - a)\ell + (t - a)\alpha(t).$$

Alors, pour tout  $t \in I \setminus \{a\}$ , on a  $\alpha(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - \ell$  et, puisque  $\alpha \xrightarrow[a]{} 0$  :

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \ell.$$

- Réciproquement, supposons  $f$  dérivable en  $a$ . Posons  $\alpha : I \rightarrow E$  l'application définie par :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - f'(a) & \text{si } t \neq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition du vecteur dérivé, il existe un réel  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in I \setminus \{a\} \quad |t - a| \leq \eta \implies \|\alpha(t)\| \leq \varepsilon,$$

donc, puisque  $\alpha(a) = 0$ , on a :

$$\forall t \in I \quad |t - a| \leq \eta \implies \|\alpha(t)\| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $\alpha$  a bien pour limite 0 en  $a$ .

**Proposition 2** On prolonge la fonction  $\tau_a(f)$  en  $a$  en posant  $\tau_a(f)(a) = f'(a)$ . Puisque  $f$  est dérivable en  $a$ , ce prolongement est continu en  $a$  et l'on a :

$$\forall t \in I \quad f(t) = f(a) + (t - a)\tau_a(f)(t),$$

ce qui prouve la continuité de  $f$  en  $a$ .

**Proposition 3** Soit  $t \in I \setminus \{a\}$ . On a :

$$\tau_f(a)(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(t) - f_i(a)}{t - a} e_i = \sum_{i=1}^n \tau_{f_i}(a)(t) e_i.$$

Le résultat attendu découle du fait que l'existence d'une limite pour une fonction équivaut à l'existence d'une limite pour chacune de ses fonctions coordonnées.

De plus, si  $f$  est dérivable en  $a$ , on a en passant à la limite dans la relation précédente :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i.$$

**Proposition 10** Si  $a \in I$ .

Pour tout  $t \in I \setminus \{a\}$  on a, en utilisant la bilinéarité de  $B$  :

$$\begin{aligned}\tau_a(B(f, g))(t) &= \frac{B(f(t), g(t)) - B(f(a), g(a))}{t - a} \\ &= \frac{B(f(t), g(t)) - B(f(a), g(t)) + B(f(a), g(t)) - B(f(a), g(a))}{t - a} \\ &= B\left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a}, g(t)\right) + B\left(f(a), \frac{g(t) - g(a)}{t - a}\right).\end{aligned}$$

Puisque les espaces  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, l'application bilinéaire  $B$  est continue. De plus, la fonction  $g$  étant dérivable en  $a$ , elle est continue. Enfin, puisque les taux d'accroissement  $\tau_a(f)$  et  $\tau_a(g)$  ont des limites en  $a$ , on déduit de l'expression ci-dessus que  $\tau_a(B(f, g))$  a une limite finie en  $a$  et :

$$\tau_a(B(f, g))(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)),$$

ce qui prouve la dérivabilité de  $B(f, g)$  en  $a$  et l'égalité :

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

**Proposition 12** Soit  $a \in I$ .

Pour tout  $t \in I$ , on a par « télescopage » et multilinéarité de  $M$  :

$$\begin{aligned}M(f_1(t), \dots, f_p(t)) - M(f_1(a), \dots, f_p(a)) &= \\ \sum_{i=1}^p \left( M(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f_i(t), \dots, f_p(t)) - M(f_1(a), \dots, f_i(a), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t)) \right) &= \\ \sum_{i=1}^p M(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), f_i(a) - f_i(t), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t)) &=\end{aligned}$$

Ainsi, si  $t$  et  $a$  sont distincts, toujours par multilinéarité de  $M$ , on a :

$$\begin{aligned}\tau_a(M(f_1, \dots, f_p))(t) &= \frac{M(f_1(t), \dots, f_p(t)) - M(f_1(a), \dots, f_p(a))}{t - a} \\ &= \sum_{i=1}^p M\left(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), \frac{f_i(t) - f_i(a)}{t - a}, f_{i+1}(t), \dots, f_p(t)\right).\end{aligned}$$

Puisque les espaces  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie, l'application multilinéaire  $M$  est continue. De plus, les fonctions  $f_i$  étant dériviales en  $a$ , elles sont continues en  $a$ . Enfin, puisque les taux d'accroissement  $\tau_a(f_i)$  ont des limites en  $a$ , le taux d'accroissement  $\tau_a(M(f_1, \dots, f_p))$  a une limite finie en  $a$  d'après l'expression ci-dessus et :

$$\tau_a(M(f_1, \dots, f_p))(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} M(f'_1(a), f_2(a), \dots, f_p(a)) + \dots + M(f_1(a), \dots, f_{p-1}(a), f'_p(a)),$$

ce qui prouve la dérivabilité de  $M(f_1, \dots, f_p)$  en  $a$  et l'égalité :

$$M(f_1, \dots, f_p)'(a) = \sum_{i=1}^p M(f_1, \dots, f_{i-1}, f'_i, f_{i+1}, \dots, f_p)(a).$$

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

**Proposition 16** Notons  $D : f \mapsto f'$  l'application définie sur  $\mathcal{D}(I, E)$ , espace des fonctions dérivables sur  $I$  et à valeurs dans  $E$ , à valeurs dans  $\mathcal{F}(I, E)$ . D'après le corollaire 7 de la page 341, l'application  $D$  est linéaire.

Montrons par récurrence que  $\mathcal{C}^k(I, E)$  est un espace vectoriel et que l'application  $D_k : f \mapsto f^{(k)}$  est linéaire sur  $\mathcal{C}^k(I, E)$  à valeurs dans  $\mathcal{C}(I, E)$ .

- On sait que  $\mathcal{C}^0(I, E)$  est un espace vectoriel. De plus,  $D_0$  est l'identité de  $\mathcal{C}^0(I, E)$ , donc linéaire.
- Supposons le résultat vrai pour un  $k \in \mathbb{N}$ .

On a  $\mathcal{C}^{k+1}(I, E) = D^{-1}(\mathcal{C}^k(I, E))$ , donc par linéarité de  $D$  et l'hypothèse de récurrence, on conclut que  $\mathcal{C}^{k+1}(I, E)$  est un espace vectoriel.

Par ailleurs,  $D_{k+1} = D_k \circ \Delta_{k+1}$ , où  $\Delta_{k+1}$  est la restriction de  $D$  à  $\mathcal{C}^{k+1}(I, E)$ , donc linéaire. Ainsi, par composition,  $D_{k+1}$  est linéaire, à valeurs dans  $\mathcal{C}(I, E)$ .

**Proposition 18** Démontrons ce résultat par récurrence pour  $k \in \mathbb{N}$ , le cas des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  s'en déduisant immédiatement.

- Pour  $k = 0$ , c'est le résultat sur la composition d'une application linéaire et d'une application continue.
- Supposons le résultat vrai pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  et considérons  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$ . Alors  $f$  est dérivable et, par le corollaire 9 de la page 341,  $L \circ f$  est dérivable avec  $(L \circ f)' = L \circ f'$ . D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à  $f'$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^k$ , la fonction  $L \circ f'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et :

$$(L \circ f')^{(k)} = L \circ (f')^{(k)} = L \circ f^{(k+1)}.$$

Cela prouve que  $L \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  et l'égalité  $(L \circ f)^{(k+1)} = L \circ f^{(k+1)}$ .

**Corollaire 19** Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $e_i^*$  la forme linéaire coordonnée d'indice  $i$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  et  $\varepsilon_i : \mathbb{IK} \longrightarrow E$ . Ces applications sont linéaires.  
 $t \longmapsto te_i$ .

Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction.

- Supposons  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les fonctions coordonnées  $f_i = e_i^* \circ f$  sont alors de classe  $\mathcal{C}^k$ , d'après la proposition 18.
- Supposons que les fonctions coordonnées soient toutes de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $\varepsilon_i \circ f_i$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , d'après la proposition 18. Comme on a  $f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \circ f_i$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , comme somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Proposition 20** Soit  $f : I \rightarrow E$  et  $g : I \rightarrow F$  deux fonctions.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $\mathcal{H}_k$  : « Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors la fonction  $B(f, g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $B(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)})$  » et montrons  $\mathcal{H}_k$  par récurrence.

- La propriété  $\mathcal{H}_0$  est évidente.
- Supposons  $\mathcal{H}_k$  vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  et supposons que  $f$  et  $g$  soient de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

Puisque  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , elles sont de classe  $\mathcal{C}^k$  et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)}).$$

Pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , les fonctions  $f^{(j)}$  et  $g^{(k-j)}$  sont respectivement de classe  $k+1-j > 0$  et  $j+1 > 0$ . Il vient alors du corollaire 11 de la page 342 par linéarité que  $B(f, g)^{(k)}$  est dérivable et :

$$B(f, g)^{(k+1)} = (B(f, g)^{(k)})' = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)})',$$

donc, toujours à l'aide du corollaire 11 de la page 342 :

$$\begin{aligned} B(f, g)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left( B(f^{(j+1)}, g^{(k-j)}) + B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) \\ &\quad \text{(réindexation)} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) + \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) \\ &\quad \text{(car } \binom{k}{k+1} = 0\text{)} \\ &= \binom{k}{0} B(f, g^{(k+1)}) + \sum_{j=1}^{k+1} \left( \binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right) B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}) \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B(f^{(j)}, g^{(k+1-j)}). \end{aligned} \quad \text{(relation de Pascal)}$$

Cette dernière expression de  $B(f, g)^{(k+1)}$  montre, par opérations sur les fonctions continues, que  $B(f, g)^{(k+1)}$  est une fonction continue. La propriété est ainsi démontrée.

On en déduit que si  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, E)$  et  $g \in \mathcal{C}^\infty(I, F)$ , alors  $B(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(I, G)$ .

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

**Proposition 21** Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que si les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est également de classe  $\mathcal{C}^k$ .

- Le cas  $k = 0$ . Les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  étant continues, la fonction  $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_p(t))$  est continue. Les espaces  $E_1, \dots, E_p$  étant de dimension finie, l'application multilinéaire  $M$  est continue. Ainsi, par composition,  $M(f_1, \dots, f_p)$  est continue.
- Supposons la propriété vraie pour un  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $f_1, \dots, f_p$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  de  $I$  dans  $E_1, \dots, E_p$ . Comme elles sont dérivables, le corollaire 13 de la page 342 assure que  $M(f_1, \dots, f_p)$  est dérivable et :

$$M(f_1, \dots, f_p)' = M(f'_1, f_2, \dots, f_p) + M(f_1, f'_2, \dots, f_p) + \dots + M(f_1, f_2, \dots, f'_p).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $f'_1$  et  $f_2, \dots, f_p$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^k$ , on obtient que  $M(f'_1, f_2, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . De même pour les autres termes, ce qui prouve que  $M(f_1, \dots, f_p)'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , i.e.  $M(f_1, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . La conclusion suit.

On en déduit que si  $f_1, \dots, f_p$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition 22** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $\mathcal{H}_k$  : « Pour  $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ , la fonction  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  ».

- La propriété est immédiate pour  $k = 0$  (composition de fonctions continues).
- Supposons le résultat vrai pour un entier  $k \in \mathbb{N}$ . Considérons deux fonctions  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}(J, \mathbb{R})$  telles que  $\varphi(J) \subset I$ . Ces deux fonctions sont dérivables, donc, d'après le corollaire 15 de la page 343,  $f \circ \varphi$  est dérivable et :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

L'application  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  définie sur  $\mathbb{K} \times E$  est bilinéaire. Puisque  $E$  et  $\mathbb{K}$  sont de dimension finie et que  $\varphi'$  et  $f' \circ \varphi$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  (d'après l'hypothèse de récurrence), on en déduit que  $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , c'est-à-dire que  $(f \circ \varphi)'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , i.e.  $f \circ \varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

**Proposition 23** Munissons  $E$  d'une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On note  $f_i$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans cette base.

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux et  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  une subdivision adaptée.

Par caractérisation de la continuité et de la limite en termes de fonctions coordonnées, pour tout  $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_i|_{[a_j, a_{j+1}]}$  est continue et a des limites finies en  $a_j$  et  $a_{j+1}$ . Par suite, toutes les fonctions coordonnées sont continues par morceaux.

- Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction dont les fonctions coordonnées  $f_i$  sont continues par morceaux. Pour chacune de ces fonctions  $f_i$  il existe une subdivision qui lui est adaptée. En prenant une subdivision  $\sigma$  plus fine que chacune d'entre elles, celle-ci est adaptée à toutes les applications  $f_i$ . Toujours en utilisant la caractérisation de la limite et de la continuité en termes de fonctions coordonnées, il vient que  $f$  est une fonction continue par morceaux et que  $\sigma$  lui est adaptée.

**Proposition 24** Cela résulte immédiatement du fait que toutes les fonctions coordonnées dans une base de  $E$  donnée, étant des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ , sont bornées.

**Proposition 25** Le fait qu'une combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux reste une fonction continue par morceaux repose sur la propriété analogue vérifiée par les fonctions coordonnées. On conclut en remarquant que la fonction nulle est continue par morceaux.

**Proposition 26** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note  $(f_1, \dots, f_n)$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et l'on pose :

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i \right) e_i.$$

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une autre base de  $E$ . Posons  $P = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On note également  $(g_1, \dots, g_n)$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . Montrons que :

$$I = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b g_i \right) e'_i.$$

La formule de changement de bases donne :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} g_j \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Par conséquent, par linéarité de l'intégrale (des fonctions scalaires) :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i \right) e_i = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b \sum_{j=1}^n a_{i,j} g_j \right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \int_a^b g_j \right) e_i \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b g_j \right) \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b g_j \right) e'_j, \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule annoncée.

**Corollaire 28** Leur différence est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, donc, en revenant à la définition, est d'intégrale nulle.

**Proposition 29** On munit  $E$  et  $F$  des bases  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ .

Notons  $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $L$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ . En notant  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , par linéarité de  $L$ , on a :

$$L \left( \int_a^b f \right) = L \left( \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b f_j \right) e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b f_j \right) L(e_j).$$

Par ailleurs, toujours par linéarité :

$$L \circ f = \sum_{j=1}^n f_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n f_j \left( \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i \right) = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j \right) e'_i,$$

donc  $L \circ f$  est continue par morceaux, puisque chaque fonction coordonnée est une combinaison linéaire de fonctions continues par morceaux. Par linéarité de l'intégrale scalaire, on a :

$$\int_a^b L \circ f = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \int_a^b f_j \right) e'_i = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b f_j \right) \left( \sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i \right) = \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b f_j \right) L(e_j).$$

La conclusion suit.

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

### Proposition 32

- Pour une fonction en escalier  $\varphi$ , le résultat découle de l'inégalité triangulaire :

$$\left\| \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) c_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1} - a_i) \|c_i\|,$$

où  $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$  est une subdivision adaptée à  $\varphi$  et, pour  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on note  $c_i$  la valeur prise par  $\varphi$  sur  $]a_i, a_{i+1}[$ .

- Démontrons le résultat dans le cas général. Soit donc  $f \in \mathcal{CM}([a, b], E)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $\varphi_n$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) & \text{si } t \in \left[a + k \frac{b-a}{n}, a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right] \\ f(b) & \text{si } t = b. \end{cases}$$

La fonction  $\varphi_n$  est en escalier et :

$$\int_a^b \varphi_n(t) dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

est une somme de Riemann de la fonction  $f$ . De même,  $\|\varphi_n\|$  est une fonction en escalier et  $\int_a^b \|\varphi_n\| dt$  est une somme de Riemann pour la fonction  $\|f\|$ . On a donc d'après le premier point, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\left\| \int_a^b \varphi_n(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt, \quad (*)$$

et d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann :

$$\int_a^b \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité  $(*)$ , en utilisant la continuité de la norme, on obtient :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (*)$$

### Théorème 35

- L'unicité est une conséquence de la proposition 34 de la page 350. En fixant une base de  $E$  et notant  $f_i$  les fonctions coordonnées, qui sont continues, les fonctions  $t \mapsto \int_a^t f_i(s) ds$  en sont des primitives qui s'annulent en 0, donc  $g_a$  est une primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ , d'après la proposition 3 de la page 339.
- Le résultat est évident pour l'application  $g_a$  d'après la relation de Chasles. Il est vrai pour toute primitive, puisque les primitives de  $f$  diffèrent toutes de  $g_a$  d'une constante.

**Théorème 40** Puisque la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ , la fonction  $f^{(p+1)}$  est continue sur le segment d'extrémités  $a$  et  $b$ , et donc la fonction  $\|f^{(p+1)}\|$  l'est également. Cela justifie l'existence de  $M_{p+1}$ .

Pour établir le résultat, utilisant l'expression du reste donnée en remarque page 351, il suffit de remarquer :

$$\|R_p\| \leq |b-a|^{p+1} \int_0^1 M_{p+1} \frac{(1-t)^p}{p!} dt = \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} M_{p+1}.$$

**Proposition 41**

- Commençons par montrer que si  $h \in \mathcal{C}(I, E)$  vérifie  $h(x) = o((x-a)^p)$ , alors :

$$\int_a^x h(t) dt = o((x-a)^{p+1}).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in I \quad |t-a| \leq \eta \implies \|h(t)\| \leq \varepsilon |t-a|^p.$$

Pour  $x \in I$  tel que  $|x-a| \leq \eta$ , on a :

$$\left\| \int_a^x h(t) dt \right\| \leq |x-a| \sup_{[a,x]} \|h\| \leq \varepsilon |x-a|^{p+1},$$

ce qui prouve le résultat.

- Comme :

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t) dt,$$

on obtient le résultat par linéarité de l'intégrale, en appliquant le premier point à la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^p \alpha_k (x-a)^k.$$

**Théorème 42** Démontrons le résultat par récurrence.

- Si  $p=0$ , la continuité de  $f$  donne  $f(x) = f(a) + o(1)$ .
- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Supposons le résultat vrai pour toute fonction de classe  $\mathcal{C}^{p-1}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^p(I, E)$ . On a  $f' \in \mathcal{C}^{p-1}(I, E)$  et :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^{p-1}),$$

puis par primitivation :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^p).$$

## S'entraîner et approfondir

### Dérivation

#### 8.1 Hélices

→<sup>340</sup> Soit  $E$  un espace euclidien et  $v \in E$  non nul.

Déterminer les fonctions dérivables  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  telles que  $(f' | v)$  soit une fonction constante.

#### 8.2 Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une application dérivable.

→<sup>342</sup>  $t \longmapsto M(t)$

1. Montrer que la fonction  $t \mapsto M(t)M(t)^T$  est dérivable.
2. On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  la matrice  $M(t)$  est orthogonale. Montrer alors que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t)M(t)^T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

#### 8.3 Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note $\chi_M$ l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$

$t \longmapsto \det(tI_n - M)$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_i$  la matrice extraite de  $A$  obtenue en supprimant la ligne et la colonne d'indice  $i$ .

1. Exprimer  $\chi'_A$  en fonction des  $\chi_{A_i}$ .
2. En déduire le coefficient en  $X$  dans le polynôme caractéristique de  $A$ .

#### 8.4 Soit $E$ un espace euclidien et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue sur $[a, b]$ , dérivable sur $]a, b[$ . Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \|f'(c)\|$$

*Indication.* On pourra considérer  $t \mapsto (f(t) | f(b) - f(a))$ .

#### \* 8.5 Soit $E$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ et $g = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions dérivables vérifiant $\|f'\| \leq g'$ . On souhaite montrer que :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

1. Prouver le résultat en supposant que les fonctions  $f$  et  $g$  soient de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Montrer le résultat sans l'hypothèse « classe  $\mathcal{C}^1$  ».

*Indication.* Pour  $\varepsilon > 0$ , on pourra considérer l'ensemble :

$$A = \{x \in [a, b] \mid \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)\},$$

et montrer que  $\sup A = b$ .

**8.6** Pour  $n \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ , calculer :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2 & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

*Indication.* Calculer  $D'_n(x)$ .

### 8.7 Spirales logarithmiques

On se place dans le plan complexe, orienté par la base  $(1, i)$ .

Déterminer les fonctions  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$  telles  $f'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et que l'angle entre les vecteurs  $f(t)$  et  $f'(t)$  soit constant.

**8.8** Soit  $t \mapsto X(t)$  une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $X(0)$  soit une matrice de rotation. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout  $t$ ,  $X(t)$  est une matrice de rotation ;
- (ii) il existe une application continue  $A$  de  $\mathbb{R}$  dans l'ensemble des matrices antisymétriques de taille  $n$  telle que :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) = A(t)X(t)$ .

## Intégration et formules de Taylor

**8.9** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f(a) = 0$ .<sup>349</sup>

Montrer que  $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$ .

**8.10** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $[a, b]$  un segment d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$ . On considère une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow E$ , non nulle, telle que :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

On pose :

$$e_1 = \frac{\int_a^b f(t) dt}{\sqrt{\int_a^b \|f(t)\|^2 dt}}.$$

1. Montrer que  $e_1$  est bien défini.

En déduire l'existence d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

2. On note  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Montrer que  $f_1 \geq 0$  et  $f = f_1 e_1$ .

**\* 8.11** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

Montrer que pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  de  $[0, 1]$  dans  $E$ , on a :

$$\sup_{[0,1]} \|f\| \leq \int_0^1 \|f'(t)\| dt + \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

- 8.12** Soit  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a < b$ , et  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  à valeurs positives et dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide.

1. Montrer que l'application  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  induit une bijection de  $[a, b]$  sur  $[0, F(b)]$ .

En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$ , une subdivision  $(a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt.$$

2. Soit  $g \in \mathcal{C}([a, b], E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(a_i)$ .

- \* **8.13** Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide, ainsi que  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  non nulle.

On suppose que  $f'' + \varphi f = 0$  et  $f(a) = f(b) = 0$ .

Montrer que  $\frac{4}{b-a} \leq \int_a^b \varphi(t) dt$ .

*Indication.* On pourra introduire un  $c \in ]a, b[$  où  $|f|$  atteint son maximum et utiliser une formule de Taylor entre  $a$  et  $c$ , ainsi qu'entre  $c$  et  $b$ .

- 8.14** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. (a) Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $E$  telle que les fonctions  $\|f\|$  et  $\|f''\|$  soient majorées respectivement par  $M_0$  et  $M_2$ .

Montrer que pour tout  $h > 0$ , la fonction  $\|f'\|$  est majorée par  $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ .

(b) En déduire que la fonction  $\|f'\|$  est majorée par  $2\sqrt{M_0 M_2}$ .

2. Soit  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 2(x-1)^2 - 1.$$

Quelles sont les bornes de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  sur  $\llbracket 0, 1 \rrbracket$  ?

En utilisant la fonction cosinus, prolonger  $f$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  pour laquelle la majoration de la question précédente est optimale.

## Solutions des exercices

**8.1** Puisque  $v \neq 0$ , on a  $n \geq 1$ , où  $n$  est la dimension de  $E$ . Complétons  $e_1 = \frac{v}{\|v\|}$  en une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  une fonction dérivable. Notons  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k$ , donc par caractère orthonormé de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  :

$$(f'(t) | v) = (f'(t) | \|v\|e_1) = \|v\|f'_1(t).$$

Ainsi, comme  $\|v\| \neq 0$ , la fonction  $t \mapsto (f'(t) | v)$  est constante si, et seulement si, la fonction  $f'_1$  est constante, *i.e.* la fonction  $f_1$  est affine.

**8.2** 1. L'application  $B \mapsto B^T$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  étant linéaire et le produit matriciel étant bilinéaire, l'application  $(A, B) \mapsto AB^T$  est bilinéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On déduit donc du corollaire 11 de la page 342 que  $\varphi : t \mapsto M(t)M(t)^T$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = M'(t)M(t)^T + M(t)M'(t)^T.$$

2. Si pour tout  $t \in \mathbb{R}$  la matrice  $M(t)$  est orthogonale, alors la fonction  $\varphi$  est la fonction constante  $I_n$  et donc  $\varphi' = 0$ . Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t)M(t)^T + M(t)M'(t)^T = 0. \quad (*)$$

D'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$(M'(t)M(t)^T)^T = (M(t)^T)^T M'(t)^T = M(t)M'(t)^T.$$

Ainsi, d'après  $(*)$  :

$$(M'(t)M(t)^T)^T = -M'(t)M(t)^T,$$

donc  $M'(t)M(t)^T$  est une matrice antisymétrique.

**8.3** Considérons l'écriture en colonnes  $A = (C_1 \cdots C_n)$  et notons  $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

1. Par définition, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \chi_A(t) = \det_{\mathcal{B}}(tE_1 - C_1, \dots, tE_n - C_n).$$

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto tE_i - C_i$  est dérivable, de dérivée  $t \mapsto E_i$ . On en déduit, grâce à la multilinéarité de la fonction  $\det$ , que pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\chi'_A(t) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & t - a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{n,2} & \cdots & t - a_{n,n} \end{array} \right| + \cdots + \left| \begin{array}{cccc} t - a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & t - a_{n-1,n-1} & 0 \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 1 \end{array} \right|.$$

En développant le  $i$ -ème déterminant par rapport à la  $i$ -ème colonne, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \chi'_A(t) = \chi_{A_1}(t) + \cdots + \chi_{A_n}(t).$$

Ainsi :

$$\chi'_A = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}. \quad (\star)$$

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

2. Le coefficient en  $X$  du polynôme caractéristique de  $A$  vaut  $\chi'_A(0)$ . En évaluant en 0 dans l'égalité  $(\star)$ , il vient :

$$\chi'_A(0) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(0) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \Delta_{i,i}(A),$$

où  $\Delta_{i,i}(A)$  est le mineur d'indice  $(i, i)$  de  $A$ . On a donc :

$$\chi'_A(0) = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A)).$$

- 8.4** Considérons  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- $$\begin{aligned} t &\mapsto (f(t) \mid f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

- On a  $g(b) - g(a) = (f(b) \mid f(b) - f(a)) - (f(a) \mid f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|^2$ .
- Par ailleurs,  $g$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $g'(t) = (f'(t) \mid f(b) - f(a))$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g(b) - g(a) = (b - a)g'(c)$ , i.e. :

$$g(b) - g(a) = (b - a)(f'(c) \mid f(b) - f(a)).$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sachant que  $b - a \geq 0$  :

$$g(b) - g(a) \leq (b - a)\|f'(c)\|\|f(b) - f(a)\|.$$

- L'inégalité  $\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(c)\|$  est immédiate lorsque  $f(b) = f(a)$ . Sinon, on a d'après les deux points précédents :

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = g(b) - g(a) \leq (b - a)\|f'(c)\|\|f(b) - f(a)\|,$$

donc :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(c)\|.$$

- 8.5** 1. Les fonctions  $f$  et  $g$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt \quad \text{et} \quad g(b) - g(a) = \int_a^b g(t) dt.$$

On obtient alors le résultat souhaité en exploitant les propriétés de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt && (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \int_a^b g'(t) dt && (\text{croissance de l'intégrale}) \\ &= g(b) - g(a). \end{aligned}$$

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Posons :

$$A = \{x \in [a, b] \mid \|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)\}.$$

L'ensemble  $A$  est non vide, puisqu'il contient  $a$ , et majoré par  $b$ . Par continuité de  $f$  et  $g$ , il est fermé, donc contient sa borne supérieure, notée  $c$ .

Supposons  $c < b$ . Comme :

$$\lim_{t \rightarrow c} \left( \left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| - \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = \|f'(c)\| - g'(c) \leq 0,$$

on a, au voisinage de  $c$  l'inégalité :

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| - \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \leq \varepsilon.$$

Pour  $t > c$  suffisamment proche de  $c$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\ &\leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) \\ &= g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a), \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que  $c$  soit la borne supérieure de  $A$ .

Donc  $c = b$  et :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a).$$

En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on en déduit :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

### 8.6 On convient que $D_0 = 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $C_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par  $C_n(x) = \left( x, \frac{x^2}{2}, \dots, \frac{x^n}{n!} \right)$ . On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad D_n(x) = \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), C'_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)).$$

L'application  $C_n$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , donc  $D_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par multilinéarité de l'application  $\det_{\mathcal{B}}$ , on a :

$$\begin{aligned} D'_n(x) &= \det_{\mathcal{B}}(C'_n(x), C'_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)) + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), C''_n(x), C''_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x)) + \\ &\quad \cdots + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), \dots, C_n^{(n-1)}(x), C_n^{(n-1)}(x)) + \det_{\mathcal{B}}(C_n(x), \dots, C^{(n-2)}(x), C_n^{(n)}(x)). \end{aligned}$$

Dans tous ces déterminants, à l'exception du dernier, on a deux colonnes (consécutives) égales. Par suite :

$$D'_n(x) = \left| \begin{array}{cccccc} x & 1 & & & & (0) \\ x^2/2 & x & 1 & & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ \vdots & & \ddots & x & 0 & \\ x^n/n! & \dots & \dots & \dots & x^2/2! & 1 \end{array} \right| = D_{n-1}(x).$$

Il est clair que  $D_n(0) = 0$  (il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire supérieure stricte). On en déduit alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

### 8.7 Procédons par analyse-synthèse.

**Analyse.** Supposons que  $f$  soit une solution du problème. Notons  $\alpha \in \mathbb{R}$  une mesure de l'angle entre  $f(t)$  et  $f'(t)$  (par hypothèse, cet angle ne dépend pas de  $t$ ). Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on peut écrire (rappelons que, par hypothèse,  $f$  ne s'annule pas) :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \lambda(t)e^{i\alpha} \quad \text{avec} \quad \lambda(t) > 0.$$

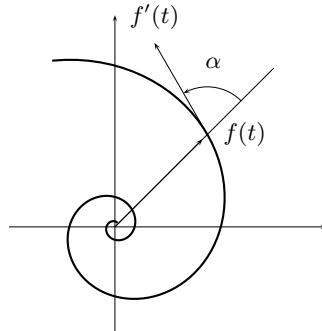
On a alors  $\lambda(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}e^{-i\alpha}$ , donc la fonction  $\lambda$  est continue. Ainsi  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$y' = \lambda(t)e^{i\alpha}y.$$

Par conséquent il existe  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = a \exp(\Lambda(t)e^{i\alpha})$$

où  $\Lambda$  est une primitive de  $\lambda$ . On remarque que l'application  $\Lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante et sa dérivée ne s'annule pas.



**Synthèse.** Réciproquement, si  $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement croissante, de classe  $\mathcal{C}^1$  et que sa dérivée ne s'annule pas alors, pour  $a \in \mathbb{C}^*$ , il est facile de vérifier que l'application  $f$  définie par :

$$f(t) = a \exp(\Lambda(t)e^{i\alpha})$$

est une solution du problème.

### 8.8 Par linéarité de la transposition, si $t \mapsto M(t)$ est une fonction dérivable à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie sur $I$ , alors $t \mapsto M(t)^T$ est dérivable et :

$$\forall t \in I \quad (M^T)'(t) = M'(t)^T.$$

- Supposons que pour tout  $t \in I$ ,  $X(t)$  soit une matrice de rotation.  
Soit  $t \in I$ . Puisque  $X(t)$  est une matrice orthogonale, on a :

$$X'(t) = X'(t) X(t)^T X(t) = A(t) X(t),$$

où l'on a posé  $A(t) = X'(t) X(t)^T$ .

Les règles de calcul de la transposée donnent :

$$A(t)^T = X(t) X'(t)^T. \tag{*}$$

Par ailleurs, toujours du fait que  $X(t)$  est une matrice orthogonale, on a :

$$X(t) X(t)^T = I_n.$$

En dérivant cette relation (valable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ), il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X'(t) X(t)^T + X(t) X'(t)^T = 0.$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) X'(t)^T = -X'(t) X(t)^T = -A(t).$$

De la relation (\*) on obtient alors :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad A(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

- Supposons qu'il existe une fonction continue  $t \mapsto A(t)$  à valeurs dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telle que  $X'(t) = A(t)X(t)$  pour tout  $t$ .

Posons  $f(t) = X(t)^T X(t)$  pour  $t$  réel. Les règles de dérivation donnent, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(t) &= X'(t)^T X(t) + X(t)^T X'(t) \\ &= (A(t)X(t))^T X(t) + X(t)^T A(t)X(t) \\ &= X(t)^T A(t)^T X(t) + X(t)^T A(t)X(t) \\ &= X(t)^T (A(t)^T + A(t))X(t). \end{aligned}$$

Puisque  $A(t)$  est antisymétrique, il vient que  $f'(t) = 0$ . Il s'ensuit que  $f$  est une fonction constante. Puisque  $X(0)$  est une matrice de rotation, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = X(t)^T X(t) = I_n.$$

En d'autres termes,  $X(t)$  est une matrice orthogonale pour tout  $t$ . Par conséquent, l'application  $g : t \mapsto \det(X(t))$  est à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ . Par ailleurs, par continuité du déterminant, la fonction  $g$  est continue. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $g$  est constante et, puisque  $g(0) = 1$ , on en conclut que  $X(t)$  est une matrice de rotation, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

- 8.9**
- Puisque  $f'$ , et donc  $\|f'\|$ , est continue sur le segment  $[a, b]$ , la fonction  $\|f'\|$  est bornée. Notons  $M = \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t)\|$ .

- Du fait que  $f(a) = 0$ , on a :

$$\forall t \in [a, b] \quad f(t) = \int_a^t f'(s) \, ds,$$

donc, pour tout  $t \in [a, b]$  :

$$\|f(t)\| \leq \int_a^t \|f'(s)\| \, ds \leq \int_a^t M \, ds = M(t - a).$$

- On en déduit par inégalité triangulaire, puis croissance de l'intégrale :

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt \leq \int_a^b M(t - a) \, dt = M \frac{(b - a)^2}{2}.$$

- 8.10**
- Puisque  $f$  n'est pas nulle, la fonction  $\|f\|$  est continue, positive, non nulle. Par théorème  $\int_a^b \|f(t)\| \, dt > 0$ . Par suite  $e_1$  est bien défini.

- Par homogénéité de la norme et par hypothèse sur  $f$  :

$$\|e_1\| = \left\| \frac{\int_a^b f(t) \, dt}{\int_a^b \|f(t)\| \, dt} \right\| = \frac{1}{\int_a^b \|f(t)\| \, dt} \left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| = 1.$$

- Par le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut compléter  $(e_1)$  en une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

2. • On a d'une part :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i(t) dt \right) e_i,$$

d'autre part, par définition de  $e_1$  :

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b \|f(t)\| dt \right) e_1.$$

Par unicité de la décomposition dans une base, il vient :

$$\int_a^b f_1(t) dt = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

• Puisque  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée :

$$|f_1| = (f_1^2)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1/2} = \|f\|. \quad (*)$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_a^b |f_1(t)| dt \leq \int_a^b \|f(t)\| dt = \int_a^b f_1(t) dt,$$

l'égalité provenant du point précédent. Par conséquent, par double inégalité :

$$\int_a^b |f_1(t)| dt = \int_a^b f_1(t) dt, \quad (1)$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b |f_1(t)| dt = \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (2)$$

\* Il vient de (1) que  $f_1 = |f_1| \geq 0$  (car  $|f_1| - f_1$  est positive, continue, d'intégrale nulle).

\* De même, (2) et (\*) montrent que  $|f_1| = \|f\|$ . Cela implique :

$$\sum_{i=2}^n f_i^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad f_i = 0.$$

Par suite  $f = f_1 e_1$ .

**8.11** Puisque la fonction  $g : x \mapsto \|f(x)\|$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle est bornée et admet un maximum d'après le théorème des bornes atteintes. Fixons un  $x_0 \in [0, 1]$  où elle atteint son maximum.

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $f(x_0) = f(x) - \int_{x_0}^x f'(t) dt$ . Ainsi :

$$f(x_0) = \int_0^1 f(x_0) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \left( \int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx,$$

donc :

$$\begin{aligned}
 \|f(x_0)\| &\leqslant \left\| \int_0^1 f(x) dx \right\| + \left\| \int_0^1 \left( \int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right\| \\
 &\leqslant \int_0^1 \|f(x)\| dx + \int_0^1 \left\| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right\| dx \\
 &\leqslant \int_0^1 \|f(x)\| dx + \int_0^{x_0} \left( \int_x^{x_0} \|f'(t)\| dt \right) dx + \int_{x_0}^1 \left( \int_{x_0}^x \|f'(t)\| dt \right) dx \\
 &\quad \text{(relation de Chasles)} \\
 &\leqslant \int_0^1 \|f(x)\| dx + \int_0^{x_0} \left( \int_0^1 \|f'(t)\| dt \right) dx + \int_{x_0}^1 \left( \int_0^1 \|f'(t)\| dt \right) dx \\
 &\quad \text{(fonctions positives)} \\
 &= \int_0^1 \|f(t)\| dt + \int_0^1 \|f'(t)\| dt.
 \end{aligned}$$

Cela prouve l'inégalité demandée.

**8.12** 1. • Posons pour  $x \in [a, b]$  :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On définit ainsi une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , car  $f$  est continue, et croissante, du fait que  $f$  est à valeurs positives.

Par ailleurs, puisque  $F' = f$ , l'ensemble des zéros de  $F'$  est d'intérieur vide. Par suite, la fonction  $F$  est strictement croissante. Étant de plus strictement croissante et continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , elle définit une bijection de  $[a, b]$  sur  $[0, F(b)]$ .

Remarquons que  $F(b) > 0$ .

- Raisonnons par analyse/synthèse.

**Analyse.** Supposons que  $(a_0, \dots, a_n)$  soit une subdivision de  $[a, b]$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt.$$

Alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad F(a_{i+1}) - F(a_i) = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt.$$

En sommant et en remarquant que  $F(a_0) = 0$ , on obtient, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$F(a_i) = \frac{i}{n} \int_a^b f(t) dt = \frac{i}{n} F(b) \quad \text{i.e.} \quad a_i = F^{-1}\left(\frac{i}{n} F(b)\right).$$

On en déduit l'unicité d'une telle subdivision.

**Synthèse.** Il s'agit de vérifier que les  $a_i$  définis ci-dessus forment bien une subdivision de  $[a, b]$ . C'est le cas car, comme  $F^{-1}$  est strictement croissante, les points  $a_i$  sont ordonnés de manière strictement croissante, et l'on a de plus  $a_0 = F^{-1}(0) = 0$  et  $a_n = F^{-1}(F(b)) = b$ .

## Chapitre 8. Fonctions vectorielles de la variable réelle

2. • Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'expression établie à la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g\left(F^{-1}\left(\frac{i}{n} F(b)\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ F^{-1})\left(\frac{i}{n} F(b)\right) = \frac{1}{F(b)} \frac{F(b)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ F^{-1})\left(\frac{i}{n} F(b)\right).\end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\frac{F(b)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ F^{-1})\left(\frac{i}{n} F(b)\right)$$

est une somme de Riemann pour la fonction  $(g \circ F^{-1})$  qui est continue sur  $[0, F(b)]$ .

Par suite, on a :

$$\frac{F(b)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (g \circ F^{-1})\left(\frac{i}{n} F(b)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{F(b)} (g \circ F^{-1})(x) dx,$$

donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(b)} \int_0^{F(b)} (g \circ F^{-1})(x) dx. \quad (*)$$

- La fonction  $F$  étant de classe  $C^1$ , on peut poser le changement de variable  $[x = F(t)]$  dans l'intégrale :

$$I = \int_0^{F(b)} (g \circ F^{-1})(x) dx \quad \text{ce qui donne} \quad I = \int_a^b g(t)f(t) dt.$$

Par conséquent, d'après  $(*)$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{F(b)} \int_a^b g(t)f(t) dt = \frac{\int_a^b g(t)f(t) dt}{\int_a^b f(t) dt}.$$

- 8.13** La fonction  $|f|$  étant continue sur le segment  $[a, b]$ , elle atteint son maximum en un  $c \in [a, b]$ , d'après le théorème des bornes atteintes. Puisque  $|f|$  est non nulle, la valeur du maximum est strictement positive. Comme  $f(a) = f(b) = 0$ , cela implique que  $c \in ]a, b[$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , fonction qui vérifie les mêmes hypothèses que  $f$ , on peut supposer que  $f(c) > 0$ . On en déduit que  $f(t) \leq |f(t)| \leq f(c)$  pour tout  $t \in [a, b]$ , donc que  $f$  atteint son maximum en  $c$ . Comme  $c$  est un point intérieur de l'intervalle  $[a, b]$ , on a  $f'(c) = 0$ .

Puisque  $f'' = -\varphi f$ , la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 appliquée à  $f$  entre  $c$  et  $a$ , ainsi qu'entre  $c$  et  $b$  donne :

$$\begin{aligned}0 &= f(a) = f(c) - \int_c^a (a-t)\varphi(t)f(t) dt \\ 0 &= f(b) = f(c) - \int_c^b (b-t)\varphi(t)f(t) dt,\end{aligned}$$

donc :

$$f(c) = \int_a^c (t-a)\varphi(t)f(t) dt \quad \text{et} \quad f(c) = \int_c^b (b-t)\varphi(t)f(t) dt,$$

puis, du fait que  $f(c) > 0$  est la valeur maximale de  $|f|$  :

$$\begin{aligned} f(c) &= \left| \int_a^c (t-a)\varphi(t)f(t) dt \right| \leq \int_a^c |(t-a)\varphi(t)| |f(t)| dt \leq (c-a)f(c) \int_a^c \varphi(t) dt \\ f(c) &= \left| \int_c^b (b-t)\varphi(t)f(t) dt \right| \leq \int_c^b |(b-t)\varphi(t)| |f(t)| dt \leq (b-c)f(c) \int_c^b \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

En divisant la première inégalité par  $(c-a)f(c) > 0$ , et la seconde par  $(b-c)f(c) > 0$ , on obtient :

$$\frac{1}{c-a} \leq \int_a^c \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{b-c} \leq \int_c^b \varphi(t) dt,$$

donc en sommant, en vertu de la relation de Chasles :

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \leq \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Une brève étude de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t-a} + \frac{1}{b-t}$  sur  $]a, b[$  montre qu'elle atteint son minimum en  $\frac{a+b}{2}$  et que celui-ci vaut  $\frac{4}{b-a}$ . Par suite :

$$\frac{4}{b-a} \leq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \leq \int_a^b \varphi(t) dt.$$

**8.14** 1. Soit  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ .

(a) L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\|f(x+h) - f(x) - h f'(x)\| \leq \frac{h^2}{2} M_2. \quad (1)$$

Il vient de l'inégalité triangulaire :

$$\|f'(x)\| = \left\| \frac{f(x+h)}{h} \right\| + \left\| \frac{f(x)}{h} \right\| + \left\| \frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x)}{h} \right\|,$$

donc, à l'aide de l'inégalité (1) :

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

(b) Le minimum de  $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$  est atteint pour  $h = 2\sqrt{M_0/M_2}$  et vaut  $2\sqrt{M_0M_2}$ .

L'inégalité ci-dessus donne alors :

$$\|f'(x)\| \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

2. On a immédiatement :

$$M_0 = \max_{[0,1]} |f| = 1 \quad M_1 = \max_{[0,1]} |f'| = 4 \quad \text{et} \quad M_2 = \max_{[0,1]} |f''| = 4.$$

On remarque que l'on a  $M_1 = 2\sqrt{M_0M_2}$ . Il suffit donc prolonger  $f$  en une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  de façon à conserver ces bornes, ce que l'on peut réaliser en posant :

$$\forall x > 1 \quad f(x) = -\cos(2(x-1)).$$



# Chapitre 9 : Intégration sur un intervalle quelconque

<b>I</b>	<b>Intégrale généralisée . . . . .</b>	<b>376</b>
1	Fonction continue par morceaux . . . . .	376
2	Définitions . . . . .	377
3	Cas des fonctions à valeurs réelles positives . . . . .	383
4	Intégrales de référence . . . . .	385
<b>II</b>	<b>Propriétés de l'intégrale . . . . .</b>	<b>385</b>
1	Linéarité . . . . .	385
2	Positivité, croissance . . . . .	386
3	Relation de Chasles . . . . .	386
4	Intégrabilité . . . . .	387
<b>III</b>	<b>Calcul d'intégrales . . . . .</b>	<b>390</b>
1	Intégration par parties . . . . .	390
2	Changement de variable . . . . .	393
3	Semi-convergence . . . . .	394
<b>IV</b>	<b>Intégration des relations de comparaison . . . . .</b>	<b>396</b>
1	Cas convergent : comparaison des restes . . . . .	396
2	Cas divergent : comparaison des intégrales partielles . . . . .	398
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>406</b>

# Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre, on étend la notion d'intégrale, déjà connue pour les fonctions continues par morceaux sur un segment, à certaines fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Les intervalles de  $\mathbb{R}$  considérés dans ce chapitre sont tous d'intérieur non vide.

## I Intégrale généralisée

### 1 Fonction continue par morceaux

Rappelons la définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment et étendons-la à un intervalle quelconque.

#### Définition 1

- Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **continue par morceaux sur le segment**  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  s'il existe une subdivision  $(a_0, \dots, a_n)$  de ce segment telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la restriction de  $f$  à  $]a_i, a_{i+1}[$  possède un prolongement continu sur le segment  $[a_i, a_{i+1}]$ .
- Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est dite **continue par morceaux sur l'intervalle**  $I$  si sa restriction à tout segment inclus dans  $I$  est continue par morceaux.

**Notation** On note  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**Remarque** L'ensemble  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  contient les fonctions constantes sur  $I$ , est stable par combinaison linéaire et par produit : c'est une sous-algèbre de  $\mathbb{K}^I$ . On a immédiatement l'inclusion  $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ .

**Ex. 1.** La fonction partie entière est une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

**Ex. 2.** La fonction inverse est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  mais ne possède pas de prolongement continu par morceaux sur  $[0, +\infty[$  puisqu'elle n'est pas bornée au voisinage de 0.

## 2 Définitions

### Cas où $I = [a, b[$

Dans cette section, on considère  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b \leq +\infty$ .

#### Définition 2

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ .

On dit que l'intégrale  $\int_{[a,b[} f$  converge si la fonction  $x \mapsto \int_{[a,x]} f(t) dt$  admet

une limite finie en  $b$ . Dans ce cas, on note  $\int_{[a,b[} f$  ou  $\int_{[a,b[} f(t) dt$  cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale  $\int_{[a,b[} f$  diverge.

### Terminologie

- Une telle intégrale est appelée **intégrale généralisée**. On parle aussi d'**intégrale impropre**.
- Pour une intégrale généralisée, son caractère convergent ou divergent est appelé **sa nature**.

#### Proposition 1 (Caractère local de la nature d'une intégrale)

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ . Soit  $c \in [a, b[$ .

Les intégrales  $\int_{[a,b[} f$  et  $\int_{[c,b[} f$  sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Démonstration page 399

**Principe de démonstration.** On utilise la relation de Chasles et la définition de la convergence d'une intégrale.

#### Corollaire 2

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ . Si l'intégrale  $\int_{[a,b[} f$  converge, alors  $\int_{[x,b[} f \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$ .

**Remarque** On peut noter une analogie entre l'étude des intégrales généralisées sur un intervalle  $[a, +\infty[$  et celle des séries numériques.

**Terminologie** Par analogie avec les séries, l'intégrale  $\int_{[a,x]} f$  est appelée **intégrale partielle** et, en cas de convergence, l'intégrale  $\int_{[x,b[} f$  est appelée **reste** de l'intégrale  $\int_{[a,b[} f$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

Le résultat suivant assure que, pour une fonction  $f$  continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$ , il n'y a pas de différence entre son intégrale sur le segment  $[a, b]$  (au sens de la première année) et son intégrale sur l'intervalle semi-ouvert  $[a, b[$  (au sens que nous venons de définir).

### Proposition 3

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ . Alors l'intégrale généralisée  $\int_{[a, b]} f$  converge et l'on a :

$$\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} f.$$

Démonstration page 399

**Notation** Dans la suite, l'intégrale  $\int_{[a, b[} f$  est notée  $\int_a^b f$ . Dans le cas où  $f$  est continue par morceaux sur le segment  $[a, b]$ , le résultat précédent assure la cohérence de cette notation avec celle déjà utilisée en première année.

### Proposition 4

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$  et  $F$  une primitive de  $f$ . L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si, et seulement si,  $F$  possède une limite finie en  $b$ . Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \lim_b F - F(a)$$

et la fonction définie sur  $[a, b[$  par  $x \mapsto \int_x^b f$  est dérivable, de dérivée  $-f$ .

Démonstration page 399

**Notation** Si  $\lim_b F$  existe, on note  $[F]_a^b$  l'expression  $\lim_b F - F(a)$ .

**Ex. 3.** Montrons que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge et calculons sa valeur.

La fonction  $f : t \mapsto e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et l'une de ses primitives est  $F : t \mapsto -e^{-t}$ . Comme  $F \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  converge et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$$

**Ex. 4.** Montrons que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$  converge et calculons sa valeur.

- La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2)}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .
- Une décomposition en éléments simples donne  $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$ ; une primitive de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  est donc  $F : t \mapsto \ln t - \frac{\ln(1+t^2)}{2} = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ .
- On a, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\sqrt{1+t^2} \sim t$ , donc  $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \rightarrow 1$ . Par conséquent,  $F \xrightarrow{+\infty}$ . Puisque  $F$  admet une limite finie en  $+\infty$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  converge et :

$$\int_1^{+\infty} f = [F]_1^{+\infty} = \lim_{+\infty} F - F(1) = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

**Ex. 5.** Montrons que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \cos t \, dt$  diverge.

La fonction  $\cos$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et l'une de ses primitives est la fonction  $\sin$ , qui ne possède pas de limite en  $+\infty$ ; d'où la conclusion.

**Attention** À l'instar des séries numériques, la condition  $f \xrightarrow{+\infty} 0$  n'est pas suffisante pour que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge, comme le prouve l'exemple suivant.

**Ex. 6.** Considérons  $f : t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $[1, +\infty[$ . On a  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ , mais l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  diverge car :

$$\forall x \geq 1 \quad \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Attention** En revanche, contrairement au cas des séries numériques, la convergence de l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  n'entraîne pas que  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ , ni même que  $f$  est bornée au voisinage de  $+\infty$ , comme on le verra dans l'exemple 14 de la page 384.

**Point méthode** Pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $a > 0$ , on a  $\sum_{n=1}^N \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{(N+1)a} f$ . Par

conséquent, si l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge alors la série  $\sum \int_{na}^{(n+1)a} f$  converge.

Ainsi, on peut utiliser la divergence d'une série pour prouver la divergence d'une intégrale.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Ex. 7.** Montrons que l'intégrale  $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  diverge. Pour cela, considérons la série de terme général  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

Ainsi, par comparaison aux séries de Riemann, la série de terme général  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  diverge, donc l'intégrale  $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$  diverge. □

**Attention** La réciproque est fausse : la convergence de la série  $\sum \int_{na}^{(n+1)a} f$  n'implique pas la convergence de l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$ , comme le montre l'exemple suivant.

**Ex. 8.** L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \cos t dt$  diverge mais  $\sum \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \cos t dt$  est convergente, car son terme général est nul. □

### Cas où $I = ]a, b]$

Dans cette section, on considère  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $-\infty \leq a < b$ .

#### Définition 3

Soit  $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{K})$ .

On dit que l'intégrale  $\int_{]a,b]} f$  converge, si la fonction  $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  admet une limite finie en  $a$ .

Dans ce cas, on note  $\int_{]a,b]} f$  ou  $\int_{]a,b]} f(t) dt$  cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale  $\int_{]a,b]} f$  diverge.

Exo  
9.1

**Ex. 9.** Montrons que l'intégrale  $\int_{]0,1]} \ln t dt$  converge et calculons sa valeur.

La fonction  $\ln$  est continue sur  $]0, 1]$  et l'une de ses primitives est  $F : x \mapsto x \ln x - x$ .

Comme  $F \xrightarrow[0]{} 0$  par croissances comparées, l'intégrale  $\int_0^1 \ln t dt$  converge et l'on a :

$$\int_0^1 \ln t dt = [F(t)]_0^1 = -1. □$$

**Remarque** On adapte sans difficulté au cas d'un intervalle semi-ouvert  $]a, b]$  les propositions 1, 3 et 4 énoncées dans le cas d'un intervalle du type  $[a, b[$ .

**Notation** L'intégrale  $\int_{]a,b]} f$  est aussi notée  $\int_a^b f$ .

### Cas d'un intervalle ouvert $I = ]a, b[$

Dans cette section, on considère  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tel que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

#### Lemme 5

Soit  $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$ .

S'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que les deux intégrales  $\int_{]a,c]} f$  et  $\int_{[c,b[} f$  convergent, alors,

pour tout réel  $c' \in ]a, b[$ , les intégrales  $\int_{]a,c']} f$  et  $\int_{[c',b[} f$  convergent aussi, et :

$$\int_{]a,c']} f + \int_{[c',b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Démonstration page 399

**Principe de démonstration.** Conséquence de la proposition 1 de la page 377 et son analogue dans le cas d'un intervalle ouvert à gauche.

#### Définition 4

Soit  $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$ . On dit que l'intégrale  $\int_{]a,b[} f$  converge s'il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que les deux intégrales  $\int_{]a,c]} f$  et  $\int_{[c,b[} f$  convergent. On pose alors :

$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale  $\int_{]a,b[} f$  diverge.

**Remarque** Le lemme 5 assure que la notion de convergence et éventuellement de valeur d'une intégrale sur un ouvert ne dépend pas du choix de  $c$ .

#### Compatibilité avec les définitions déjà données

- Si  $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{K})$ , il découle de la définition précédente et la proposition 1 de la page 377 que les deux intégrales  $\int_{]a,b[} f$  et  $\int_{]a,b]} f$  ont même nature et, en cas de convergence, sont égales. On a le même résultat si  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ .
- De même, le résultat de la proposition 3 de la page 378 s'étend : si  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ , l'intégrale  $\int_{]a,b[} f$  converge et  $\int_{]a,b[} f = \int_{[a,b]} f$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Notation** La discussion précédente justifie la notation  $\int_a^b f$  utilisée pour désigner cette intégrale.

**Ex. 10.** Supposons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  converge. Montrons que  $\int_{-x}^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f$ . Comme l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  converge, les deux intégrales  $\int_{-x}^0 f$  et  $\int_0^{+\infty} f$  convergent. Par définition de l'intégrale sur un intervalle semi-ouvert, on a :

$$\int_{-x}^0 f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 f \quad \text{et} \quad \int_0^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f.$$

En faisant la somme de ces deux limites et par la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{-x}^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f,$$

la dernière égalité venant de la définition de l'intégrale sur un intervalle ouvert.

**Attention** La réciproque du résultat obtenu par l'exemple précédent est fausse : comme le montre l'exemple suivant, l'existence de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt$  n'implique pas la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ .

**Ex. 11.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_{-x}^x t dt = 0$ , donc  $\int_{-x}^x t dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , mais l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$  n'est pas convergente puisque  $\int_0^x t dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Point méthode** Si  $f$  est continue sur  $]a, b[$ , et si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors l'intégrable  $\int_a^b f$  converge si, et seulement si,  $F$  admet des limites finies en  $a$  et  $b$ , et l'on a alors  $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$ , quantité notée  $[F(t)]_a^b$ .

**Ex. 12.** Montrons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge et calculons sa valeur.

La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et l'une de ses primitives est  $\text{Arctan}$ .

Comme  $\text{Arctan} \xrightarrow{+\infty} \frac{\pi}{2}$  et  $\text{Arctan} \xrightarrow{-\infty} -\frac{\pi}{2}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$  converge et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

### 3 Cas des fonctions à valeurs réelles positives

De la même façon que pour les séries numériques, on étudie le cas des fonctions positives. La notion d'intégrabilité permettra ensuite de se ramener à ce cas.

On traite dans ce paragraphe le cas des intégrales généralisées sur l'intervalle semi-ouvert  $[a, b[$ , le cas  $]a, b]$  étant analogue et le cas  $]a, b[$  se ramenant aux deux précédents.

#### Proposition 6

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b \leq +\infty$ , et  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})$  à valeurs *positives*.

1. L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si, et seulement si, la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  est majorée sur  $[a, b[$ .

2. L'intégrale  $\int_a^b f$  diverge si, et seulement si  $\int_a^x f \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$ .

On pose alors  $\int_a^b f = +\infty$ .

Démonstration page 400

**Principe de démonstration.** On utilise la croissance de la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$ .

#### Remarques

- Les conclusions sur la nature de l'intégrale subsistent si  $f$  n'est positive qu'au voisinage de  $b$ , car  $x \mapsto \int_a^x f$  est alors croissante au voisinage de  $b$ .
- L'adaptation de la proposition 6 au cas d'une fonction  $f \in \mathcal{CM}(]a, b], \mathbb{R})$  positive est la suivante : l'intégrale  $\int_a^b f$  converge si, et seulement si, la fonction  $x \mapsto \int_x^b f$  est majorée, et si ce n'est pas le cas alors  $\int_x^b f \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ .

**Ex. 13.** La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est continue et positive sur  $[1, +\infty[, et admet la fonction  $\ln$  pour primitive. Comme  $\ln \xrightarrow{+\infty} +\infty$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  est divergente, et l'on a  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$ .$

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

### Proposition 7 (Comparaison d'intégrales de fonctions positives)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $a < b \leq +\infty$ , et  $(f, g) \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{R})^2$  à valeurs positives. Si  $f \leq g$  sur  $[a, b[$ , alors on a l'inégalité suivante dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

En particulier, si l'intégrale  $\int_a^b g$  converge, alors l'intégrale  $\int_a^b f$  converge.

Démonstration page 400

**Principe de démonstration.** On utilise la caractérisation de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive (proposition 6 de la page précédente).

**Point méthode** Soit  $a > 0$  et  $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ . Puisque pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a  $\sum_{n=1}^N \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{(N+1)a} f$ , on obtient dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , par passage à la limite et positivité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{+\infty} f.$$

En particulier, la série  $\sum \int_{na}^{(n+1)a} f$  et l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  ont même nature.

Exo  
9.2

**Ex. 14.** Soit  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  de la manière suivante :

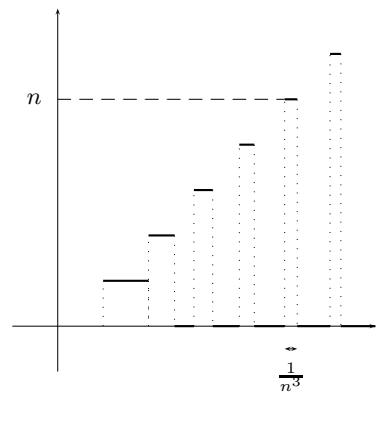
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [n, n+1[ \quad f(t) = n \mathbf{1}_{[n, n+\frac{1}{n^3}]}(t).$$

La fonction  $f$  est continue par morceaux et à valeurs positives. On a de plus :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

**Remarque** La fonction ici considérée est d'intégrale convergente sur  $[1, +\infty[$ , mais ne tend pas vers 0 en  $+\infty$  (en fait, elle n'est même pas bornée au voisinage de  $+\infty$ ).



## 4 Intégrales de référence

Comme pour les séries numériques, nous disposons d'un certain nombre d'exemples de référence permettant, grâce au théorème de comparaison, de déterminer la nature de beaucoup d'autres intégrales.

### Proposition 8

Soit  $\alpha$  un réel. L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 0$ .

Démonstration page 400

### Proposition 9 (Intégrales de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .
- L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .
- Plus généralement, étant donné  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ , les deux intégrales  $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$  et  $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$  convergent si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .

Démonstration page 400

**Ex. 15.** Les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ ,  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$  convergent.

**Ex. 16.** Les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ ,  $\int_0^1 \frac{dt}{t}$  et  $\int_1^3 \frac{dt}{(3-t)^2}$  divergent.

## II Propriétés de l'intégrale

Les propositions suivantes étendent à un intervalle  $I$  quelconque des propriétés déjà connues sur un segment. Rappelons  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'*intérieur non vide*.

**Convention** Par extension, lorsque  $I$  est un segment et que  $f$  continue par morceaux sur  $I$ , on dit encore que l'intégrale  $\int_I f$  converge.

### 1 Linéarité

#### Proposition 10 (Linéarité)

L'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  telles que  $\int_I f$  converge est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et l'application  $f \mapsto \int_I f$  est une forme linéaire.

**Démonstration.** Cela résulte de la définition de la convergence d'une intégrale, de la linéarité de l'intégrale sur un segment et des théorèmes d'opérations sur les limites.  $\square$

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

### Proposition 11 (Fonctions à valeurs complexes)

Étant donné  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ , l'intégrale  $\int_I f$  converge si, et seulement si, les deux intégrales  $\int_I \operatorname{Re} f$  et  $\int_I \operatorname{Im} f$  convergent, et l'on a alors :

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

**Démonstration.** Cela résulte de la définition de la convergence d'une intégrale et des propriétés des limites des fonctions à valeurs complexes.  $\square$

## 2 Positivité, croissance

On considère ici des fonctions à valeurs réelles.

### Proposition 12 (Positivité)

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  telle que  $\int_I f$  converge. Si  $f$  est positive sur  $I$ , alors  $\int_I f \geq 0$ .

Démonstration page 401

### Corollaire 13 (Croissance)

Soit  $(f, g) \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})^2$  tel que  $\int_I f$  et  $\int_I g$  convergent.

Si  $f \leq g$  sur  $I$ , on a  $\int_I f \leq \int_I g$ .

**Démonstration.** On applique la proposition précédente à la fonction  $g - f$  en utilisant la linéarité de l'intégrale.  $\square$

### Proposition 14 (Fonction continue, positive et d'intégrale nulle)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive.

Si  $\int_I f = 0$  alors  $f$  est la fonction nulle.

Démonstration page 401

**Principe de démonstration.** On se ramène à l'énoncé analogue dans le cas d'un segment.

**Remarque** On déduit de cette proposition que si  $f$  est une fonction continue positive et non nulle sur  $I$ , alors  $\int_I f > 0$ .

## 3 Relation de Chasles

### Proposition 15

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge.

Si  $J$  est un sous-intervalle d'intérieur non vide de  $I$ , alors  $\int_J f$  converge.

Démonstration page 401

**Conséquence** Supposons que  $\int_I f$  converge. Si  $x < y$  sont des points ou extrémités de  $I$ , alors on a  $]x, y[ \subset I$ , donc l'intégrale  $\int_{]x, y[} f$ , notée aussi  $\int_x^y f$ , converge.

**Notation** Plus généralement, si  $\int_I f$  converge, la notation  $\int_x^y f$ , déjà définie dans le cas où  $x < y$ , est étendue au cas général ainsi :

$$\int_x^y f = - \int_y^x f \quad \text{si } x > y \quad \text{et} \quad \int_x^y f = 0 \quad \text{si } x = y.$$

### Proposition 16 (Relation de Chasles)

Soit  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  telle que  $\int_I f$  converge. Si  $x, y$  et  $z$  sont trois points ou extrémités de  $I$ , alors les intégrales  $\int_x^y f$ ,  $\int_x^z f$  et  $\int_z^y f$  convergent et l'on a :

$$\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f.$$

Démonstration page 402

## 4 Intégrabilité

Dans cette section,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

### Définition 5

On dit que  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  est **intégrable** sur  $I$ , ou que l'intégrale  $\int_I f$  converge **absolument**, si l'intégrale  $\int_I |f|$  converge.

**Notation** On note  $L^1(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions intégrables sur  $I$ .

### Proposition 17

$L^1(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ .

Démonstration page 402

**Principe de démonstration.** Utiliser l'inégalité triangulaire et le théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs positives.

### Remarques

- Si  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  est une fonction *positive*, alors l'intégrabilité de  $f$  équivaut à la convergence de l'intégrale  $\int_I f$ .
- En particulier les fonctions des exemples de référence de la section I.4 de la page 385 étant toutes positives, leur convergence équivaut à leur intégrabilité.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

### Théorème 18

Si  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$  alors  $\int_I f$  converge.

Démonstration page 402

**Principe de démonstration.** On étudie d'abord le cas des fonctions  $f$  à valeurs réelles, en utilisant les fonctions  $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$  et  $f^- = \frac{|f|-f}{2}$ , puis on en déduit le cas des fonctions à valeurs complexes en écrivant  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ .

### Théorème 19 (Inégalité triangulaire)

Pour tout  $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ , on a  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$ .

Démonstration page 403

### Proposition 20 (Caractère local de l'intégrabilité)

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $a < b$ . Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ .

Alors, pour tout  $c \in [a, b[$ , la fonction  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si, et seulement si, elle l'est sur  $[c, b[$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate du caractère local de la nature d'une intégrale (cf. proposition 1 de la page 377).  $\square$

### Conséquence et terminologie

- L'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b[$  ne dépend que du comportement local de  $f$  au voisinage de  $b$ .
- Pour  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ , on dira que  $f$  est **intégrable en  $b$**  si  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .

### Théorème 21 (Théorème de comparaison)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $a < b \leq +\infty$  et  $(f, g) \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})^2$ .

- Si  $f \underset{b}{\sim} O(g)$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .
- Si  $f \underset{b}{\sim} g$ , alors l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b[$  équivaut à celle de  $g$ .

Démonstration page 403

**Principe de démonstration.** Cela résulte de la définition de l'intégrabilité et du théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs positives (proposition 7 de la page 384).

**Attention** Le théorème de comparaison énoncé ici concerne l'*intégrabilité* des fonctions, c'est-à-dire la convergence *absolue* de leurs intégrales. On peut très bien avoir  $f \underset{b}{\sim} g$  sans que les intégrales  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  soient de même nature (cf. exercice 9.5).

**Remarque** Ce qui précède (en particulier le théorème de comparaison) a été énoncé dans le cas  $I = [a, b[,$  mais s'adapte naturellement au cas  $I = ]a, b]$ .

Exo  
9.3

**Point méthode** Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$ , on peut s'intéresser au comportement asymptotique de  $f$  au voisinage des « bornes ouvertes » de  $I$ , puis utiliser le théorème de comparaison.

En particulier, si l'intervalle  $I$  est ouvert, il faut étudier séparément les deux bornes.

**Ex. 17.** Soit  $x > 0$ . Montrons la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

La fonction  $f : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** Quand  $t$  tend vers 0, on a  $f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ . Comme  $1 - x < 1$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$  est intégrable en 0 (intégrale de Riemann), donc, par théorème de comparaison,  $f$  aussi.

**Étude en  $+\infty$ .** Par croissances comparées, on a :

$$t^{x+1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad t^{x-1} e^{-t} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme  $2 > 1$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable en  $+\infty$ , donc, par théorème de comparaison,  $f$  aussi.

En conclusion, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc son intégrale converge.

**Ex. 18.** Déterminons la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) dt$ .

La fonction  $f : t \mapsto \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . On a :

$$\forall t \geq 0 \quad \left| \sin(t) \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \right| \leq \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right).$$

Comme  $\frac{t^2+2}{t^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$  et  $\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ , on a :

$$\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2+2}{t^2+1} - 1 = \frac{1}{t^2+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{donc} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme  $2 > 1$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable en  $+\infty$ , donc, par théorème de comparaison,  $f$  aussi. Par conséquent,  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc son intégrale converge.

**Ex. 19.** Déterminons la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x} + x^2} dx$ .

La fonction  $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{x} + x^2}$  est continue sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** On a  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Comme  $\frac{1}{2} < 1$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est intégrable en 0, donc  $f$  aussi par théorème de comparaison.

**Étude en  $+\infty$**  On a  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Comme  $2 > 1$ , la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable en  $+\infty$ , donc  $f$  aussi par théorème de comparaison.

Conclusion :  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et donc son intégrale est convergente.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

### Point méthode

- Les fonctions constantes étant intégrables sur n'importe quel intervalle *borné*, si une fonction  $f$  est bornée au voisinage d'un point  $b \in \mathbb{R}$ , alors on a  $\int_b f = O(1)$  et donc  $f$  est intégrable en  $b$ .
- En particulier, si  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$  admet une *limite finie* en  $b \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  est intégrable.

**Attention** Le caractère *fini* de  $b$  est essentiel, comme le montre l'exemple de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$ , bornée et non intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

**Ex. 20.** La fonction  $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** La fonction  $f$  est bornée au voisinage de 0, donc intégrable en 0.

**Étude en  $+\infty$ .** Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$\sin \frac{1}{t^2} \sim \frac{1}{t^2}.$$

Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable en  $+\infty$ ,  $f$  l'est aussi.

Par conséquent, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

**Attention** Une comparaison ne pourra jamais montrer une divergence, mais seulement une non intégrabilité. On conclut alors souvent par positivité.

**Ex. 21.** Suite de l'exemple 17.

Soit  $x \leq 0$ . Montrons la divergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

La fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ . Comme elle est de plus positive, la convergence de son intégrale équivaut à son intégrabilité. L'équivalent :

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1},$$

prouve, par comparaison avec un exemple de Riemann divergent, que la fonction  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  n'est pas intégrable en 0.

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  diverge.

## III Calcul d'intégrales

### 1 Intégration par parties

**Convention** Si  $h$  est une fonction continue sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ , avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , on dit que le **crochet**  $[h]_a^b$  converge si  $h$  possède des limites *finies* en  $a$  et en  $b$ , et l'on pose alors  $[h]_a^b = \lim_b h - \lim_a h$ .

**Remarques**

- Dans le cas d'un segment  $[a, b]$ , alors par continuité de  $h$ , on a  $\lim_a h = h(a)$  et  $\lim_b h = h(b)$ , et donc simplement  $[h]_a^b = h(b) - h(a)$ .
- Dans le cas d'un intervalle semi-ouvert, par exemple  $[a, b[$ , alors le crochet  $[h]_a^b$  converge si, et seulement si,  $h$  possède une limite finie en  $b$ , et l'on a alors  $[h]_a^b = \lim_b h - f(a)$ .

**Proposition 22 (Théorème d'intégration par parties)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ , avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

Si le crochet  $[fg]_a^b$  converge, alors les deux intégrales  $\int_a^b f'g$  et  $\int_a^b fg'$  sont de même nature et, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Démonstration page 403

**Principe de démonstration.** Si, par exemple,  $I = [a, b[$ , on intègre par parties sur  $[a, x]$ , avec  $a < x < b$ , puis l'on fait tendre  $x$  vers  $b$ .

**Ex. 22.** Considérons l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} dt$ .

- La fonction  $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ , et, puisque  $\operatorname{Arctan}$  est bornée, on  $\frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} = O_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$ . Par comparaison avec un exemple de Riemann convergent,

on en déduit que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} dt$  converge absolument, donc converge.

- Posons  $u : t \mapsto -\frac{1}{t}$  et  $v \mapsto \operatorname{Arctan} t$ .

\* Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ .

\* On a  $u(t)v(t) = -\frac{\operatorname{Arctan} t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc le crochet  $[uv]_1^{+\infty}$  converge et l'on a :

$$[uv]_1^{+\infty} = -u(1)v(1) = \frac{\pi}{4}.$$

- Puisque, d'après le premier point, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} u'v$  converge, le théorème d'intégration

par parties assure que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} uv'$  converge aussi, et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} u'v = [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} uv' \quad i.e. \quad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

- Il a été vu à l'exemple 4 de la page 379 que  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \frac{\ln 2}{2}$ .

On a donc obtenu  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Point méthode** En pratique, on peut commencer par intégrer par parties sur les primitives, puis passer à la limite. Il y a deux buts possibles :

Exo  
9.4

- justifier une convergence,
- effectuer un calcul.

**Ex. 23.** Étudions la convergence de  $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$  et calculons son éventuelle valeur.

- La fonction  $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$  est continue sur  $]0, 1[$ .

**Étude en 0.** On a  $\ln(1-t^2) \sim -t^2$  donc  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -1$ . Ayant une limite finie en 0,  $f$  est intégrable en 0.

**Étude en 1.** Au voisinage de 1, on a :

$$f(t) \sim \ln(1-t^2) = \underbrace{\ln(1-t)}_{\longrightarrow -\infty} + \underbrace{\ln(1+t)}_{=O(1)} \sim \ln(1-t).$$

Par croissances comparées, on obtient  $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ , donc par comparaison avec un exemple de Riemann convergent,  $f$  est intégrable en 1.

Par conséquent, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$ , donc l'intégrale  $I$  est convergente.

- Pour l'intégration par parties, choisissons comme primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  celle qui est nulle en 1, c'est-à-dire  $t \mapsto 1 - \frac{1}{t}$ , ce qui donne :

$$\int^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = \left[ \left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t^2) \right]^x - \int^x \underbrace{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \frac{-2t}{1-t^2}}_{= \frac{2}{1+t}} dt.$$

\* L'intégrale  $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$  converge, d'après ce qui précède.

\* On a  $\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t^2) \underset{0}{\sim} t$ , de limite nulle en 0.

On a aussi  $\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t^2) \underset{1}{\sim} (t-1) \ln(1-t)$ , de limite nulle en 1 par croissances comparées.

Ainsi, le crochet  $\left[ \left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t^2) \right]_0^1$  converge (et il est nul).

D'après le théorème d'intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = \left[ \left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t^2) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -2 \ln 2.$$

**Remarque** Pour mener ce calcul, il a fallu choisir une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  pour que le crochet converge. Comme toutes les primitives d'une fonction continue sont égales à une constante près, il sera assez courant d'avoir à réfléchir au choix de cette constante.

## 2 Changement de variable

Soit  $(a, b, \alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^4$  tel que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ .

### Proposition 23 (Théorème de changement de variable)

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[,$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1,$  strictement croissante et bijective. Alors les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Démonstration page 403

**Principe de démonstration.** Remarquer qu'en notant  $F$  une primitive de  $f,$  alors  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $\varphi' \times f \circ \varphi,$  et utiliser le point méthode de la page 382.

**Remarque** Dans le cas d'un intervalle  $[a, b[,$  on pourra se ramener à la situation de la proposition 23, puisque si  $\int_{[a, b[} f$  converge, il en de même de  $\int_{]a, b[} f$  et les deux intégrales sont égales. Même principe pour un intervalle  $]a, b].$

**Ex. 24.** Montrons l'égalité  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[.$

Par croissances comparées, on a  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$  On en déduit, par comparaison à un exemple de Riemann convergent, que  $t \mapsto e^{-t^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[,$  donc d'intégrale convergente. Appliquons le théorème de changement de variable sur  $]0, +\infty[,$  en utilisant le changement de variable  $[t = \sqrt{u}].$  La fonction  $\varphi : u \mapsto \sqrt{u}$  est de classe  $\mathcal{C}^1,$  strictement croissante et bijective de  $]0, +\infty[$  sur lui-même et la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[.$

On en déduit la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du$  et l'égalité annoncée.

### Proposition 24 (Théorème de changement de variable, cas décroissant)

Soit  $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{K})$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[,$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1,$  strictement décroissante et bijective. Alors les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

**Démonstration.** Le principe est le même que pour la proposition 23, en notant bien que cette fois on a  $\lim_{\alpha} \varphi = b$  et  $\lim_{\beta} \varphi = a.$   $\square$

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

### Remarques

- Dans chacun des deux cas, on a  $\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du$ .
- Comme  $\varphi'$  est de signe constant, en appliquant le théorème de changement de variable à  $|f|$ , on obtient que l'intégrabilité de  $f$  sur  $]a, b[$  équivaut à celle de  $(f \circ \varphi) \times \varphi'$  sur  $]\alpha, \beta[$ .

**Ex. 25.** Montrons la convergence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$  et calculons sa valeur.

- La fonction  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** Par croissances comparées, on a  $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ , donc  $f$  est intégrable en 0.

**Étude en  $+\infty$ .** On a  $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \sim \frac{\ln t}{t^2}$  donc, par croissances comparées,  $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ , donc  $f$  est intégrable en  $+\infty$ .

Ainsi,  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc d'intégrale convergente.

- Effectuons le changement de variable  $[u = \frac{1}{t}]$  :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1/u)}{(1+\frac{1}{u})^2} \frac{-1}{u^2} du \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{(1+u)^2} du = -I \quad \text{donc} \quad I = 0. \end{aligned}$$

## 3 Semi-convergence

Il se peut qu'une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$  ne soit pas intégrable, mais que l'intégrale  $\int_I f$  converge. On dit alors que cette dernière intégrale est **semi-convergente**.

Comme pour les séries semi-convergentes, l'étude de la convergence d'une intégrale non absolument convergente ne peut pas se faire complètement à l'aide des théorèmes de comparaison, puisque ces derniers ne concernent que des fonctions intégrables.

Il va donc falloir transformer l'intégrale pour pouvoir étudier sa convergence. Un changement de variable ne sert à rien en général, puisque, d'après la remarque de la page 394, on ne pourra pas obtenir une intégrale absolument convergente en partant d'une intégrale semi-convergente.

L'outil principal est l'*intégration par parties* avec en général comme objectif de transformer l'intégrale en faisant apparaître une intégrale absolument convergente.

**Ex. 26.** Soit  $\alpha \in ]0, 1]$ . Étudions la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ .

- La fonction  $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^\alpha}$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .
- Remarquons que  $\left| \frac{e^{it}}{t^\alpha} \right| = \frac{1}{t^\alpha}$ , donc, comme  $\alpha \leq 1$ , la fonction  $t \mapsto \left| \frac{e^{it}}{t^\alpha} \right|$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .
- Effectuons une intégration par parties en remarquant que :

$$\frac{e^{it}}{t^\alpha} = u'(t)v(t) \quad \text{avec} \quad u(t) = \frac{e^{it}}{i} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{t^\alpha}.$$

- \* Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[1, +\infty[$ .
- \* On a  $u(t)v(t) = \frac{e^{it}}{it^\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc le crochet  $[uv]_1^{+\infty}$  converge. Le théorème d'intégration par parties assure alors que les intégrales  $\int_1^{+\infty} u'v$  et  $\int_1^{+\infty} uv'$  ont même nature.
- \* On a  $u(t)v'(t) = -\frac{\alpha e^{it}}{it^{\alpha+1}} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ , donc, comme  $\alpha + 1 > 1$ , on en déduit, par comparaison avec un exemple de Riemann convergent, que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} uv'$  converge absolument, donc converge.

Conclusion : l'intégrale  $\int_1^{+\infty} u'v$ , c'est-à-dire  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ , est convergente.

**Ex. 27.** En remarquant que  $\frac{\cos t}{t^\alpha} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}}{t^\alpha}\right)$  et  $\frac{\sin t}{t^\alpha} = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{it}}{t^\alpha}\right)$ , la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ , obtenue par l'exemple précédent dans le cas  $\alpha \in ]0, 1]$ , implique la convergence des deux intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ .

**Remarque** La convergence de ces deux intégrales aurait pu s'obtenir directement par intégration par parties, en suivant le même schéma qu'à l'exemple 26.

**Remarque** Pour l'étude de certaines intégrales non absolument convergentes, on pourra, comme pour les séries, effectuer un développement asymptotique de la fonction, le dernier terme écrit étant :

- ou bien une fonction intégrable,
- ou bien de signe constant (dans le cas où la fonction est à valeurs réelles).

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Ex. 28.** Montrons la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$

La fonction  $f : t \mapsto \sin\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$  est continue sur  $[1, +\infty[$ .

Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ .

Le développement limité  $\sin x = x + O(x^3)$  donne alors, quand  $t \rightarrow +\infty$  :

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{\sin^3 t}{t^{3/2}}\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

Par comparaison à un exemple de Riemann, la fonction  $t \mapsto f(t) - \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Ainsi, les intégrales  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  ont même nature. Or, d'après l'exemple 27

de la page précédente, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  est convergente. Par conséquent, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est également convergente. □

## IV Intégration des relations de comparaison

Dans ce qui suit, les fonctions sont définies sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ , et l'on fait une étude locale au voisinage de  $b$ .

On procéderait de la même façon dans le cas d'un intervalle  $]a, b]$ , pour une étude au voisinage de  $a$ .

Comme dans le chapitre sur les séries, dans lequel ont été donnés deux théorèmes de *sommation des relations de comparaison*, nous donnons-ici deux théorèmes d'*intégration des relations de comparaison* :

- un dans le cas convergent, qui donne alors une information sur le reste ;
- un dans le cas divergent, qui donne alors une information sur l'intégrale partielle.

### 1 Cas convergent : comparaison des restes

**Proposition 25 (Intégration des relations de comparaison, cas convergent)**

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{IK})$ , ainsi que  $\varphi \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{IR})$  de signe constant et intégrable.

- Si  $f_b = O(\varphi)$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  et  $\int_x^b f_{x \rightarrow b} = O\left(\int_x^b \varphi\right)$ .
- Si  $f_b = o(\varphi)$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  et  $\int_x^b f_{x \rightarrow b} = o\left(\int_x^b \varphi\right)$ .
- Si  $f_b \sim \varphi$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  et  $\int_x^b f_{x \rightarrow b} \sim \int_x^b \varphi$ .

Démonstration page 404

**Remarque** L'énoncé précédent, donnant un résultat au voisinage de  $b$ , reste valable si la fonction  $\varphi$  n'est positive qu'au voisinage de  $b$ .

**Ex. 29.** Considérons la fonction  $f : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}$ , définie et continue sur  $[1, +\infty[$ .

- On a  $\frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t\sqrt{t}}$ . Comme  $\frac{3}{2} > 1$ , on déduit par comparaison à un exemple de Riemann que la fonction  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ ; cela justifie la convergence de l'intégrale  $\int_x^{+\infty} f(t) dt$  pour tout  $x \geq 1$ .
- Déterminons un équivalent simple du reste  $\int_x^{+\infty} f(t) dt$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Comme on a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{\pi}{2t\sqrt{t}}}_{\geq 0} \quad \text{avec} \quad \frac{3}{2} > 1,$$

on en déduit, par intégration des relations de comparaison (cas convergent) :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{\pi}{2t\sqrt{t}} dt = \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

**Ex. 30.** Déterminons un équivalent simple de  $\operatorname{Arccos}$  en 1 en utilisant l'intégration des relations de comparaison (cas convergent).

- Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [-\operatorname{Arccos} t]_x^1 = \operatorname{Arccos} x$ .
- D'autre part, on a l'équivalent simple suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t\sqrt{1-t}}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}}_{\geq 0}.$$

Par intégration des relations de comparaison (cas convergent), on en déduit :

$$\operatorname{Arccos} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} = \sqrt{2(1-x)}.$$

## 2 Cas divergent : comparaison des intégrales partielles

**Proposition 26** (Intégration des relations de comparaison, cas divergent) —

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{IK})$ , ainsi que  $\varphi \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{IR})$  positive et non intégrable.

- Si  $f \underset{b}{=} O(\varphi)$ , alors  $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x \varphi\right)$ .
- Si  $f \underset{b}{=} o(\varphi)$ , alors  $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x \varphi\right)$ .
- Si  $f \underset{b}{\sim} \varphi$ , alors  $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x \varphi$ .

Exo  
9.7

Démonstration page 404

**Ex. 31.** Soit  $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{IR}_+, \mathbb{IK})$  et  $\ell \in \mathbb{IK}$ . On suppose que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$ .

Alors on a  $f(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$  et la fonction constante égale à 1 est positive et non intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Par intégration des relations de comparaison (cas divergent), on en déduit :

$$\int_0^x (f(t) - \ell) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^x 1 dt\right) \quad \text{donc} \quad \int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \ell x + o(x).$$

**Ex. 32.** Déterminons, à l'aide d'une intégration par parties, un équivalent simple de  $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- Tout d'abord, on a  $\frac{t}{\ln t} \rightarrow +\infty$ , donc  $\frac{1}{t} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ . Ainsi, par comparaison à un exemple de Riemann divergent, la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  n'est pas intégrable sur  $[2, +\infty[$ .
- Par intégration par parties, on a, pour tout  $x \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} &= \left[ \frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \\ &= \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}. \end{aligned} \tag{*}$$

- Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a :

$$\frac{1}{\ln^2 t} = o\left(\frac{1}{\ln t}\right).$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  étant continue, positive et non intégrable sur  $[2, +\infty[$ , on a par intégration des relations de comparaison (cas divergent) :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right).$$

La relation (\*) donne alors :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

## Démonstrations

**Proposition 1** En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, on obtient :

$$\forall x \in [a, b] \quad \int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$

Les fonctions  $x \mapsto \int_a^x f$  et  $x \mapsto \int_c^x f$  diffèrent donc d'une constante. L'existence d'une limite finie en  $b$  pour l'une équivaut donc à l'existence d'une limite finie en  $b$  pour l'autre. Les deux intégrales  $\int_{[a,b]} f$  et  $\int_{[c,b]} f$  sont donc de même nature, et en cas de convergence, on obtient, en faisant tendre  $x$  vers  $b$  dans la relation précédente :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

**Proposition 3** Pour  $x \in [a, b]$ , on a, par la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment :

$$\int_{[a,b]} f - \int_{[a,x]} f = \int_{[x,b]} f.$$

La fonction  $f$  étant continue par morceaux sur un segment, elle est bornée. Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,x]} f \right| \leq (b-x) \|f\|_\infty.$$

Par conséquent, on a  $\int_{[a,x]} f \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_{[a,b]} f$ . Cela prouve, par définition, que l'intégrale  $\int_{[a,b]} f$  converge et donne l'égalité :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

**Proposition 4** Pour  $x \in [a, b]$ , on a  $\int_a^x f = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$  donc, par définition, la convergence de l'intégrale  $\int_a^b f$  équivaut à l'existence dans  $\mathbb{K}$  de  $\lim_b F$  et, dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \lim_b F - F(a).$$

De plus, en cas de convergence, la fonction  $g$  définie sur  $[a, b]$  par  $x \mapsto \int_x^b f$  vérifie :

$$\forall x \in [a, b] \quad g(x) = \lim_b F - F(x),$$

et par conséquent est dérivable, de dérivée  $-f$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Lemme 5** D'après la proposition 1 de la page 377 et son analogue dans le cas d'un intervalle ouvert à gauche, les convergences des intégrales  $\int_{]a,c]} f$  et de  $\int_{[c,b[} f$  entraînent les convergences des intégrales  $\int_{]a,c'[} f$  et  $\int_{[c',b[} f$  et l'on a :

$$\int_{]a,c']} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,c']} f \quad \text{et} \quad \int_{[c',b[} f = - \int_{[c',c']} f + \int_{[c,b[} f.$$

En combinant ces deux égalités, on obtient l'égalité annoncée.

**Proposition 6** Comme  $f$  est positive, la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f$  est croissante sur  $[a, b[$ , puisque, d'après la relation de Chasles :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad x \leq y \implies \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f \geq 0.$$

D'après le théorème de la limite monotone, deux cas peuvent se présenter :

- soit  $F$  est majorée et alors  $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$  ;
- soit  $F$  n'est pas majorée et alors  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$ .

**Proposition 7** Pour  $x \in [a, b[$ , posons  $F(x) = \int_a^x f$  et  $G(x) = \int_a^x g$ . La majoration  $f \leq g$  sur  $[a, b[$  et la croissance de l'intégrale (sur un segment) entraînent  $F \leq G$  sur  $[a, b[$ . On conclut alors en passant à la limite en  $b$  puisque, d'après la proposition 6 de la page 383,  $F$  et  $G$  admettent toutes deux des limites dans  $[0, +\infty]$ .

Si  $\int_a^b g < +\infty$ , alors  $\int_a^b f < +\infty$  donc  $\int_a^b f$  est convergente.

**Proposition 8** La fonction  $t \mapsto e^{-\alpha t}$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$ .

Cas  $\alpha = 0$ . On a  $\int_0^{+\infty} 1 dt = [t]_0^{+\infty} = +\infty$ .

Cas  $\alpha \neq 0$ . On a  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \left[ -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$

D'où la conclusion.

### Proposition 9

- La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue et positive sur  $[1, +\infty[$ .  
Cas  $\alpha \neq 1$ . On a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Cas  $\alpha = 1$ . On a  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^{+\infty} = +\infty$ .

Donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

- La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue et positive sur  $]0, 1]$ .

**Cas  $\alpha \neq 1$ .** On a :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

**Cas  $\alpha = 1$ .** On a  $\int_0^1 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_0^1 = +\infty$ .

Donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .

- Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$  et  $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$  sont continues et positives sur  $[a, b[$  et  $]a, b]$  respectivement.

**Cas  $\alpha \neq 1$ .** On a :

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left[ \frac{-(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

et

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \left[ \frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

**Cas  $\alpha = 1$ .** On a :

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)} = [-\ln(b-t)]_a^b = +\infty \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{dt}{(t-a)} = [\ln(t-a)]_a^b = +\infty.$$

Donc les intégrales  $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$  et  $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$  convergent si, et seulement si,  $\alpha < 1$ .

**Proposition 12** Supposons  $f$  positive sur  $I$ . Le résultat est déjà connu si  $I$  est un segment.

Si  $I$  est de la forme  $[a, b[$ , alors  $\int_a^b f$  est la limite en  $b$  de la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  qui est une fonction positive, donc est un réel positif.

On procède de même si  $I$  est de la forme  $]a, b]$ , et l'on se ramène à ces deux cas si  $I$  est de la forme  $]a, b[$ .

**Proposition 14** Le résultat est connu si  $I$  est un segment. On s'y ramène dans les autres cas.

En effet, dans le cas où  $I$  est de la forme  $[a, b[$ , on considère la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  qui est une fonction croissante et positive sur  $[a, b[$ . L'hypothèse  $\int_a^b f(t) dt = 0$  signifie que  $F \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$  et ainsi,  $F$  est nulle sur  $[a, b[$ . D'après le résultat dans le cas d'un segment, on en déduit que  $f$  est nulle sur  $[a, x]$ , pour tout  $x \in ]a, b[$ , c'est-à-dire sur  $[a, b[$ .

On raisonne de façon analogue dans le cas où  $I$  est de la forme  $]a, b]$  et l'on se ramène à ces deux cas si  $I$  est ouvert.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Proposition 15** Le cas  $J = I$  étant trivial, supposons  $J \subsetneq I$ .

Si aucune des extrémités de  $J$  n'est une extrémité ouverte de  $I$ , la fonction  $f$  est définie et continue par morceaux sur le segment  $\text{Adh}(J)$ , et il a déjà été indiqué qu'alors l'intégrale  $\int_J f$  converge. Supposons donc qu'au moins l'une des extrémités de  $J$  soit une extrémité ouverte de  $I$ .

**Cas  $I = [a, b]$ .** Dans ce cas, on a  $J = [c, b]$  avec  $a \leq c < b$ , et la convergence de  $\int_J f$  résulte

du caractère local de la convergence d'une intégrale (cf. proposition 1 de la page 377).

**Cas  $I = ]a, b]$ .** Se traite de manière analogue au cas précédent.

**Cas  $I = ]a, b[$ .** Dans ce cas,  $J = [c, b[$  ou  $J = ]a, c]$  avec  $a < c < b$ ; la convergence de l'intégrale  $\int_J f$  provient alors de la définition de la convergence de l'intégrale de  $f$  sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$  (cf. lemme 5 et définition 4 de la page 381).

**Proposition 16** La relation de Chasles est déjà connue pour l'intégrale sur un segment. Ici, le résultat est donc immédiat si  $x, y$  et  $z$  ne sont pas des extrémités ouvertes de  $I$ .

Il reste à traiter les cas où au moins l'un des réels  $x, y$  et  $z$  est une extrémité ouverte de  $I$ . Par disjonction de cas, on se ramène à utiliser ou la proposition 1 de la page 377 ou le lemme 5 de la page 381.

### Proposition 17

- Par définition, on a  $L^1(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ .
- La fonction nulle sur  $I$  est intégrable sur  $I$ .
- Soit  $(f, g) \in L^1(I, \mathbb{K})^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Par inégalité triangulaire, on a  $|\lambda f + g| \leq |\lambda| |f| + |g|$ . Or  $\int_I |f|$  et  $\int_I |g|$  convergent donc  $\int_I |\lambda| |f| + |g|$  converge. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions à valeurs positives, l'intégrale  $\int_I |\lambda f + g|$  converge, c'est-à-dire  $\lambda f + g \in L^1(I, \mathbb{K})$ .

### Théorème 18

**Cas des fonctions à valeurs réelles.** Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ . Introduisons les deux fonctions :

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{et} \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Ces deux fonctions sont continues par morceaux et *positives* et, comme  $|f| = f^+ + f^-$ , on a les deux inégalités  $f^+ \leq |f|$  et  $f^- \leq |f|$ .

D'après le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, les intégrales  $\int_I f^+$  et  $\int_I f^-$  sont donc convergentes ; comme  $f = f^+ - f^-$ , la convergence de  $\int_I f$  en résulte.

**Cas des fonctions à valeurs complexes.** Soit  $f \in L^1(I, \mathbb{C})$ . On a  $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ . Grâce aux inégalités :

$$|\operatorname{Re} f| \leq |f| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im} f| \leq |f|,$$

on déduit du théorème de comparaison que les fonctions  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont intégrables, donc leurs intégrales convergent d'après le premier cas. La convergence de  $\int_I f$  résulte alors de la proposition 11 de la page 386.

**Théorème 19** On effectue la démonstration dans le cas  $I = [a, b[$ , le cas  $I = ]a, b]$  étant analogue et le cas  $I = ]a, b[$  s'y ramenant. Par inégalité triangulaire de l'intégrale sur un segment, on a :

$$\forall x \in [a, b[ \quad \left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f|.$$

On conclut alors en passant à la limite lorsque  $x$  tend vers  $b$ , puisque les deux intégrales convergent.

**Théorème 21**

- Supposons  $f = O(g)$  et  $g$  intégrable sur  $[a, b[$ .

Par définition, il existe  $k \geq 0$  et  $c \in [a, b[$  tels que :

$$\forall t \in [c, b[ \quad |f(t)| \leq k|g(t)|.$$

Comme  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ , donc sur  $[c, b[$ , l'intégrale  $\int_c^b k|g|$  est convergente. Les

fonctions  $|f|$  et  $k|g|$  étant positives, le théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs positives (cf. proposition 7 de la page 384) assure alors que l'intégrale  $\int_c^b |f|$  converge. Par

suite, l'intégrale  $\int_a^b |f|$  converge, donc  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .

- Si  $f \underset{b}{\sim} g$ , alors  $f = O(g)$  et  $g = O(f)$ . On conclut alors à l'aide du premier point.

**Proposition 22** Traitons le cas où  $I = [a, b[$  ; le cas  $I = ]a, b]$  se traite de la même manière, et le cas  $I = ]a, b[$  se ramène aux deux précédents.

Pour  $x \in [a, b[, une intégration par parties sur le segment  $[a, x]$  donne :$

$$\int_a^x f'g = [fg]_a^x - \int_a^x fg'. \quad (*)$$

Si le crochet  $[fg]_a^b$  converge, alors  $[fg]_a^x$  possède une limite (finie) quand  $x$  tend vers  $b$ . Dans

ce cas, si l'un des deux termes  $\int_a^x f'g$  et  $\int_a^x fg'$  possède une limite finie quand  $x$  tend vers  $b$ ,

alors l'autre aussi : les deux intégrales  $\int_a^b f'g$  et  $\int_a^b fg'$  ont donc même nature.

Si elles convergent, on obtient alors la formule d'intégration par parties souhaitée en passant à la limite quand  $x$  tend vers  $b$  dans la relation (\*) précédente.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**Proposition 23** Notons  $F$  une primitive de la fonction continue  $f$  sur  $]a, b[$ .

- On sait (cf. point méthode de la page 382) que l'intégrale  $\int_a^b f$  converge si, et seulement si,  $F$  admet des limites finies en  $a$  et  $b$ , et dans cas  $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$ .
- Remarquons d'autre part que la fonction  $F \circ \varphi$  est une primitive de  $\varphi' \times f \circ \varphi$  sur l'intervalle  $]\alpha, \beta[$ . Ainsi, l'intégrale  $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi$  converge si, et seulement si,  $F \circ \varphi$  possède des limites finies en  $\alpha$  et  $\beta$ , et dans ce cas  $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi = \lim_\beta F \circ \varphi - \lim_\alpha F \circ \varphi$ .

Cela donne le résultat souhaité, car d'après les hypothèses sur  $\varphi$  et le théorème de composition des limites, la fonction  $F \circ \varphi$  admet une limite finie en  $\alpha$  (respectivement  $\beta$ ) si, et seulement si, la fonction  $F$  admet une limite finie en  $a$  (respectivement  $b$ ), et ces limites sont alors égales.

**Proposition 25** Dans les trois cas, l'intégrabilité de  $f$  se déduit du théorème de comparaison.

- Si  $f = O(\varphi)$  au voisinage de  $b$ , il existe  $K > 0$  et  $b' \in [a, b[$  tels que :

$$\forall t \in [b', b[ \quad |f(t)| \leq K\varphi(t).$$

On en déduit, pour  $x \in [b', b[$  :

$$\left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq K \int_x^b \varphi.$$

On a donc établi que  $\int_x^b f = O\left(\int_x^b \varphi\right)$ , quand  $x$  tend vers  $b$ .

- Supposons  $f = o(\varphi)$  au voisinage de  $b$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe  $b' \in [a, b[$  tel que :

$$\forall t \in [b', b[ \quad |f(t)| \leq \varepsilon\varphi(t).$$

On en déduit, pour  $x \in [b', b[$  :

$$\left| \int_x^b f \right| \leq \int_x^b |f| \leq \varepsilon \int_x^b \varphi.$$

On a donc établi que  $\int_x^b f = o\left(\int_x^b \varphi\right)$  quand  $x$  tend vers  $b$ .

- Supposons  $f \underset{b}{\sim} \varphi$ . Alors on a  $f - \varphi = o(\varphi)$  et l'on conclut par application du point précédent.

**Proposition 26** Comme  $\varphi$  est positive et n'est pas intégrable sur  $[a, b[$ , on a  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \varphi = +\infty$ .

- Si  $f = O(\varphi)$  au voisinage de  $b$ , il existe  $K > 0$  et  $b' \in [a, b[$  tels que :

$$\forall t \in [b', b[ \quad |f(t)| \leq K\varphi(t).$$

On en déduit, pour  $x \in [b', b[$  :

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^{b'} |f| + K \int_{b'}^x \varphi \leq \int_a^{b'} |f| + K \int_a^x \varphi.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \varphi = +\infty$ , il existe  $b'' \in [b', b[$  tel que :

$$\forall x \in [b'', b[ \quad \int_a^{b''} |f| \leq K \int_a^x \varphi.$$

On a donc :

$$\forall x \in [b'', b[ \quad \left| \int_a^x f \right| \leq 2K \int_a^x \varphi,$$

ce qui prouve que  $\int_a^x f = O\left(\int_a^x \varphi\right)$ , quand  $x$  tend vers  $b$ .

- Supposons  $f = o(\varphi)$  au voisinage de  $b$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ; il existe  $b' \in [a, b[$  tel que :

$$\forall t \in [b', b[ \quad |f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t).$$

On en déduit, pour  $x \in [b', b[$  :

$$\left| \int_a^x f \right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_{b'}^x \varphi \leq \int_a^{b'} |f| + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x \varphi.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x \varphi = +\infty$ , il existe  $b'' \in [b', b[$  tel que :

$$\forall x \in [b'', b[ \quad \int_a^{b''} |f| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^x \varphi.$$

On a donc :

$$\forall x \in [b'', b[ \quad \left| \int_a^x f \right| \leq \varepsilon \int_a^x \varphi,$$

ce qui prouve que  $\int_a^x f = o\left(\int_a^x \varphi\right)$ , quand  $x$  tend vers  $b$ .

- Supposons  $f \underset{b}{\sim} \varphi$ . Alors on a  $f - \varphi \underset{b}{=} o(\varphi)$  et l'on conclut grâce au point précédent.

## S'entraîner et approfondir

**9.1** Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}} du$ .  
 →<sup>380</sup>

**9.2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . On définit  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par  $f(t) = \frac{t - [t]}{t^2}$ .  
 →<sup>384</sup>

- Montrer que  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est bien définie dans  $[0, +\infty]$  et :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \ln(j+1) - \ln j - \frac{1}{j+1} \right) < +\infty.$$

- Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $1 - \int_1^{+\infty} f(t) dt$ .

### 9.3 Intégrales de Bertrand

→<sup>389</sup> On étudie ici, en fonction de  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  la nature de l'**intégrale de Bertrand** :

$$B_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

- Établir la convergence de  $B_{\alpha,\beta}$  pour  $\alpha > 1$ .
- Établir la divergence de  $B_{\alpha,\beta}$  pour  $\alpha < 1$ .
- Faire l'étude de  $B_{\alpha,\beta}$  pour  $\alpha = 1$ .

**9.4** 1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$  converge.  
 →<sup>392</sup>

- À l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_{n+1}$  à l'aide de  $I_n$ .
- Calculer  $I_n$ .

**9.5** Déterminer la nature des intégrales  $\int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right) dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ .  
 →<sup>395</sup>

**9.6** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .  
 →<sup>396</sup>

- Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la convergence de l'intégrale définissant  $u_n$ .
- Déterminer un équivalent simple de la suite  $(u_n)$ .

*Indication.* On pourra effectuer une intégration par parties.

**9.7** Pour tout  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$ .  
 →<sup>398</sup>

- Montrer que pour tout  $x > 0$ , l'intégrale  $f(x)$  est convergente.
- Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

**9.8** Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{t}) \ln t}{\sqrt{t} - \sin t} dt ;$

2.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt ;$

3.  $\int_0^1 t^\alpha \left( \ln \frac{1}{t} \right)^\beta dt$  (on discutera suivant les réels  $\alpha$  et  $\beta$ ).

**9.9** Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt$ .

**9.10** Déterminer, en fonction du réel  $\alpha$ , la nature de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln \left( \frac{t+1}{t-1} \right) dt$ .

**9.11** Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \cos(t^2 + t) dt$  est convergente.

\* **9.12** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que les intégrales  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et  $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$  convergent.

Montrer que  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**9.13** Soit  $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{K})$  telle que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt$ .

2. On suppose de plus que  $f$  est à valeurs réelles positives et décroissante.

Montrer que  $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

\* **9.14** Soit  $\alpha > 0$ . On pose  $f : x \mapsto xe^{-x^\alpha \sin^2 x}$ .

1. Donner la nature, selon  $\alpha$ , de la série  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} f$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $f$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

\* **9.15** Soit  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $\int_0^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ .

2. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-a) - f(t)| dt$ .

(a) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(t - \frac{a}{2}\right) - f\left(t + \frac{a}{2}\right) \right| dt.$$

(b) En déduire que :

$$F(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f|.$$

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

- ★ 9.16 Soit  $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$  admet une limite finie en  $+\infty$  si, et seulement si, la fonction  $x \mapsto x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$  admet une limite finie en  $+\infty$ , et qu'alors ces limites sont égales.

*Indication.* On pourra effectuer des intégrations par parties.

- ★ 9.17 1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ .
2. Justifier la convergence de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ .
3. Linéariser  $\sin^3 t$ , puis calculer  $I$  à l'aide de la première question.

### ★ 9.18 Intégrale de Dirichlet.

1. Montrer que la fonction  $f : ]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt$ .

Justifier l'existence de  $I_n$ . Calculer  $I_{n+1} - I_n$  puis  $I_n$ .

3. Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$ .

4. Montrer que l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de  $I$ .

## Solutions des exercices

**9.1** La fonction  $u \mapsto \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}}$  est continue sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et l'une de ses primitives

est  $F : u \mapsto 2\sqrt{\sin u}$ . Comme  $F \xrightarrow[0]{} 0$ , l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}} du$  converge et l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}} du = [F(u)]_0^{\pi/2} = 2.$$

**9.2** 1. La fonction  $f$  est continue par morceaux et positive sur  $[1, +\infty[$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  est bien définie dans  $[0, +\infty]$  et l'on a (cf. point méthode de la page 384) :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(t) dt &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} \frac{t-j}{t^2} dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \left( \ln(j+1) - \ln j - \frac{1}{j+1} \right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \ln(j+1) - \ln j - \frac{1}{j+1} &= \ln \left( 1 + \frac{1}{j} \right) - \frac{1}{j+1} \\ &= \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} + O\left(\frac{1}{j^2}\right) = O\left(\frac{1}{j^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui prouve que :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left( \ln(j+1) - \ln j - \frac{1}{j+1} \right) < +\infty.$$

2. On reprend le calcul précédent :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \ln(j+1) - \ln j - \frac{1}{j+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - u_n). \end{aligned}$$

Par convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ , on en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente et :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

- 9.3** 1. Soit  $\alpha > 1$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  est continue sur  $[2, +\infty[$ .

Fixons  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Pour  $t \geq 2$ , on a :

$$t^\gamma f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} (\ln t)^\beta}.$$

Puisque  $\alpha - \gamma > 0$ , on a, par croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\gamma f(t) = 0 \quad \text{autrement dit} \quad f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Comme  $\gamma > 1$ , on en déduit, par comparaison à un exemple de Riemann, l'intégrabilité de la fonction  $f$  sur  $[2, +\infty[$ , donc la convergence de son intégrale.

2. Soit  $\alpha < 1$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Montrons la divergence de l'intégrale  $B_{\alpha,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ .

La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  est continue sur  $[2, +\infty[$ .

Comme  $\alpha < 1$ , on a  $1 - \alpha > 0$ , donc par croissances comparées (ou directement si  $\beta < 0$ ) :

$$\frac{(\ln t)^\beta}{t^{1-\alpha}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{autrement dit} \quad \frac{1}{t} = o(f(t)).$$

Il en résulte, par comparaison à un exemple de Riemann divergent, que la fonction  $f$  n'est pas intégrable. Par positivité de  $f$ , on en déduit que l'intégrale  $B_{\alpha,\beta}$  est divergente.

3. Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ . Par positivité de l'intégrande, on peut écrire :

$$B_{1,\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_2^{+\infty} \ln'(t)(\ln t)^{-\beta} dt.$$

**Cas**  $\beta = 1$ . On a  $B_{1,1} = [\ln(\ln t)]_2^{+\infty} = +\infty$ .

**Cas**  $\beta \neq 1$ . On a :

$$B_{1,\beta} = \left[ \frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1} \right]_2^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1} < +\infty & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

En conclusion, l'intégrale  $B_{1,\beta}$  converge si, et seulement si,  $\beta > 1$ .

- 9.4** 1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f_n(t) \sim \frac{1}{t^{2n}}$ .

Par comparaison à un exemple de Riemann convergent, on en déduit que  $f_n$  est intégrable, donc que  $I_n$  converge.

2. Pour  $n \geq 1$ , on a :

$$\int^x f_{n+1}(t) dt = \int^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt,$$

puis on intègre par parties la troisième intégrale :

$$\int^x f_{n+1}(t) dt = \int^x f_n(t) dt + \left[ \frac{t}{2n(1+t^2)^n} \right]^x - \frac{1}{2n} \int^x f_n(t) dt.$$

Puisque  $\frac{x}{2n(1+x^2)^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2nx^{2n-1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ , on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

3. On a  $I_1 = \frac{\pi}{2}$  et l'on déduit de la question précédente, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \underbrace{\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \pi}_{=u_n}.$$

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n} u_n &= \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \pi \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi = u_{n+1}, \end{aligned}$$

et l'égalité  $I_1 = u_1$  est évidemment vérifiée.

**9.5** La fonction  $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$  est continue sur  $[1, +\infty[$  ; effectuons un développement de  $f$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + g(t) \quad \text{avec} \quad g(t) \sim -\frac{\sin^2 t}{2t}.$$

- D'après l'exemple 27 de la page 395, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$  converge.
- On peut écrire :

$$\forall t \geq 1 \quad \frac{\sin^2 t}{2t} = \frac{1}{4t} - \frac{\cos(2t)}{4t}.$$

Par intégration par parties, on montre que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{4t} dt$  converge.

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{4t}$  diverge (c'est, à un facteur près, une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{2t} dt$  diverge.

Comme  $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\sin^2 t}{2t}$ , on en déduit que  $g$  n'est pas intégrable. L'équivalent obtenu montrant de plus que  $g$  est de signe fixe au voisinage de  $+\infty$ , la non intégrabilité de  $g$  entraîne la divergence de son intégrale.

En conclusion, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  diverge, puisque  $f$  est la somme de deux fonctions, l'une dont l'intégrale est convergente, l'autre dont l'intégrale est divergente.

**Remarque** Remarquons que nous avons ainsi obtenu deux fonctions continues par morceaux sur  $[1, +\infty[$ , équivalentes en  $+\infty$ , mais dont les intégrales sont de nature différentes.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

- 9.6** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est continue sur  $[n, +\infty[$ .

Par croissances comparées, on a  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Par comparaison à un exemple de Riemann,  $f$  est intégrable sur  $[n, +\infty[$ , donc  $u_n$  est défini.

2. Effectuons une intégration par parties en écrivant  $e^{-t^2} = \frac{1}{2t} \times 2te^{-t^2}$  :

$$\int^x e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2t} e^{-t^2} \right]^x - \int^x \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt.$$

L'intégrale définissant  $u_n$  converge et l'on a  $\frac{e^{-x^2}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , donc :

$$u_n = \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2n} e^{-n^2} - \underbrace{\int_n^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-t^2} dt}_{=v_n}.$$

On a  $\frac{1}{2t^2} e^{-t^2} = o(e^{-t^2})$  et la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  sur  $[1, +\infty[$  est intégrable donc par intégration des relations de comparaison (cas convergent), on a :

$$v_n = o(u_n) \quad \text{donc} \quad u_n \sim \frac{1}{2n} e^{-n^2}.$$

- 9.7** 1. Soit  $x > 0$ . La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Par croissances comparées, on a  $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Comme  $2 > 1$ , on en déduit, par comparaison à un exemple de Riemann, que  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc d'intégrale convergente.

2. Soit  $x \in ]0, 1[$ . Effectuons le changement de variable  $[u = t + x]$  :

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u+x}}{u} du = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (*)$$

Or, par la relation de Chasles, on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}_{\in \mathbb{R} \text{ (intégrale cv)}}. \quad (\diamond)$$

On a l'équivalent simple  $\frac{e^{-u}}{u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \underbrace{\frac{1}{u}}_{\geqslant 0}$ , et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{du}{u}$  diverge. Donc par intégration des relations de comparaison (cas divergent), on en déduit :

$$\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{du}{u} = -\ln x.$$

Comme  $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , la relation  $(\diamond)$  donne :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x \quad \text{donc finalement} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x.$$

**9.8** Dans cet exercice, la fonction dont nous étudions l'intégrale sera toujours notée  $f$ .

- Pour  $t \in ]0, 1]$ , on a  $\sqrt{t} \geq t$  et l'inégalité classique  $\sin t < t$ , vraie pour tout  $t > 0$ , donne  $\sqrt{t} > \sin t$ . On déduit de cela que  $f$  est définie et continue sur  $]0, 1]$ .

Comme  $\sin t \sim t = o(\sqrt{t})$  et  $\text{sh}(\sqrt{t}) \sim \sqrt{t}$ , on a, au voisinage de 0 :

$$f(t) \sim \frac{\sqrt{t} \ln t}{\sqrt{t} - \sin t} \sim \frac{\sqrt{t} \ln t}{\sqrt{t}} = \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Ainsi, comme  $\frac{1}{2} < 1$ , on obtient, par comparaison avec un exemple de Riemann convergent, que  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , donc d'intégrale convergente.

- La fonction  $f$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

**Étude en 1.** Pour  $t > 1$ , on a  $\ln(t^2 - t) = \underbrace{\ln t}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\ln(t-1)}_{\rightarrow -\infty}$  donc :

$$\ln(t^2 - t) \sim \ln(t-1) \quad \text{puis} \quad f(t) \sim \frac{\ln(t-1)}{4}.$$

Par croissances comparées, on en déduit  $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$ , avec  $\frac{1}{2} < 1$ .

Par comparaison à un exemple de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable en 1.

**Étude en  $+\infty$ .** Pour  $t > 1$ , on a  $\ln(t^2 - t) = 2 \ln t + \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$  donc :

$$\ln(t^2 - t) \sim 2 \ln t \quad \text{puis} \quad f(t) \sim \frac{2 \ln t}{t^2}.$$

Par croissances comparées, on en déduit  $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$  avec  $\frac{3}{2} > 1$ .

Par comparaison à un exemple de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable en  $+\infty$ .

En conclusion,  $f$  est intégrable sur  $]1, +\infty[$ , donc d'intégrale convergente.

- La fonction  $f$  est continue sur  $]0, 1[$ .

**Étude en 1.** Comme  $\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$ , on a  $f(t) \sim \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\beta \sim (1-t)^\beta$ . Par comparaison à un exemple de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable en 1 si, et seulement si,  $\beta > -1$ . Par positivité de  $f$ , l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  est divergente dès que  $\beta \leq -1$ .

On suppose donc  $\beta > -1$  dans la suite de l'étude.

**Étude en 0.** On ne peut pas trouver d'équivalent simple de  $f(t)$  en 0. Procédons par disjonction de cas.

- Supposons  $\alpha > -1$  et fixons  $\gamma \in ]-1, \alpha[$ .

Par croissances comparées, on a  $t^{-\gamma} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  car  $\alpha - \gamma > 0$ , donc :

$$f(t) = o(t^\gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma > -1.$$

Par comparaison à un exemple de Riemann,  $f$  est intégrable en 0.

- Supposons  $\alpha < -1$  et fixons  $\gamma \in ]\alpha, -1[$ .

Par croissances comparées, on a  $\frac{t^\gamma}{f(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  car  $\gamma - \alpha > 0$ , donc :

$$t^\gamma = o(f(t)).$$

Si  $f$  était intégrable en 0, alors  $t \mapsto t^\gamma$  serait intégrable en 0 ce qui n'est pas le cas car  $\gamma < -1$ .

Donc  $f$  n'est pas intégrable en 0 et, par positivité de  $f$ , on en déduit que l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  est divergente.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

- Supposons  $\alpha = 1$ . Par positivité de  $f$ , on a :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{t} (-\ln t)^\beta dt = \left[ \frac{-(-\ln t)^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_0^1 = +\infty \quad \text{car} \quad \beta+1 > 0.$$

En conclusion, l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge si, et seulement si,  $\beta > -1$  et  $\alpha > -1$ .

**9.9** La fonction  $f : t \mapsto \ln(1 + \frac{1}{t^2})$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . On  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ .

Par comparaison avec un exemple de Riemann convergent,  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc son intégrale converge.

Déterminons une primitive de  $f$  à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int^x f(t) dt &= \int^x 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \int^x \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \arctan x + c \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notons  $F$  la primitive obtenue en prenant  $c = 0$ .

Comme  $x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ , on a  $F \underset{+\infty}{\longrightarrow} \pi$ ; par suite  $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$  converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = [F(t)]_1^{+\infty} = \pi - \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

**9.10** La fonction  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln \frac{t+1}{t-1}$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

**Étude en 1.** On a  $\ln \frac{t+1}{t-1} = \ln(t+1) - \ln(t-1) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\ln(t-1)$  donc :

$$f(t) \sim -\sin(1) \ln(t-1).$$

Par croissances comparées, on en déduit  $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$ . Par comparaison avec un exemple de Riemann convergent, cela prouve que  $f$  est intégrable en 1.

**Étude en  $+\infty$ .** Comme  $\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1$ , on a :

$$\ln \frac{t+1}{t-1} \sim \frac{t+1}{t-1} - 1 = \frac{2}{t-1} \sim \frac{2}{t} \quad \text{donc} \quad f(t) \sim \frac{2 \sin t}{t^{\alpha+1}}.$$

- Supposons  $\alpha > 0$ . Alors on a  $f(t) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ . Comme  $\alpha+1 > 1$ , on en déduit, par comparaison à un exemple de Riemann convergent, que  $f$  est intégrable en  $+\infty$ .
- Supposons  $\alpha \in ]-1, 0]$  et précisons le développement asymptotique de  $f(t)$ .  
Pour  $t > 1$ , on a :

$$\ln \frac{t+1}{t-1} = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

On a donc :

$$f(t) = \frac{2 \sin t}{t^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{t^{\alpha+3}}\right) \quad \text{ou encore} \quad f(t) - \frac{2 \sin t}{t^{\alpha+1}} = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+3}}\right).$$

Par comparaison à un exemple de Riemann, la fonction  $t \mapsto f(t) - \frac{2 \sin t}{t^{\alpha+1}}$  est intégrable car  $\alpha + 3 > 1$ .

Par intégration par parties (cf. exemple 27 de la page 395), l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^{\alpha+1}} dt$  est convergente, puisque  $\alpha + 1 > 0$ .

Ainsi,  $\int_2^{+\infty} f(t) dt$  est une intégrale convergente.

- Supposons  $\alpha \leq -1$ . On a  $\frac{1}{t^\alpha} \ln \frac{t+1}{t-1} \sim \frac{2}{t^{\alpha+1}}$ , donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall t \geq 2n_0\pi \quad \frac{1}{t^\alpha} \ln \frac{t+1}{t-1} \geq 1.$$

On peut donc écrire, pour tout entier  $n \geq n_0$  :

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} \ln \frac{t+1}{t-1} dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt = 2.$$

Si l'intégrale  $\int_2^{+\infty} f(t) dt$  convergeait et valait  $\ell$ , on aurait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^{2n\pi} f(t) dt = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^{(2n+1)\pi} f(t) dt = \ell,$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(t) dt = 0$ . Cela contredirait la minoration précédente.

L'intégrale  $\int_2^{+\infty} f(t) dt$  est donc divergente.

Conclusion : l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  est convergente si, et seulement si,  $\alpha > -1$ .

**9.11** La fonction  $t \mapsto \cos(t^2 + t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Écrivons :

$$\cos(t^2 + t) = (2t + 1) \cos(t^2 + t) \frac{1}{2t + 1}.$$

Effectuons une intégration par parties en posant  $u(t) = \sin(t^2 + t)$  et  $v(t) = \frac{1}{2t + 1}$ .

- Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ .
- On a  $uv \xrightarrow[+\infty]{} 0$ , donc le crochet  $[uv]_0^{+\infty}$  converge. Le théorème d'intégration par parties assure alors que les deux intégrales  $\int_0^{+\infty} u'v$  et  $\int_0^{+\infty} uv'$  ont même nature.

- On a :

$$u(t)v'(t) = \frac{-2 \sin(t^2 + t)}{(2t + 1)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc, par comparaison à un exemple de Riemann convergent, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} uv'$  converge absolument, donc converge.

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^{+\infty} u'v$ , autrement dit  $\int_0^{+\infty} \cos(t^2 + t) dt$ , est convergente.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

**9.12** Posons  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ .

L'intégrande  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et, par la formule de Taylor reste intégral, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt.$$

Par l'inégalité triangulaire, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| &\leq |F(x+1) - F(x)| + \left| \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \right| \\ &\leq |F(x+1) - F(x)| + \underbrace{\sqrt{\int_x^{x+1} (x+1-t)^2 dt}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{\int_x^{x+1} f'(t)^2 dt}. \end{aligned} \quad (*)$$

La convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  assure que :

$$F(x+1) - F(x) = \int_x^{x+1} f = \underbrace{\int_x^{+\infty} f}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} - \underbrace{\int_{x+1}^{+\infty} f}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

De même, comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$  converge, on a  $\int_x^{+\infty} f'(t)^2 dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Finalement, on conclut de l'inégalité  $(*)$  que  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

**9.13** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a, par la relation de Chasles :

$$\int_{x/2}^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{x/2} f(t) dt.$$

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$  existe dans  $\mathbb{K}$ .

Notant  $\ell$  cette limite, on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(t) dt = \ell - \ell = 0$ .

2. Comme  $f$  est positive et décroissante, on peut écrire :

$$\forall x \geq 0 \quad 0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^x f(t) dt.$$

On déduit de la première question que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} f(x) = 0$ , d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Remarque** La fonction donnée à l'exemple 14 de la page 384 montre que le résultat ne subsiste pas si l'on enlève l'hypothèse de décroissance. L'exercice 9.14 fournit un autre exemple.

**9.14** 1. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2} + n\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} x e^{-x^\alpha \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t + n\pi) e^{-(t+n\pi)^\alpha \sin^2 t} dt.$$

Par concavité de la fonction  $\sin$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t.$$

Par imparité de la même fonction, il vient, pour tout  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\frac{2}{\pi}|t| \leq |\sin t| \leq |t| \quad \text{donc} \quad \frac{4}{\pi^2}t^2 \leq \sin^2 t \leq t^2.$$

On en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\underbrace{(n-1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-((n+1)\pi)^\alpha t^2} dt}_{=m_n} \leq u_n \leq \underbrace{(n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-((n-1)\pi)^\alpha \frac{4}{\pi^2} t^2} dt}_{=M_n}.$$

Or, pour  $a > 0$ , on a :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-at^2} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\pi\sqrt{a}/2}^{\pi\sqrt{a}/2} e^{-u^2} du \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I}{\sqrt{a}} \quad \text{avec} \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du > 0.$$

On en déduit que :

$$m_n \sim (n-1)\pi \frac{I}{((n+1)\pi)^{\alpha/2}} \sim \frac{I\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}} \quad \text{et de même} \quad M_n \sim \frac{I\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{2n^{\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série à termes positifs  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\frac{\alpha}{2} - 1 > 1$ , c'est-à-dire  $\alpha > 4$ .

2. La fonction  $f$  étant à valeurs positives, on a l'égalité suivante dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  (cf. point méthode de la page 384) :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f$ , qui a même nature que  $\int_{\pi/2}^{+\infty} f$ , a aussi même nature que la série  $\sum u_n$ .

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 4$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

- 9.15** 1. Notons  $G(x) = \int_0^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)| dt$ . Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, puis par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{+\infty} |f(t-x)| dt - \int_0^{+\infty} |f(t+x)| dt \leq G(x) \leq \int_0^{+\infty} |f(t-x)| dt + \int_0^{+\infty} |f(t+x)| dt.$$

Les changements de variables  $[u = t-x]$  et  $[u = t+x]$ , effectués là où c'est pertinent, donnent alors :

$$\int_{-x}^{+\infty} |f| - \int_x^{+\infty} |f| \leq G(x) \leq \int_{-x}^{+\infty} |f| + \int_x^{+\infty} |f|.$$

Cela prouve par encadrement que  $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ , car :

$$\int_{-x}^{+\infty} |f| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} |f| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. (a) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Le changement de variable  $[u = t - \frac{a}{2}]$  donne :

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(u - \frac{a}{2}\right) - f\left(u + \frac{a}{2}\right) \right| du.$$

(b) En posant :

$$G(x) = \int_0^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)| dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_{-\infty}^0 |f(t-x) - f(t+x)| dt,$$

on a, d'après la question précédente,  $F(a) = H(\frac{a}{2}) + G(\frac{a}{2})$ . D'après la première question, on a  $G(\frac{a}{2}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ . Avec un raisonnement analogue, on montre que  $H(\frac{a}{2}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ . Par somme de limites, on obtient alors le résultat :

$$F(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f|.$$

- 9.16** La fonction  $F : x \mapsto \int_1^x f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$ , car  $f$  est continue.

- Supposons qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \ell$ .

Commençons par prouver que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$  converge. Pour cela, montrons, par une intégration par parties, que les primitives admettent une limite en  $+\infty$  :

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt = \left[ \frac{F(t)}{t^2} \right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{F(t)}{t^3} dt. \tag{*}$$

Puisque  $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$  admet une limite finie, d'une part  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{t^2} = 0$  et d'autre part  $\frac{F(t)}{t^3} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , donc  $t \mapsto \frac{F(t)}{t^3}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , ce qui prouve la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt$ .

De la relation  $(\star)$ , on déduit :

$$\forall x \geq 1 \quad x \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt}_{=A(x)} = -\frac{F(x)}{x} + 2x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(t)}{t} = \ell$ , on a :

$$\frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

puis par intégration des relations de comparaison (cas convergent) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt - \frac{\ell}{x} = \int_x^{+\infty} \left( \frac{F(t)}{t^3} - \frac{\ell}{t^2} \right) dt = o\left(\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui prouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^3} dt = \ell \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \ell.$$

- Supposons qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x G(x) = \ell \quad \text{avec} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

Alors  $f(x) = -x^2 G'(x)$  et, par une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{x} [-t^2 G(t)]_1^x + \frac{2}{x} \int_1^x t G(t) dt \\ &= \frac{G(1)}{x} - x G(x) + \frac{2}{x} \int_1^x t G(t) dt. \end{aligned}$$

Comme  $t G(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell$ , on a  $t G(t) - \ell = o(1)$  puis, par intégration des relations de comparaison (cas divergent) :

$$\int_1^x t G(t) dt - \ell(x-1) = \int_1^x (t G(t) - \ell) dt = o(x),$$

ce qui donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = \ell$ .

- 9.17** 1. On a, au voisinage de 0,  $\frac{\sin t - t}{t^2} \sim -\frac{t}{6}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$  possède donc un prolongement continu sur  $\mathbb{R}$ , que nous noterons  $f$ .

On peut écrire, pour tout  $x > 0$  :

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{dt}{t} + \int_x^{3x} f(t) dt = \ln 3 + \int_x^{3x} f(t) dt.$$

D'après les propriétés de l'intégrale des fonctions continues,  $x \mapsto \int_x^{3x} f(t) dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; on en déduit, en particulier,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} f(t) dt = 0$ .

En conclusion, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \ln 3$ .

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

2. La fonction  $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et l'on a  $\frac{\sin^3 t}{t^2} \sim t$ , au voisinage de 0. Cette fonction possède donc un prolongement continu sur  $\mathbb{R}_+$ .

Comme pour tout  $t > 0$ , on a  $\left| \frac{\sin^3 t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ , on en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, la convergence absolue de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$  et donc la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ .

3. On a :

$$\begin{aligned}\sin^3 t &= \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{8i} \\ &= \frac{3}{4} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} - \frac{1}{4} \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} = \frac{3 \sin t - \sin 3t}{4}.\end{aligned}$$

Pour  $0 < x < y$ , on peut écrire :

$$\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \int_x^y \frac{3 \sin t}{4t^2} dt - \int_x^y \frac{\sin 3t}{4t^2} dt.$$

Le changement de variable  $[t = \frac{u}{3}]$  dans la deuxième intégrale donne :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\sin^3 t}{t^2} dt &= \int_x^y \frac{3 \sin t}{4t^2} dt - \int_{3x}^{3y} \frac{3 \sin u}{4u^2} du \\ &= \int_x^{3x} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt + \int_{3x}^{3y} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt + \int_{3y}^y \frac{3 \sin t}{4t^2} dt - \int_{3x}^{3y} \frac{3 \sin u}{4u^2} du \\ &= \int_x^{3x} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt - \int_y^{3y} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt.\end{aligned}$$

On a, pour tout  $y > 0$  :

$$\left| \int_y^{3y} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt \right| \leq \int_y^{3y} \left| \frac{3 \sin t}{4t^2} \right| dt \leq \int_y^{3y} \frac{3}{4t^2} dt = \left[ -\frac{3}{4t} \right]_y^{3y}.$$

On en déduit  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{3y} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt = 0$ , d'où :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

En faisant tendre  $x$  vers 0, on obtient, avec le résultat de la première question :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt = \frac{3 \ln 3}{4}.$$

- 9.18** 1. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, \pi]$ . Pour conclure, il suffit de montrer que  $f$  et  $f'$  possèdent des limites finies en 0.

- On a  $f(x) = \frac{2 \sin(x/2) - x}{2x \sin(x/2)}$ . Au voisinage de 0, on a :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - x = 2\left(\frac{x}{2} + O(x^3)\right) - x = O(x^3) \quad \text{et} \quad 2x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim x^2,$$

donc  $f(x) = O(x)$ . On en déduit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ .

- On a, pour tout  $x \in ]0, \pi]$  :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x/2)}{4 \sin^2(x/2)} = \frac{x^2 \cos(x/2) - 4 \sin^2(x/2)}{4x^2 \sin^2(x/2)}.$$

Par développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - 4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)^2}{4x^2 \sin^2(x/2)} \\ &= \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) - 4 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right)}{4x^2 \sin^2(x/2)} = \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{4x^2 \sin^2(x/2)} \sim \frac{-\frac{x^4}{24}}{x^4}. \end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{24}$ .

Le prolongement de classe  $C^1$  de  $f$  ainsi obtenu sera encore noté  $f$ .

2. La fonction  $t \mapsto \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$  est continue sur  $]0, \pi]$  et, au voisinage de 0, on a :

$$\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \sim \frac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}} \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} = 2n+1.$$

Cette fonction a donc un prolongement continu sur  $[0, \pi]$ , d'où l'existence de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{2n+3}{2}t) - \sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \int_0^\pi \frac{2 \sin(\frac{t}{2}) \cos(n+1)t}{\sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(n+1)t dt \\ &= 2 \left[ \frac{\sin(n+1)t}{n+1} \right]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \pi.$$

3. Une intégration par parties avec  $\lambda > 0$  donne :

$$\int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = \left[ -\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} g(x) \right]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \cos(\lambda x) g'(x) dx.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx \right| &\leqslant \frac{|g(b)| + |g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |\cos(\lambda x) g'(x)| dx \\ &\leqslant \frac{|g(b)| + |g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |g'(x)| dx, \end{aligned}$$

d'où  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$ , puisque le majorant tend vers zéro.

## Chapitre 9. Intégration sur un intervalle quelconque

4. La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** La fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  admet une limite finie en 0, donc y est intégrable.

**Étude en  $+\infty$ .** Par intégration par parties, on a :

$$\int^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]^x - \int^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Comme  $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{\cos t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  avec  $2 > 1$ , on en déduit la convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

En conclusion, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente.

En appliquant à la fonction  $f$  de la première question le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0.$$

Vu la définition de  $f$ , on peut écrire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} dt - \frac{I_n}{2} \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} dt - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le changement de variable  $[t = \frac{2u}{2n+1}]$  donne :

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{t} dt = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du.$$

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$  et l'on peut conclure que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

# Chapitre 10 : Séries numériques et vectorielles

<b>I</b>	<b>Séries à valeurs dans un espace de dimension finie . . . . .</b>	<b>424</b>
1	Généralités . . . . .	424
2	Propriétés immédiates . . . . .	426
3	Séries absolument convergentes . . . . .	427
<b>II</b>	<b>Compléments sur les séries numériques . . . . .</b>	<b>429</b>
1	Règle de d'Alembert . . . . .	429
2	Technique de comparaison série-intégrale . . . . .	429
3	Sommation des relations de comparaison . . . . .	434
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>440</b>

# Séries numériques et vectorielles

Le but de ce chapitre est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques et d'étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels de dimension finie.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels ou le corps des complexes.

## I Séries à valeurs dans un espace de dimension finie

Dans cette partie,  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie.

L'espace vectoriel  $E$  est muni d'une norme que l'on notera  $\|\cdot\|$ .

### 1 Généralités

Les définitions et notations sont les mêmes que celles introduites en première année pour les séries à termes réels ou complexes. Rappelons-les brièvement.

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite à termes dans  $E$ , on note  $\sum u_n$  la série de terme général  $u_n$ . Sa somme partielle d'ordre  $n$  est  $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ .
- Lorsque la série  $\sum u_n$  converge, c'est-à-dire lorsque la suite  $(S_n)$  a une limite dans  $E$ , le vecteur  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  est appelé **somme de la série** et est noté  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
- Si le terme général n'est défini qu'à partir du rang  $n_0$ , la série peut être notée  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Sa somme partielle d'ordre  $n$ , avec  $n \geq n_0$ , est  $S_n = \sum_{p=n_0}^n u_p$ .

La somme d'une série convergente  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est notée  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ .

**Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence)**

Si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.

**Démonstration.** Supposons la série  $\sum u_n$  convergente. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est la différence de deux suites ayant la même limite dans  $E$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .  $\square$

**Remarque** Si l'on n'a pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , alors  $\sum u_n$  est divergente; on dit alors que la série est **grossièrement divergente** et l'on parle de **divergence grossière**.

**Attention** Comme dans le cas des séries numériques, la convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais non suffisante de convergence.

**Définition 1**

Si la série  $\sum u_n$  converge, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{p \geq n+1} u_p$  converge; on appelle alors **reste d'ordre  $n$**  de la série  $\sum u_n$  le vecteur de  $E$  suivant :

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

**Attention**

- On ne peut parler de reste que pour une *série convergente*.
- On notera bien que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le reste d'ordre  $n$  est la somme  $\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ , et non  $\sum_{p=n}^{+\infty} u_p$ , afin que l'on dispose pour toute série convergente de la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S = S_n + R_n \quad \text{avec} \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

**Proposition 2**

La suite des restes d'une série convergente tend vers zéro.

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $R_n = S - S_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , d'où le résultat.  $\square$

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

La convergence d'une série n'est rien d'autre que la convergence d'une suite. Réciproquement, dans certains cas, on ramène l'étude de la convergence d'une suite à l'étude de la convergence d'une série en utilisant la proposition suivante.

### Proposition 3 (Lien suite-série)

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $E$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si, et seulement si, la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  est convergente.

On a alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$ .

**Démonstration.** Les sommes partielles d'une série de terme général  $u_n = v_{n+1} - v_n$  vérifiant par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n u_k = v_{n+1} - v_0,$$

on obtient immédiatement le résultat annoncé.  $\square$

**Terminologie** Soit  $v \in E^{\mathbb{N}}$ . La série  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  est appelée **série télescopique** associée à la suite  $v$ .

## 2 Propriétés immédiates

Le résultat qui suit n'est qu'une reformulation, dans le langage des séries, du résultat correspondant sur les suites.

### Proposition 4

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes. Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ .

Alors  $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$  est une série convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exo  
10.2

**Attention** Comme pour des séries numériques, si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont des séries convergentes, alors  $\sum (u_n + v_n)$  l'est aussi. Mais  $\sum (u_n + v_n)$  peut très bien être une série convergente lorsque  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont divergentes.

On ne peut donc pas écrire  $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  sans s'être préalablement assuré de l'existence d'au moins deux de ces trois sommes.

**Proposition 5**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimension finie et  $L \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $\sum u_n$  une série convergente à termes dans  $E$ . Alors  $\sum L(u_n)$  est une série convergente et :

Exo  
10.3

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L(u_n) = L\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).$$

**Démonstration.** Notons  $(S_n)$  la suite des sommes partielles de la série convergente  $\sum u_n$  et  $S$  sa somme. Par linéarité puis continuité de l'application linéaire  $L$  (l'espace  $E$  est de dimension finie), on a :

$$\sum_{k=0}^n L(u_k) = L(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L(S). \quad \square$$

**Proposition 6 (Utilisation d'une base)**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On lui associe les suites composantes  $(u_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . La série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si, les séries  $\sum u_n^{(j)}$  convergent pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et l'on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)} \right) e_j.$$

**Démonstration.** Ce résultat découle immédiatement de la proposition 14 de la page 296 appliquée à la suite des sommes partielles.  $\square$

**Ex. 1.** On retrouve ici le lien entre la convergence d'une série  $\sum u_n$  à termes complexes et celle des séries réelles  $\sum \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ .

**Ex. 2.** Une série matricielle de terme général  $A_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est convergente si, et seulement si, les  $p^2$  séries de termes généraux les coefficients de la matrice  $A_n$  sont convergentes.

### 3 Séries absolument convergentes

**Définition 2**

On dit que la série  $\sum u_n$  est **absolument convergente**, ou **converge absolument**, si la série à termes réels positifs  $\sum \|u_n\|$  est convergente.

**Remarque** Les normes d'un espace de dimension finie étant toutes équivalentes, on déduit du critère de majoration des séries à termes positifs que la notion de convergence absolue d'une série ne dépend pas de la norme choisie.

**Théorème 7**

Toute série absolument convergente d'un espace de dimension finie est convergente.

Démonstration page 438

**Principe de démonstration.** Utiliser les séries composantes et se ramener au cas scalaire.

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

### Proposition 8 (Inégalité triangulaire)

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série absolument convergente à termes dans  $E$ . Alors, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

**Démonstration.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ . L'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\left\| \sum_{n=0}^N u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^N \|u_n\|.$$

La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  étant absolument convergente est aussi convergente. Un passage à la limite lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité précédente donne alors la relation cherchée.  $\square$

**Point méthode** Comme  $\|u_n\| \in \mathbb{R}_+$ , on peut utiliser tous les résultats sur les séries à termes réels positifs pour démontrer la **convergence absolue** d'une série. En particulier, la comparaison de  $\|u_n\|$  ( $\leq$ ,  $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ ) avec une série absolument convergente permet de montrer la convergence absolue de  $\sum u_n$ , donc sa convergence.

En revanche, la comparaison avec des séries à termes positifs divergentes pourra uniquement montrer que la série n'est pas absolument convergente.

On munit  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  d'une norme subordonnée à une norme sur  $\mathbb{K}^p$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

**Ex. 3.** On suppose  $\|A\| < 1$ . Alors, par comparaison à une série géométrique convergente,  $\sum A^n$  est une série absolument convergente, donc convergente.

La série  $\sum A^n$  étant convergente, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ . L'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (I_p - A)(A^0 + \cdots + A^n) = I_p - A^{n+1}$$

prouve, par passage à la limite (par continuité du produit matriciel), la relation :

$$(I_p - A) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \right) = I_p.$$

On en déduit que les matrices  $I_p - A$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$  sont inverses l'une de l'autre.

**Ex. 4.** On a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!},$$

ce qui, par comparaison à une série exponentielle, montre que la série  $\sum \frac{A^n}{n!}$  converge absolument.

On montre de même, en munissant  $\mathcal{L}(E)$  de la norme subordonnée à la norme sur  $E$ , que pour tout  $a \in \mathcal{L}(E)$ , la série  $\sum \frac{a^n}{n!}$  est (absolument) convergente.

## II Compléments sur les séries numériques

### 1 Règle de d'Alembert

**Théorème 9 (Règle de d'Alembert)**

Soit  $(u_n)$  une suite à valeurs strictement positives (à partir d'un certain rang) telle que  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  existe dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

- Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  est une série convergente.
- Si  $\ell > 1$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\sum u_n$  est une série (grossièrement) divergente.

Démonstration page 438

Exo  
10.6

**Point méthode** La règle de d'Alembert est parfois utilisée pour prouver qu'une série  $\sum v_n$  de terme général non nul (à partir d'un certain rang) est absolument convergente. On étudiera alors le quotient  $\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|}$ .

**Attention** Dans le cas où  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure directement, comme on le voit dans l'exemple qui suit.

**Ex. 5.** La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série convergente, tandis que la série  $\sum n$  est une série grossièrement divergente. Pourtant, dans les deux cas, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

**Ex. 6.** Dans le cas où  $z \in \mathbb{C}^*$ , on peut retrouver la convergence absolue de la série exponentielle  $\sum \frac{z^n}{n!}$  :

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1,$$

donc  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est une série absolument convergente.

### 2 Technique de comparaison série-intégrale

La technique de comparaison série-intégrale a déjà été vue en première année. Nous donnons ici des approfondissements.

#### Utilisation de la monotonie

**Proposition 10**

Soit  $f \in \mathcal{CM}([0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$  une fonction décroissante et intégrable.

Alors la série  $\sum f(n)$  est convergente et, en posant  $I = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ , on a :

$$I \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq I + f(0) \quad \text{et donc} \quad \left| I - \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \right| \leq f(0).$$

Exo  
10.7

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

**Démonstration.** Par comparaison série-intégrale et décroissance de la fonction  $f$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) + \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt. \quad (*)$$

Par intégrabilité de la fonction  $f$ , la suite des sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum f(n)$  est majorée. On en déduit que  $\sum f(n)$  est une série convergente, et en particulier, son terme général converge vers 0.

Par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'encadrement  $(*)$ , on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

ce qui conclut.  $\square$

**Remarque** On peut sans difficulté adapter le résultat précédent pour encadrer les restes de certaines séries convergentes. En effet, si  $f \in \mathcal{CM}([n_0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$  est une fonction décroissante et intégrable, alors la série  $\sum f(n)$  est convergente et :

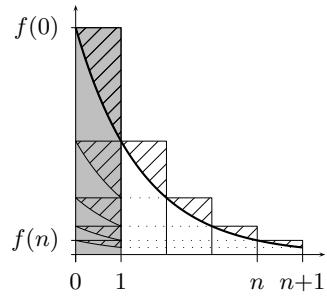
$$\forall n \geq n_0 \quad \int_n^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq f(n) + \int_n^{+\infty} f(t) dt.$$

### Interprétation géométrique

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la quantité  $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right|$  représente l'aire géométrique de la portion de graphe située entre la droite d'équation  $y = f(n)$  et la courbe d'équation  $y = f(x)$  pour des abscisses  $x$  décrivant  $[n, n+1]$  (parties hachurées situées au dessus de la courbe sur la figure ci-contre).

La quantité positive  $\left| \int_0^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \right|$  est la

somme de ces aires, que l'on majore par  $f(0)$ , aire d'un rectangle (grisé ici) de largeur 1 et de hauteur  $f(0)$  (dans lequel les parties hachurées ont été translatées).



**Ex. 7.** Soit  $\alpha > 1$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est positive, décroissante et intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Comme on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right),$$

on en déduit, par théorème d'encadrement, l'équivalent simple suivant :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

La propriété suivante traite le cas d'une fonction continue par morceaux, positive, décroissante et intégrable sur l'intervalle ouvert  $]0, +\infty[$ . On se donne donc une telle fonction  $f$ .

### Proposition 11

La série  $\sum f(n)$  est convergente et l'on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \right| \leq \int_0^1 f(t) dt.$$

**Démonstration.** La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $[1, +\infty[$ , positive, décroissante et intégrable sur ce même intervalle donc  $\sum f(n)$  est une série convergente et :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t) dt.$$

On soustrait les termes de cette inégalité à  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et l'on obtient :

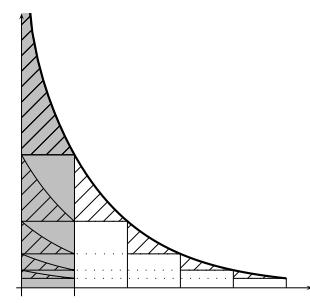
$$\int_0^1 f(t) dt - f(1) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leq \int_0^1 f(t) dt.$$

Par décroissance de la fonction  $f$ , on a  $\int_0^1 f(t) dt - f(1) \geq 0$ , ce qui conclut. □

### Interprétation géométrique

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la quantité  $\left| f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt \right|$  représente l'aire géométrique de la portion de graphe située entre la droite d'équation  $y = f(n)$  et la courbe d'équation  $y = f(x)$  pour des abscisses  $x$  décrivant  $[n-1, n]$ .

La quantité positive  $\left| \int_0^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \right|$  est la somme de ces aires, que l'on majore par  $\int_0^1 f(t) dt$ .



## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

Exo  
10.8

### Approfondissement : comparaison série-intégrale sans monotonie

Dans l'exemple qui suit, on traite le cas d'une fonction positive croissante puis décroissante. Cette situation peut se généraliser.

**Ex. 8.** Soit  $x > 0$ ,  $u_n(x) = \sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ .

Cherchons un équivalent simple de  $f$  en  $0^+$ . Posons  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} t & \longmapsto & \sqrt{t}e^{-x\sqrt{t}}. \end{array}$$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , continue en 0, intégrable, et l'on a :

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = e^{-x\sqrt{t}} \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{x}{2} \right).$$

On en déduit le tableau de variation de  $g$  :

$t$	0	$1/x^2$	$+\infty$
$g'$	+	0	-
$g$	0	$\frac{1}{ex}$	0

Posons  $n_x = \lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor$  ; par croissance de  $g$  sur  $[0, \frac{1}{x^2}]$  et décroissance sur  $[\frac{1}{x^2}, +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{n_x} u_n(x) - \int_0^{n_x} g(t) dt \right| &\leqslant g(n_x) \leqslant g\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ \left| \sum_{n=n_x+1}^{+\infty} u_n(x) - \int_{n_x+1}^{+\infty} g(t) dt \right| &\leqslant g(n_x+1) \leqslant g\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

Enfin, on a  $\left| \int_{n_x}^{n_x+1} g(t) dt \right| \leqslant g\left(\frac{1}{x^2}\right)$  donc, par somme et inégalité triangulaire :

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} g(t) dt \right| \leqslant 3g\left(\frac{1}{x^2}\right) \leqslant \frac{3}{x}.$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t) dt &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \quad (\text{changement de variable } [u = x\sqrt{t}]) \\ &= \frac{4}{x^2}, \quad (\text{deux intégrations par parties}) \end{aligned}$$

on en déduit que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{4}{x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et en particulier,} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{4}{x^2}.$$

### Utilisation de la dérivée

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$  dont la dérivée  $f'$  est intégrable. On suppose également que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f$  est convergente.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par intégration par parties, on a :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) = \int_n^{n+1} (f(t) - f(n)) dt = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt.$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\left| \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n) \right| \leq \int_n^{n+1} |n+1-t||f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt.$$

Comme  $f'$  est intégrable, la série  $\sum \int_n^{n+1} |f'|$  est convergente (cf. point méthode de la page 384).

Par comparaison, la série de terme général  $\int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$  est absolument convergente, donc convergente.

Par convergence de l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ , on en déduit que  $\sum f(n)$  est une série convergente et l'on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \right| \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

En adaptant ce qui précède à une demi-droite fermée  $[p, +\infty[$ , on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \int_p^{+\infty} f(t) dt - \sum_{n=p}^{+\infty} f(n) \right| \leq \int_p^{+\infty} |f'(t)| dt.$$

**Ex. 9.** Soit  $f : t \mapsto \frac{\sin \sqrt{t}}{t}$ .

Les fonctions  $u : t \mapsto \cos \sqrt{t}$  et  $v : t \mapsto -\frac{2}{\sqrt{t}}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  et par intégration par parties, on a :

$$\int^x \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt = \int^x u'(t)v(t) dt = \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}}_{=g(x)} - \int^x \underbrace{\frac{\cos \sqrt{t}}{t^{3/2}}}_{=h(t)} dt.$$

Comme  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $h(t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$  est convergente.

Par ailleurs,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, +\infty[$  et :

$$\forall t \geq 1 \quad f'(t) = \frac{\cos \sqrt{t}}{2t\sqrt{t}} - \frac{\sin \sqrt{t}}{t^2}.$$

Comme  $f'(t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ , la fonction  $f'$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On en déduit ainsi la convergence de la série  $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ .

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

**Ex. 10.** Reprenons les notations de l'exemple 8 de la page 432. On a :

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = e^{-x\sqrt{t}} \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{x}{2} \right).$$

Comme on a :

$$\sqrt{t}g'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t^2g'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

la fonction  $g'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |g'(t)| dt &= \int_0^{1/x^2} g'(t) dt - \int_{1/x^2}^{+\infty} g'(t) dt \\ &= \left( g\left(\frac{1}{x^2}\right) - g(0) \right) - \left( \lim_{+\infty} g - g\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2g\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} g(t) dt \right| \leq 2g\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui améliore la majoration obtenue dans l'exemple susmentionné.

### 3 Sommation des relations de comparaison

Si  $\sum u_n$  est une série, on note  $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k$  sa somme partielle partielle d'ordre  $n$

et, lorsque la série est convergente,  $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  son reste d'ordre  $n$ .

#### Cas convergent

**Proposition 12 (Sommation des relations de comparaison, cas convergent)**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques. On suppose que la série  $\sum v_n$  est convergente et à termes réels de signe constant.

- Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = O(R_n(v))$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) = o(R_n(v))$ .
- Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n(u) \sim R_n(v)$ .

Démonstration page 438

Exo  
10.9

**Ex. 11.** On a l'équivalent simple suivant, entre séries convergentes à termes positifs :

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

**Remarque** Quitte à considérer les séries  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} v_n$  on voit que les résultats restent vrais si  $(v_n)$  est de signe constant seulement à partir d'un certain rang.

**Point méthode** Dans la pratique (et comme on le voit sur l'exemple précédent), il est agréable, dans l'utilisation de ce résultat, de disposer d'une série  $\sum v_n$  dont on sait calculer les restes, par exemple une série télescopique.

**Ex. 12.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$  et l'on a :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{<0}.$$

Par comparaison à un exemple de Riemann, la série télescopique  $\sum (u_n - u_{n-1})$  est convergente, donc la suite  $(u_n)$  est convergente. Notons  $\gamma$  sa limite et déterminons un équivalent simple de  $u_n - \gamma$ . On a :

$$u_n - u_{n-1} \sim \underbrace{-\frac{1}{2n^2}}_{<0},$$

donc par sommation des relations de comparaison (cas convergent), on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) &\sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ \gamma - u_n &\sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} && \text{(cf. exemple précédent)} \\ &\sim -\frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

On dispose donc du développement asymptotique suivant :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Le réel  $\gamma$  est appelé **constante d'Euler**.

**Ex. 13.** La série  $\sum \frac{\sqrt{k}}{2^k}$  est convergente. Notons  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^k}$  son reste d'ordre  $n$ .

On a alors :

$$\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} \sim \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{k}}{2^k}}_{>0} \quad \text{donc} \quad R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}} \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^k} = \frac{1}{2} R_n + \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}.$$

On en déduit :

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} R_n = R_n + o(R_n) \quad \text{donc} \quad \frac{\sqrt{n}}{2^n} = R_n + o(R_n) \quad \text{et enfin} \quad R_n \sim \frac{\sqrt{n}}{2^n}.$$

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

### Cas divergent

#### Proposition 13 (Sommation des relations de comparaison, cas divergent) —

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques. On suppose que la série  $\sum v_n$  est divergente et à termes réels de signe constant.

- Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $S_n(u) = O(S_n(v))$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $S_n(u) = o(S_n(v))$ .
- Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $S_n(u) \sim S_n(v)$ .

Démonstration page 439

Le théorème de Cesàro constitue une application du théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent).

#### Proposition 14 (Théorème de Cesàro - cas fini) —

Soit  $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . Alors on a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

**Démonstration.** On a  $u_n - \ell = o(1)$  et  $\sum 1$  est une série divergente à termes positifs. Par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on en déduit :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o(n+1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \ell + o(1). \quad \square$$

#### Proposition 15 (Théorème de Cesàro - cas infini) —

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite réelle qui diverge vers  $+\infty$ . Alors on a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Démonstration.** Puisque la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , elle est à termes positifs à partir d'un certain rang et l'on a  $1 = o(u_n)$ .

Par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on en déduit :

$$\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\underbrace{\sum_{k=0}^n u_k}_{=S_n}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{n+1}{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme la série  $\sum u_n$  est grossièrement divergente et à termes positifs à partir d'un certain rang, on a  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\frac{n+1}{S_n} > 0$  à partir d'un certain rang.

Par passage à l'inverse, on en déduit  $\frac{S_n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

**Remarque** En remplaçant  $u_n$  par  $-u_n$ , on obtient un résultat similaire pour une suite qui diverge vers  $-\infty$ .

L'exemple qui suit montre l'utilisation des sommes de relations de comparaisons pour l'étude de suites définies par récurrence.

**Ex. 14.** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

La suite  $u$  est clairement croissante. Si l'on suppose que cette suite est convergente, alors, en notant  $\ell$  sa limite, on a :

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{e^{-\ell}}{n},$$

donc la série télescopique associée  $\sum(u_{n+1} - u_n)$  est une série divergente par comparaison à une série divergente à termes positifs. D'après le lien suite-série, on en déduit que  $u$  est une suite divergente, ce qui est absurde.

Par le théorème de limite monotone, la suite  $u$  diverge vers  $+\infty$ .

Par un équivalent simple au premier ordre de la fonction  $\exp$ , on a :

$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n} \left( \exp\left(\frac{e^{-u_n}}{n}\right) - 1 \right) \sim e^{u_n} \times \frac{e^{-u_n}}{n} = \frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n).$$

La série  $\sum(\ln(n+1) - \ln(n))$  est divergente et à termes positifs, donc par sommation des relations de comparaison (cas divergent), il vient :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (e^{u_{k+1}} - e^{u_k})}_{=e^{u_n} - e^{u_1}} \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k))}_{=\ln n}.$$

On en déduit :

$$e^{u_n} = \ln n + o(\ln n) = \ln n \times (1 + o(1))$$

puis par passage au logarithme :

$$u_n = \ln(\ln n) + o(1).$$



## Démonstrations

**Théorème 7** Notons  $p$  la dimension de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $(u_n^{(j)})_{1 \leq j \leq p}$  les coordonnées de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En utilisant la norme infinie dans la base  $\mathcal{B}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n^{(j)}| \leq \|u_n\|_\infty.$$

La convergence absolue de la série  $\sum u_n$  entraîne alors la convergence absolue des séries numériques  $\sum u_n^{(j)}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On en déduit alors que chacune des séries composantes est convergente ; donc la série  $\sum u_n$  converge.

**Théorème 9** Par caractère asymptotique de la notion de limite, on peut sans perte de généralité supposer que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Supposons  $\ell < 1$  et fixons  $\rho \in ]\ell, 1[$ . On peut alors choisir un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho.$$

Par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq u_n \leq u_{n_0} \rho^{n-n_0}.$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, on en déduit que  $\sum u_n$  est une série convergente.

- Supposons  $\ell > 1$  et fixons  $\rho \in ]1, \ell[$ . On peut alors choisir un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \rho.$$

Par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq u_{n_0} \rho^{n-n_0}.$$

Comme  $\rho > 1$ , la suite géométrique  $(\rho^n)$  diverge vers  $+\infty$ . Ayant de plus  $u_{n_0} > 0$ , on en déduit  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , puis la divergence grossière de la série  $\sum u_n$ .

**Proposition 12** Quitte à changer  $u_n$  et  $v_n$  par leurs opposés, on peut supposer que la suite  $(v_n)$  est à termes positifs.

Dans chacun des trois cas, la série  $\sum u_n$  converge absolument, d'après la comparaison avec une série convergente à termes positifs.

- Si  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$ , il existe un rang  $n_0$  et une constante  $K$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $|u_n| \leq Kv_n$  d'où la majoration pour  $n \geq n_0$  :

$$|R_n(u)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq KR_n(v).$$

Cela donne  $R_n(u) = O(R_n(v))$ .

- Si  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , il suffit de remplacer la constante  $K$  ci-dessus par n'importe quel  $\varepsilon > 0$  pour aboutir à  $|R_n(u)| \leq \varepsilon R_n(v)$  pour  $n$  assez grand.
- Si  $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$ , on applique le point précédent à  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

**Proposition 13** Quitte à changer  $u_n$  et  $v_n$  par leurs opposés, on peut supposer que la suite  $(v_n)$  est à termes positifs.

La série  $\sum v_n$  étant divergente et à termes positifs, la suite  $(S_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  en croissant.

- Si  $(u_n)$  est dominée par  $(v_n)$ , il existe un rang  $n_0$  et une constante  $K > 0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $|u_n| \leq Kv_n$ ; il existe ensuite un rang  $n_1 \geq n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ , on ait  $|S_{n_0}(u)| \leq KS_n(v)$ , puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(v) = +\infty$ .

On a alors pour tout  $n \geq n_1$  :

$$\begin{aligned} |S_n(u)| &= \left| S_{n_0}(u) + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right| \\ &\leq |S_{n_0}(u)| + \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| \\ &\leq KS_n(v) + K \sum_{k=n_0+1}^n v_k \leq KS_n(v) + K(S_n(v) - S_{n_0}(v)) \leq 2KS_n(v). \end{aligned}$$

On en déduit la domination annoncée.

- Si  $(u_n)$  est négligeable devant  $(v_n)$ , il suffit de remplacer la constante  $K$  ci-dessus par n'importe quel  $\varepsilon > 0$  pour aboutir à  $|S_n(u)| \leq 2\varepsilon S_n(v)$  pour  $n$  assez grand.
- Si  $(u_n)$  est équivalente à  $(v_n)$ , on applique le point précédent à  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

## S'entraîner et approfondir

### Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

**10.1** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série  $\sum A^n$ , où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 $\rightarrow^{424}$

**10.2** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Étudier la convergence de la série de terme général  $A^n$ , où  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
 $\rightarrow^{426}$

**10.3** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable telle que :  
 $\rightarrow^{427}$

$$\forall \lambda \in \text{sp}(A) \quad |\lambda| < 1.$$

Montrer la convergence de la série  $\sum k^\alpha A^k$ .

**10.4** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice trigonalisable. On suppose que :

$$\forall \lambda \in \text{sp}(A) \quad |\lambda| < 1.$$

Montrer que la série  $\sum A^k$  est convergente.

\* **10.5** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle. Soit  $(a_n)$  une suite d'éléments de  $E$  ainsi que  $(r_n)$  une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_f(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset B_f(a_n, r_n).$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|a_{n+1} - a_n\| \leq r_n - r_{n+1}.$$

2. Montrer que la suite  $(a_n)$  est convergente.

3. Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_f(a_n, r_n)$  est une boule fermée.

## Séries numériques

**10.6** Déterminer la nature, selon  $x \in \mathbb{C}$ , de la série  $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ .  
 $\rightarrow^{429}$

**10.7** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .  
 $\rightarrow^{429}$

En utilisant une comparaison série intégrale, étudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ .

**10.8** Pour tout  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ .  
 $\rightarrow^{432}$

En effectuant une comparaison avec l'intégrale  $\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t(n-t)}}$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

**10.9** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$ .  
 $\rightarrow^{434}$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de  $R_n$ .

**10.10** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs.

→<sup>436</sup>

On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et l'on suppose que :

$$u_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

1. Montrer que  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
2. Déterminer un équivalent simple de la suite  $(u_n)$ .

*Indication.* On pourra s'intéresser à la suite télescopique  $S_n^2 - S_{n-1}^2$ .

**10.11** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et :

→<sup>436</sup>

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$ .

*Indication.* On pourra étudier la suite auxiliaire  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ .

**10.12** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par son premier terme  $u_0 > 0$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(u_n).$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = 2^n u_n$ .

1. Montrer l'existence d'un réel  $\ell > 0$ , que l'on ne cherchera pas à calculer, tel que  $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$ .

*Indication.* On pourra étudier la série télescopique  $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ .

2. Déterminer un développement à deux termes de  $u_n$ .

*Indication.* On pourra étudier le terme télescopique  $v_{n+1} - v_n$ .

**10.13** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et déterminer un développement asymptotique de  $u_n$  à une précision  $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

**10.14** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
2. Montrer que  $\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .
3. En déduire qu'il existe  $K > 1$  tel que  $u_n \sim K^{2^n}$ .

**10.15** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Montrer que  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k - u_{k+1}}{u_k} \sim -\ln u_n$ .

**10.16** Soit  $\alpha > 1$ . Soit  $\sum u_n$  une série divergente à termes strictement positifs. On note  $S_n$  sa somme partielle d'ordre  $n$ . Montrer que la série  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  est convergente.

## Solutions des exercices

**10.1** On vérifie facilement que  $A^n = 0$ , pour  $n \geq 3$ . On en déduit la convergence de la série  $\sum A^n$ .

Comme  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**10.2** En décomposant la matrice  $A$  sous la forme :

$$A = \frac{1}{2} I_2 + \frac{a}{2} J \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on calcule  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en utilisant la formule du binôme (les deux matrices  $\frac{1}{2}I_2$  et  $\frac{a}{2}J$  commutent). On obtient alors :

$$A^n = \frac{1}{2^n} I_2 + \frac{n}{2^n} (aJ).$$

La série géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  est convergente donc  $\sum \frac{1}{2^n} I_2$  est une série convergente.

Par croissances comparées, on a  $\frac{n}{2^n} = o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ ; comme la série géométrique de raison  $\frac{3}{4}$  converge absolument, on en déduit, par comparaison, la convergence de la série  $\sum \frac{n}{2^n}$  puis de la série  $\sum \frac{n}{2^n} (aJ)$ .

La série  $\sum A^n$  est donc convergente, comme somme de deux séries convergentes.

**10.3** Fixons  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tels que  $A = P \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ .

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = P \operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}.$$

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $|\lambda_i| < 1$ , on a, par croissances comparées,  $k^\alpha \lambda_i^k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . On en déduit, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence, de la série  $\sum k^\alpha \lambda_i^k$  puis celle de la série  $\sum k^\alpha \operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ .

Par linéarité de l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$ , on en déduit la convergence de la série  $\sum k^\alpha A^k$ .

**10.4 Un cas particulier.** Commençons par traiter le cas où le spectre de  $A$  est réduit à un élément  $\lambda$ . Dans ce cas, la matrice  $N = A - \lambda I_n$  est nilpotente et, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall k \geq n \quad A^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j && (\lambda I_n \text{ et } N \text{ commutent}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j. && (N^n = 0) \end{aligned}$$

Pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a l'équivalent simple suivant :

$$\binom{k}{j} \lambda^{k-j} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \lambda^{k-j}$$

qui montre, par croissances comparées, que  $\binom{k}{j} \lambda^{k-j} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , puisque  $|\lambda| < 1$ .

Par comparaison, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la série  $\sum \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$  est (absolument) convergente donc, par somme de séries convergentes, la série  $\sum A^k$  est convergente.

**Le cas général.** Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $A$ , de multiplicités  $n_1, \dots, n_p$ .

Par hypothèse, le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé et, en utilisant la décomposition de  $\mathbb{K}^n$  comme somme directe des sous-espaces caractéristiques de  $A$ , il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que :

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1 I_{n_1} + N_1, \dots, \lambda_p I_{n_p} + N_p}_{=B_1, =B_p}),$$

où  $N_1, \dots, N_p$  sont des matrices nilpotentes.

Un calcul par blocs donne alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$P^{-1}A^kP = \text{Diag}(B_1^k, \dots, B_p^k) \quad \text{ou encore} \quad A^k = P \text{Diag}(B_1^k, \dots, B_p^k)P^{-1},$$

ce qui s'écrit encore  $A^k = L(B_1^k, \dots, B_p^k)$ , où  $L$  est l'application linéaire :

$$\begin{aligned} L : \quad \prod_{j=1}^p \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M_1, \dots, M_p) &\longmapsto P \text{Diag}(M_1, \dots, M_p)P^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit (cf. proposition 5 de la page 427) que la série  $\sum A^k$  converge, et sa somme est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = P \text{Diag} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} B_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} B_p^k \right) P^{-1}.$$

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

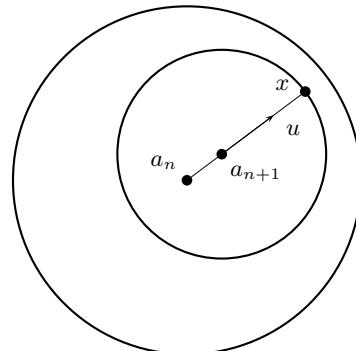
- 10.5** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $u \in E$  un vecteur unitaire tel que  $a_{n+1} - a_n = \|a_{n+1} - a_n\|u$ .

Posons  $x = a_{n+1} + r_{n+1}u$ . Par construction, on a  $x \in B_f(a_{n+1}, r_{n+1})$ , donc par hypothèse :

$$x \in B_f(a_n, r_n) \quad \text{puis} \quad \|x - a_n\| \leq r_n.$$

On en déduit  $\|a_{n+1} - a_n + r_{n+1}u\| \leq r_n$  et par conséquent :

$$\left\| \underbrace{\left( \|a_{n+1} - a_n\| + r_{n+1} \right)}_{\geq 0} u \right\| \leq r_n$$



donc  $\|a_{n+1} - a_n\| + r_{n+1} \leq r_n$ , ce qui conclut.

2. La suite  $(r_n)$  est positive et décroissante (d'après la question précédente) donc convergente. Par le lien suite-série, la série  $\sum (r_n - r_{n+1})$  est convergente. Par comparaison, la série  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  est absolument convergente donc convergente, ce qui montre que la suite  $(a_n)$  est convergente.
3. Notons  $\ell \in E$  la limite de la suite  $(a_n)$  et  $R \in \mathbb{R}_+$  la limite de la suite  $(r_n)$ .

Montrons que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_f(a_n, r_n) = B_f(\ell, R)$ .

**Inclusion directe.** Soit  $x \in E$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x - a_n\| \leq r_n$ .

Par passage à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il vient :

$$\|x - \ell\| \leq R \quad \text{donc} \quad x \in B_f(\ell, R).$$

**Inclusion réciproque.** Soit  $x \in B_f(\ell, R)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $\|x - a_n\| \leq r_n$ .

$$\text{On a } x - a_n = x - \ell + \ell - a_n = x - \ell + \sum_{k=n}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k).$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \|x - a_n\| &\leq \|x - \ell\| + \sum_{k=n}^{+\infty} \|a_{k+1} - a_k\| \\ &\leq R + \sum_{k=n}^{+\infty} (r_k - r_{k+1}) = R + (r_n - R) = r_n. \end{aligned} \quad (\text{question 1})$$

**10.6** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ ; pour  $x \neq 0$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} |x| = \frac{n^2}{2n(2n-1)} |x| = \frac{n}{4n-2} |x|.$$

- Pour  $|x| < 4$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} = \frac{|x|}{4} < 1$ . D'après la règle de d'Alembert, la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente.
- Pour  $|x| \geq 4$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} = \frac{n}{4n-2} |x| \geq \frac{4n}{4n-2} \geq 1.$$

La suite strictement positive  $(|u_n|)$  étant croissante, on en déduit que la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

La convergence pour  $x = 0$  étant évidente, on peut conclure que la série  $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$  converge si, et seulement si,  $|x| < 4$ .

**10.7** Posons  $f : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}.$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[2, +\infty[$  et :

$$\forall x \geq 2 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2(\ln x)^\alpha} - \alpha \frac{1}{x^2(\ln x)^{\alpha+1}} \leq 0.$$

Donc  $f$  est décroissante sur  $[2, +\infty[$  et est aussi positive et continue sur ce même intervalle. Par ailleurs, puisque  $\alpha \neq 1$ , on a :

$$\int^x f(t) dt = \frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + \mu \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

**Cas  $\alpha \in ]0, 1[$ .** Par comparaison série intégrale, pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$\sum_{k=2}^n f(k) \geq \underbrace{f(n)}_{\geq 0} + \int_2^n f(t) dt \geq \underbrace{\frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{= u_n}.$$

Comme  $1-\alpha > 0$ , la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  et, par minoration, la suite des sommes partielles de la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  diverge vers  $+\infty$ , ce qui montre que la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  est divergente.

**Cas  $\alpha > 1$ .** On a alors :

$$\frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car} \quad \alpha-1 > 0,$$

donc l'intégrale  $\int_2^{+\infty} f(t) dt$  converge et, comme  $f$  est positive, elle est intégrable sur  $[2, +\infty[$ . Par comparaison série-intégrale, la série  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  est convergente.

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

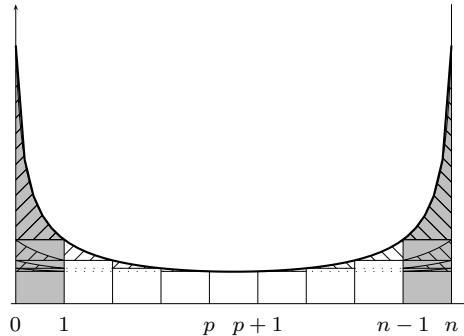
- 10.8** Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}}$  est positive, intégrable sur  $]0, n[$  (par comparaison aux intégrales de Riemann), décroissante puis croissante et admet un minimum en  $\frac{n}{2}$ .

$t$	0	$n/2$	$n$
$f'$	-	0	+
$f$	$+\infty$	$f(\frac{n}{2})$	$+\infty$

Posons  $p = \lfloor n/2 \rfloor$ . On a alors, par décroissance de  $f$  sur  $]0, p]$  et croissance de  $f$  sur  $[p+1, n[$  :

$$\left| \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} - \int_0^p \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}} dt$$

$$\left| \sum_{k=p+1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} - \int_{p+1}^n \frac{dt}{\sqrt{t(n-t)}} \right| \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{\sqrt{t(n-t)}} \stackrel{[u=n-t]}{=} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(n-u)}}.$$



Par disjonction de cas sur la parité de  $n$ , le réel  $f(p+1)$  majore  $|f|$  sur  $[p, p+1]$  donc  $\left| \int_p^{p+1} f(t) dt \right| \leq \int_p^{p+1} |f(t)| dt \leq f(p+1) \leq \int_0^1 f(t) dt$ .

Par somme et inégalité triangulaire, on a :

$$\left| u_n - \underbrace{\int_0^n \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}} dt}_I \right| \leq 3 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(n-t)}} dt \underset{\geq n-1}{\leq} \frac{3}{\sqrt{n-1}} \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}}_2.$$

Pour calculer  $I$ , on effectue le changement de variable  $[t = \frac{n}{2}(1+u)]$  :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\text{Arcsin } u]_{-1}^1 = \pi.$$

On obtient ainsi :

$$|u_n - \pi| \leq \frac{6}{\sqrt{n-1}}.$$

Par théorème d'encadrement, la suite  $(u_n)$  converge vers  $\pi$ .

**10.9** En posant  $u_k = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k}$ , on a l'équivalent suivant :

$$u_k = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k} \sim \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{>0}.$$

Par sommation des équivalents (cas convergent), il vient :

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

Cherchons maintenant un équivalent de  $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \left( u_k - \frac{1}{k(k+1)} \right)$ .

On s'intéresse pour cela au terme général  $u_k - \frac{1}{k(k+1)}$  :

$$\begin{aligned} u_k - \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{k} - \frac{1}{k^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{2k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \sim \frac{1}{2k^3}. \end{aligned} \quad (*)$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est décroissante, positive et intégrable sur  $[1, +\infty]$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{n^3}.$$

Comme  $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2n^2}$  et  $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , on en déduit par encadrement que  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$ .

Par sommation de la relation  $(*)$  (cas convergent), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} &\sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \\ R_n - \frac{1}{n} &\sim \frac{1}{4n^2}. \quad \left( \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

On peut conclure :  $R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**10.10** 1. La suite  $(S_n)$  est croissante et à termes strictement positifs. Si elle converge, en notant  $\ell > 0$  sa limite, on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\ell}.$$

Or  $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , ce qui fournit une absurdité.

D'après le théorème de limite monotone, on peut conclure :

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Comme  $u_n \sim \frac{1}{S_n}$  par hypothèse, on a  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} S_n^2 - S_{n-1}^2 &= (S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) \\ &= u_n(2S_n - u_n) = 2u_n S_n - u_n^2. \end{aligned}$$

Par opérations sur les limites, on en déduit :

$$S_n^2 - S_{n-1}^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2 \quad \text{puis} \quad S_n^2 - S_{n-1}^2 \sim 2.$$

Comme 2 est le terme général positif d'une série divergente, par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a :

$$\sum_{k=1}^n (S_k^2 - S_{k-1}^2) \sim 2n \quad \text{donc} \quad S_n^2 - S_0^2 = 2n + o(n).$$

Ainsi, on a  $S_n^2 \sim 2n$  puis, par positivité de  $S_n$  :

$$S_n \sim \sqrt{2n} \quad \text{donc} \quad u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

**10.11** L'intervalle  $[0, 1]$  est stable par la fonction  $\sin$  et contient  $u_0$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, 1].$$

Par inégalité de convexité, on a :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \sin x \leqslant x.$$

Par ailleurs, il y a égalité si, et seulement si,  $x = 0$ .

Ainsi, la suite  $u$  est décroissante, minorée par 0, donc convergente vers  $\ell \in [0, 1]$  vérifiant  $\sin \ell = \ell$  par continuité de la fonction  $\sin$ , donc  $\ell = 0$ .

Pour  $x$  au voisinage de 0, on a :

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \quad x + \sin x \sim 2x \quad \text{et} \quad \sin x \sim x.$$

Comme la suite  $(u_n)$  tend vers 0, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{(u_n - \sin u_n)(u_n + \sin u_n)}{(\sin u_n)^2 u_n^2} \sim \frac{2u_n^4}{6} \times \frac{1}{u_n^4} = \frac{1}{3}.$$

La série  $\sum \frac{1}{3}$  est une série divergente à termes positifs donc, par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3} \quad \text{puis} \quad u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Ensuite, on a le développement limité suivant en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sin^2 x} &= \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^{-2} \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \left(-\frac{2}{120} + \frac{3}{36}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{15} + o(x^4) \\ \text{puis} \quad \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2). \end{aligned}$$

Puisque  $(u_n)$  tend vers 0, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}^2} &= \frac{1}{\sin^2 u_n} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2) \\ \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} &= \frac{u_n^2}{15} + o(u_n^2),\end{aligned}$$

puis :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \sim \frac{u_n^2}{15} \sim \frac{1}{5n} \underbrace{\left( \ln(n+1) - \ln(n) \right)}_{>0}.$$

Par sommation des relations de comparaisons (cas divergent), on obtient :

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - \frac{n}{3} \sim \frac{\ln n}{5}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_n^2} &= \frac{n}{3} + \frac{\ln n}{5} + o(\ln n) \quad \text{donc} \quad u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left( 1 + \frac{3 \ln n}{5n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

**10.12** 1. Par concavité sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction Arctan, on a l'encadrement suivant :

$$\forall x > 0 \quad 0 < \arctan(x) \leqslant x.$$

On en déduit, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leqslant \frac{u_0}{2^n}.$$

Par suite,  $u_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$  et en particulier,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Comme  $\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , on a  $\frac{\arctan u_n}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

Ensuite, on a  $\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$  et  $\arctan t - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^3}{3}$  donc :

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ln \frac{\arctan u_n}{u_n} \sim \frac{\arctan u_n}{u_n} - 1 = \frac{\arctan u_n - u_n}{u_n} \sim -\frac{u_n^2}{3}.$$

On en déduit que  $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = O\left(\frac{1}{4^n}\right)$ . Par comparaison, la série télescopique  $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$  est convergente, donc la suite  $(\ln v_n)$  converge. Notons  $\lambda$  sa limite. Par continuité de la fonction  $\exp$  en  $\lambda$ , la suite  $(v_n)$  converge vers le réel strictement positif  $e^\lambda$  et l'on a  $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$ , en posant  $\ell = e^\lambda$ .

2. D'après la question précédente, on a  $u_n^3 = \frac{\ell^3}{8^n} + o\left(\frac{1}{8^n}\right)$  puis :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= 2^n (\arctan u_n - u_n) \\ &= 2^n \left( -\frac{1}{3} u_n^3 + o(u_n^3) \right) \\ &= -\frac{\ell^3}{3} \frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right).\end{aligned}$$

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

Par théorème de sommation des relations de comparaisons (cas convergent), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) &= -\frac{\ell^3}{3} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4^k} + o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{4^k}\right) \\ \ell - 2^n u_n &= -\frac{\ell^3}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \frac{1}{4^n} + o\left(\frac{1}{4^n}\right) \\ u_n &= \frac{\ell}{2^n} + \frac{4\ell^3}{9} \frac{1}{8^n} + o\left(\frac{1}{8^n}\right).\end{aligned}$$

**10.13 Divergence vers  $+\infty$ .** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} \geqslant 0 \quad (\star)$$

donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

Supposons qu'elle converge et notons  $\ell$  sa limite. Par passage à la limite dans la relation  $(\star)$  et continuité de la fonction  $\exp$ , on a  $0 = e^{-\ell}$  : absurde.

Par le théorème de limite monotone, on a  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**Équivalent simple.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$  et l'on a :

$$\begin{aligned}v_n &= e^{u_n} \left( \exp(e^{-u_n}) - 1 \right) \\ &\sim e^{u_n} \times e^{-u_n} = 1. \quad (e^{-u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0)\end{aligned}$$

Par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^{u_n} - e^{u_0} \sim n.$$

On en déduit  $e^{u_n} = n + o(n)$  puis  $u_n = \ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n + o(1)$ .

**Développement asymptotique.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned}v_n - 1 &= e^{u_n} \exp(e^{-u_n}) - e^{u_n} - 1 \\ &= e^{u_n} \left( 1 + e^{-u_n} + \frac{1}{2} e^{-2u_n} + o(e^{-2u_n}) \right) - e^{u_n} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2} e^{-u_n} = \frac{1}{2e^{u_n}} \sim \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2} (\ln(n+1) - \ln(n)).\end{aligned}$$

Par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - 1) &\sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ e^{u_n} - e^{u_1} - (n-1) &\sim \frac{\ln n}{2} \\ e^{u_n} &= n + \frac{\ln n}{2} + o(\ln n).\end{aligned}$$

Par passage au logarithme, on en déduit :

$$\begin{aligned}u_n &= \ln n + \ln \left( 1 + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right) \\ &= \ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).\end{aligned}$$

**10.14** 1. La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est croissante. Supposons-la majorée. Alors elle converge et, si l'on note  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ , en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient  $\ell = \ell + \ell^2$ , c'est-à-dire  $\ell = 0$ ; c'est impossible, puisque  $\ell \geq u_0 > 0$ . Ainsi, par théorème de la limite monotone, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2. On a :

$$\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n^2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right) = o \left( \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

3. Par comparaison à une série géométrique convergente, la série  $\sum \left( \frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} \right)$  est convergente, donc la suite  $\left( \frac{\ln u_n}{2^n} \right)$  est convergente. Notons  $\ell$  sa limite.

Par théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{\ln u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{\ln u_k}{2^k} \right) &= o \left( \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \right) \\ \ell - \frac{\ln u_n}{2^n} &= o \left( \frac{1}{2^n} \right) \\ \ln u_n &= \ell 2^n + o(1) \end{aligned}$$

$$u_n \sim K^{2^n} \quad \text{en posant } K = e^\ell.$$

Comme la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , on a nécessairement  $K > 1$ .

**10.15** Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$ , on a  $\ln \frac{u_{k+1}}{u_k} \sim \frac{u_{k+1}}{u_k} - 1 = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k}$ .

Par comparaison, les séries à termes négatifs  $\sum \ln \frac{u_{k+1}}{u_k}$  et  $\sum \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k}$  sont de même nature.

Or :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \ln u_{k+1} - \ln u_k \right) = \ln u_n - \ln u_1.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ , on en déduit  $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ , donc la série  $\sum \underbrace{\ln \frac{u_{k+1}}{u_k}}_{<0}$  diverge.

Par sommation des relations de comparaison (cas divergent), on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} \sim \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{u_{k+1}}{u_k} = \ln u_n - \ln u_0.$$

On a  $\ln u_n - \ln u_0 \sim \ln u_n$ , puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\infty$ .

On peut donc conclure que  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k - u_{k+1}}{u_k} \sim -\ln u_n$ .

## Chapitre 10. Séries numériques et vectorielles

**10.16** Pour tout  $t \geq u_0$ , on pose  $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Encadrons  $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$  à l'aide d'une comparaison avec une intégrale.

Par décroissance de la fonction  $f$ , on a :

$$\forall t \in [S_{n-1}, S_n] \quad f(S_n) \leq f(t).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(S_n) dt &\leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(t) dt \\ \frac{u_n}{S_n^\alpha} &\leq \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right). \end{aligned}$$

Comme la suite  $(S_n)$  diverge vers  $+\infty$  et  $\alpha - 1 > 0$ , la suite de terme général  $\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$  converge (vers 0) et donc la série télescopique associée  $\sum \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right)$  est convergente.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, on peut conclure :  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  est une série convergente.

# Chapitre 11 : Suites et séries de fonctions

<b>I</b>	<b>Modes de convergence des suites de fonctions . . . . .</b>	<b>454</b>
1	Convergence simple . . . . .	454
2	Convergence uniforme . . . . .	456
<b>II</b>	<b>Convergence uniforme et limites . . . . .</b>	<b>460</b>
1	Convergence uniforme et continuité . . . . .	460
2	Théorème de la double limite . . . . .	460
<b>III</b>	<b>Intégration, dérivation d'une limite . . . . .</b>	<b>461</b>
1	Intégration et primitivation d'une limite . . . . .	461
2	Dérivation d'une limite . . . . .	462
<b>IV</b>	<b>Séries de fonctions . . . . .</b>	<b>463</b>
1	Modes de convergence . . . . .	463
2	Théorèmes sur les séries de fonctions . . . . .	466
3	Comportement asymptotique . . . . .	470
<b>V</b>	<b>Approximation uniforme . . . . .</b>	<b>471</b>
1	Approximation par des fonctions en escalier . . . . .	471
2	Approximation par des polynômes . . . . .	471
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>479</b>

# Suites et séries de fonctions

Dans tout ce qui suit,  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, munis de normes notées  $\|\cdot\|$  et  $A$  est une partie non vide de  $E$ . Dans de nombreux cas pratiques, on aura  $E = \mathbb{R}$  (parfois  $A = \mathbb{N}$ ) et  $F = \mathbb{K}$ .

On s'intéresse dans ce chapitre aux suites et séries de fonctions, c'est-à-dire aux suites et séries à valeurs dans  $\mathcal{F}(A, F)$ .

## I Modes de convergence des suites de fonctions

Au chapitre 6, nous avons défini la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé. En ce qui concerne les suites de fonctions, il existe plusieurs manières « naturelles » de définir la convergence. Ces modes de convergence ne sont pas en général définis directement en termes de normes et sont fondamentalement différents entre eux.

Dans toute cette section,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$ .

### 1 Convergence simple

#### Définition 1

- On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement vers  $f \in \mathcal{F}(A, F)$**  si, pour tout  $x \in A$ , on a  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement** s'il existe  $f \in \mathcal{F}(A, F)$  telle que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ .

### Remarques

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement si, et seulement si, pour tout  $x \in A$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.
- On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $B \subset A$  si la suite  $(f_n|_B)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement.
- Par unicité de la limite dans  $F$ , il y a unicité de la limite simple.
- Même si *a priori* ces définitions dépendent de la norme sur  $F$ , en fait cela n'en dépend pas car  $F$  étant de dimension finie, ses normes sont équivalentes.
- Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . Pour  $f : A \rightarrow F$ , on note  $f^{(1)}, \dots, f^{(p)}$  les applications composantes de  $f$  dans cette base.

La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$  converge simplement vers une fonction  $g$  si, et seulement si, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  la suite  $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $g_i$ . Il s'agit d'une conséquence du fait qu'une suite à valeurs dans  $F$  converge si, et seulement si, toutes ses suites composantes convergent, ce qui est une propriété des espaces de dimension finie.

**Ex. 1.** Étudions la convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , avec :

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n. \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ ; \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Ainsi, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction indicatrice du singleton  $\{1\}$  définie sur  $[0, 1]$ .

### Remarques

- Certaines propriétés algébriques « passent à la limite simple ». Par exemple, si des suites de fonctions à valeurs scalaires  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent simplement vers  $f$  et  $g$ , alors la suite  $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f + g$  et la suite  $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $fg$ .
- Beaucoup de propriétés analytiques « ne passent pas à la limite simple ». Ainsi, comme le montre l'exemple précédent, la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.
- Certaines propriétés liées à l'ordre « passent à la limite simple ».

Exo  
11.2

**Ex. 2.** La limite simple d'une suite de fonctions croissante est une fonction croissante. En effet, si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  est une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers une fonction  $f$ , pour tout  $(x, y) \in I^2$  tel que  $x \leqslant y$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \leqslant f_n(y),$$

puis, par passage à la limite,  $f(x) \leqslant f(y)$ .

## 2 Convergence uniforme

### Définitions, premiers exemples

Dire que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  signifie :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Il faut bien garder en mémoire que dans l'assertion précédente, l'entier  $n_0$  dépend non seulement de  $\varepsilon$ , mais également de  $x$ . Lorsque l'on peut choisir  $n_0$  indépendamment de  $x$ , on parle de convergence uniforme.

#### Définition 2

- On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément vers  $f \in \mathcal{F}(A, F)$**  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

- On dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément** s'il existe  $f \in \mathcal{F}(A, F)$  telle que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

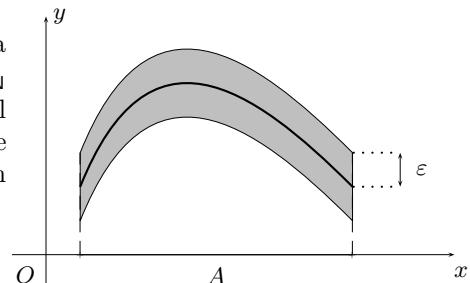
Exo  
11.3

**Terminologie** Lorsque  $B$  est une partie de  $A$ , on dit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément vers  $f$  sur  $B$**  si la suite des restrictions  $(f_n|_B)$  converge uniformément vers  $f|_B$ . Pour bien préciser, on dira donc de préférence « converge uniformément sur  $A$  ».

### Remarques

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si la fonction  $f_n - f$  est bornée à partir d'un certain rang et si  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .
- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  si, et seulement si, la suite  $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que la fonction  $f$  sont bornées, la convergence uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  équivaut à la convergence de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(A, F)$  muni de la norme de la convergence uniforme (cf. page 208). Dans ce cas, l'inégalité  $|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty| \leq \|f_n - f\|_\infty$  montre que la suite  $(\|f_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\|f\|_\infty$ .
- Si  $F = \mathbb{R}$  et  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  sur  $A$  signifie que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  à partir duquel le graphe de  $f_n$  est contenu dans la partie du plan définie par :

$$x \in A \quad \text{et} \quad y \in [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon].$$



**Proposition 1**

Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ , alors elle converge simplement vers  $f$ .

**Démonstration.** Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ , on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

donc *a fortiori* :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui traduit précisément que  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$  pour tout  $x \in A$ .  $\square$

**Conséquence** Ce résultat montre en particulier l'unicité de la limite uniforme.

**Pour établir une convergence uniforme**

S'il existe une suite réelle  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0 et vérifiant, à partir d'un certain rang  $n_0$  :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n,$$

alors on montre aisément, en revenant à la définition, que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ .

**Point méthode** Pour établir la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut :

- commencer par déterminer une fonction  $f$  vers laquelle  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement ;
- chercher ensuite à établir une majoration de la forme  $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n$ , valable à partir d'un certain rang, où  $(\alpha_n)$  est une suite tendant vers 0.

Exo  
11.4

Exo  
11.5

**Attention** Lorsque l'on applique la méthode ci-dessus, ni le majorant  $\alpha_n$ , ni le rang trouvé à partir duquel l'inégalité est vérifiée, ne doivent dépendre de  $x$  !

**Ex. 3.** La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$  converge uniformément vers la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f_n(x) - \sqrt{x} = \frac{x + \frac{1}{n} - x}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque  $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Ex. 4.** Étudions la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $f_n$  est la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = x^n(1 - x)$ .

Il est facile de vérifier que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle (en traitant à part le cas  $x = 1$ ).

Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f'_n(x) = nx^{n-1} \left(1 - \frac{n+1}{n}x\right).$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$	0	+	0
$f$	0	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	0

En posant  $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1] \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(\alpha_n).$$

Puisque  $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ , on a  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq 1$  et donc :

$$f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ . □

### Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme

Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ , alors pour toute suite  $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ , on a, d'après la définition de la convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \varepsilon$$

donc :

$$f_n(x_n) - f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Point méthode** Pour montrer qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers une fonction  $f$ , on peut chercher à exhiber une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0.

**Ex. 5.** La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = \frac{x+\sqrt{n}}{x+n}$  converge simplement vers la fonction nulle. La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $x_n = n$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x_n) - 0 = \frac{n + \sqrt{n}}{n + n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ainsi, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . □

## Convergence uniforme locale

Comme on le verra par la suite, la convergence uniforme permet de montrer des propriétés locales : limites, continuité, dérivabilité...

Il est alors clairement inutile d'avoir une convergence uniforme sur tout l'ensemble de définition. D'où les définitions suivantes.

### Définition 3

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$  et  $a$  (fini ou infini) adhérent à  $A$ .

On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément au voisinage de  $a$  vers  $f \in \mathcal{F}(A, F)$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $E$  tel que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $V \cap A$ .

**Reformulation** La convergence uniforme au voisinage de  $a \in A$  peut s'exprimer ainsi : il existe un voisinage  $V$  de  $a$  relatif à  $A$  tel qu'il y ait convergence uniforme sur  $V$ .

**Point méthode** Pour établir la convergence uniforme au voisinage de tout point de  $A$ , il suffit, si l'on dispose d'un recouvrement de  $A$  par des ouverts, de montrer la convergence uniforme sur chacun de ces ouverts.

**Ex. 6.** Si  $A = \mathbb{C}$ , la famille des boules ouvertes  $B(0, r)$ , avec  $r > 0$ , constitue un recouvrement d'ouverts.

**Ex. 7.** Si  $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ , la famille des demi-plans ouverts  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$ , avec  $a > 0$ , constitue un recouvrement d'ouverts.

## Cas où $A$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

On suppose ici que  $A$  est un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ . Alors on sait (cf. exemple 40 de la page 224) que tout point de  $A$  admet un voisinage relatif qui est un segment.

**Point méthode** Pour établir la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au voisinage de tout point de  $A$ , il suffit montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $A$ .

Plus généralement, selon la forme de l'intervalle  $A$ , on peut se contenter de montrer qu'il y a convergence uniforme sur une famille d'intervalles adaptée à la situation.

**Ex. 8.** Si  $A = \mathbb{R}$ , il suffit de prouver qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme  $[-a, a]$  avec  $a > 0$ .

**Ex. 9.** Si  $A = ]0, +\infty[$ , il suffit de prouver qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

**Ex. 10.** Si  $A = ]0, 1[$ , il suffit de prouver qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme  $[a, 1 - a]$  avec  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ .

## II Convergence uniforme et limites

Dans toute cette section,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$ .

### 1 Convergence uniforme et continuité

On sait que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas en général une fonction continue (cf. exemple 1 de la page 455). Si la convergence est uniforme au voisinage de tout point, alors  $f$  « hérite » de la continuité des fonctions  $f_n$ .

#### Proposition 2

Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément au voisinage de  $a$  vers  $f$  et si les fonctions  $f_n$  sont continues en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

Démonstration page 473

**Principe de démonstration.** Commencer par remarquer que :

$$f(x) - f(a) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))$$

puis majorer  $\|f(x) - f_n(x)\|$  et  $\|f_n(a) - f(a)\|$  à l'aide de la convergence uniforme et conclure à l'aide de la continuité de  $f_n$  en  $a$ .

#### Proposition 3

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions continues qui converge uniformément au voisinage de tout point vers  $f$ , alors la fonction  $f$  est continue.

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la proposition 2. □

**Point méthode** Dans la pratique, avant de chercher à montrer une convergence uniforme locale, on commence par regarder s'il y a convergence uniforme sur  $A$  tout entier.

## 2 Théorème de la double limite

Soit  $a$  (fini ou infini) adhérent à  $A$ . On rappelle que l'espace vectoriel normé  $F$  est de dimension finie.

#### Théorème 4 (Théorème de la double limite)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge uniformément sur  $A$  vers  $f$  et telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n \in F$ .

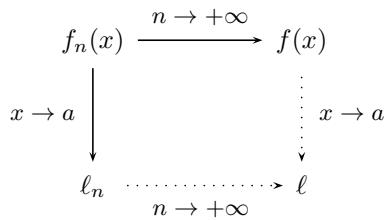
Alors la suite  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge,  $f$  admet une limite en  $a$  et ces deux limites sont égales, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Démonstration (non exigible) page 473

**Remarque** Pour ce résultat, une convergence uniforme au voisinage de  $a$  suffit, par caractère local de la limite.

On peut illustrer la situation à l'aide du schéma ci-contre. Les flèches pleines correspondent aux hypothèses et les flèches pointillées aux conséquences du théorème,  $\ell \in F$  étant la limite commune de la suite  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de la fonction  $f$  en  $a$ .



### III Intégration, dérivation d'une limite

Dans cette section,  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $F$ .

#### 1 Intégration et primitivation d'une limite

##### Théorème 5

On suppose que  $I = [a, b]$  avec  $a < b$  et que les fonctions  $f_n$  sont continues. Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ , alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f.$$

Démonstration page 474

Exo  
11.7

**Principe de démonstration.** Pour tout entier  $n$ , on a :

$$\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f_n - f\|.$$

**Ex. 11.** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  converge simplement vers la fonction nulle (par croissances comparées pour  $x \in ]0, 1[$ ).

De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 n^2(1-x)x^n dx = n^2 \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On en déduit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ , sinon on aurait  $1 = \int_{[0,1]} 0 = 0$ .

**Ex. 12.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge uniformément vers  $f$ . La majoration :

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x)^2 - f(x)^2| = |f_n(x) - f(x)| \times |f_n(x) + f(x)| \leq \underbrace{(\|f\|_{\infty} + \|f_n\|_{\infty})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\|f\|_{\infty}} \|f_n - f\|_{\infty}$$

montre que la suite  $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f^2$ , donc :

$$\int_0^1 f_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

### Proposition 6

Supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $f$ . Soit  $a \in I$ . On note  $\varphi$  et  $\varphi_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les primitives respectivement de  $f$  et de  $f_n$  qui s'annulent en  $a$  :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt.$$

Alors la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\varphi$  sur tout segment de  $I$ .

Démonstration page 475

**Principe de démonstration.** Pour tout segment  $[\alpha, \beta] \subset I$ , que l'on peut supposer contenir  $a$ , et pour  $x \in [\alpha, \beta]$ , majorer  $\|\varphi_n(x) - \varphi(x)\|$  en fonction de la norme infinie de la restriction de  $f_n - f$  à  $[\alpha, \beta]$ .

## 2 Dérivation d'une limite

### Théorème 7

Supposons que les fonctions  $f_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Si la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  et si la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$ , alors :

- la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f' = g$  ;
- la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Démonstration page 475

**Principe de démonstration.** Appliquer la proposition 6 à la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Attention** L'hypothèse de convergence uniforme porte sur la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et non sur la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Ex. 13.** La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$  converge uniformément vers la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  (cf. exemple 3 de la page 457).

Cet exemple montre que la limite uniforme d'une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  peut ne pas être dérivable.

On établit par récurrence le théorème suivant.

### Théorème 8

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que les fonctions  $f_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^p$ . Si

- pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement ;
- la suite  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  ;

alors la limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  :

$$\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Démonstration page 475

**Point méthode** Pour montrer que la limite d'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on pourra montrer la convergence uniforme (sur tout segment) des suites  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

En notant  $f$  la limite de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(p)}(x).$$

## IV Séries de fonctions

### 1 Modes de convergence

Dans cette section,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$ .

#### Convergence simple

On dit que la série de fonctions  $\sum u_n$  **converge simplement** si pour tout  $x \in A$ , la série  $\sum u_n(x)$  converge. Dans ce cas, on note  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n : A \rightarrow F$

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{aligned}$$

#### Somme partielle, reste

Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions, et  $n \in \mathbb{N}$ .

- On appelle **somme partielle d'ordre  $n$**  de  $\sum u_n$  la fonction définie sur  $A$  par  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ .
- Si  $\sum u_n$  converge simplement, on appelle **reste d'ordre  $n$**  de  $\sum u_n$  la fonction définie sur  $A$  par  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad S_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x).$$

#### Convergence uniforme

Notons  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de la série  $\sum u_n$ . En appliquant à la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les définitions vues plus haut, on obtient les mêmes notions de convergence uniforme et de convergence uniforme locale de la série de fonctions  $\sum u_n$ .

#### Proposition 9

La série  $\sum u_n$  converge uniformément si, et seulement si :

- la série converge simplement ;
- la suite des restes  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle.

Démonstration page 476

**Principe de démonstration.** En cas de convergence de la série  $\sum u_n$ , on a :

$$S - S_n = R_n \quad \text{avec} \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**Ex. 14.** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . En effet, pour  $x \in [0, 1]$ , la suite  $(\frac{1}{n} x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$  est convergente. Toujours d'après ce théorème, en notant  $R_n(x)$  le reste d'ordre  $n$  de la série, on a :

$$\forall x \in [0, 1] \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} x^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

La convergence uniforme est ainsi démontrée.

On verra plus tard (cf. proposition 21 de la page 518) que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Ainsi, par convergence uniforme sur  $[0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$  est continue en 1,

donc il vient  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$  puisque  $\ln(1+x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \ln 2$ .

### Convergence normale

La convergence normale, lorsqu'elle est vérifiée, fournit un moyen simple et efficace pour établir la convergence uniforme d'une série.

#### Définition 4

La série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement si :

1. pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est bornée ;
2. la série  $\sum \|u_n\|_\infty$  est convergente.

**Terminologie** On définit naturellement les notions de convergence normale sur une partie de  $A$ , au voisinage d'un point de  $A$  ou sur tout segment de  $A$  si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Point méthode** Pour établir que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement, il suffit d'exhiber une suite sommable  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^\mathbb{N}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \|u_n(x)\| \leq \alpha_n.$$

**Ex. 15.** La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n^2} \sin(nx)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

En effet, en notant  $u_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2} \sin(nx)$ , cela pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Puisque la série numérique  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Ex. 16.** La série géométrique complexe  $\sum z^n$  converge simplement sur le disque ouvert  $D_O(0, 1)$ . Pour tout  $r \in ]0, 1[$ , on a :

$$\forall z \in D_O(0, r) \quad |z^n| \leq r^n$$

et  $\sum r^n$  est une série convergente. Ainsi, la série de fonctions  $\sum z^n$  converge normalement sur  $D_O(0, r)$ , donc au voisinage de tout point de  $D_O(0, 1)$  car les ouverts  $D_O(0, r)$  recouvrent  $D_O(0, 1)$  quand  $r$  décrit  $]0, 1[$ .

## Convergence normale et convergence uniforme

### Proposition 10

Si la série  $\sum u_n$  converge normalement, alors, pour tout  $a \in A$ , la série numérique  $\sum u_n(a)$  est absolument convergente.

**Démonstration.** Supposons que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $A$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in A$  on a :

$$\|u_n(a)\| \leq \|u_n\|_\infty$$

et puisque la série numérique de terme général positif  $\sum \|u_n\|_\infty$  est convergente, par théorème de comparaison, la série  $\sum u_n(a)$  est absolument convergente.  $\square$

### Théorème 11

Exo  
11.13

Si la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $A$ , alors elle converge uniformément sur  $A$ .

Démonstration page 476

Exo  
11.14

**Point méthode** Pour démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on commence par examiner la convergence normale.

**Attention** Comme le prouve l'exemple suivant, une série de fonctions peut converger uniformément sans pour autant converger normalement.

**Ex. 17.** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1[$  (cf. exemple 14 de la page ci-contre), mais elle ne converge pas normalement sur  $[0, 1[$ . En effet, en notant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} x^n$  définie sur  $[0, 1[$ , on a  $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$  et la série harmonique est divergente.

**Point méthode** Pour démontrer qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément, il est parfois utile d'étudier la série télescopique  $\sum (f_{n+1} - f_n)$ .

**Ex. 18.** Montrons que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $[0, 1]$  par :

$$f_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f_n(t^2) dt$$

converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^x (f_{n+1}(t^2) - f_n(t^2)) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^x |f_{n+1}(t^2) - f_n(t^2)| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit  $\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty$  puis :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

La série télescopique  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  converge normalement, donc uniformément, sur  $[0, 1]$ . On en déduit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

## 2 Théorèmes sur les séries de fonctions

Les résultats énoncés dans cette partie sont les adaptations, aux séries de fonctions, des théorèmes déjà obtenus sur les suites de fonctions.

### Continuité

#### Proposition 12

Si la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément au voisinage de  $a \in A$  et si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est continue en  $a$ , alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est continue en  $a$ .

#### Théorème 13

Supposons les fonctions  $u_n$  continues. Si la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément au voisinage de tout point de  $A$ , alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est continue.

### Remarques

- Dans la pratique, on commence par regarder s'il y a convergence uniforme sur  $A$  tout entier.
- Rappelons la discussion de la page 459 concernant la convergence uniforme au voisinage de tout point.

**Ex. 19.** La fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  est continue sur  $I = ]1, +\infty[$ .

En effet, en notant  $u_n$  la fonction définie sur  $I$  par  $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ , on a, pour tout  $a > 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [a, +\infty[ \quad |u_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}.$$

Comme la série  $\sum \frac{1}{n^a}$  est convergente, la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur toute demi-droite  $[a, +\infty[$  incluse dans  $I$  donc sur tout segment de  $I$ . Puisque les fonctions  $u_n$  sont continues, le théorème 13 permet d'affirmer que  $\zeta$  est continue.

**Interversion somme / limite**

Soit  $a$  (fini ou infini) adhérent à  $A$ .

**Théorème 14**

Si la série  $\sum u_n$  converge uniformément et si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $u_n$  a une limite finie  $\ell_n$  en  $a \in \overline{A}$  ou  $a = \pm\infty$ , alors, la série  $\sum \ell_n$  converge et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right).$$

**Ex. 20.** Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ .

Posons, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^2 + n^2}$  définie sur  $[1, +\infty[$ .

Tout d'abord, on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

On déduit de la convergence de la série  $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$  que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[1, +\infty[$ . Par ailleurs, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il est immédiat que  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . D'après le théorème de double limite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = 0.$$

**Ex. 21.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit sur  $\mathbb{N}^*$  la fonction  $u_k$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_k(n) = \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{a^k}{k!}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a :

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) \leq n^k \quad \text{donc} \quad \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Pour  $k > n$ , on a  $\binom{n}{k} = 0$  donc cette inégalité reste vraie et l'on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_k(n)| \leq \frac{|a|^k}{k!}.$$

La série  $\sum \frac{|a|^k}{k!}$  est une série convergente donc la série  $\sum u_k$  converge normalement sur  $\mathbb{N}^*$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a :

$$u_k(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a^k}{k!} \quad \text{donc} \quad u_k(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{a^k}{k!}.$$

Par théorème de double limite, on obtient :

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

### Intégration terme à terme sur un segment

Dans la suite de cette section,  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $I$  à valeurs dans  $F$ .

#### Théorème 15

Supposons que les fonctions  $u_n$  soient continues.

Si la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur le segment  $[a, b]$ , alors la série  $\sum \int_{[a, b]} u_n$  converge et l'on a :

$$\int_{[a, b]} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a, b]} u_n.$$

Exo  
11.16

### Dérivation terme à terme

#### Théorème 16 (Théorème de dérivation terme à terme)

Supposons que les fonctions  $u_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si :

- la série  $\sum u_n$  converge simplement,
- la série  $\sum u'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n.$$

Ex. 22. Pour tout  $x > 1$ , on pose  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . La fonction  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a :

$$\forall x > 1 \quad \zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

En effet, posons  $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ . Nous savons que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ . De plus, les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]1, +\infty[$ . Pour tout réel  $a > 1$ , démontrons la convergence normale de la série  $\sum u'_n$  sur  $[a, +\infty[$ . Pour tout  $x \in [a, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$0 \leq -u'_n(x) = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a} \quad \text{donc} \quad |u'_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a}.$$

De plus, on a  $\frac{\ln n}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^b}\right)$  pour tout  $b < a$ . En choisissant  $b \in ]1, a[$ , cela montre, par comparaison aux séries de Riemann, que la série numérique  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  est convergente. Cela démontre la convergence normale de la série  $\sum u'_n$  sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  avec  $a > 1$  et donc la convergence uniforme sur tout segment de  $]1, +\infty[$ . La conclusion suit.

**Théorème 17 (Théorème de dérivation terme à terme)**

Supposons que les fonctions  $u_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^p$  avec  $p \geq 1$ . Si :

- pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , la série  $\sum u_n^{(k)}$  converge simplement,
- la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ , on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.$$

Exo  
11.17

**Point méthode** Pour démontrer que la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut chercher à démontrer que :

- toutes les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ;
- pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge uniformément sur tout segment.

Dans ce cas, on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}.$$

**Ex. 23.** La fonction  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

En effet, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $u_n$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$ .

Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x > 1 \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$

Soit  $a > 1$  et  $b \in ]1, a[$ . On a pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \geq a \quad |u_n^{(p)}(x)| = \frac{\ln^p n}{n^x} \leq \frac{\ln^p n}{n^a}.$$

Par ailleurs, par croissances comparées,  $\frac{\ln^p n}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^b}\right)$ .

Par comparaison, on obtient la convergence de la série  $\sum \frac{\ln^p n}{n^a}$ .

Ainsi, la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ , donc sur tout segment de  $]1, +\infty[$ . En conclusion, la fonction  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in ]1, +\infty[ \quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\ln^p n}{n^x}.$$

### 3 Comportement asymptotique

Dans cette section, les fonctions  $u_n$  sont définies sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide et à valeurs réelles.

Il est fréquent de chercher le comportement asymptotique de  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  aux extrémités de  $I$  (limites, équivalents...). Il s'agit là de problèmes qui peuvent être extrêmement délicats. Il existe cependant quelques situations « typiques ».

#### Équivalent à l'aide d'une autre série

Une première méthode consiste à chercher un équivalent sous la forme de somme de séries.

**Point méthode** Pour déterminer un équivalent de la somme d'une série en une borne de son intervalle de définition, on peut deviner l'équivalent puis l'obtenir à l'aide du théorème de la double limite.

**Ex. 24.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ .

Déterminons un équivalent simple de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $u_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $u_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$ .

On a  $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x n^2}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x u_n(x) = \frac{1}{n^2}$ .

De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leq x u_n(x) = \underbrace{\frac{x}{1+n^2x}}_{\geq n^2x} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Il s'ensuit que la série de fonctions  $\sum x u_n(x)$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par suite, le théorème de la double limite pour les séries de fonctions permet d'affirmer :

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

#### Comparaison série-intégrale

**Point méthode** Pour déterminer un équivalent de la somme d'une série en une borne de son intervalle de définition, une comparaison série-intégrale peut parfois se révéler utile.

Exo  
11.18

**Ex. 25.** Déterminons un équivalent simple en 1 de  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Pour tout  $(x, t) \in ]1, +\infty[ \times [1, +\infty[$ , on pose  $u(x, t) = \frac{1}{t^x}$ .

Pour  $x > 1$  fixé, la fonction  $t \mapsto u(x, t)$  est continue, décroissante et intégrable donc par comparaison série-intégrale, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} + 1,$$

ce qui donne :

$$\forall x > 1 \quad \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1.$$

On conclut à l'équivalent simple  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$  puisque les fonctions encadrantes sont équivalentes à  $\frac{1}{x-1}$  en  $1^+$ . On a même  $f(x) = \frac{1}{x-1} + O(1)$ .

## V Approximation uniforme

Dans cette partie,  $a$  et  $b$  sont deux réels avec  $a < b$  et l'on pose  $I = [a, b]$ .

### Définition 5

Soit  $f \in \mathcal{B}(I, F)$  et  $\mathcal{X}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{B}(I, F)$ . On dit que l'on peut **approcher uniformément**  $f$  par des éléments de  $\mathcal{X}$  si  $f$  appartient à l'adhérence de  $\mathcal{X}$  dans  $(\mathcal{B}(I, F), \| \cdot \|_\infty)$ .

**Reformulation** Par caractérisation de l'adhérence, dire que l'on peut approcher uniformément  $f$  par des éléments de  $\mathcal{X}$  signifie que l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{X}$  tel que  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$  ;
- (ii) il existe une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{X}$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $I$ .

### 1 Approximation par des fonctions en escalier

Lors de la construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux en première année, il a été établi que toute fonction continue par morceaux à valeurs dans  $\mathbb{K}$  peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier. La propriété suivante étend ce résultat à des fonctions à valeurs dans  $F$ .

### Proposition 18

Toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow F$  continue par morceaux peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier sur  $[a, b]$ .

Démonstration page 476

**Remarque** En d'autres termes, l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  est dense dans  $(\mathcal{CM}([a, b], F), \| \cdot \|_\infty)$ .

### 2 Approximation par des polynômes

#### Théorème 19 (Théorème de Weierstrass)

Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  peut être approchée uniformément par des fonctions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{K}$

Démonstration (non exigible) page 477

**Remarque** En d'autres termes, l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[a, b]$  est dense dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ .

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**Ex. 26.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrons que  $f$  est la fonction nulle. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 P(x) f(x) dx = 0.$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions polynomiales réelles qui converge uniformément vers  $f$  sur le segment  $[0, 1]$ . Puisque la fonction  $f$  est bornée, car continue sur un segment, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|P_n f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty$$

et donc, la suite  $(P_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f^2$  sur  $[0, 1]$ . Par intégration (cf. théorème 5 de la page 461), on a :

$$0 = \int_0^1 P_n(x) f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(x) dx \quad \text{puis} \quad \int_0^1 f^2(x) dx = 0.$$

Puisque  $f^2$  est une fonction positive continue d'intégrale nulle, elle est nulle, donc  $f$  aussi.

# Démonstrations

**Proposition 2** Par caractère local de la limite, on peut supposer sans perte de généralité que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $A$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . L'hypothèse de convergence uniforme donne l'existence d'un entier  $n$  tel que  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Fixons un tel entier.

Par continuité de  $f_n$  en  $a$ , il existe un réel  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $x \in A$  vérifiant  $\|x - a\| \leq \eta$ , on ait  $\|f_n(x) - f_n(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Par conséquent, pour tout  $x \in A$  vérifiant  $\|x - a\| \leq \eta$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)\| \\ &\leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f(a)\| \\ &\quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n(x) - f_n(a)\| + \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La continuité de  $f$  en  $a$  est donc démontrée.

**Théorème 4** On commence par démontrer le lemme suivant.

### Lemme (d'interversion des limites)

Supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $f_n$  ait une limite finie  $\ell_n \in F$  en  $a$ .

Si l'une des deux limites  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$  ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe dans  $F$ , alors l'autre existe et elles sont égales, i.e. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

### Démonstration.

- Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

Pour  $n$  suffisamment grand, la fonction  $f_n - f$  est bornée et l'on a :

$$\forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

En faisant tendre  $x$  vers  $a$  dans cette inégalité à  $n$  fixé, il vient :

$$\|\ell_n - \ell\| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Par convergence uniforme, on a  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\|\ell_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , autrement dit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \ell$ .

- Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \ell$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la limite, il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|\ell_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par définition de la convergence uniforme, il existe un entier  $n_1$  tel que pour  $n \geq n_1$ ,  $f_n - f$  soit bornée et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons  $n = \max\{n_0, n_1\}$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in V \cap A \quad \|f_n(x) - \ell_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Ainsi, pour  $x \in V \cap A$ , on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\|f(x) - \ell\| &= \| (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - \ell_n) + (\ell_n - \ell) \| \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n(x) - \ell_n\| + \|\ell_n - \ell\| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Par suite,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ . □

Notons que le fait que  $F$  soit de dimension finie n'a pas été utilisé dans la démonstration du lemme et démontrons maintenant le résultat principal.

- Montrons que la suite  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Tout d'abord, par définition de la convergence uniforme, il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq 1.$$

D'après l'inégalité triangulaire, il vient :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f_{n_0}(x)\| \leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_{n_0}(x)\| \leq 2.$$

En faisant tendre  $x$  vers  $a$  dans cette inégalité, on obtient :

$$\forall n \geq n_0 \quad \|\ell_n - \ell_{n_0}\| \leq 2 \quad \text{puis} \quad \|\ell_n\| \leq 2 + \|\ell_{n_0}\|,$$

ce qui montre que la suite  $(\ell_n)$  est bornée.

- Le théorème de Bolzano-Weierstrass ( $F$  est de dimension finie) donne l'existence d'une extraction  $\varphi$  et d'un vecteur  $\ell \in F$  tels que  $\ell_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ . En appliquant le lemme d'interversion des limites à la suite  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $f$ , il vient que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .
- Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , le lemme d'interversion des limites donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = \ell$ . Cela termine la démonstration.

**Théorème 5** Puisque les fonctions  $f_n$  sont continues et que la convergence est uniforme, la fonction  $f$  est continue (cf. proposition 3 de la page 460). Par conséquent l'intégrale  $\int_{[a,b]} f$  est définie.

Pour tout entier  $n$  on a :

$$\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f_n - f\|.$$

Puisque la convergence est uniforme et que les fonctions sont continues sur le segment  $[a, b]$  donc bornées, on a :

$$0 \leq \int_{[a,b]} \|f_n - f\| \leq \int_{[a,b]} \|f_n - f\|_\infty = (b-a) \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

par conséquent :

$$\left\| \int_{[a,b]} (f_n - f) \right\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{[a,b]} (f_n - f) \rightarrow 0,$$

et la conclusion en découle, par linéarité de l'intégrale.

**Proposition 6** Par convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , la fonction  $f$  est continue.

Soit  $[\alpha, \beta]$  un segment inclus dans  $I$  tel que  $a \in [\alpha, \beta]$ . Notons  $\|\cdot\|_{\infty, [\alpha, \beta]}$  la norme infinie sur le segment  $[\alpha, \beta]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [\alpha, \beta]$ , on a :

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| &= \left\| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right\| \\ &\leq |x - a| \|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} \leq (\beta - \alpha) \|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]},\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence uniforme de la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\varphi$  sur  $[\alpha, \beta]$  puisque, par hypothèse,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[\alpha, \beta]$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} = 0$ .

On en déduit la convergence uniforme de la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\varphi$ , sur tout segment de  $I$ , puisque tout segment de  $I$  est inclus dans un segment contenant  $a$ .

**Théorème 7** Supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  et que la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $g$ . D'après la proposition 3 de la page 460, la fonction  $g$  est continue. Soit  $a \in I$ .

- D'après le théorème de primitivation, pour tout  $x \in I$ , on a :

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

En d'autres termes, pour tout  $x \in I$  :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Il s'ensuit, du fait que  $g$  est une fonction continue, que  $f$  est de classe  $C^1$  et que  $f' = g$ .

- Par ailleurs, si l'on définit  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad h_n(x) = \int_a^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(a),$$

par théorème de primitivation, la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment vers sa limite simple c'est-à-dire vers la fonction  $f - f(a)$ .

D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad \|f_n(x) - f(x)\| &= \|h_n(x) + f_n(a) - f(x)\| \\ &\leq \|h_n(x) - (f(x) - f(a))\| + \|f_n(a) - f(a)\|,\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment.

**Théorème 8** Démontrons ce résultat par récurrence sur  $p$ . Le cas  $p = 1$  correspond au théorème 7 de la page 462.

Supposons le résultat vrai pour un certain rang  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de classe  $C^{p+1}$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  la suite  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement et la suite  $(f_n^{(p+1)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ . Le théorème 7 de la page 462 appliqué à la suite  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  donne que  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$  de classe  $C^1$  et que :

$$\forall x \in I \quad f_n^{(p+1)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g'(x).$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Puisque la suite  $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , l'hypothèse de récurrence donne que la limite simple  $f$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et que, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  on a :  $\forall x \in I \quad f^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}(x)$ . En particulier :

$$\forall x \in I \quad f^{(p)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(p)}(x) = g(x).$$

Par conséquent,  $f^{(p)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall x \in I \quad f^{(p+1)}(x) = g'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(p+1)}(x).$$

Cela termine la démonstration.

### Proposition 9

- Supposons que la série  $\sum u_n$  converge uniformément. Alors, la suite  $(S_n)$  des sommes partielles converge uniformément vers la somme  $S$ , et en particulier, la série  $\sum u_n$  converge simplement. Par différence, la suite  $(R_n) = (S - S_n)$  converge uniformément vers 0 puisque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|R_n(x)\| = \|S(x) - S_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

- Réciproquement, si la série  $\sum u_n$  converge simplement et que la suite des restes converge uniformément vers 0, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|S(x) - S_n(x)\| = \|R_n(x)\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite  $(S_n)$  converge uniformément vers la somme  $S$ .

### Théorème 11

Supposons que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $A$ .

Soit  $x \in A$ . Puisque la série  $\sum u_n$  converge normalement, la série  $\sum u_n(x)$  est absolument convergente. On en déduit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  l'inégalité :

$$\|R_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k(x)\|.$$

Ainsi, par définition de la norme de la convergence uniforme :

$$\|R_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty.$$

Comme  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ , cela montre que  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $A$ .

### Proposition 18

**Cas des fonctions continues.** Supposons que  $f$  soit continue. Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue et donc il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $(x, y) \in [a, b]^2$ , on ait  $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$  dès que  $|x - y| \leq \eta$ . Fixons un tel  $\eta$  ainsi qu'un entier naturel non nul  $n$  tel que  $0 < \frac{b-a}{n} \leq \eta$ . Notons  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\varphi$  la fonction en escalier sur  $[a, b]$  définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[ \text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket ; \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Il est clair que  $f(b) - \varphi(b) = 0$ .

Pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe  $k$  tel que  $x \in [a_k, a_{k+1}]$ , et puisque  $|x - a_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \eta$  :

$$\|f(x) - \varphi(x)\| = \|f(x) - f(a_k)\| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $\varphi$  répond donc au problème.

**Cas des fonctions continues par morceaux.** Supposons que  $f$  soit continue par morceaux. Considérons  $\sigma = (u_0, \dots, u_n)$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$  et, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , notons  $f_i$  la restriction de la fonction  $f$  à  $]u_i, u_{i+1}[$  et  $\tilde{f}_i$  le prolongement par continuité sur  $[u_i, u_{i+1}]$  de  $f_i$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la première partie de l'étude, il existe, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , une fonction  $\varphi_i \in \mathcal{E}([u_i, u_{i+1}], F)$  telle que  $\|\tilde{f}_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon$ . Considérons la fonction  $\varphi$  définie sur  $[a, b]$  par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in ]u_k, u_{k+1}[ \text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket ; \\ f(u_k) & \text{si } x = u_k \text{ où } k \in \llbracket 0, n \rrbracket . \end{cases}$$

La fonction  $\varphi$  répond au problème.

### Théorème 19

- On peut sans perte de généralité supposer que  $[a, b] = [0, 1]$ .

En effet, dans le cas général, si  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction continue, la fonction :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto g(a + (b-a)t) \end{aligned}$$

est une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Si l'on suppose que  $f$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , alors  $g$  est limite uniforme de la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad g_n(x) = f_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

- On définit ainsi la fonction polynomiale  $B_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall x \in [0, 1] \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Montrons que la suite  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue donc il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  donc bornée et, par disjonction de cas suivant que  $|x - y| \leq \delta$  ou  $|x - y| > \delta$ , on a :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} (x - y)^2. \quad (*)$$

Fixons  $x \in [0, 1]$ . Notons  $Y$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  suivant la loi binomiale de paramètre  $(n, x)$ . En posant  $X = \frac{Y}{n}$ , on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = x \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(Y) = \frac{x(1-x)}{n},$$

et, d'après la formule de transfert,  $\mathbb{E}(f(X)) = B_n(f)(x)$ .

D'après la relation  $(*)$ , on a :

$$|f(x) - f(X)| \leq \varepsilon + M(x - X)^2 \quad \text{avec} \quad M = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Par l'inégalité triangulaire, linéarité et croissance de l'espérance, il vient :

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(f)(x)| &= |\mathbb{E}(f(x) - f(X))| \leq \mathbb{E}(|f(x) - f(X)|) \\&\leq \varepsilon + M\mathbb{E}((X-x)^2) = \varepsilon + M\mathbb{V}(X) = \varepsilon + M\frac{x(1-x)}{n}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{n}.$$

Il existe alors un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - B_{n_0}(f)(x)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre la convergence uniforme sur  $[0, 1]$  de la suite  $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers  $f$ .

## S'entraîner et approfondir

### Suites de fonctions

**11.1** Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

→<sup>454</sup>

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] ; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right]. \end{cases}$$

Étudier la convergence simple de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**11.2** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers une fonction  $f$ . Montrer que  $f$  est convexe.

→<sup>455</sup>

**11.3** Soit  $F$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, F)^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions bornées qui converge uniformément vers  $f \in \mathcal{F}(A, F)$ . Montrer que  $f$  est bornée.

→<sup>456</sup>

**11.4** On pose, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sin\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**11.5** Étudier la convergence uniforme sur les segments de la forme  $[0, b]$ , puis sur  $\mathbb{R}_+$ , de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, n]}(x). \end{aligned}$$

**11.6** Soit  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

→<sup>460</sup>

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{2^n}\right).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ .
2. Montrer que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0.

**11.7** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues à valeurs réelles qui converge uniformément sur le segment  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . Montrer que :

$$\int_a^b e^{f_n(t)} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b e^{f(t)} dt.$$

**11.8** Soit  $F$  un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{B}(\mathbb{N}, F), \|\cdot\|_\infty)$  des suites bornées à valeurs dans  $F$  et l'on pose  $G$  le sous-espace vectoriel des suites convergentes. Montrer que  $G$  est une partie fermée de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, F)$ .

**11.9** Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$  qui converge uniformément sur  $A$  vers  $f$ . On suppose que les fonctions  $f_n$  sont uniformément continues. Montrer que  $f$  est uniformément continue.

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**11.10** Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}. \end{aligned}$$

Étudier la convergence simple puis uniforme sur  $\mathbb{R}$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**11.11** Étudier la convergence simple et uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f_n(x) = \left( x + \frac{e^{-x}}{n} \right)^2.$$

**11.12** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge uniformément sur  $[a, b]$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer que la suite  $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément.

## Séries de fonctions

**11.13** Déterminer le domaine de définition et étudier la convergence (normale/uniforme) des séries de fonctions de la variable réelle :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

**11.14** Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$\stackrel{\rightarrow 465}{f_0 = 0} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} \|g\|_\infty.$$

2. Démontrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction continue  $f$  vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

**11.15** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

2. Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.

**11.16** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive telle que  $\sum a_n$  soit convergente.

1. Montrer que l'application  $f$  définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$  est continue.

2. Calculer  $\int_{[0, 2\pi]} f$ .

**11.17** Montrer que la fonction définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 →469

**11.18** Pour tout  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ .  
 →470

Déterminer un équivalent simple de  $f$  au voisinage de 0.

**11.19** Étudier les convergences simple, normale et uniforme sur  $[0, 1]$  de la série de fonctions  $\sum x^n(1-x)$ .

**11.20** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ .

Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et préciser sa limite.

2. En déduire un équivalent simple de la suite  $S'_n = \sum_{j=0}^n j^n$ .

### 11.21 Fonction $\zeta$ de Riemann

Montrer que la fonction :

$$\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

est continue sur le demi-plan  $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ .

**11.22** Pour  $x > 0$ , on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ .

1. Montrer que  $S$  est bien définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Soit  $x > 0$ . Donner une relation entre  $S(x+1)$  et  $S(x)$ .
3. Déterminer un équivalent simple de  $S$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

**11.23** On pose :

$$f : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{[n\pi]^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \right).$$

Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

\* **11.24** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $u_n(x) = \frac{\sqrt{x} \ln n}{1+xn^2}$  et  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Montrer que  $f$  n'est pas continue en 0.

*Indication.* On pourra minorer  $f(x)$  par  $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)$  puis choisir judicieusement une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers 0.

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**11.25** On pose  $u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D \subset \mathbb{R}_+$  de  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Étudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .

2. Déterminer les limites et des équivalents simples de  $f$  aux bornes de  $D$ .

On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

\* **11.26** 1. Soit  $x > 0$ . Montrer que la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

est une suite convergente.

*Indication.* On pourra étudier la série télescopique  $\sum (\ln u_n(x) - \ln u_{n-1}(x))$ .

2. On note  $\Gamma(x)$  la limite de la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Montrer que  $\Gamma$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

\* **11.27** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$ , on pose  $u_n(x) = \frac{e^{inx}}{n}$ . Montrer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$

converge simplement sur  $]0, 2\pi[$  et que la somme  $S$  est une fonction continue.

*Indication.* On pourra étudier le terme télescopique  $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ .

**11.28** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on pose  $u_n(x) = \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$ .

1. Montrer que la somme  $S$  de la série de fonctions  $\sum u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrer que la fonction  $S$  n'est pas dérivable en 0.

**11.29** Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$ .

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .

2. Donner un équivalent simple de  $f$  en  $+\infty$  et en 0.

On admet que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

**11.30** Montrer que  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est bien définie et continue.

$$M \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M^k}{k^k}$$

**11.31** Soit  $(z, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$ , avec  $r \neq |z|$ . Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , exprimer  $\frac{1}{z - re^{it}}$  sous la forme

de la somme d'une série géométrique puis calculer  $I(r, z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - re^{it}}$ .

## Approximation uniforme

**11.32** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [-1, 1]$ , on pose :

$$P_n(x) = (1 - x^2)^n \quad ; \quad a_n = \int_{[-1,1]} P_n \quad ; \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}.$$

1. (a) Montrer que  $a_n \geq \frac{2}{n+1}$ .
- (b) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Montrer que la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[\alpha, 1]$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'extérieur de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-t)Q_n(t) dt.$$

- (a) Montrer que la restriction de  $f_n$  à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est une fonction polynomiale.
- (b) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

*Indication.* Remarquer que  $f(x) = \int_{-1}^1 f(x)Q_n(t) dt$ .

3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass sur le segment  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

**11.33** Dans l'espace  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  muni de la norme infinie, on note  $E$  le sous-espace vectoriel constitué des fonctions continues admettant une limite finie en  $+\infty$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ . Montrer que  $\text{Adh}(\text{Vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = E$ .

\* **11.34** Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $f$  est la limite uniforme d'une suite de polynômes pairs.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit la limite uniforme d'une suite de polynômes impairs.

## Solutions des exercices

- 11.1** • On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $f_n(0) = 0$  donc  $f_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . On constate que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est stationnaire.  
En effet, pour tout entier  $n$  assez grand, on a  $x \geq \frac{1}{n}$  et donc  $f_n(x) = \frac{1}{x}$ .  
Il s'ensuit que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 ; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 . \end{cases}$$

- 11.2** Soit  $(x, y) \in I^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Par convexité des fonctions  $f_n$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f_n(x) + \lambda f_n(y)$$

puis, par passage à la limite,  $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ . Ainsi, la limite simple  $f$  est convexe.

- 11.3** On applique la définition pour  $\varepsilon = 1$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq 1.$$

En particulier, en prenant  $n = n_0$  et en utilisant l'inégalité triangulaire renversée, on obtient :

$$\forall x \in A \quad \|f(x)\| \leq 1 + \|f_{n_0}(x)\| \leq 1 + \|f_{n_0}\|_\infty,$$

ce qui montre que la fonction  $f$  est bornée.

- 11.4** Puisque  $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ , l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction sinus donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin y - \sin x| \leq |y - x|.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - \sin(x)| = \left| \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sin(x) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $\sin$ .

- 11.5** • Étudions tout d'abord la convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 \geq x$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right).$$

On a ensuite :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n} \quad \text{donc} \quad n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -x.$$

Par continuité de la fonction  $\exp$  en  $-x$ , on obtient  $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-x}$ .

Ainsi, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement vers la fonction  $f : x \mapsto e^{-x}$ .

- Soit  $c \in [0, 1[$  et  $g : t \mapsto \ln(1 - t)$  définie sur  $[0, c]$ . La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  et :

$$\forall t \in [0, c] \quad g''(t) = \frac{-1}{(1-t)^2} \quad \text{puis} \quad |g''(t)| \leq \frac{1}{(1-c)^2}.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit :

$$|\ln(1 - c) + c| \leq \frac{c^2}{2(1 - c)^2}. \quad (*)$$

Soit  $b \in \mathbb{R}_+$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 > b$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$\forall x \in [0, b] \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{x}{n} \in [0, 1[.$$

Soit  $n \geq n_0$  et  $x \in [0, b]$ . L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}_-$  donne :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \left| \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) - (-x) \right| = n \left| \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n} \right|.$$

D'après l'inégalité  $(*)$ , il vient :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{n}{2} \frac{x^2}{n^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2} \leq \underbrace{\frac{nb^2}{2(n-b)^2}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}}.$$

En conclusion, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, b]$ .

- D'après une inégalité de convexité, on a :

$$\forall t \in [0, 1[ \quad \ln(1 - t) \leq -t.$$

Par croissance de l'exponentielle, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f_n(x) \leq f(x).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Étant donné que  $e^{-x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ , on peut fixer  $b > 0$  tel que :

$$\forall x \geq b \quad e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par convergence uniforme sur le segment  $[0, b]$  de la suite  $(f_n)$ , il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [0, b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout  $n \geq n_0$  et  $x > b$ , on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq f_n(x) + f(x) \leq 2e^{-x} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de la suite  $(f_n)$ .

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**11.6** 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la continuité uniforme, il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in ]0, 1]^2 \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

La suite  $(\frac{1}{2^n})$  converge vers 0 donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{2^n} \leq \delta.$$

Soit  $n \geq n_0$  et  $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ . Comme  $\left|(x + \frac{1}{2^n}) - x\right| = \frac{1}{2^n} \leq \delta$ , on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{2^n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ .

2. Pour  $x \in ]0, \frac{1}{2}]$  fixé, on a  $f(x + \frac{1}{2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$  par continuité de  $f$  en  $x$ .

Par conséquence du théorème de la double limite, la fonction  $f$  (limite uniforme de la suite  $(f_n)$  au voisinage de 0) admet une limite finie en 0 et est donc prolongeable par continuité en 0.

**11.7** • Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par continuité sur le segment  $[a, b]$ , les fonctions  $f$ ,  $f_n$  et  $f - f_n$  sont bornées et, par inégalité triangulaire :

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Comme la suite  $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, c'est une suite bornée et il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x)| \leq M + \|f\|_\infty.$$

On pose  $c = M + \|f\|_\infty$  et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \in [-c, c].$$

• La fonction  $\exp$  est de classe  $C^1$  sur le segment  $[-c, c]$  et :

$$\forall y \in [-c, c] \quad |\exp'(y)| = \exp(y) \leq e^c.$$

Par conséquence de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall (y, z) \in [-c, c]^2 \quad |e^y - e^z| \leq e^c |y - z|.$$

Par le point précédent, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |e^{f_n(x)} - e^{f(x)}| \leq e^c |f_n(x) - f(x)| \leq e^c \|f_n - f\|_\infty.$$

Cette majoration montre que la suite  $(e^{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers la fonction  $e^f$ .

• Par intégration sur un segment d'une suite de fonctions qui converge uniformément, on en déduit :

$$\int_a^b e^{f_n(x)} dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b e^{f(x)} dx.$$

**11.8** Montrons par caractérisation séquentielle que  $G$  est une partie fermée de  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, F)$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, dont on note  $u \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, F)$  la limite. Montrons que  $u \in G$ .

- Tout d'abord, on a :

$$\|u_n - u\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

autrement dit, la suite  $(u_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{N}$  vers  $u$ .

- Par ailleurs, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $u_n$  est une suite convergente ; il existe donc  $\ell_n \in F$  tel que :

$$u_n(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell_n.$$

- Enfin, comme  $F$  est de dimension finie, on peut appliquer le théorème de la double limite et il existe  $\ell \in F$  tel que :

$$\ell_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad u(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

En particulier, la suite  $u$  est convergente donc  $u \in G$ , ce qui conclut.

**11.9** Soit  $\varepsilon > 0$ .

Par convergence uniforme, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f - f_{n_0}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Puisque la fonction  $f_{n_0}$  est uniformément continue, il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leq \eta \implies \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par conséquent, pour tout  $(x, y) \in A^2$  tel que  $\|x - y\| \leq \eta$ , on a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)\| + \|f_{n_0}(y) - f(y)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f$  est uniformément continue.

**11.10 Étude de la convergence simple.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $f_n(0) = 0$  et donc  $f_n(0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^*$  fixé, on a :

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle.

**Étude de la convergence uniforme.** Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Alors, d'après le point précédent,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle et en particulier, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de réels, on a :

$$|f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - 0| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

ce qui contredit ce qui précède.

En conclusion, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**11.11 Étude de la convergence simple.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction  $f : x \mapsto x^2$ .

**Étude de la convergence uniforme.** On a  $|f_n(x) - f(x)| = |2\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2}|$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ . Posons  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &\longmapsto xe^{-x} \\ &\longmapsto xe^{-x}. \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

On en déduit le tableau de variation qui suit :

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g$		$e^{-1}$	

Il montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq g(x) \leq e^{-1}.$$

Il s'ensuit que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$|f_n(x) - f(x)| = 2\frac{xe^{-x}}{n} + \frac{e^{-2x}}{n^2} \leq 2\frac{e^{-1}}{n} + \frac{1}{n^2},$$

donc la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ .

**11.12** Notons  $f$  la limite de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et montrons que  $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $\varphi \circ f$ .

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$  donc, par continuité des fonctions  $f_n$ , la limite  $f$  est continue.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par continuité sur le segment  $[a, b]$ , les fonctions  $f$ ,  $f_n$  et  $f - f_n$  sont bornées et :

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty.$$

Comme la suite  $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, elle est bornée. Donc il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty \leq M + \|f\|_\infty.$$

En posant  $c = M + \|f\|_\infty$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \in [-c, c].$$

- Fixons  $\varepsilon > 0$  et montrons qu'il existe un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| \leq \varepsilon.$$

La restriction de la fonction  $\varphi$  au segment  $[-c, c]$  est continue, donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Ainsi il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in [-c, c]^2 \quad |x - y| \leq \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Comme la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ , il existe un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \delta.$$

En utilisant le point précédent, il vient :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| \leq \varepsilon,$$

ce qui achève de montrer que la suite  $(\varphi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers la fonction  $\varphi \circ f$ .

- 11.13**
- Par comparaison à un exemple de Riemann, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+x^2}$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  (son terme général n'est pas défini pour  $x = 0$  et  $n = 0$ ).
  - Posons  $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^2+x^2}$ . La fonction  $u_n$  est définie, bornée sur  $\mathbb{R}$  lorsque  $n \geq 1$ . De plus  $\|u\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  étant convergente, la série  $\sum u_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
  - La série  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^*$ , car  $u_0$  n'est pas bornée. La convergence normale de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  montre que la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des restes converge uniformément vers 0. Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^*$ .

- 11.14** 1. • Il est clair que l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto x \mapsto g(x) + \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

est bien définie. Par conséquent la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et toutes les fonctions  $f_n$  sont continues.

- Par récurrence, démontrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} \|g\|_\infty.$$

L'inégalité est immédiate pour  $n = 0$  car  $f_1 = g$ .

Supposons la propriété vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} |f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= \left| \int_0^x f_{n+1}(t) - f_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |f_{n+1}(t) - f_n(t)| dt \\ &\leq \int_0^x \frac{t^n}{n!} \|g\|_\infty dt \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \|g\|_\infty, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité et termine la récurrence.

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

2. La question précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{n!}$$

et, par comparaison, du fait que la série  $\sum \frac{1}{n!}$  est convergente, la série de fonctions  $\sum (f_{n+1} - f_n)$  est normalement convergente et donc uniformément convergente sur  $[0, 1]$ . Il s'ensuit que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction continue  $f$ . D'après la proposition 6 de la page 462, on a :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x) + \int_0^x f(t) dt,$$

ce qui implique que  $f$  vérifie :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = g(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

**11.15** 1. Soit  $x > 0$ . La suite  $\left(\frac{1}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est positive, décroissante et converge vers 0. Le théorème des séries alternées assure ainsi la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$  et de plus, en notant  $R_n(x)$  le reste d'ordre  $n$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{x} \left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor \leq \frac{1}{n+1}.$$

Cette dernière majoration montre que la suite  $(R_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle, donc que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\frac{(-1)^k}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ .

Par théorème de la double limite, on a :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Étant donné que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_n = f(n)$ , on en déduit que :

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

**11.16** 1. Notons  $u_n$  l'application définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx)$ . Il est clair que  $u_n$  est bornée. Du fait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\|u_n\|_\infty \leq a_n$ , on déduit que la série  $\sum u_n$  converge normalement. De la continuité de toutes les fonctions  $u_n$  et du théorème de continuité des séries de fonctions, on conclut que la fonction  $f$  est continue.

2. Puisque la série  $\sum u_n$  converge normalement, et puisque les fonctions  $u_n$  sont continues, on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_{[0, 2\pi]} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0, 2\pi]} u_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = 2\pi a_0. \end{aligned}$$

**11.17** Notons  $u_n$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $((-1)^n u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, décroissante et converge vers 0. D'après le théorème des séries alternées, la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p} \frac{p!}{(x+n)^{p+1}}.$$

- Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a > 0$ . Pour  $x \geq a$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| = \frac{p!}{(x+n)^{p+1}} \leq \frac{p!}{(a+n)^{p+1}}.$$

Puisque la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{p+1}}$  est convergente, la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . Cela étant vrai pour tout  $a > 0$ , on en déduit la convergence normale sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .

- La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent, le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique à tout ordre au moins égal à 1. La fonction  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**11.18** Notons  $u : (x, t) \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ .

Fixons  $x > 0$ . L'application  $t \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$  est décroissante, positive et intégrable. Par le changement de variable  $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} u(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+xt^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Par comparaison série-intégrale, on a :

$$\left| f(x) - \int_0^{+\infty} u(x, t) dt \right| \leq u(x, 0) \quad \text{donc} \quad \left| f(x) - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \right| \leq 1.$$

On en déduit :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + O(1) \quad \text{puis} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

**11.19** Notons  $u_n(x) = x^n(1-x)$ , pour  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

- Montrons que la série  $\sum u_n$  converge simplement.

Pour  $x = 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n(1) = 0$  et donc la série  $\sum u_n(1)$  est convergente.

Soit  $x \in [0, 1[$ . La série  $\sum u_n(x)$  est convergente, puisqu'il s'agit d'une série géométrique de raison  $x$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $u_n$  est dérivable et :

$$\forall x \in [0, 1] \quad u'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x).$$

On obtient alors le tableau de variation qui suit :

$x$	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$u'_n(x)$	+	0	-
$u_n$	0 ↗		0 ↘

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

On en déduit :

$$\|u_n\|_\infty = u_n \left( \frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n.$$

Puisque

$$\ln \left( \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \right) = n \ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{n}{n+1} + o(1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1,$$

on a  $\|u_n\|_\infty \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$ , donc la série  $\sum \|u_n\|_\infty$  diverge et la série  $\sum u_n$  ne converge pas normalement sur  $[0, 1]$ .

- La série  $\sum u_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

En effet, pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k (1-x) = x^{n+1},$$

donc  $\|R_n\|_\infty = 1$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque** On peut également observer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ . Cette fonction étant discontinue (en 1) et les fonctions  $u_n$  étant toutes continues, la convergence ne saurait être uniforme sur  $[0, 1]$ .

**11.20** 1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_k(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k. \end{cases}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n > k$ , on a :

$$0 \leq u_n(k) = \exp \left( n \ln \left( 1 - \frac{k}{n} \right) \right) \leq e^{-k}$$

par inégalité de convexité.

Ces inégalités sont encore vérifiées lorsque  $n \leq k$ , puisqu'alors  $u_n(k) = 0$ . On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_k(n) \leq e^{-k}.$$

La série  $\sum e^{-k}$  est convergente donc la série  $\sum u_k$  converge normalement sur  $\mathbb{N}^*$ .

Par ailleurs, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $u_k(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-k}$ .

Par théorème de double limite, on en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1}.$$

2. Par le changement d'indice  $[j = n - k]$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S'_n = n^n S_n.$$

Comme la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la limite non nulle  $\frac{e}{e-1}$ , on en déduit :

$$S'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{e-1} n^n.$$

**11.21** Rappelons que si  $x$  est un réel strictement positif et si  $z$  est un nombre complexe, par définition  $x^z = \exp(z \ln x)$ . En particulier  $|x^z| = x^{\operatorname{Re} z}$ .

- Soit  $a > 1$ . Montrons la convergence normale de la série  $\sum \frac{1}{n^z}$  sur le demi-plan :

$$\mathcal{P}_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > a\}.$$

On constate que pour tout  $z \in \mathcal{P}_a$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \leq \frac{1}{n^a}.$$

La série  $\sum \frac{1}{n^a}$  converge car  $a > 1$ , donc la série  $\sum \frac{1}{n^z}$  converge normalement sur  $\mathcal{P}_a$ .

- La série de fonctions  $\sum \frac{1}{n^z}$  converge normalement au voisinage de tout point du demi-plan  $\mathcal{P}$  car les demi-plans ouverts  $\mathcal{P}_a$  recouvrent  $\mathcal{P}$  quand  $a$  décrit  $]1, +\infty[$ . Puisque les fonctions  $z \mapsto \frac{1}{n^z}$  sont continues, on en déduit que  $\zeta$  est continue sur  $\mathcal{P}$ .

**11.22** Pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\left| \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right| = \frac{x+n-1}{x+n} \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série numérique  $\sum u_n(x)$  est absolument convergente, donc convergente. La fonction  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Montrons que  $S$  est de classe  $C^1$ . Pour cela, puisque la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ , démontrons que la série dérivée  $\sum u'_n$  converge normalement sur tout segment, les fonctions  $u_n$  étant toutes de classe  $C^1$ . Soit  $a > 0$ . Pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| u'_n(x) \right| = \left| \frac{1}{n!(x+n)^2} \right| \leq \frac{1}{n!(a+n)^2} \leq \frac{1}{a^2} \frac{1}{n!}.$$

La convergence de la série  $\sum \frac{1}{n!}$  garantit la convergence normale de la série de fonctions  $\sum u'_n$  sur  $[a, +\infty[$ . La conclusion suit.

- Soit  $x > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} && \text{(décalage d'indice)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(1 - \frac{x}{x+n}\right) \\ &= (1 - e^{-1}) + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} && \text{(deux séries convergentes)} \\ &= (1 - e^{-1}) + x \left(S(x) - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$S(x+1) = xS(x) - e^{-1}. \tag{*}$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

3. Équivalent en 0. On a :

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - e^{-1}.$$

Puisque  $S$  est continue (elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ ), la relation (\*) donne :

$$xS(x) - e^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(1) = 1 - e^{-1} \quad \text{donc} \quad xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

On en déduit :

$$S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Équivalent en  $+\infty$ . Pour tout  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n(x) = xu_n(x)$ . On a :

$$|v_n(x)| = \frac{1}{n!} \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{n!}.$$

La convergence de la série numérique  $\sum \frac{1}{n!}$  assure la convergence normale, donc uniforme, de la série  $\sum v_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par ailleurs, pour  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ainsi, le théorème de la double limite donne :

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Par suite :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{x}.$$

**11.23 Caractère bien défini de  $f$ .** Pour tout  $s > 0$ , on pose  $u_n(s) = \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}$ .

Par définition de la partie entière, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$0 < n\pi - 1 < \lfloor n\pi \rfloor \leq n\pi \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{(n\pi)^s} \leq \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} \leq \frac{1}{(n\pi - 1)^s}.$$

Par suite :

$$0 \leq \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leq \frac{1}{(n\pi - 1)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}. \quad (*)$$

Par ailleurs, pour  $n \geq 2$ , on a  $n\pi - 1 \geq (n-1)\pi > 0$ . On en déduit alors de l'inégalité (\*) :

$$0 \leq \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \leq \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}.$$

La série télescopique  $\sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{((n-1)\pi)^s} - \frac{1}{(n\pi)^s} \right)$  est convergente, car, du fait que  $s > 0$ , on

a  $\frac{1}{(n\pi)^s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par comparaison, les termes généraux étant positifs, la série  $\sum u_n(s)$  est convergente.

**Continuité de  $f$ .** Démontrons la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum u_n$  sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$ . Fixons  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $s \geq a$ , on a :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(s) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \frac{1}{((k-1)\pi)^s} - \frac{1}{(k\pi)^s} \right) = \frac{1}{(n\pi)^s} \leq \frac{1}{(n\pi)^a}.$$

Puisque  $\frac{1}{(n\pi)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$ .

Les fonctions  $u_n$  étant continues, on en déduit que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**11.24** 1. La série  $\sum u_n(0)$  converge car  $u_n(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $x > 0$ , on a par croissances comparées :

$$u_n(x) \sim \frac{\ln n}{n^2 \sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi,  $f$  est bien définie.

2. Soit  $a > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq a$ , on a :

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{\sqrt{x} \ln n}{xn^2} = \frac{\ln n}{\sqrt{xn^2}} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{an^2}}.$$

Ce majorant est le terme général d'une série convergente, d'après ce qui précède, donc la série converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$  donc sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent, les fonctions  $u_n$  étant continues, la somme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Soit  $x > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$f(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{x} \ln k}{1+xk^2} \geq n \frac{\sqrt{x} \ln n}{1+4xn^2}.$$

En posant  $x_n = \frac{1}{n^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$f(x_n) \geq \frac{\ln n}{5} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

donc  $f$  n'est pas continue en 0.

**11.25** 1. **Domaine de définition.** La série diverge pour  $x = 0$ , puisque  $u_n(0) = \frac{1}{n}$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a  $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x^2}$  ; d'où la convergence de la série  $\sum u_n(x)$ , par comparaison aux séries de Riemann. On a donc  $D = \mathbb{R}_+^*$ .

**Étude de la continuité.** Pour tout  $a > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sup_{x \geq a} |u_n(x)| = u_n(a)$ ,

car  $u_n$  est positive et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par suite, la série  $\sum u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme chaque fonction  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. **Étude en  $+\infty$ .** Appliquons à la série  $\sum v_n$ , avec  $v_n(x) = x^2 u_n(x)$ , le théorème de la double limite.

- On a :

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par suite, la série  $\sum v_n$  converge normalement, donc uniformément, sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}$ .

Comme  $+\infty$  est adhérent à  $\mathbb{R}_+$ , on peut donc conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}$ .

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

**Étude en 0.** Pour l'étude en 0, nous utilisons une comparaison série-intégrale.

Fixons  $x > 0$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx^2)}$  est continue, positive, décroissante et intégrable sur  $[1, +\infty[$ . On en déduit, par comparaison série-intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx^2)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx^2)}.$$

Comme on a :

$$\int \frac{dt}{t(1+tx^2)} = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2} \right) dt = \ln \frac{t}{1+tx^2},$$

il vient  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ , avec :

$$u(x) = -2 \ln x + \ln(1+x^2) \quad \text{et} \quad v(x) = u(x) + \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme  $u(x) \sim -2 \ln x$  et  $v(x) \sim -2 \ln x$ , au voisinage de  $0^+$ , on peut conclure que  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln x$  (et en particulier,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ ).

**11.26** 1. Soit  $x > 0$ . Par stricte positivité de  $u_n(x)$ , on peut poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n(x) = \ln u_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k) + x \ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=1}^n \ln(x+k).$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } \forall n \geq 2 \quad v_n(x) - v_{n-1}(x) &= \ln(n) - x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln(x+n) \\ &= -x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Par comparaison, on en déduit que la série  $\sum(v_n(x) - v_{n-1}(x))$  converge. D'après le lien suite-série, la suite  $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et, par continuité de la fonction  $\exp$ , la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge (vers un réel strictement positif).

2. • Reprenons les notations de la question précédente et montrons que la série de fonctions  $\sum(v_n - v_{n-1})$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .

\* La fonction  $f : t \mapsto \ln(1+t)$  est de classe  $C^2$  sur  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$  et :

$$\forall t \geq -\frac{1}{2} \quad |f''(t)| = \frac{1}{(1+t)^2} \leq 4.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $f$ , à l'ordre 2, entre 0 et  $t$ , il vient :

$$\forall t \geq -\frac{1}{2} \quad |\ln(1+t) - t| \leq 2t^2.$$

\* Soit  $b > 0$ . Pour tout entier  $n \geq 2$  et pour tout  $x \in ]0, b]$ , on a :

$$\left| -x \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{2x}{n^2} \quad \text{et} \quad \left| \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{2x^2}{n^2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$|v_n(x) - v_{n-1}(x)| \leq \frac{2x + 2x^2}{n^2} \leq \frac{2b + 2b^2}{n^2}.$$

La série de fonctions  $\sum(v_n - v_{n-1})$  converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle  $]0, b]$ .

- D'après le point précédent, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ . Par continuité des fonctions  $v_n$ , la fonction limite  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Étant donné que  $\Gamma = \exp \circ f$ , par continuité de la fonction  $\exp$ , on peut conclure : la fonction  $\Gamma$  est continue.

- 11.27** • Soit  $x \in ]0, 2\pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\frac{e^{i(n+1)x}}{n(n+1)} + (e^{ix} - 1)u_n(x). \quad (*)$$

Puisque la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge (vers 0), la série  $\sum (u_{n+1}(x) - u_n(x))$  est convergente. Par ailleurs,  $\sum \frac{e^{i(n+1)x}}{n(n+1)}$  est une série absolument convergente (par comparaison à un exemple de Riemann) donc convergente. Enfin,  $e^{ix} - 1 \neq 0$  puisque  $x \in ]0, 2\pi[$ . Par opérations, la série  $\sum u_n(x)$  est convergente et en sommant la relation  $(*)$ , on obtient :

$$0 - e^{ix} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)x}}{n(n+1)} + (e^{ix} - 1)S(x).$$

- La fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)x}}{n(n+1)}$  est continue car la série de fonctions associée converge normalement et que le terme général est continu. Par ailleurs, les fonctions  $x \mapsto e^{ix}$  et  $x \mapsto (e^{ix} - 1)$  sont continues et la deuxième fonction ne s'annule pas sur  $]0, 2\pi[$ . Par opérations, on en déduit que la fonction  $S$  est continue sur  $]0, 2\pi[$ .

- 11.28** 1. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

donc la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme les fonctions  $u_n$  sont continues, leur somme  $S$  est continue.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u_n^{(p)}(x) = \frac{(-\sqrt{n})^p}{n^{3/2}} e^{-x\sqrt{n}}.$$

Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $a > 0$ . On a :

$$\forall x \geq a \quad |u_n^{(p)}(x)| \leq n^{\frac{p-3}{2}} e^{-a\sqrt{n}}.$$

Par croissances comparées, on a  $n^{\frac{p-3}{2}} e^{-a\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , donc la série  $\sum u_n^{(p)}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . On en déduit que la somme  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrons que  $S$  n'est pas dérivable en 0.

- Tout d'abord, par convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$ , la somme  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- D'après ce qui précède, la fonction  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0 \quad S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}.$$

- Par retour à la définition, montrons que  $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ . On conclura par application du théorème de limite de la dérivée.

Soit  $M \in \mathbb{R}$ . Montrons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0, \delta] \quad S'(x) \leq M.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Comme la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente et à termes positifs, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq -M + 1$ .

Les termes sommés étant négatifs, on a :

$$\forall x > 0 \quad S'(x) \leq - \sum_{n=1}^p \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}.$$

La fonction majorante converge vers  $-\sum_{n=1}^p \frac{1}{n}$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et  $1 > 0$  donc il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0, \delta] \quad - \sum_{n=1}^p \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \leq - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + 1 \leq (M-1) + 1 = M.$$

Par transitivité, on a bien :

$$\forall x \in ]0, \delta] \quad S'(x) \leq M,$$

ce qui montre que  $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ .

Par application du théorème de limite de la dérivée, on obtient :

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty,$$

ce qui achève de montrer que la fonction  $S$  n'est pas dérivable en 0.

**11.29** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$ . Il est clair que  $u_n$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Par parité de  $u_n$ , on peut restreindre l'étude à  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Puisque  $\frac{1}{n^2 x^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on a :

$$u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, la série  $\sum u_n(x)$  est convergente. On en déduit que le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^*$ .

2. **Équivalent en  $+\infty$** . On constate que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^2}$ . Il est alors

naturel de conjecturer que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ .

On sait que l'inégalité  $\ln(1+t) \leq t$  est valable pour tout  $t > -1$ . En notant  $v_n : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$ , il s'ensuit :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la série de fonctions  $\sum v_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par ailleurs, il a été remarqué que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^2}$ .

D'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En d'autres termes,  $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$ , et l'on conclut :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$ .

**Équivalent en  $0^+$ .** Soit  $x > 0$ . L'application  $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 t^2}\right)$  est continue, décroissante et intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Par comparaison série-intégrale, on en déduit :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 t^2}\right) dt \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 t^2}\right) dt + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (*)$$

$$\text{Calculons } I(x) = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 t^2}\right) dt.$$

Le changement de variable linéaire  $t = \frac{u}{x}$  donne :

$$I(x) = \frac{1}{x} \underbrace{\int_x^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du}_{J(x)}.$$

Les fonctions  $U : u \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$  et  $V : u \mapsto u$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$U(u)V(u) = u \ln\left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} u \frac{1}{u^2} \underset{u \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J(x) &= -x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \\ &= -x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right). \end{aligned}$$

Puisque  $2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \pi$  et  $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln x$ , on a par croissances comparées :

$$J(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} \pi \quad \text{donc} \quad I(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{x}.$$

Toujours par croissances comparées, au voisinage de 0 on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim -2 \ln x = o\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

L'encadrement (\*) donne alors :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{x}.$$

**11.30** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  posons  $u_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$M \longmapsto \frac{M^k}{k^k}.$$

Munissons  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme  $\| \cdot \|$  sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

par exemple la norme subordonnée à la norme infinie sur  $\mathbb{K}^n$ . Montrons que la série converge normalement au voisinage de tout point.

Soit  $r > 0$ . Alors, par sous-multiplicativité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall M \in B(0, r) \quad \|u_k(M)\| \leq \frac{r^k}{k^k}.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Puisque la série numérique  $\sum \frac{r^k}{k^k}$  est convergente, la série de fonctions  $\sum u_k$  converge normalement sur  $B(0, r)$ . Les ouverts  $B(0, r)$  recouvrent  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  quand  $r$  décrit  $]0, +\infty[$  donc la série  $\sum u_k$  converge normalement au voisinage de tout point.

Par ailleurs pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'application linéaire  $M \mapsto \frac{M}{k}$  est continue, donc par produit,  $u_k$  est continue. Par conséquent, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**11.31** Soit  $(z, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Notons  $f(t) = \frac{1}{z - re^{it}}$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ .

- Supposons  $r < |z|$ . Puisque  $\left|\frac{r}{z}e^{it}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$ , la série géométrique  $\sum \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n$  est convergente et :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{r}{z}e^{it}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \quad \text{où} \quad u_n : t \mapsto \left(\frac{r}{z}e^{it}\right)^n.$$

Puisque la série  $\sum \left|\frac{r}{z}\right|^n$  est convergente, la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Les fonctions  $u_n$  étant continues, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 2\pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2\pi}{z}.$$

- Supposons  $|z| < r$ . Alors :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \frac{1}{z - re^{it}} = -\frac{1}{r} \frac{e^{-it}}{1 - \frac{z}{r}e^{-it}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \quad \text{où} \quad v_n : t \mapsto \left(\frac{z}{r}\right)^n e^{-i(n+1)t}.$$

On a alors  $|v_n(t)| = \left|\frac{z}{r}\right|^n$ . La série géométrique  $\sum \left|\frac{z}{r}\right|^n$  étant convergente, la série de fonctions  $\sum v_n$  converge normalement sur le segment  $[0, 2\pi]$ . Les fonctions  $v_n$  étant continues, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} v_n(t) dt.$$

De plus, un calcul immédiat donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{2\pi} v_n(t) dt = 0$$

Par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0.$$

**11.32** 1. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, 1]$  on a  $(1 - t^2)^n \geq (1 - t)^n$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \\ &= 2 \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall t \in [\alpha, 1] \quad 0 \leq Q_n(t) \leq \frac{(1 - \alpha^2)^n}{a_n} \leq \frac{n+1}{2} (1 - \alpha^2)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[\alpha, 1]$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et notons  $Q_n = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k X^k$ .

Soit  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . En posant le changement de variable  $t = x - u$ , il vient, en remarquant que  $f$  est nulle à l'extérieur de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-1}^1 f(x-t) Q_n(t) dt \\ &= \int_{x-1}^{x+1} f(u) Q_n(x-u) du \\ &= \int_{\max\{x-1, -\frac{1}{2}\}}^{\min\{x+1, \frac{1}{2}\}} f(u) Q_n(x-u) du \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) Q_n(x-u) du. \end{aligned}$$

Il s'ensuit par linéarité et la formule du binôme :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) (x-u)^k du \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k x^i \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \alpha_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u) u^{k-i} du. \end{aligned}$$

Cela démontre que la restriction de  $f_n$  à  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est une fonction polynomiale.

(b) La fonction  $f$  est :

- continue sur le segment  $[-1, 1]$  donc uniformément continue, d'après le théorème de Heine ;
- nulle sur  $\mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  donc uniformément continue.

On peut alors montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

## Chapitre 11. Suites et séries de fonctions

Soit  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Puisque  $\int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) - f_n(x) &= \int_{-1}^1 f(x)Q_n(t) dt - \int_{-1}^1 f(x-t)Q_n(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (f(x) - f(x-t))Q_n(t) dt \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x) - f(x-t))Q_n(t) dt + \int_{-1}^{-\alpha} (f(x) - f(x-t))Q_n(t) dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^1 (f(x) - f(x-t))Q_n(t) dt \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $Q_n$  étant à valeurs positives et la fonction  $f$  bornée :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-t)|Q_n(t) dt + \int_{-1}^{-\alpha} |f(x) - f(x-t)|Q_n(t) dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^1 |f(x) - f(x-t)|Q_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} Q_n(t) dt + 2\|f\|_{\infty} \left( \int_{-1}^{-\alpha} Q_n(t) dt + \int_{\alpha}^1 Q_n(t) dt \right) \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} \left( \int_{-1}^{-\alpha} Q_n(t) dt + \int_{\alpha}^1 Q_n(t) dt \right) \end{aligned}$$

Puisque la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[\alpha, 1]$  et, par parité, sur  $[-1, -\alpha]$ , on a :

$$\int_{-1}^{-\alpha} Q_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^1 Q_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par suite, il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on ait :

$$2\|f\|_{\infty} \left( \int_{-1}^{-\alpha} Q_n(t) dt + \int_{\alpha}^1 Q_n(t) dt \right) \leq \varepsilon,$$

et alors :

$$\forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Puisque l'entier  $n_0$  ne dépend pas de  $x$ , cela prouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

3. Soit  $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 0$ , on peut prolonger  $f$  à  $\mathbb{R}$  en une fonction continue nulle à l'extérieur de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . L'étude précédente montre que  $f$  est limite uniforme sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  d'une suite de fonctions polynomiales.

De manière générale, la fonction :

$$g : x \mapsto f(x) - f(-1/2) - (f(1/2) - f(-1/2))(x + 1/2)$$

est une fonction continue, nulle en  $1/2$  et  $-1/2$ . Par suite  $g$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales et puisque  $f$  et  $g$  diffèrent d'une fonction polynomiale,  $f$  l'est aussi.

- 11.33** • Toutes les fonctions de  $\text{Vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues et possèdent une limite finie en  $+\infty$ . Par conséquence du théorème de la double limite, on a  $\text{Adh}(\text{Vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subset E$ .
- Soit  $f \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrons qu'il existe  $\varphi \in \text{Vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ . Définissons ainsi la fonction  $g$  sur le segment  $[0, 1]$  :

$$g(x) = f(-\ln x) \quad \text{si } x \in ]0, 1] \quad \text{et} \quad g(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Par opérations, la fonction  $g$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et par le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x \in ]0, 1] \quad |f(-\ln x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

En remplaçant  $x$  par  $e^{-t}$ , on obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |f(t) - P(e^{-t})| \leq \varepsilon.$$

Par construction, la fonction  $\varphi : t \mapsto P(e^{-t})$  est élément de  $\text{Vect}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ce qui permet de conclure à l'inclusion réciproque.

- 11.34** On identifie l'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  et l'ensemble des fonctions polynomiales sur un intervalle d'intérieur non vide donné.

1. Prolongeons  $f$  en une fonction paire.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1]; \\ f(-x) & \text{si } x \in [-1, 0[. \end{cases}$$

Il est clair que  $g$  est continue sur  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ . Comme  $f$  est continue en 0, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = f(0)$  et  $g(x) = f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} f(0)$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[-1, 1]$ , car  $g(0) = f(0)$ . Il est immédiat que  $g$  est une fonction paire.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes convergeant uniformément vers  $g$  sur  $[-1, 1]$ . Il est clair que  $(P_n(-X))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction  $t \mapsto g(-t)$ , c'est-à-dire vers  $g$ , par parité de  $g$ . Par suite, en posant  $Q_n = \frac{P_n(X) + P_n(-X)}{2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[-1, 1]$ , donc *a fortiori* vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . La conclusion vient en remarquant que les polynômes  $Q_n$  sont pairs.

2. • Une fonction impaire sur  $\mathbb{R}$  prend la valeur 0 en 0. Si  $f$  est limite uniforme de fonctions polynomiales impaires sur  $[0, 1]$ , elle est limite simple d'une suite de telles fonctions, donc est nulle en 0.  
• Réciproquement, supposons  $f(0) = 0$ . On procède de la même manière qu'à la question précédente. On introduit le prolongement  $h$  défini sur  $[-1, 1]$  par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1]; \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-1, 0[. \end{cases}$$

Comme plus haut, on vérifie que  $h$  est continue sur  $[-1, 1]$ . Toujours d'après le théorème de Weierstrass,  $h$  est limite uniforme sur  $[-1, 1]$  d'une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $Q_n = \frac{P_n(X) - P_n(-X)}{2}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , converge uniformément vers  $h$  sur  $[-1, 1]$  donc vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . Le fait que les polynômes  $Q_n$  soient impairs permet de conclure.



# Chapitre 12 : Séries entières

<b>I</b>	<b>Séries entières . . . . .</b>	<b>506</b>
1	Rayon de convergence . . . . .	506
2	Pratique de la détermination du rayon de convergence . .	509
3	Opérations algébriques sur les séries entières . . . . .	511
<b>II</b>	<b>Régularité de la somme d'une série entière . . . . .</b>	<b>512</b>
1	Continuité . . . . .	512
2	Dérivation terme à terme d'une série entière . . . . .	513
<b>III</b>	<b>Développements en série entière . . . . .</b>	<b>516</b>
1	Fonctions développables en série entière . . . . .	516
2	Développements usuels dans le domaine réel . . . . .	518
3	Méthode de l'équation différentielle . . . . .	520
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>526</b>

# Séries entières

12

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I Séries entières

### 1 Rayon de convergence

**Notation** Soit  $z_0 \in \mathbb{K}$  et  $r \in [0, +\infty]$ . On pose :

$$D_O(z_0, r) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < r\} \quad \text{et} \quad D_F(z_0, r) = \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| \leq r\}.$$

- Si  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors  $D_O(z_0, r)$  et  $D_F(z_0, r)$  sont respectivement le **disque ouvert** et le **disque fermé** de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .
- Si  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors  $D_O(z_0, r) = ]z_0 - r, z_0 + r[$  et  $D_F(z_0, r) = [z_0 - r, z_0 + r]$ .
- Si  $r = 0$ , alors  $D_O(z_0, r) = \emptyset$  et  $D_F(z_0, r) = \{z_0\}$ .
- Si  $r = +\infty$ , alors  $D_O(z_0, r) = D_F(z_0, r) = \mathbb{K}$ .

### Séries entières

#### Définition 1

Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

La **série entière** associée à la suite  $a$  est la série de fonctions  $\sum u_n$ , où :

$$\begin{aligned} u_n : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ z &\longmapsto a_n z^n. \end{aligned}$$

La **somme de la série entière** est la somme de la série  $\sum u_n$ , c'est-à-dire la fonction  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

#### Remarques

- On note  $\sum a_n z^n$  la série entière associée à la suite  $a$ .
- Si l'indexation commence à partir du rang  $n_0$ , la série entière est notée  $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ .

**Terminologie** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . La série de fonctions  $\sum u_n$  où :

$$\begin{aligned} u_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto a_n t^n \end{aligned}$$

est appelée **série entière de la variable réelle** associée à la suite  $a$  et notée  $\sum a_n t^n$ .

## Rayon de convergence

Dans cette section, on s'intéresse au domaine de définition de la somme d'une série entière.

### Théorème 1 (Lemme d'Abel)

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $z_0 \in \mathbb{K}$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée.

Alors pour tout  $z \in D_O(0, |z_0|)$ , la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

Démonstration page 522

**Principe de démonstration.** Lorsque  $z_0 \neq 0$  et  $|z| < |z_0|$ , montrer  $a_n z^n = O\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\right)$ .

L'ensemble  $\{r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  contient évidemment le réel 0, ce qui justifie la définition suivante.

### Définition 2

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

La borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  de  $\{r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  est le **rayon de convergence** de la série entière  $\sum a_n z^n$ .

En notant  $R$  ce rayon de convergence, on appelle :

Exo  
12.1

Exo  
12.2

- **disque ouvert de convergence** de la série entière  $\sum a_n z^n$  l'ensemble  $D_O(0, R)$  ;
- **intervalle ouvert de convergence** de la série entière (de la variable réelle)  $\sum a_n t^n$  l'intervalle  $] -R, R [$ .

**Ex. 1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . Le rayon de convergence de  $\sum \alpha^n z^n$  est  $R = \frac{1}{|\alpha|}$ .

En effet, pour  $r \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(\alpha^n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si,  $|\alpha|r \leqslant 1$  c'est-à-dire si, et seulement si,  $r \leqslant \frac{1}{|\alpha|}$ .

**Ex. 2.** Le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est  $+\infty$ . En effet, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ , la série  $\sum \frac{r^n}{n!}$  est convergente donc son terme général converge vers 0 et *a fortiori* est borné (voir la « série exponentielle » dans le chapitre de première année sur les séries numériques).

### Remarques

- Le disque ouvert de convergence est vide si  $R = 0$ .
- On ne peut rien dire *a priori* sur le comportement de la suite  $(a_n R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , lorsque le rayon de convergence  $R$  est un réel strictement positif.
- Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite complexe et  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , alors les rayons de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$ ,  $\sum |a_n| z^n$  et  $\sum \lambda a_n z^n$  coïncident.

## Chapitre 12. Séries entières

- Invariance par décalage. Soit  $p \in \mathbb{N}$  et  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Le rayon de convergence de  $\sum a_n z^{n+p}$  est alors  $R$ . En effet, si  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , alors la suite  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si, la suite :

$$(a_n r^{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = r^p (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est bornée.

De même le rayon de convergence de  $\sum a_n z^{n-p}$  est  $R$ . En effet, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , la suite  $(a_n r^n)_{n \geq p}$  est bornée si, et seulement si, la suite :

$$(a_n r^{n-p})_{n \geq p} = r^{-p} (a_n r^n)_{n \geq p}$$

est bornée.

### Proposition 2

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  et  $z \in \mathbb{K}$ .

- Si  $|z| < R$ , alors la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge absolument.
- Si  $|z| > R$ , alors la série numérique  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement.

Démonstration page 522

### Proposition 3

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de la somme  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  vérifie :

$$D_O(0, R) \subset \mathcal{D} \subset D_F(0, R).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2. □

### Remarques

- Le rayon de convergence  $R$  est donc la borne supérieure (dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ) de l'ensemble des  $r \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\sum a_n r^n$  soit (absolument) convergente.
- Lorsque  $R > 0$ , l'intérieur du domaine de définition  $\mathcal{D}$  est le disque ouvert  $D_O(0, R)$ .
- Dans le cas où le rayon de convergence  $R$  est un réel strictement positif, on ne peut rien dire sur la nature de la série  $\sum a_n z^n$  lorsque  $|z| = R$  (c'est-à-dire sur la frontière de  $\mathcal{D}$ ).

**Ex. 3.** Le domaine de définition de la somme de la série entière  $\sum z^n$  est  $D_O(0, 1)$  et son rayon de convergence vaut donc 1.

**Ex. 4.** La somme d'une série entière de rayon de convergence infini est définie sur  $\mathbb{K}$ .

**Ex. 5.** Le domaine de définition de la somme de la série entière  $\sum \frac{z^n}{n^2}$  est le disque fermé  $D_F(0, 1)$  puisque :

- si  $|z| \leq 1$ , alors  $\frac{z^n}{n^2} = O(\frac{1}{n^2})$  ;
- si  $|z| > 1$ , alors  $\frac{|z|^n}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  par croissances comparées donc  $\sum \frac{z^n}{n^2}$  est une série grossièrement divergente.

Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

## 2 Pratique de la détermination du rayon de convergence

**Proposition 4 (Comparaison)**

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Si l'inégalité  $|a_n| \leq |b_n|$  est vérifiée à partir d'un certain rang, alors  $R_a \geq R_b$ .

**Démonstration.** Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que la suite  $(b_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée.

Puisque  $|a_n r^n| \leq |b_n r^n|$  à partir d'un certain rang, la suite  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est également bornée. On a donc  $R_b \leq R_a$ .  $\square$

**Corollaire 5**

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

- Si  $a_n = O(b_n)$  ou  $a_n = o(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $|a_n| \sim |b_n|$ , alors  $R_a = R_b$ .

Démonstration page 522

**Ex. 6.** Le rayon de convergence de la série  $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$  est 2. En effet :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, la série entière  $\sum \frac{z^n}{2^n}$  est de rayon de convergence 2. Par comparaison, le rayon de convergence de la série entière  $\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$  est également 2.

Le fait que le terme général d'une série convergente converge vers 0 et donc est borné conduit au point suivant.

**Point méthode** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

- Si  $\sum a_n z_0^n$  est une série convergente, alors  $R \geq |z_0|$ .
- Si  $\sum a_n z_0^n$  est une série divergente, alors  $R \leq |z_0|$ .

En particulier, la règle de d'Alembert permet parfois de déterminer le rayon de convergence.

**Ex. 7.** Déterminons le rayon de convergence de la série entière  $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \binom{2n}{n}$ . Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1} z^{2(n+1)}}{a_n z^{2n}} = \frac{(2(n+1))!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} z^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} z^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4z^2.$$

D'après la règle de d'Alembert :

- si  $|z| < \frac{1}{2}$ , alors la série  $\sum a_n z^n$  est convergente ;
- si  $|z| > \frac{1}{2}$ , alors la série  $\sum a_n z^n$  est divergente.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^{2n}$  vaut  $\frac{1}{2}$ .

## Chapitre 12. Séries entières

**Ex. 8.** Déterminons le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{1}{2^n} z^n$ .

Fixons  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et posons  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2^n} r^{n^2}$ . On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n r^{(n+1)^2}}{2^{n+1} r^{n^2}} = \frac{1}{2} r^{2n+1}.$$

- Si  $r < 1$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\sum u_n$  est une série convergente.
- Si  $r > 1$ , on a  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc  $\sum u_n$  est une série divergente.

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{1}{2^n} z^n$  vaut 1. □

En particulier, si  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R$  dont les coefficients  $a_n$  sont non nuls à partir d'un certain rang, on a le résultat suivant.

### Proposition 6 (Règle de d'Alembert pour les séries entières)

On suppose qu'il existe  $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$  tel que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$ .

- Lorsque  $L \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $R = \frac{1}{L}$ .
- Lorsque  $L = 0$ , on a  $R = +\infty$ .
- Lorsque  $L = +\infty$ , on a  $R = 0$ .

**Démonstration.** Fixons  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et posons  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = |a_n|r^n$ . On a alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} r \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Lr.$$

- Supposons  $L \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $Lr < 1$  c'est-à-dire si  $r < \frac{1}{L}$ , alors la série  $\sum u_n$  est convergente. On en déduit  $R \geqslant \frac{1}{L}$ . Si  $Lr > 1$  c'est-à-dire si  $r > \frac{1}{L}$ , alors la série  $\sum u_n$  est divergente. On en déduit  $R \leqslant \frac{1}{L}$  puis  $R = \frac{1}{L}$ .
- Supposons  $L = +\infty$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc  $\sum u_n$  est une série divergente et  $R = 0$ .
- Supposons  $L = 0$ . Alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\sum u_n$  est une série convergente et  $R = +\infty$ .

□

### Proposition 7

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série entière  $\sum n^\alpha z^n$  est de rayon de convergence 1.

Exo  
12.4

**Démonstration.** On a  $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{n^\alpha} = 1$ . D'après la règle de d'Alembert pour les séries entières, le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^\alpha z^n$  vaut 1. □

### 3 Opérations algébriques sur les séries entières

#### Somme

##### Proposition 8

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R_a$  et  $R_b$ .

Le rayon de convergence  $R$  de  $\sum (a_n + b_n) z^n$  vérifie l'inégalité :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, si  $R_a \neq R_b$ , alors  $R = \min(R_a, R_b)$ .

Enfin, pour tout  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration page 522.

Exo  
12.5

#### Produit

##### Définition 3

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières. La série entière  $\sum c_n z^n$ , où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

est le **produit de Cauchy** des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ .

**Remarque** On peut aussi écrire le produit de Cauchy des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sous la forme  $\sum \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right) z^n$ .

##### Proposition 9 (Produit)

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{K}$  vérifiant  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , on a :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

En particulier, le rayon de convergence  $R$  du produit de Cauchy des séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  vérifie l'inégalité :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

Démonstration page 522.

Exo  
12.6

**Principe de démonstration.** Utiliser le produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes.

**Remarque** Soit  $\sum a_n^{(1)} z^n, \dots, \sum a_n^{(p)} z^n$  des séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_1, \dots, R_p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $R = \min(R_1, \dots, R_p)$ .

## Chapitre 12. Séries entières

On démontre par récurrence sur  $p$  que, pour tout  $z \in D_O(0, R)$ , on a :

$$\prod_{k=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i_1 + \dots + i_p = n} a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_p}^{(p)} \right) z^n.$$

## II Régularité de la somme d'une série entière

### 1 Continuité

#### Théorème 10

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . La série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur tout disque fermé  $D_F(0, \rho)$ , où  $0 \leq \rho < R$ .

Démonstration page 522

**Attention** La série  $\sum a_n z^n$  ne converge pas normalement sur  $D_O(0, R)$  en général. Par exemple, la série  $\sum z^n$  ne converge pas normalement sur  $D_O(0, 1)$  puisque  $\sup_{z \in D_O(0, 1)} |z^n| = 1$  et  $\sum 1$  est une série grossièrement divergente.

#### Corollaire 11

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

Alors la restriction de la somme au disque ouvert de convergence, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{aligned} D_O(0, R) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration page 523

**Ex. 9.** Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente. Alors, la série entière  $\sum a_n z^n$  est définie et continue sur  $D_F(0, 1)$ . En effet, les fonctions  $z \mapsto a_n z^n$  sont continues et la série de fonctions  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur le disque fermé  $D_F(0, 1)$  étant donné que :

$$\forall z \in D_F(0, 1) \quad |a_n| |z|^n \leq |a_n|.$$

#### Théorème 12 (Théorème d'Abel radial)

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$ . On suppose que  $\sum a_n R^n$  est une série convergente. Alors la somme :

$$\begin{aligned} [0, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{aligned}$$

est continue. En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \xrightarrow[t \rightarrow R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Démonstration (non exigible) page 523

#### Principe de démonstration.

On démontre la convergence uniforme de la suite des restes sur le segment  $[0, R]$ .

**Ex. 10.** Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  et l'on suppose que  $\sum a_n, \sum b_n$  et  $\sum c_n$  sont des séries convergentes. D'après le théorème d'Abel radial, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Par ailleurs, par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Par opérations sur les limites et unicité de la limite, il vient :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Cette relation était déjà connue en supposant les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  absolument convergentes, l'absolue convergence de la série  $\sum c_n$  étant alors une conséquence de ces deux hypothèses.

## 2 Déivation terme à terme d'une série entière

**Proposition 13**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Alors  $\sum n a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ .

Démonstration page 523

**Remarque** Du résultat précédent, on déduit immédiatement que  $\sum a_n z^n$  et  $\sum \frac{a_n}{n} z^n$  ont le même rayon de convergence, et plus généralement, que  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n^k a_n z^n$  ont même rayon de convergence, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Théorème 14 (Déivation terme à terme)**

Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ .

Alors la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-R, R[$  et :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Démonstration page 524

**Remarque** Ainsi, la dérivée sur  $]-R, R[$  de la somme de la série entière  $\sum a_n t^n$  de rayon de convergence  $R$  est la somme de la série entière  $\sum n a_n t^{n-1}$ .

## Chapitre 12. Séries entières

**Point méthode** On peut dériver terme à terme la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

**Ex. 11.** On a  $\forall t \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$  (série géométrique convergente).

Par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^n.$$

**Ex. 12.** En reprenant l'exemple précédent, on a, en multipliant par  $t$  puis en dérivant terme à terme :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \quad \text{puis} \quad \frac{1+t}{(1-t)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 t^{n-1}.$$

En particulier, en évaluant en  $\frac{1}{2}$ , il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 6.$$

La propriété suivante généralise le théorème 14 de la page précédente en exprimant le fait que la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence et que ses dérivées d'ordre  $p$  s'obtiennent en dérivant terme à terme.

### Corollaire 15

Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors sa somme  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-R, R[$  et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in ]-R, R[ \quad f^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n t^{n-p}.$$

En particulier, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}.$$

Démonstration page 524

**Ex. 13.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Le corollaire 15 appliqué à la série entière  $\sum t^n$  donne, par calcul de la dérivée  $p$ -ième et après changement d'indice :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \frac{p!}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)t^n,$$

ce qui se réécrit ainsi :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n = \frac{1}{(1-t)^{p+1}}.$$

**Proposition 16 (Unicité du développement en série entière)**

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs. On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall t \in ]0, \alpha[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

 Exo  
12.12

Alors on a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$ .

Démonstration page 524

**Remarque** Dans la propriété précédente, le réel strictement positif  $\alpha$  est inférieur ou égal aux rayons de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  puisque leurs disques de convergence contiennent l'intervalle  $]0, \alpha[$ .

**Ex. 14.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On suppose que sa somme est une fonction paire sur  $]-R, R[$ , c'est-à-dire que :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Alors on a :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Par unicité du développement en série entière d'une série entière de rayon de convergence strictement positif, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n a_n = a_n \quad \text{donc} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k+1} = 0.$$

## Primitivation d'une série entière

**Proposition 17**

Si  $\sum a_n t^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , sa somme admet pour primitives sur  $]-R, R[$  :

$$\int^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{C}.$$

Démonstration page 525

**Remarque** Cette propriété sera illustrée dans la section suivante (cf. proposition 21 de la page 518).

### Point méthode

- On peut primitiver terme à terme la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
- On peut intégrer terme à terme la somme d'une série entière sur *tout segment* inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

## Chapitre 12. Séries entières

**Attention** On ne peut pas *a priori* intégrer sur tout l'intervalle ouvert de convergence, sauf évidemment dans certains cas particuliers, comme par exemple ci-dessous.

**Ex. 15.** Si la série  $\sum a_n R^n$  converge absolument, alors on peut intégrer terme à terme sur le segment  $[-R, R]$  (ou sur  $[0, R]$ ) car la série de fonctions  $\sum a_n t^n$  converge normalement sur  $[-R, R]$ .

**Remarque** Si  $\sum a_n R^n$  est une série convergente, la démonstration du théorème d'Abel montre que la série de fonctions  $\sum a_n t^n$  converge uniformément sur le segment  $[0, R]$ . On peut donc intégrer terme à terme sur ce segment et obtenir :

$$\int_0^R \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}.$$

Notons que la convergence de la série  $\sum \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  est une conséquence du théorème d'intégration terme à terme.

### III Développements en série entière

#### 1 Fonctions développables en série entière

##### Définition 4

Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $r > 0$ . S'il existe une série entière  $\sum a_n z^n$  telle que :

$$\forall z \in D_O(0, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

on dit que  $f$  est **développable en série entière sur  $D_O(0, r)$** .

**Terminologie** On dit que  $f$  est **développable en série entière** (au voisinage de 0) s'il existe  $r > 0$  tel que  $f$  soit développable en série entière sur  $D_O(0, r)$ .

**Ex. 16.** La fonction  $\exp$  est développable en série entière sur  $\mathbb{C}$  puisque :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

**Ex. 17.** La fonction  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  est développable en série entière sur  $D_O(0, 1)$  puisque :

$$\forall z \in D_O(0, 1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Exo  
12.20

**Ex. 18.** Toute fonction polynomiale  $P$  est développable en série entière sur  $\mathbb{C}$  :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

**Définition 5**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un voisinage de 0, ainsi qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ . Soit  $r > 0$ . S'il existe une série entière  $\sum a_n t^n$  telle que :

$$\forall t \in ]-r, r[ \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

Exo  
12.21

on dit que  $f$  est **développable en série entière sur  $] -r, r [$** .

**Terminologie** On dit que  $f$  est **développable en série entière** (au voisinage de 0) s'il existe  $r > 0$  tel que  $f$  soit développable en série entière sur  $] -r, r [$ .

**Remarques**

- Lorsque la fonction  $f$  est développable en série entière sur  $] -r, r [$ , d'après le corollaire 15 de la page 514,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r, r [$  et l'on a :

$$\forall t \in ] -r, r [ \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

- Lorsque la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0, la série entière  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$  est bien définie et appelée **série de Taylor** de la fonction  $f$ . Elle ne converge pas nécessairement en tout point du domaine de définition de  $f$  et lorsqu'elle converge, sa somme ne vaut pas toujours  $f(t)$  (cf. exercice 12.29).

**Ex. 19.** La fonction  $f : ] -1, +\infty [ \rightarrow \mathbb{R}$  est développable en série entière et :

$$t \mapsto \frac{1}{1+t}$$

$$\forall t \in ] -1, 1 [ \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n.$$

La série de Taylor de la fonction  $f$  ne converge pas sur tout l'intervalle  $] -1, +\infty [$ .

**Proposition 18**

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions développables en série entière (sur  $D_O(0, r)$ ), alors  $f + g$ ,  $\lambda f$  et  $fg$  sont développables en série entière (sur  $D_O(0, r)$ ).

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate des théorèmes d'opérations sur les séries entières (cf. proposition 8 de la page 511 et proposition 9 de la page 511).  $\square$

**Remarque** Les fonctions constantes étant évidemment développables en série entière, si  $U \subset \mathbb{K}$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{K}$ , l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$  développables en série entière est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}(U, \mathbb{K})$ .

**Proposition 19**

Si  $f$  est développable en série entière (sur  $] -r, r [$ ), alors les dérivées successives et les primitives de  $f$  sont développables en série entière (sur  $] -r, r [$ ).

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate des théorèmes de dérivation et de primitive d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence (cf. théorème 14 de la page 513 et proposition 17 de la page 515).  $\square$

## Chapitre 12. Séries entières

### 2 Développements usuels dans le domaine réel

La proposition qui suit montre que les fonctions cos, sin, ch et sh sont développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition 20

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} & \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

#### Démonstration.

On exploite le développement en série entière de la fonction exponentielle complexe.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^n.$$

Par passage à la partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Par demi-somme et demi-différence, on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad \square$$

Le théorème de primitivation permet d'obtenir d'autres développements en série entière.

#### Proposition 21

Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Exo  
12.22

**Démonstration.** Pour tout  $t \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Sachant que ces fonctions sont nulles en 0, on obtient le résultat par primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (cf. proposition 17 de la page 515).  $\square$

**Ex. 20.** En remplaçant  $x$  par  $-x$  dans le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto \ln(1+t)$ , on obtient :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

**Ex. 21.** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$  est convergente (d'après le théorème des séries alternées). D'après le théorème d'Abel radial, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{4}.$$

On peut vérifier de même (ou le justifier autrement, comme dans l'exemple 14 de la page 464) que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln(2).$$

## Série du binôme

Pour faciliter la compréhension de la formule qui suit, pour tout  $(\alpha, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ , on pose :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Cette notation n'est pas explicitement au programme, mais elle est assez couramment utilisée.

### Proposition 22

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Démonstration page 525

**Remarque** On retrouve ainsi que si  $t \in ]-1, 1[$  et  $p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n.$$

En effet, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\binom{-p-1}{n} = (-1)^n \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!} = (-1)^n \binom{n+p}{n}.$$

## Chapitre 12. Séries entières

Exo  
12.23

**Ex. 22.** Donnons le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 22 de la page précédente, on a :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n.$$



### 3 Méthode de l'équation différentielle

#### Point méthode

Une méthode de détermination de développement en série entière est celle de l'équation différentielle. Elle consiste à trouver une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux vérifiée par la fonction et à la résoudre formellement avec une série entière. Deux situations peuvent se présenter.

- On sait que  $f$  est développable en série entière : on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (unicité du développement en série entière) pour déterminer ces derniers.
- On cherche à montrer que  $f$  est développable en série entière : on cherche une série entière de rayon de convergence strictement positif satisfaisant à la même équation différentielle et l'on utilise un résultat d'unicité des solutions d'une telle équation différentielle.

Exo  
12.24

**Ex. 23.** La démonstration de la proposition 22 de la page précédente est une illustration de la deuxième situation.

**Ex. 24.** Développons en série entière la fonction  $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x f(x) + 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Ensuite, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \quad \text{et} \quad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$$

donc  $x \mapsto e^{x^2}$  est développable en série entière et, par primitivation,  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  également.

Par produit,  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels telle que pour tout réel  $x$  on ait :

$$\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ f'(x) - 2xf(x) &= a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (na_n - 2a_{n-2}) x^{n-1}. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}.$$

Comme  $f(0) = 0$ , on a aussi  $a_0 = 0$ . Par récurrence, il vient facilement :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{4^p p!}{(2p+1)!}.$$

On peut conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$



## Chapitre 12. Séries entières

### Démonstrations

**Théorème 1** Notons  $r = |z_0|$ . Si  $r = 0$ , le résultat est immédiat, car l'ensemble  $D_O(0, r)$  est vide. Dans la suite, on suppose  $r > 0$ .

Supposons que la suite  $(|a_n|r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée et notons  $M$  un majorant de cette suite.

Soit  $z \in \mathbb{K}$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|a_n z^n| = \left| a_n r^n \frac{z^n}{r^n} \right| \leq M \left| \frac{z}{r} \right|^n = O \left( \left| \frac{z}{r} \right|^n \right).$$

Par suite, si  $|z| < r$ , alors la série géométrique  $\sum \left| \frac{z}{r} \right|^n$  est convergente. Le théorème de comparaison sur les séries numériques donne alors que la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

#### Proposition 2

- Supposons  $z \in D_O(0, R)$ . Comme  $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}$  et  $|z| < R$ , il existe  $\rho \in ]|z|, R[$  tel que la suite  $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. D'après le lemme d'Abel, la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente puisque  $z \in D_O(0, \rho)$ .
- Raisonnons par contraposée et supposons que la suite  $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Alors c'est une suite bornée et  $|z| \leq R$  par définition, ce qui conclut.

#### Corollaire 5

- Il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  et un rang  $N$  à partir duquel  $|a_n| \leq M|b_n|$ . La série  $\sum M b_n z^n$  ayant pour rayon de convergence  $R_b$ , la proposition 4 de la page 509 conduit à  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $|a_n| \sim |b_n|$ , alors  $a_n = O(b_n)$  et  $b_n = O(a_n)$ . D'après le point précédent, on a :

$$R_a \geq R_b \quad \text{et} \quad R_a \leq R_b \quad \text{donc} \quad R_a = R_b.$$

#### Proposition 8

- Soit  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ . Les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergent absolument, donc la série  $\sum (a_n + b_n) z^n$  converge absolument, ce qui implique  $R \geq \min(R_a, R_b)$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ .
- Dans le cas où  $R_a \neq R_b$ , on peut supposer, par exemple,  $R_a < R_b$ .

Pour  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $R_a < |z| < R_b$ , la suite  $((a_n + b_n) z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non bornée, comme somme de la suite bornée  $(b_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  (car  $|z| < R_b$ ) et de la suite non bornée  $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  (car  $|z| > R_a$ ). Cela implique  $R \leq R_a$ .

On a donc  $R = R_a$ , car  $R \geq \min(R_a, R_b) = R_a$ .

**Proposition 9** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ . Les deux séries numériques  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergeant absolument, la série produit  $\sum c_n z^n$  converge absolument, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Cela assure de plus que  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .

**Théorème 10** Soit  $\rho \in [0, R[$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D_F(0, \rho) \quad |a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n.$$

La série  $\sum |a_n| \rho^n$  converge donc la série de fonctions  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $D_F(0, \rho)$ .

**Corollaire 11** Pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $u_n : z \mapsto a_n z^n$  est continue. Le théorème 10 de la page 512 montre que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur tous les disques ouverts  $D_O(0, \rho)$  pour tout  $\rho \in ]0, R[$  donc au voisinage de tout point de  $D_O(0, R)$  car les ouverts  $D_O(0, \rho)$  recouvrent  $D_O(0, R)$  quand  $\rho$  décrit  $]0, R[$ . La continuité de la somme sur  $D_O(0, R)$  en découle.

**Théorème 12** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_n : [0, R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto a_n t^n. \end{aligned} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$

Par hypothèses, la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, R]$ .

Montrons qu'elle converge uniformément sur  $[0, R]$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, R]$ . Posons  $x = \frac{t}{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} a_k t^k &= (R_{k-1} - R_k) x^k \\ &= (R_{k-1} x^k - R_k x^{k+1}) + R_k (x^{k+1} - x^k). \end{aligned}$$

La série  $\sum a_k t^k$  est convergente puisque  $t \in [0, R]$ . La série télescopique  $\sum (R_{k-1} x^k - R_k x^{k+1})$  est convergente puisque la suite  $(R_k)$  converge vers 0 et que la suite  $(x^k)$  est bornée. Par opérations, la série  $\sum R_k (x^{k+1} - x^k)$  est également convergente.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On somme pour  $k \geq n+1$  en observant que  $R_k x^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ . On obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k t^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k (x^{k+1} - x^k).$$

Posons  $\varepsilon_n = \sup \{|R_k|, k \geq n\}$ . La suite  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et converge aussi vers 0.

En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que  $x \in [0, 1]$  donc  $0 \leq x^{k+1} \leq x^k \leq 1$ , on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k t^k \right| \leq \varepsilon_n x^{n+1} + \varepsilon_n \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} (x^k - x^{k+1})}_{=x^{n+1} \in [0, 1]} \leq 2\varepsilon_n.$$

Cette majoration par le terme général indépendant de  $t$  d'une suite qui converge vers 0 montre que la suite des restes de la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, R]$  donc que la série  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $[0, R]$ .

Par continuité des fonctions  $u_n$ , la somme est continue sur  $[0, R]$ , ce qui conclut.

**Proposition 13** Notons  $R'$  le rayon de convergence de la série  $\sum n a_n z^n$ .

- Puisque  $n|a_n| \geq |a_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $R' \leq R$ .
- Si  $R = 0$ , l'inégalité précédente donne  $R' = 0$ .

Supposons  $R > 0$ . Soit  $r \in ]0, R[$ . Choisissons un réel  $\rho \in ]r, R[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$|n a_n r^n| = |a_n| \rho^n n \left( \frac{r}{\rho} \right)^n.$$

## Chapitre 12. Séries entières

La suite  $(|a_n|\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et la suite  $\left(n\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 par croissances comparées. Par opérations, on a :

$$|na_nr^n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

et donc  $R' \geq R$ .

### Théorème 14

- Les fonctions  $u_n : t \mapsto a_nt^n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]-R, R[$ .
- D'après la proposition 13 de la page 513, la série  $\sum na_nt^n$  est de rayon de convergence  $R$  donc la série  $\sum_{n \geq 1} na_nt^{n-1}$  également (par décalage). D'après le théorème 10 de la page 512, la série  $\sum u'_n$  converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de la forme  $[-a, a] \subset ]-R, R[$  donc sur tout segment de  $]-R, R[$ .

Par théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-R, R[$  et :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nt^{n-1}.$$

### Corollaire 15

- En appliquant le théorème 14 de la page 513, on démontre par récurrence immédiate que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $]-R, R[$  et que l'on a :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad f^{(p)}(t) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_nt^{n-p}.$$

- En particulier, puisque  $0 \in ]-R, R[$ , on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f^{(p)}(0) = p! a_p \quad \text{donc} \quad a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}.$$

**Proposition 16** Posons  $R'$  et  $R''$  les rayons de convergence respectifs des séries entières  $\sum a_nz^n$  et  $\sum b_nz^n$ . Posons  $R = \min(R', R'')$  et considérons les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : ]-R, R[ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g : ]-R, R[ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} b_nt^n. \end{array}$$

D'après le corollaire 15 de la page 514, les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Par hypothèse, on a  $\forall t \in [0, \alpha[ \quad f(t) = g(t)$  puis, par continuité de  $f$  et  $g$  en 0 :

$$\forall t \in [0, \alpha[ \quad f(t) = g(t).$$

La dérivée d'une restriction étant la restriction de la dérivée, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, \alpha[ \quad f^{(n)}(t) = g^{(n)}(t).$$

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$  puis  $a_n = b_n$ .

**Proposition 17** Considérons les fonctions de la variable réelle  $u_n : t \mapsto a_n t^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après le théorème 10 de la page 512, la série de fonctions  $\sum a_n z^n$  converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans  $D_O(0, R)$  et *a fortiori* la série  $\sum u_n$  converge normalement sur tout segment de  $]−R, R[$ .

Puisque les fonctions  $u_n$  sont continues, le théorème d'intégration terme à terme sur le segment  $[0, x]$  permet de conclure.

**Proposition 22** Dans le cas où  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le résultat découle de la formule du binôme de Newton.

Supposons désormais que  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  et posons  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$  définie sur  $]−1, 1[$ . On a alors :

$$\forall x \in ]−1, 1[ \quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1. \quad (*)$$

Par unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire normalisée du premier ordre à coefficients continus, la fonction  $f$  est caractérisée par  $(*)$ .

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $g$  la somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R > 0$ . Pour tout  $x \in ]−R, R[$ , on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ xg'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(1+x)g'(x) - \alpha g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n)x^n.$$

Ainsi,  $g$  vérifie  $(*)$  sur  $]−R, R[$  dès que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

Cette relation de récurrence définit une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Puisque  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , cette suite est à valeurs non nulles et, via la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est 1. La fonction  $g$ , somme de la série entière  $\sum a_n x^n$  vérifie donc  $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$  sur  $]−1, 1[$  et  $g(0) = 1$ . Par conséquent  $f = g$ . Par récurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

La conclusion s'ensuit. □

## S'entraîner et approfondir

### Rayon de convergence

**12.1** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . On note  $R'$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^{2n}$ .

1. On suppose que  $R \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $R' = \sqrt{R}$ .
2. On suppose que  $R = +\infty$ . Montrer que  $R' = +\infty$ .

**12.2** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n^2 z^n$  est  $R^2$ .

**12.3** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de complexes non nuls. On suppose que  $\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$ .

Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Indication.** On pourra étudier les suites extraites des termes de rangs pairs et impairs de la suite  $(|a_n|r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $r \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

**12.4** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $d(n)$  le nombre de diviseurs positifs de  $n$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} d(n) z^n$ .

**12.5** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch}(n) z^n$ .

**12.6** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum S_n z^n$  est strictement positif et exprimer sa somme en fonction de  $f$  au voisinage de 0.

**12.7** Trouver les rayons de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$  pour :

1.  $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{n}$  ;
2.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ .

**12.8** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ .

**12.9** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^{n^2}$ .

## Propriété de la somme d'une série entière

**12.10** Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^\alpha a_n z^n$ .

**12.11** Soit  $\sum_{n \geq 1} a_n t^n$  une série entière de rayon de convergence 1.

On suppose que  $\sum n a_n$  est une série convergente.

1. Montrer que  $\sum a_n$  est une série convergente.

*Indication.* On pourra exprimer  $a_n$  à l'aide de la suite des sommes partielles de la série  $\sum n a_n$ .

2. Montrer que la somme  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$ .

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

**12.12** Montrer qu'il existe une unique série entière de rayon de convergence  $+\infty$  dont la somme  $f$  vérifie :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x f''(x) + f'(x) + f(x) = 0.$$

**12.13** Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)};$$

$$2. \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n;$$

$$3. \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

**12.14** 1. Calculer, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ .

$$2. \text{Calculer } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

**12.15** Rappelons qu'une partition  $\mathcal{A}$  d'un ensemble  $E$  est un *ensemble* de parties non vides de  $E$ , deux à deux disjointes et dont l'union est égale à  $E$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\pi_n$  le nombre de partitions d'un ensemble à  $n$  éléments. On notera que  $\pi_0 = 1$ .

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $\pi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k$ .

2. Montrer que le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum \frac{\pi_n}{n!} x^n$  est strictement positif. On note  $f$  la somme de cette série sur  $] -R, R [$ .

3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $f$ . En déduire  $f$ , puis une expression de  $\pi_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**12.16** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente dont on note  $\ell$  la limite. Pour tout  $x \in [0, 1[$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Montrer que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{\ell}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

*Indication.* On pourra considérer  $(1-x)f(x)$ .

## Chapitre 12. Séries entières

**12.17** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs.

On note  $f$  et  $g$  respectivement les sommes des séries entières  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$ . On suppose enfin que le rayon de convergence de la série  $\sum b_n x^n$  vaut 1 et que la série numérique  $\sum b_n$  diverge.

1. Montrer que  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$ .
2. On suppose que  $a_n = o(b_n)$ . Montrer que  $f(x) = \underset{x \rightarrow 1^-}{o}(g(x))$ .
3. On suppose que  $a_n \sim b_n$ . Montrer que  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x)$ .

**12.18** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de somme  $f$  et de rayon de convergence  $R > 0$ , ainsi que  $\varphi : I \rightarrow D_O(0, R)$  une fonction de classe  $C^1$ , où  $I$  est un intervalle d'intérieur non vide. Montrer que la fonction  $f \circ \varphi$  est de classe  $C^1$  et que :

$$\forall t \in I \quad (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \varphi(t)^{n-1}.$$

**12.19** Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence strictement positifs, de sommes  $f$  et  $g$ .

Montrer que si  $fg$  est nulle sur un voisinage de 0, alors  $f = 0$  ou  $g = 0$ .

### Développement en série entière

**12.20** Soit  $\overset{\rightarrow 516}{(a, b)} \in (\mathbb{C}^*)^2$  et  $f : z \mapsto \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ .

Montrer que  $f$  est développable en série entière et expliciter le développement en série entière.

**12.21** Soit  $a > 0$  et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $I = ]-a, a[$ .

$\overset{\rightarrow 517}{}$  On suppose qu'il existe  $\rho > 0$  et  $M \in \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}.$$

Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $]-\rho, \rho[$ , où  $\rho = \min(a, \rho)$ .

**12.22** Déterminer le développement en série entière de  $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ .

$\overset{\rightarrow 518}{}$  *Indication.* On pourra donner le développement en série entière de  $f'$ .

**12.23** Donner le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ .

$\overset{\rightarrow 520}{}$

**12.24** 1. Montrer que  $\text{Arcsin}^2$  est développable en série entière sur  $] -1, 1 [$ .

$\overset{\rightarrow 520}{}$  2. Expliciter le développement en série entière.

*Indication.* On pourra utiliser une équation différentielle.

**12.25** On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ .

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ .

2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre avec second membre vérifiée par  $f$  sur son intervalle ouvert de convergence.

**12.26** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On note  $f$  sa somme. Montrer que pour tout  $z \in D_O(0, R)$ , la fonction  $f_z : h \mapsto f(z+h)$  est développable en série entière.

**\*\* 12.27** 1. Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un voisinage de 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction développable en série entière, telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $g : z \mapsto \frac{1}{1-f(z)}$  est développable en série entière.  
2. Montrer que la fonction  $\tan$  est développable en série entière.

**12.28** Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par récurrence par  $c_0 = 1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

1. On suppose que la série entière  $\sum c_n x^n$  est de rayon de convergence  $R$  strictement positif et l'on note  $f(x)$  sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$x f(x)^2 = f(x) - 1 \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1 - 4x}).$$

2. Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1 - 4x})$  prolongée par continuité en 0 est développable en série entière au voisinage de 0. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

**12.29** Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$

2. Montrer que  $f$  admet un prolongement  $g$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g^{(n)}(0) = 0.$$

3. Montrer que  $g$  n'est pas développable en série entière.

**\*\* 12.30 Théorème de Bernstein**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur un voisinage de 0 et telle que  $f$  ainsi que toutes ses dérivées soient positives sur ce voisinage. Montrer que  $f$  est développable en série entière.

*Indication.* On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

**12.31** Soit  $\lambda \in ]0, 1[$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(\lambda x).$$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  et calculer  $f^{(n)}(x)$  pour tout  $x$  en fonction de  $f$ ,  $\lambda$  et  $n$ .
2. Déterminer  $f$ , en vérifiant que  $f$  est nécessairement développable en série entière.

## Solutions des exercices

- 12.1** 1. Supposons le rayon de convergence  $R$  fini. Pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(a_n r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si, la suite  $(a_n (r^2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Ainsi, si  $r^2 < R$ , c'est-à-dire si  $r < \sqrt{R}$ , la suite  $(a_n r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et si  $r^2 > R$ , c'est-à-dire si  $r > \sqrt{R}$ , la suite  $(a_n r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée. On en déduit  $R' = \sqrt{R}$ .
2. Dans le cas où  $R = +\infty$ , alors la suite  $(a_n r^{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (a_n (r^2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée pour tout  $r > 0$  et donc  $R' = +\infty$ .

- 12.2** Notons  $R'$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n^2 z^n$ . Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite  $(a_n^2 r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si, et seulement si, la suite  $(|a_n|(\sqrt{r})^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est elle-même bornée. On en déduit  $R' = R^2$ .

- 12.3** Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ . Fixons  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = |a_n|r^n.$$

On a alors :

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}} = \frac{|a_{2n+2}|}{|a_{2n}|} r^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2r^2 \quad \text{et} \quad \frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}} = \frac{|a_{2n+3}|}{|a_{2n+1}|} r^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2r^2.$$

- Si  $2r^2 < 1$  c'est-à-dire si  $r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0 (par application du critère de d'Alembert), donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. On en déduit  $R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
- Si  $2r^2 > 1$  c'est-à-dire si  $r > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  et, en particulier, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée, ce qui montre que  $R \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En conclusion,  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

- 12.4** Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum d(n)z^n$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'encadrement  $1 \leq d(n) \leq n$ . Par ailleurs, les séries entières  $\sum z^n$  et  $\sum nz^n$  ont même rayon de convergence égal à 1 (cf. proposition 7 de la page 510). D'après la proposition 4 de la page 509, on a  $R = 1$ .

- 12.5** Tout d'abord, on a  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ .

- Le rayon de convergence de la série entière  $\sum e^n z^n$  est  $R_1 = \frac{1}{e}$ . De plus :

$$\forall z \in D_O\left(0, \frac{1}{e}\right) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^n z^n = \frac{1}{1 - ze}.$$

- De même, le rayon de convergence de la série entière  $\sum e^{-n} z^n$  est  $R_2 = e$  et :

$$\forall z \in D_O(0, e) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} z^n = \frac{1}{1 - z/e}.$$

- On a :

$$\sum \operatorname{ch}(n) z^n = \sum \left( \frac{e^n}{2} + \frac{e^{-n}}{2} \right) z^n.$$

Puisque  $R_1 < R_2$ , d'après la proposition 8 de la page 511, le rayon de convergence de cette dernière série entière est  $R = \frac{1}{e}$  et, pour tout  $z \in D_O(0, \frac{1}{e})$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n) z^n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{e}} + \frac{1}{1 - ez} \right) = \frac{1 - \operatorname{ch}(1)z}{1 - 2\operatorname{ch}(1)z + z^2}.$$

**12.6** La série entière définie par  $\sum (a_0 + \dots + a_n) z^n$  a un rayon de convergence  $R' \geq \min(1, R)$ . En effet, cette série entière est le produit de Cauchy des séries  $\sum z^n$  et  $\sum a_n z^n$ .

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{K}$  vérifiant  $|z| < \min(1, R)$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 + \dots + a_n) z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) = \frac{f(z)}{1-z}.$$

**12.7** 1. Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$ . D'après la proposition 13 de la page 513, c'est aussi le rayon de convergence de la série  $\sum \operatorname{ch} n z^n$ . Puisque  $\operatorname{ch} n \sim \frac{e^n}{2}$  et que le rayon de convergence de la série  $\sum e^n z^n$  vaut  $\frac{1}{e}$ , on en déduit  $R = \frac{1}{e}$ .

2. Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  avec  $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $a_n \geq 1$  donc  $R \leq 1$ .
- Soit  $r \in ]0, 1[$ . On a :

$$r \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} r < 1,$$

donc à partir d'un certain rang, on a  $0 \leq r \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq 1$ . En élévant à la puissance  $n$ , il vient  $0 \leq r^n a_n \leq 1$ , ce qui montre que la suite  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc que  $R \geq 1$ .

En conclusion, on a  $R = 1$ .

**12.8** Comme  $|a_n e^{\sqrt{n}}| \geq |a_n|$ , le rayon de convergence  $R'$  de  $\sum a_n e^{\sqrt{n}} z^n$  est inférieur ou égal à  $R$ .

Soit  $r \in ]0, R[$  et  $\rho \in ]r, R[$ . Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n e^{\sqrt{n}} r^n = \underbrace{a_n \rho^n}_{\text{suite bornée}} e^{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n,$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$e^{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \exp \left( \underbrace{\sqrt{n} + n \ln \frac{r}{\rho}}_{<0} \right)$$

donc la suite  $(e^{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 par croissances comparées. Ainsi, la suite  $(a_n e^{\sqrt{n}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, ce qui montre que  $R' \geq R$ .

En conclusion, on a  $R' = R$ .

## Chapitre 12. Séries entières

**12.9** Notons  $R'$  le rayon de convergence de la série  $\sum a_n z^{n^2}$ .

- Soit  $r \in ]0, 1[$ . Comme la suite  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 et  $R \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe un rang à partir duquel  $r^n \leq \frac{R}{2}$ , donc  $|a_n|r^{n^2} \leq |a_n|\left(\frac{R}{2}\right)^n$ .

Comme  $\frac{R}{2} \in ]-R, R[$ , la suite  $\left(|a_n|\left(\frac{R}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Donc la suite  $(a_n r^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, ce qui montre que  $R' \geq 1$ .

- Soit  $r > 1$ . La suite  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  et  $2R \in \mathbb{R}_+^*$  donc il existe un rang à partir duquel  $r^n \geq 2R$  puis  $|a_n|r^{n^2} \geq |a_n|(2R)^n$ .

Comme  $2R > R$ , la suite  $(a_n(2R)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée donc la suite  $(a_n r^{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée et par conséquent,  $R' \leq 1$ .

En conclusion, on a  $R' = 1$ .

**12.10** Notons  $R'$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^\alpha a_n z^n$  et montrons que  $R' = R$ .

- Si  $\alpha > 0$ , alors  $a_n = O(n^\alpha a_n)$  donc  $R \geq R'$  et si  $\alpha < 0$ , alors  $n^\alpha a_n = O(a_n)$  donc  $R' \geq R$ .
- Supposons  $\alpha > 0$ . Soit  $z \in D_O(0, R)$  et  $\rho \in ]|z|, R[$ . Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^\alpha |a_n| |z|^n = |a_n| \rho^n n^\alpha \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n.$$

La suite  $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car  $\rho \in [0, R[$  et la suite  $\left(n^\alpha \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 par croissances comparées. On en déduit que la suite  $(n^\alpha a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc  $R' \geq R$  puis  $R' = R$ .

- Supposons  $\alpha < 0$ . Soit  $z \in D_O(0, R')$  et  $\rho \in ]|z|, R'[$ . Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a_n| |z|^n = (|a_n| n^\alpha \rho^n) \times n^{-\alpha} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n,$$

et comme dans le point précédent, par croissances comparées, la suite  $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc  $R \geq R'$  puis  $R' = R$ .

**12.11** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n k a_k$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n &= \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{n+1} + \frac{S_n}{n+1} - \frac{S_{n-1}}{n} \\ &= \frac{S_n}{n(n+1)} + \left(\frac{S_n}{n+1} - \frac{S_{n-1}}{n}\right). \end{aligned}$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente donc la suite  $\left(\frac{S_n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (vers 0) et la série télescopique associée est convergente. Par ailleurs, on a  $\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $\sum \frac{S_n}{n(n+1)}$  est une série absolument convergente.

Par somme, la série  $\sum a_n$  est une série convergente.

2. Posons  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
- $$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

D'après le théorème 14 de la page 513, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1[$  et :

$$\forall t \in [0, 1[ \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

D'après le théorème d'Abel radial appliqué aux séries entières  $\sum a_n t^n$  et  $\sum n a_n t^{n-1}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et l'on a aussi :

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

Par théorème de la limite de la dérivée, on peut conclure :

$$f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n.$$

**12.12** Soit  $f$  la somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence infini.

- Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et l'on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ x f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 a_n + a_{n-1}) x^{n-1}$ .

- Par unicité du développement en série entière, on en déduit que  $f$  vérifie :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x f''(x) + f'(x) + f(x) = 0 \tag{*}$$

si, et seulement si :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n^2 a_n + a_{n-1} = 0,$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}$  et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par application de la règle de d'Alembert pour les séries entières, la série entière  $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$  est de rayon de convergence  $+\infty$ .

Conclusion : la somme de la série entière  $\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$  est l'unique fonction solution de (\*).

## Chapitre 12. Séries entières

**12.13** 1. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{1}{n(n+2)} x^n$  est 1 car  $\frac{1}{n(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

Pour  $|x| < 1$ , et  $x \neq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) x^n = -\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2} \left( -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

On a aussi  $f(0) = 0$ .

2. • Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^{(-1)^n} z^n$ . Selon la parité de l'entier  $n$ , on a :

$$n^{(-1)^n} = n \quad \text{ou} \quad n^{(-1)^n} = \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad n^{(-1)^n} = O(n).$$

On en déduit  $R \geq 1$ . Comme pour  $x = 1$  le terme général n'est pas borné, on a  $R \leq 1$  puis  $R = 1$ .

• La série des termes pairs  $\sum (2n)x^{2n}$  est de rayon de convergence 1 et :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(x^2)^n = 2x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Celle des termes impairs  $\sum \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}$  est de rayon de convergence 1. Par ailleurs, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

La somme de la série proposée est donc :

$$\frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right).$$

3. • Posons  $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$1 \leq h_n \leq n.$$

Les séries entières  $\sum x^n$  et  $\sum nx^n$  sont de rayon de convergence 1 donc  $\sum h_n x^n$  également.

• Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^n}{k} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{x^n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{+\infty} x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k(1-x)} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}. \end{aligned}$$

Le calcul précédent est justifié par la sommabilité de la famille  $(\frac{x^n}{k})_{1 \leq k \leq n}$ , elle-même justifiée par le caractère fini du résultat  $\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$  dans le cas où  $x$  est positif puisque  $\left| \frac{x^n}{k} \right| = \frac{|x|^n}{k}$ .

- 12.14** 1. • Pour  $x \in \mathbb{R}$ , la série numérique  $\sum (-1)^n x^{3n}$  est une série géométrique, qui converge si, et seulement si,  $|x| < 1$ . Le rayon de convergence de la série entière  $\sum (-1)^n x^{3n}$  et de la série « primitive »  $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$  valent ainsi 1.
- Pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3},$$

puis, par primitivation d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3},$$

car la somme de la série est nulle en 0.

- Décomposons en éléments simples  $F = \frac{1}{X^3 + 1}$ .

Les racines de  $X^3 + 1$  sont  $-1$ ,  $-j$  et  $-j^2$ . Par conséquent :

$$\frac{1}{X^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{3j^2} \frac{1}{X+j} + \frac{1}{3j} \frac{1}{X+j^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{3} \frac{-X+2}{X^2-X+1}.$$

On peut remarquer que :

$$\frac{X-2}{X^2-X+1} = \frac{1}{2} \frac{2X-1}{X^2-X+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) - \sqrt{3} \left[ \operatorname{Arctan} \left( \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^x$$

et donc, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on obtient l'expression :

$$\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3} \left( \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Comme  $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$  est une série convergente d'après le théorème des séries alternées, le théorème d'Abel radial donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{3k+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left( \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right)$$

et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3} \left( \ln 2 + \sqrt{3} \frac{\pi}{3} \right).$$

- 12.15** 1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $\Pi_n$  l'ensemble des partitions de l'ensemble  $[0, n-1]$ . Remarquons que le nombre de partitions d'un ensemble  $E$  fini ne dépend pas explicitement de  $E$ , mais seulement de son cardinal  $|E|$ .

Soit  $n$  un entier naturel. Pour  $\mathcal{A} \in \Pi_{n+1}$ , notons  $C_{\mathcal{A}}$  l'élément de  $\mathcal{A}$  contenant  $n$ . En regroupant les partitions telles que  $C_{\mathcal{A}}$  soit un ensemble donné et en remarquant que, par définition,  $n \in C_{\mathcal{A}}$ , on obtient :

$$\Pi_{n+1} = \bigcup_{X \subset [0, n-1]} \{ \mathcal{A} \in \Pi_{n+1} : C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\} \}. \quad (*)$$

## Chapitre 12. Séries entières

Il est clair que les partitions de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  telles que  $C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\}$  sont les partitions de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus X$  auxquelles on adjoint la partie  $X \cup \{n\}$ . Il s'ensuit, pour  $X \subset \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\left| \left\{ \mathcal{A} \in \Pi_{n+1} : C_{\mathcal{A}} = X \cup \{n\} \right\} \right| = \pi_{n-|X|}.$$

Par suite, les ensembles dans l'union (\*) étant deux à deux disjoints :

$$\pi_{n+1} = \sum_{X \subset \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \pi_{n-|X|} = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{X \subset \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ |X|=k}} \pi_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_{n-k}.$$

En conclusion, par symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi_k. \quad (**)$$

2. Notons  $b_n = \frac{\pi_n}{n!}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et démontrons par récurrence (forte) que  $0 \leq b_n \leq 1$ .

L'assertion est vraie si  $n = 0$ .

Supposons l'assertion vraie pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . En divisant par  $(n+1)!$  la relation (\*\*), il vient que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} b_k. \quad (***)$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} b_k \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1,$$

et donc  $0 \leq b_{n+1} \leq 1$ . Cela démontre l'assertion pour  $n+1$  et donc, par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par comparaison, puisque  $|b_n| \leq 1$  et que le rayon de convergence de la série  $\sum x^n$  vaut 1, il vient que  $R \geq 1$ . Par conséquent,  $R > 0$ .

3. • Soit  $x \in ]-R, R[$ . En multipliant la relation (\*\*\*)) par  $(n+1)x^n$  et en sommant, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} b_i \right) x^n.$$

Cela est légitime, car le rayon de convergence de la série entière  $\sum b_n x^n$  est égal à celui de la série entière  $\sum (n+1)b_{n+1}x^n$ . Par ailleurs, d'après les résultats relatifs au produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a :

$$\forall x \in ]-R, R[ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} b_i \right) x^n = f(x) \exp(x).$$

Par conséquent, pour tout  $x \in ]-R, R[$ , on a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} b_i \right) x^n = f(x) \exp(x).$$

Sachant que  $f(0) = 1$ , cette dernière relation donne, en intégrant l'équation différentielle vérifiée par  $f$ , la relation :

$$\forall x \in ]-R, R[ \quad f(x) = \exp(\exp(x) - 1).$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $u_{n,k}(x) = \frac{k^n x^n}{k! n!}$  pour  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ .

On a alors :

$$\exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp(x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \right). \quad (\star)$$

Si  $x \geq 0$ , la famille  $(u_{n,k}(x))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  étant à valeurs positives, on en déduit qu'elle est sommable.

Dans le cas général, puisque  $|u_{n,k}(x)| = u_{n,k}(|x|)$ , pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , la famille  $(u_{n,k}(x))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable. Par conséquent, on peut intervertir l'ordre de sommation dans l'expression  $(\star)$ . Ainsi :

$$\exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right). \quad (\star\star)$$

- Par unicité du développement en série entière, puisque  $f(x) = \frac{1}{e} \exp(\exp(x))$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , il vient de  $(\star\star)$  l'expression suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

**12.16** Par décalage d'indice, on a :

$$\forall x \in [0, 1[ \quad (1-x)f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})x^n.$$

Comme la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, la série télescopique associée  $\sum(a_n - a_{n-1})$  est convergente. Le théorème d'Abel radial donne alors :

$$(1-x)f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) = a_0 + \ell - a_0 = \ell.$$

On peut donc conclure :  $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{=} \frac{\ell}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)$ .

**12.17** 1. Remarquons que puisque la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs positives, la restriction de  $g$  à  $[0, 1[$  est croissante. Il s'ensuit que  $g$  a une limite  $\ell$  en 1, finie ou infinie.

Par ailleurs, toujours du fait que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à valeurs positives, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1[$  on a :

$$\sum_{n=0}^N b_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x).$$

En faisant tendre  $x$  vers  $1^-$  dans cette inégalité, il vient que :

$$\sum_{n=0}^N b_n \leq \ell.$$

Comme la série à terme positif  $\sum b_n$  est divergente, on a :

$$\sum_{n=0}^N b_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Par suite,  $\ell = +\infty$ .

## Chapitre 12. Séries entières

2. Supposons  $a_n = o(b_n)$ . Comme la série entière  $\sum b_n x^n$  est de rayon de convergence 1, celui de la série entière  $\sum a_n x^n$  est supérieur ou égal à 1.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe un entier  $n_0$  tel que  $|a_n| \leq \varepsilon b_n$ , pour tout  $n \geq n_0$ . Fixons un tel  $n_0$ . Pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| + \varepsilon g(x). \end{aligned} \tag{*}$$

Par ailleurs, puisque  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$  et que  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $x \in [1 - \eta, 1[$  on ait :

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| \leq \varepsilon g(x). \tag{**}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [1 - \eta, 1[$ , en combinant les inégalités (\*) et (\*\*), on obtient :

$$|f(x)| \leq 2\varepsilon g(x),$$

c'est-à-dire, par définition,  $f(x) = \underset{x \rightarrow 1^-}{o}(g(x))$ .

3. Supposons  $a_n \sim b_n$ . Alors  $a_n - b_n = o(b_n)$  et, d'après la question précédente, on a :

$$f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) x^n = \underset{x \rightarrow 1^-}{o}(g(x)) \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} g(x).$$

**12.18** Pour  $n \in \mathbb{N}$  notons  $u_n : t \mapsto a_n \varphi(t)^n$ . Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $C^1$  et la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$ . Pour conclure, montrons que la série  $\sum u'_n$  converge normalement sur tout segment.

Soit un segment  $[a, b] \subset I$ . Par compacité et continuité, la fonction  $t \mapsto |\varphi(t)|$  atteint son maximum sur  $[a, b]$ , dont la valeur est notée  $r$ . Puisque  $\varphi$  est à valeurs dans  $D_O(0, R)$ , il vient que  $r \in [0, R[$ . Toujours par compacité et continuité, la fonction  $|\varphi'|$  est majorée par une constante  $M$  sur  $[a, b]$ . On en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  que :

$$\forall t \in [a, b] \quad |u'_n(t)| \leq Mn|a_n|r^{n-1}.$$

Puisque  $r \in [0, R[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} Mn|a_n|r^{n-1}$  converge et donc la série  $\sum u'_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ . Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions permet alors de conclure.

**12.19** Il suffit de montrer que si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$ , alors  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0$  (et donc  $g = 0$ ).

Supposons  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$  et notons  $p$  le plus petit entier naturel tel que  $a_p \neq 0$ . Puisque la fonction  $fg$  est nulle sur un *voisinage* de 0, par unicité du développement en série entière, on a  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$  pour tout entier naturel.

Montrons par récurrence forte que  $b_n = 0$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

- On a  $0 = c_p = a_p b_0$ , donc  $b_0 = 0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $b_k = 0$  pour tout  $k \in [0, n-1]$ . Alors on a :

$$0 = c_{n+p} = \sum_{k=p}^{n+p} a_k b_{n+p-k} = a_p b_n.$$

Par conséquent,  $b_n = 0$ , ce qui assure le résultat.

**Remarque** Ainsi, l'algèbre des fonctions développables en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  est intègre.

**12.20** • Supposons  $a \neq b$ . On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \quad f(z) = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$$

et donc, puisque  $a$  et  $b$  sont non nuls, pour tout  $z \in D_O(0, \min(|a|, |b|))$ , on a :

$$f(z) = \frac{1}{a-b} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n,$$

ce qui donne le développement en série entière de  $f$  sur  $D_O(0, \min(|a|, |b|))$ .

- Supposons que  $a = b$ . Alors, pour tout  $z \in D(0, |a|)$ , d'après la proposition 9 de la page 511, on a :

$$f(z) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{(1 - \frac{z}{a})^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left( \frac{z}{a} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} z^n,$$

ce qui donne le développement en série entière de  $f$  sur  $D_O(0, |a|)$ .

**12.21** • Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in I$ . D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{M(n+1)!}{\rho^{n+1}} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = M \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^{n+1}.$$

- Lorsque  $|x| < \rho$ , la suite majorante converge vers 0 donc par encadrement, on en déduit que la série  $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  est convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x),$$

ce qui montre que  $f$  est développable en série entière sur  $] -R, R[$ .

## Chapitre 12. Séries entières

- 12.22** • Posons  $j = e^{2i\pi/3}$ . Développons  $f'$  en série entière. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x-j)(x-j^2)} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-j^2} = \frac{-j^2}{1-j^2x} + \frac{-j}{1-jx}.$$

Par conséquent, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -j^2 \sum_{n=0}^{+\infty} j^{2n} x^n - j \sum_{n=0}^{+\infty} j^n x^n \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} ((j^2)^{n+1} + j^{n+1}) x^n \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}(j^{n+1}) x^n \quad (j^2 = \bar{j}) \\ &= - \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right) x^n. \end{aligned}$$

- Puisque  $f'$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , la fonction  $f$  l'est également et, du fait que  $f(0) = 0$ , on a :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \frac{x^n}{n}.$$

**Remarque** On peut proposer une autre méthode.

En remarquant que  $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , il vient pour  $x \in ]-1, 1[$  que :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x),$$

et l'on peut terminer le calcul à partir du développement en série entière de  $\ln(1-t)$  sur  $] -1, 1[$ .

- 12.23** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n (2n-1) n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la proposition 22 de la page 519 :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n.$$

**Remarque** On pouvait aussi primitiver le développement en série entière obtenu dans l'exemple 22 de la page 520.

**12.24** 1. La fonction Arcsin est dérivable sur  $]-1, 1[$  et :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $-x^2 \in ]-1, 1[$ , il vient :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \text{Arcsin}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n},$$

ce qui montre que  $\text{Arcsin}'$  est développable en série entière sur  $]-1, 1[$ . Par primitivation puis produit, on en déduit que  $\text{Arcsin}^2$  est développable en série entière sur  $]-1, 1[$ .

2. Posons  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$
- $$\begin{aligned} x &\mapsto \text{Arcsin}^2(x). \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]-1, 1[$  et, après calculs, on a :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f'(x) = \frac{2 \text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2x \text{Arcsin } x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{1-x^2},$$

ce qui donne :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad (1-x^2)f''(x) = xf'(x) + 2. \tag{*}$$

D'après la question précédente, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels telle que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par dérivation terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{aligned} xf'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \\ x^2 f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n, \end{aligned}$$

donc la relation  $(*)$  se réécrit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n) x^n &= 2, \\ \text{puis :} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n) x^n &= 2. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, en déduit :

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Le fait que  $a_1 = f'(0) = 0$  montre que  $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k+1} = 0$  par récurrence immédiate sur  $k$ , et comme  $a_2 = 1$ , on a par récurrence sur  $k$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad a_{2k} = \frac{2^{2k-1} ((k-1)!)^2}{(2k)!}.$$

## Chapitre 12. Séries entières

Enfin, on a  $a_0 = f(0) = 0$  ce qui permet de conclure :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \text{Arcsin}^2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1} ((k-1)!)^2}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{k^2 \binom{2k}{k}} x^{2k}.$$

**Remarque** La propriété de parité de la fonction  $f$  ainsi que l'unicité du développement en série entière permettent d'obtenir plus rapidement la relation :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k+1} = 0$$

et de chercher le développement en série entière sous la forme  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k}$ .

**12.25** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} = 2 \binom{2n-1}{n} = \frac{2(2n-1)}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

On en déduit :

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\binom{2(n-1)}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n}{2(2n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série  $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$  vaut 4.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$2(2n-1)a_n = na_{n-1},$$

soit :

$$4na_n - 2a_n = (n-1)a_{n-1} + a_{n-1}. \quad (*)$$

En multipliant la relation  $(*)$  par  $x^n$ , avec  $|x| < 4$  et en sommant, il vient :

$$4 \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n,$$

et donc :

$$4xf'(x) - 2(f(x) - 1) = x^2 f'(x) + xf(x),$$

puis :

$$x(4-x)f'(x) - (x+2)f(x) = -2.$$

**Remarque** En résolvant cette équation sur l'intervalle  $]0, 4[$ , on montre que :

$$\forall x \in ]0, 4[ \quad f(x) = \frac{4}{4-x} + \left( 2 \text{Arcsin} \left( \frac{x}{2} - 1 \right) + \pi \right) \frac{x^{1/2}}{(4-x)^{3/2}}.$$

Il s'ensuit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = f(1) = \frac{4}{3} + \left( -2 \text{Arcsin} \left( \frac{1}{2} \right) + \pi \right) \frac{1}{3^{3/2}} = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

- 12.26** Soit  $z \in D_O(0, R)$ . Pour tout  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $|h| < R - |z|$  (en convenant que  $+\infty - |z| = +\infty$ ), on a  $|z| + |h| < R$ . Par conséquent, la série  $\sum |a_n|(|z| + |h|)^n$  est convergente. D'après le formule du binôme, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|z| + |h|)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \right) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} |a_n| |z|^{n-k} |h|^k. \quad (*)$$

Puisque la somme de gauche dans la relation  $(*)$  est finie, on en déduit que la famille  $\left( |a_n| \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^k \right)_{0 \leq k \leq n}$  est sommable.

Par conséquent, la famille  $\left( a_n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \right)_{0 \leq k \leq n}$  est sommable et l'on a :

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n z^{n-k} h^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z^{n-k} \right)}_{=b_k} h^k.$$

Le calcul qui précède montre que le rayon de convergence de la série entière  $\sum b_k h^k$  est supérieur ou égal à  $R - |z|$ , donc strictement positif. On a ainsi démontré que  $f_z : h \mapsto f(z+h)$  est développable en série entière sur  $D_O(0, R - |z|)$ .

- 12.27** 1. Notons  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$  la série entière associée à  $f$ . La série entière  $\sum_{n \geq 1} |a_n| z^{n-1}$  est de rayon de convergence strictement positif (celui de  $\sum a_n z^n$  par décalage), donc sa somme est bornée au voisinage de 0 et il existe  $\rho > 0$  tel que :

$$\forall z \in D_O(0, \rho) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^n = |z| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^{n-1} < 1. \quad (\star)$$

Soit  $z \in D_O(0, \rho)$ . Pour  $p \in \mathbb{N}$ , par distributivité généralisée, on a :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^n \right)^p = \sum_{\ell \in (\mathbb{N}^*)^p} \prod_{i=1}^{\#\ell} |a_{\ell_i}| |z|^{\ell_i},$$

où  $\#\ell$  désigne le nombre de termes de la liste  $\ell$  (ici,  $\#\ell = p$ ).

D'après  $(\star)$ ,  $\sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^n \right)^p$  est une série convergente et l'on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| |z|^n \right)^p = \sum_{\ell \in \Omega} \prod_{i=1}^{\#\ell} |a_{\ell_i}| |z|^{\ell_i} \quad \text{avec} \quad \Omega = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}^*)^p,$$

donc la famille  $\left( \prod_{i=1}^{\#\ell} |a_{\ell_i}| |z|^{\ell_i} \right)_{\ell \in \Omega}$  est sommable.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $\Omega_k = \left\{ \ell \in \Omega : \sum_{i=1}^{\#\ell} \ell_i = k \right\}$ . La famille  $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une

## Chapitre 12. Séries entières

partition de  $\Omega$  et, par le théorème de sommation par paquets, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-f(z)} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right)^p = \sum_{\ell \in \Omega} \prod_{i=1}^{\#\ell} a_{\ell_i} z^{\ell_i} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{\ell \in \Omega_k} \prod_{i=1}^{\#\ell} a_{\ell_i} \right) z^k,\end{aligned}$$

ce qui démontre que la fonction  $z \mapsto \frac{1}{1-f(z)}$  est développable en série entière.

**Remarque** En adaptant un peu la preuve précédente, on peut démontrer que si  $g$  est une fonction développable en série entière, alors  $z \mapsto g(f(z))$  est bien définie au voisinage de 0 et développable en série entière.

2. La fonction  $1 - \cos$  est développable en série entière et vaut 0 en 0 donc  $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$  est développable en série entière.

La fonction  $\sin$  est développable en série entière et, par produit, la fonction  $\tan$  est développable en série entière.

- 12.28** 1. Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  dont on note  $g$  la somme. Pour tout  $x \in ]-R, R[$ , on a par produit de Cauchy :

$$xg(x)^2 - g(x) + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} - a_{n+1} \right) x^{n+1} - a_0 + 1.$$

Par unicité du développement en série entière, la relation  $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$  est vérifiée si, et seulement si :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Grâce aux hypothèses faites sur  $f$ , on en déduit  $4x^2 f(x)^2 - 4xf(x) + 4x = 0$ , puis :

$$(2xf(x) - 1)^2 = 1 - 4x.$$

La fonction  $x \mapsto 2xf(x) - 1$  est continue en 0 et vaut  $-1$  en 0 donc pour  $x$  au voisinage de 0, on a :

$$2xf(x) - 1 \leqslant 0 \quad \text{puis} \quad f(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1 - 4x}).$$

2. • Posons  $g : x \mapsto \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1 - 4x})$ , que l'on prolonge par continuité en 0 en posant  $g(0) = 1$ .

Tout d'abord, pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ , on a :

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-1)^n 4^n x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n.$$

Ensuite, on a :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[ \setminus \{0\} \quad g(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n,$$

et cette relation est encore vérifiée pour  $x = 0$ , ce qui montre que la fonction  $g$  est développable en série entière.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $d_n = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n}$  et l'on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

Comme  $g(x)$  vérifie  $xg(x)^2 = g(x) - 1$ , il vient d'après le début de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}.$$

Comme on a aussi  $d_0 = c_0$ , par récurrence forte, on en déduit  $c_n = d_n$  pour tout  $n$ .

**12.29** Il est clair que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

1. Démontrons par récurrence :

$$\mathcal{H}_n : \text{« il existe } P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^* \text{ ».}$$

Pour  $n = 0$ , le polynôme  $P_0 = 1$  convient.

Supposons  $\mathcal{H}_n$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Alors, en dérivant  $f^{(n)}$ , il vient, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)f(x).$$

Il s'ensuit que le polynôme  $P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P'_n$  convient.

2. • Notons  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définie par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P'_n. \quad (\star)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le polynôme  $P_n$  est élément de  $\mathbb{R}_d[X]$  pour un certain entier  $d$ . On a donc, au voisinage de 0 :

$$P_n\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{1}{x^{d+1}}\right),$$

et donc, par croissances comparées :

$$P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \quad (\star\star)$$

- Notons  $g$  le prolongement par continuité de  $f$  obtenu en posant  $g(0) = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le prédictat  $\mathcal{P}_n$  :

$$g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g^{(n)}(0) = 0.$$

**Initialisation.** La propriété  $\mathcal{P}_0$  est évidemment vérifiée.

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}_n$ .

Sur la réunion d'intervalles ouverts  $\mathbb{R}^*$ , la fonction  $g^{(n)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et, par la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad (g^{(n)})'(x) = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Par ailleurs, d'après la relation  $(\star\star)$ , on a :

$$(g^{(n)})'\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Enfin, la fonction  $g^{(n)}$  est continue par hypothèse de récurrence.

## Chapitre 12. Séries entières

Par le théorème de limite de la dérivée, on en déduit que  $g^{(n)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{et} \quad g^{(n+1)}(0) = 0,$$

ce qui achève la preuve de l'héritéité.

En conclusion, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g^{(n)}(0) = 0.$$

3. La série de Taylor de  $g$  est nulle. Cependant, la fonction  $g$  ne s'annule qu'en 0 (car  $g(x) = \exp(-1/x^2) > 0$  lorsque  $x \neq 0$ ). Ainsi,  $g$  ne coïncide sur aucun intervalle  $]-r, r[$  avec la somme de sa série de Taylor ; la fonction  $g$  n'est pas développable en série entière.

**12.30** Fixons  $r > 0$  tel que la fonction  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-r, r[$  et :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in ]-r, r[ \quad f^{(p)}(x) \geq 0.$$

Pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on pose :

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Montrons que la suite  $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, ce qui permet de conclure.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\forall x \in ]-r, r[ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Par le changement de variable linéaire  $t = xu$ , il vient :

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) du.$$

- Soit  $x \in ]0, r[$ . Fixons  $y \in ]x, r[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par croissance de la fonction  $f^{(n+1)}$  sur  $]-r, r[$ , on a pour tout  $u \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(xu) &\leq f^{(n+1)}(yu) \\ \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) &\leq \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu) \end{aligned}$$

puis, par croissance de l'intégrale :

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

Comme les réels  $x$  et  $y$  sont positifs, il vient :

$$0 \leq R_n(x) \leq R_n(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}$$

On a  $f(y) - R_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k \geq 0$  donc :

$$R_n(y) \leq f(y) \quad \text{puis} \quad 0 \leq R_n(x) \leq f(y) \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}.$$

Par comparaison à une suite géométrique qui converge vers 0, on a  $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- Maintenant, soit  $x \in ]-r, 0]$ . Par positivité et croissance de la fonction  $f^{(n+1)}$  sur  $] -r, r [$ , on a :

$$\forall t \in [x, 0] \quad |f^{(n+1)}(t)| = f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(0).$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, il vient :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

D'après le point précédent, la série  $\sum \frac{|x|^n}{n!} f^{(n)}(0)$  est une série convergente donc son terme général converge vers 0 et la majoration précédente montre que  $R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

En conclusion, on a pour tout  $x \in ]-r, r[$  :

$$R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ce qui montre que la fonction  $f$  est développable en série entière.

- 12.31** 1. Démontrons par récurrence l'assertion  $\mathcal{H}_n$  : « la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ».

- Puisque  $f$  est par définition dérivable,  $f$  est continue.

De plus la formule  $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  est évidemment vérifiée lorsque  $n = 0$ .

- Supposons  $\mathcal{H}_n$  vérifiée pour un entier naturel  $n$ . Par hypothèse, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f^{(n)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\lambda^n x)$  et, puisque  $f$  est dérivable, cette dernière relation donne que  $f^{(n)}$  est dérivable. De plus, toujours pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda^n f'(\lambda^n x) = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} f(\lambda^{n+1} x).$$

Cette expression montre que  $f^{(n+1)}$  est continue et donc que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Cela démontre le résultat par récurrence.

2. Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange pour démontrer que  $f$  est nécessairement la somme de sa série de Taylor sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Notons  $M_a = \max_{x \in [-|a|, |a|]} |f(x)|$ , qui est bien définie puisque  $f$  est continue sur le segment  $[-|a|, |a|]$ . Pour tout  $x \in [-|a|, |a|]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$|f^{(n+1)}(x)| = \lambda^{\frac{n(n+1)}{2}} |f(\lambda^n x)| \leq M_a.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} a^k \right| \leq M_a \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

La suite de terme général  $\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}$  converge vers 0 (c'est le terme général d'une série convergente), ce qui montre que la fonction  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 12. Séries entières

Comme on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} f(0),$$

on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n.$$

Réciproquement, il est par ailleurs facile de vérifier que  $x \mapsto \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} x^n$  est solution du problème pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ .

# Chapitre 13 : Intégrales à paramètres

<b>I</b>	<b>Suites et séries d'intégrales . . . . .</b>	<b>550</b>
1	Le théorème de convergence dominée . . . . .	550
2	Intégration terme à terme . . . . .	553
<b>II</b>	<b>Continuité et dérivabilité . . . . .</b>	<b>557</b>
1	Continuité d'une intégrale à paramètre . . . . .	557
2	Limites d'intégrales . . . . .	558
3	Dérivation d'une intégrale à paramètre . . . . .	560
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>567</b>

# Intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, nous étudions des intégrales dépendant d'un paramètre qui peut être entier (suites de fonctions) ou réel. Dans les deux cas, nous nous intéresserons aux problèmes de convergence et dans le second cas à la continuité et à la dérivabilité. Pour la continuité, le paramètre pourra même plus généralement être pris dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dans tout le chapitre, les intervalles de  $\mathbb{R}$  considérés sont d'intérieur non vide et les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## I Suites et séries d'intégrales

### 1 Le théorème de convergence dominée

#### Théorème 1 (Théorème de convergence dominée)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ ,
- hypothèse de domination : il existe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Alors toutes les fonctions  $f_n$ , ainsi que  $f$ , sont intégrables sur  $I$  et l'on a :

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f.$$

Nous n'en ferons pas la démonstration qui est hors programme.

**Ex. 1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} f_n : ]1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \end{aligned} \quad \text{et} \quad I_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue par morceaux.
- Pour tout  $t > 1$ , on a :

$$f_n(t) = \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^n}{t^{n+2}} = \frac{1}{t^2},$$

donc la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ , continue par morceaux sur  $]1, +\infty[$ .

- **Hypothèse de domination.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall t > 1 \quad |f_n(t)| = \frac{1+t^n}{1+t^{n+2}} \leq \frac{t^n + t^n}{t^{n+2}} = \frac{2}{t^2}.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{2}{t^2}$  étant intégrable sur  $]1, +\infty[$ , cela fournit l'hypothèse de domination.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

**Attention** Constatons sur un exemple l'importance de l'hypothèse de domination.

**Ex. 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto n^2 t^{n-1}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue, et intégrable sur  $[0, 1[$  car elle admet une limite finie en 1.

Pour tout  $t \in [0, 1[$  fixé, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ , par croissances comparées.

Ainsi la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers la fonction nulle.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, hormis l'hypothèse de domination. Or  $\int_0^1 f_n(t) dt = [nt^n]_0^1 = n$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$ .

**Point méthode** Il faut bien noter, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, que *l'intervalle d'intégration est fixe*. Prolonger la fonction par la fonction nulle permet parfois de contourner cette difficulté lorsque l'intervalle d'intégration dépend de  $n$ .

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

**Ex. 3.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction :

$$\begin{aligned} f_n : [0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \end{aligned}$$

est continue par morceaux et  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = I_n$ .

- Soit  $t \geq 0$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 > t^2$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right).$$

On a de plus :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t^2}{n} \quad \text{donc} \quad n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -t^2.$$

Par continuité de la fonction  $\exp$  en  $-t^2$ , on obtient  $f_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2}$ .

Ainsi, la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$ , qui est continue sur  $[0, +\infty[$ .

- **Hypothèse de domination.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, \sqrt{n}[$ . Par inégalité de convexité puis par croissance de  $\exp$ , on a :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{donc} \quad |f_n(t)| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) \leq e^{-t^2}.$$

Pour  $t \geq \sqrt{n}$ , on a  $f_n(t) = 0$ , donc cette inégalité reste vraie. On a donc obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \geq 0 \quad |f_n(t)| \leq e^{-t^2}.$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  étant intégrable sur  $[0, +\infty[$ , cela fournit l'hypothèse de domination. Par théorème de convergence dominée, on en déduit :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

## 2 Intégration terme à terme

Nous admettrons les deux théorèmes suivants.

### Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme – cas positif)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que la série  $\sum u_n$  converge simplement et telle que sa somme soit continue par morceaux sur  $I$ . Alors, dans  $[0, +\infty]$ , on a :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

En particulier, l'intégrabilité de la somme équivaut à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n < +\infty.$$

Exo  
13.3

**Ex. 4.** Montrons que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ .

- Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , la série géométrique  $\sum t^n \ln t$  converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t = \frac{\ln t}{1-t}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $]0, 1[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et  $\sum u_n$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ , continue sur  $]0, 1[$ .
- Par intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 (-u_n(t)) dt = \int_0^1 t^n \ln t dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par théorème d'intégration terme à terme, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Observons que la convergence de la série  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  assure l'intégrabilité de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ , ce que l'on pourrait, naturellement, montrer directement.

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

### Théorème 3 (Théorème d'intégration terme à terme)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables sur un intervalle  $I$ , telle que la série  $\sum u_n$  converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur  $I$ .

Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n| < +\infty$ , alors, la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n.$$

Exo  
13.4

**Ex. 5.** Montrons que  $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ .

- Pour tout  $t \in ]0, 1]$ , la série géométrique  $\sum (-1)^n t^n \ln t$  converge et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \ln t = \frac{\ln t}{1+t}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et la série  $\sum u_n$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ , continue sur  $]0, 1]$ .
- Comme vu dans l'exemple 4 de la page précédente, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^1 |u_n(t)| dt = - \int_0^1 t^n \ln t dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

La série  $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$  étant convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique : la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  et :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

**Point méthode** D'après le théorème d'intégration terme à terme (cas positif), pour démontrer la convergence de la série  $\sum \int_I |u_n|$ , il est équivalent de montrer l'intégrabilité de la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$  sur  $I$ .

### Ex. 6.

- Soit  $x \in ]-1, 1[$ . La fonction  $f : t \mapsto e^{-t} t^x$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Par ailleurs, on a :

$$e^{-t} t^x \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^x \quad \text{avec} \quad x > -1 \quad \text{et} \quad e^{-t} t^x \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{avec} \quad 2 > 1,$$

donc la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

- D'après le développement en série entière de la fonction  $\exp$ , on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-t} (\ln t)^n}{n!} x^n}_{=u_n(t)} dt.$$

Les fonctions  $u_n$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $]0, +\infty[$  et la série  $\sum u_n$  converge simplement vers la fonction continue  $f$ .

- Par positivité de  $|u_n|$ , on a ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-t} \frac{|\ln t|^n}{n!} |x|^n dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} t^{-|x|} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{|x|} dt < +\infty \end{aligned}$$

car les fonctions  $t \mapsto e^{-t} t^{-|x|}$  et  $t \mapsto e^{-t} t^{|x|}$  sont intégrables sur  $]0, +\infty[$  comme vu dans le premier point étant donné que  $(-|x|, |x|) \in ]-1, 1[^2$ .

La série  $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt$  étant convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n dt \right) x^n,$$

ce qui montre en particulier que la fonction  $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$  est développable en série entière sur  $]-1, 1[$  et donc que la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n dt \right) x^n$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

**Attention** L'hypothèse de convergence de la série  $\sum (\int_I |u_n|)$  est essentielle et la seule convergence, même absolue, de la série  $\sum (\int_I u_n)$  ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant.

**Ex. 7.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $u_n(t) = t^{2n+1}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est intégrable, impaire, et l'on a :  $\int_{-1}^1 u_n = 0$ .

En particulier, la série  $\sum \int_{-1}^1 u_n$  converge.

- La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]-1, 1[$ , puisque, pour tout  $t \in ]-1, 1[$ , la série  $\sum u_n(t)$  est une série géométrique de raison  $t^2 \in [0, 1[$ .

Sa somme  $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$  est continue sur  $]-1, 1[$ , mais elle n'est pas intégrable, car on a :

$$\frac{t}{1-t^2} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2(1-t)}.$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

### Autres méthodes pour intégrer terme à terme

Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions intégrables sur  $I$ , qui converge simplement, dont on notera  $S_n$ ,  $R_n$  et  $S$  respectivement la  $n$ -ième somme partielle, le reste d'ordre  $n$  et la somme. Si  $S$  est intégrable sur  $I$ , alors, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_I S = \int_I S_n + \int_I R_n = \sum_{k=0}^n \int_I u_k + \int_I R_n,$$

de sorte que la série numérique  $\sum \int_I u_n$  est convergente, de somme  $\int_I S$  si, et seulement si, la suite  $\int_I R_n$  converge vers 0.

Les deux théorèmes d'intégration terme à terme, lorsqu'ils s'appliquent, permettent d'échanger directement les symboles  $\sum$  et  $\int_I$ , autrement dit d'intégrer terme à terme la série de fonctions  $\sum u_n$ .

Lorsque leurs hypothèses ne sont pas vérifiées, il faudra le plus souvent démontrer que la suite de terme général  $\int_I R_n$  converge vers 0 pour justifier une intégration terme à terme.

**Point méthode** Pour justifier une interversion série/intégrale, on pourra parfois, en notant  $S_n$  et  $R_n$  la somme partielle et le reste d'ordre  $n$  de la série de fonctions  $\sum u_n$  de somme  $S$ , vérifier que :

$$\int_I R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{ou} \quad \int_I S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I S.$$

Pour établir de telles limites, on utilisera en général le théorème de convergence dominée.

#### Ex. 8.

- Pour  $t > 1$ , la série géométrique  $\sum \frac{(-1)^n}{t^{3n+3}}$  converge, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^{3n+3}} = \frac{1}{1+t^3}.$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et la série de fonctions  $\sum u_n$

$t \mapsto \frac{1}{t^{3n+3}}$

converge simplement sur  $[1, +\infty[$  vers la fonction continue  $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ .

- Hypothèse de domination.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque pour tout  $t > 1$ , la suite  $(\frac{1}{t^{3n+3}})$  converge en décroissant vers 0, d'après le théorème des séries alternées, on a :

$$\forall t > 1 \quad |R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(t) \right| \leqslant \frac{1}{t^{3n+3}} \leqslant \frac{1}{t^3},$$

et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^3}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Par théorème de convergence dominée, on en déduit que  $\int_1^{+\infty} R_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  puis :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^{3n+3}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}.$$

On observe que le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas ici car :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{+\infty} |u_n(t)| dt = \frac{1}{3n+2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} = +\infty.$$

En revanche, l'inégalité :

$$\forall t > 1 \quad |R_n(t)| \leq \frac{1}{t^{3n+3}}$$

permet de montrer directement que  $\int_1^{+\infty} R_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  puisque :

$$\left| \int_1^{+\infty} R_n(t) dt \right| \leq \int_1^{+\infty} |R_n(t)| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n+3}} = \frac{1}{3n+2}. \quad \boxed{\quad}$$

## II Continuité et dérivabilité

### 1 Continuité d'une intégrale à paramètre

**Théorème 4 (Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre)**

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace normé  $E$  de dimension finie,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$ ,
- pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- **hypothèse de domination** : pour tout  $a \in A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  et une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall (x, t) \in (V \cap A) \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Exo  
13.5

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

Démonstration page 564

**Principe de démonstration.** On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité et le théorème de convergence dominée.

#### Point méthode

- Bien entendu, une domination sur tout  $A$  est suffisante et dans la pratique, on commencera par chercher à établir une telle domination.
- Lorsque  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on pourra chercher une domination sur tout segment de  $A$  ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation, c'est-à-dire permettant d'obtenir une domination sur tout segment de  $A$ .

**Ex. 9.** Montrons que la fonction  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

Appliquons le théorème de continuité en notant  $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ .

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- **Hypothèse de domination.** Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[$ , on a :

$$|f(x, t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ ; d'où l'intégrabilité de  $\varphi$  sur  $[0, +\infty[$ .

En conclusion, la fonction  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Ex. 10.** Montrons que la fonction  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(t^2)e^{-xt} dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$  par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[ \quad f(x, t) = \cos(t^2)e^{-xt}.$$

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $a > 0$ . Pour tout  $x \geq a$ , on a :

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad |f(x, t)| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

Comme  $a$  est strictement positif, la fonction  $t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , ce qui fournit l'hypothèse de domination sur  $[a, +\infty[$ , et donc sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .

En conclusion, la fonction  $g$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Ex. 11.** Soit  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  et  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux telle que, pour tout  $p \in H$ , la fonction  $t \mapsto e^{-pt}f(t)$  soit intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On définit la **transformée de Laplace**  $Lf : H \rightarrow \mathbb{C}$  de  $f$  par :

$$\forall p \in H \quad Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t) dt.$$

Montrons que  $Lf$  est continue sur  $H$ .

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $p \mapsto e^{-pt}f(t)$  est continue sur  $H$ .
- Pour tout  $p \in H$ , la fonction  $t \mapsto e^{-pt}f(t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $a > 0$  et  $p \in H$  tel que  $\operatorname{Re}(p) > a$ . Alors on a :

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad |e^{-pt}f(t)| = e^{-\operatorname{Re}(p)t}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|.$$

Comme  $a$  est strictement positif, la fonction  $t \mapsto e^{-at}|f(t)|$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  par hypothèse.

Les ouverts  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > a\}$  recouvrent  $H$  quand  $a$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$  donc on a établi l'hypothèse de domination au voisinage de tout point de  $H$ .

En conclusion, la fonction  $Lf$  est bien définie et continue sur  $H$ . ]

## 2 Limites d'intégrales

La conclusion du théorème de continuité peut s'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I f(a, t) dt.$$

Le théorème suivant étend ce résultat au cas où  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a$  est l'une de ses extrémités.

**Proposition 5**

Soit  $I$  et  $A$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $a$  une extrémité de  $A$ . On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- il existe une fonction  $g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  telle que pour tout  $t \in I$ , on ait  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$ ,
- **hypothèse de domination** : il existe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors, pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ , la fonction  $g$  est intégrable sur  $I$  et l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I g(t) dt.$$

Démonstration page 564

Exo  
13.6

**Principe de démonstration.** On utilise la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

**Remarques**

- Ce résultat sert surtout lorsque  $a = \pm\infty$  car, pour  $a \in \mathbb{R}$ , quitte à prolonger par continuité les fonctions, on pourra le plus souvent appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.
- Par caractère local de la limite, il suffit d'établir une domination au voisinage de  $a$ . Ainsi, dans le cas où  $a = +\infty$ , une domination sur un intervalle de la forme  $J_0 = [x_0, +\infty[ \subset J$  suffit.

**Ex. 12.** On reprend les notations de l'exemple 11 de la page précédente.

On note  $\ell_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ , on suppose l'existence de  $\ell_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  et l'on considère la restriction de  $Lf$  à  $\mathbb{R}_+^*$ . Établissons les deux résultats suivants.

- Théorème de la valeur initiale :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} p Lf(p) = \ell_0$ .
- Théorème de la valeur finale :  $\lim_{p \rightarrow 0^+} p Lf(p) = \ell_\infty$ .

En effectuant dans l'intégrale définissant  $Lf(p)$  le changement de variable  $[t = \frac{u}{p}]$ , on obtient :

$$\forall p > 0 \quad p Lf(p) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) du.$$

Appliquons la proposition 5.

- Pour tout  $p > 0$ , la fonction  $u \mapsto e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $u > 0$ , on a :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u} \ell_0 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) = e^{-u} \ell_\infty.$$

Les fonctions  $u \mapsto e^{-u} \ell_0$  et  $u \mapsto e^{-u} \ell_\infty$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ .

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- **Hypothèse de domination.** Comme  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  et possède une limite finie en  $+\infty$ , elle est bornée; notons  $M = \sup_{\mathbb{R}_+} |f|$  et  $\varphi : u \mapsto M e^{-u}$ . On a :

$$\forall p \in ]0, +\infty[ \quad \forall u \in ]0, +\infty[ \quad \left| e^{-u} f\left(\frac{u}{p}\right) \right| \leq \varphi(u),$$

ce qui fournit l'hypothèse de domination puisque  $\varphi$  est intégrable.  
D'après la proposition 5 de la page précédente, on peut conclure, que :

$$p Lf(p) \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} \ell_0 e^{-u} du = \ell_0 \quad \text{et} \quad p Lf(p) \xrightarrow[p \rightarrow 0^+]{} \int_0^{+\infty} \ell_\infty e^{-u} du = \ell_\infty.$$

### 3 Dérivation d'une intégrale à paramètre

**Rappel** Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $(x_0, t_0) \in J \times I$ .

Lorsqu'elle existe, la dérivée en  $x_0$  de la fonction  $x \mapsto f(x, t_0)$  est appelée dérivée partielle par rapport à  $x$  en  $(x_0, t_0)$  de  $f$  et est notée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)$ .

**Ex. 13.** Soit  $f : \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, t) = \frac{x^2}{x^2 + t^2}$ .

Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est dérivable comme quotient de fonctions dérивables, le dénominateur ne s'annulant pas. Par suite,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et l'on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{x^2 + t^2} + x^2 \frac{-2x}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{2xt^2}{(x^2 + t^2)^2}.$$

#### Théorème 6 (Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,
- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ ,
- pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- **hypothèse de domination** : pour tout segment  $K$  de  $J$ , il existe une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall (x, t) \in K \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est bien définie, de classe  $C^1$  sur  $J$ , et l'on a :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Démonstration page 565

**Principe de démonstration.** Pour tout  $x_0 \in J$ , on forme le taux d'accroissement de  $g$  en  $x_0$  et l'on applique le théorème de continuité.

Exo  
13.7

**Point méthode** Bien entendu, une domination sur tout  $J$  est suffisante. Dans la pratique, on commencera par essayer d'établir une telle domination globale et, seulement si nécessaire, on se limitera aux segments de  $J$ , voire à une famille d'intervalles adaptée à la situation, c'est-à-dire permettant d'obtenir une domination sur tout segment de  $J$ .

**Ex. 14.** Montrons que  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3} dt$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Appliquons le théorème de dérivation.

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $f(x, t) = \frac{e^{ixt}}{1+t^3}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  et, comme on a :

$$|f(x, t)| = \frac{1}{1+t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3},$$

elle est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{it e^{ixt}}{1+t^3}.$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

- **Hypothèse de domination.** On a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{1+t^3}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et, comme  $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$  au voisinage de  $+\infty$ , elle est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On déduit du théorème de dérivation que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{it e^{ixt}}{1+t^3} dt.$$

**Ex. 15.** Le but de cet exemple est d'expliciter pour tout  $x > 0$  l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

On définit  $f$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  par :

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(x, t) = \frac{\sin t}{t} e^{-xt}.$$

- Soit  $x > 0$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, comme on a :

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}.$$

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Hypothèse de domination.** Soit  $a > 0$ . On a :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\sin t| e^{-xt} \leq \underbrace{e^{-at}}_{=\varphi(t)}.$$

La fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $a > 0$ , ce qui fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

On en déduit que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = - \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt.$$

Ayant :

$$\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt = \left[ \frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1},$$

on en déduit :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = C - \operatorname{Arctan} x.$$

Par inégalité triangulaire, inégalité de concavité et croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall x > 0 \quad |g(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x},$$

puis par majoration,  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $C = \frac{\pi}{2}$ .

En conclusion, on a  $\forall x > 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ .

**Corollaire 7**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$  une fonction définie sur  $J \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ ,
- pour tous  $x \in J$  et  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,
- pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ ,
- **hypothèse de domination** : pour tout segment  $K$  de  $J$ , il existe  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in K \times I \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est bien définie, de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et l'on a, pour tout  $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$  :  $\forall x \in J \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$ .

Démonstration page 565

Exo  
13.8

**Point méthode** Pour montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il suffit de vérifier que :

- pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ;
- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  ;
- chacune des dérivées partielles  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$  est dominée sur tout segment.

Exo  
13.9

**Ex. 16.** Montrons que  $g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

On définit  $f : (x, t) \mapsto e^{-t^2} e^{-itx}$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (-it)^k e^{-t^2} e^{-itx}.$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .

- **Hypothèse de domination.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = |t|^k e^{-t^2}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto |t|^k e^{-t^2}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction  $\varphi$  étant intégrable, l'hypothèse de domination est vérifiée.

D'après le théorème de dérivation,  $g$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k e^{-t^2} e^{-itx} dt.$$

## Démonstrations

### Théorème 4

**Bonne définition.** La continuité par morceaux et l'hypothèse de domination montrent que pour tout  $x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ .

Donc  $g$  est bien définie sur  $A$ .

**Continuité.** Soit  $a \in A$ . Montrons que  $g$  est continue en  $a$  en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $A$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ .

Montrons que  $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(a)$ .

D'après l'hypothèse de domination, on peut fixer  $V$  un voisinage de  $a$  et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in (V \cap A) \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

À partir d'un certain rang  $n_0$ , on a  $x_n \in V \cap A$ . Notons  $(f_n)_{n \geq n_0}$  la suite de fonctions définies sur  $I$  par  $f_n(t) = f(x_n, t)$  et appliquons-lui le théorème de convergence dominée.

- D'après la deuxième hypothèse, chaque  $f_n$  est continue par morceaux sur  $I$ .
- Pour tout  $t \in I$  fixé, d'après la première hypothèse et par composition des limites appliquée à la fonction  $x \mapsto f(x, t)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, t) = f(a, t)$ .

Ainsi la suite  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $t \mapsto f(a, t)$ , continue par morceaux sur  $I$  d'après la deuxième hypothèse.

- **Hypothèse de domination.** Pour tous  $t \in I$  et  $n \geq n_0$ , on a, d'après la troisième hypothèse,  $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ , avec  $\varphi$  intégrable sur  $I$ .

Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\int_I f(x_n, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(a, t) dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(a).$$

**Proposition 5** L'intégrabilité de chaque fonction  $t \mapsto f(x, t)$  se déduit de l'hypothèse de domination et du théorème de comparaison.

Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $A$  de limite  $a$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, t) = g(a)$ . Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $I$  par :

$$\forall t \in I \quad f_n(t) = f(x_n, t).$$

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues par morceaux sur  $I$  converge simplement sur  $I$  vers la fonction  $g$  continue par morceaux.
- On a la domination par hypothèse.

Par suite,  $g$  est intégrable sur  $I$  et l'on a :

$$\int_I f_n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I g dt,$$

c'est-à-dire :

$$\int_I f(x_n, t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I g(t) dt.$$

Comme ce résultat est établi pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $A$  de limite  $a$ , on déduit de la caractérisation séquentielle de la limite que  $\int_I f(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I g(t) dt$ .

**Théorème 6** Fixons  $x_0 \in J$  et appliquons le théorème 4 de la page 557 à la fonction  $f_1 : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$

$$\text{définie par } f_1(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

- Soit  $t \in I$ . D'après la deuxième hypothèse, la fonction  $x \mapsto f_1(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  donc continue sur  $J \setminus \{x_0\}$  et elle est continue en  $x_0$  par définition de la dérivée.
- D'après la première et la troisième hypothèse, la fonction  $t \mapsto f_1(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$ , pour tout  $x \in J$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $K$  un segment de  $J$  contenant  $x_0$  ainsi que  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in K \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

La classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ , pour tout  $t \in I$ , de la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  permet de lui appliquer l'inégalité des accroissements finis. On en déduit, d'après l'hypothèse de domination :

$$\forall (x, t) \in K \times I \quad |f_1(x, t)| \leq \varphi(t).$$

On peut ainsi conclure que la fonction  $g_1 : x \mapsto \int_I f_1(x, t) dt$  est continue sur  $J$  ; on a donc, en particulier :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = g_1(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Or, pour  $x \in J \setminus \{x_0\}$ , on a :

$$g_1(x) = \int_I \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ainsi, on a établi que  $g$  est dérivable en  $x_0$  et :

$$g'(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

Le résultat précédent étant vrai pour tout  $x_0 \in J$ ,  $g$  est dérivable sur  $J$ .

Une nouvelle application du théorème de continuité, avec la même domination, permet de prouver que  $g'$  est continue sur  $J$ , donc que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Corollaire 7** Établissons ce résultat par récurrence sur  $k$ .

**Initialisation.** Lorsque  $k = 1$ , il s'agit précisément du théorème de dérivation.

**Hérédité.** Soit  $k \geq 2$ . Supposons le résultat établi au rang  $k - 1$  et donnons-nous  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant les hypothèses du théorème.

- **Hypothèse de domination sur  $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$ .**

Soit  $[a, b]$  un segment de  $J$ , avec  $a < b$ , et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable telle que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

La classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , pour tout  $t \in I$ , de la fonction  $x \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t)$  permet de lui appliquer, pour tout  $x \in [a, b]$ , l'inégalité des accroissements finis sur le segment  $[a, x]$ . On obtient :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t) - \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a, t) \right| \leq (x - a)\varphi(t) \leq (b - a)\varphi(t).$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t) \right| \leqslant \underbrace{\left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a, t) \right| + (b-a)\varphi(t)}_{=\psi(t)}.$$

La fonction  $\psi$  étant intégrable, on dispose donc d'une domination sur tout segment de la fonction  $(x, t) \mapsto \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t)$ .

- Toutes les autres hypothèses sont réunies pour appliquer le résultat au rang  $k-1$  afin d'en déduire que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  et pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  :

$$\forall (x, t) \in J \times I \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt.$$

- En appliquant le théorème de dérivation à la fonction  $x \mapsto \int_I \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t) dt$ , on conclut.

## S'entraîner et approfondir

**13.1** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$ .  
→550

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

2. À l'aide du changement de variable  $[t = u^{\frac{1}{n}}]$ , déterminer un équivalent de  $I_n$ . On exprimera l'équivalent obtenu à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

**13.2** Déterminer un équivalent simple de la suite  $I_n = \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^n}$ .  
→551

On exprimera l'équivalent obtenu à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

**Indication.** On pourra effectuer le changement de variable  $[u = \frac{t}{\sqrt{n}}]$ .

**13.3** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .  
→553

**13.4** Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ .  
→554

**13.5 Continuité de la fonction  $\Gamma$ .**

→557 Soit  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Pour tout  $z \in H$ , on pose  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ .

Montrer que  $\Gamma$  est bien définie et continue.

**13.6** Pour tout  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x} dt$ .  
→559

1. Justifier la définition de  $g$ .

2. Montrer que  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

**13.7** Pour tout  $x > 0$ , on pose  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ .  
→560

1. Montrer que  $g$  est bien définie.

2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Calculer  $g'$ , puis  $g$ .

**13.8** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ .

→563 Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on pose  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$  et  $g(0) = f'(0)$ .

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^1 f'(xu) du.$$

2. Montrer que  $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ .

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

### 13.9 Classe $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction $\Gamma$ .

$\rightarrow^{563}$  Pour tout  $x > 0$ , on pose  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est bien définie.
2. Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 13.10 Montrer que pour tout $x > 0$ , on a :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt,$$

où  $\Gamma$  est la fonction définie dans l'exercice 13.9.

### 13.11 1. Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , de $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t dt$ et montrer que :

$$I_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

*Indication.* On pourra effectuer le changement de variable  $[t = n(1-u)]$ .

2. En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$  converge et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

### 13.12 On note $\zeta : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x > 1 \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que :

$$\forall x > 1 \quad \Gamma(x) \zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt,$$

où  $\Gamma$  est la fonction définie dans l'exercice 13.9.

### 13.13 Théorème de convergence monotone.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de fonctions à valeurs réelles, intégrables sur l'intervalle  $I$  et convergeant simplement vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ .

Montrer que  $f$  est intégrable sur  $I$  si, et seulement si, la suite  $\left(\int_I f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée et que l'on a alors :

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

**13.14** Soit  $F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t} dt$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $F$ .

2. Calculer  $F$ .

3. En déduire les valeurs des intégrales  $\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t} dt$  et  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ .

\* **13.15** 1. Justifier la convergence de  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$  et la calculer.

*Indication.* On pourra effectuer le changement de variable  $[x = \frac{1}{t}]$ .

2. Pour  $a > 0$ , on pose  $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)(a^2+x^2)} dx$ .

(a) Justifier la convergence de  $I(a)$  pour tout  $a > 0$  et la calculer pour  $a \neq 1$ .

*Indication.* On pourra décomposer en éléments simples la fraction  $\frac{1}{(1+X)(a^2+X)}$ .

(b) En déduire  $I(1)$ .

**13.16** Pour tout  $x > -1$ , on pose  $g(x) = \int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t} dt$ .

1. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]-1, +\infty[$  puis calculer  $g'$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , puis calculer  $g$ .

### 13.17 Calcul de l'intégrale de Gauss.

Soit  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt$  et  $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ .

1. Montrer que  $g$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et solution de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = -2I.$$

3. En déduire  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

## Solutions des exercices

- 13.1** 1. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, mais ici on peut aussi procéder par majoration explicite.

On déduit de la concavité de la fonction  $\ln$  l'inégalité suivante :

$$\forall u > -1 \quad \ln(1+u) \leq u.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et, par encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En effectuant le changement de variable  $[u = t^n]$ , on obtient :

$$I_n = \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}} du}_{=J_n}.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}}$  est continue sur  $]0, 1]$ .
- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $]0, 1]$  vers la fonction continue  $f : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ .
- **Hypothèse de domination.** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in ]0, 1] \quad |f_n(u)| = f_n(u) \leq \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

La fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , car elle est continue et admet une limite finie en 0.

On en conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f$ . De plus, comme la fonction  $f$  est continue, positive et non nulle, on a  $\int_0^1 f > 0$ . On peut donc écrire :

$$I_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du.$$

- 13.2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'intégrale  $I_n$  est bien définie car l'intégrande est une fonction continue sur le segment  $[0, 1]$ . Le changement de variable  $[u = \frac{t}{\sqrt{n}}]$  donne :

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt}_{=J_n}.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée pour montrer que la suite  $(J_n)$  converge vers un réel strictement positif.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t).$$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ , comme produit de deux fonctions continues par morceaux.

- Soit  $t \in [0, +\infty[$ . Fixons  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n_0 > t^2$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right).$$

On a de plus :

$$\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{n} \quad \text{donc} \quad -n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -t^2.$$

Par continuité de la fonction  $\exp$  en  $-t^2$ , on obtient  $f_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-t^2}$ . Ainsi, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$ , qui est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

- **Hypothèse de domination.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, \sqrt{n}]$ . Par une conséquence de la formule du binôme de Newton, on a :

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1 + t^2 \quad \text{donc} \quad |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour  $t > \sqrt{n}$ , on a  $f_n(t) = 0$ , donc cette inégalité reste vraie. On a donc obtenu :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \geq 0 \quad |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par théorème de convergence dominée, on en déduit :

$$J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{puis} \quad I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- 13.3** Soit  $f : x \mapsto \frac{x^2}{e^x - 1}$ ; pour tout  $x > 0$ , on a :

$$f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \quad \text{car} \quad e^{-x} \in ]0, 1[.$$

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n : x \mapsto x^2 e^{-nx}$  et appliquons à la série  $\sum u_n$  le théorème d'intégration terme à terme (cas positif) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs positives, et elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , car  $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , par croissances comparées, donc, *a fortiori*, intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa somme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour calculer  $\int_0^{+\infty} u_n$ , déterminons d'abord une primitive de  $u_n$  par une double intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^x u_n(t) dt &= \int_0^x t^2 e^{-nt} dt = -\frac{x^2 e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n} \int_0^x t e^{-nt} dt \\ &= -\frac{x^2 e^{-nx}}{n} - \frac{2x e^{-nx}}{n^2} + \frac{2}{n^2} \int_0^x e^{-nt} dt \\ &= -\frac{x^2 e^{-nx}}{n} - \frac{2x e^{-nx}}{n^2} - \frac{2e^{-nx}}{n^3} + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

Notant  $v_n$  la primitive obtenue en prenant  $C = 0$ , on a :

$$v_n(0) = -\frac{2}{n^3} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} v_n = 0.$$

$$\text{On en déduit } \int_0^{+\infty} u_n = \frac{2}{n^3}.$$

Pour conclure, par positivité de  $u_n$ , on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},$$

et la convergence de la série entraîne l'intégrabilité de la fonction  $f$ .

**13.4** • Pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{t}{\operatorname{ch} t} &= 2te^{-t} \frac{1}{1 + e^{-2t}} \\ &= 2te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2nt} \quad (-e^{-2t} \in ]-1, 1[) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2t(-1)^n e^{-(2n+1)t}. \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n : t \mapsto 2t(-1)^n e^{-(2n+1)t}$ . La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers la fonction continue  $t \mapsto \frac{t}{\operatorname{ch} t}$ .

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} 2te^{-(2n+1)t} dt \\ &= \left[ -2t \frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} dt \\ &= \frac{2}{(2n+1)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série  $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt$  étant convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch} t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} |u_n(t)| dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

**13.5** • Commençons par démontrer la bonne définition de la fonction  $\Gamma$  : ce sera utile lors de la vérification ultérieure de l'hypothèse de domination.

Soit  $z \in H$ . La fonction  $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** On a  $|e^{-t} t^{z-1}| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{\operatorname{Re}(z)-1}$  avec  $\operatorname{Re}(z)-1 > -1$ .

**Étude en  $+\infty$ .** Par croissances comparées, on a  $e^{-t} t^{z-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  avec  $2 > 1$ .

Ainsi,  $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\Gamma$  est bien définie sur  $H$ .

- Pour tout  $t > 0$ , la fonction :

$$z \mapsto e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} \exp((z-1) \ln t)$$

est continue sur  $H$ , par continuité de l'exponentielle complexe.

- **Hypothèse de domination.** Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $a < b$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \in ]a, b[$ . On a :

$$\forall t > 0 \quad |e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re}(z)-1} \leq e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1}),$$

par disjonction de cas suivant que  $t \in ]0, 1[$  ou  $t \in [1, +\infty[$ .

D'après l'étude faite dans le premier point, la fonction  $t \mapsto e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$  est intégrable, comme somme de deux fonctions intégrables.

Enfin, les ouverts  $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$  recouvrent  $H$  quand  $a < b$  décrivent  $\mathbb{R}_+^*$  donc on a établi l'hypothèse de domination au voisinage de tout point de  $H$ .

En conclusion, la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $H$ .

- 13.6**
- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $f_x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a  $f_x(t) = o(e^{-t})$ , ce qui assure l'intégrabilité de  $f_x$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - Montrons que  $xg(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ . On a :

$$\forall x > 0 \quad xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{t+x} e^{-t} dt.$$

- Pour tout  $t \geq 0$ , on a  $\frac{x}{t+x} e^{-t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-t}$  et la fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

- **Hypothèse de domination.** Soit  $x \geq 1$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on a :

$$\left| \frac{t}{t+x} e^{-t} \right| = \frac{t}{t+x} e^{-t} \leq e^{-t},$$

et la fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après la proposition 5 de la page 559, on peut conclure, que :

$$xg(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{t+x} e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

- 13.7**
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $h_x : t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Un développement limité à l'ordre 1 du numérateur donne  $\lim_{t \rightarrow 0} h_x(t) = x - 1$ ; admettant une limite finie en  $0^+$ , la fonction  $h_x$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . On a de plus  $h_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$  par croissances comparées, donc  $h_x$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , ce qui achève de montrer que la fonction  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Posons  $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times ]0, +\infty[$ .

- Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt}.$$

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , d'après la première question.

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $a > 0$ . On a :

$$\forall x \geq a \quad \forall t \in ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

La fonction  $t \mapsto e^{-at}$  étant intégrable sur  $]0, +\infty[$ , cela fournit l'hypothèse de domination pour  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Comme  $g(1) = 0$ , on déduit de ce qui précède que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \ln x.$$

- 13.8** 1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  donc  $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$ .

En effectuant le changement de variable  $[t = xu]$ , on obtient :

$$f(x) - f(0) = x \int_0^1 f'(xu) du.$$

On en déduit que  $g(x) = \int_0^1 f'(xu) du$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . Puisque  $g(0) = f'(0)$ , cette relation est encore vraie pour  $x = 0$ .

2. Pour tout  $(x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ , on pose  $h(x, u) = f'(xu)$ .

- Pour tout  $u \in [0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto h(x, u)$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall p \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \quad \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, u) = u^p f^{(p+1)}(xu).$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Par continuité sur le segment  $[0, 1]$ , la fonction  $u \mapsto u^p f^{(p+1)}(xu)$  est intégrable sur  $[0, 1]$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $u \mapsto u^k f^{(k+1)}(xu)$  est continue donc continue par morceaux sur  $[0, 1]$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $a > 0$ . Par continuité sur le segment  $[-a, a]$ , il existe  $M > 0$  tel que :

$$\forall t \in [-a, a] \quad |f^{(k+1)}(t)| \leq M.$$

En particulier, pour  $x \in [-a, a]$  et  $u \in [0, 1]$ , on a  $xu \in [-a, a]$  et donc :

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, u) \right| = u^k |f^{(k+1)}(xu)| \leq Mu^k,$$

et la fonction  $u \mapsto Mu^k$  est intégrable sur  $[0, 1]$  car continue sur ce segment.

Ainsi, la fonction  $g$  est de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$ .

**13.9** 1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** On a  $g_x(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$  et  $x-1 > -1$ .

**Étude en  $+\infty$ .** On a  $g_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $2 > 1$ .

En conclusion, la fonction  $g_x$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\Gamma$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. On pose  $f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ .

- Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0, +\infty[ \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Hypothèse de domination.**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in ]0, 1] \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| &= |\ln t|^k t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t} \\ \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in ]1, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| &= |\ln t|^k t^{x-1} e^{-t} \leqslant |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t}. \end{aligned}$$

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\varphi(t) = |\ln t|^k t^{a-1} e^{-t} + |\ln t|^k t^{b-1} e^{-t}$$

Cette fonction  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (par comparaison à des exemples de Riemann), et l'on a :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall t \in ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leqslant \varphi(t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$  pour la fonction  $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ .

On peut donc conclure que  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**13.10** Soit  $x > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}$$

La fonction  $f_n$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a  $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ , ce qui assure l'intégrabilité de  $f_n$  sur  $]0, 1]$ , par comparaison aux intégrales de Riemann puisque  $x-1 > -1$  ; comme, de plus,  $f_n$  est nulle sur  $[n, +\infty[$ , elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a bien sûr :

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Appliquons à la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  le théorème de convergence dominée.

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- Soit  $t > 0$ . Pour  $n > t$ , on peut écrire :

$$f_n(t) = t^{x-1} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})}.$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\ln(1 - \frac{t}{n}) \sim -\frac{t}{n}$ , d'où l'on déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = t^{x-1} e^{-t}$ .

La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  vers la fonction continue par morceaux  $f : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ .

- **Hypothèse de domination.** On déduit de la concavité de la fonction  $\ln$  l'inégalité :

$$\forall u > -1 \quad \ln(1 + u) \leq u.$$

Par suite, pour  $n > t > 0$ , on a :

$$|f_n(t)| = f_n(t) = t^{x-1} e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{=\varphi(t)}.$$

L'inégalité  $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$  est bien sûr valable pour  $n \leq t$  puisqu'alors  $f_n(t) = 0$ .

La fonction  $\varphi$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$  et comme on a :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} \quad \text{avec } x-1 > -1 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{avec } 2 > 1,$$

elle est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par comparaison aux intégrales de Riemann.

Cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

**13.11 1.** • Vérifions d'abord l'existence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , de l'intégrale  $I_n$ .

La fonction  $f_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t$  est continue sur  $]0, n]$  et, au voisinage de 0, on a  $|f_n(t)| \sim |\ln t| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ .

On en déduit l'intégrabilité de  $f_n$  sur  $]0, n]$ , par comparaison aux intégrales de Riemann.

- On effectue le changement de variable  $[t = n(1 - u)]$  :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n f_n(t) dt = \int_0^1 n u^{n-1} \ln(n(1-u)) du \\ &= \int_0^1 n u^{n-1} (\ln n + \ln(1-u)) du \\ &= \ln n + \int_0^1 n u^{n-1} \ln(1-u) du. \end{aligned} \tag{*}$$

Dans cette nouvelle intégrale, effectuons une intégration par parties.

Les fonctions  $u \mapsto u^n - 1$  et  $u \mapsto \ln(1-u)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1[$  et

$$(u^n - 1) \ln(1-u) \underset{u \rightarrow 1^-}{\sim} n(u-1) \ln(1-u) \underset{u \rightarrow 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par intégration par parties, la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 nu^{n-1} \ln(1-u) du$  entraîne celle de  $\int_0^1 \frac{u^n - 1}{u-1} du$  et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 nu^{n-1} \ln(1-u) du &= \left[ (u^n - 1) \ln(1-u) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^n - 1}{u-1} du \\ &= 0 - \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n u^{k-1} \right) du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

De la relation  $(\star)$ , on déduit alors :

$$I_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $g_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g_n(t) = f_n(t) \mathbf{1}_{]0, n[}(t)$ , de sorte que  $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ . Appliquons à la suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  le théorème de convergence dominée sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

- Chaque fonction  $g_n$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .
- Fixons  $t \in ]0, +\infty[$ . On a, pour  $n > t$  :

$$g_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t = e^{(n-1)\ln(1-\frac{t}{n})} \ln t.$$

L'équivalent simple :

$$(n-1) \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -t$$

montre que  $(n-1) \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -t$  puis, par continuité de la fonction  $\exp$  :

$$g_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-t} \ln t.$$

On en déduit que la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers la fonction continue par morceaux  $g : t \mapsto e^{-t} \ln t$ .

- **Hypothèse de domination.** Par concavité de la fonction  $\ln$  et croissance de  $\exp$ , on obtient, pour  $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times ]0, n[$  :

$$\begin{aligned}|g_n(t)| &= e^{(n-1)\ln(1-\frac{t}{n})} |\ln t| \\ &\leq e^{(n-1)(-\frac{t}{n})} |\ln t| = e^{-t+\frac{t}{n}} |\ln t| \leq e^{-t+1} |\ln t|.\end{aligned}$$

Comme  $g_n$  est nulle sur  $[n, +\infty[$ , on a établi :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N}^* \times ]0, +\infty[ \quad |g_n(t)| \leq \underbrace{e^{-t+1} |\ln t|}_{=\varphi(t)}.$$

La fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Étude en 0.** Par croissances comparées, on a  $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ , avec  $\frac{1}{2} < 1$ .

**Étude en  $+\infty$ .** Par croissances comparées, on a  $\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , avec  $2 > 1$ .

Ainsi  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , d'où l'hypothèse de domination.

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

En conclusion, on a démontré que  $t \mapsto e^{-t} \ln t$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et :

$$\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

**13.12** Fixons  $x > 1$ . Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$  ; on peut écrire :

$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt},$$

la dernière égalité étant justifiée par la convergence de la série géométrique  $\sum t^{x-1} e^{-nt}$ , de raison  $e^{-t} \in ]0, 1[$ . Définissons  $u_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $u_n(t) = t^{x-1} e^{-nt}$  et appliquons à la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  ; la fonction  $u_n$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  et l'on a :

$$\forall t > 0 \quad 0 \leq u_n(t) \leq t^{x-1} e^{-t}.$$

La fonction  $u_n$  est donc intégrable sur  $]0, +\infty[$ , par comparaison avec des exemples de Riemann, puisque :

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} \quad \text{avec} \quad x-1 > -1 \quad \text{et} \quad t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{avec} \quad 2 > 1.$$

- La série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  et sa somme,  $t \mapsto \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}}$ , est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} dt \\ &= \frac{1}{n^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad (\text{changement de variable } [u = nt]) \\ &= \frac{\Gamma(x)}{n^x}. \end{aligned}$$

La série  $\sum \frac{\Gamma(x)}{n^x}$  étant convergente (puisque  $x > 1$ ), d'après le théorème d'intégration terme à terme (cas positif), la fonction  $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{n^x} = \Gamma(x) \zeta(x).$$

**13.13** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = f_n - f_{n-1}$  et appliquons à la série  $\sum u_n$  le théorème d'intégration terme à terme (cas positif).

- La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant croissante, chaque  $u_n$  est positif.
- Les fonctions  $f_n$  étant intégrables, chaque  $u_n$  est intégrable.
- Par télescopage, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{p=1}^n u_p = f_n - f_0.$$

Comme la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  continue par morceaux, la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$  et sa somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = f - f_0$  est continue par morceaux.

Alors, dans  $[0, +\infty]$ , on a :

$$\int_I \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I u_n \quad i.e. \quad \int_I (f - f_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_I f_n - \int_I f_{n-1} \right). \quad (\star)$$

Comme  $f_0$  est intégrable, l'intégrabilité de  $f$  équivaut à l'intégrabilité de  $f - f_0$ , donc à la convergence de la série télescopique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_I f_n - \int_I f_{n-1} \right)$ , c'est-à-dire au caractère majoré de la suite croissante  $\left( \int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

En cas d'intégrabilité de  $f$ , la relation  $(\star)$  se réécrit :

$$\int_I f - \int_I f_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n - \int_I f_0 \quad \text{donc} \quad \int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

**13.14** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $g : t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t}$  est continue sur  $]0, \pi/2[$ . Comme elle nulle pour  $x = 0$ , nous ne ferons d'étude que pour  $x \neq 0$ .

- Quand  $t$  tend vers 0, on a  $g(t) \sim \frac{x \tan t}{\tan t} = x$ . La fonction  $g$  ayant une limite finie en 0, elle est intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{4}[$ .
- On a  $\lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{Arctan}(x \tan t) = \varepsilon \pi/2$ , où l'on note  $\varepsilon$  le signe de  $x$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} \tan t = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} g(t) = 0$ . La fonction  $g$  ayant une limite finie en  $\pi/2$ , elle est intégrable sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ .

En conclusion, la fonction  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Comme  $F$  est impaire, nous calculerons d'abord  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour cela, nous allons établir que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer  $F'$ , en appliquant le théorème de dérivation. Notons  $f : (x, t) \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan t)}{\tan t}$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  d'après la première question.
- Pour tout  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, \frac{\pi}{2}[ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1 + x^2 \tan^2 t}.$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .
- **Hypothèse de domination.** On a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times ]0, \frac{\pi}{2}[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1.$$

La fonction constante égale à 1 est intégrable sur l'intervalle borné  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

Cela fournit l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de dérivation,  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + x^2 \tan^2 t}.$$

On effectue le changement de variable  $[u = \tan t]$  et l'on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)(1 + x^2 u^2)}.$$

Pour  $x \neq 1$ , on en déduit, par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 - x^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1 + u^2} - \frac{x^2}{1 + x^2 u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \left[ \text{Arctan } u - x \text{ Arctan}(xu) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \left( \frac{\pi}{2} - x \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + x}. \end{aligned}$$

La fonction  $F'$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$ , ce dernier résultat reste valable pour  $x = 1$ . Comme  $F(0) = 0$  et que  $F$  est impaire, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = -\frac{\pi}{2} \ln(1 - x).$$

3. • Comme :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad \text{Arctan}(\tan t) = t,$$

on a :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t} dt = F(1) = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

- Intégrons par parties sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  :

$$\int \frac{t}{\tan t} dt = \int x \frac{\cos t}{\sin t} dt = x \ln(\sin x) - \int \ln(\sin t) dt.$$

Quand  $x$  tend vers  $0^+$ , on a  $x \ln(\sin x) \sim \sin x \ln(\sin x)$  et donc, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x) = 0$ . Par suite, le crochet  $[t \ln(\sin t)]_0^{\pi/2}$  existe et vaut 0.

D'après le théorème d'intégration par parties,  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$  converge et l'on a :

$$\int_0^{\pi/2} t \frac{\cos t}{\sin t} dt = [t \ln(\sin t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt,$$

$$\text{d'où } \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

**13.15** 1. La fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Étude en 0.** Par croissances comparées, on a  $f(x) \sim \ln x = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  avec  $\frac{1}{2} < 1$ .

**Étude en  $+\infty$ .** Par croissances comparées, on a  $f(x) \sim \frac{\ln x}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$  avec  $\frac{3}{2} > 1$ .

La fonction  $f$  est donc intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , ce qui prouve la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ .

On effectue le changement de variable  $[x = \frac{1}{t}]$  :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1/t)}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -I.$$

On en déduit que  $I = 0$ .

2. (a) La fonction  $g_a : x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x^2)(a^2+x^2)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g_a(x)| \leq \frac{1}{a^2} \frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{f(x)}{a^2},$$

où  $f$  est la fonction définie à la première question. Comme la fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit, pour tout  $a > 0$ , l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $g_a$ , donc la convergence de l'intégrale  $I(a)$ .

Pour  $a \neq 1$ , on a, en décomposant en éléments simples :

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)(a^2+x^2)} dx = \frac{1}{a^2-1} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{\ln x}{a^2+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{1-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2} dx. \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le résultat de la première question.

On effectue le changement de variable  $[x = at]$  et l'on utilise la question 1 :

$$I(a) = \frac{1}{a(1-a^2)} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln t}{1+t^2} dt = \frac{\ln a}{a(1-a^2)} [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi \ln a}{2a(1-a^2)}.$$

(b) Appliquons le théorème de continuité à la fonction  $I$ .

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $a \mapsto \frac{\ln x}{(1+x^2)(a^2+x^2)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $a > 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x^2)(a^2+x^2)}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $\alpha > 0$ . La fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{|\ln x|}{\alpha^2(1+x^2)}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , d'après la première question, et l'on a :

$$\forall (a, x) \in [\alpha, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{|\ln x|}{(1+x^2)(a^2+x^2)} \leq \varphi(x).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

D'après le théorème de continuité, la fonction  $I$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En utilisant sa continuité en 1, on obtient :

$$I(1) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\pi \ln a}{2a(1-a^2)}.$$

Comme  $\ln a \sim a - 1$ , on en déduit :

$$I(1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{i.e.} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

**13.16** 1. Pour tout  $x > -1$  et  $t \in ]0, 1[$ , on pose  $f(x, t) = t^x \frac{t-1}{\ln t}$ .

- Soit  $x > -1$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ .  
De plus, on a :

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 1 \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(t^x) \quad \text{avec} \quad x > -1,$$

donc  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

- Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , la fonction  $x \mapsto t^x \frac{t-1}{\ln t}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall (x, t) \in ]-1, +\infty[ \times ]0, 1[ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^x(t-1).$$

- **Hypothèse de domination.** Soit  $a > -1$ . On a :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times ]0, 1[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = t^x(1-t) \leq t^a(1-t) \leq t^a.$$

La fonction  $t \mapsto t^a$  est intégrable sur  $]0, 1[$  puisque  $a > -1$ . Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment pour  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

On peut donc conclure que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$  avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, +\infty[ \quad g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_0^1 t^x(t-1) dt \\ &= \left[ \frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall x \in ]-1, +\infty[ \quad g(x) = \ln \left( \frac{x+2}{x+1} \right) + C.$$

On a alors  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Pour déterminer cette limite, appliquons la proposition 5 de la page 559, avec domination au voisinage de  $+\infty$ .

- Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, t) = 0$ .
- **Hypothèse de domination.** On a :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[ \times ]0, 1[ \quad |f(x, t)| = f(x, t) \leq f(0, t).$$

Cela fournit l'hypothèse de domination sur  $[0, +\infty[$  car d'après l'étude initiale, la fonction  $t \mapsto f(0, t)$  est intégrable.

On en déduit  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et, par suite :

$$\forall x \in ]-1, +\infty[ \quad g(x) = \ln \left( \frac{x+2}{x+1} \right) \quad i.e. \quad \int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln \left( \frac{x+2}{x+1} \right).$$

**13.17** 1. Montrons que  $g$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ , en appliquant le théorème de continuité.

On note  $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2}$ .

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- **Hypothèse de domination.** On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in [0, +\infty[ \quad |f(x, t)| = f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ , quand  $t$  tend vers  $+\infty$  ; d'où l'intégrabilité de cette fonction sur  $[0, +\infty[$ .

D'après le théorème de continuité,  $g$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. Montrons que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , comme on l'a vu dans l'étude de la continuité de  $g$ .
- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et l'on a :

$$\forall t \in [0, +\infty[ \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2x \frac{t^2}{1+t^2} e^{-x^2 t^2}.$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On a :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall t \in [0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2be^{-a^2 t^2}.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto 2be^{-a^2 t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et, par croissances comparées :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

d'où l'intégrabilité de  $\varphi$  sur  $[0, +\infty[$ .

On en déduit que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) &= -2x \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-x^2 t^2} dt \\ &= 2xg(x) - 2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t^2} dt \quad \left( \frac{t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{1+t^2} + 1 \right) \\ &= 2xg(x) - 2I. \quad (\text{changement de variable } [u = xt]) \end{aligned}$$

## Chapitre 13. Intégrales à paramètres

3. D'après la question précédente et par résolution de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = -2I,$$

il existe un réel  $C$  tel que :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = e^{x^2} \left( C - 2I \int_0^x e^{-t^2} dt \right).$$

En faisant tendre  $x$  vers  $0^+$  et par continuité de  $g$  en 0, on obtient :

$$C = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Par ailleurs, par positivité et croissance de l'intégrale, on a :

$$\forall x > 0 \quad |g(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

ce qui montre que la fonction  $g$  est bornée.

On a enfin :

$$\forall x > 0 \quad g(x)e^{-x^2} = \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

puis par passage à la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , on obtient :

$$0 = \frac{\pi}{2} - 2I^2 \quad \text{puis} \quad I^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Par positivité de l'exponentielle, l'intégrale  $I$  est positive et l'on conclut :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad i.e. \quad \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Chapitre 14 : Dénombrabilité

<b>I</b>	<b>Ensembles dénombrables . . . . .</b>	<b>586</b>
<b>II</b>	<b>Opérations sur les ensembles dénombrables . . . . .</b>	<b>588</b>
1	Produit cartésien . . . . .	588
2	Union . . . . .	589
<b>III</b>	<b>Exemples d'ensembles infinis non dénombrables . . . . .</b>	<b>590</b>
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>594</b>

# Dénombrabilité

## I Ensembles dénombrables

Rappelons qu'un ensemble est fini s'il est en bijection avec  $\llbracket 1, n \rrbracket$  pour un certain entier naturel  $n$  (son cardinal).

### Définition 1

Un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

**Ex. 1.** L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est dénombrable : en effet, on peut définir une application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  par :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

et cette application est bijective de réciproque  $g$  définie par :

$$g(k) = 2k \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g(k) = -1 - 2k \quad \text{si } k \in \mathbb{Z}_-^*.$$

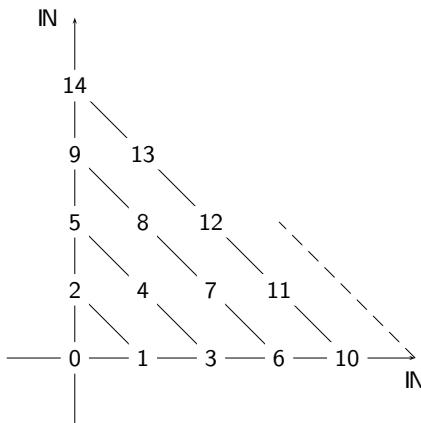
**Ex. 2.** Un ensemble  $F$  en bijection avec un ensemble  $E$  dénombrable est dénombrable. En effet, il existe une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $E$  et une bijection de  $E$  sur  $F$ . En les composant, on obtient une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $F$ .

**Point méthode** Exhiber une bijection entre  $\mathbb{N}$  et un ensemble dénombrable  $A$  revient à numérotter les éléments de  $A$ , c'est-à-dire écrire  $A$  sous la forme  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , avec  $n \mapsto a_n$  injective, ou encore à les énumérer.

**Ex. 3.** La bijection ci-dessus entre  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  revient à énumérer les éléments de  $\mathbb{Z}$  de la façon suivante :

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$$

**Ex. 4.** L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable. Une numérotation possible de ses éléments est la suivante :



On numérote successivement tous les couples  $(i, j)$  de  $\mathbb{N}^2$  tels que  $i + j = 0$ , puis  $i + j = 1$ , puis  $i + j = 2$ , etc.

### Proposition 1

Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

Démonstration page 592

**Principe de démonstration.** Si  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$ , on construit par récurrence une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $a_0 = \min A$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \min \{x \in A : x > a_n\}$$

et l'on vérifie que  $n \mapsto a_n$  est une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ .

**Ex. 5.** L'ensemble des entiers pairs, l'ensemble des entiers impairs, l'ensemble des nombres premiers sont dénombrables.

### Définition 2

Un ensemble est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable.

**Remarque** Pour démontrer qu'un ensemble est dénombrable, il suffit donc de démontrer qu'il est au plus dénombrable et infini.

**Ex. 6.** Toute partie de  $\mathbb{N}$  est au plus dénombrable.

### Proposition 2

Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

Démonstration page 592

### Corollaire 3

Un ensemble  $E$  est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

Démonstration page 592

## Chapitre 14. Dénombrabilité

Exo  
14.1

**Ex. 7.** L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable. En effet, il est infini et l'application  $(p, q) \mapsto 2^p 3^q$  est injective de  $\mathbb{N}^2$  dans  $\mathbb{N}$  par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

**Ex. 8.** S'il existe une injection  $f$  de  $E$  dans un ensemble au plus dénombrable  $F$ , alors  $E$  est au plus dénombrable. En effet, il existe une injection  $g$  de  $F$  dans  $\mathbb{N}$ , donc  $g \circ f$  est une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

### Corollaire 4

Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

### Proposition 5

Un ensemble *non vide*  $A$  est au plus dénombrable si, et seulement s'il existe une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ .

Démonstration page 592

### Corollaire 6

L'image d'un ensemble au plus dénombrable par une application est au plus dénombrable.

Démonstration page 593

**Point méthode** Pour montrer qu'un ensemble infini  $A$  est dénombrable, on peut :

- exhiber une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$  ;
- exhiber une injection de  $A$  dans  $\mathbb{N}$  (ou dans un ensemble dénombrable) ;
- exhiber une surjection de  $\mathbb{N}$  (ou d'un ensemble dénombrable) sur  $A$ .

## II Opérations sur les ensembles dénombrables

### 1 Produit cartésien

#### Proposition 7

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

**Démonstration.** Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles dénombrables ainsi qu'une bijection  $f$  de  $A$  sur  $\mathbb{N}$  et une bijection  $g$  de  $B$  sur  $\mathbb{N}$ .

Alors l'application  $h : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$  est une bijection de  $A \times B$  sur  $\mathbb{N}^2$ , d'application réciproque  $(p, q) \mapsto (f^{-1}(p), g^{-1}(q))$ . Comme  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable (cf. exemple 7), on en déduit que  $A \times B$  est dénombrable.  $\square$

**Ex. 9.** Comme  $\mathbb{Z}$  est dénombrable,  $\mathbb{Z}^2$  est dénombrable.

**Ex. 10.** L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

En effet, on a vu que  $\mathbb{Z}$  était dénombrable, ainsi que  $\mathbb{N}^*$  comme partie infinie de  $\mathbb{N}$  (cf. proposition 1 de la page précédente) donc  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  est dénombrable. Ainsi  $\mathbb{Q}$  est au plus dénombrable (donc dénombrable puisqu'infini) comme image de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  par l'application  $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ .

On a le même résultat pour les ensembles au plus dénombrables.

**Ex. 11.**

- Le produit cartésien de deux ensembles  $A$  et  $B$  au plus dénombrables est au plus dénombrable. On reprend le principe de la démonstration précédente, en considérant cette fois-ci des injections  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ . L'application  $h : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$  est alors une injection de  $A \times B$  dans  $\mathbb{N}^2$ , donc  $A \times B$  est au plus dénombrable, puisque  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.
- De plus,  $A \times B$  est dénombrable si, et seulement si, l'un des ensembles est dénombrable et l'autre non vide. En effet :
  - si par exemple  $A$  est non vide et  $B$  est infini, alors en fixant  $a \in A$ , l'ensemble  $A \times B$  est infini puisqu'il contient  $\{a\} \times B$  qui est en bijection avec  $B$ , donc infini;
  - si l'un des deux ensembles est vide, alors  $A \times B$  est vide ; si  $A$  et  $B$  sont finis, alors  $A \times B$  est fini.

**Corollaire 8**

Le produit cartésien d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables est dénombrable.

**Ex. 12.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les ensembles  $\mathbb{N}^n$  et  $\mathbb{Q}^n$  sont dénombrables.

## 2 Union

**Proposition 9**

Exo  
14.2

La réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

**Démonstration.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'ensembles au plus dénombrables indexée par un ensemble  $I$  au plus dénombrable. Quitte à supprimer les  $A_i$  qui sont vides (ce qui ne change pas la réunion), on peut supposer tous les  $A_i$  non vides. En considérant, pour tout  $i \in I$ , une surjection  $f_i$  de  $\mathbb{N}$  sur  $A_i$ , on construit une surjection de  $f : I \times \mathbb{N}$  sur  $\bigcup_{i \in I} A_i$  en posant :

$$\forall (i, n) \in I \times \mathbb{N} \quad f(i, n) = f_i(n).$$

Comme  $I \times \mathbb{N}$  est au plus dénombrable, il en est de même de  $\bigcup_{i \in I} A_i$  d'après le corollaire 6 de la page précédente.  $\square$

**Ex. 13.** Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $\mathbb{C}$  au plus dénombrables, alors :

$$A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$$

est au plus dénombrable. En effet, on peut écrire :

$$A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B).$$

Chaque ensemble  $a + B$  est en bijection avec  $B$  donc est au plus dénombrable et  $A + B$  apparaît comme la réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

## Chapitre 14. Dénombrabilité

**Ex. 14.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite réglée si l'existe une suite  $(f_n)$  de fonctions en escalier sur  $[a, b]$  qui converge uniformément vers  $f$ .

On sait qu'alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $D_n$  des points de discontinuité de  $f_n$  est fini, donc l'ensemble  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$  est au plus dénombrable, car union dénombrable d'ensembles

finis. Si  $x \in [a, b] \setminus D$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x$  et, comme  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , on en déduit que  $f$  est continue en  $x$ . Ainsi, l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est inclus dans  $D$ , donc au plus dénombrable.

**Remarque** En particulier, une union finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

**Ex. 15.** Si  $A$  est au plus dénombrable, alors  $A \cup \mathbb{N}$  est dénombrable, car au plus dénombrable et infini. Par conséquent, tout ensemble au plus dénombrable peut être inclus dans un ensemble dénombrable.

### Proposition 10

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille sommable de nombres complexes, où  $I$  est un ensemble non nécessairement dénombrable. Alors l'ensemble  $\{i \in I : a_i \neq 0\}$  (**support** de la famille  $(a_i)_{i \in I}$ ) est au plus dénombrable.

Démonstration page 593

## III Exemples d'ensembles infinis non dénombrables

L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels est dénombrable, comme on l'a vu précédemment. Il n'en est pas de même de  $\mathbb{R}$ .

### Proposition 11

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

Démonstration (non exigible) page 593

**Ex. 16.** L'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  des nombres irrationnels n'est pas dénombrable. En effet, s'il l'était, alors  $\mathbb{R}$  serait dénombrable, car union de deux ensembles dénombrables,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Ex. 17.** Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $a < b$ , alors  $]a, b[$  n'est pas dénombrable, car il est en bijection avec  $\mathbb{R}$ .

En effet, si par exemple  $f$  est une bijection affine de  $]a, b[$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , alors  $\tan \circ f$  est une bijection de  $]a, b[$  sur  $\mathbb{R}$ .

On en déduit qu'*a fortiori*, toute partie de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide n'est pas dénombrable. C'est vrai en particulier pour tout intervalle contenant au moins deux points.

**Ex. 18.** L'exemple de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  montre qu'il existe des parties de  $\mathbb{R}$  d'intérieur vide qui ne sont pas dénombrables.

**Lemme 12**

Soit  $E$  un ensemble. Il n'existe aucune surjection de  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .

Démonstration page 593.

**Principe de démonstration.** Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ , on montre que  $X = \{x \in E : x \notin f(x)\}$  n'a pas d'antécédent par  $f$ .

Exo  
14.4

**Corollaire 13**

L'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  n'est pas dénombrable.

**Corollaire 14**

L'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable.

**Démonstration.** On a vu en première année que, pour tout ensemble  $E$ , l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  est en bijection avec  $\{0, 1\}^E$  par l'application qui associe à toute partie de  $E$  sa fonction indicatrice.

Donc  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  est en bijection avec  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  qui n'est pas dénombrable.  $\square$

Exo  
14.5

**Remarques**

- On a vu que les deux ensembles non dénombrables  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  étaient en bijection. On peut montrer qu'ils sont également en bijection avec  $\mathbb{R}$ .
- En revanche,  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  ne sont pas en bijection d'après le lemme 12, alors qu'ils ne sont ni l'un ni l'autre dénombrables.

## Démonstrations

**Proposition 1** Soit  $A$  une partie infinie de  $\mathbb{N}$ .

Commençons par remarquer que  $A$  est non vide (l'ensemble vide est fini) et non majorée. En effet, si elle était majorée par un certain entier  $n$ , alors elle serait contenue dans l'ensemble fini  $\llbracket 0, n \rrbracket$  donc également finie.

Construisons par récurrence une suite strictement croissante  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- Comme  $A$  est non vide, elle possède un plus petit élément que l'on note  $a_0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ ; supposons  $a_0, \dots, a_n$  construits. La partie  $A$  n'est pas majorée par  $a_n$ , donc l'ensemble  $\{x \in A : x > a_n\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Il admet par conséquent un plus petit élément, noté  $a_{n+1}$ , qui vérifie donc  $a_{n+1} > a_n$ .

Par construction, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, donc l'application  $n \mapsto a_n$  est une injection de  $\mathbb{N}$  dans  $A$ . Montrons qu'elle est surjective.

Soit  $x \in A$ . La partie  $\{a_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathbb{N}$  étant infinie, elle n'est pas majorée par  $x$ . Il existe donc des entiers naturels  $k$  tels que  $a_{k+1} > x$ ; notons  $n$  le plus petit d'entre eux. Alors  $a_n \leq x$ : si  $n = 0$ , cela vient de la définition de  $a_0$ , sinon, cela vient du caractère minimal de  $n$ . On a donc  $a_n \leq x < a_{n+1}$ .

Or,  $a_{n+1} = \min\{y \in A : y > a_n\}$  et  $x \in A$ . Donc on ne peut pas avoir  $a_n < x < a_{n+1}$ . Il s'ensuit que  $x = a_n$ . D'où la surjectivité requise.

L'application  $n \mapsto a_n$  est donc une bijection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ .

**Proposition 2** Si un ensemble  $E$  est au plus dénombrable, il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$  de la forme  $\llbracket 1, n \rrbracket$  s'il est fini et avec  $\mathbb{N}$  sinon.

Réciproquement, si  $E$  est en bijection avec une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ , soit  $I$  est finie et  $E$  est lui-même fini, soit  $I$  est dénombrable et  $E$  est lui-même dénombrable.

**Corollaire 3** On utilise la caractérisation de la proposition 2 de la page 587.

- Si  $E$  est au plus dénombrable, il existe une bijection  $f$  de  $E$  sur une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ . Si  $i$  est l'injection canonique  $x \mapsto x$  de  $I$  dans  $\mathbb{N}$ , alors  $i \circ f$  est une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .
- Réciproquement, si  $f$  est une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ , l'application  $E \rightarrow f(E)$  est  $x \mapsto f(x)$

une bijection de  $E$  sur  $f(E)$ , qui est une partie de  $\mathbb{N}$ , donc  $E$  est au plus dénombrable.

**Proposition 5**

- Supposons  $A$  au plus dénombrable.
  - \* Si  $A$  est infini, il est dénombrable et il existe une bijection  $f$  de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ .
  - \* Sinon, notons  $n$  son cardinal. Comme  $A$  est non vide, on a  $n \geq 1$  et l'on peut fixer un élément  $x_0$  de  $A$ .

Considérons une bijection  $f$  de  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  dans  $A$  et prolongeons  $f$  à  $\mathbb{N}$  en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \quad f(k) = x_0.$$

On obtient ainsi une application de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ , surjective puisque sa restriction à  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  est déjà surjective.

- Soit  $f$  une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ . Comme  $f$  est surjective, on a  $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$  pour tout  $a \in A$ . On peut donc définir :

$$\begin{aligned} g : A &\longrightarrow \mathbb{N} \\ a &\longmapsto \min f^{-1}(\{a\}). \end{aligned}$$

Par définition de  $g$ , on a  $f(g(a)) = a$ , pour tout  $a \in A$ , ce qui entraîne l'injectivité de  $g$ . D'après le corollaire 3 de la page 587, on en déduit que  $A$  est au plus dénombrable.

**Corollaire 6** Soit  $E$  un ensemble au plus dénombrable,  $f$  une application définie sur  $E$  et  $A = f(E)$ .

- Si  $E$  est non vide, il existe une surjection  $g$  de  $\mathbb{N}$  sur  $E$  et l'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$  est une surjection de  $\mathbb{N}$  sur  $A$ , donc  $A$  est au plus dénombrable.
- Si  $E = \emptyset$ , alors  $A = \emptyset$  donc  $A$  est fini.

**Proposition 10** On pose  $M = \sum_{i \in I} |a_i|$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $J$  une partie finie de l'ensemble  $I_\varepsilon = \{i \in I : |a_i| \geq \varepsilon\}$ . On a :

$$M \geq \sum_{i \in J} |a_i| \geq \varepsilon \operatorname{card} J.$$

On en déduit que toutes les parties finies de  $I_\varepsilon$  ont au maximum  $\left\lfloor \frac{M}{\varepsilon} \right\rfloor$  éléments, ce qui prouve que  $I_\varepsilon$  est fini (et de cardinal inférieur à  $\left\lfloor \frac{M}{\varepsilon} \right\rfloor$ ).

Le support de  $(a_i)_{i \in I}$  est la réunion des  $I_{1/n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . En tant que réunion dénombrable d'ensembles finis, il est donc au plus dénombrable.

**Proposition 11** Elle est basée sur le lemme suivant.

**Lemme**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

Il existe au moins un réel  $n$  n'appartenant pas à  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Démonstration.** On construit par récurrence deux suites adjacentes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \notin [a_n, b_n].$$

- Posons, par exemple,  $a_0 = u_0 + 1$  et  $b_0 = u_0 + 2$ .
- Supposons construits  $a_n < b_n$  tels que  $u_n \notin [a_n, b_n]$ .

Posons  $c_n = \frac{2a_n + b_n}{3}$  et  $d_n = \frac{a_n + 2b_n}{3}$ ; au moins l'un des trois segments  $[a_n, c_n]$ ,  $[c_n, d_n]$  et  $[d_n, b_n]$  ne contient pas  $u_{n+1}$ . Cela permet de définir  $a_{n+1} < b_{n+1}$  tels que :

$$u_{n+1} \notin [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{3}.$$

Les inclusions  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  montrent que la suite  $(a_n)$  est croissante, que la suite  $(b_n)$  est décroissante et les relations  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n)$  donnent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ .

Donc les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes. Leur limite commune  $\ell$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \in [a_n, b_n] \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \neq u_n.$$

□

D'après le lemme qui précède, on ne peut trouver aucune suite  $(u_n)$  telle que  $\mathbb{R} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , donc  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Lemme 12** Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $\mathcal{P}(E)$ .

Posons  $X = \{x \in E : x \notin f(x)\}$  et supposons que  $X$  admette un antécédent  $a$  par  $f$ . On a alors, par définition de  $X$  :

$$a \in X \iff a \notin f(a) \iff a \notin X,$$

ce qui est contradictoire. Ce raisonnement par l'absurde montre que  $X$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  et donc que  $f$  n'est pas surjective.

## S'entraîner et approfondir

**14.1** Montrer que l'ensemble  $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  des suites presque nulles d'entiers naturels est dénombrable.  
 $\rightarrow_{588}$

**14.2** Montrer que l'ensemble des parties finies de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.  
 $\rightarrow_{589}$

**14.3** Montrer qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
 $\rightarrow_{590}$  et  $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ .

**14.4** Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}(\mathbb{N})$  des permutations de  $\mathbb{N}$  n'est pas dénombrable.  
 $\rightarrow_{591}$

*Indication.* On pourra construire une injection de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{N})$ .

**14.5** Montrer que si un ensemble  $A$  possède au moins deux éléments, alors  $A^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable.  
 $\rightarrow_{591}$

- 14.6** 1. Montrer qu'un ensemble est infini si, et seulement s'il contient une partie dénombrable.  
 2. Montrer que si  $A$  est un ensemble au plus dénombrable et  $B$  un ensemble infini, alors  $A \cup B$  est en bijection avec  $B$ .

\* **14.7** Soit  $E$  un espace vectoriel muni d'une base dénombrable  $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Montrer que toute base de  $E$  est dénombrable.

**14.8** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application croissante et  $D$  l'ensemble des points de discontinuité de  $f$ .

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a < b$  et  $I = ]a, b[$ .

(a) Montrer que la famille  $\left( \lim_{x \rightarrow I^+} f - \lim_{x \rightarrow I^-} f \right)_{x \in I}$  est sommable.

(b) En déduire que l'ensemble  $D \cap ]a, b[$  est au plus dénombrable.

2. Montrer que  $D$  est au plus dénombrable.

**14.9** 1. (a) Montrer qu'un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  de dimension finie non nulle est dénombrable.

(b) Montrer que  $\mathbb{Q}[X]$  est dénombrable.

2. On appelle **nombre algébrique** tout nombre complexe racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit **transcendant**.

Montrer qu'il existe des réels transcendants.

## Solutions des exercices

**14.1** Soit  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une énumération strictement croissante des nombres premiers. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (v_k)_{k \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{v_k} \end{array}$$

est bien définie (si  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est presque nulle,  $\prod_{k \in \mathbb{N}} p_k^{v_k}$  peut être vu comme un produit fini puisque seul un nombre fini de ses termes sont différents de 1) et est injective par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

**Remarque** C'est même une bijection de  $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$  sur  $\mathbb{N}^*$  par existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

**14.2** Une partie  $A$  de  $\mathbb{N}$  est finie si, et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ . On en déduit que l'ensemble  $\mathcal{P}_f$  des parties finies de  $\mathbb{N}$  peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

Il est donc au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis. Il est infini car il contient l'ensemble  $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$  des singletons de  $\mathbb{N}$ , qui est en bijection avec  $\mathbb{N}$ , donc il est dénombrable.

**14.3** On raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle application existe.

L'ensemble  $f(\mathbb{Q})$  est au plus dénombrable car c'est l'image par  $f$  d'un ensemble dénombrable. De même,  $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  est au plus dénombrable car inclus dans  $\mathbb{Q}$ . On en déduit que  $f(\mathbb{R})$  est au plus dénombrable, comme union de deux ensembles au plus dénombrables. Mais par ailleurs, comme  $f$  est continue,  $f(\mathbb{R})$  est un intervalle. Si cet intervalle contenait au moins deux points, il serait infini et non dénombrable d'après l'exemple 17 de la page 590, ce qui contredit ce qui précède. Donc  $f$  est constante.

Si  $f(\mathbb{R}) = \{a\}$ , l'hypothèse impose  $a \in \mathbb{Q}$  et  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . C'est impossible.

**14.4** Pour  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , on considère l'application  $f_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_A(2n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \in A \\ 2n & \text{si } n \notin A \end{cases} \quad \text{et} \quad f_A(2n+1) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \in A \\ 2n+1 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

L'application  $f_A$  est bijective car involutive.

L'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{N}) \\ A & \longmapsto & f_A \end{array}$  est injective, car  $f_A$  détermine de manière unique  $A$ .

En effet, on a  $A = \{n \in \mathbb{N} : f_A(2n) = 2n+1\}$ . Si  $\mathcal{S}(\mathbb{N})$  était dénombrable, alors  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  serait au plus dénombrable, ce qui est faux d'après le corollaire 13 de la page 591.

- 14.5**
- Le cas où  $A = \{0, 1\}$  a été vu dans le cours (cf. corollaire 14 de la page 591).
  - Lorsque  $A$  est un ensemble à deux éléments, en considérant une bijection  $\varphi$  de  $\{0, 1\}$  sur  $A$ , l'application  $f \mapsto \varphi \circ f$  réalise une bijection de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sur  $A^{\mathbb{N}}$ . Donc  $A^{\mathbb{N}}$  n'est pas dénombrable.
  - Soit  $A$  un ensemble possédant au moins deux éléments distincts  $a$  et  $b$ . En considérant une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\{a, b\}$  comme une application de  $\mathbb{N}$  dans  $A$ , on obtient une inclusion de  $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$  dans  $A^{\mathbb{N}}$  qui n'est donc pas dénombrable d'après le point précédent.

## Chapitre 14. Dénombrabilité

**14.6** 1. Un ensemble qui contient une partie dénombrable est évidemment infini. Réciproquement, soit  $E$  un ensemble infini. Construisons une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  distincts deux à deux.

- Comme  $E$  est infini, il est non vide, ce qui permet de choisir un élément  $a_0$  de  $E$ .
- Supposons construits  $a_0, \dots, a_n$  des éléments de  $E$  distincts deux à deux. Comme  $E$  est infini, il n'est pas égal à l'ensemble fini  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , ce qui permet de choisir un élément  $a_{n+1} \in E$  différent des précédents.

L'ensemble  $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est alors une partie dénombrable de  $E$  : elle est en bijection avec  $\mathbb{N}$  par l'application  $n \mapsto a_n$  qui est injective par construction et surjective par définition de  $A$ .

2. Soit  $A$  un ensemble au plus dénombrable et  $B$  un ensemble infini. On considère l'ensemble  $A' = A \setminus B$ , qui est au plus dénombrable, car inclus dans  $A$ . On a alors  $A \cup B = A' \cup B$ .

D'après la première question, il existe une partie  $C$  de  $B$  dénombrable. Alors,  $A' \cup C$  est également dénombrable comme réunion de deux ensembles au plus dénombrables, dont l'un au moins est infini.

Considérons donc une bijection de  $C$  sur  $A' \cup C$  et prolongeons-la à  $B$  par l'identité sur  $B \setminus C$ . Comme  $A' \cup C$  et  $B \setminus C$  sont disjoints, on obtient alors une bijection de  $B$  sur  $A' \cup B = A \cup B$ .

**14.7** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille libre. Montrons que  $I$  est au plus dénombrable.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $I_n = \{i \in I : x_i \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)\}$ . Il s'agit d'un ensemble fini, car  $(x_i)_{i \in I_n}$  est une famille libre de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$  de dimension finie. De plus, comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , tout vecteur de  $E$  appartient à l'un des sous-espaces vectoriels  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ . On en déduit que  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  et donc que  $I$  est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

En particulier, toute base de  $E$  est au plus dénombrable et par suite dénombrable puisque  $E$  n'est pas de dimension finie.

**14.8** 1. (a) Comme  $f$  est croissante, elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche. Soit  $x_1 < \dots < x_n$  des points distincts de  $I$ . On a alors :

$$\lim_{a^+} f \leqslant \lim_{x_1^-} f \leqslant \lim_{x_1^+} f \leqslant \dots \leqslant \lim_{x_n^-} f \leqslant \lim_{x_n^+} f \leqslant \lim_{b^-} f.$$

Les segments  $[\lim_{x_i^-} f, \lim_{x_i^+} f]$ , pour  $i \in [1, n]$ , sont d'intérieurs disjoints et inclus

dans  $[\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f]$ , donc on a :

$$\sum_{i=1}^n \left( \lim_{x_i^+} f - \lim_{x_i^-} f \right) \leqslant \lim_{b^-} f - \lim_{a^+} f.$$

Cette somme est majorée par une constante, indépendante du choix de  $n$  et de  $x_1, \dots, x_n$ , donc la famille de réels positifs  $\left( \lim_{x_i^+} f - \lim_{x_i^-} f \right)_{x_i \in I}$  est sommable.

(b) La famille  $\left( \lim_{x_i^+} f - \lim_{x_i^-} f \right)_{x_i \in I}$  étant sommable, son support  $S$  est au plus dénombrable, d'après la proposition 10 de la page 590. Mais, pour tout  $x \in ]a, b[$ , on a :

$$x \in D \iff \lim_{x^-} f < \lim_{x^+} f \iff x \in S.$$

Ainsi  $D \cap ]a, b[$ , qui est égal à  $S$ , est au plus dénombrable.

2. On a  $D = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} D \cap ]n, n+2[$ , donc  $D$  est au plus dénombrable, car union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
- 14.9** 1. (a) Soit  $E$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}^n$ , donc en particulier en bijection avec  $\mathbb{Q}^n$ , qui est dénombrable car produit cartésien d'une famille finie non vide d'ensembles dénombrables (cf. corollaire 8 de la page 589).
- (b) On a  $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ , donc  $\mathbb{Q}[X]$  est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables d'après la question 1.
2. Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des nombres algébriques. On a  $\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} P^{-1}(\{0\})$ , qui est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis (tout polynôme non nul a un nombre fini de racines). De plus,  $\mathcal{A}$  est infini puisqu'il contient  $\mathbb{Q}$  : tout rationnel  $r$  est racine de  $X - r \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ . Donc  $\mathcal{A}$  est dénombrable.
- Comme  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, on en déduit que  $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}$  et donc qu'il existe au moins un réel transcendant (et même une infinité non dénombrable).

**Remarque** Cette existence a ainsi été montrée de façon non constructive. Il est possible d'en exhiber explicitement : on peut démontrer que  $e$  et  $\pi$  sont transcendants.



# Chapitre 15 : Espaces probabilisés

<b>I</b>	<b>Espaces probabilisés . . . . .</b>	<b>600</b>
1	Espaces probabilisables . . . . .	600
2	Probabilités . . . . .	602
3	Espaces probabilisés discrets . . . . .	606
4	Probabilité sur un univers non dénombrable . . . . .	607
<b>II</b>	<b>Variables aléatoires discrètes . . . . .</b>	<b>608</b>
1	Définition . . . . .	608
2	Loi d'une variable aléatoire discrète . . . . .	609
3	Lois usuelles . . . . .	611
<b>III</b>	<b>Couples de variables aléatoires . . . . .</b>	<b>613</b>
1	Définitions . . . . .	613
2	Loi conjointe . . . . .	614
3	Lois marginales . . . . .	614
4	Généralisation aux $n$ -uplets de variables aléatoires . . . . .	614
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>622</b>

# Espaces probabilisés

En première année ont été étudiés les espaces probabilisés finis. Les concepts fondamentaux des probabilités (univers, événements, probabilités, variables aléatoires), qui sont les mêmes que dans le cas fini, vont être définis dans des espaces probabilisés quelconques. L'axiomatisation du calcul des probabilités ici présentée est due principalement au mathématicien russe André Kolmogorov (*Fondements de la théorie des probabilités*, 1933).

## I Espaces probabilisés

### 1 Espaces probabilisables

#### Modélisation d'une expérience aléatoire

- Comme dans le cours de première année, il s'agit de modéliser une expérience aléatoire. On associe à une telle expérience un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience, appelé **univers**. L'univers n'est plus supposé fini.

**Ex. 1.** On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile et l'on s'intéresse au nombre de lancers nécessaires. L'univers que l'on peut associer à cette expérience est  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , car *a priori* il n'est pas exclu de ne jamais obtenir pile.

**Ex. 2.** On veut modéliser l'expérience fictive consistant à lancer une pièce de monnaie une infinité dénombrable de fois. L'univers que l'on peut associer à cette expérience est l'ensemble  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  des suites à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , où 1 représente pile et 0 face; le terme d'indice  $n$  de la suite est le résultat du  $n$ -ième lancer. Cet ensemble n'est pas dénombrable (cf. le corollaire 14 de la page 591).

On fait aussi appel à un tel modèle quand on effectue une suite de lancers dont le nombre n'est pas fixé *a priori*: par exemple si on lance la pièce tant que la différence entre le nombre de piles et de faces est inférieure à 2.

- À une propriété que peut vérifier un résultat de l'expérience, on associe une partie de l'univers  $\Omega$  que l'on appelle un événement. Dans le cas fini, on avait considéré que toute partie de  $\Omega$  représentait un événement. Dans le cas où  $\Omega$  est infini et non dénombrable, cela conduit parfois à des difficultés mathématiques dans la définition d'une probabilité. On restreint alors l'ensemble des événements à une partie stricte de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Cette partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$  doit vérifier certaines propriétés :

- \* l'ensemble  $\Omega$  doit être un événement (l'événement certain) ;
- \* si  $A$  est un événement, alors  $\bar{A}$ , complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$ , doit être un événement (événement contraire) ;
- \* on impose une autre condition qui peut sembler moins naturelle : si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements, alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est un événement ; en effet, la stabilité par réunion finie risque d'être insuffisante.

**Ex. 3.** Si l'on cherche à modéliser le jeu de pile ou face infini et que l'on considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'événement  $A_n$  : « le  $n$ -ième tirage donne pile », on pourra par exemple s'intéresser à l'événement « on obtient au moins un pile dans la suite des tirages » qui est  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ .

## Tribu

### Définition 1

Soit  $\Omega$  un ensemble non vide. On appelle **tribu** sur  $\Omega$  tout sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  tel que :

- $\Omega$  appartient à  $\mathcal{A}$  ;
- pour tout élément  $A$  de  $\mathcal{A}$ , son complémentaire  $\bar{A}$  appartient à  $\mathcal{A}$  ;
- pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

**Remarque** Au lieu de tribu, on dit aussi  **$\sigma$ -algèbre**, d'où la notation  $\mathcal{A}$  adoptée par le programme.

### Définition 2

Un **espace probabilisable** est un couple  $(\Omega, \mathcal{A})$ , où  $\Omega$  est un ensemble quelconque non vide et  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $\Omega$ .

L'ensemble  $\Omega$  est appelé **l'univers** et tout élément de  $\mathcal{A}$  est appelé **événement**.

**Ex. 4.** L'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu sur  $\Omega$ , appelée **tribu discrète**.

**Ex. 5.** Pour toute partie  $A$  de  $\Omega$ , distincte de  $\emptyset$  et de  $\Omega$ , l'ensemble  $\{\Omega, A, \bar{A}, \emptyset\}$  est une tribu sur  $\Omega$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

### Opérations sur les événements

#### Proposition 1

Toute tribu contient l'ensemble vide, et est stable par union et intersection au plus dénombrable, ainsi que par différence.

Démonstration page 616

**Remarque** On emploie le même vocabulaire que dans les espaces probabilisés finis. En particulier, deux événements  $A$  et  $B$  tels que  $A \cap B = \emptyset$  sont dits **incompatibles**.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements d'un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

**Ex. 6.** Soit  $B$  l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à une infinité d'événements  $A_n$ . Considérons  $\overline{B}$ , ensemble des éléments de  $\Omega$  appartenant seulement à un nombre fini d'événements  $A_n$ . Alors, on a, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\omega \in \overline{B} \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad \omega \notin A_p \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad \omega \in \overline{A_p}.$$

On a donc  $\overline{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p}$ , d'où l'on déduit  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p$ . Comme une tribu est stable par union et intersection dénombrable,  $B$  est un événement.

**Ex. 7.** Soit  $C$  l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à tous les événements  $A_n$  sauf un nombre fini. On a, de même, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\omega \in C \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad \omega \in A_p$$

et donc  $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p$ , d'où l'on conclut que  $C$  est un événement.

## 2 Probabilités

Comme dans le cas d'un univers fini, une probabilité associe à un événement un réel appartenant à  $[0, 1]$ . Elle est donc définie sur une tribu. On impose une propriété d'additivité plus riche que dans les univers finis.

### Définitions

#### Définition 3

On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{A}$  dans  $[0, 1]$  vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ;
- pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements *deux à deux incompatibles*, la série de terme général  $\mathbb{P}(A_n)$  converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

### Remarques

- La seconde propriété est appelée  **$\sigma$ -additivité** ou additivité dénombrable.
- Il résulte de la définition que les événements sont les parties de  $\Omega$  qui ont une probabilité.

**Définition 4**

Un **espace probabilisé** est un triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , où  $(\Omega, \mathcal{A})$  est un espace probabilisable et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Dans la suite, sauf mention contraire,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  désignera un espace probabilisé.

**Propriétés****Théorème 2**

On a les propriétés suivantes :

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  ;
2. pour toute famille au plus dénombrable d'événements deux à deux incompatibles  $(A_i)_{i \in I}$ , la famille  $(\mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$  est sommable et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) ;$$

3. pour tout événement  $A$  :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) ;$$

4. pour tout couple  $(A, B)$  d'événements vérifiant  $A \subset B$  :

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \quad \text{et ainsi} \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B);$$

cette propriété s'appelle **croissance** de  $\mathbb{P}$  ;

5. pour tout couple  $(A, B)$  d'événements :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

**Démonstration page 616**

**Remarque** Une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  telle que nous l'avons définie en première année est un cas particulier de la définition donnée pour un espace probabilisable quelconque, la tribu des événements étant  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Exo  
15.2

**Définition 5**

- Tout événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Tout événement de probabilité 1 est dit **presque sûr** ou **presque certain**.

**Systèmes quasi-complets d'événements**

La définition suivante généralise celle qui a été donnée en première année.

**Définition 6**

On appelle **système complet d'événements** d'un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute famille au plus dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements deux à deux incompatibles tels que  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

**Ex. 8.** Pour tout événement  $A$ , la famille  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements.

**Ex. 9.** Si l'univers  $\Omega$  est au plus dénombrable et muni de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$ , la famille  $(\{\omega\}_{\omega \in \Omega})$  est un système complet d'événements.

### Définition 7

On appelle **système quasi-complet d'événements** d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  toute famille au plus dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements deux à deux incompatibles tels que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$ .

### Remarques

- Un système complet d'événements est donc un système quasi-complet d'événements.
- La notion de système complet d'événements ne dépend pas de la probabilité, contrairement à celle de système quasi-complet d'événements.

### Proposition 3

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est un système quasi-complet d'événements, alors :

- la famille  $(\mathbb{P}(A_i))_{i \in I}$  est sommable et  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$  ;
- pour tout événement  $B$ , la famille  $(\mathbb{P}(A_i \cap B))_{i \in I}$  est sommable et :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

Démonstration page 617

La propriété suivante est une conséquence très forte de la  $\sigma$ -additivité.

### Théorème 4 (Continuité monotone)

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements.

1. **Continuité croissante** : si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, c'est-à-dire vérifie  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

2. **Continuité décroissante** : si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, c'est-à-dire vérifie  $A_{n+1} \subset A_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration page 617

**Corollaire 5**

Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Démonstration page 618

**Proposition 6 (Sous-additivité de  $\mathbb{P}$ )**

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille au plus dénombrable d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration page 618

**Remarques**

- Cette inégalité est aussi appelée **inégalité de Boole**.
- On n'a pas nécessairement  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) < +\infty$ , mais si la somme est supérieure à 1, l'inégalité est sans intérêt.

**Corollaire 7**

Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable. Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Démonstration page 619

**Attention** L'hypothèse « au plus dénombrable » est indispensable :

- une réunion non dénombrable d'événements n'a aucune raison *a priori* d'être un événement et donc d'avoir une probabilité ;
- même si c'est un événement, il peut avoir une probabilité non nulle.

**Ex. 10. Premier lemme de Borel-Cantelli**

Soit  $(A_n)$  une suite d'événements. On suppose que la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge.

Montrons que l'événement  $B = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$  (c'est-à-dire, d'après l'exemple 6 de la page 602, l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à une infinité d'événements  $A_n$ ) est négligeable.

La suite  $\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right).$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right) \leq \sum_{p=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p).$$

On reconnaît dans  $\sum_{p=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p)$  le reste d'une série convergente, qui tend donc vers 0.

On en déduit  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

### Union d'événements non incompatibles

Pour calculer la probabilité d'une réunion finie d'événements, il existe une formule qui généralise la formule  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$  obtenue pour deux événements. Elle n'est pas au programme. Pour une démonstration et une utilisation, voir l'exercice 17.7 de la page 704.

## 3 Espaces probabilisés discrets

### Définition 8

Une **distribution de probabilités discrète** sur un ensemble  $\Omega$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{R}_+$ , indexée par  $\Omega$ , sommable et de somme 1. Le **support** d'une distribution de probabilités discrète  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  sur  $\Omega$  est  $\{\omega \in \Omega : p_\omega \neq 0\}$ .

### Proposition 8

Le support d'une distribution de probabilités discrète est au plus dénombrable.

**Démonstration.** C'est une propriété générale des familles sommables (cf. proposition 10 de la page 590) : leur support est au plus dénombrable.  $\square$

### Proposition 9

Si  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilités discrète sur  $\Omega$ , alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{aligned}$$

est une probabilité sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ , appelée **probabilité associée à la distribution**  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ . Elle vérifie :  $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ .

Démonstration page 619.

### Définition 9

Un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , où  $\mathbb{P}$  est la probabilité associée à une distribution de probabilités discrète sur  $\Omega$  est appelé **espace probabilisé discret**.

### Théorème 10

Soit  $\Omega$  un ensemble au plus dénombrable et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . Si l'on pose  $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ , alors  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilités discrète sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  est la probabilité associée à cette distribution.

Démonstration page 619.

**Remarque** Dans le cas d'un univers fini, on peut en particulier définir une probabilité pour laquelle les événements élémentaires ont tous même probabilité (probabilité uniforme). Ce n'est pas possible pour un univers dénombrable. En effet, si  $\Omega$  est dénombrable et si  $p_\omega$  est une constante, soit cette constante n'est pas nulle et la famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  n'est pas sommable, soit elle est nulle et  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega$  vaut 0 et pas 1.

Considérons le cas  $\Omega = \mathbb{N}$ . Une distribution de probabilités discrète sur  $\mathbb{N}$  est simplement une suite  $(p_n)$  de réels positifs telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ .

**Ex. 11.** Si  $\lambda > 0$ , on définit une probabilité sur  $\mathbb{N}$ , en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

En effet, on a  $p_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$ .

**Ex. 12.** Si  $p \in ]0, 1[$ , on définit une probabilité sur  $\mathbb{N}$ , en posant :

$$p_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = (1-p)^{n-1} p.$$

Exo  
15.3

En effet, on a  $p_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$ .

## 4 Probabilité sur un univers non dénombrable

Définir une probabilité sur un univers non dénombrable est plus compliqué.

**Ex. 13. Espace probabilisé modélisant une infinité de lancers de pile ou face**

- On souhaite construire un espace probabilisé modélisant une infinité de lancers de pile ou face, aux résultats indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant  $p \in ]0, 1[$  à chaque lancer.

Il semble raisonnable de choisir comme univers l'ensemble  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  des suites  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , où 1 représente pile et 0 face ; le terme d'indice  $n$  de la suite représente le résultat du  $n$ -ième lancer. Cet ensemble n'est pas dénombrable (cf. corollaire 14 de la page 591).

On veut en particulier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \{0, 1\}$ , l'ensemble :

$$A_{n,x} = \{\omega \in \Omega : \omega_n = x\}$$

des suites de lancers dont le  $n$ -ième lancer donne  $x$  soit un événement de probabilité  $p$  (respectivement  $q = 1 - p$ ) si  $x = 1$  (respectivement  $x = 0$ ) et, pour modéliser l'indépendance des lancers, que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n \quad \mathbb{P}(A_{1,x_1} \cap \dots \cap A_{n,x_n}) = p^k q^{n-k},$$

en notant  $k$  le nombre de  $x_i$  égaux à 1.

Soit alors  $\omega \in \Omega$ . On a  $\{\omega\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_{n,\omega_n}$ . Ainsi  $\{\omega\}$  est un événement comme intersection dénombrable d'événements. De plus, on a, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_{1,\omega_1} \cap \dots \cap A_{n,\omega_n}).$$

Comme  $\mathbb{P}(A_{1,\omega_1} \cap \dots \cap A_{n,\omega_n}) \leq \max(p, q)^n$ , on en déduit :

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0.$$

Ainsi tous les singulons de  $\Omega$  sont des événements de probabilité nulle. On voit que l'espace probabilisé cherché n'est pas discret.

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

- On peut démontrer que sur un univers en bijection avec  $\mathbb{N}$ , les seules probabilités définies sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  sont les probabilités discrètes. Donc ici, on ne peut pas prendre comme tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Il semble raisonnable de munir  $\Omega$  de la tribu  $\mathcal{A}$  engendrée par l'ensemble des  $A_{n,x}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \{0, 1\}$ . La probabilité est connue sur l'ensemble des événements ne dépendant que des résultats d'un nombre fini de lancers. Il faut l'étendre à  $\mathcal{A}$ , ce qui n'a rien d'évident.
- La construction d'un tel espace probabilisé dépasse largement les objectifs du programme. Il faut retenir des remarques précédentes que dans le cas où l'on a besoin de considérer une tribu différente de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , sa construction et celle de la probabilité sont difficiles.
- Dans ce chapitre, nous admettrons, si besoin est, l'existence d'un espace probabilisé modélisant le jeu de pile ou face infini. Nous donnerons une description de cette expérience aléatoire à l'aide de suites de variables aléatoires dans le chapitre 16 (exemple 12 de la page 646).

## II Variables aléatoires discrètes

### 1 Définition

#### Définition 10

Une **variable aléatoire discrète** sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une application de  $\Omega$  dans un ensemble quelconque  $E$  telle que :

1. l'ensemble  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable ;
2. pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a  $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ .

#### Remarques

- L'univers  $\Omega$  n'est pas supposé dénombrable. Seule son image par  $X$  doit être au plus dénombrable.
- Une variable aléatoire discrète est dite **réelle** si elle est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , **complexe** si elle est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , **finie** si  $X(\Omega)$  est fini.
- L'appartenance de  $X^{-1}(\{x\})$  à  $\mathcal{A}$  signifie que c'est un événement.

#### Proposition 11

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans  $E$ . Alors pour tout partie  $A$  de  $E$ , l'ensemble  $X^{-1}(A)$  est un événement.

Démonstration page 619.

#### Notations

- Comme dans le cas d'un univers fini, l'événement  $X^{-1}(A)$  est noté :

$$\{X \in A\} \quad \text{ou} \quad (X \in A).$$

- En particulier, pour tout  $x \in E$ , l'événement  $X^{-1}(\{x\})$  est noté :

$$\{X = x\} \quad \text{ou} \quad (X = x).$$

On remarque que, pour tout  $x \in E \setminus X(\Omega)$ , on a  $\{X = x\} = \emptyset$  ; ainsi  $\{X = x\} = \emptyset$  sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de  $x$ .

**Ex. 14.** Une fonction constante sur  $\Omega$  est une variable aléatoire finie. En effet, il existe  $a$  tel que  $X(\Omega) = \{a\}$  et  $\{X = a\} = \Omega \in \mathcal{A}$ .

**Ex. 15.** Si  $A$  est un événement, alors la fonction  $\mathbb{1}_A$  est une variable aléatoire finie. En effet, on a  $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$ , qui est fini. De plus  $\{X = 1\} = A$  et  $\{X = 0\} = \bar{A}$  sont des événements.

**Ex. 16.** Si  $\Omega$  est muni de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$ , toute application définie sur  $\Omega$  est une variable aléatoire.

### Proposition 12

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $f$  une application définie sur un ensemble contenant  $X(\Omega)$ , alors  $f \circ X$  est une variable aléatoire discrète, notée  $f(X)$ .

Démonstration page 619

Exo  
15.9

## 2 Loi d'une variable aléatoire discrète

### Théorème 13

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , alors l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(X \in A)\end{aligned}$$

est une probabilité sur  $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ , appelée **loi de  $X$**  et notée  $\mathbb{P}_X$ .

Démonstration page 620

**Remarque** Il peut arriver qu'on ne connaisse pas exactement  $X(\Omega)$ , mais que l'on connaisse un ensemble  $E$  tel que  $X(\Omega) \subset E$ . Alors la loi de  $X$  apparaîtra comme une probabilité sur  $(E, \mathcal{P}(E))$  et l'on aura :  $\forall \omega \in E \setminus X(\Omega) \quad \mathbb{P}_X(\{\omega\}) = 0$ .

### Proposition 14

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète, la famille  $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements, appelé **système complet d'événements associé à  $X$** .

Démonstration page 620

**Ex. 17.** Si  $A \neq \emptyset$  et  $A \neq \Omega$ , le système complet d'événements associé à la variable  $\mathbb{1}_A$  est  $(A, \bar{A})$ .

### Proposition 15

La loi d'une variable aléatoire discrète  $X$  est déterminée de manière unique par la distribution de probabilités discrète  $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ . Plus précisément, on a pour tout  $A \subset X(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

**Démonstration.** La loi de  $X$  est une probabilité  $\mathbb{P}_X$  sur l'ensemble dénombrable  $X(\Omega)$  muni de la tribu discrète  $\mathcal{P}(X(\Omega))$ . D'après le théorème 10 de la page 606, c'est la probabilité associée à la distribution de probabilités discrète  $(\mathbb{P}_X(\{x\}))_{x \in X(\Omega)} = (\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ .

D'où l'expression de  $\mathbb{P}_X(A)$  (cf. proposition 9 de la page 606). □

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

**Remarque** La loi d'une variable aléatoire discrète n'est rien d'autre qu'une probabilité discrète sur un ensemble dénombrable. La proposition suivante montre que toute probabilité discrète sur un ensemble peut être considérée comme la loi d'une variable aléatoire discrète. Une telle probabilité est encore appelée **loi discrète**.

### Proposition 16

Soit  $E$  un ensemble et  $(p_x)_{x \in E}$  une distribution de probabilités discrète sur  $E$ . Alors il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et une variable aléatoire  $X$  sur cet espace probabilisé tels que :

$$X(\Omega) \subset E \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \mathbb{P}(X = x) = p_x.$$

Démonstration page 620

**Principe de démonstration.** On pourra choisir  $(\Omega, \mathcal{A}) = (F, \mathcal{P}(F))$  et  $X = \text{Id}_F$ , où  $F$  est le support de  $(p_x)_{x \in E}$ .

**Ex. 18.** La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est donc une probabilité sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . Elle est définie par la donnée d'une série  $\sum p_n$  à termes positifs convergente de somme 1.

### Définition 11

Une variable aléatoire est dite **presque sûrement constante** s'il existe  $a$  tel que  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ .

### Définition 12

On dit que deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  ont **même loi** si  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ . On note alors  $X \sim Y$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire et  $\mathcal{L}$  est une loi discrète, on note alors  $X \sim \mathcal{L}$  le fait que la loi de  $X$  est  $\mathcal{L}$ .

### Remarques

- Les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas nécessairement définies sur le même espace probabilisé.
- On considérera encore que  $X$  et  $Y$  ont même loi si les valeurs prises par  $X$  et  $Y$  ne diffèrent que par des valeurs de probabilité nulle.

Exo  
15.10

### Loi de $f(X)$

### Proposition 17

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $f$  une application définie sur  $X(\Omega)$ . Alors la loi de  $f(X)$  est donnée par :

$$\forall y \in f(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration page 620

### Proposition 18

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $E$  et  $f$  une application définie sur  $E$ . Si  $X \sim Y$ , alors  $f(X) \sim f(Y)$ .

Démonstration page 620

### 3 Lois usuelles

Les définitions des lois finies étudiées en première année (loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale) s'appliquent aux variables aléatoires discrètes définies dans ce chapitre.

#### Loi géométrique

##### Définition 13

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ . On dit qu'une variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  si  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .

**Remarque** On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad pq^{k-1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

**Situation type** On considère le jeu de pile ou face infini, la probabilité d'obtenir pile (succès) à chaque lancer étant  $p \in ]0, 1[$  (on pose  $q = 1 - p$ ), modélisé par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , et le temps d'attente du premier pile.

Plus précisément, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Pi_k$  l'événement « la  $k$ -ième épreuve donne pile » et l'on pose, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

- $T(\omega) = n$  (pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ) si  $\omega \in \overline{\Pi_1} \cap \dots \cap \overline{\Pi_{n-1}} \cap \Pi_n$  ; alors  $\{T = n\}$  est un événement et  $\mathbb{P}(T = n) = pq^{n-1}$  ;
- $T(\omega) = +\infty$  si, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\omega \in \overline{\Pi_n}$  ; on a donc :

$$\{T = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{\Pi_n} \in \mathcal{A},$$

et donc, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{\Pi_k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

La variable aléatoire discrète  $T$  donc prend la valeur  $+\infty$  avec une probabilité nulle et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\mathbb{P}(T = k) = pq^{k-1}$ . On dit encore que  $T$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  (voir la seconde remarque de la page 610).

Nous reviendrons sur cette situation dans l'exemple 14 de la page 647.

##### Proposition 19

Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , on a, pour tout entier naturel  $k$  :

$$\mathbb{P}(X > k) = q^k.$$

**Démonstration.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} pq^{n-1} = \frac{pq^k}{1-q} = q^k. \quad \square$$

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

**Interprétation** Ce résultat est tout à fait évident si l'on interprète une loi géométrique comme le temps d'attente d'un premier succès. L'événement  $\{X > k\}$  est « les  $k$  premières tentatives ont échoué », de probabilité  $q^k$ .

### Loi de Poisson

#### Définition 14

Soit  $\lambda > 0$ . On dit qu'une variable aléatoire réelle discrète  $X$  suit la **loi de Poisson de paramètre  $\lambda$** , si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

**Remarque** On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car :

Exo  
15.11

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1.$$

### Interprétation en termes d'événements rares

Nous utiliserons le lemme suivant.

#### Lemme 20

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes telles que  $X_n$  suive la loi binomiale de paramètre  $(n, p_n)$ . On suppose que la suite  $(np_n)$  converge vers un réel  $\lambda > 0$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Démonstration page 621

Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale avec  $n$  grand et  $p$  proche de 0, elle suit donc approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$ . C'est pourquoi l'on dit que la loi de Poisson est la **loi des événements « rares »**.

**Ex. 19.** Dans la pratique, on peut modéliser par une loi de Poisson :

- le nombre de clients se présentant dans un grand magasin ;
- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, pendant une période donnée.

En effet, si on considère le nombre de clients potentiels  $n$  d'un grand magasin et la probabilité  $p$  (supposée en première approximation constante dans cette population) qu'un de ces clients potentiels se rende effectivement dans le magasin pendant une période donnée,  $n$  est grand et  $p$  proche de 0. La variable aléatoire donnant le nombre de clients suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$  donc approximativement une loi de Poisson.

## III Couples de variables aléatoires

### 1 Définitions

#### Définition 15

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs respectivement dans  $E$  et  $E'$ , l'application :  $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$  est appelée **couple de variables aléatoires discrètes** sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

On note  $(X, Y)$  ce couple de variables aléatoires.

Les couples de variables aléatoires sont simplement les variables aléatoires à valeurs dans  $E \times E'$ , comme le prouve la proposition suivante.

#### Proposition 21

- Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans  $E$  et  $E'$ , le couple  $(X, Y)$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E \times E'$ .
- Réciproquement, toute variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E \times E'$  peut s'écrire  $(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans  $E$  et  $E'$ .

Démonstration page 621

#### Corollaire 22

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements :

$$(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est un système complet d'événements de  $\Omega$  appelé **système complet d'événements associé au couple  $(X, Y)$** .

**Démonstration.** La famille  $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire  $(X, Y)$  (cf. proposition 21). On en déduit que  $(\{X = x\} \cap \{Y = y\})_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est encore un système complet d'événements, car  $\{X = x\} \cap \{Y = y\} = \emptyset$  si  $(x, y) \in (X(\Omega) \times Y(\Omega)) \setminus (X, Y)(\Omega)$ .  $\square$

**Conséquence** Si  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires discrètes, alors :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 1.$$

**Remarque** L'événement  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$  est encore noté  $\{X = x, Y = y\}$  et sa probabilité  $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ .

**Ex. 20.** Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors  $Z = (X, Y)$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{C}^2$ .

On peut écrire  $X + Y = f(Z)$  et  $XY = g(Z)$ , où  $f$  est l'application  $(x, y) \mapsto x + y$  et  $g$  l'application  $(x, y) \mapsto xy$ , donc  $X + Y$  et  $XY$  sont des variables aléatoires discrètes, d'après la proposition 17 de la page 610.

## 2 Loi conjointe

### Définition 16

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes. La **loi conjointe** de  $X$  et  $Y$  est la loi du couple  $(X, Y)$ .

### Remarques

- La loi de  $(X, Y)$  est déterminée par la famille :

$$(\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Cela résulte de la proposition 15 de la page 609 appliquée à la variable  $(X, Y)$ .

- Soit  $E$  et  $E'$  deux ensembles et  $(p_{x,y})_{(x,y) \in E \times E'}$  une distribution de probabilité discrète sur  $E \times E'$ . Il résulte de la proposition 16 de la page 610 qu'il existe un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires à valeurs dans  $E \times E'$  tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E' \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = p_{x,y}.$$

## 3 Lois marginales

### Définition 17

Pour tout couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires discrètes, la loi de  $X$  est appelée **première loi marginale du couple** et celle de  $Y$  est appelée **deuxième loi marginale du couple**.

Le théorème suivant exprime le fait que l'on peut déduire les loi marginales de la loi du couple. Pour obtenir une loi marginale, on somme par rapport à l'autre variable.

### Théorème 23

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. On a alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Exo  
15.12

**Démonstration.** Cette égalité résulte de ce que  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$  est un système complet d'événements (on applique la proposition 3 de la page 604).  $\square$

Exo  
15.13

**Remarque** On obtient de même  $\mathbb{P}(Y = y)$  en sommant sur  $x \in X(\Omega)$ .

## 4 Généralisation aux $n$ -uplets de variables aléatoires

### Définition 18

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans  $E_1, \dots, E_n$ , alors l'application :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega &\longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée  **$n$ -uplet de variables aléatoires** sur  $\Omega$ . On le note  $(X_1, \dots, X_n)$ .

On peut démontrer, comme dans le cas des couples de variables aléatoires discrètes, la proposition suivante.

**Proposition 24**

Les  $n$ -uplets de variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans  $E_1, \dots, E_n$ , sont les variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $E_1 \times \dots \times E_n$ .

**Remarque** Un  $n$ -uplet de variables aléatoires discrètes réelles est donc une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

**Ex. 21.** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisables, à valeurs respectivement dans  $E_1, \dots, E_n$  et  $f$  est une fonction définie sur  $E_1 \times \dots \times E_n$ , alors  $f(X_1, \dots, X_n)$  est une variable aléatoire discrète, d'après la proposition 12 de la page 609 appliquée à la fonction  $f$  et à la variable aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$ .

En particulier si  $X_1, \dots, X_n$  sont à valeurs complexes, alors  $X_1 + \dots + X_n$  et  $X_1 \times \dots \times X_n$  sont des variables aléatoires discrètes, et si  $X_1, \dots, X_n$  sont réelles, alors  $\min(X_1, \dots, X_n)$  et  $\max(X_1, \dots, X_n)$  sont des variables aléatoires discrètes.

**Définition 19**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes.

- La **loi conjointe** de  $X_1, \dots, X_n$  est la loi du  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$ .
- Les **lois marginales** du  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$  sont les lois des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ .

**Remarque** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires discrètes, alors la loi conjointe de  $X_1, \dots, X_n$  est déterminée par la famille :

$$(\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}))_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)}.$$

**Notation** Dans la suite, l'événement  $\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}$  sera aussi noté  $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ , et sa probabilité  $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ .

Comme dans le cas des couples de variables aléatoires, les lois marginales des  $n$ -uplets s'obtiennent à partir de la loi conjointe. Pour obtenir une loi marginale, il suffit donc de sommer par rapport aux autres variables.

**Théorème 25**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires.

Pour tous  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $x_k \in X_k(\Omega)$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n),$$

où  $A = X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k-1}(\Omega) \times X_{k+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ .

Démonstration page 621

## Démonstrations

**Proposition 1** Soit  $\mathcal{A}$  une tribu sur l'univers  $\Omega$ .

- L'ensemble vide appartient à  $\mathcal{A}$  car  $\Omega$  appartient à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}$  est stable par passage au complémentaire.
- Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Pour tout entier  $n$ ,  $\overline{A_n}$  appartient à  $\mathcal{A}$  donc, par stabilité par union dénombrable,  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Comme  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}$ , on en déduit, par passage au complémentaire, que  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  appartient à  $\mathcal{A}$ .
- Soit  $A_1, \dots, A_n$  des éléments de  $\mathcal{A}$ . En posant  $A_i = \emptyset$  si  $i = 0$  ou  $i > n$ , on obtient, par stabilité par réunion dénombrable  $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$ , c'est-à-dire  $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ . De même, en posant  $A_0 = \Omega$  et  $A_i = \Omega$  pour  $i > n$ , on obtient, par stabilité par intersection dénombrable,  $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$ , c'est-à-dire  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}$ .
- Si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ , il en est de même de  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ , d'après les propriétés précédentes.

### Théorème 2

1. Considérons la famille d'événements incompatibles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $A_n = \emptyset$  pour tout entier naturel  $n$ . Alors, par définition d'une probabilité, la série de terme général constant  $\mathbb{P}(\emptyset)$  converge, d'où  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
2. • Par définition d'une probabilité, la propriété est vérifiée si  $I = \mathbb{N}$ .  
• S'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I = [\![1, n]\!]$ , on a une famille  $(A_1, \dots, A_n)$  d'événements deux à deux incompatibles. La suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , où  $A_0 = \emptyset$  et  $A_k = \emptyset$  pour tout entier  $k \geq n+1$ , est une famille d'événements deux à deux incompatibles.  
Alors, par définition d'une probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Comme  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  et  $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

- Dans le cas général,  $I$  est en bijection avec  $\mathbb{N}$  ou un ensemble de la forme  $[\![1, n]\!]$  et la propriété résulte de ce qui précède par changement d'indice.
3. On a, d'après le point précédent, puisque  $A$  et  $\overline{A}$  sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et donc  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

4. Si  $A \subset B$ , alors  $B$  est la réunion des événements incompatibles  $A$  et  $B \setminus A$  et donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

On en déduit  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$  et  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

5. L'événement  $A \cup B$  est la réunion des deux événements incompatibles  $A$  et  $B \setminus A$ ; d'autre part,  $B$  est la réunion des événements incompatibles  $A \cap B$  et  $B \setminus A$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

**Proposition 3**

- La famille  $(A_i)_{i \in I}$  est au plus dénombrable et les événements  $A_i$  sont deux à deux incompatibles donc, par  $\sigma$ -additivité :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1.$$

- On considère l'événement  $C = \bigcup_{i \in I} A_i$  qui, par hypothèse, est presque sûr. On a alors, puisque les événements  $A_i \cap B$  sont aussi deux à deux incompatibles :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)\right) = \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\overline{C} \cap B) = \mathbb{P}(B),$$

car  $0 \leq \mathbb{P}(\overline{C} \cap B) \leq \mathbb{P}(\overline{C}) = 0$ .

**Théorème 4**

1. On pose  $A_{-1} = \emptyset$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ .

On montre que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $A_n = \bigcup_{k=0}^n B_k$ . En effet, on a par définition :

$$\bigcup_{k=0}^n B_k \subset \bigcup_{k=0}^n A_k = A_n$$

et, réciproquement, si  $\omega \in A_n$  et si  $m$  est le plus petit des entiers  $k$  tels que  $\omega \in A_k$ , alors  $0 \leq m \leq n$  et  $\omega \in A_m \setminus A_{m-1} = B_m$  donc  $\omega \in \bigcup_{k=0}^n B_k$ .

On montre de même que  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ . En effet, on a  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  car  $B_n \subset A_n$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'autre part, si  $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  et si  $m$  est le plus petit des entiers  $k$  tels

que  $\omega \in A_k$ , alors on a  $\omega \in B_m$  et donc  $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ . On a donc  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ .

Les événements  $B_n$  sont incompatibles. En effet si  $m < n$ , on a  $B_m \subset A_m \subset A_{n-1}$  et  $B_n \subset \overline{A_{n-1}}$  donc  $B_m \cap B_n = \emptyset$ . On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(B_k).$$

De plus on a, toujours par incompatibilité des événements  $B_n$ , l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \mathbb{P}(A_n).$$

Finalement, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante d'événements, alors la suite  $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'événements. En appliquant le premier point, on trouve donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \mathbb{P}(\overline{A_n})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

### Corollaire 5

1. La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$  est croissante et  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ . On a donc :  

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right).$$
2. La suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $C_n = \bigcap_{k=0}^n A_k$  est décroissante et  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ .

On a donc :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

**Proposition 6** Par changement d'indice, il suffit de montrer le résultat lorsque l'ensemble  $I$  est de la forme  $[0, n]$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , ou est égal à  $\mathbb{N}$ .

- Montrons par récurrence sur  $n$  que si  $A_0, \dots, A_n$  sont des événements, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k). \quad (*)$$

La propriété est évidente pour  $n = 0$  et si elle est vérifiée au rang  $n$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

- Si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements, on a alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

par passage à la limite et continuité croissante à partir des relations (\*).

**Corollaire 7**

- Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille au plus dénombrable d'événements négligeables, alors  $\bigcup_{i \in I} A_i$  est un événement et l'on a  $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 0$  puis, par sous-additivité,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$ .
- Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille au plus dénombrable d'événements presque sûrs, alors  $(\overline{A}_i)_{i \in I}$  est une famille au plus dénombrable d'événements négligeables, donc d'après le point précédent :

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Ainsi  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est presque sûr.

**Proposition 9** Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , la famille  $(p_\omega)_{\omega \in A}$  est sommable car c'est une sous-famille de la famille sommable  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ . Donc  $\mathbb{P}(A)$  est défini. De plus, comme les réels  $p_\omega$  sont positifs, on a  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ , donc  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ . Vérifions que  $\mathbb{P}$  est une probabilité.

- On a  $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ .
- Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles et  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . D'après le théorème de sommation par paquets, on a  $\sum_{\omega \in A} p_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in A_n} p_\omega$ , soit  $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

Donc  $\mathbb{P}$  est une probabilité. On a en particulier  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ .

**Théorème 10**

- Par définition d'une probabilité, on a  $p_\omega \geq 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . De plus, comme  $\Omega$  est au plus dénombrable,  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  est un système complet d'événements donc la famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est sommable de somme 1. C'est donc une distribution de probabilités discrète.
- On écrit tout événement  $A$  sous la forme  $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ . Puisque  $A$  est au plus dénombrable, en tant que sous-ensemble de l'ensemble au plus dénombrable  $\Omega$ , on obtient, par  $\sigma$ -additivité :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Ainsi,  $\mathbb{P}$  est la probabilité associée à la distribution  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ .

**Proposition 11** On a :

$$X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap X(\Omega)) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}).$$

Chaque  $X^{-1}(\{x\})$  appartient à  $\mathcal{A}$  et  $A \cap X(\Omega)$  est au plus dénombrable, car inclus dans  $X(\Omega)$  qui est au plus dénombrable. Ainsi  $X^{-1}(A)$  est un événement, car c'est une réunion au plus dénombrable d'événements.

**Proposition 12** L'ensemble  $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$  est au plus dénombrable, car c'est l'image par  $f$  d'un ensemble au plus dénombrable. Pour tout  $y \in f(X)(\Omega)$ , on a :

$$\{f(X) = y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\} = \{X \in f^{-1}(\{y\})\}.$$

L'ensemble  $\{X \in f^{-1}(\{y\})\}$  est un événement d'après la proposition 11 de la page 608. Ainsi,  $f(X)$  est une variable aléatoire discrète.

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

### Théorème 13

- L'application  $\mathbb{P}_X$  est définie sur  $\mathcal{P}(X(\Omega))$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ .
- De  $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ , on déduit  $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = 1$ .
- Si  $(A_n)$  est une suite de parties deux à deux disjointes de  $X(\Omega)$ , alors les événements  $\{X \in A_n\}$  sont deux à deux incompatibles et :

$$\left\{ X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}.$$

On en déduit, par  $\sigma$ -additivité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(A_n). \end{aligned}$$

### Proposition 14

- Par définition, l'ensemble  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable et  $\{X = x\}$  est un événement pour tout  $x \in X(\Omega)$ .
- Si  $x$  et  $x'$  sont deux éléments de  $X(\Omega)$ , distincts, les événements  $\{X = x\}$  et  $\{X = x'\}$  sont incompatibles.
- On a enfin :

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega$$

car tout élément  $\omega$  de  $\Omega$  appartient à  $\{X = x\}$  pour  $x = X(\omega)$ .

### Proposition 16

On note  $F$  le support de  $(p_x)_{x \in E}$ . On sait que  $F$  est au plus dénombrable.

La famille  $(p_x)_{x \in F}$  est sommable comme sous-famille de  $(p_x)_{x \in E}$  et  $\sum_{x \in F} p_x = \sum_{x \in E} p_x = 1$ ,

donc  $(p_x)_{x \in F}$  est une distribution de probabilités sur  $F$ . On prend  $(\Omega, \mathcal{A}) = (F, \mathcal{P}(F))$  et  $\mathbb{P}$  la probabilité associée à la distribution de probabilités discrète  $(p_x)_{x \in F}$ .

On considère l'application  $X = \text{Id}_F$ . On a alors  $X(\Omega) = F$ , donc  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable et, pour tout  $x \in F$ ,  $X^{-1}(\{x\}) = \{x\} \in \mathcal{A}$ . Donc  $X$  est une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) \subset E$  et pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})) = \begin{cases} \mathbb{P}(\{x\}) = p_x & \text{si } x \in F \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = p_x & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

### Proposition 17

On a montré (cf. proposition 12 de la page 609) que  $f(X)$  est une variable aléatoire discrète et que, pour tout  $y \in f(X)(\Omega)$ , on a  $\{f(X) = y\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \{X = x\}$ . Puisqu'on a

une union au plus dénombrable d'événements incompatibles, on en déduit :

$$\forall y \in f(X)(\Omega) \quad \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x).$$

### Proposition 18

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont définies sur les espaces probabilisés  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ , respectivement. Par hypothèse, on a  $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}'(Y = x)$  pour tout  $x \in E$ . Les variables aléatoires  $f(X)$  et  $f(Y)$  sont à valeurs dans  $f(E)$  et, pour tout  $y \in f(E)$ , on a :

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}'(Y = x) = \mathbb{P}'(f(Y) = y),$$

donc  $f(X)$  et  $f(Y)$  ont même loi.

**Lemme 20** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout entier  $n \geq k$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k \exp((n-k) \ln(1 - p_n)).$$

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k$  et  $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ , car  $\lambda \neq 0$ .

Ainsi  $(p_n)$  tend vers 0 et donc :

$$(n-k) \ln(1 - p_n) \sim n(-p_n) \rightarrow -\lambda \quad \text{et} \quad \exp((n-k) \ln(1 - p_n)) \rightarrow e^{-\lambda}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

**Proposition 21**

- Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes, l'image  $(X, Y)(\Omega)$  est la partie du produit cartésien  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$  formée des couples  $(X(\omega), Y(\omega))$ , où  $\omega$  décrit  $\Omega$ . Le produit cartésien  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$  est au plus dénombrable car  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  sont au plus dénombrables. A fortiori,  $(X, Y)(\Omega)$  est au plus dénombrable.

Pour tout  $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$ , l'ensemble  $\{(X, Y) = (x, y)\}$  est un événement, car c'est l'intersection des deux événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$ . Donc  $(X, Y)$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E \times E'$ .

- Réciproquement, si  $Z$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $E \times E'$ , on pose  $X = \pi_1(Z)$  et  $Y = \pi_2(Z)$ , où  $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$  sont les projections canoniques de  $E \times E'$ . Alors  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans  $E$  et  $E'$  et  $Z = (X, Y)$ .

**Théorème 25** Le  $(n-1)$ -uplet aléatoire  $Z = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$ , où figurent toutes les variables aléatoires sauf  $X_k$ , est une variable aléatoire dont le système complet d'événements associé est :

$$(\{Z = z\})_{z \in A}.$$

On a donc, d'après le théorème 23 de la page 614, pour tout  $x_k \in X_k(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{z \in A} \mathbb{P}(Z = z, X_k = x_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$

## S'entraîner et approfondir

### Espaces probabilisés

**15.1** 1. Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $\mathcal{F}$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

→<sup>601</sup> (a) Montrer qu'il existe des tribus sur  $\Omega$  contenant  $\mathcal{F}$  et que l'intersection de toutes ces tribus est une encore une tribu, que l'on note  $\sigma(\mathcal{F})$ .

(b) Montrer que  $\sigma(\mathcal{F})$  est la plus petite tribu sur  $\Omega$  contenant  $\mathcal{F}$ .

La tribu  $\sigma(\mathcal{F})$  est appelée **tribu engendrée** par  $\mathcal{F}$ .

2. Montrer que si  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition d'un ensemble  $\Omega$ , avec  $I$  au plus dénombrable, alors la tribu engendrée par  $\{A_i \mid i \in I\}$  est :

$$\mathcal{A} = \{C_J \mid J \in \mathcal{P}(I)\} \quad \text{où} \quad C_J = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

**15.2** On suppose que  $\Omega$  est fini.

→<sup>603</sup> Montrer qu'une application  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  si, et seulement si,  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et, pour tous événements  $A$  et  $B$  incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

**15.3** 1. Montrer que l'on définit une probabilité sur  $\mathbb{N}^*$  en posant :

→<sup>607</sup>  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}.$

2. Calculer la probabilité qu'un entier soit pair.

### 15.4 Probabilité image

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $f$  une application de  $\Omega$  dans un ensemble  $\Omega'$ .

1. Montrer que  $\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{P}(\Omega') : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  est une tribu sur  $\Omega'$ . On l'appelle **tribu image** de  $\mathcal{A}$  par  $f$ .

2. Montrer que  $\mathbb{P}_f : B \in \mathcal{A}' \mapsto \mathbb{P}(f^{-1}(B))$  est une probabilité sur  $(\Omega', \mathcal{A}')$ . On l'appelle **probabilité image** de  $\mathbb{P}$  par  $f$ .

**15.5** Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \min_{1 \leq k \leq n} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \right).$$

★ ★ **15.6** Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère l'événement  $C_k$  « appartenir à  $A_i$  pour au moins  $k$  valeurs de l'indice  $i$  entre 1 et  $n$  ». Montrer que :

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

\* 15.7 Soit  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  deux probabilités sur le même espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Montrer l'équivalence entre :

- (i)  $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_1(A) = 0 \implies \mathbb{P}_2(A) = 0$  ;
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_1(A) \leq \eta \implies \mathbb{P}_2(A) \leq \varepsilon$ .

15.8 On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile (noté  $P$ ) étant  $p \in ]0, 1[$  et la probabilité d'obtenir face (noté  $F$ ) étant  $q = 1 - p$ .

1. Calculer la probabilité de l'événement  $A$  « la première séquence  $PP$  apparaît avant la première séquence  $FP$  ».
2. Pour tout  $n \geq 2$ , calculer la probabilité de l'événement  $B_n$  « la séquence  $PF$  apparaît pour la première fois aux lancers  $n - 1$  et  $n$  et il n'y a pas eu avant de séquence  $FP$  ». En déduire la probabilité de l'événement  $B$  « la première séquence  $PF$  apparaît avant la première séquence  $FP$  ».
3. Déterminer de même la probabilité des événements :
  - (a)  $C$  « la première séquence  $PF$  apparaît avant la première séquence  $FF$  » ;
  - (b)  $D$  « la première séquence  $PP$  apparaît avant la première séquence  $FF$  ».

## Variables aléatoires discrètes

15.9 Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes et  $N$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , définies sur le même espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ . On définit l'application  $Y$  par  $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

15.10 Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

- $\xrightarrow{610}$  1. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x)$ .
- 2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq -n)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X \leq x)$ .

15.11 Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

- $\xrightarrow{612}$  Montrer que  $\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n)$ .

15.12 Soit  $a$  et  $\lambda$  des réels strictement positifs. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que la loi conjointe de  $X$  et  $Y$  vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i! j!}.$$

1. Déterminer la valeur de  $a$  en fonction de  $\lambda$ .
2. Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .

15.13 On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant  $p \in ]0, 1[$ . On note  $X$  (respectivement  $Y$ ) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. En déduire les lois de  $X$  et  $Y$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

### 15.14 Convergence presque sûre

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On pose :

$$B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$$

et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$C_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \left\{ |X_p - X| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

1. Montrer que  $B$  est un événement et que  $\mathbb{P}(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_k)$ .

On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$  si  $\mathbb{P}(B) = 1$ .

2. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Montrer que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ .

3. Montrer que si la série de terme général  $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$  converge pour tout  $\varepsilon > 0$ , alors la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ .

## Solutions des exercices

**15.1** 1. (a) Notons  $T$  l'ensemble des tribus contenant  $\mathcal{F}$ . Il est non vide, car  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une tribu sur  $\Omega$  contenant  $\mathcal{F}$ . Posons  $\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in T} \mathcal{A}$ . Montrons que  $\sigma(\mathcal{F})$  est une tribu.

- Par définition d'une tribu,  $\Omega \in \mathcal{A}$ , pour tout  $\mathcal{A} \in T$ , donc  $\Omega \in \sigma(\mathcal{F})$ .
- Soit  $A \in \sigma(\mathcal{F})$ . Pour tout  $\mathcal{A} \in T$ , on a  $A \in \mathcal{A}$ , donc  $\bar{A} \in \mathcal{A}$ , par définition d'une tribu. Donc  $\bar{A} \in \sigma(\mathcal{F})$ .
- Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\sigma(\mathcal{F})$ . Soit  $\mathcal{A} \in T$ . Alors,  $A_n \in \mathcal{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc par définition d'une tribu,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ . C'est vrai pour tout  $\mathcal{A} \in T$ , donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{F})$ .

Ainsi  $\sigma(\mathcal{F})$  est une tribu sur  $\Omega$ .

(b) Reprenons la notation  $T$  pour l'ensemble des tribus contenant  $\mathcal{F}$ .

- Par définition  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$  pour tout  $\mathcal{A} \in T$  donc  $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ .
  - Si  $\mathcal{A}$  est une tribu quelconque contenant  $\mathcal{F}$ , alors  $\mathcal{A} \in T$ , donc  $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$ .
- On a bien montré que  $\sigma(\mathcal{F})$  est la plus petite tribu sur  $\Omega$  contenant  $\mathcal{F}$ .

2. • Par définition de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  contient  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ .

Soit  $B \in \mathcal{A}$  et  $J$  une partie de  $I$  telle que  $B = C_J$ . Comme les  $A_i$  sont disjoints, on a :

$$\overline{B} = \Omega \setminus C_J = \bigcup_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \in J} A_i = \bigcup_{i \in I \setminus J} A_i = C_{I \setminus J} \quad \text{donc} \quad \overline{B} \in \mathcal{A}.$$

Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ , il existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une partie  $J_n$  de  $I$  telle que  $B_n = C_{J_n}$ . On a alors :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{i \in K} A_i = C_K, \quad \text{où} \quad K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n,$$

ce qui montre que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ .

Ainsi,  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $\Omega$  qui, de manière évidente, contient  $\{A_i \mid i \in I\}$ .

- Soit  $\mathcal{A}'$  une tribu contenant  $\{A_i \mid i \in I\}$ . Pour tout  $J \subset I$ , comme  $I$  est au plus dénombrable, il en est de même de  $J$ . Chaque  $A_i$  est dans  $\mathcal{A}'$  donc, par stabilité par union dénombrable,  $B_J$  appartient aussi à  $\mathcal{A}'$ . Ainsi  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ .

**15.2** • Si  $\mathbb{P}$  est une probabilité, alors  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et, pour tous événements  $A$  et  $B$  incompatibles, on a  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

- Réciproquement, supposons que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  et que, pour tous événements  $A$  et  $B$  incompatibles, on ait  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

Par récurrence sur  $n$ , on démontre que, pour des événements  $A_0, \dots, A_n$ , deux à deux incompatibles, on a  $\mathbb{P}(A_0 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k)$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

Comme  $\Omega$  est fini, l'ensemble des événements est fini. Une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux incompatibles ne comporte donc qu'un nombre fini d'événements différents de  $\emptyset$ , puisque ceux-ci sont deux à deux distincts. De plus, de l'égalité  $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset)$ , on tire  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ . En notant  $I = \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Donc  $\mathbb{P}$  est une probabilité.

**15.3** 1. On vérifie que  $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une distribution de probabilités discrète sur  $\mathbb{N}^*$ .

On a  $\frac{1}{n(n+1)} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La série  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  converge et comme  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , on a, par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

2. On a  $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$ .

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On calcule la limite de la somme par une comparaison série-intégrale. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a, pour  $k \geq 2$  :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

En sommant ces inégalités pour  $k$  entre  $N+1$  et  $2N+1$ , on obtient :

$$\int_{N+1}^{2N+2} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n} \leq \int_N^{2N+1} \frac{1}{t} dt \quad \text{soit} \quad \ln 2 \leq \sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n} \leq \ln \left( 2 + \frac{1}{N} \right).$$

Ainsi  $\sum_{n=N+1}^{2N+1} \frac{1}{n} \rightarrow \ln 2$ , quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit  $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = 1 - \ln 2$ .

- 15.4** 1. • On a  $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$  donc  $\Omega' \in \mathcal{A}'$ .
- Si  $B \in \mathcal{A}'$ , alors  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . On écrit  $f^{-1}(\Omega' \setminus B) = \Omega \setminus f^{-1}(B)$ . De  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , on déduit  $\Omega \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , car  $\mathcal{A}$  est stable par passage au complémentaire, et donc  $\Omega' \setminus B \in \mathcal{A}'$ .
  - Enfin si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}'$  alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ . On en déduit, par stabilité par union dénombrable :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \quad \text{donc} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}'.$$

On conclut que  $\mathcal{A}'$  est une tribu sur  $\Omega'$ .

2. On note que  $\mathbb{P}_f$  est bien une application de  $\mathcal{A}'$  dans  $[0, 1]$ .

- On a  $\mathbb{P}_f(\Omega') = \mathbb{P}(f^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- Si  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{A}'$ , les ensembles  $f^{-1}(B_n)$  sont des éléments disjoints de  $\mathcal{A}$  et l'on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_f(B_n). \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{P}_f$  est une probabilité sur  $(\Omega', \mathcal{A}')$ .

**Remarque** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , la loi de  $X$  est la probabilité image de  $\mathbb{P}$  par l'application  $X$  (considérée comme application de  $\Omega$  dans  $X(\Omega)$ ). Dans ce cas,  $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(X(\Omega))$ , car pour toute partie  $A$  de  $X(\Omega)$ , on a  $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ .

- 15.5** Il faut démontrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_k).$$

Comme  $A_1, \dots, A_n$  jouent des rôles symétriques, on peut supposer  $k = n$ . On transforme le second membre de l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_i \cap A_n)) \\ &= \mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \setminus A_n). \end{aligned}$$

Par sous-additivité de  $\mathbb{P}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(A_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \setminus A_n) \geq \mathbb{P}\left(A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \setminus A_n)\right)\right),$$

ce qui donne l'inégalité voulue, car  $A_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \setminus A_n)\right) = \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

**15.6** On remarque pour commencer que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$C_k = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

On démontre la propriété par récurrence sur  $n$ .

- La propriété est évidente pour  $n = 1$ .

On la démontre pour  $n = 2$ , ce qui sera utile pour passer du rang  $n$  au rang  $n + 1$ . Il s'agit de démontrer que, si  $A$  et  $B$  sont deux événements, on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B), \quad (*)$$

ce qui équivaut à :

$$(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

En posant  $x = \mathbb{P}(A)$ ,  $y = \mathbb{P}(B)$  et  $z = \mathbb{P}(A \cap B)$ , il faut démontrer que :

$$xy - (x + y - z)z \geq 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x - z)(y - z) \geq 0.$$

Cette inégalité est vérifiée car  $z \leq x$  et  $z \leq y$ , ce qui résulte de  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$ .

- On suppose la propriété vérifiée au rang  $n$ . On la démontre au rang  $n + 1$ . On considère donc  $n + 1$  événements  $A_1, \dots, A_{n+1}$  et l'on pose, pour tout  $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  :

$$C'_k = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1}} A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

Il faut donc démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leq \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

On suppose que  $\mathbb{P}(C'_k) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ , sinon l'inégalité est évidente. En définissant les  $C_k$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , comme au début du corrigé, on remarque que, pour  $1 \leq k \leq n - 1$ , on a :

$$C'_{k+1} = (C_k \cap A_{n+1}) \cup C_{k+1}.$$

En appliquant l'inégalité  $(*)$  avec  $A = C_k \cap A_{n+1}$  et  $B = C_{k+1}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(C'_{k+1}) \mathbb{P}((C_k \cap A_{n+1}) \cap C_{k+1}) \leq \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \mathbb{P}(C_{k+1}).$$

Il est clair que  $C_{k+1} \subset C_k$ . On a donc  $\mathbb{P}((C_k \cap A_{n+1}) \cap C_{k+1}) = \mathbb{P}(C_{k+1} \cap A_{n+1})$ . On obtient, pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}(C'_{k+1}) \mathbb{P}(C_{k+1} \cap A_{n+1}) \leq \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \mathbb{P}(C_{k+1}).$$

En multipliant ces inégalités pour  $1 \leq k \leq n - 1$ , on obtient :

$$\prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C'_k) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C_k).$$

La suite  $(\mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}))_{1 \leq k \leq n}$  décroît donc s'il existe  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  pour lequel  $\mathbb{P}(C_k \cap A_{n+1}) = 0$ , alors  $\mathbb{P}(C_n \cap A_{n+1}) = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(C'_{n+1}) = 0$ , ce qui contredit notre hypothèse. On obtient donc en simplifiant :

$$\mathbb{P}(C_n \cap A_{n+1}) \times \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C'_k) \leq \mathbb{P}(C_1 \cap A_{n+1}) \times \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C_k).$$

Comme  $C_n \cap A_{n+1} = C'_{n+1}$  et  $C_1 \cup A_{n+1} = C'_1$ , on a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leq \mathbb{P}(C_1 \cup A_{n+1}) \mathbb{P}(C_1 \cap A_{n+1}) \times \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(C_k).$$

En utilisant de nouveau l'inégalité (\*) avec  $A = C_1$  et  $B = A_{n+1}$ , puis l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(C'_k) \leq \mathbb{P}(A_{n+1}) \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(C_k) \leq \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

- 15.7** • Supposons (ii) et montrons (i). Soit  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathbb{P}_1(A) = 0$ . On veut montrer que  $\mathbb{P}_2(A) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_1(B) \leq \eta \implies \mathbb{P}_2(B) \leq \varepsilon.$$

On a  $\mathbb{P}_1(A) = 0 \leq \eta$  et donc  $\mathbb{P}_2(A) \leq \varepsilon$ . Comme cela est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a donc  $\mathbb{P}_2(A) = 0$ .

- Pour démontrer la réciproque, on montre la contraposée. On suppose donc :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_1(A) \leq \eta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_2(A) > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $A_n \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathbb{P}_1(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$  et  $\mathbb{P}_2(A_n) > \varepsilon$ .

On pose  $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$  et  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ . Par sous-additivité, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}_1(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}_1(A_k) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suite  $(B_n)$  est décroissante, donc par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}_1(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1(B_n) = 0.$$

Mais, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset B_n$  donc  $\mathbb{P}_2(B_n) \geq \mathbb{P}_2(A_n) \geq \varepsilon$ , donc :

$$\mathbb{P}_2(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_2(B_n) \geq \varepsilon.$$

La propriété (i) n'est pas vraie.

- 15.8** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Pi_k$  l'événement « le  $k$ -ième lancer donne pile » et  $F_k$  l'événement contraire.

1. La première séquence  $PP$  apparaît nécessairement aux deux premiers lancers, car sinon au lancer précédent cette séquence  $PP$ , on a  $P$  ou  $F$  et donc déjà une séquence  $PP$  ou une séquence  $FP$  au rang précédent. On a donc  $A = \Pi_1 \cap \Pi_2$  et  $\mathbb{P}(A) = p^2$ .
2. Si  $B_n$  est réalisé, alors les lancers entre le premier et le  $(n-2)$ -ième donnent nécessairement  $P$ , car sinon en considérant le rang  $k$  du dernier  $F$  avant celui qui est numéroté  $n$ , on aurait une séquence  $FP$  aux lancers  $k$  et  $k+1$ . Il faut donc avoir une suite de  $(n-1)$   $P$  suivie d'un  $F$ . On a donc  $B_n = \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_{n-1} \cap F_n$  et  $\mathbb{P}(B_n) = p^{n-1}q$ . L'événement  $B$  est la réunion des événements incompatibles  $B_n$  pour  $n \geq 2$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q = \frac{pq}{1-p} = p.$$

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

3. (a) On note  $C_n$  l'événement « la séquence  $PF$  apparaît pour la première fois aux lancers  $n-1$  et  $n$  et il n'y a pas eu avant de séquence  $FF$  ». Si  $C_n$  est réalisé, alors soit on n'obtient pas  $F$  avant (suite de  $(n-1)$   $P$  et d'un  $F$ ), soit en considérant le dernier  $F$  avant le rang  $n-1$ , on voit qu'il ne peut être précédé ni d'un  $P$  ni d'un  $F$  : c'est le premier lancer (cela n'est possible que si  $n \geq 3$ ). On a donc, si  $n \geq 3$  :

$$C_n = (\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap \Pi_2 \cap \dots \cap \Pi_{n-1} \cap F_n)$$

et  $\mathbb{P}(C_n) = p^{n-1}q + p^{n-2}q^2$ . De plus,  $C_2 = \Pi_1 \cap F_2$ , donc  $\mathbb{P}(C_2) = pq$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1}q + \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-2}q^2 = \frac{pq}{1-p} + \frac{pq^2}{1-p} = p + pq.$$

- (b) On note  $D_n$  l'événement « la séquence  $PP$  apparaît pour la première fois aux lancers  $n-1$  et  $n$  et il n'y a pas eu avant de séquence  $FF$  ». Si la première séquence  $PP$  apparaît aux lancers  $n$  et  $n-1$  sans qu'il y ait avant de séquence  $FF$ , c'est que dans les lancers précédents, on a une alternance de  $P$  et  $F$  (des  $F$  au lancer  $n-2$  et à tous ceux qui ont la même parité). Le résultat dépend de la parité de  $n$ . On obtient :

$$D_n = \Pi_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap \Pi_{n-1} \cap \Pi_n \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$D_n = F_1 \cap \Pi_2 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap \Pi_{n-1} \cap \Pi_n \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

On en déduit, pour  $n \geq 2$  :

$$\mathbb{P}(D_n) = \begin{cases} (pq)^{\frac{n-2}{2}} p^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (pq)^{\frac{n-3}{2}} qp^2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} (pq)^k p^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} (pq)^k qp^2 = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

- 15.9** • On a  $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\Omega)$ . L'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\Omega)$  est au plus dénombrable, comme union

dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. Il en est de même *a fortiori* de  $Y(\Omega)$ .

- Pour  $x \in Y(\Omega)$ , on a :

$$Y^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N} \quad N(\omega) = n \quad \text{et} \quad X_n(\omega) = x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{N = n\} \cap \{X_n = x\}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{N = n\}$  et  $\{X_n = x\}$  sont des événements, donc  $Y^{-1}(\{x\})$  est un événement, car union dénombrable d'événements.

Donc  $Y$  est une variable aléatoire discrète.

- 15.10** 1. La suite  $(\{X \leq n\})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'événements. On a donc, par continuité croissante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq n\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

La fonction  $F : x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$  est croissante. En effet si  $x \leq y$ , alors  $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$  et donc  $F(x) \leq F(y)$  par croissance de  $\mathbb{P}$ .

Elle possède donc une limite en  $+\infty$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1.$$

2. De même, la suite  $(\{X \leq -n\})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante d'événements. On a donc, par continuité décroissante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq -n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq -n\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

La fonction  $F$  étant croissante, elle possède une limite en  $-\infty$  et l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(-n) = 0.$$

- 15.11** Soit  $\lambda > 0$  tel que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ . Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n)$ , il s'agit de démontrer que, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\mathbb{P}(X > n)$  est négligeable devant  $\mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ . On a :

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = n) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-n}}{(n+1) \cdots k}.$$

Pour  $k \geq n+1$ , on a la majoration :

$$0 \leq \frac{\lambda^{k-n}}{(n+1) \cdots k} \leq \frac{\lambda^{k-n}}{(n+1)^{k-n}} = \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}.$$

Pour  $n > \lambda - 1$ ,  $\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n}$  est le terme général d'une série géométrique convergente (de la variable  $k$ ) et l'on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-n}}{(n+1) \cdots k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^{k-n} = \frac{\lambda}{n+1-\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

ce qui donne le résultat voulu.

- 15.12** 1. On sait que  $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{i+j=n} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i! j!} = n\lambda^n \sum_{i+j=n} \frac{1}{i! j!} = \frac{n\lambda^n}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \frac{n(2\lambda)^n}{n!}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(2\lambda)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^n}{(n-1)!} = (2\lambda)e^{2\lambda}.$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i! j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i! j!} = (2\lambda)e^{2\lambda} \quad \text{donc} \quad a = \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda}.$$

## Chapitre 15. Espaces probabilisés

2. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i! j!} \\ &= a \frac{i\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + a \frac{\lambda^i}{i!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} \\ &= a \frac{i\lambda^i e^\lambda}{i!} + a \frac{\lambda^{i+1} e^\lambda}{i!} = \frac{ae^\lambda \lambda^i (i+\lambda)}{i!}.\end{aligned}$$

Comme  $a = \frac{e^{-2\lambda}}{2\lambda}$ , on obtient  $\mathbb{P}(X = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1} (i+\lambda)}{2i!}$ .

Par symétrie de la loi conjointe, on en déduit  $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j-1} (j+\lambda)}{2j!}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

- 15.13** 1. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Pi_k$  l'événement « obtenir pile au  $k$ -ième lancer » et  $F_k$  l'événement contraire.

Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ . Si  $i \geq j$ , on a  $\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \emptyset$ , et si  $i < j$  :

$$\{X = i\} \cap \{Y = j\} = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap \Pi_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap \Pi_j.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

2. Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{j-2} \\ &= \frac{p^2(1-p)^{i-1}}{1 - (1-p)} = p(1-p)^{i-1}.\end{aligned}$$

Sans surprise, on trouve que  $X$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

La variable aléatoire  $Y$  est à valeurs dans  $[2, +\infty[\$ . Pour  $j \geq 2$ , on a :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.$$

- 15.14** 1. On remarque qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels converge vers  $x$  si, et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad |x_p - x| \leq \frac{1}{k},$$

car pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$ .

On a donc, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \omega \in B &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad |X_p(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \geq n \quad \omega \in \left\{ |X_p - X| \leq \frac{1}{k} \right\} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in C_k \\ &\iff \omega \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} C_k. \end{aligned}$$

On a donc  $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} C_k$ .

Chaque  $C_k$  est un événement car, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{|X_p - X| \leq \frac{1}{k}\}$  est un événement, donc  $C_k$  est une union dénombrable d'intersections dénombrables d'événements. On en déduit que  $B$  est un événement. La suite  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  étant décroissante, on a, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_k).$$

2. On obtient, en considérant l'événement contraire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \{|X_p - X| \leq \varepsilon\}\right) = 1.$$

En prenant  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ , on obtient  $\mathbb{P}(C_k) = 1$ . En faisant tendre  $k$  vers l'infini, on en déduit  $\mathbb{P}(B) = 1$  : la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc presque sûrement vers  $X$ .

3. Supposons que  $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$  converge pour tout  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a, par sous-additivité de  $\mathbb{P}$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_p - X| > \varepsilon).$$

Le reste d'ordre  $n-1$  de la série de terme général  $\mathbb{P}(|X_p - X| > \varepsilon)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  donc *a fortiori* :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

La suite  $\left(\bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc, par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} \{|X_p - X| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

De la question précédente, on déduit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $X$ .



# Chapitre 16 : Conditionnement – Indépendance

<b>I</b>	<b>Probabilités conditionnelles</b>	<b>636</b>
1	Définition . . . . .	636
2	Formules liées aux probabilités conditionnelles . . . . .	636
3	Lois conditionnelles . . . . .	638
<b>II</b>	<b>Indépendance</b>	<b>639</b>
1	Indépendance des événements . . . . .	639
2	Indépendance des variables aléatoires . . . . .	641
3	Suites de variables aléatoires indépendantes . . . . .	646
	<b>Exercices</b> . . . . .	<b>652</b>

# Conditionnement – Indépendance

Dans tout le chapitre,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  désigne un espace probabilisé. Sauf mention plus précise, les événements et les variables aléatoires considérés le sont sur cet espace probabilisé.

## I Probabilités conditionnelles

Les définitions qui suivent généralisent simplement les définitions vues en première année dans le cas d'un univers fini.

### 1 Définition

#### Théorème 1

Pour tout événement  $A$  de *de probabilité non nulle*, l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{IR} \\ B &\longmapsto \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}\end{aligned}$$

est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , appelée la **probabilité conditionnelle** sachant  $A$ .

Pour tout événement  $B$ ,  $\mathbb{P}_A(B)$  qui est encore notée  $\mathbb{P}(B | A)$  est appelée la **probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$** .

Démonstration page 648

**Remarque** Pour tous événements  $A$  et  $B$  tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B).$$

Si  $\mathbb{P}(A) = 0$ , on pose par convention  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = 0$ , si bien que l'égalité précédente reste vérifiée car alors  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ , puisque  $A \cap B \subset A$ .

## 2 Formules liées aux probabilités conditionnelles

### Formule des probabilités composées

#### Théorème 2 (Formule des probabilités composées)

Soit  $n \geq 2$  un entier naturel. Pour toute famille  $(A_1, \dots, A_n)$  d'événements tels que  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Démonstration page 648

## Formule des probabilités totales

**Théorème 3 (Formule des probabilités totales)**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système quasi-complet d'événements. Pour  $B \in \mathcal{A}$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i).$$

**Démonstration.** La première égalité a été démontrée dans la proposition 3 de la page 604. En écrivant  $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$ , pour tout  $i \in I$ , on obtient la deuxième égalité.  $\square$

**Remarque** On rappelle la convention adoptée (cf. remarque de la page précédente). Si  $\mathbb{P}(A_i) = 0$ , alors on pose  $\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) = 0$ .

**Ex. 1.** Dans une population donnée, on suppose qu'il existe  $p \in ]0, 1[$  et  $\alpha > 0$  tels que la probabilité  $p_n$  qu'une famille ait exactement  $n$  enfants vérifie  $p_n = \alpha p^n$ , pour tout  $n \geq 1$ . On suppose qu'un enfant a la même probabilité d'être une fille ou un garçon. Déterminons la probabilité qu'une famille ait exactement deux filles.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on considère les événements  $E_k$  « la famille a exactement  $k$  enfants » et  $F_k$  « la famille a exactement  $k$  filles ». Pour calculer  $\mathbb{P}(F_2)$ , on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On obtient :

$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_2 | E_n) \mathbb{P}(E_n).$$

Pour  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{P}(F_2 | E_n) = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  : sachant qu'il y a  $n$  enfants, la loi du nombre de filles est binomiale de paramètre  $\left(n, \frac{1}{2}\right)$  car chaque enfant a la probabilité  $\frac{1}{2}$  d'être une fille. Cette probabilité est évidemment nulle si  $n < 2$ . On obtient :

$$\mathbb{P}(F_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha p^n = \frac{\alpha}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{\alpha p^2}{8} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{p}{2}\right)^{n-2}.$$

Par le théorème de dérivation des séries entières, on a, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(F_2) = \frac{\alpha p^2}{8} \frac{2}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^3} = \frac{2\alpha p^2}{(2-p)^3}.$$

## Formule de Bayes

**Théorème 4 (Formule de Bayes)**

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilité non nulle, on a :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

**Démonstration.** Cela résulte de la définition des probabilités conditionnelles.  $\square$

## Chapitre 16. Conditionnement – Indépendance

**Ex. 2.** On reprend les données de l'exemple 1 de la page précédente. La probabilité qu'une famille ait deux enfants sachant qu'elle a deux filles est :

$$\mathbb{P}(E_2 | F_2) = \frac{\mathbb{P}(F_2 | E_2)\mathbb{P}(E_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\frac{1}{4}\alpha p^2}{\frac{2\alpha p^2}{(2-p)^3}} = \frac{(2-p)^3}{8}.$$

### 3 Lois conditionnelles

#### Définition 1

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète et  $A$  un événement de probabilité non nulle.

La **loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$**  est la loi de  $X$  dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ . Elle est donc déterminée par la donnée, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , de :

$$\mathbb{P}_A(X = x) = \mathbb{P}(X = x | A).$$

#### Remarques

- Les lois conditionnelles sont des lois de variables aléatoires ; elles en ont les propriétés.
- Assez fréquemment, l'événement  $A$  est de la forme  $\{Y = y\}$ , où  $Y$  est une autre variable aléatoire sur le même espace probabilisé.

**Ex. 3.** Si la variable aléatoire  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , on a, pour tout couple d'entiers naturels  $(k, \ell)$  :

$$\mathbb{P}(X > k + \ell | X > k) = \frac{\mathbb{P}(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{\mathbb{P}(X > k + \ell)}{\mathbb{P}(X > k)},$$

car  $\{X > k + \ell\} \subset \{X > k\}$ , et donc :

$$\mathbb{P}(X > k + \ell | X > k) = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = \mathbb{P}(X > \ell).$$

**Exo 16.1** La loi conditionnelle de  $X - k$  sachant  $\{X > k\}$  est la même que la loi de  $X$ . Si l'on pense à  $X$  comme à une durée, on peut dire que  $X$  ne tient pas compte du passé. On dit que la variable aléatoire  $X$  est **sans mémoire**.

#### Proposition 5

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. Alors, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}(X = x | Y = y).$$

**Démonstration.** Cela résulte de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$ .  $\square$

#### Remarques

- On a évidemment une formule symétrique pour  $\mathbb{P}(Y = y)$ .

- Ainsi, connaissant l'une des lois marginales et la probabilité conditionnelle de l'autre variable par rapport à celle-ci, on obtient la loi conjointe et la loi marginale de la deuxième variable.

## II Indépendance

### 1 Indépendance des événements

Les définitions qui suivent généralisent les définitions vues en première année dans le cas d'un univers fini.

#### Indépendance entre deux événements

##### Définition 2

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

##### Proposition 6

Deux événements  $A$  et  $B$  tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  sont indépendants si, et seulement si,  $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$ .

#### Remarques

- Si l'événement  $A$  est négligeable, alors il est indépendant de tout événement  $B$ . En effet on a  $\mathbb{P}(A) = 0$  et *a fortiori*  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ .
- L'indépendance est une notion probabiliste. Elle dépend de la probabilité dont est muni  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

##### Proposition 7

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants, alors les événements  $\overline{A}$  et  $B$  sont indépendants.

Démonstration page 648

**Remarque** On en déduit que si  $A$  est un événement presque sûr, il est indépendant de tout événement  $B$ . En effet  $\overline{A}$  est de probabilité nulle donc  $\overline{A}$  et  $B$  sont indépendants, comme nous l'avons déjà vu.

#### Indépendance d'une famille d'événements.

##### Définition 3

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille quelconque d'événements.

On dit que les événements  $A_i$ , pour  $i \in I$ , sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

### Remarques

- Souvent, pour une famille d'événements mutuellement indépendants, on dit simplement **indépendants**.
  - Si les événements  $A_i$ , pour  $i \in I$  sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants, comme on le voit en prenant pour  $J$  un ensemble à deux éléments.
- Comme dans le cas des univers finis, *la réciproque est fausse*.
- L'indépendance ne dépend pas de l'ordre des événements. Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements mutuellement indépendants, il en est de même de la famille  $(A_{\sigma(i)})_{i \in I}$ , où  $\sigma$  est une permutation de  $I$ .
  - Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors, pour toute partie  $I'$  de  $I$ ,  $(A_i)_{i \in I'}$  est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

### Proposition 8

Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements mutuellement indépendants, et si, pour tout  $i \in I$ ,  $B_i$  est égal à  $A_i$  ou  $\overline{A}_i$ , alors  $(B_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Démonstration page 648

Exo  
16.8

### Ex. 4. Second lemme de Borel-Cantelli

Soit  $(A_n)$  une suite d'événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On suppose que la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge et que les événements  $A_n$  sont mutuellement indépendants. Montrons que l'événement  $B = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$  est presque sûr. On rappelle que  $B$  est l'événement « une infinité d'événements  $A_n$  sont réalisés ».

On a  $\overline{B} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}$ . Les événements  $\overline{A_n}$  sont aussi mutuellement indépendants donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^N \overline{A_p}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=k}^N \mathbb{P}(\overline{A_p}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=k}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)).$$

Sachant que  $0 \leqslant 1 - x \leqslant e^{-x}$  pour tout réel  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$0 \leqslant \prod_{p=k}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)) \leqslant \prod_{p=k}^N \exp(-\mathbb{P}(A_p)) \leqslant \exp\left(-\sum_{p=k}^N \mathbb{P}(A_p)\right).$$

La série  $\sum \mathbb{P}(A_p)$  diverge donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=k}^N \mathbb{P}(A_p) = +\infty$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=k}^{+\infty} \overline{A_p}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=k}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0.$$

Ainsi,  $\overline{B}$  est négligeable, car réunion dénombrable d'événements négligeables, et l'événement contraire  $B$  est presque sûr.

**Ex. 5.** On considère une suite de lancers de pile ou face.

Montrons que tout motif fini  $m = a_1 \dots a_k$ , où chaque  $a_j$  est égal à 0 ou 1, apparaît presque sûrement une infinité de fois. Notons  $A$  l'événement « le motif  $m$  apparaît une infinité de fois » et pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $A_n$  l'événement « le motif  $m$  aux lancers  $nk, \dots, (n+1)k-1$  ».

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par indépendance des résultats des différents lancers, on a  $\mathbb{P}(A_n) = p^i(1-p)^{k-i} > 0$ , où  $i$  est le nombre de  $a_j$  égaux à 1 (pour  $1 \leq j \leq k$ ). On note que les différents événements  $A_n$  sont incompatibles. Si  $n_1, \dots, n_j$  sont des entiers naturels tels que  $n_1 < \dots < n_j$ , alors, toujours par indépendance des résultats des lancers :

$$\mathbb{P}(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_j}) = p^{ij}(1-p)^{(k-i)j} = \mathbb{P}(A_{n_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{n_j}).$$

Les événements  $A_n$  sont donc mutuellement indépendants. La série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  est divergente donc le second lemme de Borel-Cantelli montre que l'événement  $B$  « une infinité d'événements  $A_n$  sont réalisés » est presque sûr. Comme de plus  $B \subset A$ , on a *a fortiori*  $\mathbb{P}(A) = 1$ . □

**Remarque** En tenant compte du premier lemme de Borel-Cantelli (exemple 10 de la page 605), on voit que si les événements  $A_n$  sont mutuellement indépendants, la probabilité de  $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ , c'est-à-dire la probabilité qu'une infinité d'événements  $A_n$  se réalisent, ne peut être que 0 ou 1.

## 2 Indépendance des variables aléatoires

### Indépendance de deux variables aléatoires

#### Définition 4

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$ , à valeurs dans  $E$  et  $F$  respectivement sont dites **indépendantes** si, pour toute partie  $A$  de  $E$  et toute partie  $B$  de  $F$ , les événements  $\{X \in A\}$  et  $\{Y \in B\}$  sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

**Notation** La relation «  $X$  et  $Y$  sont indépendantes » se note  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .

**Attention** L'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité choisie.

#### Proposition 9

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $E$  et  $F$  respectivement sont indépendantes si, et seulement si, :

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

Démonstration page 649.

**Reformulation** Les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si, la distribution de probabilités de  $(X, Y)$  est égale au produit des distributions de probabilités de  $X$  et de  $Y$ .

**Ex. 6.** Une variable presque sûrement constante est indépendante de toute variable aléatoire discrète, car un événement de probabilité 0 ou 1 est indépendant de tout événement. □

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

**Remarque** Ainsi, si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$  s'écrit comme produit d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $y$ .

La réciproque est vraie comme le montre l'exemple suivant.

**Ex. 7.** On suppose que la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  s'écrit :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \varphi(x) \psi(y).$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$ .

En sommant sur  $x \in X(\Omega)$ , on obtient, pour tout  $y \in Y(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \psi(y) = C' \psi(y),$$

où  $C' = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)$ .

De même, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a  $\mathbb{P}(X = x) = C \varphi(x)$ , où  $C = \sum_{y \in Y(\Omega)} \psi(y)$ .

De  $\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) = 1$ , on tire  $CC' = 1$  et donc, pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = (C \varphi(x)) (C' \psi(y)) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont donc indépendantes et à une constante multiplicative près, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont les distributions de probabilités de  $X$  et de  $Y$ .

Exo  
16.11

**Point méthode** Connaissant la loi de deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$ , on peut en déduire la loi de toute variable aléatoire  $Z$  fonction de  $X$  et  $Y$ . Pour tout  $z \in Z(\Omega)$ , on écrit  $\{Z = z\}$  comme réunion d'événements de la forme  $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$ .

Exo  
16.12

**Ex. 8.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{X + Y = n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X = k\} \cap \{Y = n - k\}$  et donc, par additivité :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k).$$

**Ex. 9.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{X + Y = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{X = k\} \cap \{Y = n - k\}$  et donc :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k).$$

**Ex. 10. Stabilité de la loi de Poisson**

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminons la loi de  $X + Y$ .

La variable  $X + Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda + \mu)^n,\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme. Donc  $X + Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ . □

**Proposition 10**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires discrètes. Il y a équivalence entre :

- (i)  $X \perp\!\!\!\perp Y$  ;
- (ii) pour tout  $y$  de  $Y(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{Y = y\}$  est égale à la loi de  $X$ .

Démonstration page 649.

**Proposition 11 (Transfert d'indépendance)**

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, alors, pour toute fonction  $f$  définie sur  $X(\Omega)$  et toute fonction  $g$  définie sur  $Y(\Omega)$ , les variables aléatoires  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

Démonstration page 650.

**Indépendance de  $n$  variables aléatoires****Définition 5**

Les variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $E_1, \dots, E_n$  sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour toutes parties  $A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$  :

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

**Remarques**

- On dit souvent indépendantes au lieu de mutuellement indépendantes.
- L'indépendance d'un  $n$ -uplet de variables aléatoires ne dépend pas de l'ordre de ces variables.

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

### Proposition 12

Les variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $E_1, \dots, E_n$ , sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ , on a :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Démonstration page 650

**Reformulation** Les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si, et seulement si, la distribution de probabilités de  $(X_1, \dots, X_n)$  est égale au produit des distributions de probabilités de  $X_1, \dots, X_n$ .

### Remarque

- Si les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors la probabilité  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right)$  s'écrit comme un produit d'une fonction de  $x_1, \dots$ , d'une fonction de  $x_n$ .
- Comme dans le cas de deux variables aléatoires (cf. exemple 7 de la page 642), on peut démontrer que si la loi conjointe peut s'écrire sous cette forme, alors les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes (cf. exercice 16.16 pour une preuve).

### Proposition 13

Si  $(X_1, \dots, X_n)$  est une famille de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille est formée de variables mutuellement indépendantes.

Démonstration page 651

**Attention** Si les variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux. Comme dans le cas fini, la réciproque est fausse.

### Corollaire 14

Si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , à valeurs dans  $E_1, \dots, E_n$  respectivement, sont mutuellement indépendantes, alors, pour toutes parties  $A_1, \dots, A_n$  respectivement de  $E_1, \dots, E_n$ , les événements  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$  sont indépendants.

**Démonstration.** Si  $I$  est une partie non vide de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , alors d'après la proposition 13,  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes et par définition :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

Cela montre l'indépendance des événements  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ . □

**Proposition 15 (Transfert d'indépendance)**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes.

Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_i$  est définie sur  $X_i(\Omega)$ , les variables aléatoires  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont mutuellement indépendantes.

Démonstration page 651

**Remarque** La proposition précédente peut se généraliser à des variables aléatoires fonctions de plusieurs variables aléatoires  $X_k$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ). Commençons par le cas de deux fonctions.

**Proposition 16**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs respectivement dans des ensembles  $E_1, \dots, E_n$ , et  $1 \leq p < n$ .

Si  $f$  est une fonction définie sur  $E_1 \times \dots \times E_p$  et  $g$  une fonction définie sur  $E_{p+1} \times \dots \times E_n$ , alors  $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

Démonstration page 651

**Remarque** En particulier, si les variables  $X_k$  sont complexes, alors les variables  $X_1 + \dots + X_p$  et  $X_{p+1} + \dots + X_n$  sont indépendantes.

**Ex. 11.** Montrons que, si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, telles que  $X_k$  suive la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ .

On procède par récurrence sur  $n$ , la propriété étant évidente pour  $n = 1$  et ayant été démontrée pour  $n = 2$  dans l'exemple 10 de la page 643. Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$  et considérons  $n + 1$  variables indépendantes  $X_1, \dots, X_{n+1}$  suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ . Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont alors indépendantes et donc, par hypothèse de récurrence, la variable  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ . Les variables  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  étant mutuellement indépendantes, il en est de même des variables  $X_1 + \dots + X_n$  et  $X_{n+1}$ . D'après le cas de deux variables, leur somme  $X_1 + \dots + X_n + X_{n+1}$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\sum_{k=1}^n \lambda_k + \lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ .

Cela termine la démonstration par récurrence.

Ce qui précède peut se généraliser à plus de deux fonctions.

**Proposition 17 (Lemme des coalitions)**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires, mutuellement indépendantes,  $k$  un entier naturel non nul,  $I_1, \dots, I_k$  des sous-ensembles non vides et disjoints de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour tout  $j$  entre 1 et  $k$ , on considère une variable aléatoire  $Y_j$  qui est une fonction des variables  $X_i$  pour  $i \in I_j$ .

Alors les variables  $Y_1, \dots, Y_k$  sont indépendantes.

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

**Démonstration.** On montre que les  $k$  variables  $(X_i)_{i \in I_1}, (X_i)_{i \in I_2}, \dots, (X_i)_{i \in I_k}$  sont mutuellement indépendantes, comme dans la proposition 16. On en déduit que  $Y_1, \dots, Y_k$  sont mutuellement indépendantes, d'après la proposition 15 de la page précédente.  $\square$

### 3 Suites de variables aléatoires indépendantes

#### Définition 6

Une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aléatoires réelles discrètes est appelée **suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** si, pour toute partie finie  $I$  de  $\mathbb{N}$ , les variables aléatoires réelles discrètes  $X_i$ , où  $i$  décrit  $I$ , sont mutuellement indépendantes.

**Remarque** Il suffit de vérifier que, pour tout entier  $n$ , les variables  $X_0, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes. En effet, toute sous-famille finie de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est contenue dans une sous-famille de la forme  $(X_0, \dots, X_n)$ . D'après la proposition 13 de la page 644, elle est constituée de variables aléatoires mutuellement indépendantes dès que les variables  $X_0, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

#### Suite de variables aléatoires discrètes de lois données

Nous admettrons le théorème suivant.

#### Théorème 18

Exo  
16.15

Pour toute suite  $(P_n)$  de lois de probabilité discrètes, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi  $\mathbb{P}_{X_n}$  soit  $P_n$ .

#### Remarques

- En particulier, si  $P$  est une loi de probabilité discrète, il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi de  $X_n$  soit  $P$ . On dit alors que les variables sont **indépendantes identiquement distribuées** (abrégé en **i.i.d.**) Une telle suite modélise une suite d'épreuves identiques aux résultats indépendants.

**Ex. 12.** Si  $P$  est la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , on obtient une modélisation du jeu de pile ou face. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{X_n = 1\}$  et  $\{X_n = 0\}$  sont des événements, qu'on appelle respectivement obtenir pile et face ou succès et échec à la  $n$ -ième épreuve ; les variables  $X_n$  étant indépendantes, les événements  $\{X_n = 1\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , sont indépendants.

**Ex. 13.** De la même façon, si  $P$  est la loi uniforme sur  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ , on modélise l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé une infinité dénombrable de fois.

- Ce théorème est d'une grande importance pratique, car la construction d'un espace probabilisé modélisant le jeu de pile ou face est très difficile.

**Ex. 14.** Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . On note  $T$  le nombre de tirages nécessaires pour obtenir un succès (c'est-à-dire un 1) pour la première fois et  $+\infty$  si l'on n'a jamais de succès.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{T = n\} = \{X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$  est un événement, et :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0) \right) \mathbb{P}(X_n = 1) = (1-p)^{n-1} p.$$

D'autre part,  $\{T = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{X_k = 0\}$  est également un événement et, par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \{X_k = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p)^n = 0.$$

Ainsi  $T$  est une variable aléatoire discrète qui suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .



## Démonstrations

**Théorème 1** Montrons que  $\mathbb{P}_A$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

- L'application  $\mathbb{P}_A$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  car on a  $0 \leq \mathbb{P}(B \cap A) \leq \mathbb{P}(A)$ , pour tout événement  $B$ .
- On a  $\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$ .
- Soit  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements deux à deux incompatibles. La famille  $(B_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une suite d'événements deux à deux incompatibles. On a alors par  $\sigma$ -additivité :

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cap A\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n \cap A).$$

On a donc :

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_A(B_n).$$

**Théorème 2** Pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k,$$

d'où  $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ . Toutes les probabilités conditionnelles sont donc définies. Il suffit alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(A_k | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^n \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})} \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n), \end{aligned}$$

car le produit de droite est télescopique : tous les termes se simplifient deux à deux à part le dernier.

**Proposition 7** Comme  $A$  et  $B$  sont indépendants, on a  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

De l'égalité  $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ , on déduit :

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B),$$

ce qui montre que  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.

**Proposition 8** Montrons que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(B_i)$ , pour tout partie finie  $J$  non vide de  $I$ , par

réurrence sur le nombre  $n$  d'indices de  $J$  tels que  $B_i = \overline{A}_i$ .

- Si  $n = 0$ , il s'agit de démontrer que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$ , pour toute partie non vide  $J$  de  $I$ , ce qui résulte de la définition de l'indépendance des événements  $A_i$ , pour  $i \in I$ .
- Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$  et montrons-la au rang  $n+1$ . Soit  $J$  une partie finie non vide de  $I$  telle que  $\text{card}\{i \in J : B_i = \overline{A}_i\} = n+1$  et  $k \in J$  tel que  $B_k = \overline{A}_k$ . On a :

$$\bigcap_{i \in J} B_i = \bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i \setminus \bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i \cap A_k.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i \cap A_k\right).$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i \cap A_k\right) = \prod_{i \in J \setminus \{k\}} \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A_k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J \setminus \{k\}} B_i\right) = \prod_{i \in J \setminus \{k\}} \mathbb{P}(B_i),$$

car  $\text{card } \{i \in J \setminus \{k\} : B_i = \overline{A}_i\} = n$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \prod_{i \in J \setminus \{k\}} \mathbb{P}(B_i)(1 - \mathbb{P}(A_k)) = \prod_{i \in J \setminus \{k\}} \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(\overline{A}_k) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(B_i),$$

ce qui termine la récurrence.

### Proposition 9

- Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, en prenant  $A = \{x\}$  et  $B = \{y\}$  dans la définition, on obtient l'égalité  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ .
- Démontrons la réciproque. Soit  $A \subset E$  et  $B \subset F$ . Les ensembles  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  sont au plus dénombrables, donc il en est de même de leurs sous-ensembles  $A' = A \cap X(\Omega)$  et  $B' = B \cap Y(\Omega)$ , puis de  $A' \times B'$ . On a :

$$\{X \in A\} = \{X \in A'\} = \bigcup_{x \in A'} \{X = x\} \quad \text{et} \quad \{Y \in B\} = \{Y \in B'\} = \bigcup_{y \in B'} \{Y = y\}.$$

On en déduit  $\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigcup_{(x,y) \in A' \times B'} \{X = x\} \cap \{Y = y\}$ .

On a une réunion dénombrable d'événements incompatibles. On en déduit, par  $\sigma$ -additivité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in A' \times B'} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y). \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A'} \mathbb{P}(X = x)$  et  $\mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{y \in B'} \mathbb{P}(Y = y)$ , on obtient, par

produit de deux familles sommables :

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

### Proposition 10

Montrons l'équivalence entre (i) et (ii).

- Supposons que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes. Soit  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ . On a, pour tout  $x \in X(\Omega)$ , en exploitant l'indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x).$$

La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{Y = y\}$  est égale à la loi de  $X$  : donc (ii) est vérifié.

- Supposons que (ii) soit vérifié. Soit  $y \in Y(\Omega)$ .

\* Si  $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ , alors  $\{Y = y\}$  est indépendant de  $\{X = x\}$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ , car un événement négligeable est indépendant de tout événement.

\* Sinon on a, pour tout  $x \in X(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}_{\{Y=y\}}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont donc indépendantes.

## Chapitre 16. Conditionnement – Indépendance

**Proposition 11** Pour tout  $(x, y) \in f(X)(\Omega) \times g(Y)(\Omega)$ , on a :

$$\mathbb{P}(f(X) = x, g(Y) = y) = \mathbb{P}(\{X \in f^{-1}(\{x\})\} \cap \{Y \in g^{-1}(\{y\})\})$$

et, par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f(X) = x, g(Y) = y) &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{x\})) \mathbb{P}(Y \in g^{-1}(\{y\})) \\ &= \mathbb{P}(f(X) = x) \mathbb{P}(g(Y) = y).\end{aligned}$$

Ainsi  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

### Proposition 12

- Supposons  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ . En appliquant la définition de l'indépendance avec, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_i = \{x_i\}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

- Réciproquement, supposons que l'on ait :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \quad \mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on considère  $A_i \subset E_i$  ; on pose  $A'_i = A_i \cap X_i(\Omega)$  et l'on écrit :

$$\{X_i \in A_i\} = \{X_i \in A'_i\} = \bigcup_{x_i \in A'_i} \{X_i = x_i\}.$$

On obtient :

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i \in A_i\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i \in A'_i\} = \bigcup_{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A} \left( \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i = x_i\} \right),$$

où  $A = \prod_{1 \leq i \leq n} A'_i$ . Chaque  $A'_i$  est au plus dénombrable car inclus dans  $X_i(\Omega)$  qui est au plus dénombrable. Il en est de même de leur produit  $A$ . On a donc une réunion au plus dénombrable d'événements incompatibles. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i \in A_i\}\right) &= \sum_{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A} \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i = x_i\}\right) \\ &= \sum_{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A} \left( \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right).\end{aligned}$$

Comme la famille  $\left( \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right)_{(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A}$  est un produit de  $n$  familles sommables, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{x_i \in A'_i} \mathbb{P}(X_i = x_i) \right) = \prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

**Proposition 13** Soit  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et, pour tout  $i \in I$  une partie  $A_i$  de  $X_i(\Omega)$ .

On pose  $A_i = E_i$  si  $i \notin I$ . On a alors  $\{X_i \in A_i\} = \Omega$  pour  $i \notin I$ . On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in A_i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}(X_i \in A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i),$$

ce qui prouve que  $(X_i)_{i \in I}$  est une famille de variables aléatoires indépendantes.

**Proposition 15** Soit  $A_1, \dots, A_n$  des parties de  $f_1(X_1)(\Omega), \dots, f_n(X_n)(\Omega)$  respectivement. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{f_1(X_1) \in A_1\} \cap \dots \cap \{f_n(X_n) \in A_n\}) &= \mathbb{P}(\{X_1 \in f_1^{-1}(A_1)\} \cap \dots \cap \{X_n \in f_n^{-1}(A_n)\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in f_1^{-1}(A_1)) \cdots \mathbb{P}(X_n \in f_n^{-1}(A_n)) \\ &= \mathbb{P}(f_1(X_1) \in A_1) \cdots \mathbb{P}(f_n(X_n) \in A_n), \end{aligned}$$

ce qui montre l'indépendance des variables aléatoires  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ .

**Proposition 16**

- Les variables aléatoires  $V_1 = (X_1, \dots, X_p)$  et  $V_2 = (X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes. En effet, on a, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 = (x_1, \dots, x_p), V_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) \\ &= \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k = x_k) \prod_{k=p+1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k) \\ &= \mathbb{P}(V_1 = (x_1, \dots, x_p)) \mathbb{P}(V_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

car  $X_1, \dots, X_p$  d'une part, et  $X_{p+1}, \dots, X_n$  d'autre part, sont indépendantes.

- On en déduit que  $f(X_1, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes, d'après la proposition 11 de la page 643.

## S'entraîner et approfondir

### Probabilités conditionnelles

- 16.1** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . On suppose que  $X$  est sans mémoire, →<sup>638</sup> c'est-à-dire que, pour tout couple d'entiers naturels  $(k, \ell)$ , on a :

$$\mathbb{P}(X > k) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k) = \mathbb{P}(X > \ell).$$

Montrer que  $X$  suit une loi géométrique.

*Indication.* On montrera que la suite  $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

- 16.2** Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Déterminer →<sup>638</sup> la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$  où  $A$  est l'événement «  $X$  est pair ».

- 16.3** Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda > 0$ , ainsi que  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur le même espace →<sup>639</sup> probabilisé, à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et que, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $\{X = n\}$  est la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ . Déterminer la loi de  $Y$ .

#### 16.4 Taux de panne

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X \geq n) > 0. \quad (1)$$

On appelle taux de panne associé à  $X$  la suite réelle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n).$$

1. Exprimer  $p_n = \mathbb{P}(X = n)$  en fonction des  $x_k$ .
2. (a) Montrer que l'on a  $0 \leq x_n < 1$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et que la série de terme général  $x_n$  diverge.  
(b) Réciproquement, soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite à valeurs dans  $[0, 1[$  telle que la série de terme général  $x_n$  diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite  $(x_n)$ .
3. Montrer que la variable  $X$  suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est constant.

- 16.5** Des joueurs notés  $(j_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  s'affrontent à pile ou face, avec une pièce équilibrée, de la façon suivante :  $j_1$  et  $j_2$  commencent, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre  $j_3$ , le perdant est éliminé et le gagnant rencontre  $j_4, \dots$ . Est déclaré vainqueur le joueur qui gagne trois parties consécutives et le jeu s'arrête alors.

Pour  $n \geq 1$ , on note  $p_n$  la probabilité que  $j_n$  gagne le tournoi et  $q_n$  la probabilité qu'il joue.

1. Montrer que  $p_n = \frac{1}{8}q_n$ .
2. (a) Que vaut  $q_n$  pour  $1 \leq n \leq 4$ .  
(b) Montrer que, pour  $n \geq 5$ ,  $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$ .
3. Calculer  $p_n$  pour tout  $n$ .

- 16.6** Un banquier se rend chaque jour de son domicile à sa banque, puis de sa banque à son domicile. Il possède un unique parapluie. À chaque fois qu'il part, s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, alors il le prend. S'il ne pleut pas, il le laisse.

On suppose que la probabilité qu'il pleuve vaut constamment  $p \in ]0, 1[$  (on pose  $q = 1 - p$ ). Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $p_n$  la probabilité que le parapluie soit disponible là où se trouve le banquier (au domicile ou à sa banque) au bout de  $n$  trajets et  $q_n = 1 - p_n$ . La probabilité qu'il soit disponible initialement est  $p_0$ , quelconque.

1. Montrer qu'il existe  $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ .
2. En déduire que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Calculer  $p_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

### 16.7 La ruine des joueurs

Deux joueurs  $A$  et  $B$  ayant pour capitaux initiaux respectivement  $a$  et  $b$  euros ( $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ ) s'affrontent dans un jeu constitué d'une succession de parties indépendantes. À chaque partie,  $A$  a la probabilité  $p \in ]0, 1[$  de gagner et  $B$  la probabilité  $q = 1 - p$ . À l'issue de chaque partie, le perdant donne 1 euro au gagnant. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs est ruiné. On note  $R(a, b)$  la probabilité que  $A$  finisse ruiné.

1. Montrer que si  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ , alors  $R(a, b) = pR(a + 1, b - 1) + qR(a - 1, b + 1)$ .
2. Calculer  $R(a, b)$ .

*Indication.* On pourra remarquer que la capital total  $a + b$  reste fixe au cours de la partie.

3. Montrer que presque sûrement, le jeu se termine au bout d'un nombre fini de parties.
4. Calculer la limite de  $R(a, b)$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$  et  $a$  reste fixe.

## Événements indépendants

- 16.8** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements indépendants, ainsi que  $I_1, \dots, I_n$  des parties finies et deux à deux disjointes de  $I$ .<sup>640</sup>

Pour  $1 \leq j \leq n$ , on pose  $B_j = \bigcap_{i \in I_j} A_i$ .

1. Montrer que  $(B_1, \dots, B_n)$  est une famille d'événements indépendants.
2. Montrer qu'il en est de même si l'on remplace  $\bigcap_{i \in I_j} A_i$  par  $\bigcup_{i \in I_j} A_i$  dans la définition de certains événements  $B_j$ .

- 16.9** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements, mutuellement indépendants.

1. Montrer que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_i})$ .

2. On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$ .

Montrer que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$  si, et seulement si, la série de terme général  $\mathbb{P}(A_n)$  diverge.

3. On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{(n + 2)^2}$ .

- (a) Calculer  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$ .

- (b) Calculer la probabilité qu'un seul événement de la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se réalise.

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

- 16.10** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad C_n = \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{puis} \quad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \quad \text{et} \quad C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

On dit que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si  $B = C$  et, par définition, sa limite  $A$  est alors  $A = B = C$ .

1. Montrer que si la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $A$  est un événement et la suite  $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mathbb{P}(A)$ .
2. On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les événements  $B_n$  et  $C_n$  sont indépendants.
  - (a) Montrer que  $B$  et  $C$  sont indépendants.
  - (b) Montrer que si, de plus, la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

## Variables aléatoires indépendantes

- 16.11** Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres  $\rightarrow^{642}$  respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ , ainsi que  $n \in \mathbb{N}$ .

Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{X + Y = n\}$ .

- 16.12** Pour  $a < b$ , notons  $N_{a,b}$  le nombre de clients se présentant dans un magasin dans l'intervalle  $\rightarrow^{642}$  de temps  $[a, b[$ . Soit  $a < b < c$ ; on suppose que les variables  $N_{a,b}$  et  $N_{b,c}$  sont indépendantes et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'événement  $\{N_{a,c} = n\}$  est de probabilité non nulle et la loi de  $N_{a,b}$  sachant  $\{N_{a,c} = n\}$  est  $\mathcal{B}(n, p)$ , avec  $p = (b-a)/(c-a)$ .

1. Montrer que pour tout  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k) \mathbb{P}(N_{b,c}=\ell)}{\mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)} = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell.$$

2. En déduire qu'il existe une constante  $\lambda$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(N_{a,b}=n) = \frac{\lambda}{n} \mathbb{P}(N_{a,b}=n-1).$$

3. En déduire que  $N_{a,b}$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

- 16.13** Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres  $\rightarrow^{644}$  respectifs  $p_1, \dots, p_n$ . Montrer que  $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$  suit aussi une loi géométrique.

- 16.14** Montrer que des événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants si, et seulement  $\rightarrow^{644}$  si, les variables aléatoires  $\mathbf{1}_{A_1}, \dots, \mathbf{1}_{A_n}$  sont mutuellement indépendantes.

### 16.15 Temps d'attente du $r$ -ième succès

- $\rightarrow^{646}$  Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ , on considère la variable aléatoire  $Y_r$  telle que  $Y_r = n$  si l'on obtient le  $r$ -ième 1 au rang  $n$  et  $Y_r = +\infty$  si l'on n'obtient jamais  $r$  1.

Montrer que  $Y_r$  est une variable aléatoire. Déterminer la loi de  $Y_r$ . On dit que  $Y_r$  suit la *loi de Pascal* de paramètre  $(r, p)$ .

- 16.16** On suppose que la loi conjointe du  $n$ -uplet de variables aléatoires discrètes  $(X_1, \dots, X_n)$  s'écrit :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(x_k),$$

où pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi_k$  est une fonction définie sur  $X_k(\Omega)$ .

Montrer que les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et que, à une constante multiplicative près, la fonction  $\varphi_k$ , pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , est la distribution de probabilités de  $X_k$ .

- 16.17** On considère  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et de même loi. On pose  $D = X - Y$  et  $I = \min(X, Y)$ .

1. On suppose que pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ , où  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .
  - (a) Déterminer la loi de  $(D, I)$ .
  - (b) Déterminer les lois marginales de  $D$  et  $I$ . Vérifier que  $D$  et  $I$  sont indépendantes.
2. On suppose que les variables  $D$  et  $I$  sont indépendantes et que  $\mathbb{P}(X = n) \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer qu'il existe  $p \in ]0, 1[$ , tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^k \quad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

### 16.18 Une caractérisation de la loi de Poisson

On effectue une épreuve aléatoire dont le résultat est un entier naturel  $n$  ; on procède alors à  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On note  $S$  le nombre de succès et  $E$  le nombre d'échecs.

Toute cette expérience aléatoire peut être modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , sur lequel on considère une variable aléatoire discrète  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , une variable  $X_n$  suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$  telles que  $(N, X_1, X_2, \dots)$  soit une suite de variables indépendantes.

On suppose que  $\mathbb{P}(N = n) \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a alors  $S = X_1 + \dots + X_N$  et  $E = N - S$ .

1. On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .  
Montrer que les variables  $S$  et  $E$  suivent aussi des lois de Poisson, dont on déterminera les paramètres et sont indépendantes.
2. Montrer réciproquement que si  $S$  et  $E$  sont indépendantes, alors  $N$  suit une loi de Poisson. Pour cela, on montrera :
  - (a) qu'il existe deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad (m+n)! \mathbb{P}(N = m+n) = u_m v_n ;$$

- (b) que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont géométriques.

- 16.19** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Y_r$  le temps d'attente du  $r$ -ième 1. On pose  $Z_1 = Y_1$  et pour  $k \geq 2$ ,  $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$ .

Démontrer que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d..

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

**16.20** Toutes les variables considérées dans cet exercice sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  est dite symétrique si :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = -n).$$

1. (a) Montrer que si  $X$  est symétrique, alors on a  $\mathbb{P}(X > 0) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \geq 0)$ .
- (b) Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires symétriques indépendantes, alors  $X + Y$  est symétrique.
2. On considère des variables aléatoires symétriques  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$  et, de plus, on note :

$$\Omega_k = \left\{ \max_{1 \leq j \leq k-1} S_j \leq x \right\} \cap \{S_k > x\} \quad \text{si } k \geq 2 \quad \text{et} \quad \Omega_1 = \{S_1 > x\}.$$

- (a) Montrer que  $X_1 + \dots + X_n$  est symétrique.
- (b) Montrer que, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subset \{S_n > x\} \cap \Omega_k \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}(\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(\Omega_k).$$

- (c) Prouver que  $\bigcup_{k=1}^n \Omega_k = \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} S_j > x \right\}$ .
- (d) En déduire l'inégalité de Paul Lévy :  $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n} S_j > x\right) \leq 2\mathbb{P}(S_n > x)$ .

### \* 16.21 Chaînes de Markov

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  une matrice telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad p_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$$

(on dit que  $P$  est une *matrice stochastique*) et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes, à valeurs dans  $\llbracket 1, N \rrbracket$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $x_0, \dots, x_{n+1}$  dans  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , on ait :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}},$$

quand les probabilités conditionnelles sont définies. On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *chaîne de Markov homogène* et  $P$  est appelée *matrice de transition* de la chaîne.

1. Soit  $x_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$  tel que  $\mathbb{P}(X_0 = x_0) \neq 0$ .

- (a) Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n$  dans  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

- (b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0) = p_{x_0, x_n}^{(n)},$$

où  $p_{x_0, x_n}^{(n)}$  est le coefficient d'indice  $(x_0, x_n)$  de la matrice  $P^n$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_{n+k}$  dans  $\llbracket 1, N \rrbracket$  tels que  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \neq 0$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ = \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_0). \end{aligned}$$

- 16.22** Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres premiers. Pour  $s > 1$ , on note  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Justifier que l'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $A_n$  : «  $n$  divise  $X$  ». Montrer que  $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$  est une famille d'événements indépendants. En déduire une preuve probabiliste de :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

3. Montrer que la probabilité qu'aucun carré différent de 1 ne divise  $X$  vaut  $\frac{1}{\zeta(2s)}$ .

- 16.23** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On note  $q = 1 - p$ . On cherche à calculer, pour tout entier  $n \geq 2$ , la probabilité de l'événement :

$$A_n = \{X_1 < \dots < X_n\}.$$

Pour  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , avec  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ , on pose :

$$u_n = \mathbb{P}(A_n), \quad B_{n,k} = A_n \cap \{X_1 = k\} \quad \text{et} \quad v_{n,k} = \mathbb{P}(B_{n,k}).$$

Enfin, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\pi_n = \prod_{j=1}^n (1 - q^j)$ .

1. Calculer  $u_2$ .
2. Montrer, pour  $n \geq 3$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}$ .
3. En déduire que, pour  $n \geq 2$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}} (pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}$ , où  $\alpha_n$  est un entier que l'on précisera.
4. En déduire que, pour  $n \geq 2$ ,  $u_n = \frac{1}{\pi_n} p^{\beta_n} q^{\gamma_n}$ , où  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  sont des entiers que l'on précisera.

## Solutions des exercices

**16.1** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \mathbb{P}(X > n)$ . On a  $u_n \neq 0$ .

Comme  $\{X > n+1\} \subset \{X > n\}$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\mathbb{P}(X > n+1)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\mathbb{P}(\{X > n+1\} \cap \{X > n\})}{\mathbb{P}(X > n)} \\ &= \mathbb{P}(X > n+1 \mid X > n) = \mathbb{P}(X > 1) = u_1.\end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $u_1$ , donc  $u_n = u_1 \times u_1^{n-1} = u_1^n$ , pour tout  $n \geq 1$ . Cela reste vrai pour  $n = 0$ , car  $u_0 = \mathbb{P}(X > 0) = 1$ . On en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = u_{n-1} - u_n = u_1^{n-1} - u_1^n = u_1^{n-1}(1 - u_1).$$

On sait que  $u_1 \neq 0$ . D'autre part,  $u_1 \neq 1$ , car sinon  $\mathbb{P}(X = n) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , ce qui est impossible car  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Ainsi  $1 - u_1 \in ]0, 1[$  et  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - u_1$ .

**16.2** On a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{pq}{1-q^2},$$

donc  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(X = n \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = n\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ .

Si  $n$  est impair, alors  $\mathbb{P}(X = n \mid A) = 0$  et si  $n$  est pair, alors  $\mathbb{P}(X = n \mid A) = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(A)}$ .

On en déduit, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(X = 2k \mid A) = \frac{pq^{2k-1}}{\frac{pq}{1-q^2}} = (1 - q^2)(q^2)^{k-1}.$$

On voit que la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $A$  est la loi de  $2Z$ , où  $Z$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^2$ .

**16.3** • Soit  $(m, k) \in \mathbb{N}^2$ . Par définition de la loi binomiale, on a :

$$\mathbb{P}(Y = k \mid X = m) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \in \llbracket 0, m \rrbracket \\ 0 & \text{si } k > m, \end{cases}$$

et donc, par définition de la loi conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k, X = m) &= \mathbb{P}(X = k \mid Y = m) \mathbb{P}(Y = m) \\ &= \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} & \text{si } k \in \llbracket 0, m \rrbracket \\ 0 & \text{si } k > m. \end{cases}\end{aligned}$$

- On en déduit que, pour tout entier naturel  $k$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, X = m) \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \\ &= (p\lambda)^k \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{m-k}}{(m-k)!} \\ &= (p\lambda)^k \frac{1}{k!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}.\end{aligned}$$

Donc  $Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $p\lambda$ .

- 16.4** 1. On commence par exprimer  $\mathbb{P}(X \geq n)$  en fonction des  $x_k$ . On a  $\{X = n\} \subset \{X \geq n\}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)}$ . On en déduit :

$$x_n \mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1),$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X \geq n+1) = (1 - x_n) \mathbb{P}(X \geq n).$$

Comme  $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$ , on en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en itérant cette relation :

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) \quad \text{puis} \quad p_n = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k).$$

2. (a) On a  $x_n \in [0, 1]$ , car  $x_n$  est la probabilité d'un événement. Si  $x_n = 1$ , alors, d'après la question 1,  $\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi  $x_n \in [0, 1[$ . On a pour tout  $n \geq 1$  :

$$\ln \mathbb{P}(X \geq n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - x_k).$$

De  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \geq n+1) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X \leq n) = 0$  (cf. exercice 15.10 de la page 623), on déduit la divergence de la série de terme général  $\ln(1 - x_n)$ . Celle-ci implique la divergence de la série de terme général  $x_n$ .

En effet, si  $\sum x_n$  convergeait, alors la suite  $(x_n)$  tendrait vers 0. On aurait  $-\ln(1 - x_n) \sim x_n$ , ce qui impliquerait la convergence de la série de terme général positif  $-\ln(1 - x_n)$  par théorème de comparaison.

- (b) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$ . Alors  $p_n \in [0, 1]$ .

On a pour tout  $n \geq 1$  :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) - \prod_{k=1}^n (1 - x_k).$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - x_k).$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

La série de terme général  $x_k$  diverge donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - x_k) = 0$  car :

$$\ln \prod_{k=1}^n (1 - x_k) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - x_k) \leq - \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow -\infty.$$

On obtient  $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$ . La suite  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  définit la loi d'une variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $x_k \neq 1$  pour tout  $k \geq 1$ , donc  $\mathbb{P}(Y < n) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k < 1$ . On en déduit  $\mathbb{P}(Y \geq n) > 0$ . Enfin on a :

$$\mathbb{P}(Y = n \mid Y \geq n) = \frac{p_n}{\mathbb{P}(Y \geq n)} = \frac{p_n}{1 - \mathbb{P}(Y < n)} = \frac{x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)} = x_n,$$

donc  $(x_n)$  est le taux de panne de la variable aléatoire  $Y$ .

3. • Si  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad \mathbb{P}(X \geq n) = (1 - p)^{n-1} \quad \text{et} \quad x_n = p.$$

- Si le taux de panne est constant, égal à  $p$ , alors  $p \in [0, 1[$  et, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $p_n = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = p(1 - p)^{n-1}$ .

On voit que  $p$  ne peut pas être nul, car  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n = 1$ , donc  $p \in ]0, 1[$  et  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

- 16.5** 1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $J_n$  l'événement « le joueur  $j_n$  joue » et  $G_n$  l'événement « le joueur  $j_n$  gagne ». Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$p_n = \mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(G_n \cap J_n) = \mathbb{P}(G_n \mid J_n) \mathbb{P}(J_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 q_n = \frac{1}{8} q_n,$$

car si  $j_n$  joue, alors il gagne si, et seulement s'il est vainqueur de trois parties successives.

2. (a) Pour  $n \leq 4$ , le joueur  $j_n$  est sûr de jouer car on joue en tout au moins trois parties. On a donc  $q_n = 1$  si  $1 \leq n \leq 4$ .
- (b) Pour  $n \geq 5$ , le joueur  $j_n$  entre en jeu contre  $j_{n-1}$  ou  $j_{n-2}$ . En effet, si  $k \geq 3$ ,  $j_k$  entre en jeu contre un joueur  $j_\ell$  avec  $\ell < k$  puis, au plus, joue contre  $j_{k+1}$  et  $j_{k+2}$ . Ainsi, si  $k \leq n-3$ ,  $j_k$  ne peut pas rencontrer  $j_n$ . On note  $J_n^1$  (respectivement  $J_n^2$ ) l'événement «  $j_n$  joue et rencontre  $j_{n-1}$  » (respectivement «  $j_n$  joue et rencontre  $j_{n-2}$  »). Ces événements sont incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}(J_n) = \mathbb{P}(J_n^1) + \mathbb{P}(J_n^2) = \mathbb{P}(J_n^1 \cap J_{n-1}) + \mathbb{P}(J_n^2 \cap J_{n-2}) \\ &= \mathbb{P}(J_n^1 \mid J_{n-1}) \mathbb{P}(J_{n-1}) + \mathbb{P}(J_n^2 \mid J_{n-2}) \mathbb{P}(J_{n-2}) \\ &= \frac{1}{2} q_{n-1} + \frac{1}{4} q_{n-2}. \end{aligned}$$

En effet, si  $j_{n-1}$  est rentré dans la partie, pour qu'il rencontre  $j_n$ , il faut et il suffit qu'il gagne sa première partie contre un adversaire rentré avant lui ; de même, une

fois que  $j_{n-2}$  est rentré dans la partie, pour qu'il rencontre  $j_n$ , il faut et il suffit qu'il gagne sa première partie contre un adversaire rentré avant lui et qu'il gagne contre  $j_{n-1}$ .

3. La suite  $(q_n)_{n \geq 3}$  vérifie une relation de récurrence linéaire sur deux termes d'équation caractéristique  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ , de solutions  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ . Il existe donc  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $n \geq 3$  :

$$q_n = \alpha \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n.$$

Pour gérer plus facilement les conditions initiales, on considère la suite  $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence  $q'_n = \frac{1}{2}q'_{n-1} + \frac{1}{4}q'_{n-2}$ , avec  $q'_3 = q_3$  et  $q'_4 = q_4$ . On a alors  $q'_n = q_n$  pour  $n \geq 3$  et  $q'_n = \alpha \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On obtient  $q'_2 = 2$ ,  $q'_1 = 0$  et  $q'_0 = 8$ . Les conditions  $q'_0 = 8$  et  $q'_1 = 0$  permettent de déterminer  $\alpha = \frac{4(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}}$  et  $\beta = \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5}}$ . On obtient, pour tout  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{4}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} \right) \\ p_n &= \frac{1}{8}q_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1} \right). \end{aligned}$$

- 16.6** 1. On note  $A_n$  (respectivement  $B_n$ ) l'événement « le parapluie est disponible (respectivement indisponible) au bout de  $n$  trajets ». Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on applique la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements  $(A_n, B_n)$ . On obtient :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}).$$

Si  $p_n \neq 0$ , alors  $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = p$ , car si le parapluie est disponible après  $n$  déplacements, il faut que le banquier l'emporte, c'est-à-dire qu'il pleuve, pour qu'il reste disponible après  $n+1$  déplacements ; on a donc  $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = p p_n$ . Cette formule reste valable si  $p_n = 0$ , car alors on a également  $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = 0$ .

On a  $B_n \subset A_{n+1}$ , car si après  $n$  déplacements le parapluie n'est pas disponible, il le deviendra après  $n+1$  déplacements. On a donc  $\mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n) = q_n$ . On obtient :

$$p_{n+1} = p p_n + q_n.$$

On trouve de même :

$$q_{n+1} = q p_n + 0 q_n$$

et donc  $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ , avec  $S = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ .

2. On diagonalise  $S$  : les valeurs propres sont  $1$  et  $-q$  ; une base de vecteurs propres est  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . On obtient :

$$S = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que les suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  convergent. On note  $p_\infty$  et  $q_\infty$  leurs limites. On a :

$$\begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix},$$

car  $p_0 + q_0 = 1$ . On a donc  $p_\infty = \frac{1}{1+q}$ .

**16.7** L'espace probabilisé qui modélise cette situation est celui d'un jeu infini de pile ou face. En effet, on a une suite de parties indépendantes, à deux issues.

- Pour  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , on note  $A_{a,b}$  l'événement « si les joueurs débutent la partie avec des capitaux respectifs de  $a$  et  $b$  euros, alors  $A$  finira ruiné ». En appliquant la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements  $(G_1, \overline{G_1})$ , où  $G_1$  est l'événement «  $A$  gagne la première partie », on trouve, pour  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$  :

$$\begin{aligned} R(a, b) &= \mathbb{P}(A_{a,b}) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(A_{a,b} | G_1) + \mathbb{P}(\overline{G_1})\mathbb{P}(A_{a,b} | \overline{G_1}) \\ &= pR(a+1, b-1) + qR(a-1, b+1). \end{aligned}$$

En effet, si  $A$  gagne la première partie, il dispose avant d'entreprendre les parties suivantes de  $a+1$  euros et  $B$  de  $b-1$  euros. Le raisonnement est le même dans l'autre cas.

- Tout au long de la partie, le capital total des deux joueurs reste constant.

On le note  $N$ . Ainsi,  $R(a, b) = R(a, N-a)$  ne dépend que de  $a$  : on le note  $u_a$ .

On a donc  $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$ , c'est-à-dire :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a - \frac{q}{p}u_{a-1}.$$

On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{q}{p} = 0$ .

Une des racines est 1, l'autre est donc  $\frac{q}{p}$ .

- Premier cas :  $p \neq q$ , c'est-à-dire  $p \neq \frac{1}{2}$ .

Il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $u_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a$ .

On remarque que  $u_0 = 1$ , car si le capital de  $A$  est nul, il est ruiné d'emblée. De même,  $u_N = 0$ , car alors c'est  $B$  qui est ruiné. On en déduit :

$$\alpha = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad \beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \quad \text{puis} \quad u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

En reprenant la notation initiale, on a :

$$R(a, b) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

- Second cas :  $p = q$ , c'est-à-dire  $p = \frac{1}{2}$ .

Il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $u_a = \alpha + \beta a$ .

De  $u_0 = 1$  et  $u_N = 0$ , on tire  $\alpha = 1$  et  $\beta = -\frac{1}{N}$  et donc  $u_a = 1 - \frac{a}{N}$ . On conclut :

$$R(a, b) = \frac{b}{a+b}.$$

3. La probabilité de ruine  $S(a, b)$  du joueur  $B$  quand les capitaux initiaux sont  $a$  et  $b$  s'obtient à partir de  $R(a, b)$  en échangeant les rôles, c'est-à-dire en échangeant  $p$  et  $q$  d'une part,  $a$  et  $b$  d'autre part. On obtient :

$$S(a, b) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} \quad \text{si } p \neq q \quad \text{et} \quad S(a, b) = \frac{a}{a+b} \quad \text{si } p = q.$$

Le jeu s'arrête quand l'un des joueurs est ruiné. La probabilité que la partie s'arrête au bout d'un nombre fini de parties est donc  $R(a, b) + S(a, b)$ . Si  $p \neq q$ , on obtient :

$$R(a, b) + S(a, b) = \frac{q^a p^b - q^{a+b}}{p^{a+b} - q^{a+b}} + \frac{q^a p^b - p^{a+b}}{q^{a+b} - p^{a+b}} = 1.$$

Ce résultat est évident pour  $p = q$ . Il est donc presque sûr que le jeu s'arrêtera au bout d'un nombre fini de parties.

4. Si  $p \leq q$ , on trouve  $\lim_{b \rightarrow +\infty} R(a, b) = 1$ .

Si  $p > q$ , on trouve  $\lim_{b \rightarrow +\infty} R(a, b) = \left(\frac{p}{q}\right)^a$ .

- 16.8 1. Soit  $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a, par indépendance de la famille  $(A_i)_{i \in I}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \bigcup_{j \in J} I_j} A_i\right) = \prod_{i \in \bigcup_{j \in J} I_j} \mathbb{P}(A_i) \\ &= \prod_{j \in J} \left( \prod_{i \in I_j} \mathbb{P}(A_i) \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(B_j). \end{aligned}$$

Donc  $(B_1, \dots, B_n)$  est une famille d'événements indépendants.

2. Posons  $C_j = B_j$  si  $B_j = \bigcap_{i \in I_j} A_i$  et  $C_j = \overline{B_j} = \bigcap_{i \in I_j} \overline{A_i}$  si  $B_j = \bigcup_{i \in I_j} A_i$ . Alors l'Indépendance de  $(C_1, \dots, C_n)$  résulte de la proposition 8 et de la première question de l'exercice.

En appliquant de nouveau la proposition 8, on en déduit que  $(B_1, \dots, B_n)$  est une famille d'événements indépendants.

- 16.9 1. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right)$$

donc, par continuité décroissante et indépendance des événements  $A_n$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_i}).$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

2. D'après la question précédente,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$  équivaut à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 0$ .

Comme tous les termes du produit sont strictement positifs, cela équivaut à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \ln(\mathbb{P}(\overline{A_i})) = -\infty,$$

c'est-à-dire à la divergence de la série  $\sum \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ .

- Si  $\mathbb{P}(A_n)$  ne tend pas vers 0, alors les séries de termes généraux  $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$  et  $\mathbb{P}(A_n)$  sont grossièrement divergentes.

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ , alors  $\ln \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \sim \underbrace{-\mathbb{P}(A_n)}_{\leq 0}$ . Les séries de terme général  $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$  et  $\mathbb{P}(A_n)$  ont même nature.

Ainsi, on a  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$  si, et seulement si, la série de terme général  $\mathbb{P}(A_n)$  diverge.

3. La condition  $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est réalisée.

(a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_i}) &= \prod_{i=0}^n \left(1 - \frac{1}{(i+2)^2}\right) = \prod_{i=0}^n \frac{(i+1)(i+3)}{(i+2)^2} \\ &= \frac{(n+1)!(n+3)!}{2((n+2)!)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Notons  $B_n$  l'événement « seul l'événement  $A_n$  se réalise ». On a, par continuité décroissante et indépendance :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcap_{i \neq n} \overline{A_i}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(A_n \cap \bigcap_{\substack{0 \leq i \leq N \\ i \neq n}} \overline{A_i}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) \prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ i \neq n}} \mathbb{P}(\overline{A_i}). \end{aligned}$$

Pour  $N > n$ , on a, d'après le calcul mené dans la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) \prod_{\substack{0 \leq i \leq N \\ i \neq n}} \mathbb{P}(\overline{A_i}) &= \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\overline{A_n})} \prod_{0 \leq i \leq N} \mathbb{P}(\overline{A_i}) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+3)} \times \frac{N+3}{2(N+2)}. \end{aligned}$$

On en déduit :  $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2(n+1)(n+3)}$ .

L'événement  $B$  « un seul événement  $A_n$  se réalise » est  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

C'est une réunion dénombrable d'événements incompatibles donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)(n+3)} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

- 16.10** 1. On suppose que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  et  $C_n$  sont des événements donc  $B$  et  $C$  sont des événements (car une réunion ou une intersection d'un nombre dénombrable d'événements est un événement). Comme  $A = B = C$ , on en déduit que  $A$  est un événement.

La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante donc, par continuité monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n).$$

On a de plus,  $C_n \subset A_n \subset B_n$ , donc  $\mathbb{P}(C_n) \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(B_n)$  puis, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

2. (a) Les suites  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\overline{C_n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes. Il en est donc de même de la suite  $(B_n \cap \overline{C_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Comme :

$$B \cap \overline{C} = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{C_n} \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap \overline{C_n}),$$

on a, par continuité décroissante et indépendance des événements  $B_n$  et  $\overline{C_n}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap \overline{C}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n \cap \overline{C_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}(\overline{C_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\overline{C_n}) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(\overline{C}).\end{aligned}$$

Les événements  $B$  et  $\overline{C}$  sont donc indépendants. On sait qu'alors il en est de même de  $B$  et  $C$ .

- (b) On a  $B = C = A$ . Donc d'après la question précédente,  $A$  est indépendant de lui-même. On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(A),$$

donc  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

- 16.11** Il a été démontré dans l'exemple 10 de la page 643 que  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ . On a, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}(X = k, X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}.\end{aligned}$$

Cette probabilité est nulle si  $k > n$  et on obtient, si  $k \leq n$  :

$$\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n} = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)^k \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{n-k}.$$

La loi de  $X$  sachant  $\{X + Y = n\}$  est la loi binomiale de paramètre  $\left( n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)$ .

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

- 16.12** 1. Il est clair que  $N_{a,c} = N_{a,b} + N_{b,c}$ . On a, pour tout  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ , par indépendance de  $N_{a,b}$  et  $N_{b,c}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell) &= \mathbb{P}(N_{a,b}=k, N_{b,c}=\ell) = \mathbb{P}(N_{a,b}=k, N_{a,c}-N_{a,b}=\ell) \\ &= \mathbb{P}(N_{a,b}=k, N_{a,c}=k+\ell) \\ &= \mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)\mathbb{P}(N_{a,b}=k \mid N_{a,c}=k+\ell) \\ &= \mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^\ell.\end{aligned}$$

En divisant par  $\mathbb{P}(N_{a,c}=k+\ell)$  qui n'est pas nul, on obtient le résultat voulu.

2. De la première question, on déduit  $\mathbb{P}(N_{a,b}=k) \neq 0$  et  $\mathbb{P}(N_{b,c}=\ell) \neq 0$ , pour tout  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ , car le second membre de l'égalité ne s'annule pas.

On obtient, en particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\mathbb{P}(N_{b,c}=0)}{\mathbb{P}(N_{a,c}=k)} = p^k$$

et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)\mathbb{P}(N_{b,c}=1)}{\mathbb{P}(N_{a,c}=k)} = kp^{k-1}(1-p).$$

En divisant ces deux égalités, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)\mathbb{P}(N_{b,c}=0)}{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)\mathbb{P}(N_{b,c}=1)} = \frac{p}{k(1-p)},$$

c'est-à-dire, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\mathbb{P}(N_{a,b}=k)}{\mathbb{P}(N_{a,b}=k-1)} = \frac{\lambda}{k}$ , où  $\lambda = \frac{p\mathbb{P}(N_{b,c}=1)}{(1-p)\mathbb{P}(N_{b,c}=0)}$ .

3. Par récurrence immédiate à partir du résultat de la question précédente, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N_{a,b}=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{P}(N_{a,b}=0).$$

Sachant que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_{a,b}=k) = 1$ , on a  $e^\lambda \mathbb{P}(N_{a,b}=0) = 1$  et donc  $\mathbb{P}(N_{a,b}=0) = e^{-\lambda}$ .

Ainsi  $N_{a,b}$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

- 16.13** La variable  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Pour tous réels  $x_1, \dots, x_n, y$ , on a :

$$\min(x_1, \dots, x_n) \geq y \iff \forall i \in [1, n] \quad x_i \geq y.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a donc  $\{Y \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \dots \cap \{X_n \geq k\}$ , d'où l'on déduit, par indépendance des variables  $X_i$  :

$$\mathbb{P}(Y \geq k) = \mathbb{P}(\{X_1 \geq k\} \cap \dots \cap \{X_n \geq k\})$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq k) = \prod_{i=1}^n (1-p_i)^{k-1} = \left( \prod_{i=1}^n (1-p_i) \right)^{k-1}.$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k+1) = \left( \prod_{i=1}^n (1-p_i) \right)^{k-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i) \right).$$

Ainsi,  $Y$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i)$ .

**16.14** On remarque que, pour tout événement  $A$ , on a  $\{\mathbb{1}_A = 1\} = A$  et  $\{\mathbb{1}_A = 0\} = \overline{A}$ .

- Supposons les événements  $A_1, \dots, A_n$  mutuellement indépendants.

On a, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  :

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_1} = x_1, \dots, \mathbb{1}_{A_n} = x_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n),$$

où  $B_i = A_i$  si  $x_i = 1$  et  $B_i = \overline{A_i}$  si  $x_i = 0$ . Les événements  $A_1, \dots, A_n$  étant indépendants, il en est de même des événements  $B_1, \dots, B_n$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_1} = x_1, \dots, \mathbb{1}_{A_n} = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i} = x_i).$$

Les variables  $\mathbb{1}_{A_1}, \dots, \mathbb{1}_{A_n}$  sont donc mutuellement indépendantes.

- Supposons les variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit  $I$  une partie non vide de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . D'après la proposition 13 de la page 644,  $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in I}$  est encore une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, donc on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{\mathbb{1}_{A_i} = 1\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{A_i} = 1) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont donc mutuellement indépendants.

**16.15** L'application  $Y_r$  est à valeurs dans l'ensemble dénombrable  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .

- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si  $k < r$ , on a  $\{Y_r = k\} = \emptyset$  et si  $k \geq r$ , on a :

$$\{Y_r = k\} = \bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1, k-1 \rrbracket \\ \text{card } I = r-1}} \left( \bigcap_{i \in I} \{X_i = 1\} \right) \cap \left( \bigcap_{i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \setminus I} \{X_i = 0\} \right) \cap \{X_r = 1\}.$$

En effet, la  $k$ -ième épreuve correspond au  $r$ -ième 1 et dans les  $k-1$  premières épreuves, il doit y avoir  $r-1$  1 (et donc  $k-r$  0). Ainsi  $\{Y_r = k\} \in \mathcal{A}$  et :

$$\mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r},$$

car c'est la réunion disjointe de  $\binom{k-1}{r-1}$  événements de probabilité  $p^r q^{k-r}$ .

- On a  $\{Y_r = +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{\{Y_r = k\}}$ , donc  $\{Y_r = +\infty\}$  est un événement. Il est inclus dans l'événement  $H$  : « il existe un rang à partir duquel toutes les épreuves donnent 0 » qui peut s'écrire  $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{X_k = 0\}$ . On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq n} \{X_k = 0\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^N \{X_k = 0\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N-n+1} = 0.$$

L'événement  $H$  qui est une réunion dénombrable d'événements négligeables est donc négligeable. *A fortiori* l'événement  $\{Y_r = +\infty\}$  est négligeable.

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

**16.16** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour tout  $x_k \in X_k(\Omega)$ , on a :

$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n),$$

où  $A_k = X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k-1}(\Omega) \times X_{k+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_k = x_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A_k} \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i) = C_k \varphi_k(x_k),$$

où  $C_k = \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in A_k} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \varphi_i(x_i)$ . La fonction  $\varphi_k$  est bien à constante multiplicative près la distribution de probabilités de  $X_k$ .

En posant  $C = \prod_{k=1}^n C_k$ , l'hypothèse peut se réécrire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad C \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

En sommant sur  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , on obtient :

$$C = \prod_{k=1}^n \sum_{x_k \in X_k(\Omega)} \mathbb{P}(X_k = x_k) = 1,$$

car on reconnaît un produit de familles sommables. On a ainsi :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k),$$

donc les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.

**16.17** 1. (a) On a  $D(\Omega) = \mathbb{Z}$  et  $I(\Omega) = \mathbb{N}$ . Soit  $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

- Si  $k \geq 0$ , alors on a :

$$\{D = k\} \cap \{I = \ell\} = \{X - Y = k\} \cap \{Y = \ell\} = \{X = k + \ell\} \cap \{Y = \ell\}$$

et donc, par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbb{P}(D = k, I = \ell) = \mathbb{P}(X = k + \ell) \mathbb{P}(Y = \ell) = pq^{k+\ell} pq^\ell = p^2 q^{k+2\ell}.$$

- Si  $k < 0$ , alors on a :

$$\{D = k\} \cap \{I = \ell\} = \{X - Y = k\} \cap \{X = \ell\} = \{X = \ell\} \cap \{Y = -k + \ell\}$$

et donc, par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\mathbb{P}(D = k, I = \ell) = \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}(Y = -k + \ell) = pq^\ell pq^{-k+\ell} = p^2 q^{-k+2\ell}.$$

Dans tous les cas, on trouve  $\mathbb{P}(D = k, I = \ell) = p^2 q^{|k|+2\ell}$ .

- (b) On peut écrire, pour  $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(D = k, I = \ell) = p^2 q^{|k|} q^{2\ell} = (p^2 q^{|k|}) q^{2\ell},$$

produit d'une fonction de  $k$  et d'une fonction de  $\ell$ . D'après l'exemple 7 de la page 642, les variables  $D$  et  $I$  sont indépendantes et, à une constante multiplicative près, la famille  $(q^{2\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$  est la distribution de probabilité de  $I$ .

Comme  $\sum_{\ell=0}^{+\infty} q^{2\ell} = \frac{1}{1-q^2}$ , on a donc :

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(I = \ell) = (1 - q^2) q^{2\ell} = p(1 + q) q^{2\ell}.$$

On en déduit, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathbb{P}(D = k) = \frac{\mathbb{P}(D = k, I = \ell)}{\mathbb{P}(I = \ell)} = \frac{pq^{|k|}}{1 + q}.$$

2. Soit  $\ell \in \mathbb{N}$ . Comme précédemment, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \{D = k\} \cap \{I = \ell\} = \{X = k + \ell\} \cap \{Y = \ell\}.$$

Par indépendance de  $X$  et  $Y$  d'une part, de  $D$  et  $I$  d'autre part, on en déduit :

$$\mathbb{P}(D = k)\mathbb{P}(I = \ell) = \mathbb{P}(X = k + \ell)\mathbb{P}(Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k + \ell)\mathbb{P}(X = \ell) \neq 0,$$

par hypothèse. On a en particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(D = k)\mathbb{P}(I = 0) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(X = 0)$$

$$\mathbb{P}(D = k)\mathbb{P}(I = 1) = \mathbb{P}(X = k + 1)\mathbb{P}(X = 1).$$

En divisant les égalités, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}(X = k + 1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \frac{\mathbb{P}(I = 1)\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(I = 0)\mathbb{P}(X = 1)}.$$

Ce rapport est indépendant de  $k$  et strictement positif. On le note  $q$ .

La suite  $(\mathbb{P}(X = k))$  est géométrique de raison  $q$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)q^k$ . La série  $\sum \mathbb{P}(X = k)$  converge et a pour somme 1 donc  $q < 1$  et  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - q$ . En posant  $p = 1 - q$ , on a le résultat voulu.

- 16.18** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $S$  sachant  $\{N = n\}$  est la loi de la somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ , c'est-à-dire la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ . D'autre part,  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On montre, comme dans l'exercice 16.3 de la page 652, que  $S$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda p$ . De la même façon, la loi de  $E$  sachant  $N = n$  est la loi binomiale de paramètre  $(n, 1 - p)$  donc  $E$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda(1 - p)$ .

On remarque que  $S + E = N$ . On a donc, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S = m\} \cap \{E = n\}) &= \mathbb{P}(\{S = m\} \cap \{N = m + n\}) \\ &= \mathbb{P}(N = m + n) \mathbb{P}(S = m \mid N = m + n) \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{m+n}}{(m+n)!} \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n \\ &= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^m}{m!} \times \frac{e^{-\lambda(1-p)} (\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &= \mathbb{P}(S = m) \mathbb{P}(E = n). \end{aligned}$$

Le variables aléatoires  $S$  et  $E$  sont indépendantes.

2. On suppose que  $S$  et  $E$  sont indépendantes. On a donc pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = m) \mathbb{P}(E = n) &= \mathbb{P}(\{S = m\} \cap \{E = n\}) \\ &= \mathbb{P}(\{S = m\} \cap \{N = m + n\}) \\ &= \mathbb{P}(N = m + n) \mathbb{P}(S = m \mid N = m + n) \\ &= \mathbb{P}(N = m + n) \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n. \end{aligned}$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

On en déduit :

$$\mathbb{P}(N = m + n)(m + n)! = \frac{m! \mathbb{P}(S = m)}{p^m} \times \frac{n! \mathbb{P}(E = n)}{(1 - p)^n} = u_m v_n,$$

$$\text{en posant } u_m = \frac{m! \mathbb{P}(S = m)}{p^m} \text{ et } v_n = \frac{n! \mathbb{P}(E = n)}{(1 - p)^n}.$$

Pour  $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , on a :

$$u_{m-1} v_{n+1} = u_m v_n = \mathbb{P}(N = m + n)(m + n)! \neq 0$$

$$\text{et donc } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_m}{u_{m-1}}.$$

Le rapport  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  est égal à  $\frac{u_m}{u_{m-1}}$  donc est indépendant de  $n$  : la suite  $(v_n)$  est donc géométrique. On note  $\lambda > 0$  sa raison. On en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{u_0 v_n}{n!} = \frac{u_0 v_0 \lambda^n}{n!}.$$

l'égalité  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = 1$  impose  $u_0 v_0 = e^{-\lambda}$  :  $N$  suit donc la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

- 16.19** On pose  $q = 1 - p$ . Il a été démontré dans l'exercice 16.15 de la page 654 que  $Y_r$  est une variable aléatoire discrète presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $Z_n$  est une variable aléatoire discrète presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ , on a :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n) = \mathbb{P}(Y_1 = k_1, Y_2 = k_1 + k_2, \dots, Y_n = k_1 + \dots + k_n).$$

En posant  $\ell_1 = k_1, \ell_2 = k_1 + k_2, \dots, \ell_n = k_1 + \dots + k_n$ , on obtient :

$$\{Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n\} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{X_{\ell_i} = 1\} \cap \bigcap_{j \in [\![1, k_1 + \dots + k_n]\!] \setminus \{\ell_1, \dots, \ell_n\}} \{X_j = 0\}$$

et donc, par indépendance des variables  $X_k$  :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n) = p^n q^{k_1 + k_2 + \dots + k_n - n}.$$

Cela peut s'écrire :

$$\mathbb{P}(Z_1 = k_1, \dots, Z_n = k_n) = \prod_{i=1}^n p q^{k_i - 1}.$$

D'après l'exercice 16.16 de la page 655, cela prouve l'indépendance des variables  $Z_1, \dots, Z_n$  et montre que la famille  $(pq^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est à une constante mutiplicative près, la distribution de probabilités de  $X_n$ . Comme  $\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = 1$ , cette constante vaut 1 et  $Z_n$  suit la loi  $\mathcal{G}(p)$ .

Comme cela est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on conclut que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d. de loi  $\mathcal{G}(p)$ .

**16.20** 1. (a) On a  $\mathbb{P}(X < 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = -n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > 0)$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}(X > 0) = \frac{1 - \mathbb{P}(X = 0)}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq 0) = \frac{1 + \mathbb{P}(X = 0)}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

(b) On a, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \\ i+j=n}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = n - i).$$

On en déduit, en utilisant le fait que  $X$  et  $Y$  sont symétriques, puis un changement d'indice :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = -n) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = -n - i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = -i) \mathbb{P}(Y = n + i) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}(Y = n - j) = \mathbb{P}(X + Y = n). \end{aligned}$$

2. (a) Cela se déduit de la question 1 par récurrence sur  $n$ , en utilisant le fait que, si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors  $X_n$  est indépendante de  $X_1 + \dots + X_{n-1}$ , d'après le lemme des coalitions.

(b) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

- On a  $\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subset \{S_n \geq S_k\} \cap \{S_k > x\} \subset \{S_n > x\}$  et donc :

$$\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subset \{S_n > x\} \cap \Omega_k.$$

- On a :

$$\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k = \{X_{k+1} + \dots + X_n \geq 0\} \cap \Omega_k.$$

On peut écrire  $\Omega_k$  sous la forme  $\{f(X_1, \dots, X_k) \in A_k\}$ , où  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}$  et  $A_k$  une partie de  $\mathbb{Z}$ . Les variables  $X_1, \dots, X_n$  étant indépendantes, il en est de même de  $X_{k+1} + \dots + X_n$  et de  $f(X_1, \dots, X_k)$ . On en déduit l'indépendance des événements  $\{S_n - S_k \geq 0\}$  et  $\Omega_k$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k) = \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0) \mathbb{P}(\Omega_k).$$

La variable  $S_n - S_k$  est symétrique, comme somme de variables symétriques indépendantes, donc  $\mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0) \geq \frac{1}{2}$ . D'où l'inégalité voulue.

(c) Soit  $\omega \in \Omega$ . Alors  $\omega \in \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} S_j > x \right\}$  si, et seulement s'il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tel que  $\omega \in \{S_j > x\}$ . En considérant  $k$ , le plus petit des tels entiers  $j$ , on en déduit que  $\omega \in \Omega_k$ . On a donc :

$$\left\{ \max_{1 \leq j \leq n} S_j > x \right\} \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_k.$$

Comme l'inclusion inverse est évidente, on a bien l'égalité.

(d) Les événements  $\Omega_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$ , sont incompatibles donc :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n} S_j > x\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\Omega_k).$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

En utilisant la question (b), on obtient :

$$\mathbb{P}(\Omega_k) \leq 2\mathbb{P}(\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k) \leq 2\mathbb{P}(\{S_n > x\} \cap \Omega_k).$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n} S_j > x\right) \leq 2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n > x\} \cap \Omega_k).$$

Les événements  $\{S_n > x\} \cap \Omega_k$ , pour  $1 \leq k \leq n$ , sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n > x\} \cap \Omega_k) &= \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \bigcup_{k=1}^n \Omega_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{S_n > x\} \cap \left\{\max_{1 \leq j \leq n} S_j > x\right\}\right) = \mathbb{P}(S_n > x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- 16.21** 1. (a) On démontre la propriété par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1}$  par définition.

Supposons la propriété vraie au rang  $n - 1$  ( $n \geq 2$ ) et montrons-la au rang  $n$ .

- Si  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \neq 0$ , la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)}$$

peut s'écrire :

$$\frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})} \times \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)},$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \times \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_0 = x_0).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition d'une chaîne de Markov, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0) &= p_{x_{n-1}, x_n} \times (p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{n-2}, x_{n-1}}) \\ &= p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{n-2}, x_{n-1}} p_{x_{n-1}, x_n}. \end{aligned}$$

- Si  $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = 0$ , alors on a *a fortiori* :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | X_0 = x_0) = 0$$

et l'égalité reste vérifiée car  $p_{x_0, x_1} \cdots p_{x_{n-2}, x_{n-1}} = 0$  par hypothèse de récurrence.

La propriété est donc vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (b) Pour obtenir la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $\{X_0 = x_0\}$ , il faut sommer l'égalité précédente par rapport à  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . On obtient, pour  $x_0$  et  $x_n$  dans  $[1, N]$  :

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_0 = x_0) = \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in [1, N]^{n-1}} p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n},$$

somme qui est égale à  $p_{x_0, x_n}^{(n)}$ , comme on le voit en itérant la formule donnant les coefficients du produit de deux matrices.

2. L'événement  $\{X_0 = x_0\}$  qui contient  $\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$  est *a fortiori* de probabilité non nulle et l'on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n+k} = x_{n+k})}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n+k} = x_{n+k} \mid X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid X_0 = x_0)} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{n+k-1} p_{x_i, x_{i+1}}}{\prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i, x_{i+1}}} = \prod_{i=n}^{n+k-1} p_{x_i, x_{i+1}} = \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1}, \dots, X_k = x_{n+k} \mid X_0 = x_n), \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

- 16.22** 1. Les réels  $\frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , sont positifs et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = 1$  par définition, donc on définit bien la loi d'une variable aléatoire.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{X = nj\}$  est un événement et :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = jn) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{j=1}^{+\infty} (jn)^{-s} = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} \sum_{j=1}^{+\infty} j^{-s} = n^{-s}.$$

Soit  $p_1, \dots, p_k$  des nombres premiers distincts. Ces nombres sont deux à deux premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss :

$$A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \dots p_k}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \dots p_k}) = (p_1 \dots p_k)^{-s} = \prod_{i=1}^k p_i^{-s} = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Les événements de la famille  $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$  sont donc indépendants.

On en déduit que  $(\overline{A_p})_{p \in \mathcal{P}}$  est aussi une famille d'événements indépendants.

Notons  $(p_n)_{n \geq 1}$  la suite des entiers premiers rangés par ordre croissant. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) &= \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\overline{A_{p_n}}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{A_{p_n}}\right), \end{aligned}$$

par indépendance des événements. Par ailleurs, on a, par continuité décroissante :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{A_{p_n}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}\right).$$

## Chapitre 16. Conditionnement - Indépendance

Mais  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}} = \{1\}$ , car 1 est le seul entier naturel qui n'ait pas de diviseur premier.

Comme  $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$ , on en déduit :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

3. Notons  $E$  l'événement « aucun carré différent de 1 ne divise  $X$  ». L'événement  $E$  est réalisé si, et seulement si, le carré d'aucun nombre premier ne divise  $X$ . On a donc  $E = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}$ . Si  $p_1, \dots, p_k$  des nombres premiers distincts, alors  $p_1^2, \dots, p_k^2$  sont deux à deux premiers entre eux donc  $A_{p_1^2} \cap \dots \cap A_{p_k^2} = A_{p_1^2 \dots p_k^2}$ . On en déduit, en raisonnant comme dans la question précédente :

$$\mathbb{P}(A_{p_1^2} \cap \dots \cap A_{p_k^2}) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{p_i^2}).$$

Les événements de la famille  $(A_{p^2})_{p \in \mathcal{P}}$  sont donc indépendants. Par indépendance des événements  $\overline{A_{p^2}}$  on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_{p^2}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{A_{p_n^2}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\overline{A_{p_n^2}}) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^{2s}}\right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)}, \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

- 16.23** 1. On a, puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}. \end{aligned}$$

Les variables aléatoires  $(X_1, X_2)$  et  $(X_2, X_1)$  ont même loi, donc :

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \mathbb{P}(X_1 > X_2) = \frac{1 - \mathbb{P}(X_1 = X_2)}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{1+q}\right) = \frac{q}{1+q}.$$

2. Pour  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= \mathbb{P}(X_1 < \dots < X_n, X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = k, k < X_2 < \dots < X_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(k < X_2 < \dots < X_n) \\ &= pq^{k-1} \mathbb{P}(k < X_2 < \dots < X_n), \end{aligned}$$

car  $X_1$  est indépendante de  $(X_2, \dots, X_n)$ . On en déduit :

$$v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = j, X_2 < \dots < X_n).$$

Comme  $(X_2, \dots, X_n)$  a même loi que  $(X_1, \dots, X_{n-1})$ , on obtient :

$$v_{n,k} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = j, X_1 < \dots < X_{n-1}) = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j}.$$

3. On démontre, par récurrence sur  $n$ , que, pour  $n \geq 2$ , il existe  $\alpha_n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}} (pq^{k-1})^n q^{\alpha_n}.$$

- Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} v_{2,k} &= \mathbb{P}(X_1 = k, X_1 < X_2) = \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 > k) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 > k) = pq^{k-1} q^k. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{1}{\pi_1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ , on obtient :

$$v_{2,k} = \frac{1}{\pi_1} p^2 q^{2k-1} = \frac{1}{\pi_1} (pq^{k-1})^2 q,$$

ce qui est le résultat voulu avec  $\alpha_2 = 1$ .

- Si la propriété est vraie au rang  $n-1$ , on a, pour  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} v_{n,k} &= pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_{n-1,j} = pq^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi_{n-2}} (pq^{j-1})^{n-1} q^{\alpha_{n-1}} \\ &= \frac{p^n q^{k-1} q^{\alpha_{n-1}}}{\pi_{n-2}} \sum_{j=k+1}^{+\infty} (q^{n-1})^{j-1} = \frac{p^n q^{k-1} q^{\alpha_{n-1}}}{\pi_{n-2}} \frac{q^{(n-1)k}}{1 - q^{n-1}}. \end{aligned}$$

Comme  $\pi_{n-2}(1 - q^{n-1}) = \pi_{n-1}$ , on a :

$$v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}} (pq^{k-1})^n q^{\alpha_{n-1} + n - 1},$$

ce qui est le résultat voulu avec  $\alpha_n = \alpha_{n-1} + n - 1$ .

Comme  $\alpha_2 = 1$ , on a  $\alpha_n = 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$  pour  $n \geq 2$ .

4. On a, pour  $n \geq 2$ ,  $A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_{n,k}$  et comme ces événements sont incompatibles, on obtient, pour  $n \geq 2$  :

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \frac{1}{\pi_{n-1}} p^n q^{\alpha_n} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^n)^{k-1} = \frac{1}{\pi_{n-1}} p^n q^{\alpha_n} \frac{1}{1 - q^n} = \frac{1}{\pi_n} p^n q^{\alpha_n}.$$

C'est le résultat voulu avec  $\beta_n = n$  et  $\gamma_n = \alpha_n = \frac{n(n-1)}{2}$ .



# Chapitre 17 : Espérance – Variance

<b>I</b>	<b>Espérance . . . . .</b>	<b>678</b>
1	Définition . . . . .	678
2	Espérance des lois usuelles . . . . .	679
3	Propriétés de l'espérance . . . . .	680
<b>II</b>	<b>Variance . . . . .</b>	<b>684</b>
1	Variables aléatoires dont le carré est d'espérance finie . .	684
2	Définition et propriétés de la variance . . . . .	684
3	Variance des lois usuelles . . . . .	685
<b>III</b>	<b>Covariance . . . . .</b>	<b>686</b>
1	Définition . . . . .	686
2	Bilinéarité . . . . .	686
3	Variables décorrélées . . . . .	686
4	Variance d'une somme . . . . .	687
<b>IV</b>	<b>Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres</b>	<b>688</b>
1	Inégalités probabilistes . . . . .	688
2	Loi faible des grands nombres . . . . .	688
<b>V</b>	<b>Fonctions génératrices . . . . .</b>	<b>689</b>
1	Définition - Propriétés . . . . .	689
2	Fonctions génératrices des lois usuelles . . . . .	691
3	Somme de variables aléatoires indépendantes . . . . .	692
<b>Exercices . . . . .</b>		<b>703</b>

# Espérance – Variance

17

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Sauf mention plus précise, les variables aléatoires discrètes sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

## I Espérance

### 1 Définition

#### Définition 1

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . L'**espérance** de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , est la somme dans  $[0, +\infty]$  de la famille  $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

**Remarque** Si  $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ , alors  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{\{X < +\infty\}})$ , car par définition  $(+\infty) \times 0 = 0$ . Sinon  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ .

**Ex. 1.** Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n)$  et la sommabilité de la famille  $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in \mathbb{N}}$  équivaut à la convergence de la série  $\sum n \mathbb{P}(X = n)$ .

#### Proposition 1

Si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Démonstration page 694

**Définition 2**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $X$  est d'espérance finie si la famille  $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas, l'espérance de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , est la somme de cette famille :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

**Remarques**

- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Si  $X$  est positive, elle possède une espérance finie ou infinie. Sinon,  $X$  peut ne pas posséder d'espérance (si la famille  $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  n'est pas sommable).
- Si  $\Omega$  est fini, la variable aléatoire  $X$  est d'espérance finie et la définition de l'espérance coïncide avec celle qui a été donnée en première année.

**Ex. 2.** Si  $X$  est une variable aléatoire presque sûrement égale à  $a \in \mathbb{K}$ , alors  $\mathbb{E}(X) = a$ .

**Ex. 3.** Pour tout événement  $A$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ .

**Ex. 4.** Une variable aléatoire discrète bornée  $X$  est d'espérance finie.

En effet, il existe alors  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $|x| \leq M$  et donc :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad |x \mathbb{P}(X = x)| \leq M \mathbb{P}(X = x).$$

La famille  $(M \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable de somme  $M$ , donc  $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est également sommable et  $X$  est d'espérance finie.

**Ex. 5.** La série de terme général  $\frac{1}{n(n+1)}$  est convergente, de somme 1. Donc il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

La série de terme général  $n \mathbb{P}(X = n)$  diverge donc  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ .

**Ex. 6.** La famille de réels positifs  $(\frac{1}{n^2+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable de somme  $S > 0$ . Donc il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{S(n^2 + 1)}.$$

La série de terme général  $n \mathbb{P}(X = n)$  diverge donc *a fortiori* la famille  $(n \mathbb{P}(X = n))_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas sommable. Ainsi,  $X$  n'a pas d'espérance.

## 2 Espérance des lois usuelles

### Proposition 2

Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , alors son espérance est finie et  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ .

**Démonstration.** On applique la formule démontrée dans la proposition 1 de la page 678. On obtient, avec  $q = 1 - p$  :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}. \quad \square$$

### Proposition 3

Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors son espérance est finie et  $\mathbb{E}(X) = \lambda$ .

**Démonstration.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $n\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{n\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ .

De  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^\lambda$ , on déduit que  $\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda$ . Donc  $X$  est d'espérance finie.  $\square$

## 3 Propriétés de l'espérance

### Formule de transfert

#### Théorème 4 (Formule de transfert)

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans un ensemble quelconque, et  $f$  une fonction à valeurs complexes définie sur  $X(\Omega)$ . Alors la variable aléatoire  $f(X)$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille  $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. On a alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration (non exigible) page 694

**Ex. 7.** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète complexe d'espérance finie, alors  $\overline{X}$  est d'espérance finie, car  $(|\overline{x}|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable par définition et :

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \overline{x}\mathbb{P}(X = x) = \overline{\mathbb{E}(X)}.$$

**Ex. 8.** Considérons la variable aléatoire  $e^{itX}$ , où  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

Cette variable est d'espérance finie, car elle est bornée :  $|e^{itX}| = 1$ . On a, par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn}\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn}e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

## Remarques

- La formule de transfert permet le calcul de l'espérance de  $f(X)$  sans qu'il soit besoin de déterminer sa loi : il suffit de connaître celle de  $X$ .
- Si  $f$  est définie plus généralement sur un ensemble  $E$  contenant  $X(\Omega)$ , on peut remplacer la famille  $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  par la famille  $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ .
- La formule s'applique en particulier quand  $X$  est un couple ou un  $n$ -uplet de variables aléatoires. Le calcul de l'espérance du produit de deux variables aléatoires en donne un exemple.

**Ex. 9.** Soit  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes complexes. On pose  $Z = (X, Y)$  et l'on écrit  $XY = u(Z)$ , où  $u$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $u(x, y) = xy$ . D'après la formule de transfert,  $XY$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille :

$$\left( u(x, y) \mathbb{P}(Z = (x, y)) \right)_{(x, y) \in Z(\Omega)} \text{ c'est-à-dire } \left( xy \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right)_{(x, y) \in Z(\Omega)}$$

est sommable. Si  $(x, y) \in (X(\Omega) \times Y(\Omega)) \setminus (X, Y)(\Omega)$ , alors  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$ . Il revient donc au même de dire que la famille  $(xy \mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable.

Dans le cas où  $XY$  est d'espérance finie, on a, toujours par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x, y) \in (X, Y)(\Omega)} xy \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

## Inégalité triangulaire

### Proposition 5 (Inégalité triangulaire)

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète complexe, alors  $X$  est d'espérance finie si, et seulement si,  $|X|$  est d'espérance finie et l'on a alors :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Démonstration page 695

### Proposition 6

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes, respectivement complexe et réelle, telles que  $|X| \leq Y$ . Si  $Y$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.

Démonstration page 695

**Principe de démonstration.** Considérer  $Z = (X, Y)$ , ainsi que les projections  $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$  et appliquer la formule de transfert.

## Linéarité

### Théorème 7 (Linéarité de l'espérance)

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , d'espérance finie, et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors les variables aléatoires  $X + Y$  et  $\lambda X$  sont d'espérance finie. De plus, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration page 696

**Principe de démonstration.** On applique la formule de transfert à  $X$  et  $f : x \mapsto \lambda x$ , puis à  $(X, Y)$  et  $f : (x, y) \mapsto x + y$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

**Remarque** L'ensemble des variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , d'espérance finie, est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, noté  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , ou plus simplement  $L^1$ , et l'espérance est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

**Ex. 10.** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète complexe, d'espérance finie, alors  $\overline{X}$  est aussi d'espérance finie, égale à  $\overline{\mathbb{E}(X)}$ . On en déduit que  $\operatorname{Re} X = \frac{X + \overline{X}}{2}$  et  $\operatorname{Im} X = \frac{X - \overline{X}}{2i}$  sont des variables d'espérance finie :  $\mathbb{E}(\operatorname{Re} X) = \operatorname{Re} \mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(\operatorname{Im} Z) = \operatorname{Im} \mathbb{E}(Z)$ .

**Remarque** Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes positives et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on a, dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont d'espérance finie, cela résulte du théorème 7 de la page précédente.

Si par exemple  $\mathbb{E}(X) = +\infty$  alors  $\mathbb{E}(X + Y) = +\infty$  car  $X + Y \geq X$  ; de plus, si  $\lambda > 0$ , on a aussi  $\mathbb{E}(\lambda X) = +\infty$ , d'après la formule de transfert.

**Point méthode** Pour déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète dont on ne sait pas déterminer la loi, on peut chercher à la décomposer en somme de variables aléatoires discrètes d'espérance connue.

Exo  
17.1

**Ex. 11.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et  $N_n = \operatorname{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : S_k = 0\}$ . On a donc une marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  et l'on cherche le nombre de fois où l'on repasse par l'origine pendant les  $n$  premiers déplacements. Déterminons  $\mathbb{E}(N_n)$ .

On écrit  $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{S_k=0\}}$ . On a donc par linéarité  $\mathbb{E}(N_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_k = 0)$ .

Pour avoir  $S_k = 0$ , il faut et il suffit que, parmi les variables  $X_1, \dots, X_n$  il y ait autant de valeurs  $-1$  que de valeurs  $1$ . On a donc  $\mathbb{P}(S_k = 0) = 0$  si  $k$  est impair et  $\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}}$ . On obtient :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}}.$$

En utilisant la formule de Stirling et la sommation des relations de comparaison, on peut montrer que :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

### Définition 3

Une variable aléatoire discrète complexe d'espérance nulle est dite **centrée**.

**Corollaire 8**

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète complexe d'espérance finie, alors  $X - \mathbb{E}(X)$  est centrée.

**Démonstration.** La variable aléatoire constante  $\mathbb{E}(X)$  a pour espérance  $\mathbb{E}(X)$ . Donc, par linéarité, la variable aléatoire  $X - \mathbb{E}(X)$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0.$$

□

**Positivité, croissance**

Dans cette section, les variables aléatoires sont réelles.

**Proposition 9 (Positivité de l'espérance)**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Alors on a :

$$\mathbb{E}(X) \geq 0.$$

De plus  $\mathbb{E}(X) = 0$  équivaut à  $X = 0$  presque sûrement.

Démonstration page 697

**Corollaire 10 (Croissance de l'espérance)**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes, d'espérance finie, telles que  $X \leq Y$ .

Alors on a :

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

De plus  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$  équivaut à  $X = Y$  presque sûrement.

**Démonstration.** On applique la proposition 9 à la variable aléatoire  $Y - X$ , puis on utilise la linéarité de l'espérance. □

**Espérance du produit de variables indépendantes****Théorème 11**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes complexes indépendantes, d'espérance finie, alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration page 697

Cette propriété se généralise à  $n$  variables aléatoires indépendantes.

**Proposition 12**

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires complexes d'espérance finie, mutuellement indépendantes, alors  $\prod_{k=1}^n X_k$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k).$$

Démonstration page 697

## II Variance

Dans cette section, les variables aléatoires sont réelles.

### 1 Variables aléatoires dont le carré est d'espérance finie

**Notation** On note  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ou, plus simplement,  $L^2$  l'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telles que  $X^2$  soit d'espérance finie.

**Terminologie** Si  $X^2$  est d'espérance finie, on dit aussi que  $X$  possède un **moment d'ordre 2**.

**Lemme 13**

Si  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , alors  $XY$  est dans  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Démonstration page 697

**Principe de démonstration.** Montrer que  $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ .

**Proposition 14**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. Si  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie.

**Démonstration.** Comme  $X$  ainsi que la variable aléatoire constante, égale à 1, sont dans  $L^2$ , leur produit, qui vaut  $X$ , est d'espérance finie, d'après le lemme 13.  $\square$

**Reformulation** On a donc  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

**Proposition 15**

L'ensemble  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Démonstration page 698

**Théorème 16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Si les variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , alors  $XY$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Démonstration page 698

## 2 Définition et propriétés de la variance

**Remarque** Si  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , alors  $X$  est d'espérance finie et, comme les variables aléatoires constantes sont dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ,  $X - \mathbb{E}(X) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

**Définition 4**

Soit  $X \in L^2$ . On appelle **variance** de  $X$  le réel positif  $\mathbb{V}(X)$  défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

**Terminologie** Si  $X \in L^2$ , on dit aussi que  $X$  est de variance finie.

**Remarque** La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de  $X$  et  $\mathbb{E}(X)$ . Elle mesure donc la dispersion de  $X$  par rapport à sa moyenne.

### Théorème 17 (Formule de Koenig-Huygens)

Si  $X \in L^2$ , alors  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .

Démonstration page 698

**Ex. 12.** Soit  $X$  dans  $L^2$ . Étudions à quelle condition on a  $\mathbb{V}(X) = 0$ .

On a  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ , donc, d'après la proposition 9 de la page 683,  $\mathbb{V}(X) = 0$  équivaut à :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) = 0) = 1, \text{ c'est-à-dire à } \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1.$$

- Si cette condition est réalisée, alors  $X$  est presque sûrement constante, égale à  $\mathbb{E}(X)$ .
- Réciproquement, s'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(X = a) = 1$ , alors :

$$\mathbb{E}(X) = a, \quad \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) = 0) = 1 \text{ et donc } \mathbb{V}(X) = 0.$$

La variance de  $X$  est donc nulle si, et seulement si,  $X$  est presque sûrement constante.

### Proposition 18

Si  $(a, b)$  est un couple de réels et  $X \in L^2$ , alors  $aX + b \in L^2$  et :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Démonstration page 698

### Définition 5

Soit  $X \in L^2$ . L'**écart-type** de  $X$  est le réel  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$ .

### Définition 6

Soit  $X \in L^2$ . Si  $\mathbb{E}(X) = 0$  et  $\sigma(X) = 1$ , la variable aléatoire  $X$  est dite **centrée réduite**.

### Proposition 19

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de variance finie non nulle, la variable aléatoire discrète  $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  est une variable aléatoire discrète centrée réduite appelée variable aléatoire réelle **centrée réduite associée à  $X$** .

Démonstration page 698

## 3 Variance des lois usuelles

### Proposition 20

Si la variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , alors elle est dans  $L^2$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

Démonstration page 698

**Principe de démonstration.** Commencer par calculer  $\mathbb{E}(X(X - 1))$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

### Proposition 21

Si la variable aléatoire discrète  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors elle est dans  $L^2$  et  $\mathbb{E}(X) = \lambda$ .

Démonstration page 699.

**Principe de démonstration.** Commencer par calculer  $\mathbb{E}(X(X - 1))$ .

## III Covariance

Dans cette section, toutes les variables aléatoires sont réelles.

### 1 Définition

Si  $X$  et  $Y$  sont dans  $L^2$ , alors il en est de même de  $X - \mathbb{E}(X)$  et  $Y - \mathbb{E}(Y)$ , donc  $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$  est d'espérance finie d'après le lemme 13 de la page 684. Cela justifie la définition suivante.

### Définition 7

Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2$ . On appelle **covariance** de  $X$  et  $Y$ , ou du couple  $(X, Y)$ , le réel noté  $\text{Cov}(X, Y)$  défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right).$$

**Remarque** Pour tout  $X \in L^2$ , on a  $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$ .

### Théorème 22 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2$ . On a :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration page 699.

Exo  
17.4

Exo  
17.5

Exo  
17.6

## 2 Bilinéarité

### Proposition 23

L'application  $(X, Y) \mapsto \text{Cov}(X, Y)$  est une forme bilinéaire symétrique positive sur  $L^2$ .

Démonstration page 699.

## 3 Variables décorrélées

### Proposition 24

Si  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $L^2$  et sont indépendantes, alors on a  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Démonstration.** Cela résulte directement du théorème 11 de la page 683. □

**Remarque** Si  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $L^1$  et sont indépendantes, alors, d'après le théorème 11 de la page 683,  $XY \in L^1$  et  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ , donc on peut définir  $\text{Cov}(X, Y)$  et l'on trouve encore  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Définition 8**

Si un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires discrètes réelles possède une covariance nulle, on dit que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont **décorrélées**.

**Remarque** Il découle de ce qui précède que deux variables aléatoires discrètes réelles, indépendantes et d'espérance finie, sont décorrélées.

Comme on l'a vu en première année dans le cas des variables finies, la réciproque est fausse : deux variables décorrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.

## 4 Variance d'une somme

**Théorème 25**

Pour toute famille  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables aléatoires discrètes appartenant à  $L^2$ , la variable aléatoire discrète  $X_1 + \dots + X_n$  est dans  $L^2$  et :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Démonstration page 699

**Corollaire 26**

Pour toute famille  $(X_1, \dots, X_n)$  de variables aléatoires discrètes appartenant à  $L^2$ , deux à deux décorrélées, on a :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k).$$

**Remarques**

- La propriété est vérifiée en particulier si les variables sont deux à indépendantes et *a fortiori* si elles sont mutuellement indépendantes.
- Cette formule montre l'intérêt de décomposer une variable aléatoire en somme de variables aléatoires indépendantes plus simples.

**Ex. 13.** Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Y_k$  le temps d'attente du  $k$ -ième 1. On pose  $Z_1 = Y_1$  et  $Z_k = Y_k - Y_{k-1}$  pour  $k \geq 2$ . Il a été démontré dans l'exercice 16.19 de la page 655 que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi  $\mathcal{G}(p)$  et donc d'espérance  $\frac{1}{p}$  et de variance  $\frac{1-p}{p^2}$ .

De l'égalité  $Y_k = \sum_{i=1}^k Z_i$ , on déduit  $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{k}{p}$  et  $\mathbb{V}(Y_k) = \frac{k(1-p)}{p^2}$ .

## IV Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

### 1 Inégalités probabilistes

**Théorème 27 (Inégalité de Markov)**

Toute variable aléatoire discrète, réelle positive, d'espérance finie, vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration page 699

**Ex. 14.** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle et  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $e^X$  est d'espérance finie, alors on a :

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^X \geq e^a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^X)}{e^a} = \mathbb{E}(e^{X-a}).$$

**Théorème 28 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Toute variable aléatoire discrète réelle  $X$  de  $L^2$  vérifie l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration page 700

**Remarque** Les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev sont des **inégalités de concentration**, c'est-à-dire des inégalités qui majorent la probabilité qu'une variable aléatoire dévie d'une certaine valeur, g n eralement son espérance.

### 2 Loi faible des grands nombres

**Théorème 29 (Loi faible des grands nombres)**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires discrètes r  elles i.i.d. sur le même espace probabilisé, de variance finie.

On pose  $m = \mathbb{E}(X_1)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Demonstration page 700

#### Remarques

- La loi faible des grands nombres exprime le fait qu'en un certain sens la suite  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  converge vers  $m$ .
- Le résultat subsiste si les variables  $X_n$  ne sont pas mutuellement indépendantes, mais seulement deux à deux indépendantes, ou même deux à deux non corrélées.

**Ex. 15.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , modélisant une suite d'épreuves identiques indépendantes. Si l'on appelle succès le fait d'obtenir 1, alors  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  représente le nombre de succès et  $Y_n = \frac{S_n}{n}$  la fréquence de succès sur les  $n$  premières épreuves, et l'on a, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - p| \geq \varepsilon) = 0$ . Souvent la valeur de  $p$  n'est pas connue. La suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est alors appelée un *estimateur* de  $p$ .

**Approfondissement** Il existe également des lois *fortes* des grands nombres. On peut démontrer par exemple que, si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires réelles i.i.d., d'espérance finie  $m$ , alors il existe un événement négligeable  $A$ , tel que :

$$\forall \omega \in \Omega \setminus A \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m.$$

On dit que la suite  $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge presque sûrement vers  $m$ .

## V Fonctions génératrices

### 1 Définition - Propriétés

#### Définition 9

Pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on appelle **fonction génératrice** de  $X$  la fonction  $G_X$  de la variable réelle définie par  $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ .

**Remarque** D'après la formule de transfert, la fonction  $G_X$  est définie en  $t$  si, et seulement si, la série  $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$  converge absolument et l'on a alors :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

#### Proposition 30

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

La série entière  $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$  est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 ; elle converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. La fonction  $G_X$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ .

Démonstration page 700

#### Remarques

- D'après les propriétés des séries entières, la fonction  $G_X$  est aussi définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R [$ , où  $R$  est le rayon de convergence de la série entière.
- Si  $X$  est une variable finie, alors  $G_X$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et c'est une fonction polynomiale.

## Chapitre 17. Espérance — Variance

### Proposition 31

La loi d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est déterminée de manière unique par  $G_X$ . Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) = n! G_X^{(n)}(0).$$

Deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ont donc même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.

**Démonstration.** Cela résulte immédiatement de la formule donnant les coefficients du développement d'une fonction en série entière.  $\square$

### Théorème 32

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est d'espérance finie si, et seulement si,  $G_X$  est dérivable en 1 et l'on a alors :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1).$$

Démonstration (non exigible) page 700

**Démonstration.** Supposons que  $X$  soit d'espérance finie, et montrons que  $G_X$  est dérivable en 1 et  $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ .

Notons  $R \geq 1$  le rayon de convergence de la série  $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ . La fonction  $G_X$  est dérivable sur  $]-R, R[$  et :

$$\forall t \in ]-R, R[ \quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)t^{n-1}.$$

- Si  $R > 1$ , la fonction  $G_X$  est dérivable en 1 et :

$$G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X).$$

- Supposons  $R = 1$ . La fonction  $G_X$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $[0, 1[$ .

D'autre part, la série  $\sum n\mathbb{P}(X = n)$  converge, car  $X$  est d'espérance finie, donc d'après le théorème d'Abel radial,  $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)t^{n-1}$  tend vers  $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X)$  quand  $t$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

On en déduit, par le théorème de la limite de la dérivée, que  $G_X$  est dérivable en 1 et  $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ .

La réciproque n'est pas exigible.  $\square$

### Théorème 33

Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  appartient à  $L^2$  si, et seulement si,  $G_X$  est deux fois dérivable en 1 et l'on a alors  $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X - 1))$ .

Démonstration (non exigible) page 701

**Corollaire 34**

Si la fonction génératrice d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  est deux fois dérivable en 1, alors  $X \in L^2$  et l'on a :

$$\mathbb{V}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

**Remarques**

- L'existence et le calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire ne posent aucun problème quand la série définissant la fonction génératrice a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.
- Il résulte de la démonstration du théorème 32 de la page ci-contre que  $G_X$  est dérivable en 1 si, et seulement si,  $G_X$  est dérivable à gauche en 1. Il suffit donc, pour montrer que  $X$  est d'espérance finie, de considérer la restriction de  $G_X$  à  $[0, 1]$ . La même remarque s'applique pour la dérivée seconde.

**2 Fonctions génératrices des lois usuelles**

Déterminons les fonctions génératrices des lois usuelles et retrouvons ainsi leur espérance et leur variance. Dans les trois premiers exemples, on posera  $q = 1 - p$ .

**Ex. 16.** Si  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , la variable  $X$  est finie donc  $G_X$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G_X(t) = \mathbb{P}(X = 0)t^0 + \mathbb{P}(X = 1)t = q + pt.$$

On en déduit, pour tout réel  $t$ ,  $G'_X(t) = p$  et  $G''_X(t) = 0$ .

On a donc  $\mathbb{E}(X) = p$  et  $\mathbb{E}(X(X - 1)) = 0$ , puis  $\mathbb{V}(X) = p - p^2 = pq$ .

**Ex. 17.** Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , la variable  $X$  est finie donc  $G_X$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (q + pt)^n. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout réel  $t$  :

$$G'_X(t) = np(q + pt)^{n-1} \quad \text{et} \quad G''_X(t) = n(n-1)p^2(q + pt)^{n-2}.$$

On a donc  $\mathbb{E}(X) = np$  et  $\mathbb{E}(X(X - 1)) = n(n-1)p^2$ , puis :

$$\mathbb{V}(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

**Ex. 18.** Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$ , la série de terme général  $\mathbb{P}(X = n)t^n = pt(qt)^{n-1}$  est une série géométrique qui converge absolument si, et seulement si,  $|qt| < 1$ . On a :

$$\forall t \in \left[ -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right] \quad G_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} pt(qt)^{n-1} = \frac{pt}{1-qt}.$$

On en déduit, pour tout  $t \in \left[ -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right]$  :

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-qt)^2} \quad \text{et} \quad G''_X(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \frac{2q}{p^2},$$

$$\text{puis } \mathbb{V}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

**Ex. 19.** Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , la série de terme général  $\mathbb{P}(X = n)t^n = e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$  converge absolument pour tout réel  $t$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

On a, pour tout réel  $t$ ,  $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$  et  $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ .

On en déduit  $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$  et  $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = \lambda^2$ , puis  $\mathbb{V}(X) = \lambda$ .

## 3 Somme de variables aléatoires indépendantes

### Théorème 35

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors, pour tout réel  $t$  tel que  $G_{X_k}(t)$  soit défini pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $G_{S_n}(t)$  est défini et :

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t).$$

Démonstration page 702

Exo  
17.17

À l'aide du théorème 35, on peut redémontrer les théorèmes de stabilité de la loi binomiale et de la loi de Poisson.

**Ex. 20.** Soit  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes, telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , la variable  $X_i$  suive la loi binomiale de paramètre  $(n_i, p)$ . On pose  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors, pour tout réel  $t$ ,

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^k (1 - p + pt)^{n_i} = (1 - p + pt)^n \quad \text{où} \quad n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ .

D'après la proposition 31 de la page 690,  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ .

**Ex. 21.** Soit  $X_1, \dots, X_k$  des variables aléatoires indépendantes, telles que, pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , la variable  $X_i$  suive la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_i$ .

On pose  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors, pour tout réel  $t$  :

$$G_X(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda_i(t-1)} = e^{\lambda(t-1)} \quad \text{où} \quad \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . D'après la proposition 31 de la page 690,  $X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

## Démonstrations

**Proposition 1** Démontrons d'abord la première égalité.

- Si  $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ , alors  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ . D'autre part, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}(X > n) \geq \mathbb{P}(X = +\infty) > 0,$$

donc  $\sum \mathbb{P}(X > n)$  diverge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n) = +\infty$ . L'égalité est établie.

- Si  $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ , on considère la suite double  $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  définie par :

$$a_{k,n} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) & \text{si } n < k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > n),$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = k \mathbb{P}(X = k).$$

D'après le théorème de Fubini sur les sommes doubles de réels positifs, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

La deuxième formule s'obtient par un changement d'indice.

**Théorème 4** On sait que  $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ . Pour tout  $y \in f(X)(\Omega)$ , on pose :

$$I_y = \{x \in X(\Omega) : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\}).$$

On a alors  $\{f(X) = y\} = \{X \in I_y\}$  et comme  $I_y$  est au plus dénombrable, car inclus dans  $X(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in I_y} \mathbb{P}(X = x).$$

L'ensemble  $X(\Omega)$  est la réunion disjointe des  $I_y$ , pour  $y \in f(X)(\Omega)$ .

- Supposons que la famille  $(f(x) \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  soit sommable. Pour tout  $y \in f(X)(\Omega)$ , la sous-famille  $(f(x) \mathbb{P}(X = x))_{x \in I_y}$  est sommable, de somme :

$$\sum_{x \in I_y} f(x) \mathbb{P}(X = x) = y \mathbb{P}(f(X) = y).$$

On applique le théorème de sommation par paquets. On sait qu'alors la famille  $(y \mathbb{P}(f(X) = y))_{y \in f(X)(\Omega)}$  est sommable et que :

$$\sum_{y \in f(X)(\Omega)} y \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Autrement dit,  $f(X)$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x).$$

- Supposons réciproquement que la variable aléatoire  $f(X)$  soit d'espérance finie, c'est-à-dire que la famille  $(y\mathbb{P}(f(X) = y))_{y \in f(X)(\Omega)}$  soit sommable. Cela équivaut à la sommabilité de la famille  $(|y|\mathbb{P}(f(X) = y))_{y \in f(X)(\Omega)}$ .

Montrons la sommabilité de la famille  $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ . Soit  $I$  une partie finie de  $X(\Omega)$ . Alors  $J = f(I)$  est une partie finie de  $f(X)(\Omega)$  donc, par définition de la somme d'une famille de réels positifs :

$$\sum_{y \in J} |y|\mathbb{P}(f(X) = y) \leq \sum_{y \in f(X)(\Omega)} |y|\mathbb{P}(f(X) = y).$$

Mais, par ailleurs,  $I$  est inclus dans  $f^{-1}(J)$  donc :

$$\begin{aligned} \sum_{y \in J} |y|\mathbb{P}(f(X) = y) &= \sum_{y \in J} |y| \sum_{x \in I_y} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in J} \sum_{x \in I_y} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(J)} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) \\ &\geq \sum_{x \in I} |f(x)|\mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$

On a donc, pour toute partie  $I$  finie de  $X(\Omega)$  :

$$\sum_{x \in I} |f(x)|\mathbb{P}(X = x) \leq \sum_{y \in f(X)(\Omega)} |y|\mathbb{P}(f(X) = y).$$

Cela montre que la famille  $(|f(x)|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable et donc que la famille  $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable et, en utilisant le premier point, on retrouve l'égalité souhaitée.

**Proposition 5** D'après la formule de transfert,  $|X|$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille  $(|x|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable, ce qui équivaut par définition au fait que la famille  $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  soit sommable, c'est-à-dire que  $X$  soit d'espérance finie.

Si  $X$  est d'espérance finie, de  $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$  on tire :

$$|\mathbb{E}(X)| = \left| \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \right| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(|X|),$$

la dernière égalité résultant de la formule de transfert.

## Chapitre 17. Espérance — Variance

**Proposition 6** Considérons le couple de variables aléatoires  $Z = (X, Y)$  et les deux projections canoniques de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ,  $\pi_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$ . On a donc  $X = \pi_1(Z)$  et  $Y = \pi_2(Z)$ . Comme  $Y$  est d'espérance finie, d'après la formule de transfert, appliquée à la variable aléatoire  $Z$  et à la fonction  $\pi_2$ , la famille  $(y\mathbb{P}(Z = (x, y)))_{(x,y) \in Z(\Omega)}$  est sommable et :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(x,y) \in Z(\Omega)} y \mathbb{P}(Z = (x, y)).$$

Si  $(x, y) \in Z(\Omega)$ , alors il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $(x, y) = (X(\omega), Y(\omega))$ .

Comme  $|X| \leq Y$ , on a alors  $|x| \leq y$ . On a donc, pour tout  $(x, y) \in Z(\Omega)$  :

$$|x|\mathbb{P}(Z = (x, y)) \leq y\mathbb{P}(Z = (x, y)).$$

Comme la famille  $(y\mathbb{P}(Z = (x, y)))_{(x,y) \in Z(\Omega)}$  est sommable, il en est de même de la famille  $(|x|\mathbb{P}(Z = (x, y)))_{(x,y) \in Z(\Omega)}$ , c'est-à-dire de  $(x\mathbb{P}(Z = (x, y)))_{(x,y) \in Z(\Omega)}$ . On en déduit, par la formule de transfert, appliquée à la variable aléatoire  $Z$  et à la fonction  $\pi_1$ , que  $X$  est d'espérance finie.

### Théorème 7

- La famille  $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  étant sommable, il en est de même de la famille  $(\lambda x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ , donc d'après la formule de transfert appliquée à  $X$  et à la fonction  $x \mapsto \lambda x$ , la variable aléatoire  $\lambda X$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(\lambda X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \lambda x \mathbb{P}(X = x) = \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \lambda \mathbb{E}(X).$$

- On écrit  $X + Y = f(X, Y)$ , où  $f$  est l'application  $(x, y) \mapsto x + y$  et l'on applique la formule de transfert à  $(X, Y)$  et à la fonction  $f$ .

Comme  $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $X + Y$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille  $((x + y)\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable. Or on a :

$$|x + y|\mathbb{P}(X = x, Y = y) \leq |x|\mathbb{P}(X = x, Y = y) + |y|\mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

donc il suffit de montrer la sommabilité des deux familles :

$$(|x|\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \quad \text{et} \quad (|y|\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Montrons-le pour la première famille. Pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a :

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x, Y = y) = |x| \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = |x|\mathbb{P}(X = x).$$

La famille  $(|x|\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable car  $X$  est d'espérance finie.

Le théorème de sommation par paquets permet de conclure que la famille  $(|x|\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable.

On montre de même que la famille  $(|y|\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable.

Ainsi  $X + Y$  possède une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x + y)\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x, Y = y) + \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y\mathbb{P}(X = x, Y = y). \end{aligned}$$

La formule de transfert, appliquée à la variable aléatoire  $Z$  et aux fonctions  $(x, y) \mapsto x$  et  $(x, y) \mapsto y$  respectivement, permet de conclure :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

**Proposition 9**

- La famille  $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est à termes positifs, donc sa somme  $\mathbb{E}(X)$  est positive.
- Si  $X = 0$  presque sûrement alors, pour tout  $x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$ , on a  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ . On en déduit  $x\mathbb{P}(X = x) = 0$  pour tout  $x \in X(\Omega)$  et donc  $\mathbb{E}(X) = 0$ .
- Réciproquement, si  $\mathbb{E}(X) = 0$ , on a alors, pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $0 \leq x\mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{E}(X) = 0$  et donc  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  si  $x \neq 0$ . On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{0\}} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

**Théorème 11**

Supposons  $X$  et  $Y$  indépendantes. On a  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ , pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ . D'après le théorème de transfert,  $XY$  est d'espérance finie si, et seulement si, la famille  $(xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable.

Par hypothèse, les familles  $(x\mathbb{P}(X = x))$  et  $(y\mathbb{P}(Y = y))$  sont sommables. On en déduit que la famille  $(xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ , qui est le produit de ces deux familles sommables, est sommable et que sa somme est :

$$\left( \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \right) \left( \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) \right),$$

ce qui est le résultat voulu.

**Proposition 12** On fait une démonstration par récurrence sur  $n$ . La propriété est évidente pour  $n = 1$  et a déjà été démontrée pour  $n = 2$  dans le théorème 11 de la page 683.

Supposons que la propriété soit vraie au rang  $n$  et considérons  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  des variables indépendantes. Alors, les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont également indépendantes et d'espérance finie donc  $\prod_{k=1}^n X_k$  est d'espérance finie :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

D'autre part, d'après le lemme des coalitions,  $X_{n+1}$  est indépendante de  $X_1 \cdots X_n$  ; en utilisant la propriété au rang 2, on trouve que  $\prod_{k=1}^{n+1} X_k$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} X_k\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) \mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(\prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)\right) \mathbb{E}(X_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k).$$

**Lemme 13** On a  $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ , car  $(|X| - |Y|)^2 \geq 0$ . Les variables aléatoires  $X^2$  et  $Y^2$  étant d'espérance finie, il en est de même de  $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ . On en déduit que  $XY$  est d'espérance finie, d'après la proposition 6 de la page 681.

## Chapitre 17. Espérance — Variance

**Proposition 15** La variable aléatoire nulle appartient à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 et  $\lambda$  est un réel, on a  $(\lambda X + Y)^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$ . Par hypothèse les variables  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie. Il en est de même de  $XY$ , d'après le lemme 13. La variable aléatoire  $(\lambda X + Y)^2$  est donc d'espérance finie, comme combinaison linéaire de variables aléatoires d'espérance finie, donc  $\lambda X + Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

**Théorème 16** Le fait que  $XY$  soit d'espérance finie est assuré par le lemme 13 de la page 684.

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la variable  $(\lambda X + Y)^2 = \lambda^2 X^2 + 2\lambda XY + Y^2$  est d'espérance finie, comme combinaison linéaire de variables aléatoires ayant une espérance finie. Son espérance est positive car c'est une variable aléatoire positive. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \mathbb{E}(X^2) + 2\lambda \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}((\lambda X + Y)^2) \geq 0.$$

- Si  $\mathbb{E}(X^2) = 0$ , alors  $X^2$  est presque sûrement nulle, donc  $X$  et  $XY$  sont presque sûrement nulles. On a donc  $\mathbb{E}(XY) = 0$  et  $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ .
- Si  $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$ , la fonction trinôme  $\lambda \mapsto \mathbb{E}((\lambda X + Y)^2)$  garde un signe constant. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne l'inégalité voulue.

**Théorème 17** Si  $X \in L^2$ , alors  $X^2$  et  $X$  sont d'espérance finie. De :

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2,$$

on déduit par linéarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

**Proposition 18** La variable  $X$  admet un moment d'ordre 2 ainsi que la variable constante égale à  $b$  donc  $aX + b \in L^2$ . On a  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$  et donc :

$$(aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2 = a^2(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

On en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{V}(aX + b) = \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2\mathbb{V}(X).$$

**Proposition 19** Par linéarité de l'espérance, on a  $\mathbb{E}(X^*) = \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} = 0$ . En utilisant la proposition 18, on obtient :

$$\mathbb{V}(X^*) = \frac{\mathbb{V}(X)}{\sigma(X)^2} = 1.$$

**Proposition 20** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = n(n-1)p(1-p)^{n-1}$ .

De  $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}$  pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on déduit que la

variable aléatoire  $X(X-1)$  possède une espérance finie donnée par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p(1-p) \frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Comme  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ , on en déduit par linéarité :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

**Proposition 21** Pour  $n \geq 2$ , on a :

$$n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda} \frac{n(n-1)\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}.$$

De  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = e^\lambda$ , on déduit que  $X(X-1)$  possède une espérance finie et :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2.$$

On en déduit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda.$$

**Théorème 22** On a :

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Chaque variable aléatoire apparaissant ci-dessus est d'espérance finie et l'on a, par linéarité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

**Proposition 23**

Soit  $X$ ,  $Y$  et  $X'$  trois variables aléatoires appartenant à  $L^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- On a  $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X) \geq 0$ .
- La symétrie est immédiate par définition de la covariance.
- Comme  $L^2$  est un espace vectoriel,  $X + X'$  appartient à  $L^2$ . Ainsi le couple  $(X + X', Y)$  possède une covariance. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + X', Y) &= \mathbb{E}((X + X')Y) - \mathbb{E}(X + X')\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(X'Y) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X'))\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X'Y) - \mathbb{E}(X')\mathbb{E}(Y) \\ &= \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X', Y), \end{aligned}$$

et de même :

$$\text{Cov}(\lambda X, Y) = \mathbb{E}(\lambda XY) - \mathbb{E}(\lambda X)\mathbb{E}(Y) = \lambda \mathbb{E}(XY) - \lambda \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda \text{Cov}(X, Y).$$

- La linéarité par rapport à la deuxième variable résulte de la symétrie et de la linéarité par rapport à la première variable.

**Théorème 25** Les variables  $X_1, \dots, X_n$  appartiennent à l'espace vectoriel  $L^2$  donc il en est de même de  $X_1 + \dots + X_n$  et l'on obtient, par bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Cov}(X_1 + \dots + X_n, X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Sachant que  $\text{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i)$  et  $\text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i)$ , on obtient :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

**Théorème 27** Soit  $\omega \in \Omega$ .

- Si  $\omega \in \{X \geq a\}$ , alors on a  $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 1 \leq \frac{X(\omega)}{a}$ , car  $X(\omega) \geq a$  et  $a > 0$ .
- Dans le cas contraire, on a  $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}(\omega) = 0 \leq \frac{X(\omega)}{a}$ , car  $\frac{X}{a}$  est une variable positive.

Ainsi,  $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq \frac{X}{a}$  donc, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

**Théorème 28** La variable  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  est positive et possède une espérance égale à  $\mathbb{V}(X)$ .

D'après l'inégalité de Markov, on a pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Comme les événements  $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}$  et  $\{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \varepsilon^2\}$  sont égaux, on a le résultat voulu.

**Théorème 29** Par linéarité de l'espérance, on a  $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = m$ . D'autre part, comme les variables  $X_k$  sont deux à deux non corrélées, puisque mutuellement indépendantes, et appartiennent à  $L^2$ , on a, d'après le corollaire 26 de la page 687 :

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{n\mathbb{V}(X_1)}{n^2} = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}.$$

On a donc, pour  $\varepsilon > 0$ , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Le résultat découle de cette inégalité.

**Proposition 30** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [-1, 1] \quad |\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \mathbb{P}(X = n).$$

Comme  $\sum \mathbb{P}(X = n)$  converge, la série  $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$  converge normalement sur  $[-1, 1]$ . Donc  $G_X$  est définie sur  $[-1, 1]$  et est continue sur  $[-1, 1]$ , car somme d'une série de fonctions continues convergant normalement.

La convergence sur  $[-1, 1]$  montre que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égale  1.

**Théorème 32** L'équivalence entre  $\sum n\mathbb{P}(X = n)$  converge et  $G_X$  est dérivable en 1 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme**

Soit  $(a_n)$  une suite  termes positifs telle la série  $\sum a_n$  converge. On note  $f$  la somme de la série entière  $\sum a_nt^n$ . La fonction  $f$  est dérivable en 1 si, et seulement si, la série de terme géneral  $na_n$  converge et l'on a alors :

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n.$$

**Démonstration.** On note  $R$  le rayon de convergence de la série  $\sum a_n t^n$ . Comme la série converge pour  $t = 1$ , on a  $R \geq 1$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -R, R[$  et :

$$\forall t \in ] -R, R[ \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Si  $R > 1$ , la fonction  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ , donc  $\sum n a_n$  converge. On suppose désormais  $R = 1$ . On a, pour tout  $t \in [0, 1[$  :

$$\frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{t^n - 1}{t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (t^{n-1} + \cdots + t + 1).$$

La fonction  $t \mapsto \frac{f(t) - f(1)}{t - 1}$  est donc croissante sur  $[0, 1[$  et positive. Elle possède donc une limite  $L$  en 1 dans  $[0, +\infty]$ . On pose également  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \in [0, +\infty]$ .

- On a pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \leq S$  donc, par passage à la limite,  $L \leq S$ .
- Pour tout entier  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\sum_{n=1}^N a_n (t^{n-1} + \cdots + t + 1) \leq \frac{f(t) - f(1)}{t - 1},$$

puis, en faisant tendre  $t$  vers 1,  $\sum_{n=1}^N n a_n \leq L$ .

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient  $S \leq L$ .

On a donc  $L = S$ . On en déduit :

$$f \text{ dérivable en 1} \iff L < +\infty \iff S < +\infty \iff \sum n a_n \text{ converge.}$$

On a alors  $f'(1) = S = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$ . □

**Théorème 33** La variable  $X$  appartient à  $L^2$  si, et seulement si, la série de terme général  $n^2 \mathbb{P}(X = n)$  converge, c'est-à-dire si, et seulement si, la série de terme général  $n(n-1) \mathbb{P}(X = n)$  converge. En effet, ces séries à termes positifs ont des termes généraux équivalents. En cas de convergence, on a, d'après la formule de transfert :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

On note  $R \geq 1$  le rayon de convergence de la série  $\sum \mathbb{P}(X = n) t^n$ . La fonction  $G_X$  est deux fois dérivable sur  $] -R, R[$  et :

$$\forall t \in ] -R, R[ \quad G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n) t^{n-2}.$$

Si  $R > 1$ , la fonction  $G_X$  est deux fois dérivable en 1 et  $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \mathbb{P}(X = n)$  donc la série  $\sum n(n-1) \mathbb{P}(X = n)$  converge. On suppose désormais  $R = 1$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

- Si la fonction  $G_X$  est deux fois dérivable en 1, elle est en particulier dérivable en 1 et d'après le théorème 32 de la page 690 on a :

$$\forall t \in [0, 1] \quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \mathbb{P}(X = n+1) t^n.$$

D'après le lemme utilisé dans la démonstration du théorème 32, appliqué à la série entière définissant  $G'_X$ , la dérivabilité de  $G'_X$  en 1 implique la convergence de la série de terme général  $n(n+1)\mathbb{P}(X = n+1)$ . De plus, on a :

$$G''_X(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\mathbb{P}(X = n+1)(n+1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X = n).$$

- Réciproquement, si la série de terme général  $n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$  converge, alors la série de terme général  $n\mathbb{P}(X = n)$  converge *a fortiori* donc, d'après le théorème 32 de la page 690, la fonction  $G_X$  est dérivable en 1 et :

$$\forall t \in [0, 1] \quad G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\mathbb{P}(X = n+1)t^n.$$

La série de terme général  $n(n+1)\mathbb{P}(X = n+1)$  converge donc, d'après le lemme utilisé dans la démonstration du théorème 32 de la page 690, la fonction  $G'_X$  est dérivable en 1 et, d'après le premier point,  $G''_X(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$ .

**Théorème 35** Soit  $t \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $G_{X_k}(t)$  est défini, c'est-à-dire  $t^{X_k}$  est d'espérance finie. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes donc, par transfert d'indépendance, les variables  $t^{X_1}, \dots, t^{X_n}$  sont également indépendantes.

De plus, on a  $t^{S_n} = \prod_{k=1}^n t^{X_k}$ . Alors d'après la proposition 12 de la page 683,  $t^{S_n}$  est aussi d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(t^{S_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(t^{X_k}).$$

Autrement dit,  $G_{S_n}(t)$  est défini et :

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t).$$

## S'entraîner et approfondir

### Espérance, variance, covariance

**17.1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires discrètes i.i.d., de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On cherche à calculer le nombre moyen de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros de 1 à  $n$ .

- Pour  $1 \leq k \leq n$ , on note  $T_k$  le nombre de tirages nécessaires pour obtenir  $k$  numéros distincts et l'on pose  $Z_1 = T_1$  et  $Z_k = T_k - T_{k-1}$  pour  $2 \leq k \leq n$ .

Montrer que les variables aléatoires  $Z_k$  pour  $2 \leq k \leq n$  suivent une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

- En déduire l'espérance de  $T_n$ .

**17.2** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes. Démontrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, et seulement si, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ , définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  à valeurs complexes, bornées, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)).$$

**17.3** 1. Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . À quelle condition a-t-on égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire  $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$  ?

- Soit  $X$  une variable discrète réelle strictement positive. Montrer que  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$ . Étudier les cas d'égalité.

**17.4** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , indépendantes.

On pose  $q = 1 - p$ . On dit que la première série est de longueur  $n$  si les premières épreuves ont donné le même résultat et la  $(n + 1)$ -ième un résultat différent. De même la deuxième série commence à l'épreuve qui suit la dernière épreuve de la première série et s'arrête avant le changement suivant. On note  $L_1$  et  $L_2$  respectivement la longueur de la première et de la seconde série.

$$\text{Démontrer que } \text{Cov}(L_1, L_2) = -\frac{(p - q)^2}{pq}.$$

**17.5** Soit  $X$  et  $Y$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

- Montrer que  $\text{Cov}(X, Y)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$ .
- Montrer que, si  $\mathbb{V}(X) \neq 0$ , l'égalité  $\text{Cov}(X, Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$  est obtenue si, et seulement s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $Y = aX + b$  presque sûrement.

**17.6** Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes appartenant à  $L^2$ .

On considère la matrice  $M = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- Montrer que  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- Montrer que  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si, et seulement s'il n'existe pas de relation affine de la forme  $z_1X_1 + \dots + z_nX_n = b$  (où  $(z_1, \dots, z_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ ) presque sûre entre les variables  $X_1, \dots, X_n$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

### 17.7 Formule du crible

1. Soit  $A_1, \dots, A_n$  des événements d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Montrer que  $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$ . En déduire la **formule du crible** :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1, n]\!] \\ \text{card}(I)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \right).$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur  $[\![1, n]\!]$ .

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros entre 1 et  $n$  au moins une fois (et à  $+\infty$  si on n'obtient jamais les  $n$  numéros). Pour  $j \in [\![1, n]\!]$  et  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $B_{j,m}$  l'événement : « au bout de  $m$  tirages, le numéro  $j$  n'est pas encore apparu ».

- (a) Calculer  $\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap \dots \cap B_{j_k,m})$ , où  $j_1, \dots, j_k$  sont des indices distincts entre 1 et  $n$ .

(b) En déduire que  $\mathbb{P}(X > m) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$ .

Calculer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > m)$ . Interpréter.

(c) Montrer que  $\mathbb{E}(X) = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$ .

(d) Montrer que  $\mathbb{E}(X) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$ .

- 17.8** On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On se donne un entier  $r \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  l'événement « au cours des  $n$  premières épreuves, on a obtenu  $r$  1 consécutifs (au moins une fois) » et  $\Pi_n$  sa probabilité.

1. (a) Donner les valeurs de  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_r$ .

- (b) Montrer que, pour  $n \geq r$ , on a  $\Pi_{n+1} = \Pi_n + (1 - \Pi_{n-r})p^r(1-p)$ .

- (c) Montrer que la suite  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Calculer sa limite.

2. Soit  $T$  la variable aléatoire discrète égale au temps d'attente de  $r$  1 consécutifs. On a donc  $T = k$  si  $k$  est le plus petit des entiers  $n$  tels que  $X_{n-r+1} = \dots = X_n = 1$  et  $T = +\infty$  si l'on n'obtient jamais  $r$  1 consécutifs.

- (a) Déduire de la question 1 que  $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ .

- (b) Montrer en utilisant la proposition 1 de la page 678 que :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1 - p^r}{(1 - p)p^r}.$$

- 17.9** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète positive, d'espérance finie.

Montrer que  $\mathbb{P}(X \geq x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ , quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Indication.** Commencer par le cas où  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ .

★★ 17.10 Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On suppose que  $\sum \mathbb{P}(E_n)$  converge.

1. Soit  $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}$  (on convient que  $Z = +\infty$  si la série diverge). Prouver que  $Z$  est une variable aléatoire discrète.
2. Montrer que  $\mathbb{P}(Z = +\infty) = 0$ .
3. Montrer que  $Z$  est d'espérance finie.

17.11 On lance une pièce de monnaie (la probabilité d'obtenir pile étant  $p \in ]0, 1[$ ) jusqu'à l'obtention du premier pile. Soit  $N$  la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaire. Si  $N = n$ , on relance ensuite  $n$  fois la pièce et l'on appelle  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenu.

1. Déterminer la loi de  $N$ , celle du couple  $(N, X)$ , puis la loi de  $X$ .
2. Montrer que  $X$  a même loi que le produit de deux variables indépendantes  $Y$  et  $Z$  telles que  $Y$  suive une loi de Bernoulli et  $Z$  une loi géométrique de même paramètre.
3. En déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

★★ 17.12 Fonction caractéristique

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle. On pose, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ . La fonction  $\Phi_X$  est appelée **fonction caractéristique** de la variable aléatoire  $X$ .

1. Montrer que  $\Phi_X$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. On suppose que  $X$  est dans  $L^2$ . Montrer que  $\Phi_X$  est de classe  $C^2$  et exprimer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$  à l'aide de  $\Phi_X$ .
3. On suppose que  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_X(t) e^{-ikt} dt.$$

En déduire que la fonction  $\Phi_X$  caractérise la loi de  $X$ .

## Inégalités probabilistes

17.13 Inégalité de Kolmogorov

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes, appartenant à  $L^2$ , centrées, ainsi que  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$S_i = X_1 + \dots + X_i, \quad B_i = \{ |S_1| < a \} \cap \dots \cap \{ |S_{i-1}| < a \} \cap \{ |S_i| \geq a \}.$$

1. Montrer que, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les variables  $S_i \mathbf{1}_{B_i}$  et  $S_n - S_i$  sont indépendantes. En déduire que :

$$\mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) = \mathbb{E}(S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}) + \mathbb{E}((S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq a^2 \mathbb{P}(B_i).$$

2. On pose  $C = \{ \sup(|S_1|, \dots, |S_n|) \geq a \}$ .

- (a) Montrer que  $\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$ .

(b) En déduire l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(C) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

\* 17.14 1. Montrer :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

2. Soit  $X$  une variable aléatoire centrée telle que  $|X| \leq 1$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $e^{tX}$  est d'espérance finie et que  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ .

3. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, centrées et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs, telles que  $|X_n| \leq c_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Montrer que :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - \varepsilon\right).$$

17.15 Une action vaut initialement 1 euro. À chaque instant  $n \geq 1$ , sa valeur est multipliée par une quantité aléatoire  $Z_n$ . On suppose que les variables  $Z_n$  sont indépendantes et de même loi, telles que :

$$\mathbb{P}(Z_n = 1+a) = \mathbb{P}(Z_n = 1-a) = \frac{1}{2} \quad \text{avec } a \in ]0, 1[.$$

On note  $X_n$  la valeur de l'action à l'instant  $n$  et l'on pose  $Y_n = \ln(Z_n)$ . On définit, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la variable :

$$\widehat{Y}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

1. Calculer, pour tout  $n \geq 0$ , l'espérance et la variance de  $X_n$ . Déterminer la limite de  $\mathbb{V}(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

2. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\widehat{Y}_n > -\delta) = 0.$$

3. En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = 0.$$

\* 17.16 On dispose de  $n$  urnes et de  $N = na$  boules, où  $a$  et  $n$  sont des entiers naturels non nuls. Ces boules sont réparties de façon indépendante et équiprobable entre les urnes. On nomme  $Y_n$  la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides et  $S_n = \frac{Y_n}{n}$ .

1. Calculer  $\mathbb{E}(S_n)$  et  $\mathbb{V}(S_n)$ .

2. Montrer :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon) = 0.$$

## Fonctions génératrices

17.17 Soit  $\ell, m$  et  $n$  des entiers naturels non nuls tels que  $n = \ell m$ , ainsi que  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ; on pose  $Z = X + Y$ . On suppose que  $X$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$  et que  $Z$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .

Déterminer la fonction génératrice de  $Y$ . En déduire la loi de  $Y$ .

**17.18** Dans une salle de cinéma, il arrive  $X$  personnes souhaitant voir le film. On suppose que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ . La capacité de la salle est de  $n$  places. On note  $Y$  le nombre de personnes ne pouvant entrer dans la salle.

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Déterminer la fonction génératrice de  $Y$ .
3. Calculer l'espérance de  $Y$ .

**\*\* 17.19** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On désigne par  $\Omega$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  que l'on munit de la probabilité uniforme. Pour  $\sigma \in \Omega$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on dit que  $\sigma(i)$  est un maximum provisoire de  $\sigma$  si :

$$\sigma(i) = \max(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)).$$

On désigne par  $X_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de maximums provisoires des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour  $1 \leq k \leq n$ , on note  $Z_k$  la variable indicatrice de l'événement «  $\sigma(k)$  est un maximum provisoire ».

1. Déterminer la loi de  $Z_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
2. On admet que les variables  $Z_1, \dots, Z_n$  sont indépendantes.
  - (a) Déterminer  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$  (sous forme de sommes) et un équivalent de  $\mathbb{E}(X_n)$  et de  $\mathbb{V}(X_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - (b) Déterminer la fonction génératrice  $g_n$  de  $X_n$ .  
En déduire  $\mathbb{P}(X_n = 1)$ ,  $\mathbb{P}(X_n = 2)$  et  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .
3. Montrer que les variables  $Z_1, \dots, Z_n$  sont indépendantes.

**\* 17.20 Somme aléatoire de variables aléatoires**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de même loi, et  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $N$  et les variables  $X_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , forment une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et l'on définit  $S_N$  :

$\Omega$	$\longrightarrow$	$\mathbb{N}$
$\omega$	$\longmapsto$	$S_{N(\omega)}(\omega)$

1. Montrer que  $S_N$  est une variable aléatoire.
2. Montrer que  $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer que, si  $X_1$  et  $N$  sont d'espérance finie, alors  $S_N$  est d'espérance finie et vérifie la **première formule de Wald** :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N).$$

4. Montrer que, si  $X_1$  et  $N$  sont dans  $L^2$ , alors  $S_N \in L^2$  et vérifie la **seconde formule de Wald** :

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbb{V}(N).$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

### 17.21 Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ : premier retour à l'origine

Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes i.i.d. dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p.$$

On pose  $S_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

La suite  $(S_n)$  est appelée **marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$** . On peut imaginer un mobile partant de l'origine et se déplaçant à chaque instant (entier) de  $\pm 1$ , les déplacements successifs étant indépendants. Alors  $S_n$  représente la position du mobile au bout de  $n$  déplacements.

1. (a) Déterminer  $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) On note  $f(x)$  la somme de la série entière  $\sum u_n x^n$ . Montrer que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}.$$

2. Pour tout entier naturel non nul  $k$ , on note  $A_k$  l'événement « le mobile retourne pour la première fois à l'origine au bout  $n$  déplacements », c'est-à-dire :

$$A_k = \{S_k = 0\} \cap \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\} \right).$$

On pose  $v_k = \mathbb{P}(A_k)$ , pour tout  $k \geq 1$  et  $v_0 = 0$ .

(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a  $u_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$ .

3. On note  $g(x)$  la somme de la série entière  $\sum v_n x^n$ .

(a) Montrer que le rayon de la série entière définissant  $g(x)$  est supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad g(x) = \frac{f(x) - 1}{f'(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}.$$

(b) Déterminer la probabilité de l'événement  $A$  : « il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $S_n = 0$  ».

On suppose dans le reste de l'exercice que  $p = \frac{1}{2}$ .

4. (a) Soit  $T$  la variable aléatoire égale au premier indice  $n$  non nul pour lequel l'événement  $\{S_n = 0\}$  est réalisé, si un tel indice existe, et  $+\infty$  sinon.

Montrer que  $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ .

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $v_{2n} = \frac{2 \binom{2n-2}{n-1}}{n 4^n}$ .

(c) La variable  $T$  est-elle d'espérance finie ?

## Solutions des exercices

**17.1** 1. Soit  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et  $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Si  $\mathbb{P}(T_{k-1} = i) \neq 0$ , on a :

$$\mathbb{P}(Z_k = j \mid T_{k-1} = i) = \mathbb{P}(T_k - T_{k-1} = j \mid T_{k-1} = i) = \mathbb{P}(T_k = i + j \mid T_{k-1} = i).$$

Si  $\{T_{k-1} = i\}$  est réalisé, les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_{i-1}$  ont donné  $k-2$  valeurs différentes et  $X_i$  une valeur différente des  $k-2$  précédentes. Alors  $\{T_k = i+j\}$  est réalisé si, et seulement si, :

- les variables aléatoires  $X_{i+1}, \dots, X_{i+j-1}$  redonnent l'une des  $k-1$  valeurs déjà obtenues, ce qui, pour chaque variable aléatoire, se fait avec la probabilité  $\frac{k-1}{n}$  ;
- $X_{i+j}$  donne une valeur différente des précédentes, ce qui se fait avec une probabilité  $1 - \frac{k-1}{n}$ .

Par indépendance des variables aléatoires  $X_{i+1}, \dots, X_{i+j}$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(Z_k = j \mid T_{k-1} = i) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Ce résultat ne dépend pas de  $i$ , donc pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_k = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_k = j \mid T_{k-1} = i) \mathbb{P}(T_{k-1} = i) \\ &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{k-1} = i) \\ &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

La variable  $Z_k$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{n-k+1}{n}$ .

2. On a  $T_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ . La variable aléatoire  $Z_1 = T_1$  est la variable certaine égale à 1.

Pour  $2 \leq k \leq i$ , on a  $\mathbb{E}(Z_k) = \frac{n}{n-k+1}$ .

Comme la formule est valable pour  $k=1$ , on obtient :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

**17.2** Si  $f$  et  $g$  sont bornées, les variables aléatoires  $f(X)$ ,  $g(Y)$  et  $f(X)g(Y)$  sont bornées, donc sont d'espérance finie.

- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, il en est de même de  $f(X)$  et  $g(Y)$ , par transfert d'indépendance, et l'égalité découle directement du théorème 11 de la page 683.
- Réciproquement supposons que  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ , pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  bornées.

Soit  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ . Prenons  $f = \mathbf{1}_{\{x\}}$  et  $g = \mathbf{1}_{\{y\}}$ . On a alors :

$$f(X) = \mathbf{1}_{\{X=x\}}, \quad g(Y) = \mathbf{1}_{\{Y=y\}} \quad \text{et} \quad f(X)g(Y) = \mathbf{1}_{\{X=x\} \cap \{Y=y\}}.$$

L'hypothèse se traduit par  $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ . Cela est vrai pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , ce qui établit l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

- 17.3** 1. • Si  $X$  est presque sûrement nulle, on a  $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = 0$ .  
 • Sinon, l'égalité  $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$  équivaut à la nullité du discriminant de la fonction trinôme  $\lambda \mapsto \mathbb{E}((\lambda X + Y)^2)$ , c'est-à-dire à l'existence de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{E}((\lambda X + Y)^2) = 0$ . Cette dernière condition est réalisée si, et seulement si, on a  $Y = -\lambda X$  presque sûrement.

On conclut qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 \quad \text{ou} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}(Y = \alpha X) = 1,$$

c'est-à-dire si, et seulement si,  $X$  et  $Y$  sont presque sûrement proportionnelles.

2. On suppose que  $X$  et  $\frac{1}{X}$  sont d'espérance finie sinon l'inégalité est évidente. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux variables  $\sqrt{X}$  et  $\frac{1}{\sqrt{X}}$  qui sont dans  $L^2$ . On obtient :

$$1 = \mathbb{E}\left(\sqrt{X} \frac{1}{\sqrt{X}}\right) \leq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Le cas d'égalité correspond à l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire d'après la première question à  $\sqrt{X}$  et  $\frac{1}{\sqrt{X}}$  presque sûrement proportionnelles, soit encore à  $X$  presque sûrement constante.

- 17.4** • Pour  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , on a :

$$\begin{aligned} & \{L_1 = m, L_2 = n\} \\ &= (\{X_1 = \dots = X_m = 1\} \cap \{X_{m+1} = \dots = X_{m+n} = 0\} \cap \{X_{m+n+1} = 1\}) \\ &\cup (\{X_1 = \dots = X_m = 0\} \cap \{X_{m+1} = \dots = X_{m+n} = 1\} \cap \{X_{m+n+1} = 0\}) \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(L_1 = m, L_2 = n) = p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n.$$

On en déduit, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = m, L_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n) \\ &= p^{m+1} \frac{q}{1-q} + q^{m+1} \frac{p}{1-p} = qp^m + pq^m. \end{aligned}$$

On trouve de même que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(L_2 = n) = p^2q^{n-1} + q^2p^{n-1}.$$

On vérifie au passage que  $\sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_2 = n) = 1$ , ce qui montre que  $L_1$

et  $L_2$  sont bien des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , définies presque sûrement.

- On calcule l'espérance de  $L_1$  et de  $L_2$ . On obtient :

$$\mathbb{E}(L_1) = \sum_{m=1}^{+\infty} m(qp^m + pq^m) = p \sum_{m=1}^{+\infty} mp^{m-1}q + q \sum_{m=1}^{+\infty} mq^{m-1}p.$$

On reconnaît dans les deux sommes l'espérance de variables géométriques de paramètres  $q$  et  $p$  respectivement. On obtient :

$$\mathbb{E}(L_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

On trouve de même :

$$\mathbb{E}(L_2) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 2.$$

- On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1 L_2) &= \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} mn \mathbb{P}(L_1 = m, L_2 = n) \\ &= \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} mn(p^{m+1}q^n + q^{m+1}p^n) \\ &= \left( \sum_{m=1}^{+\infty} mp^{m+1} \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n \right) + \left( \sum_{m=1}^{+\infty} mq^{m+1} \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} np^n \right).\end{aligned}$$

On reconnaît dans chaque terme, à une constante près, l'espérance d'une variable suivant une loi géométrique. On obtient :

$$\mathbb{E}(L_1 L_2) = \frac{p}{q} \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p} \frac{p}{q^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}.$$

Finalement, on a :

$$\text{Cov}(L_1, L_2) = \mathbb{E}(L_1 L_2) - \mathbb{E}(L_1) \mathbb{E}(L_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{2p}{q} - \frac{2q}{p} = -\frac{-(p+q) + 2p^2 + 2q^2}{pq}$$

et donc, puisque  $p + q = 1$  :

$$\text{Cov}(L_1, L_2) = -\frac{-(p+q)^2 + 2p^2 + 2q^2}{pq} = -\frac{(p-q)^2}{pq}.$$

### 17.5 1. • Supposons $\mathbb{V}(X) = 0$ .

On sait qu'alors  $X$  est presque sûrement constante (cf. exemple 12 de la page 685).

Elle est donc indépendante de  $Y$ . On a donc  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , ce qui donne le résultat.

- Supposons  $\mathbb{V}(X) > 0$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\lambda \mapsto \mathbb{V}(\lambda X + Y)$ . On a, pour tout réel  $\lambda$  :

$$f(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{V}(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

Pour tout  $\lambda$ , on a  $f(\lambda) \geq 0$ . La fonction trinôme  $f$  garde un signe constant donc son discriminant est négatif. On obtient  $\Delta = 4((\text{Cov}(X, Y))^2 - \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)) \leq 0$  ce qui donne l'inégalité voulue.

2. L'égalité  $\text{Cov}(X, Y)^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$  équivaut à  $\Delta = 0$  et donc à l'existence de  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f(\lambda_0) = \mathbb{V}(\lambda_0 X + Y) = 0.$$

On sait qu'une variable aléatoire de  $L^2$  est de variance nulle si, et seulement si, elle est presque sûrement constante.

Ainsi  $\mathbb{V}(\lambda_0 X + Y) = 0$  équivaut à  $\lambda_0 X + Y$  est presque sûrement constante, c'est-à-dire à l'existence de  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(\lambda_0 X + Y = b) = 1$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(Y = -\lambda_0 X + b) = 1$ , ce qui est le résultat voulu avec  $a = -\lambda_0$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

- 17.6** 1. La matrice  $M$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a, par bilinéarité de la covariance :

$$Z^T M Z = \sum_{1 \leq i, j \leq n} z_i z_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n z_i X_i\right) \geq 0,$$

donc  $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

2. La matrice  $M$  n'appartient pas à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si, et seulement si,  $0 \in \text{sp}(M)$ . On démontre donc que  $0 \in \text{sp}(M)$  équivaut à l'existence d'une relation affine presque sûre entre les variables  $X_1, \dots, X_n$ .

- Si  $0 \in \text{sp}(M)$  et  $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé, on obtient :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n z_i X_i\right) = Z^T M Z = 0,$$

donc  $\sum_{i=1}^n z_i X_i$  est presque sûrement constante. Il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n z_i X_i = b\right) = 1.$$

- Réciproquement, supposons qu'il existe  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  non nul et  $b \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n z_i X_i = b\right) = 1$ . Alors on a, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$0 = \text{Cov}(X_i, b) = \text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n z_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) z_j,$$

donc  $0$  est valeur propre de  $M$ , un vecteur propre associé étant  $(z_1, \dots, z_n)$ .

- 17.7** 1. L'application  $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a :

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}(\omega)) = 1 \iff \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 1 \iff \omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

On en déduit  $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ . En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \sum_{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket} (-1)^{\text{card } I} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \\ &= \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{card } I-1} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ \text{card } I=k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}. \end{aligned}$$

Sachant que pour tout événement  $A$ , on a  $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ , on en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1, n]\!]} \\ \text{card } I=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right).$$

2. (a) En posant  $I = \{j_1, \dots, j_k\}$ , on a :

$$B_{j_1,m} \cap \dots \cap B_{j_k,m} = \bigcap_{i=1}^m \{X_i \notin I\}.$$

Les variables  $X_i$  (pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ) étant indépendantes, on en déduit :

$$\mathbb{P}(B_{j_1,m} \cap \dots \cap B_{j_k,m}) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(X_i \notin I) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.$$

(b) On a  $\{X > m\} = \bigcup_{j=1}^n B_{j,m}$ . On en déduit en appliquant la formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > m) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1, n]\!]} \\ \text{card } I=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} B_{j,m}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m. \end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > m) = 0$  car on a une combinaison linéaire de suites géométriques de raison appartenant à  $[0, 1[$ . La suite  $(\{X > m\})$  décroît donc, par continuité décroissante :

$$0 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \{X > m\}\right) = \mathbb{P}(X = +\infty).$$

La variable aléatoire  $X$  est presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

(c) On a, d'après la proposition 1 de la page 678 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{1 - \frac{n-k}{n}} \\ &= n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}. \end{aligned}$$

(d) Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose  $f(t) = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k} t^k}{k}$ . La fonction  $f$  est dérivable

et pour  $t \in ]0, 1]$ , on obtient :

$$f'(t) = n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} t^{k-1} = -\frac{n}{t} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^k = n \frac{1 - (1-t)^n}{t}.$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = f(1) = \int_0^1 f'(t)dt = n \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt = n \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1-u} du$$

et donc :

$$\mathbb{E}(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 u^j du = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

### Remarque

On retrouve par une autre méthode le résultat de l'exercice 17.1 de la page 703.

**17.8** 1. (a) On a  $\Pi_0 = \Pi_1 = \cdots = \Pi_{r-1} = 0$  et  $\Pi_r = p^r$ .

(b) On a clairement  $A_n \subset A_{n+1}$  et donc  $\Pi_{n+1} - \Pi_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \setminus A_n)$ .

L'événement  $A_{n+1} \setminus A_n$  est réalisé si, et seulement si, on obtient  $r-1$  consécutifs pour la première fois comme valeurs de  $X_{n-r+2}, \dots, X_{n+1}$ , ce qui impose que  $X_{n-r+1} = 0$  et que l'on n'ait pas obtenu  $r$  succès consécutifs auparavant. On a donc :

$$A_{n+1} \setminus A_n = \overline{A_{n-r}} \cap \{X_{n-r+1} = 0\} \cap \{X_{n-r+2} = 1\} \cap \cdots \cap \{X_{n+1} = 1\}.$$

L'événement  $\overline{A_{n-r}}$  ne dépend que  $X_1, \dots, X_{n-r}$ . Il est donc de la forme  $\{(X_1, \dots, X_{n-r}) \in C\}$ , où  $C \subset \mathbb{R}^k$ . Par le lemme des coalitions, la variable aléatoire  $(X_1, \dots, X_{n-r})$  est indépendante de  $(X_{n-r+1}, \dots, X_{n+1})$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1} - \Pi_n &= \mathbb{P}(\overline{A_{n-r}}) \mathbb{P}(X_{n-r+1} = 0, X_{n-r+2} = 1, \dots, X_{n+1} = 1) \\ &= (1 - \Pi_{n-r})(1 - p)^r. \end{aligned}$$

(c) La suite  $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 1 donc convergente. On note  $L$  sa limite. Par passage à la limite dans la relation précédente, on obtient  $L - L = (1 - L)(1 - p)p^r$ , et donc  $L = 1$ , puisque  $p \in ]0, 1[$ .

2. (a) Comme la suite  $(A_n)$  est croissante, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n = 1.$$

Comme  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \overline{\{T = +\infty\}}$ , on en déduit que  $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ . L'application  $T$  est presque sûrement finie.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a, par définition  $\{T = k\} = A_k \setminus A_{k-1}$ , donc  $\{T = k\}$  est un événement et  $T$  est bien une variable aléatoire.

(b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\{T > k\} = \overline{A_k}$  et donc  $\mathbb{P}(T > k) = 1 - \Pi_k$ . D'après la question 1, on a pour tout  $k \geq 0$  :

$$1 - \Pi_k = \frac{\Pi_{k+r+1} - \Pi_{k+r}}{(1 - p)p^r}.$$

De la proposition 1 de la page 678, on déduit :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Pi_{k+r+1} - \Pi_{k+r}}{(1 - p)p^r} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n - \Pi_r}{(1 - p)p^r} = \frac{1 - p^r}{(1 - p)p^r}.$$

**17.9** Pour commencer, on suppose  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . Pour  $x > 0$ , on a :

$$0 \leq x \mathbb{P}(X \geq x) = x \sum_{n=\lceil x \rceil}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \leq \sum_{n=\lceil x \rceil}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n),$$

où  $\lceil x \rceil$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$ . On reconnaît dans le terme de droite une reste de la série  $\sum n \mathbb{P}(X = n)$  qui est convergente, puisque  $X$  est d'espérance finie. Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\lceil x \rceil$  tend aussi vers  $+\infty$ , donc le reste tend vers 0. Ainsi,  $x \mathbb{P}(X \geq x)$  tend vers 0, ce qui est le résultat voulu.

Dans le cas général, on considère la variable aléatoire  $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qui vérifie l'inégalité  $X \leq Y$ . Soit  $x > 0$ . On a  $\{X \geq x\} \subset \{Y \geq x\}$  et donc :

$$0 \leq x \mathbb{P}(X \geq x) \leq x \mathbb{P}(Y \geq x).$$

D'après ce qui précède,  $x \mathbb{P}(Y \geq x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , donc *a fortiori*  $x \mathbb{P}(X \geq x)$  tend vers 0.

**17.10** 1. L'application  $Z$  est à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , ensemble dénombrable.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a  $Z(\omega) = n$  si, et seulement si,  $\omega$  appartient exactement à  $n$  des ensembles  $E_k$  (pour  $k \in \mathbb{N}$ ). On a donc :

$$\{Z = n\} = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})} \left( \bigcap_{k \in I} E_k \right) \cap \left( \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus I} \overline{E_k} \right),$$

où  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  est l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$  de cardinal  $n$ .

Pour tout  $I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ ,  $\left( \bigcap_{k \in I} E_k \right) \cap \left( \bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus I} \overline{E_k} \right)$  est un événement, car c'est l'intersection d'une famille dénombrable d'événements.

D'autre part, on peut écrire  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n([0, N])$ , où  $\mathcal{P}_n([0, N])$  est l'ensemble

des parties de cardinal  $n$  de  $[0, N]$ . Donc  $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$  est dénombrable, car infini et réunion dénombrable d'ensembles finis.

Enfin,  $\{Z = n\}$  est un événement, car réunion dénombrable d'événements.

- D'autre part  $\{Z = +\infty\}$  est l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui appartiennent à une infinité d'ensembles  $E_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). On a (cf. exemple 6 de la page 602) :

$$\{Z = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} E_p$$

donc  $\{Z = +\infty\}$  est un événement.

Par conséquent,  $\{Z = x\}$  est un événement, pour tout  $x \in Z(\Omega)$ , donc  $Z$  est une variable aléatoire discrète.

2. La série  $\sum \mathbb{P}(E_n)$  converge. Il résulte du premier lemme de Borel-Cantelli (cf. exemple 10 de la page 605) que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} E_p\right) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbb{P}(Z = +\infty) = 0.$$

3. Comme  $Z \geq 0$ , elle possède une espérance dans  $[0, +\infty]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , possons  $Z_n = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{E_i}$ . On a alors  $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_i}) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(E_i)$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

Les variables  $Z_n$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . D'après la proposition 1 de la page 678, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > k)$  et  $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > k)$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . La suite  $(Z_n)$  converge simplement vers  $Z$  sur  $\Omega$ . Soit  $\omega \in \Omega$ . Si  $Z(\omega) > k$  alors, pour  $n$  assez grand, on a  $Z_n(\omega) > k$ . On a donc :

$$\{Z > k\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n > k\}.$$

Comme la suite  $(\{Z_n > k\})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (car  $(Z_n)$  est croissante), on a, par continuité croissante :

$$\mathbb{P}(Z > k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n > k\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n > k).$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a donc :

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(Z > k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(Z_n > k) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Cela est valable pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , donc  $Z$  est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(Z) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i).$$

Mais d'autre part, on a  $Z \geq Z_n$  et donc  $\mathbb{E}(Z) \geq \mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(E_i)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par passage à la limite, on obtient  $\mathbb{E}(Z) \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i)$  et donc  $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_i)$ .

- 17.11** 1. La variable  $N$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $\{N = n\}$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . On a donc, pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n, X = k) &= \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}(X = k \mid N = n) \\ &= \begin{cases} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on en déduit  $\mathbb{P}(X = k)$ , en sommant sur  $n$  (avec  $n \geq k$  et  $n \geq 1$ ).

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\ &= \frac{p^{k+1} (1-p)^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} (1-p)^{2(n-k)}. \end{aligned}$$

On a, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{k!} \cdot \frac{k!}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

- On a :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

2. Soit  $p' \in ]0, 1[$ . On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , indépendantes,  $Z$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p'$  et  $Y$  suivant une loi géométrique de paramètre  $p'$ . La variable aléatoire  $YZ$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On a :

- $\mathbb{P}(YZ = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p'$  ;
- pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(YZ = k) = \mathbb{P}(Y = 1, Z = k) = p'^2(1 - p')^{k-1}$ .

On voit que  $X$  et  $YZ$  ont même loi si, et seulement si,  $p' = \frac{1}{2-p}$ .

3. On a, puisque  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = p' \frac{1}{p'} = 1.$$

On a, de même, par indépendance de  $Y^2$  et  $Z^2$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(Y^2Z^2) = \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Y)(\mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2) \\ &= p' \left( \frac{1-p'}{p'^2} + \frac{1}{p'^2} \right) = \frac{2-p'}{p'} = 3 - 2p. \end{aligned}$$

On en déduit  $\mathbb{V}(X) = 2(1 - p)$ .

- 17.12** 1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $|e^{itX}| = 1$  : la variable  $e^{itX}$  est bornée donc d'espérance finie, donc  $\Phi_X(t)$  est définie.

Soit  $D$  un ensemble dénombrable tel que  $X(\Omega) \subset D$  (si  $X(\omega)$  est finie, on prend par exemple  $D = X(\Omega) \cup \mathbb{N}$ ) que l'on écrit  $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . On a alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n),$$

car si  $x \notin X(\Omega)$ , alors  $\mathbb{P}(X = x) = 0$ .

On considère pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n : t \mapsto e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$ . Les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . D'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $|u_n(t)| = \mathbb{P}(X = x_n)$ . Comme  $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$  converge, la série de fonctions  $\sum u_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\Phi_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. On a, pour tout réel  $t$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u'_n(t) = ix_n e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n) \quad \text{et} \quad u''_n(t) = -x_n^2 e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n).$$

On en déduit :

$$|u'_n(t)| = |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \quad \text{et} \quad |u''_n(t)| = x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n).$$

Comme  $X \in L^2$ , les variables aléatoires  $X$  et  $X^2$  sont d'espérance finie donc les séries  $\sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$  et  $\sum x_n^2 \mathbb{P}(X = x_n)$  convergent. Les séries de fonctions  $\sum u'_n$  et  $\sum u''_n$  convergent donc normalement sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

Du théorème de dérivation des séries de fonctions on déduit que  $\Phi_X$  est de classe  $C^2$  et que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi'_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} ix_n e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n) \quad \text{et} \quad \Phi''_X(t) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 e^{itx_n} \mathbb{P}(X = x_n).$$

On a, en particulier :  $\Phi'_X(0) = i \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n) = i\mathbb{E}(X)$  et  $\Phi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)$ . On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = -i\Phi'_X(0) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = -\Phi''_X(0) + (\Phi'_X(0))^2.$$

3. Dans cette question  $D = \mathbb{Z}$ . On a :

$$\int_0^{2\pi} \Phi_X(t) e^{-itk} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_n) e^{it(x_n - k)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_n) \int_0^{2\pi} e^{it(x_n - k)} dt,$$

car la série  $\sum \mathbb{P}(X = x_n) e^{it(x_n - k)}$  converge uniformément par rapport à  $t$ . Pour tout  $j \in \mathbb{Z}^*$ , on a  $\int_0^{2\pi} e^{itj} dt = 0$ . Comme  $x_n \in \mathbb{Z}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il ne reste qu'un terme non nul dans la somme, pour  $x_n = k$ . On a donc  $\int_0^{2\pi} \Phi_X(t) e^{-itk} dt = 2\pi \mathbb{P}(X = k)$ .

Connaissant la fonction  $\Phi_X$ , on peut calculer  $\mathbb{P}(X = k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , donc la fonction  $\Phi_X$  détermine la loi de  $X$ .

**17.13** 1. On a, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$B_i = \{|S_1| < a\} \cap \dots \cap \{|S_{i-1}| < a\} \cap \{|S_i| \geq a\},$$

donc  $S_i \mathbf{1}_{B_i}$  est une fonction des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_i$ . D'autre part, on a  $S_n - S_i = \sum_{k=i+1}^n X_k$ , donc  $S_n - S_i$  est une fonction des variables aléatoires  $X_{i+1}, \dots, X_n$ .

Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  étant indépendantes, il en est de même de  $S_i \mathbf{1}_{B_i}$  et  $S_n - S_i$ , d'après le lemme des coalitions.

Les variables aléatoires  $X_i$  sont dans  $L^2$ , donc il en est de même des variables aléatoires  $S_i$ . Les variables aléatoires  $S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}$ ,  $S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}$  et  $(S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}$  ont une espérance finie, car, elles sont positives et inférieures respectivement à  $S_n^2$ ,  $S_i^2$  et  $(S_n - S_i)^2$ , qui ont une espérance finie. On a, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) - \mathbb{E}(S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}) &= \mathbb{E}((S_n - S_i)(S_n + S_i) \mathbf{1}_{B_i}) \\ &= \mathbb{E}((S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}) + 2\mathbb{E}((S_n - S_i)S_i \mathbf{1}_{B_i}). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires  $S_i \mathbf{1}_{B_i}$  et  $S_n - S_i$  sont indépendantes donc :

$$\mathbb{E}((S_n - S_i)S_i \mathbf{1}_{B_i}) = \mathbb{E}(S_i \mathbf{1}_{B_i}) \mathbb{E}(S_n - S_i) = 0,$$

car  $\mathbb{E}(S_n - S_i) = \sum_{k=i+1}^n \mathbb{E}(X_k) = 0$ . On a donc l'égalité voulue.

Soit  $\omega \in \Omega$ .

- Si  $\omega \in B_i$ , alors  $S_i^2(\omega) \mathbf{1}_{B_i}(\omega) = S_i^2(\omega) \geq a^2 \mathbf{1}_{B_i}(\omega)$ .
- Si  $\omega \notin B_i$ , alors  $S_i^2(\omega) \mathbf{1}_{B_i}(\omega) = a^2 \mathbf{1}_{B_i}(\omega) = 0$ .

On a donc  $S_i^2 \mathbf{1}_{B_i} \geq a^2 \mathbf{1}_{B_i}$ , d'où l'on déduit, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S_i^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq a^2 \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_i}) = a^2 \mathbb{P}(B_i).$$

Comme  $\mathbb{E}((S_n - S_i)^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq 0$ , car c'est l'espérance d'une variable positive, on a *a fortiori*  $\mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) \geq a^2 \mathbb{P}(B_i)$ .

2. (a) On a :

$$C = B_1 \cup \dots \cup B_n.$$

Les événements  $B_1, \dots, B_n$  étant incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i).$$

(b) De la question 1, on déduit :

$$\mathbb{P}(C) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{B_i}) \leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}\left(S_n^2 \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{B_i}\right).$$

Mais  $\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{B_i} = \mathbf{1}_C \leq 1$ , donc  $\mathbb{E}\left(S_n^2 \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{B_i}\right) \leq \mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{V}(S_n)$ , car  $\mathbb{E}(S_n) = 0$ .

On obtient :

$$\mathbb{P}(C) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{a^2}.$$

**17.14** 1. Soit  $x \in [-1, 1]$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On remarque que  $\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t = xt$ .

Comme  $\frac{1-x}{2}$  et  $\frac{1+x}{2}$  sont deux réels positifs, de somme 1, on obtient par convexité de la fonction  $\exp$  :

$$e^{tx} = \exp\left(\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

2. Comme  $|X| \leq 1$ , on a, d'après la première question, pour tout réel  $t$  :

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t.$$

La variable  $X$  est d'espérance finie, donc il en est de même de la variable aléatoire qui est dans le membre de droite de l'inégalité et, par linéarité, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t\right) = \frac{e^{-t}}{2}(1 - \mathbb{E}(X)) + \frac{e^t}{2}(1 + \mathbb{E}(X)) = \text{ch}(t),$$

car  $X$  est centrée. Comme la variable aléatoire  $e^{tX}$  est positive, on en déduit qu'elle est également d'espérance finie et que  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t)$ .

Mais on a  $\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ . On remarque que, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$(2n)! = n! \times ((n+1) \times \dots \times (2n)) \geq n! 2^n,$$

car il y a dans le produit  $n$  termes supérieurs à 2. Cela reste vrai pour  $n = 0$ .

On en déduit :

$$\text{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n! 2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

On a donc  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ .

## Chapitre 17. Espérance — Variance

3. On peut supposer que les  $c_k$  pour  $1 \leq k \leq n$  sont non nuls. En effet si  $c_k = 0$ , alors  $X_k = 0$  et on peut les supprimer des deux membres de l'inégalité.

On pose  $Y_k = \frac{X_k}{c_k}$ , pour tout  $k$ . La variable  $Y_k$  est centrée et  $|Y_k| \leq 1$ , donc on a,

d'après la question 2,  $\mathbb{E}(e^{tX_k}) = \mathbb{E}(e^{tc_k Y_k}) \leq e^{\frac{t^2 c_k^2}{2}}$ , pour tout réel  $t$ . On a :

$$e^{tS_n} = \exp\left(\sum_{k=1}^n tX_k\right) = \prod_{k=1}^n e^{tX_k}.$$

Les variables aléatoires  $e^{tX_k}$  sont indépendantes, car fonctions de variables indépendantes, donc :

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k}) \leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{t^2 c_k^2}{2}} = \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right).$$

La chaîne d'inclusions  $\{e^{|S_n|} > e^\varepsilon\} \subset \{e^{S_n} > e^\varepsilon\} \cup \{e^{-S_n} > e^\varepsilon\}$  donne :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{|S_n|} > e^\varepsilon) \leq \mathbb{P}(e^{S_n} > e^\varepsilon) + \mathbb{P}(e^{-S_n} > e^\varepsilon).$$

On en déduit, en appliquant l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{S_n})}{e^\varepsilon} + \frac{\mathbb{E}(e^{-S_n})}{e^\varepsilon}.$$

En appliquant la majoration de  $\mathbb{E}(e^{tS_n})$  pour  $t = 1$  et  $t = -1$ , on obtient :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2\right)}{e^\varepsilon} = 2 \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - \varepsilon\right).$$

- 17.15** 1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $X_n = \prod_{k=1}^n Z_k$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $\mathbb{E}(Z_k) = 1$  et, comme les variables  $Z_k$  sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(X_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = 1.$$

Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $\mathbb{E}(Z_k^2) = \frac{(1-a)^2 + (1+a)^2}{2} = 1 + a^2$ . Par indépendance des variables  $Z_k^2$ , on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k^2) = (1 + a^2)^n \quad \text{puis} \quad \mathbb{V}(X_n) = (1 + a^2)^n - 1.$$

Ainsi,  $\mathbb{V}(X_n)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. Les variables aléatoires  $Y_k$  sont finies donc appartiennent à  $L^2$ . On obtient par la formule de transfert :

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2} (\ln(1-a) + \ln(1+a)) = \ln \sqrt{1-a^2}.$$

Les variables  $Y_k$  sont indépendantes, car fonctions des variables  $Z_k$  qui sont indépendantes, de même loi, possèdent une espérance finie  $\ln \sqrt{1-a^2}$  et une variance finie donc,

d'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\widehat{Y}_n - \ln \sqrt{1-a^2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Comme  $\{\widehat{Y}_n > \ln \sqrt{1-a^2} + \varepsilon\} \subset \{\left|\widehat{Y}_n - \ln \sqrt{1-a^2}\right| \geq \varepsilon\}$ , on a *a fortiori* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\widehat{Y}_n > \ln \sqrt{1-a^2} + \varepsilon\right) = 0.$$

On a  $\ln \sqrt{1-a^2} < 0$ , donc on peut choisir  $\varepsilon \in ]0, -\ln \sqrt{1-a^2}[$ .

On pose alors  $\delta = -\ln \sqrt{1-a^2} - \varepsilon$ . On a bien  $\delta > 0$  et  $\mathbb{P}(\widehat{Y}_n > -\delta)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

3. On remarque que  $\widehat{Y}_n = \frac{\ln Z_1 + \dots + \ln Z_n}{n} = \frac{\ln X_n}{n}$ . On a donc :

$$\{\widehat{Y}_n > -\delta\} = \{\ln X_n > -n\delta\} = \{X_n > e^{-n\delta}\}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\delta} = 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour  $n \geq n_0$ , on ait  $e^{-n\delta} \leq \varepsilon$ .

Pour  $n \geq n_0$ , on a  $\{X_n > \varepsilon\} \subset \{X_n > e^{-n\delta}\}$  et donc :

$$0 \leq \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\widehat{Y}_n > -\delta).$$

On en déduit que  $\mathbb{P}(X_n > \varepsilon)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

- 17.16** 1. Numérotons les urnes de 1 à  $n$  et considérons pour  $1 \leq i \leq n$ , la variable  $X_i$  indicatrice de l'événement « la  $i$ -ème urne est vide ». Il est clair que  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

L'événement  $\{X_i = 1\}$  est réalisé si, et seulement si, toutes les boules ont été placées dans l'une des  $n-1$  autres urnes. On a donc  $\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}$ . Comme  $X_i$  suit une loi de Bernoulli, on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}\right).$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{na}.$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \right).$$

Calculons les covariances. Pour  $i \neq j$ , on a :

$$\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{na},$$

car il faut et il suffit que les  $na$  boules soient placées dans les  $n-2$  urnes restantes. On a donc :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{na} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2na}.$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

Toutes les variances sont égales, ainsi que toutes les covariances. On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \frac{1}{n^2} \left( n\mathbb{V}(X_1) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{na} - \left( \frac{n-1}{n} \right)^{2na} + \frac{n-1}{n} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{na},\end{aligned}$$

après simplification.

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{na \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{-a}$ .

De  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{2na} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{na} = e^{-2a}$ , on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(S_n) = 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n) = e^{-a}$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $|\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a par inégalité triangulaire :

$$|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq |S_n - e^{-a}| - |\mathbb{E}(S_n) - e^{-a}| \geq |S_n - e^{-a}| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$\{|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ |S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

On a donc, pour  $n \geq n_0$  :

$$\mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2},$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(S_n) = 0$ , on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - e^{-a}| \geq \varepsilon) = 0.$$

**17.17** Les variables  $X$ ,  $Z$  et  $Y$  (car  $Y \leq Z$ ) sont finies, donc leurs fonctions génératrices sont définies sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , on a :

$$G_X(t) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=0}^{\ell-1} t^i = \frac{t^\ell - 1}{\ell(t-1)} \quad \text{et, de même,} \quad G_Z(t) = \frac{t^n - 1}{n(t-1)}.$$

Les variables  $X$  et  $Y$  étant indépendantes, on a  $G_Z = G_X G_Y$  et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad G_Y(t) = \frac{G_Z(t)}{G_X(t)} = \frac{\ell(t^n - 1)}{n(t^\ell - 1)} = \frac{t^{\ell m} - 1}{m(t^\ell - 1)} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} t^{\ell i}.$$

Cette égalité est encore valable pour  $t = 1$  par continuité.

On en déduit que  $\mathbb{P}(Y = \ell i) = \frac{1}{m}$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ . Ainsi  $Y$  suit la loi uniforme sur  $\{0, \ell, 2\ell, \dots, (m-1)\ell\}$ .

**17.18** On pose  $q = 1 - p$ .

1. On a  $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - q^n$ .

Pour  $k \geq 1$ , on a  $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n + k) = pq^{n+k-1}$ .

2. On en déduit, sous réserve d'absolue convergence :

$$G_Y(t) = (1 - q^n) + \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{n+k-1} t^k.$$

Ainsi,  $G_Y(t)$  est défini pour  $|tq| < 1$  et  $G_Y(t) = 1 - q^n + \frac{q^n pt}{1 - qt}$ .

3. Comme  $1 \in ]-1/q, 1/q[$ , la fonction  $G_Y$  est dérivable en 1, donc  $Y$  est d'espérance finie :

$$\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1) = \frac{q^n p}{1 - q} + \frac{q^n p q}{(1 - q)^2} = \frac{q^n}{p}.$$

**17.19** 1. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Pour construire une permutation  $\sigma \in \{Z_k = 1\}$ , on commence par choisir les images par  $\sigma$  des entiers entre 1 et  $k$  (il y a  $\binom{n}{k}$  choix). Alors  $\sigma \in \{Z_k = 1\}$  si, et seulement si,  $\sigma(k)$  est le plus grand de ces  $k$  entiers. Les  $k - 1$  autres éléments peuvent être attribués arbitrairement comme images par  $\sigma$  de  $1, \dots, k - 1$ , ce qui donne  $(k - 1)!$  choix. Enfin, pour compléter  $\sigma$ , les éléments de  $\llbracket k + 1, n \rrbracket$  doivent être mis en bijection avec les  $n - k$  éléments restants : il y a  $(n - k)!$  choix. On obtient :

$$\text{card}(\{Z_k = 1\}) = \binom{n}{k} (k - 1)! (n - k)! \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_k = 1) = \frac{\text{card}(\{Z_k = 1\})}{n!} = \frac{1}{k}.$$

Ainsi  $Z_k$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{k}$ .

2. (a) Il est clair que  $X_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ . On a donc :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

De plus, comme  $Z_1, \dots, Z_n$  sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Z_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

On a  $\mathbb{E}(X_n) \sim \ln n$  et  $\mathbb{V}(X_n) \sim \ln n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(b) De l'indépendance des variables  $Z_k$ , on déduit  $g_n = \prod_{k=1}^n h_k$ , où  $h_k$  est la fonction génératrice de  $Z_k$ . Pour tout réel  $t$ , on a :

$$h_k(t) = \mathbb{P}(Z_k = 0) + t \mathbb{P}(Z_k = 1) = 1 - \frac{1}{k} + \frac{t}{k} = \frac{k - 1 + t}{k}.$$

On en déduit :

$$g_n(t) = \prod_{k=1}^n \frac{k - 1 + t}{k} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (k + t).$$

Le coefficient de  $t^k$  dans  $g_n(t)$  est  $\mathbb{P}(X_n = k)$ . On obtient :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n!}.$$

## Chapitre 17. Espérance — Variance

3. Montrons que  $(Z_1, \dots, Z_n)$  sont indépendantes.

Soit  $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Fixons  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+1}) \in \{0, 1\}^{p+1}$  et montrons que :

$$\mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_{p+1} = \varepsilon_{p+1}) = \mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_p = \varepsilon_p) \mathbb{P}(Z_{p+1} = \varepsilon_{p+1}). \quad (\star)$$

Une récurrence immédiate sur  $p$  donnera alors :

$$\mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1) \cdots \mathbb{P}(Z_n = \varepsilon_n).$$

Puisque  $Z_{p+1}$  suit une loi de Bernoulli, on peut sans perte de généralité supposer  $\varepsilon_{p+1} = 1$ .

Rappelons que pour tout événement  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , on a  $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{card } A}{n!}$ .

- Détailons le calcul de  $\text{card } \{Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_{p+1} = \varepsilon_{p+1}\}$ . Pour construire une permutation  $\sigma$  appartenant à cet événement :
  - \* on fixe l'ensemble  $A = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$ , partie à  $p$  éléments dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ;
  - \* on construit la liste  $(\sigma(1), \dots, \sigma(p))$  ; on constate que le nombre de manière d'ordonner l'ensemble  $A$  de telle sorte à ce les maximums provisoires soient aux endroits souhaités ne dépend que de  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  et pas de l'ensemble  $A$ , car il ne dépend que des positions relatives des  $\sigma(i)$  et non de leurs valeurs exactes ; notons  $\alpha$  le nombre de ces possibilités ;
  - \* on fixe  $\sigma(p+1)$  pour que ce soit un maximum provisoire, c'est-à-dire strictement supérieur à  $\max A : n - \max A$  possibilités ;
  - \* on construit le reste de la permutation  $(\sigma(p+2), \dots, \sigma(n))$ , ce qui donne  $(n-p-1)!$  possibilités.

On a donc  $\text{card } \{Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_{p+1} = \varepsilon_{p+1}\} = \sum_{A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} \alpha (n - \max A)(n - p - 1)!$

donc :

$$\mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_{p+1} = \varepsilon_{p+1}) = \frac{\alpha (n - p - 1)!}{n!} \sum_{A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} (n - \max A).$$

- En raisonnant de manière semblable, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{card } \{Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_p = \varepsilon_p\} &= \sum_{A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} \alpha (n - p)! = \alpha (n - p)! \text{ card } (\mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\ &= \frac{\alpha n!}{p!} \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{P}(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_p = \varepsilon_p) = \frac{\alpha}{p!}.$$

- Enfin, on a :

$$\text{card } \{Z_{p+1} = 1\} = \sum_{A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} p! (n - \max A)(n - p - 1)!$$

donc :

$$\mathbb{P}(Z_{p+1} = 1) = \frac{p! (n - p - 1)!}{n!} \sum_{A \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} (n - \max A).$$

Les résultats obtenus nous offrent bien la relation  $(\star)$  souhaitée.

- 17.20** 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est une variable aléatoire discrète comme somme de variables aléatoires discrètes. On a :

- $S_N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , donc  $S_N(\Omega)$  est au plus dénombrable ;
- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\{S_N = k\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_N = k\} \cap \{N = n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n = k\} \cap \{N = n\}$ ,

donc  $\{S_N = k\}$ , union dénombrable d'événements, est un événement.

Par conséquent,  $S_N$  est une variable aléatoire discrète.

2. Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$G_{S_N}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_N = k, N = n).$$

Comme  $(t^k \mathbb{P}(S_N = k, N = n))_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille de réels positifs, on peut échanger l'ordre de sommation. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_N = k, N = n) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_n = k, N = n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n), \end{aligned}$$

car  $S_n$  et  $N$  sont indépendantes. On en déduit :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} t^k \mathbb{P}(S_N = k, N = n) = G_{S_n}(t) \mathbb{P}(N = n) = G_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N = n),$$

car  $G_{S_n}(t) = G_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = G_{X_1}(t)^n$ , par indépendance des variables  $X_i$ . On obtient finalement :

$$\forall t \in [0, 1] \quad G_{S_N}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} G_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N = n) = G_N(G_{X_1}(t)),$$

ce qui est le résultat voulu.

3. Les fonctions  $G_N$  et  $G_{X_1}$  sont dérivables en 1, car  $N$  et  $X_1$  sont d'espérance finie et  $G_{X_1}(1) = 1$ . On en déduit que  $G_{S_N}$  est dérivable en 1 à gauche, donc dérivable en 1 (cf. remarque page 691). Ainsi la variable aléatoire  $S_N$  est d'espérance finie :

$$\mathbb{E}(S_N) = G'_{S_N}(1) = G'_N(G_{X_1}(1)) G'_{X_1}(1) = G'_N(1) G'_{X_1}(1) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1).$$

4. Les fonctions  $G_N$  et  $G_{X_1}$  sont deux fois dérivable en 1, car  $N$  et  $X_1$  appartiennent à  $L^2$ . On en déduit que  $G_{S_N}$  est deux fois dérivable en 1 à gauche donc deux fois dérivable en 1 et :

$$\begin{aligned} G''_{S_N}(1) &= G'_N(G_{X_1}(1)) G''_{X_1}(1) + G''_N(G_{X_1}(1)) G'_{X_1}(1)^2 \\ &= G'_N(1) G''_{X_1}(1) + G''_N(1) G'_N(1)^2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_N(S_N - 1)) &= \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) + \mathbb{E}(N(N - 1)) \mathbb{E}(X_1)^2 \\ &= \mathbb{E}(N) (\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)) + (\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)) \mathbb{E}(X_1)^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{E}(S_N(S_N - 1)) + \mathbb{E}(S_N) - \mathbb{E}(S_N)^2 = \mathbb{V}(X_1) \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbb{V}(N),$$

après simplifications.

## Chapitre 17. Espérance — Variance

- 17.21** 1. (a) On a  $S_n = 0$  si, et seulement si, parmi les  $n$  variables  $X_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , il y en a autant qui prennent la valeur 1 et la valeur -1. Cela nécessite  $n$  pair. On a donc  $u_n = 0$  si  $n$  est impair et, si  $n$  est pair :

$$u_n = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} (1-p)^{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}}.$$

- (b) On dispose du développement en série entière usuel suivant :

$$\forall t \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} t^n}{4^n}.$$

Or  $4p(1-p) \in [0, 1]$  donc pour  $x \in ]-1, 1[$  on a  $4p(1-p)x^2 \in [0, 1[ \subset ]-1, 1[$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n} (4p(1-p))^n x^{2n}}{4^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} x^{2n} = f(x), \end{aligned}$$

car  $u_n = 0$  si  $n$  est impair.

2. (a) Les événements  $A_k$  pour  $1 \leq k \leq n$  sont incompatibles et :

$$\{S_n = 0\} \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k.$$

On a donc  $\{S_n = 0\} = \bigcup_{k=1}^n (\{S_n = 0\} \cap A_k)$  et comme il s'agit d'événements incompatibles :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

- (b) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme :

$$S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \dots, S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k,$$

on peut écrire  $A_k$  sous la forme :

$$A_k = \{f(X_1, X_2, \dots, X_k) \in N_k\},$$

en posant  $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_k)$  et  $N_k = \mathbb{N}^{*k-1} \times \{0\}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k) &= \mathbb{P}(\{X_{k+1} + \dots + X_n = 0\} \cap \{f(X_1, X_2, \dots, X_k) \in N_k\}) \\ &= \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) \mathbb{P}(f(X_1, X_2, \dots, X_k) \in N_k), \end{aligned}$$

car les variables aléatoires  $X_{k+1} + \dots + X_n$  et  $f(X_1, \dots, X_k)$  sont indépendantes (puisque de  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes). On obtient :

$$\mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k) = \mathbb{P}(X_{k+1} + \dots + X_n = 0) \mathbb{P}(A_k).$$

Les variables aléatoires  $X_i$  sont indépendantes et suivent la même loi, donc la loi de  $X_{k+1} + \dots + X_n$  est la même que celle de  $X_1 + \dots + X_{n-k} = S_{n-k}$ . On a donc :

$$\mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0) \mathbb{P}(A_k) = u_{n-k} v_k.$$

Comme de plus  $v_0 = 0$ , on obtient, d'après la question précédente :

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k.$$

3. (a) Comme  $0 \leq v_n \leq 1$ , le rayon de la série entière définissant  $g(x)$  est supérieur ou égal à 1. La fonction  $fg$  possède un développement en série entière dont les coefficients sont obtenus par produit de Cauchy.

Pour  $n \geq 1$ , on a  $\sum_{k=0}^n u_{n-k}v_k = u_n$ . Pour  $n = 0$ ,  $u_0v_0 = 0$ . On obtient :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = f(x) - 1.$$

On en déduit :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad g(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}.$$

- (b) On a :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_k.$$

Comme les  $A_k$  sont deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = g(1).$$

On a pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}$ .

La série  $\sum v_n$  est convergente. Donc la série  $\sum v_n x^n$  est une série de fonctions continues, normalement convergente sur  $[-1, 1]$ . La fonction  $g$  est donc continue sur  $[-1, 1]$  et :

$$\mathbb{P}(A) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 - |2p - 1|.$$

- Si  $p = \frac{1}{2}$ , on a  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Il est presque sûr que le mobile repassera à l'origine.
- Si  $p \neq \frac{1}{2}$ , on a  $\mathbb{P}(A) < 1$ . Le mobile peut ne pas repasser à l'origine.

4. (a) Il est presque sûr qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\{S_n = 0\}$  est réalisé et donc un plus petit entier  $n$  pour lequel  $\{S_n = 0\}$  est réalisé, donc  $T$  est presque sûrement finie. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\{T = k\} = A_k$ . Or  $A_k$  est un événement, donc  $T$  est bien une variable aléatoire.

- (b) On a, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \binom{2n-2}{n-1} x^{2n}}{n 4^n}.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{2n} = \frac{2 \binom{2n-2}{n-1}}{n 4^n}$$

et, bien entendu,  $v_n = 0$  si  $n$  est impair.

- (c) La variable  $T$  est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général  $2nv_{2n}$  converge. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$2nv_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

La série diverge, donc  $T$  n'est pas d'espérance finie.



# Chapitre 18 : Équations différentielles linéaires

<b>I</b>	<b>Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .</b>	<b>730</b>
1	Définitions et notations . . . . .	730
2	Structure de l'ensemble des solutions . . . . .	732
3	Traduction matricielle : systèmes différentiels linéaires . .	733
4	Théorème de Cauchy linéaire . . . . .	734
<b>II</b>	<b>Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice . . .</b>	<b>736</b>
1	Exponentielle d'un endomorphisme . . . . .	736
2	Exponentielle d'une matrice . . . . .	738
<b>III</b>	<b>Systèmes différentiels à coefficients constants . . . . .</b>	<b>742</b>
1	Définition . . . . .	742
2	Expression des solutions de l'équation homogène . . . . .	742
3	Résolution pratique de l'équation homogène . . . . .	744
<b>IV</b>	<b>Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre <math>n</math> . .</b>	<b>747</b>
1	Définition . . . . .	747
2	Traduction sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 . . . . .	748
<b>V</b>	<b>Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 . .</b>	<b>749</b>
1	Wronskien . . . . .	750
2	Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes . . . . .	751
3	Quelques techniques classiques d'obtention de solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 . . . . .	753
4	Résolution de l'équation homogène ( $E_0$ ) quand on en connaît une solution non nulle . . . . .	756
5	Exemples de résolution d'équations non normalisées . . .	758
<b>Exercices . . . . .</b>	<b>767</b>	

# Équations différentielles linéaires

18

En première année ont été abordées :

- les équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme :

$$y' + a(t) y = b(t) \quad \text{avec } a : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ et } b : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ continues ;}$$

- les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants de la forme :

$$y'' + a y' + b y = c(t) \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{K}^2 \text{ et } c : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ continue.}$$

Les objectifs du cours de seconde année sont, toujours en restant dans le cas linéaire :

- pour les équations d'ordre 1, étendre l'étude aux cas de fonctions à valeurs vectorielles (dans un espace de dimension finie) ;
  - pour les équations d'ordre 2, étendre l'étude au cas de coefficients non constants.
- Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide, et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

## I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### 1 Définitions et notations

**Notation** Dans tout ce chapitre, afin d'alléger les écritures, si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  et  $e$  un vecteur de  $E$ , alors la valeur de  $u$  en  $e$ , notée traditionnellement  $u(e)$ , sera souvent notée  $u \cdot e$ .

#### Définition 1

- On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** toute équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t), \tag{E}$$

où  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  sont deux applications continues.

- L'application  $b$  est appelée **second membre** de l'équation (E).
- On appelle **équation homogène** (ou **sans second membre**) associée à (E) l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x. \tag{E_0}$$

**Définition 2**

Soit  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  deux applications continues. On appelle **solution** de l'équation différentielle  $x' = a(t) \cdot x + b(t)$  toute application dérivable  $\varphi : I \rightarrow E$  vérifiant :

Exo  
18.1

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

**Remarques**

- Sans la convention «  $u \cdot e$  » donnée plus haut, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t)(\varphi(t)) + b(t),$$

et l'équation est notée :

$$x' = a(t)x + b(t).$$

- On pourra noter  $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$  l'équation (E) si l'on veut préciser le nom de la variable libre, en particulier s'il y a ambiguïté sur le nom de cette variable.
- Les applications  $a$  et  $b$  sont supposées continues,  $x$  est continue car dérivable et l'application bilinéaire  $(u, y) \mapsto u \cdot y$  est également continue sur  $\mathcal{L}(E) \times E$  car définie sur un espace vectoriel de dimension finie, donc une solution de (E) est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dans la suite de cette partie,  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  sont deux applications continues et (E) est l'équation différentielle  $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ .

**Notation** Pour  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $x : I \rightarrow E$ , notons  $a \cdot x$  l'application :

$$\begin{aligned} a \cdot x : \quad I &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto a(t) \cdot x(t). \end{aligned}$$

Avec cette notation, l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$x' = a \cdot x + b. \tag{E}$$

**Problème de Cauchy****Définition 3**

- On dit qu'une solution  $\varphi$  de l'équation différentielle (E) vérifie la **condition initiale**  $(t_0, x_0) \in I \times E$  si l'on a :

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

- On appelle **problème de Cauchy**, l'équation (E) munie d'une condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times E$  :

$$(E) : \quad x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

- Résoudre ce **problème de Cauchy**, c'est trouver toutes les solutions  $\varphi$  de (E) vérifiant la condition initiale  $\varphi(t_0) = x_0$ .

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

### Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy

#### Proposition 1

Soit  $(t_0, x_0) \in I \times E$ . Une application  $\varphi : I \rightarrow E$  est une solution du problème de Cauchy :

$$(E) : x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

si, et seulement si, elle est continue et vérifie :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi(s) \, ds + \int_{t_0}^t b(s) \, ds.$$

Démonstration page 761

## 2 Structure de l'ensemble des solutions

L'application :

$$\begin{array}{rcl} L & : & \mathcal{C}^1(I, E) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, E) \\ & & x \mapsto x' - a \cdot x \end{array}$$

est bien définie, c'est une application linéaire, et l'on constate que les équations (E) et (E<sub>0</sub>) se formulent naturellement à l'aide de  $L$  :

$$(E) : L(x) = b \quad \text{et} \quad (E_0) : L(x) = 0.$$

Le théorème de Cauchy linéaire (cf. théorème 4 de la page 734) montrera que  $L$  est surjective. Les propriétés générales des équations linéaires donnent alors les deux résultats suivants.

#### Proposition 2

- L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène (E<sub>0</sub>) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  ; c'est le noyau de l'application linéaire  $L$  introduite ci-dessus.
- Si  $\varphi_p$  est une solution particulière de (E), l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation (E) s'écrit :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0.$$

C'est donc un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  de direction  $\mathcal{S}_0$ .

#### Proposition 3 (Principe de superposition)

Soit  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$  et  $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}^0(I, E)^2$  tels que  $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ .

Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont respectivement solutions des équations :

$$x' = a(t) \cdot x + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t) \cdot x + b_2(t),$$

alors la fonction  $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2$  est solution de (E) :  $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ .

### 3 Traduction matricielle : systèmes différentiels linéaires

**Convention** Dans la suite, on identifie  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^n$ .

#### Définition 4

On appelle **système différentiel linéaire du premier ordre** toute équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme :

$$X' = A(t) X + B(t),$$

avec  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  continues, et où la fonction inconnue est  $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

Un tel système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'_1 & = & a_{1,1}(t) x_1 + \cdots + a_{1,n}(t) x_n + b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x'_n & = & a_{n,1}(t) x_1 + \cdots + a_{n,n}(t) x_n + b_n(t) \end{array} \right. \quad (\text{Sys})$$

où les  $a_{i,j}$ , appelées **coefficients**, et les  $b_i$ , appelées **seconds membres**, sont des applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Interprétation** Si l'on munit l'espace vectoriel  $E$  d'une base  $\mathcal{B}$ , alors l'équation différentielle :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad (\text{E})$$

se traduit matriciellement par le système différentiel linéaire du premier ordre :

$$X' = A(t) X + B(t) \quad (\text{Sys})$$

où, pour tout  $t \in I$  :

- $A(t)$  est la matrice de  $a(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$  ;
- $B(t)$  est la matrice colonne des coordonnées de  $b(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En effet, une application  $\varphi : I \rightarrow E$  est solution de (E) si, et seulement si, :

$$\forall t \in I \quad X'(t) = A(t) X(t) + B(t)$$

où  $X(t)$  est la matrice colonne des coordonnées de  $\varphi(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Remarque** Si  $n = 1$ , alors le système différentiel (Sys) s'écrit :

$$x'_1 = a_{1,1}(t) x_1 + b_1(t),$$

et n'est rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.

## 4 Théorème de Cauchy linéaire

On rappelle que  $a$  et  $b$  désignent des applications continues sur  $I$  à valeurs respectivement dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $E$ . On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t). \quad (\text{E})$$

La démonstration du théorème fondamental suivant n'est pas exigible.

### Théorème 4 (Théorème de Cauchy linéaire)

Pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une et une seule solution  $\varphi$  de l'équation (E) vérifiant la condition initiale  $\varphi(t_0) = x_0$ .

Autrement dit, le problème de Cauchy :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

possède une unique solution.

Démonstration (non exigible) page 761

**Remarque** Le théorème de Cauchy linéaire a été démontré dans le cours de première année pour les équations différentielles linéaires scalaires ( $E = \mathbb{K}$ ) du premier ordre en exhibant la forme explicite des solutions. Pour ces équations, de la forme :

$$x' + a(t)x = b(t) \quad \text{avec} \quad a : I \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{et} \quad b : I \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{continues,}$$

l'unique solution prenant la valeur  $x_0$  au point  $t_0 \in I$  est :

$$t \mapsto \exp(-F(t)) \left( x_0 + \int_{t_0}^t \exp(F(u)) b(u) du \right),$$

où  $F$  est la primitive de  $a$  sur  $I$  s'annulant en  $t_0$ .

Cette forme explicite ne s'étend pas au cas général ( $\dim E \geq 2$ ).

### Remarques

- La partie « existence » du théorème de Cauchy linéaire assure que l'ensemble des solutions de (E) est non vide (car  $I \times E$  est non vide).
- On utilise souvent l'unicité pour établir des propriétés des solutions de (E) sans résoudre l'équation.

**Ex. 1.** Deux solutions distinctes de (E) ne se croisent pas. Autrement dit, si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux solutions distinctes de (E), on a :

$$\forall t \in I \quad \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t).$$

En effet, s'il existait  $t_0 \in I$  tel que  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ , alors les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  seraient toutes deux solutions du problème de Cauchy :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0).$$

et donc, par propriété d'unicité, on aurait  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

**Ex. 2.** En particulier, une solution non nulle de l'équation homogène (E<sub>0</sub>) ne s'annule en aucun point de  $I$ . En effet, la fonction nulle étant solution de l'équation homogène, elle n'en croise aucune autre.

**Ex. 3.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Supposons  $I = \mathbb{R}$  et  $a$  et  $b$   $T$ -périodiques. Si  $\varphi$  est une solution de (E), alors  $\varphi_T : t \mapsto \varphi(t + T)$  est encore une solution de (E). En effet, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_T(t) = \varphi'(t + T) = a(t + T) \cdot \varphi(t + T) + b(t + T) = a(t) \cdot \varphi_T(t) + b(t).$$

On en déduit que :

$$\varphi \text{ est } T\text{-périodique} \iff \varphi_T = \varphi \iff \varphi_T(0) = \varphi(0) \iff \varphi(T) = \varphi(0).$$



### Formulation en termes de systèmes différentiels linéaires

Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  des applications continues. Pour tout  $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ , le problème de Cauchy :

Exo  
18.2

$$(\text{Sys}) : X' = A(t) \cdot x + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0$$

possède une unique solution.

### Espace des solutions de l'équation homogène

#### Proposition 5

Soit  $t_0 \in I$ . Notons  $\mathcal{S}_0$  l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène  $(E_0) : x' = a(t) \cdot x$ . L'application :

$$\begin{aligned} \delta_{t_0} &: \mathcal{S}_0 &\rightarrow E \\ \varphi &\mapsto \varphi(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Démonstration.** L'application  $\delta_{t_0}$  est évidemment linéaire, et elle est bijective puisque, pour tout  $x_0 \in E$ , le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence d'un et un seul élément  $\varphi \in \mathcal{S}_0$  tel que  $\varphi(t_0) = x_0$ , c'est-à-dire  $\delta_{t_0}(\varphi) = x_0$ .  $\square$

#### Corollaire 6

L'espace  $\mathcal{S}_0$  est de dimension finie égale à celle de  $E$ .

#### Corollaire 7

Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$ , alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$  ;
- (ii) il existe  $t_0 \in I$  tel que la famille  $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$  soit une base de  $E$  ;
- (iii) pour tout  $t \in I$ , la famille  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base de  $E$ .

#### Démonstration.

- L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (ii) est évidente.
- (ii)  $\Rightarrow$  (i). Soit  $t_0 \in I$  tel que la famille  $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$  soit une base de  $E$ . En reprenant les notations de la proposition 5, la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est l'image de la base  $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$  de  $E$  par l'isomorphisme  $\delta_{t_0}^{-1}$ . C'est donc une base de  $\mathcal{S}_0$ .
- (i)  $\Rightarrow$  (iii). Supposons que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  soit une base de  $\mathcal{S}_0$ . Fixons  $t \in I$  et montrons que  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base de  $E$ . C'est le cas, à nouveau grâce à la proposition 5, car la famille  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  apparaît comme l'image par l'isomorphisme  $\delta_t$  de la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $\mathcal{S}_0$ .  $\square$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**Ex. 4.** Considérons l'équation homogène  $(E_0) : x' = a(t) \cdot x$  et  $t_0 \in I$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe une unique solution  $\varphi_k$  de  $(E_0)$  telle que  $\varphi_k(t_0) = e_k$ . Alors  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ . Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ . On a, pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}_0$  :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k \iff \varphi(t_0) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

**Point méthode** Le fait de connaître la dimension de  $\mathcal{S}_0$  se révèle très utile. En effet, si l'on dispose de  $n$  fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de  $I$  dans  $E$  de dimension  $n$ , alors pour prouver que la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ , il suffit de démontrer au choix :

- que  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  appartiennent à  $\mathcal{S}_0$  et forment une famille libre ;
- que  $\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . On a alors  $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , pour des raisons de dimension, et la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est génératrice, donc est une base de  $\mathcal{S}_0$ . Il n'est pas nécessaire de démontrer préalablement que les fonctions  $\varphi_k$  appartiennent à  $\mathcal{S}_0$ .

## II Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

### 1 Exponentielle d'un endomorphisme

Dans la suite, on munit  $\mathcal{L}(E)$  d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{L}(E)^2 \quad \|a \circ b\| \leq \|a\| \|b\|,$$

par exemple la norme subordonnée à une norme de  $E$ .

#### Définition et premières propriétés

##### Proposition 8

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . La série de terme général  $\frac{a^k}{k!}$  est absolument convergente.

**Démonstration.** La norme  $\|\cdot\|$  utilisée sur  $\mathcal{L}(E)$  étant sous-multiplicative, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left\| \frac{a^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|a\|^k}{k!}.$$

Donc, par comparaison, la convergence de la série  $\sum \frac{\|a\|^k}{k!}$  (série numérique de l'exponentielle) entraîne celle de la série  $\sum \left\| \frac{a^k}{k!} \right\|$ . □

D'où la définition suivante.

**Définition 5**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **exponentielle** de  $a$  et l'on note  $\exp(a)$  ou  $e^a$ , la somme de la série absolument convergente de terme général  $\frac{a^k}{k!}$  :

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}.$$

**Ex. 5.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\exp(t \operatorname{Id}_E) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t \operatorname{Id}_E)^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right) \operatorname{Id}_E = e^t \operatorname{Id}_E.$$

En particulier, on a  $\exp(0) = \operatorname{Id}_E$ .

**Ex. 6.** Si  $a \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotente et si  $p \in \mathbb{N}$  est tel que  $a^p = 0$ , alors on a :

$$\forall k \geq p \quad a^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!}.$$

**Proposition 9**

L'application  $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est continue.  
 $a \mapsto \exp(a)$

Démonstration page 763.

**Principe de démonstration.** Utiliser le théorème de continuité des séries de fonctions.

**Proposition 10**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . L'application  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est de classe  $C^1$  et sa dérivée  
 $t \mapsto \exp(ta)$   
 est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a.$$

Démonstration page 764.

**Principe de démonstration.** Utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions.

**Remarque** On obtient par récurrence que l'application  $\varphi : t \mapsto \exp(ta)$  est de classe  $C^\infty$  et, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi^{(p)}(t) = a^p \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a^p.$$

**Propriété fondamentale de l'exponentielle**
**Proposition 11**

Soit  $a$  et  $b$  des endomorphismes de  $E$  qui commutent. Alors on a :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b) = \exp(b) \circ \exp(a).$$

Démonstration page 764.

**Principe de démonstration.** On montre que les applications  $t \mapsto \exp(t(a + b))$  et  $t \mapsto \exp(ta) \circ \exp(tb)$  sont solutions du même problème de Cauchy.

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

### Corollaire 12

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . L'endomorphisme  $\exp(a)$  est inversible et  $\exp(-a) = (\exp(a))^{-1}$ .

**Démonstration.** Comme  $a$  et  $-a$  commutent, il vient de la proposition 11 de la page précédente :

$$\exp(a) \circ \exp(-a) = \exp(-a) \circ \exp(a) = \exp(0) = \text{Id}_E.$$

□

### Corollaire 13

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(sa) \circ \exp(ta) = \exp((s+t)a).$$

**Démonstration.** Cela résulte directement de la proposition 11 de la page précédente, car  $sa$  et  $ta$  commutent. □

## 2 Exponentielle d'une matrice

### Définition

#### Proposition 14

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La série de terme général  $\frac{A^k}{k!}$  est absolument convergente.

**Démonstration.** Même démonstration que pour l'exponentielle d'un endomorphisme. □

### Définition 6

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **exponentielle** de  $A$  et l'on note  $\exp(A)$  ou  $e^A$ , la somme de la série absolument convergente de terme général  $\frac{A^k}{k!}$  :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Ex. 7.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\exp(tI_n) = e^t I_n$  et, en particulier,  $\exp(0) = I_n$ .

**Ex. 8.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente, et si  $p \in \mathbb{N}$  est tel que  $A^p = 0$ , alors  $\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{A^k}{k!}$ .

**Ex. 9.** Soit  $V$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^N \frac{(tA)^k}{k!} V = \left( \sum_{k=0}^N \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) V$ . L'application  $M \mapsto MV$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}^n$  étant continue, car linéaire avec un espace vectoriel de départ de dimension finie, on en déduit, en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ ,  $e^{tA}V = e^{\lambda t}V$ .

**Ex. 10.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On a  $A^2 = I_2$  donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^{2n} = I_2$  et  $A^{2n+1} = A$ . On en déduit :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} I_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} A = \text{ch}(1)I_2 + \text{sh}(1)A.$$

**Remarque** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ . On a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{PB^kP^{-1}}{k!} = P \left( \sum_{k=0}^N \frac{B^k}{k!} \right) P^{-1}.$$

L'endomorphisme  $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$  étant continu, car linéaire entre espaces de dimension finie, on obtient, en passant à la limite :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}.$$

Exo  
18.3

### Exemples de calculs

**Ex. 11.** Soit  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une matrice diagonale. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_1^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^N \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

**Ex. 12.** Supposons  $A$  diagonalisable. On peut donc écrire :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On a alors, d'après la remarque qui précède :

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Ex. 13.** Soit  $T$  une matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de coefficient diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la matrice  $T^k$  est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la matrice  $\sum_{k=0}^N \frac{T^k}{k!}$  est donc triangulaire supérieure.

Comme l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un espace vectoriel de dimension finie, donc fermé, on en déduit que  $\exp(T)$  est triangulaire supérieure.

Ses termes diagonaux sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**Ex. 14.** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonale par blocs et s'écrit  $A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}$ ,

où  $A_1, \dots, A_m$  sont des matrices carrées, on obtient, en effectuant des produits par blocs :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^N \frac{A_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^N \frac{A_m^k}{k!} \end{pmatrix}$$

puis, par passage à la limite :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(A_m) \end{pmatrix}.$$



### Lien entre exponentielle d'endomorphisme et exponentielle de matrice

#### Proposition 15

Si  $A$  est la matrice d'un endomorphisme  $a$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , alors  $\exp(A)$  est la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $\exp(a)$ .

Démonstration page 765

### Propriétés de l'exponentielle d'une matrice

Les résultats suivants résultent de la traduction dans une base des propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme. En effet, si  $\Phi$  désigne l'application qui à un endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  associe sa matrice dans la base canonique, on a d'après la proposition 15 :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \exp(A) = \Phi \circ \exp \circ \Phi^{-1}(A),$$

où  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont continues et sont des morphismes d'algèbres. Les propriétés de l'exponentielle d'une matrice en découlent.

#### Proposition 16

L'application  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue.  
 $A \mapsto \exp(A)$

#### Proposition 17

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa

$$t \mapsto \exp(tA)$$

dérivée est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA)A.$$

**Remarque** Plus généralement, l'application  $\varphi : t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi^{(p)}(t) = A^p \exp(tA) = \exp(tA)A^p.$$

**Proposition 18**

Soit  $A$  et  $B$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Alors on a :

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(A + B) = \exp(B) \exp(A).$$

**Corollaire 19**

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la matrice  $\exp(A)$  est inversible et l'on a :

$$\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}.$$

**Proposition 20**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(sA) \exp(tA) = \exp((s+t)A).$$

**Spectre de l'exponentielle d'une matrice complexe**
**Proposition 21**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si les valeurs propres de  $A$ , comptées avec ordre de multiplicité, sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors celles de  $\exp(A)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

Démonstration page 765

**Attention** Ce résultat est faux en général pour le spectre réel d'une matrice réelle.

**Ex. 15.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres complexes de  $A$  sont  $\pm i\pi$ , donc  $A$  n'a pas de valeur propre réelle. D'après la proposition 21,  $\exp(A)$  a une seule valeur complexe  $-1 = e^{-i\pi} = e^{i\pi}$ . Le spectre réel de  $\exp(A)$  est également  $\{-1\}$ .

**Corollaire 22**

Soit  $a$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Si les valeurs propres de  $a$ , comptées avec ordre de multiplicité, sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors celles de  $\exp(a)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

**Ex. 16.** Montrons que  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$ , pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ , comptées avec ordre de multiplicité, les valeurs propres de  $\exp(A)$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ . On a donc :

$$\det(\exp(A)) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right) = \exp(\text{tr}(A)).$$

### III Systèmes différentiels à coefficients constants

#### 1 Définition

##### Définition 7

L'équation différentielle linéaire :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

est dite **à coefficients constants** si la fonction  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est constante.  
 $t \mapsto a(t)$

On identifie alors  $a$  à un élément de  $\mathcal{L}(E)$  et l'on note l'équation :

$$x' = a \cdot x + b(t).$$

Si l'on dispose d'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et si  $A$  et  $B(t)$  sont respectivement les matrices de  $a$  et  $b(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors l'équation précédente s'écrit matriciellement :

$$X' = A X + B(t).$$

### 2 Expression des solutions de l'équation homogène

#### Version vectorielle

##### Proposition 23 (Résolution d'un problème de Cauchy)

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ . L'application :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \exp((t - t_0)a) \cdot x_0\end{aligned}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

**Démonstration.** L'application  $\varphi$  est solution du problème de Cauchy considéré puisque :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'(t) = \frac{d}{dt} \exp((t - t_0)a) \cdot x_0 = \left( a \circ \exp((t - t_0)a) \right) \cdot x_0 = a \cdot \varphi(t)$$

et

$$\varphi(t_0) = \exp((t_0 - t_0)a) \cdot x_0 = \exp(0) \cdot x_0 = \text{Id}_E \cdot x_0 = x_0.$$

D'après le théorème de Cauchy linéaire, c'est l'unique solution.  $\square$

**Remarque** Les solutions sont toutes définies sur  $\mathbb{R}$ . Par restriction, on obtient les solutions sur un intervalle  $I$ .

##### Corollaire 24

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $x_0 \in E$ . L'application :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \exp(ta) \cdot x_0\end{aligned}$$

est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x \quad \text{et} \quad x(0) = x_0.$$

### Version matricielle

**Proposition 25 (Résolution d'un problème de Cauchy)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ . L'application :

$$\varphi : t \mapsto \exp((t - t_0)A) X_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0.$$

**Corollaire 26**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $X_0 \in \mathbb{K}^n$ . L'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto \exp(tA) X_0 \end{aligned}$$

est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy :

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(0) = X_0.$$

**Ex. 17.** Si  $V$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors l'application  $\varphi : t \mapsto e^{\lambda t}V$  est l'unique solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy :  $X' = AX$  et  $X(0) = V$ . En effet, comme on l'a vu dans l'exemple 9 de la page 738,  $e^{tA}V = e^{\lambda t}V$ .

### Solution de l'équation avec second membre

Il est aussi possible de donner une expression d'une équation à coefficients constants avec second membre à l'aide de l'exponentielle.

**Ex. 18.** Soit  $\varphi$  la solution du problème de Cauchy :

$$(E) : x' = a \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

La fonction  $\psi : t \mapsto \exp(-ta) \cdot \varphi(t)$  est aussi de classe  $C^1$  et, pour tout  $t \in I$  :

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= -\exp(-ta) \circ a \cdot \varphi(t) + \exp(-ta) \cdot \varphi'(t) \\ &= -\exp(-ta) \circ a \cdot \varphi(t) + \exp(-ta)(a \cdot \varphi(t) + b(t)) = \exp(-ta) \cdot b(t). \end{aligned}$$

Sachant que  $\Psi(t_0) = \exp(-t_0a) \cdot x_0$ , on en déduit :

$$\forall t \in I \quad \psi(t) = \exp(-t_0a) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp(-sa) \cdot b(s) \, ds$$

et donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad \varphi(t) &= \exp(ta) \cdot \psi(t) = \exp(ta) \exp(-t_0a) \cdot x_0 + \exp(ta) \int_{t_0}^t \exp(-sa) \cdot b(s) \, ds \\ &= \exp((t - t_0)a) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)a) \cdot b(s) \, ds. \end{aligned}$$

On voit l'analogie avec la solution d'un équation linéaire scalaire du premier ordre, obtenue par la méthode de variation de la constante.

### 3 Résolution pratique de l'équation homogène

On s'intéresse dans cette partie à une équation homogène de la forme :

$$X' = AX \quad (\text{E}_0)$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , dont les solutions sont les fonctions  $t \mapsto e^{tA}V$ , où  $V$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{K}^n$  d'après le corollaire 26 de la page précédente.

#### Cas où $A$ est diagonalisable

On a vu qu'il était facile de calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable (cf. exemple 12 de la page 739) et donc d'exprimer les solutions de (E<sub>0</sub>) dans ce cas. Si :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

On a alors :

$$\exp(tA) = P \exp(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut aussi donner une expression simple d'une base de  $\mathcal{S}$ .

#### Proposition 27

Supposons la matrice  $A$  diagonalisable. Soit  $(V_1, \dots, V_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la liste des valeurs propres associées. Alors, en notant, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ t &\longmapsto e^{\lambda_k t} V_k \end{aligned}$$

la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}$ .

Démonstration page 765

Exo  
18.4

#### Remarques

- Dans le cas où  $A$  est à coefficients réels, on peut s'intéresser aux solutions complexes ou réelles de l'équation. Lorsqu'il y a ambiguïté, on note  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  pour éviter toute confusion.
- Si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et si  $(V_1, \dots, V_n)$  est une base de vecteurs propres réels, alors les applications  $\varphi_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k$  de la proposition 27 sont à valeurs réelles et l'on a :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

#### Cas où $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ , le paragraphe précédent nous fournit les solutions complexes. On souhaite déterminer les solutions réelles

**Ex. 19.** Considérons une application  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Alors, dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , on a :

$$\text{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) = \text{Vect}(\text{Re}(\varphi), \text{Im}(\varphi)).$$

- On a  $\text{Vect}(\varphi, \overline{\varphi}) \subset \text{Vect}(\text{Re}(\varphi), \text{Im}(\varphi))$  du fait des deux relations :

$$\varphi = \text{Re}(\varphi) + i \text{Im}(\varphi) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = \text{Re}(\varphi) - i \text{Im}(\varphi).$$

- L'inclusion réciproque  $\text{Vect}(\text{Re}(\varphi), \text{Im}(\varphi)) \subset \text{Vect}(\varphi, \overline{\varphi})$  vient des relations :

$$\text{Re}(\varphi) = \frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \text{Im}(\varphi) = \frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2i}.$$

**Point méthode** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ , on peut déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  des solutions réelles de  $(E_0)$  à partir de la diagonalisation de  $A$ .

1. On forme une base de vecteurs propres complexes de  $A$  telle que :
  - les vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles appartiennent à  $\mathbb{R}^n$  ;
  - vis-à-vis des valeurs propres non réelles, on forme des couples de vecteurs propres conjugués (*i.e.* de la forme  $(V, \overline{V})$ ).
2. Dans la base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  évoquée dans la proposition 27 de la page ci-contre, on voit alors apparaître :
  - pour les valeurs propres réelles, des applications de la forme  $t \mapsto e^{\lambda t}V$ , qui sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ;
  - pour les valeurs propres non réelles, des couples de la forme  $(t \mapsto e^{\lambda t}V, t \mapsto e^{\overline{\lambda}t}\overline{V})$ , c'est-à-dire de la forme  $(\varphi, \overline{\varphi})$
3. On change les couples de la forme  $(\varphi, \overline{\varphi})$  en  $(\text{Re}(\varphi), \text{Im}(\varphi))$ .

L'exemple 19 de la page précédente assure que la nouvelle famille ainsi obtenue est encore une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ . Cette base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  :

- est constituée de solutions de  $(E_0)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , *i.e.* d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  ;
- est libre dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , donc l'est également dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Comme elle comporte  $n$  éléments et que  $\dim \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = n$ , c'est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ .

Exo  
18.5

Ex. 20. Résolvons dans  $\mathbb{C}$  puis dans  $\mathbb{R}$  le système différentiel  $X' = AX$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pour  $x \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ -2 & x+1 & -3 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1).$$

On a donc  $\text{sp}(A) = \{1, i, -i\}$ . La matrice  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ .

- Après calculs :

\* le vecteur  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre 1 ;

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

\* le vecteur  $V_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $i$  ; par suite, comme  $A$  est à coefficients réels, le vecteur  $\overline{V_2}$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $-i$ .

- Ainsi, une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  est donnée par  $(X_1, X_2, \overline{X_2})$  avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t V_1 \quad \text{et} \quad X_2 : t \mapsto e^{it} V_2.$$

- Comme  $\text{Vect}(X_2, \overline{X_2}) = \text{Vect}(\text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2))$  (cf. exemple 19 de la page 744), on en déduit que la famille  $(X_1, \text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2))$  est une base de  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ , et donc de  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  car elle est formée d'applications à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . De manière plus explicite, on a :

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Re}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(X_2)(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\quad}$$

### Cas où la matrice $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$

**Point méthode** Dans le cas où  $A$  est seulement trigonalisable :

1. on trigonalise en écrivant  $A = PTP^{-1}$  avec  $T$  triangulaire supérieure ;
2. en posant  $Y = P^{-1}X$  et en traduisant sur  $Y$  le système différentiel  $X' = AX$ , on obtient le système différentiel  $Y' = TY$  ; ce système différentiel est triangulaire et on peut le résoudre ligne par ligne, du bas vers le haut ;
3. on obtient alors les solutions cherchées à l'aide de la relation  $X = PY$ .

### Remarques

- Dans la démarche précédente :

Exo  
18.6

\* il n'est pas nécessaire de calculer  $P^{-1}$  ;

\* lorsque l'on trigonalise  $A$ , on cherchera à obtenir la matrice triangulaire la plus simple possible afin d'obtenir le système différentiel  $Y' = TY$  le plus simple possible.

- La technique consistant à obtenir un système différentiel plus simple par réduction de la matrice  $A$  peut aussi s'appliquer pour un système différentiel avec second membre de la forme  $X' = AX + B(t)$ .

Exo  
18.7

- Si l'on décompose  $\mathbb{C}^n$  en somme de sous-espaces caractéristiques, on se ramène au cas où  $A$  s'écrit  $\lambda I_n + N$ , avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $N$  nilpotente (cf. exercice 18.11).

## IV Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n$

On suppose ici que  $n$  est un entier naturel non nul.

### 1 Définition

#### Définition 8

- On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$**  une équation de la forme :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} = b(t), \quad (\text{E})$$

où  $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  est une famille de  $n$  applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

- L'application  $b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  s'appelle le **second membre** de (E).
- On dit que l'équation (E) est à **coefficients constants** si toutes les fonctions  $a_k$  sont constantes et qu'elle est **homogène** ou **sans second membre** si  $b = 0$ .
- On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} = 0. \quad (\text{E}_0)$$

#### Définition 9

On appelle **solution** de l'équation différentielle linéaire (E) toute application  $n$  fois dérivable  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant :

$$\forall t \in I \quad \varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \varphi^{(k)}(t) = b(t).$$

Dans la suite de cette section, on considère une équation (E) de ce type.

#### Remarques

- L'équation (E) dans la définition 8 est écrite sous une forme dite **normalisée**, ce qui signifie que le coefficient devant  $x^{(n)}$  vaut 1. Si une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  apparaît sous une forme **non normalisée**, c'est-à-dire :

$$\alpha_n(t) x^{(n)} + \alpha_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(t) x = b(t).$$

alors :

- \* si la fonction  $\alpha_n$  ne s'annule pas sur  $I$ , on divise par  $\alpha_n$  pour se ramener à une forme normalisée ;
- \* sinon, le problème est plus délicat : quelques exemples de telles équations seront vus dans la partie V.5 page 758.
- Puisque les applications  $a_0, \dots, a_{n-1}, b$  sont *a minima* supposées continues, toute solution de (E) est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

## 2 Traduction sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1

Nous reprenons ici les notations de la définition 8 de la page précédente.

Considérons les applications  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  définies par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

**Remarque** Pour tout  $t$ , la matrice  $A(t)$  est la transposée de la matrice compagnon (cf. page 102) du polynôme  $X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \cdots + a_0(t)$ .

Les applications  $A$  et  $B$  ainsi définies permettent de traduire l'équation différentielle scalaire (E) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.

### Proposition 28

Une fonction  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  est solution de l'équation différentielle (E) si, et seulement si, l'application  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  est solution du système différentiel d'ordre 1 :

$$X' = A(t)X + B(t). \quad (\text{EM})$$

Démonstration page 766

La proposition précédente ramène ainsi l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre  $n$  à celle des systèmes différentiels du premier ordre. Les résultats qui suivent sont donc des conséquences immédiates de ceux établis dans la partie I.

### Proposition 29 (Structure de l'ensemble des solutions)

- L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ .
- Si  $\varphi_P$  est une solution de (E), alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $I$  de l'équation de (E) est le sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  passant par  $\varphi_P$  et de direction  $\mathcal{S}_0$  :

$$\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0.$$

### Problème de Cauchy

Reprendons les notations de la proposition 28.

Le théorème de Cauchy linéaire pour les systèmes différentiels nous assure que pour tout couple  $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ , il existe une unique solution  $\Phi$  au système différentiel (EM) vérifiant la condition initiale :

$$\Phi(t_0) = X_0.$$

Puisque  $\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$ , on constate que fixer une condition initiale de la

forme  $\Phi(t_0) = X_0$  revient à fixer les valeurs de  $\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)$ . Cela mène à la version suivante du théorème de Cauchy linéaire :

**Théorème 30 (Théorème de Cauchy linéaire)**

Pour tout  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ , il existe une et une seule solution  $\varphi$  de (E) vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad \varphi^{(k)}(t_0) = x_k.$$

**Ex. 21.** Sans calculs, le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité de la solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy suivant :

$$x'' + \sin(t)x' + \cos(t)x = t \quad \text{et} \quad (x(0), x'(0)) = (1, 0).$$

**Espace des solutions de l'équation homogène**

**Proposition 31**

Soit  $t_0 \in I$ . L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Corollaire 32**

Exo  
18.13

L'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation différentielle homogène  $(E_0)$  est de dimension  $n$ .

## V Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Nous étudions dans ce qui suit une équation linéaire scalaire du second ordre de la forme :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad (E)$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Cette équation est un cas particulier des équations linéaires scalaires d'ordre  $n$  étudiées dans la partie précédente. On a donc :

- l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$  associée à (E) est de dimension 2 ;
- si  $\varphi_P$  est une solution de (E), alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (E) est le sous-espace affine :

$$\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0 ;$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence et l'unicité d'une solution  $\varphi$  de (E) vérifiant une condition initiale de la forme :

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) = (x_0, x_1) \quad \text{avec} \quad (t_0, x_0, x_1) \in I \times \mathbb{K}^2.$$

**Remarque** Comme pour les équations linéaires d'ordre 1, on déduit de l'unicité des propriétés qualitatives des solutions.

**Ex. 22.** Les zéros (c'est-à-dire les points d'annulation) d'une solution  $\varphi$  non nulle de l'équation linéaire scalaire homogène du second ordre :

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0 \quad (\text{E})$$

sont isolés. Autrement dit, si  $\varphi(t_0) = 0$ , alors il existe  $r > 0$  tel que  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $[t_0 - r, t_0 + r] \setminus \{t_0\}$ .

Comme  $\varphi$  n'est pas la fonction nulle, on a  $(\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \neq (0, 0)$ , car la fonction nulle est la seule solution  $f$  de (E) telle que  $(f(t_0), f'(t_0)) = (0, 0)$ . On a donc  $\varphi'(t_0) \neq 0$ . On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \varphi'(t_0) \neq 0.$$

Cela implique qu'il existe  $r > 0$  tel que  $\frac{\varphi(t)}{t - t_0} \neq 0$ , c'est-à-dire  $\varphi(t) \neq 0$ , sur  $[t_0 - r, t_0 + r] \setminus \{t_0\}$ .

### 1 Wronskien

#### Définition 10

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux solutions de l'équation homogène (E<sub>0</sub>).

On appelle **wronskien** de la famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$  l'application :

$$\begin{aligned} W_{\varphi_1, \varphi_2} : I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque** On a :

$$W_{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_1 \varphi'_2 - \varphi'_1 \varphi_2.$$

Comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont solutions de (E<sub>0</sub>), elles sont deux fois dérивables, donc  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  est dérivable. De plus, sa dérivée se simplifie ainsi :

$$W'_{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_1 \varphi''_2 - \varphi''_1 \varphi_2.$$

#### Proposition 33

Le wronskien d'un couple  $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_0)^2$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)x = 0.$$

**Démonstration.** L'expression obtenue pour la dérivée du wronskien de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est :

$$W'_{\varphi_1, \varphi_2} = \varphi_1 \varphi''_2 - \varphi''_1 \varphi_2,$$

et donc, puisque  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont solutions de  $(E_0)$  :

$$\begin{aligned} W'_{\varphi_1, \varphi_2} &= \varphi_1(-a_1\varphi'_2 - a_0\varphi_2) - (-a_1\varphi'_1 - a_0\varphi_1)\varphi_2 \\ &= -a_1(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi'_1\varphi_2) \\ &= -a_1 W_{\varphi_1, \varphi_2}, \end{aligned}$$

donc  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  est solution de l'équation  $x' + a_1(t)x = 0$ . □

**Ex. 23.** Si l'équation différentielle considérée est de la forme :

(E) :  $x'' + q(t)x = 0$  avec  $q : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue,

alors le wronskien  $W_{\varphi_1, \varphi_2}$  d'un couple  $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{S}_0)^2$  vérifie  $W'_{\varphi_1, \varphi_2} = 0$  et donc,  $I$  étant un intervalle, il est constant sur  $I$ .

Le wronskien est un outil qui permet de caractériser les bases de solutions.

#### Proposition 34

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des solutions de  $(E_0)$ . Notons  $W$  le wronskien de  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$  ;
- (ii)  $\exists t \in I \quad W(t) \neq 0$  ;
- (iii)  $\forall t \in I \quad W(t) \neq 0$ .

Exo  
18.14

Démonstration page 766

## 2 Recherche d'une solution particulière : méthode de variation des constantes

Supposons connue  $(\varphi_1, \varphi_2)$  une base de l'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$ . La **méthode de variation des constantes** consiste alors à chercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérivables.}$$

On a alors :

$$\varphi' = \lambda_1\varphi'_1 + \lambda_2\varphi'_2 + \lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2.$$

Si l'on impose la condition supplémentaire  $\lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2 = 0$ , on a alors :

$$\varphi'' = \lambda_1\varphi''_1 + \lambda_2\varphi''_2 + \lambda'_1\varphi'_1 + \lambda'_2\varphi'_2,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \varphi'' + a_1\varphi' + a_0\varphi &= \lambda_1 \underbrace{(\varphi''_1 + a_1\varphi'_1 + a_0\varphi_1)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{(\varphi''_2 + a_1\varphi'_2 + a_0\varphi_2)}_{=0} + \lambda'_1\varphi'_1 + \lambda'_2\varphi'_2 \\ &= \lambda'_1\varphi'_1 + \lambda'_2\varphi'_2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que  $\varphi$  soit solution de (E) il suffit d'avoir :

$$\begin{cases} \lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2 = 0 \\ \lambda'_1\varphi'_1 + \lambda'_2\varphi'_2 = b. \end{cases}$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

Puisque la famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ , son wronskien ne s'annule pas. Donc, pour tout  $t \in I$ , le système :

$$\begin{cases} \lambda'_1(t)\varphi_1(t) + \lambda'_2(t)\varphi_2(t) = 0 \\ \lambda'_1(t)\varphi'_1(t) + \lambda'_2(t)\varphi'_2(t) = b(t) \end{cases}$$

permet de déterminer  $\lambda'_1(t)$  et  $\lambda'_2(t)$ . Les fonctions  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  obtenues sont alors continues comme quotients de fonctions continues. En primitivant, on obtient une solution  $\varphi$  de (E).

**Point méthode (Méthode de variation des constantes)** Si l'on connaît une base  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de l'espace des solutions de  $(E_0)$ , alors on peut rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \quad \text{avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ dérивables sur } I.$$

Une telle fonction  $\varphi$  est solution de (E) si :

$$\begin{cases} \lambda'_1 \varphi_1 + \lambda'_2 \varphi_2 = 0 \\ \lambda'_1 \varphi'_1 + \lambda'_2 \varphi'_2 = b. \end{cases}$$

On peut alors déterminer  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$ , puis  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  par calcul de primitives.

**Ex. 24.** Considérons l'équation différentielle :

$$(E) : x'' + x = \tan t,$$

sur un intervalle  $I$  de la forme  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ .

L'équation homogène est à coefficients constants et une base de l'ensemble des solutions est  $(\sin, \cos)$ . On applique la méthode de la variations des constantes, en cherchant une solution de (E) sous la forme  $\lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos$ , avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dérivable sur  $I$ . Il suffit d'avoir :

$$\forall t \in I \quad \begin{cases} \lambda'_1(t) \sin t + \lambda'_2(t) \cos t = 0 \\ \lambda'_1(t) \cos t - \lambda'_2(t) \sin t = \tan t, \end{cases}$$

ce qui après résolution donne :

$$\forall t \in I \quad \lambda'_1(t) = \sin t \quad \text{et} \quad \lambda'_2(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos t}.$$

On peut choisir  $\lambda_1(t) = -\cos t$ . Pour déterminer  $\lambda_2$ , on écrit :

$$\lambda'_2(t) = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} = \cos t - \frac{1}{\cos t} = \cos t - \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} = \cos t - \frac{\cos t}{2(1 + \sin t)} - \frac{\cos t}{2(1 - \sin t)},$$

ce qui montre que l'on peut choisir  $\lambda_2(t) = \sin t - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right)$ . On obtient la solution de (E) donnée par :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = -\frac{\cos t}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right).$$

Le solutions réelles de (E) sur  $I$  sont les fonctions :

$$t \mapsto -\frac{\cos t}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right) + \lambda \sin t + \mu \cos t \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

### 3 Quelques techniques classiques d'obtention de solutions d'une équation scalaire d'ordre 2

Ces techniques peuvent s'appliquer également aux équations non normalisées.

#### Recherche de solutions « simples »

Selon l'allure de l'équation, il peut être pertinent de rechercher une solution sous une forme explicite : fonctions polynomiales, exponentielles, trigonométriques, ...

**Ex. 25.** Cherchons les solutions polynomiales de l'équation :

$$(t^2 + 2t - 1)x'' + (t^2 - 3)x' - (2t + 2)x = 0. \quad (\text{E}_0)$$

Le polynôme  $P$  est une solution de  $(\text{E}_0)$  si, et seulement si,

$$Q = (X^2 + 2X - 1)P'' + (X^2 - 3)P' - (2X + 2)P = 0.$$

Si  $\alpha_n X^n$  est le terme de plus haut degré de  $P$ , le terme de degré  $n+1$  de  $Q$  est :  $n\alpha_n - 2\alpha_{n-1}$ . Il doit être nul. Comme  $\alpha_n \neq 0$ ,  $n = 2$ . On cherche donc  $P$  de la forme :

$$P = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \quad \text{avec} \quad \alpha_2 \neq 0.$$

En reportant dans l'équation  $(\text{E}_0)$  et, par unicité des coefficients, on obtient que  $t \mapsto P(t)$  est solution de  $(\text{E}_0)$  si, et seulement si,  $\begin{cases} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_0 &= -\alpha_2. \end{cases}$  Par suite, les solutions polynomiales de  $(\text{E}_0)$  sont les fonctions :

$$t \mapsto \lambda(t^2 - 1) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exo  
18.15

#### Recherche de solutions développables en série entière

**Ex. 26.** Considérons sur  $\mathbb{R}$  l'équation homogène :

$$(\text{E}_0) : tx'' + 2x' + tx = 0.$$

Recherchons les solutions de  $(\text{E}_0)$  développables en série entière.

- Soit  $\varphi$  une fonction développable en série entière sur un intervalle de la forme  $] -r, r[$  avec  $r > 0$ . Pour  $t \in ] -r, r[$ , on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

On a, pour tout  $t \in ] -r, r[$  :

$$A(t) = t\varphi''(t) + 2\varphi'(t) + t\varphi(t) = t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

puis en réindexant les sommes pour obtenir dans chacune d'entre elles des  $t^n$  :

$$A(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n,$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

ce qui donne, en regroupant les sommes :

$$A(t) = 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1})t^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit :

$\varphi$  solution de (EH)  $\iff A$  est la fonction nulle

$$\iff a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_0.$$

- \* Si  $\varphi$  est une solution de  $(E_0)$  développable en série entière, on a donc :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

\* Réciproquement :

- \* le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$  vaut  $+\infty$  (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
- \* d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement, la fonction :

$$\varphi_1 : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$$

est solution de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des solutions de  $(E_0)$  développables en séries entières est  $\text{Vect}(\varphi_1)$

- On peut simplifier l'expression de cette solution  $\varphi_1$  en remarquant que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sin t,$$

et donc finalement :

$$\varphi_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi_1(t) = \frac{\sin t}{t}.$$



Exo  
18.16

### Changement de variables

Dans certains cas, l'équation différentielle (E) se traduit de manière plus simple sur une fonction de la forme  $u \mapsto x(\theta(u))$  (idéalement, une équation à coefficients constants). La résolution de cette équation plus simple peut permettre d'en déduire les solutions de l'équation initiale.

Cette technique n'est pas réservée aux équations homogènes, comme le montre l'exemple suivant.

**Ex. 27.** Considérons, sur  $]0, +\infty[$ , l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$(E) : t^2 x'' + 3tx' + 4x = t \ln t.$$

Résolvons (E) grâce au changement de variable  $t = e^u$ .

- Soit  $f$  une solution de (E).

\* Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto f(e^u). \end{aligned}$$

Comme  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ ,  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et l'on a, pour tout  $u \in \mathbb{R}$  :

$$g'(u) = e^u f'(e^u) \quad \text{et} \quad g''(u) = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u).$$

On constate alors que, pour  $u \in \mathbb{R}$  :

$$g''(u) + 2g'(u) + 4g(u) = (e^u)^2 f''(e^u) + 3e^u f'(e^u) + 4f(e^u).$$

La fonction  $f$  étant solution de (E), on obtient, pour tout  $u \in \mathbb{R}$  :

$$g''(u) + 2g'(u) + 4g(u) = ue^u,$$

et donc la fonction  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$(\tilde{E}) : x'' + 2x' + 4x = ue^u.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on sait résoudre. Après l'avoir résolue, on en déduit qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$  :

$$g(u) = a e^{-u} \cos(\sqrt{3}u) + b e^{-u} \sin(\sqrt{3}u) + \frac{7u - 4}{49} e^u.$$

- \* Revenons sur la fonction  $f$ . Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , on a :

$$f(t) = f(e^{\ln t}) = g(\ln t).$$

Par suite, on obtient l'expression suivante de  $f(t)$  pour  $t \in ]0, +\infty[$  :

$$f(t) = \frac{a}{t} \cos(\sqrt{3} \ln t) + \frac{b}{t} \sin(\sqrt{3} \ln t) + \frac{7 \ln t - 4t}{49}.$$

- Notons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions.

\* Puisque l'on travaille sur  $]0, +\infty[$ , l'équation (E) peut être mise sous forme normalisée. Si  $\varphi_P \in \mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0$ , où  $\mathcal{S}_0$  est l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions de l'équation homogène.

\* On a montré que  $\mathcal{S} \subset \varphi + \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$  avec :

$$\varphi : t \mapsto \frac{t \ln t}{7} - \frac{4t}{49}, \quad \varphi_1 : t \mapsto \frac{1}{t} \cos(\sqrt{3} \ln t) \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t} \sin(\sqrt{3} \ln t).$$

L'inclusion entre deux sous-espace affines implique l'inclusion de leur direction. On a donc  $\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$  et pour des raisons de dimension  $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Comme  $\varphi_P$  est une solution de  $\mathcal{S}$ , elle appartient à  $\varphi + \mathcal{S}_0$ . On a donc :

$$\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0 = \varphi + \mathcal{S}_0 = \varphi + \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

## 4 Résolution de l'équation homogène ( $E_0$ ) quand on en connaît une solution non nulle

Supposons connue une solution  $\varphi_1$  non nulle de  $(E_0)$ . Comme  $\dim(\mathcal{S}_0) = 2$ , il reste à déterminer une solution non proportionnelle à  $\varphi_1$ .

### Méthode du wronskien

- Pour  $\varphi \in \mathcal{S}_0$ , l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre vérifiée par le wronskien  $W$  de  $(\varphi_1, \varphi)$  permet d'en obtenir une expression, à une constante proportionnelle près.
- Sur un intervalle où  $\varphi_1$  ne s'annule pas, on peut considérer la fonction  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)$  dont la dérivée est donnée par :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi'_1}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}.$$

En primitivant, on obtient alors une expression de  $\frac{\varphi}{\varphi_1}$  puis de  $\varphi$ .

**Ex. 28.** Supposons que l'on souhaite résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle :

$$(E_0) : x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = 0.$$

On constate que la fonction  $\varphi_1 : t \mapsto t$  est solution.

- Soit  $\varphi$  une solution de  $(E_0)$ . Le wronskien  $W$  de la famille  $(\varphi_1, \varphi)$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$x' + \frac{1}{t} x = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient  $W(t) = \frac{\lambda}{t}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

D'autre part, comme  $\varphi_1$  ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ , on peut considérer la fonction  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)$  dont la dérivée vérifie :

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi'_1}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\lambda}{t^3}.$$

Il en résulte qu'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  :

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = -\frac{\lambda}{2t^2} + \mu \quad \text{puis} \quad \varphi(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu t.$$

On a donc  $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$  avec  $\varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ .

- On peut alors conclure la résolution de  $(E_0)$ . On a obtenu :

$$\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Comme  $\dim \mathcal{S}_0 = 2$ , on a nécessairement  $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ .

**Remarque** L'exemple précédent est favorable car la solution  $\varphi_1$  dont on est parti ne s'annule pas sur l'intervalle de résolution. Il peut arriver que cette fonction  $\varphi_1$  s'annule, auquel cas il faut se restreindre à un sous-intervalle  $J \subset I$  sur lequel elle ne s'annule pas. La relation :

$$\forall t \in J \quad \varphi = \lambda \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(t)$$

Exo  
18.17

obtenue ne permet pas de conclure directement ; en revanche, si  $\varphi_2$  est définie sur  $I$  tout entier et que l'on pense qu'elle est solution, alors il est facile de le montrer.

### Méthode alternative à la méthode précédente

Connaissant une solution non nulle  $\varphi_1$  de l'équation homogène  $(E_0)$ , on dispose d'une méthode alternative à la méthode précédente. Elle consiste à rechercher d'autres solutions de  $(E_0)$  sous la forme :

$$\varphi = \lambda \varphi_1 \quad \text{avec } \lambda \text{ une fonction deux fois dérivable.}$$

On a alors :

$$\varphi' = \lambda' \varphi_1 + \lambda \varphi_1' \quad \text{et} \quad \varphi'' = \lambda'' \varphi_1 + 2\lambda' \varphi_1' + \lambda \varphi_1'',$$

donc :

$$\varphi'' + a_1 \varphi' + a_0 \varphi = \lambda'' \varphi_1 + \lambda'(2\varphi_1' + a_1 \varphi_1) + \lambda \underbrace{(\varphi_1'' + a_1 \varphi_1' + a_0 \varphi_1)}_{=0}.$$

Donc  $\lambda$  doit vérifier l'équation :

$$\lambda'' \varphi_1 + \lambda'(2\varphi_1' + a_1 \varphi_1) = 0.$$

La fonction  $\lambda'$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Sur un intervalle où  $\varphi_1$  ne s'annule pas, on peut alors déterminer  $\lambda$  et obtenir une expression de  $\varphi$ .

**Ex. 29.** Reprenons l'exemple 28 de la page précédente.

La fonction  $\varphi_1 : t \mapsto t$  est solution et ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$ . On cherche une solution sous la forme  $\varphi = \lambda \varphi_1$ . On obtient, pour tout  $t > 0$ ,  $t\lambda''(t) + 3\lambda'(t) = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda''(t) = -\frac{3\lambda'(t)}{t}$ . En intégrant, on obtient l'existence de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall t > 0 \quad \lambda'(t) = \alpha e^{-3 \ln t} = \frac{\alpha}{t^3},$$

puis l'existence de  $\beta$  tel que :

$$\forall t > 0 \quad \lambda(t) = \frac{-\alpha}{2t^2} + \beta \quad \text{et donc} \quad \forall t > 0 \quad \varphi(t) = \frac{-\alpha}{2t} + \beta t.$$

On conclut comme par l'autre méthode que  $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$  avec  $\varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ .

## 5 Exemples de résolution d'équations non normalisées

Étant donné une équation différentielle linéaire scalaire de la forme :

$$a_n(t) x^{(n)} + \cdots + a_0(t) x = b(t), \quad (\text{E})$$

si la fonction  $a_n$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$  de résolution, alors en divisant par  $a_n(t)$ , on se ramène à une équation normalisée. L'objectif de cette partie est de traiter quelques exemples d'équations ne pouvant être mises sous forme normalisée.

Le plan d'étude d'équations non normalisées sera en général le suivant :

**Point méthode (Étude d'une équation non normalisée)** Pour résoudre une équation linéaire de la forme  $a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_0(t)x = b(t)$  lorsque la fonction  $a_n$  possède des points d'annulation :

- on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel  $a_n$  ne s'annule pas ;
- on cherche ensuite, par analyse-synthèse, les solutions sur l'intervalle entier.

Exo  
18.18

Exo  
18.19

Pour des équations différentielles linéaires non normalisées subsistent :

- le principe de superposition ;
- l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel ;
- la structure de l'ensemble des solutions : s'il n'est pas vide,  $\mathcal{S} = \varphi_P + \mathcal{S}_0$ , où  $\varphi_P$  est une solution particulière.

En revanche, certaines propriétés ne sont plus vérifiées :

- la dimension de  $\mathcal{S}_0$  n'est pas nécessairement égale à l'ordre de l'équation ;
- l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Cauchy n'est plus assurée : il peut ne pas y avoir de solution, en avoir deux ou une infinité.

**Ex. 30.** Considérons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(E) : (1-t)x' - x = t.$$

- Tout d'abord, on constate que l'équation se résout facilement sur les intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$  où elle se met sous forme normalisée :
  - \* sur  $]-\infty, 1[$ , les solutions sont :

$$t \mapsto \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} ;$$

- \* sur  $]1, +\infty[$ , les solutions sont :

$$t \mapsto \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Analyse** Soit  $\varphi$  une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

- \* Tout d'abord,  $\varphi$  est solution de (E) sur l'intervalle  $]-\infty, 1[$  et sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ , donc il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1 \\ \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

- \* De plus,  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc continue. En particulier,  $\varphi$  est continue en 1, et donc possède une limite finie en 1.

Cela impose d'avoir  $\lambda = \mu = -1$ . On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{t+1}{2}$$

puis, par continuité en 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = -\frac{t+1}{2}.$$

**Synthèse** Réciproquement, on vérifie que la fonction :

$$\varphi : t \mapsto -\frac{t+1}{2}$$

est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ . C'est donc l'unique solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Ex. 31.** Considérons sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$(E) : 2t^2 x'' - 5t x' + 5x = 0.$$

- Sur les intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ , l'équation se met sous forme normalisée donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

- \* Sur  $]0, +\infty[$ , on cherche des solutions  $\varphi$  de la forme  $t \mapsto t^\alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On trouve facilement que  $\varphi$  est solution de (E) sur  $]0, +\infty[$  si, et seulement si,  $2\alpha^2 - 7\alpha + 5 = 0$ , ce qui donne  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = \frac{5}{2}$ . Les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto t^{\frac{5}{2}}$  n'étant pas colinéaires, elles forment une base de solutions. Sur  $]0, +\infty[$ , les solutions sont donc :

$$t \mapsto \lambda t + \mu t^{\frac{5}{2}} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- \* Sur  $]-\infty, 0[$ , on cherche des solutions  $\varphi$  de la forme  $t \mapsto (-t)^\alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On trouve encore que  $\varphi$  est solution de (E) sur  $]-\infty, 0[$  si, et seulement si,  $2\alpha^2 - 7\alpha + 5 = 0$ . On conclut comme dans le premier cas. Sur  $]-\infty, 0[$ , les solutions sont donc :

$$t \mapsto \lambda t + \mu(-t)^{\frac{5}{2}} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- Recherchons par analyse-synthèse les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Analyse** Soit  $\varphi$  une solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

- \* Tout d'abord,  $\varphi$  est solution de (E) sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$  et sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , donc il existe  $(\lambda, \mu, \sigma, \tau) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t + \mu(-t)^{\frac{5}{2}} & \text{si } t < 0 \\ \sigma t + \tau t^{\frac{5}{2}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- \* Comme  $\varphi$  est solution de l'équation en 0, on doit avoir de plus  $\varphi(0) = 0$ .
- \* La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  et :

$$\varphi'(t) = \begin{cases} \lambda - \frac{5}{2}\mu(-t)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t < 0 \\ \sigma + \frac{5}{2}\tau t^{\frac{3}{2}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

La fonction  $\varphi'$  est dérivable donc continue, ce qui impose  $\lambda = \sigma$ .

**Synthèse** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de la forme :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t + \mu(-t)^{\frac{5}{2}} & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda t + \tau t^{\frac{5}{2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Il n'y a pas d'ambiguïté dans la définition de  $\varphi(0)$  puisque les deux expressions donnent la même valeur.

- \* Cette fonction est solution de l'équation sur  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- \* Par définition, elle est continue à droite et à gauche en 0, donc continue en 0.
- \* On a, pour  $t < 0$ ,  $\varphi'(t) = \lambda - \frac{5}{2}\mu(-t)^{\frac{3}{2}}$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \varphi'(t) = \lambda$ , donc  $\varphi'_g(0) = \lambda$ . On montre de même que  $\varphi'_d(0) = \lambda$ . Ainsi  $\varphi$  est dérivable en 0, avec  $\varphi'(0) = \lambda$ , et  $\varphi'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- \* Le même raisonnement montre que  $\varphi'$  est dérivable à droite et à gauche en 0 et que  $(\varphi')'_g(0) = (\varphi')'_d(0) = 0$ . Ainsi,  $\varphi'$  est dérivable en 0 et  $\varphi''(0) = 0$ .

La fonction  $\varphi$  est donc solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

- On constate que l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 3, engendré par exemple par les fonctions :

$$\varphi_1 = t \mapsto t, \quad \varphi_2 : t \mapsto \begin{cases} (-t)^{\frac{5}{2}} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^{\frac{5}{2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

## Démonstrations

### Proposition 1

- Si  $\varphi : I \rightarrow E$  est solution de (E), alors  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , donc continue, et vérifie :

$$\forall s \in I \quad \varphi'(s) = a(s) \cdot \varphi(s) + b(s) \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = x_0.$$

Alors, pour tout  $t \in I$ , on obtient, en intégrant entre  $t_0$  et  $t$  :

$$\varphi(t) - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi'(s) \, ds = \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi(s) \, ds + \int_{t_0}^t b(s) \, ds.$$

- Réiproquement, supposons que  $\varphi$  soit continue et vérifie :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(s) \cdot \varphi(s) \, ds + \int_{t_0}^t b(s) \, ds.$$

\* Alors, en évaluant en  $t_0$ , on a  $\varphi(t_0) = x_0$ .

\* De plus  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  comme somme de fonctions dérivables, et l'on obtient en dérivant :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

**Théorème 4** Le théorème va résulter essentiellement du lemme suivant.

### Lemme

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues sur  $I$  à valeurs dans  $E$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad z_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(u) \cdot z_n(u) \, du.$$

Alors, la série de fonctions  $\sum z_n$  converge normalement sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$ .

**Démonstration.** Soit  $K$  un segment de  $I$  contenant  $t_0$ . Les applications  $z_0$  et  $a$  étant continues, leur restriction au segment  $K$  est bornée, donc il existe des constantes  $M$  et  $\alpha$  telles que :

$$\forall t \in K \quad \|z_0(t)\| \leq M \quad \text{et} \quad \|a(t)\| \leq \alpha.$$

Montrons, en raisonnant par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall t \in K \quad \|z_n(t)\| \leq M \frac{(k\alpha |t - t_0|)^n}{n!}.$$

- On a :  $\forall t \in K \quad \|z_0(t)\| \leq M$ , ce qui est l'inégalité voulue au rang 0.

- Supposons le résultat vrai au rang  $n \in \mathbb{N}$ .

L'espace  $E$  étant de dimension finie, il en est de même pour  $\mathcal{L}(E)$ , si bien que l'application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) \times E &\longrightarrow E \\ (u, x) &\longmapsto u \cdot x \end{aligned}$$

est continue. Il existe donc (cf. remarque de la page 300) une constante  $k \geq 0$  telle que :

$$\forall (u, x) \in \mathcal{L}(E) \times E \quad \|u \cdot x\| \leq k \|u\| \|x\|. \tag{*}$$

Soit  $t \in K$ . On a :

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|a(s) \cdot z_n(s)\| \, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t k \|a(s)\| \|z_n(s)\| \, ds \right| \text{ d'après l'inégalité (*)} \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \alpha \|z_n(s)\| \, ds \right|. \end{aligned}$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

L'hypothèse de récurrence nous donne de plus :

$$\forall s \in K \quad \|z_n(s)\| \leq M \frac{(k\alpha|s-t_0|)^n}{n!}$$

et donc, puisque le segment  $[t_0, t]$  (ou  $[t, t_0]$ ) est inclus dans  $K$  :

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}(t)\| &\leq \frac{M(k\alpha)^{n+1}}{n!} \left| \int_{t_0}^t |s-t_0|^n ds \right| \leq \frac{M(k\alpha)^{n+1}}{n!} \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1} \\ &= M \frac{(k\alpha|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat au rang  $n+1$  et termine la récurrence.

On a alors, en notant  $\ell$  la longueur du segment  $K$  :

$$\|z_n\|_\infty \leq M \frac{(k\alpha\ell)^n}{n!}.$$

Il en résulte, par comparaison, que la série  $\sum \|z_n\|_\infty$  converge.

Cela prouve la convergence normale sur  $K$  de la série de fonctions  $\sum z_n$ .  $\square$

**Existence** Soit  $(w_n)$  la suite de fonctions définie sur  $I$  par :

$$\forall t \in I \quad w_0(t) = x_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s) \cdot w_n(s) + b(s)) ds.$$

Montrons que la suite de fonctions  $(w_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$  et que que la limite  $\varphi$  de  $(w_n)$  est solution du problème de Cauchy  $(P)$ .

- On considère la série  $\sum z_n$  avec  $z_n = w_{n+1} - w_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} z_{n+1}(t) &= w_{n+2}(t) - w_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t a(s) \cdot (w_{n+1}(s) - w_n(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t a(s) \cdot z_n(s) ds. \end{aligned}$$

La suite  $(z_n)$  vérifie donc les hypothèses du lemme. Il en résulte que la série  $\sum z_n$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$ . Il en découle que la suite  $(w_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$ .

- Prouvons que la suite de fonctions  $(t \mapsto a(t) \cdot w_n(t) + b(t))$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$  vers la fonction  $t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$ .

Soit  $K$  un segment de  $I$  contenant  $t_0$ . Puisque  $a$  est continue sur  $K$ , il existe une constante  $\alpha$  telle que :

$$\forall t \in K \quad \|a(t)\| \leq \alpha.$$

Pour tout  $t \in K$ , on a, en utilisant l'inégalité  $(*)$  :

$$\begin{aligned} \|(a(t) \cdot w_n(t) + b(t)) - (a(t) \cdot \varphi(t) + b(t))\| &= \|a(t) \cdot (w_n(t) - \varphi(t))\| \\ &\leq k \|a(t)\| \|w_n(t) - \varphi(t)\| \\ &\leq k \alpha \|w_n(t) - \varphi(t)\|. \end{aligned}$$

Par suite, la convergence uniforme sur  $K$  de la suite  $(w_n)$  vers  $\varphi$  entraîne la convergence uniforme sur  $K$  de la suite  $(t \mapsto a(t) \cdot w_n(t) + b(t))$  vers la fonction  $t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$ .

- Soit  $t \in I$ . Par convergence uniforme sur le segment d'extrémités  $t_0$  et  $t$ , on a :

$$\int_{t_0}^t (a(s) \cdot w_n(s) + b(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t (a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)) ds.$$

Ainsi, par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans la relation :

$$w_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s) \cdot w_n(s) + b(s)) ds,$$

il vient :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)) ds.$$

Comme on a de plus  $\varphi(t_0) = x_0$ , la fonction  $\varphi$  est bien solution du problème de Cauchy ( $\mathcal{P}$ ).

**Unicité** Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux solutions du problème de Cauchy ( $\mathcal{P}$ ). On pose  $h = \varphi_1 - \varphi_2$ . On a alors, pour tout  $t \in I$  :

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u) \cdot \varphi_1(u) du + \int_{t_0}^t b(u) du$$

et

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u) \cdot \varphi_2(u) du + \int_{t_0}^t b(u) du$$

et donc en faisant la différence :

$$h(t) = \int_{t_0}^t a(u) \cdot h(u) du.$$

On applique le lemme avec  $z_0 = h$ . La relation vérifiée par la fonction  $h$  entraîne que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = h.$$

La série de fonctions  $\sum z_n$  converge normalement sur tout segment de  $I$  contenant  $t_0$ . Ce n'est possible que si  $h = 0$ . On a donc  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

**Proposition 9** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'application  $u_k : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est continue.  
 $a \mapsto \frac{a^k}{k!}$

Montrons que la série d'applications  $\sum u_k$  converge normalement au voisinage de tout point de  $\mathcal{L}(E)$ . Il en résultera, par théorème de continuité des séries de fonctions, la continuité de l'application :

$$\exp = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $M = \|a\| + 1$ . Pour  $b \in B_O(a, 1)$ , on a  $\|b\| < M$  et comme la norme utilisée est sous-multiplicative  $\|u_k(b)\| \leq \frac{M^k}{k!}$ . Il en résulte que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_\infty \leq \frac{M^k}{k!}.$$

Puisque la série numérique  $\sum \frac{M^k}{k!}$  converge, il s'ensuit la convergence normale sur  $B_O(a, 1)$ , de la série  $\sum u_k$ .

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**Proposition 10** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(ta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \quad \text{avec} \quad u_k : t \mapsto \frac{t^k a^k}{k!}.$$

Toutes les applications  $u_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et l'on a, pour  $k \geq 1$  :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left( u'_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad u'_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a^k \right).$$

Si  $K$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , alors en notant  $M$  tel que  $K \subset [-M, M]$ , le caractère sous-multiplicatif de la norme utilisée sur  $\mathcal{L}(E)$  donne :

$$\forall k \geq 1 \quad \|u'_k\|_\infty \leq \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k.$$

La convergence de la série numérique  $\sum \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} \|a\|^k$  prouve ainsi la convergence normale sur le segment  $K$  de la série d'applications  $\sum u'_k$ .

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, il s'ensuit que l'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et l'on a de plus, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} a^{k+1},$$

puis en factorisant par  $a$  à droite ou à gauche, on obtient la formule souhaitée :

$$\varphi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a.$$

**Proposition 11** Notons  $\varphi : t \mapsto \exp(t(a+b))$  et  $\psi : t \mapsto \exp(ta) \circ \exp(tb)$ . Ces applications sont dérivables d'après la proposition 10 de la page 737. On obtient, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi'(t) = (a+b) \circ \exp(t(a+b))a = (a+b) \circ \varphi(t).$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\psi'(t) = a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + \exp(ta) \circ b \circ \exp(tb)$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Justifions que les endomorphismes  $\exp(ta)$  et  $b$  commutent.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $c_p = \sum_{k=0}^p \frac{(ta)^k}{k!}$  est un polynôme en  $a$ , donc, puisque  $a$  et  $b$  commutent, on

a  $c_p \circ b = b \circ c_p$ . La suite  $(c_p)$  converge vers  $a$  et les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u \circ b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & b \circ u \end{array}$$

sont continues, car linéaires avec un espace de départ de dimension finie, donc on obtient, en passant à la limite dans la relation  $c_p \circ b = b \circ c_p$  :

$$\exp(ta) \circ b = b \circ \exp(ta).$$

On a donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + b \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) \\ &= (a+b) \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) = (a+b) \circ \psi(t). \end{aligned}$$

De plus, on a  $\psi(0) = \exp(0)^2 = \text{Id}_E^2 = \text{Id}_E = \varphi(0)$ . Ainsi  $\varphi$  et  $\psi$  sont solutions du même problème de Cauchy :

$$x' = \Phi \cdot x \quad \text{et} \quad x(0) = \text{Id}_E, \quad \text{où} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & (a+b) \circ u. \end{array}$$

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(t(a+b)) = \exp(ta) \circ \exp(tb)$$

et en particulier :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b).$$

Par symétrie, on a aussi  $\exp(a+b) = \exp(b+a) = \exp(b) \circ \exp(a)$ .

**Proposition 15** En effet, si  $\Phi$  est l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u), \end{aligned}$$

alors on a  $\Phi(a) = A$  et, par propriété de morphisme d'algèbres de  $\varphi$  :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \Phi\left(\sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}. \quad (\star)$$

L'application  $\Phi$  étant linéaire, elle est continue (car son espace de départ est de dimension finie). De  $\sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} \rightarrow \exp(a)$ , on déduit donc  $\Phi\left(\sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!}\right) \rightarrow \Phi(\exp(a))$ . Comme d'autre part  $\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \rightarrow \exp(A)$ , on obtient, passage à la limite dans  $(\star)$  :

$$\Phi(\exp(a)) = \exp(A).$$

**Proposition 21** On sait que  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  : la matrice  $A$  s'écrit :

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & \lambda_n & \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la matrice  $T^k$  est triangulaire supérieure avec une diagonale constituée de  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ . Par suite, la matrice  $\exp(T)$  est aussi triangulaire supérieure, de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & (\star) \\ & \ddots & & \\ (0) & & e^{\lambda_n} & \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $\exp(T)$ , comptées avec ordre de multiplicité, sont donc  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

Cela prouve le résultat souhaité, car les matrices  $\exp(A)$  et  $\exp(T)$  sont semblables (cf. remarque page 739), donc ont mêmes valeurs propres.

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**Proposition 27** Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$  et  $V = \varphi(0) \in \mathbb{K}^n$ . On décompose le vecteur  $V$  dans la base de vecteurs propres. On a donc  $V = \sum_{k=1}^n \alpha_k V_k$ . La fonction  $\varphi$  est solution du problème de Cauchy

$$X' = AX \quad \text{et} \quad X(0) = V,$$

donc d'après la proposition 25 de la page 743, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = e^{tA}V = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{tA}V_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t}V_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t),$$

d'après l'exemple 9 de la page 738, c'est-à-dire  $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ . On a donc :

$$\mathcal{S} \subset \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

et comme  $\mathcal{S}$  est de dimension  $n$ ,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}$ .

**Proposition 28** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ . Pour tout  $t \in I$ , on a :

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \\ -a_0(t)\varphi(t) - \cdots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + B(t)$  si, et seulement si :

$$\varphi^{(n)}(t) = -a_0(t)\varphi(t) - \cdots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t).$$

Il en résulte que  $\Phi$  est solution de l'équation différentielle :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

si, et seulement si,  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle :

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + \cdots + a_0(t)x = b(t).$$

**Proposition 34** Rappelons que nous disposons, pour tout  $t \in I$ , de l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \delta_t : \mathcal{S}_0 &\longrightarrow \mathbb{K}^2 \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (iii)  $\implies$  (ii). Évident.

- (ii)  $\implies$  (i). Supposons (ii). Soit  $t \in I$  tel que  $W(t) \neq 0$ .

Alors, les vecteurs  $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi'_1(t) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi'_2(t) \end{pmatrix}$  forment une base de  $\mathbb{K}^2$ . L'image de cette base par l'isomorphisme  $\delta_t^{-1}$  étant la famille  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , on en déduit (i).

- (i)  $\implies$  (iii). Supposons que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  soit une base de  $\mathcal{S}_0$ . Alors, pour tout  $t \in I$ , la famille composée des vecteurs  $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi'_1(t) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi'_2(t) \end{pmatrix}$  est une base de  $\mathbb{K}^2$ , car c'est

l'image par l'isomorphisme  $\delta_t$  de la base  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de  $\mathcal{S}_0$ .

Son déterminant,  $W(t)$ , est donc non nul.

## S'entraîner et approfondir

### Équation différentielles linéaires d'ordre 1

#### 18.1 Régularité des solutions

- $\rightarrow^{731}$  Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que si les applications  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors toute solution de l'équation différentielle  $(E) : x' = a(t) \cdot x + b(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Que peut-on dire si  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ?

#### 18.2 Soit $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ , $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$ .

$\rightarrow^{735}$  On considère le système différentiel réel :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (\text{Sys})$$

Montrer qu'une solution  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  de (Sys) est réelle (c'est-à-dire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ) si, et seulement si,  $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

### Exponentielle — Systèmes différentiels à coefficients constants

#### 18.3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ .

- $\rightarrow^{739}$
1. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $A^k$  en fonction de  $A$  et  $I_n$ .
  2. En déduire l'expression de  $\exp(A)$  en fonction de  $A$  et  $I_n$ .

#### 18.4 Résoudre le système différentiel $X' = AX$ , avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

#### 18.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel (Sys) :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = x. \end{cases}$$

#### 18.6 Résoudre le système différentiel $X' = AX$ , avec :

$\rightarrow^{746}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

#### 18.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$\rightarrow^{746}$

$$(S) : \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

#### 18.8 Résoudre le système différentiel $X' = AX$ , avec :

$\rightarrow^{746}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**18.9** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\varphi$  une solution réelle non nulle sur  $\mathbb{R}$  du système différentiel :

$$X' = AX.$$

1. Montrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors l'application  $t \mapsto \|\varphi(t)\|$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (la norme  $\|\cdot\|$  désignant la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ ).
2. Montrer que si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , alors  $\|\varphi\|$  est constante.

**18.10** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  continue et périodique de période  $T > 0$ .

Montrer que le système différentiel homogène :

$$(Sys) : X' = A(t) X$$

admet une solution non nulle  $\varphi$  pour laquelle il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t + T) = \lambda \varphi(t).$$

**18.11** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On s'intéresse au système différentiel :

$$(Sys) : X' = A X.$$

1. (a) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  et  $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente. Montrer que :

$$\exp(t(\lambda I_p + N)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

*Indication.* On pourra commencer par exprimer  $\exp(t(\lambda I_p + N))$  comme un polynôme en  $N$ .

- (b) Montrer que si chaque valeur propre de  $A$  est de partie réelle strictement négative, alors toute solution du système (Sys) tend vers 0 en  $+\infty$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions du système (Sys) soient bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**18.12** Résoudre le système réel :

$$(Sys) : \begin{cases} x' = x - ty + t e^t \\ y' = tx + y. \end{cases}$$

*Indication.* On pourra chercher une équation différentielle vérifiée par  $x + iy$ .

### Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n$

**18.13** On s'intéresse à une équation différentielle linéaire scalaire homogène à coefficients constants :

→749

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0. \tag{E_0}$$

1. Montrer que, pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , la fonction  $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$  est solution de (E<sub>0</sub>) si, et seulement si,  $\lambda$  est racine du polynôme :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

2. En déduire que si le polynôme  $P$  est scindé à racines simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de (E<sub>0</sub>) est :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}).$$

**18.14** Justifier que les fonctions  $\varphi_1 : t \mapsto \cos(t)$  et  $\varphi_2 : t \mapsto t$  ne sont pas solutions sur  $\mathbb{R}$  d'une  $\xrightarrow{751}$  même équation différentielle linéaire homogène de la forme :

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ continues sur } \mathbb{R}.$$

**18.15** 1. Déterminer les solutions réelles sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$\xrightarrow{753} (E_0) : (1+t^2)x'' + 4tx' + 2x(t) = 0.$$

*Indication.* Rechercher les solutions développables en séries entières.

2. Résoudre ensuite :

$$(E) : (1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = \frac{1}{1+t^2}.$$

**18.16** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$\xrightarrow{754} (E) : (1+t^2)^2 x'' + 2(t+1)(1+t^2)x' + x = 0.$$

*Indication.* On pourra exploiter le changement de variable  $t = \tan u$ .

**18.17** On souhaite résoudre sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle homogène :

$$\xrightarrow{757} (E_0) : x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0.$$

1. Vérifier que la fonction  $\varphi_1 : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est solution.
2. En utilisant le wronskien, terminer la résolution de  $(E_0)$ .

**18.18** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :

$$\xrightarrow{758} (E) : t x' - 2x = t^3.$$

**18.19** Considérons, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation homogène :

$$\xrightarrow{758} (E_0) : 4tx'' + 2x' - x = 0.$$

1. Déterminer une solution  $\varphi_1$  de  $(E_0)$  développable en série entière vérifiant  $\varphi_1(0) = 1$ .
2. On se place dans cette question sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
  - (a) Exprimer  $\varphi_1$  à l'aide de la fonction ch.
  - (b) À l'aide de la méthode du wronskien, conclure la résolution de  $(E_0)$ .
3. On se place dans cette question sur l'intervalle  $]-\infty, 0[$ .
  - (a) Exprimer  $\varphi_1$  à l'aide de la fonction cos.
  - (b) À l'aide de la méthode du wronskien, conclure la résolution de  $(E_0)$ .
4. Résoudre l'équation  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**18.20** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante et bornée.

Montrer que toute solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + y = g$$

est bornée.

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**18.21** 1. Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $f' + \alpha f$  tende vers 0 en  $+\infty$ .  
Montrer que  $f$  et  $f'$  tendent vers 0 en  $+\infty$ .

2. Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f'' + 3f' + 2f$  tende vers 0 en  $+\infty$ .  
Montrer que  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  tendent vers 0 en  $+\infty$ .

**18.22** Soit  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + q(t)y = 0.$$

Soit  $u$  et  $v$  deux solutions de (E) linéairement indépendantes.

1. Soit  $t_0$  un zéro (c'est-à-dire un point d'annulation) de  $u$ . Supposons que  $u$  s'annule sur l'intervalle  $]t_0, +\infty[$ . Montrer qu'il est licite de considérer  $t_1$  le plus petit zéro de  $u$  sur l'intervalle  $]t_0, +\infty[$ .
2. Montrer que, sur l'intervalle  $]t_0, t_1[$ ,  $v$  s'annule une et une seule fois.

**18.23** Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2$ . On suppose  $f \leq 0$ .

1. Montrer que la seule solution  $\varphi$  de l'équation homogène  $(E_0) : x'' + f(t)x = 0$  telle que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  est la fonction nulle.
2. Montrer que l'équation différentielle  $(E) : x'' + f(t)x = g(t)$  possède une unique solution  $\varphi$  telle que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

**18.24** On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + q(t)y = 0,$$

où  $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que si  $\varphi$  est une solution bornée de (E) alors  $\varphi'(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .
2. Montrer que (E) possède des solutions non bornées.

**18.25** Soit  $(a, b) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ . On considère l'équation différentielle homogène :

$$(E) : y'' + a y' + b y = 0,$$

dont on note  $\mathcal{S}_0$  l'espace des solutions.

Montrer l'équivalence entre les deux assertions :

- (i) il existe une base  $(f, g)$  de  $\mathcal{S}_0$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire ;
- (ii) la fonction  $a$  est impaire et la fonction  $b$  est paire.

**18.26** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $2\pi$ -périodique. Existe-t-il une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation différentielle  $(E) : y^{(4)} + y = \varphi$  ?

**18.27** Soit  $p : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $q : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue.

Montrer qu'il existe une fonction  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{K}$ , deux fois dérivable et ne s'annulant pas, telle que l'équation différentielle :

$$(E) : x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

se traduise, sur la fonction  $z = \frac{x}{\alpha}$ , en une équation du type :

$$(\tilde{E}) : z'' + r(t)z = 0 \quad \text{avec } r : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ continue.}$$

**18.28 Équation d'Airy**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - xy = 0.$$

Montrer, sans chercher à les expliciter à l'aide des fonctions usuelles, que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

**18.29** On considère l'équation différentielle (E) :  $xy'' + y' + xy = 0$ .

1. Soit  $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$ . Montrer que  $f$  est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $S$  l'ensemble des solutions de (E) sur  $]0, +\infty[$  et  $g \in S$ . On note ici encore  $f$  la restriction de  $f$  à  $]0, +\infty[$ . Montrer que  $(f, g)$  est une base de  $S$  si, et seulement si,  $g$  n'est pas bornée au voisinage de 0.

## Solutions des exercices

**18.1** Supposons que  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$ . Soit  $\varphi$  une solution de (E).

Si  $\varphi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , alors il existe  $p \leq k$  tel que  $\varphi$  soit de classe  $\mathcal{C}^p$  mais pas de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ .

Comme  $a$  et  $\varphi$  sont de classe  $\mathcal{C}^p$ , et par bilinéarité de l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E) \times E &\longrightarrow E \\ (u, e) &\longmapsto u \cdot e,\end{aligned}$$

entre espaces de dimension finie, l'application  $t \mapsto a(t) \cdot \varphi(t)$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^p$ . Mais alors, la relation :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$$

entraîne que  $\varphi'$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , et contredit le fait que  $\varphi$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors, pour tout  $k$ ,  $a$  et  $b$  sont au moins de classe  $\mathcal{C}^k$  donc  $\varphi$  également. Par conséquent,  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**18.2** • Si  $\varphi$  est une solution réelle de (Sys) alors on a :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

et donc en particulier  $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

- Réciproquement, soit  $\varphi$  une solution du système (Sys) telle que  $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ . Alors l'application  $\bar{\varphi} : t \mapsto \overline{\varphi(t)}$  est aussi une solution de (Sys) puisque, pour tout  $t \in I$ , en conjuguant la relation  $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t)$ , on obtient, les matrices  $A(t)$  et  $B(t)$  étant à coefficients réels :

$$\overline{\varphi'(t)} = \overline{A(t)\varphi(t) + B(t)} = A(t)\overline{\varphi(t)} + B(t)$$

autrement dit :

$$\bar{\varphi}'(t) = A(t)\bar{\varphi}(t) + B(t).$$

Comme  $\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\varphi(t_0) = \overline{\varphi(t_0)} = \bar{\varphi}(t_0)$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$  sont donc solutions de (Sys) et vérifient la même condition initiale en  $t_0$ . Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, on a  $\varphi = \bar{\varphi}$ , autrement dit  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**18.3** 1. Notons  $P = X^2 - 3X + 2$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $\deg(P) = 2$ , le théorème de la division euclidienne assure que l'on peut écrire :

$$X^k = PQ + R_k \quad \text{avec} \quad \deg(R_k) \leq 1.$$

Comme  $P = (X-2)(X-1)$ , on obtient, en évaluant en 1 et en 2 la relation précédente,  $R_k(1) = 1$  et  $R_k(2) = 2^k$ . On trouve finalement :

$$R_k = (2^k - 1)X + (2 - 2^k).$$

Puis, comme  $P$  est annulateur de  $A$ , on a :

$$A^k = R_k(A) = (2^k - 1)A + (2 - 2^k)I_n = 2^k(A - I_n) + (2I_n - A).$$

2. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^N \frac{2^k}{k!} \right) (A - I_n) + \left( \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \right) (2I_n - A),$$

et qui donne, en passant à la limite :

$$\exp(A) = e^2(A - I_n) + e(2I_n - A) = (e^2 - e)A + (2e - e^2)I_n.$$

**18.4** • Justifions que  $A$  est diagonalisable et obtenons ses éléments propres.

$$\text{On a } A = I + J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $J$  est de rang 1. Son noyau est donc de dimension 2. Plus précisément, une base de  $\text{Ker } J$  est donnée par  $(V_1, V_2)$  avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a  $\text{tr}(A) = 3$ , donc  $3 \in \text{sp}(J)$ , et  $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre associé.

La matrice  $J$  est donc diagonalisable et  $(V_1, V_2, V_3)$  est une base de vecteurs propres associée au triplet  $(0, 0, 3)$  de valeurs propres.

- Par suite,  $A$  est diagonalisable, et  $(V_1, V_2, V_3)$  est une base de vecteurs propres associée au triplet  $(1, 1, 4)$  de valeurs propres. Il en résulte qu'une base de l'espace des solutions du système différentiel étudié est  $(X_1, X_2, X_3)$  avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**18.5** Le système différentiel (Sys) se traduit matriciellement :

$$X' = AX \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de  $A$  montre que :

- $\text{sp}(A) = \{1, j, \bar{j}\}$  (avec  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ );
- une base de vecteurs propres associée à  $(1, j, \bar{j})$  est  $(V_1, V_2, \bar{V}_2)$  avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \bar{j} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de l'espace  $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$  des solutions complexes de (Sys) est  $(X_1, X_2, \bar{X}_2)$  avec :

$$X_1 : t \mapsto e^t V_1 \quad \text{et} \quad X_2 : t \mapsto e^{jt} V_2$$

et une base de l'espace  $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$  des solutions réelles est  $(X_1, \text{Re}(X_2), \text{Im}(X_2))$ .

Explicitons  $\text{Re}(X_2)$  et  $\text{Im}(X_2)$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$X_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ e^{\frac{-2i\pi}{3}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ e^{i(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3})} \\ e^{i(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3})} \end{pmatrix}$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

ce qui donne :

$$\operatorname{Re}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(X_2)(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

**18.6** • Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X(X - 1)^2$ .

L'étude des éléments propres de  $A$  montre que  $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(U_1)$ , où  $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

et  $\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(U_2)$ , où  $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

On cherche  $U_3$  tel que dans la base  $(U_1, U_2, U_3)$  la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Pour cela, il faut et il suffit d'avoir  $(A - I_3)U_3 = U_2$ . Le vecteur  $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  convient.

Ainsi, en notant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  qui est inversible, on a  $A = PTP^{-1}$ .

En notant  $Y = P^{-1}X$ , on obtient :

$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY.$$

• Résolvons le système différentiel  $Y' = TY$  qui, en notant  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , s'écrit :

$$\begin{cases} y'_1 &= 0 \\ y'_2 &= y_2 + y_3 \\ y'_3 &= y_3. \end{cases}$$

La première et la troisième équation donnent l'existence de  $(k_1, k_3) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_1(t) = k_1 \quad \text{et} \quad y_3(t) = k_3 e^t.$$

La seconde équation  $y'_2 = y_2 + k_3 e^t$  est une équation différentielle d'inconnue  $y_2$  qui donne l'existence de  $k_2 \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y_2(t) = k_2 e^t + k_3 t e^t.$$

On obtient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

L'ensemble  $\mathcal{S}_T$  des solutions de  $Y' = TY$  est donc  $\mathcal{S}_T = \operatorname{Vect}(Y_1, Y_2, Y_3)$  avec :

$$Y_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

- Finalement, en utilisant l'équivalence :

$$X' = AX \iff Y' = TY \quad \text{avec} \quad X = PY,$$

on obtient que l'espace des solutions du système  $X' = AX$  est :

$$\text{Vect}(X_1, X_2, X_3) \quad \text{avec} \quad X_1 = PY_1, \quad X_2 = PY_2 \quad \text{et} \quad X_3 = PY_3.$$

De manière plus explicite, on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

**18.7** Le système différentiel ( $S$ ) s'écrit matriciellement, en notant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  :

$$X' = AX + B(t) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'étude des éléments propres de  $A$  prouve que  $A$  est diagonalisable et que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

En notant  $Y = P^{-1}X$ , on a alors :

$$\begin{aligned} X' = AX + B(t) &\iff X' = PDP^{-1}X + B(t) \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B(t) \\ &\iff Y' = DY + P^{-1}B(t). \end{aligned}$$

Si l'on trouve les solutions  $Y$  du dernier système différentiel ci-dessus, alors, via la relation  $X = PY$ , on en déduira les solutions du système initial. On a :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{4} \\ -\frac{e^t}{4} \end{pmatrix}.$$

En notant  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , le système différentiel  $Y' = DY + P^{-1}B(t)$  s'écrit :

$$\begin{cases} y'_1 &= 5y_1 + \frac{e^t}{4} \\ y'_2 &= -3y_2 - \frac{e^t}{4}. \end{cases}$$

Ce système est constitué de deux équations linéaires d'ordre 1 que l'on sait résoudre. Les solutions obtenues sont :

$$Y : t \mapsto -\frac{e^t}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ce qui donne les solutions du système initial :

$$X : t \mapsto -\frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- 18.8** L'étude des éléments propres de  $A$  indique que 2 est valeur propre triple de  $A$ . Comme  $A \neq 2I_3$ , on en déduit que  $A$  n'est pas diagonalisable. Notons :

$$N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La seule valeur propre de  $N$  est 0 donc  $N$  est nilpotente. On trouve  $N^2 = 0$ .

Comme  $I_3$  et  $N$  commutent, on obtient, pour tout réel  $t$  :

$$\exp(tA) = \exp(2tI_3 + tN) = \exp(2tI_3)\exp(tN) = e^{2t}(I_3 + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & 0 & -t \\ -t & 1 & t \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix}.$$

Une base de l'ensemble des solutions de  $X' = AX$  est  $(X_1, X_2, X_3)$  avec  $X_k : t \mapsto e^{tA}E_k$ , où  $E_k$  est le  $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On obtient, pour tout réel  $t$  :

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

**Remarque** En remplaçant  $X_1$  par  $X_1 + X_3 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on obtient une base plus simple de l'ensemble des solutions.

- 18.9** 1. On suppose que  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Comme  $A$  est symétrique réelle, il existe une base orthonormée  $(V_1, \dots, V_n)$  de vecteurs propres de  $A$ . De plus  $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ , donc les valeurs propres associées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont toutes strictement positives.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons :

$$\begin{aligned} X_k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto e^{\lambda_k t} V_k. \end{aligned}$$

La famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est alors une base de l'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions de  $X' = AX$ . Il existe donc  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k.$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a, puisque  $(V_1, \dots, V_n)$  est une base orthonormée :

$$\|\varphi(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 e^{2\lambda_k t}.$$

Comme les  $\alpha_k$  ne sont pas tous nuls et les  $\lambda_k$  sont tous strictement positifs, la fonction  $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$  est strictement croissante et tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  et vers 0 en  $-\infty$ . Comme la fonction  $t \mapsto \|\varphi(t)\|^2$  est de plus continue, elle réalise une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En composant par la fonction  $u \mapsto \sqrt{u}$ , bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ , on obtient le résultat souhaité.

2. Supposons  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\psi : t \mapsto \|\varphi(t)\|^2 = \varphi(t)^T \varphi(t)$ . La fonction  $\psi$  est dérivable et, pour tout  $t \in I$ , on a :

$$\psi'(t) = \varphi'(t)^T \varphi(t) + \varphi(t)^T \varphi'(t) = (A\varphi(t))^T \varphi(t) + \varphi(t)^T A\varphi(t) = \varphi(t)^T (A^T + A)\varphi(t) = 0.$$

L'application  $t \mapsto \|\varphi(t)\|$  est constante.

**18.10** Considérons l'application  $\Psi$  qui à une fonction  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  associe la fonction :

$$\begin{aligned}\Psi(X) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto X(t+T).\end{aligned}$$

Comme  $A$  est  $T$ -périodique, si  $X$  est solution de (Sys), alors  $\Psi(X)$  l'est aussi (cf. exemple 3 de la page 735). Ainsi, l'application  $\Psi$  induit un endomorphisme de l'espace  $\mathcal{S}$  des solutions de (Sys). Comme  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie (il est de dimension  $n$ ), cet endomorphisme induit admet au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Un vecteur propre associé à cette valeur propre  $\lambda$  est une solution non nulle  $\varphi$  de (Sys) vérifiant :

$$\Psi(\varphi) = \lambda \varphi \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t+T) = \lambda \varphi(t).$$

**18.11** 1. (a) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Puisque les matrices  $t\lambda I_p$  et  $tN$  commutent, on a :

$$\exp(t(\lambda I_p + N)) = \exp(t\lambda I_p + tN) = \exp(t\lambda I_p) \exp(tN) = e^{\lambda t} \exp(tN).$$

Puisque  $N$  est nilpotente et appartient à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , on a :

$$\forall k \geq p \quad N^k = 0 \quad \text{et donc} \quad \exp(tN) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(tN)^k}{k!}.$$

Par suite :

$$\exp(t(\lambda I_p + N)) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{e^{\lambda t} t^k}{k!} N^k.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on a  $|e^{\lambda t} t^k| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |t|^k$ , et donc comme  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , les croissances comparées donnent  $e^{\lambda t} t^k \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . On en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \frac{e^{\lambda t} t^k}{k!} N^k \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

puis :

$$\exp(t(\lambda I_p + N)) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

- (b) • Si l'on note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ , on sait que  $\mathbb{C}^n$  s'écrit comme somme directe de ses sous-espaces caractéristiques. Ceux-ci sont stables par  $u$  et  $u$  y induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Matriciellement, cela signifie que  $A$  s'écrit :

$$A = P \tilde{A} P^{-1} \quad \text{avec} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix} \quad (*)$$

où, pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $A_k$  est un bloc diagonal de la forme :

$$A_k = \lambda_k I_{p_k} + N_k \quad \text{avec} \quad \lambda_k \in \operatorname{sp}(A) \quad \text{et} \quad N_k \text{ nilpotente.}$$

- Pour  $t \in \mathbb{R}$ , en écrivant  $t\tilde{A} = \begin{pmatrix} tA_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & tA_m \end{pmatrix}$  et en effectuant des produits par blocs, on constate que :

$$\exp(t\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(tA_m) \end{pmatrix}.$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

Or, pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , comme  $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ , le résultat de la première question donne  $\exp(tA_k) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ . On a donc  $\exp(t\tilde{A}) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

- Comme  $A = P\tilde{A}P^{-1}$ , on a  $\exp(tA) = P\exp(t\tilde{A})P^{-1}$  (cf. remarque page 739). Donc, par continuité de l'application  $M \mapsto PMP^{-1}$ , car linéaire en dimension finie, on obtient :

$$\exp(tA) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Cela répond à la question puisque les solutions du système différentiel :

$$(\text{Sys}) : X' = AX$$

sont les applications de la forme :

$$t \mapsto \exp(tA)X_0 \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{C}^n.$$

2. • Supposons que toutes les solutions de (Sys) soient bornées.

\* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . En prenant  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ , l'application

$$X : t \mapsto e^{\lambda t}V$$

est solution de (Sys). Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\|X(t)\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} \|V\|$  et donc :

- ★ si  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , alors  $\|X(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$  ;
- ★ si  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , alors  $\|X(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty$ .

Par suite, toutes les solutions de (Sys) étant bornées, on a  $\operatorname{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ .

\* Montrons maintenant que  $A$  est diagonalisable. Par l'absurde : supposons que cela ne soit pas le cas. Reprenons la relation (\*) utilisée à la question 1(b). Comme  $A$  n'est pas diagonalisable, au moins un des blocs diagonaux  $A_k$  n'est pas une matrice d'homothétie, donc est de taille au moins 2 avec une matrice nilpotente  $N_k$  non nulle. Fixons une telle valeur de  $k$ , et notons :

$$r = \max\{i \in \mathbb{N} : N_k^i \neq 0\}.$$

On a, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\exp(tA_k) = e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^r \frac{t^j}{j!} N_k^j \quad \text{avec } N_k^r \neq 0$$

puis, comme  $\lambda_k \in i\mathbb{R}$  :

$$\|\exp(tA_k)\| = \left\| \sum_{j=0}^r \frac{t^j}{j!} N_k^j \right\| = \frac{|t|^r}{r!} \underbrace{\left\| \sum_{j=0}^r \frac{r! t^{j-r}}{j!} N_k^j \right\|}_{\substack{\longrightarrow \\ t \rightarrow +\infty}} \underbrace{\|\|N_k^r\| \neq 0}}_{\longrightarrow +\infty}.$$

Comme  $r \geq 1$ , il en résulte que  $\|\exp(tA_k)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , et donc :

$$\|\exp(tA)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Si  $(E_1, \dots, E_n)$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ , alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \max(\|ME_1\|, \dots, \|ME_n\|) \end{aligned}$$

est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . La propriété :

$$\|\exp(tA)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

appliquée avec cette norme donne que, parmi les fonctions :

$$t \mapsto \exp(tA) E_k \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

au moins une n'est pas bornée. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse initiale car les fonctions précédentes sont solutions de (Sys).

- Réciproquement, supposons  $A$  diagonalisable et  $\text{sp}(A) \subset i\mathbb{R}$ . Il existe  $(V_1, \dots, V_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$ . En notant  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la liste des valeurs propres associées, on a :

$$\mathcal{S} = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n) \quad \text{avec } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad X_k : t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le fait que  $\lambda_k$  soit imaginaire pure donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |e^{\lambda_k t}| = 1 \quad \text{et donc} \quad \|X_k(t)\| = \|V_k\|.$$

Ainsi, les applications  $X_1, \dots, X_n$  sont bornées, ainsi que tous les éléments de  $\mathcal{S}$  car elles en sont des combinaisons linéaires.

### 18.12 Analyse

Soit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  une solution de (Sys).

On constate que la fonction  $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$  vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = (1 + it)\psi(t) + t e^t.$$

En résolvant l'équation scalaire d'ordre 1 :

$$z' = (1 + it)z + t e^t$$

(résolution de l'équation homogène, puis recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante), on obtient l'existence d'une constante  $\alpha \in \mathbb{C}$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = \alpha \exp\left(t + i\frac{t^2}{2}\right) + i e^t.$$

Puisque  $\varphi_1 = \text{Re}(\psi)$  et  $\varphi_2 = \text{Im}(\psi)$ , on obtient (en écrivant  $\alpha$  sous forme algébrique  $\alpha = a + ib$ ) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + ae^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

**Synthèse** De la partie « analyse » du raisonnement il résulte que :

$$\mathcal{S} \subset \varphi_P + \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$

avec

$$\varphi_P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Comme on sait que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine dont la direction est l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_0$  de dimension 2, on montre comme dans l'exemple 27 de la page 755 que l'inclusion précédente est une égalité.

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

**18.13** 1. L'équivalence cherchée vient du fait que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad f_{\lambda}^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$$

et donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f_{\lambda}^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_{\lambda}^{(k)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k e^{\lambda t} = P(\lambda) \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}.$$

2. Supposons que  $P$  possède  $n$  racines simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- Comme  $(E_0)$  est une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre  $n$ , on sait que son ensemble solution  $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .
- D'après la question précédente, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la fonction  $f_{\lambda_k} : t \mapsto e^{\lambda_k t}$  est solution de  $(E_0)$ . On a donc :

$$\text{Vect}(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}) \subset \mathcal{S}_0.$$

Comme  $\dim \mathcal{S}_0 = n$ , pour prouver que l'inclusion précédente est une égalité, il suffit de prouver que la famille  $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$  est libre.

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f'_{\lambda_k} = \lambda_k f_{\lambda_k}$ . Ainsi les fonctions  $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}$  sont des vecteurs propres pour la dérivation, associées à des valeurs propres distinctes. Elles forment donc une famille libre.

**18.14** Si une telle équation différentielle existait, alors les fonctions  $t \mapsto \cos(t)$  et  $t \mapsto t$ , puisqu'elles ne sont pas proportionnelles, formeraient une base de l'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions. Et alors, d'après la proposition 34 de la page 751, leur wronskien  $W$  ne s'annulerait pas sur  $\mathbb{R}$ . Or ce wronskien est donné par :

$$W(t) = \varphi_1(t) \varphi'_2(t) - \varphi'_1(t) \varphi_2(t) = \cos t + t \sin t,$$

et le théorème des valeurs intermédiaires assure que  $W$  s'annule en au moins un point de l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$  puisque  $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$  et  $W(\pi) = -1 < 0$ .

**18.15** 1. Supposons que  $\varphi$  soit une fonction développable en série entière sur un intervalle de la forme  $]-r, r[$  avec  $r > 0$ . Pour  $t \in ]-r, r[$ , on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

et donc :

$$\begin{aligned} (1+t^2)\varphi''(t) + 4t\varphi'(t) + 2\varphi(t) \\ = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 3n + 2)a_n t^n \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,  $\varphi$  est solution de  $(E_0)$  si, et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = -a_n$ . On en déduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{2n} = (-1)^n a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = (-1)^n a_1.$$

La série entière  $\sum a_n t^n$  a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et la somme  $\varphi$  de la série entière est solution de l'équation différentielle sur  $]-1, 1[$ . On a, pour tout  $t \in ]-1, 1[$  :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n+1} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n + a_1 t \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n = \frac{a_0}{1+t^2} + \frac{a_1 t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Mais, pour tout  $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $t \mapsto \frac{a_0}{1+t^2} + \frac{a_1 t}{1+t^2}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et on vérifie facilement qu'elle est solution de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $(E_0)$  peut être mise sous forme normalisée, l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  de ses solutions est de dimension 2.

Les fonctions  $\varphi_1 : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  et  $\varphi_2 : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$  formant une famille libre, on peut conclure que :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

2. On applique la méthode de variations des constantes. On cherche une solution  $\varphi$  de  $(E)$  sous la forme  $\varphi = \varphi_1 \lambda_1 + \varphi_2 \lambda_2$ , avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} \lambda'_1(t) + \frac{t}{1+t^2} \lambda'_2(t) = 0 \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \lambda'_1(t) + \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \lambda'_2(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}, \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\lambda'_1(t) = \frac{-t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \lambda'_2(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

On peut prendre  $\lambda_1(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) = -\ln \sqrt{1+t^2}$  et  $\lambda_2(t) = \text{Arctan}(t)$ , et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{-\ln \sqrt{1+t^2} + t \text{Arctan}(t)}{1+t^2}.$$

Les solutions de  $(E)$  sont donc les fonctions :

$$t \mapsto \frac{-\ln \sqrt{1+t^2} + t \text{Arctan}(t) + \lambda + \mu t}{1+t^2} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

### 18.16 Analyse Soit $f$ une solution de $(E)$ .

- Considérons la fonction  $g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $u \mapsto f(\tan u)$ .

Comme  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  est deux fois dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Fixons  $u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . On a, en notant  $t = \tan u$  :

$$g'(u) = (1+t^2) f'(t)$$

et

$$g''(u) = (1+t^2)^2 f''(t) + 2t(1+t^2) f'(t),$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

et l'on constate que :

$$g''(u) + 2g'(u) + g(u) = (1+t^2)^2 f''(t) + 2(t+1)(1+t^2)f'(t) + f(t).$$

En utilisant le fait que  $f$  est solution de (E), on obtient :

$$g''(u) + 2g'(u) + g(u) = 0,$$

et donc la fonction  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :

$$(\tilde{E}) : x'' + 2x' + x = 0.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène, que l'on sait résoudre. On en déduit l'existence de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $u \in \mathbb{R}$  :

$$g(u) = (au + b)e^{-u}.$$

- Revenons sur la fonction  $f$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(t) = f(\tan(\arctan t)) = g(\arctan t).$$

Par suite, on obtient l'expression suivante de  $f(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f(t) = (a \arctan t + b)e^{-\arctan t}.$$

**Synthèse** D'après la partie « analyse » du raisonnement, on a :

$$\mathcal{S}_0 \subset \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 = t \mapsto e^{-\arctan t} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \arctan(t)e^{-\arctan t}.$$

Comme l'équation est d'ordre 2 et peut être mise sous forme normalisée, on a  $\dim \mathcal{S}_0 = 2$ . L'inclusion précédente est donc une égalité.

- 18.17** 1. La fonction  $\varphi_1$  est définie et deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  et l'on a :

$$\forall t > 0 \quad \varphi_1'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2} \quad \text{et} \quad \varphi_1''(t) = -\frac{t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t}{t^3}.$$

On vérifie facilement que :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad \varphi_1''(t) + \frac{2}{t} \varphi_1'(t) + \varphi_1(t) = 0.$$

2. • Soit  $\varphi$  une solution sur  $]0, +\infty[$  de  $(E_0)$ .

\* Le wronskien  $W$  de  $(\varphi_1, \varphi)$  vérifie sur  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle :

$$x' + \frac{2}{t} x = 0.$$

On en déduit qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad W(t) = \frac{\lambda}{t^2}.$$

\* Plaçons-nous sur un intervalle  $J \subset ]0, +\infty[$  où  $\varphi_1$  ne s'annule pas ; prenons par exemple  $J = ]0, \pi[$ . Sur cet intervalle  $J$ , on peut considérer la fonction  $\frac{\varphi}{\varphi_1}$  dont la dérivée vérifie :

$$\left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)' = \frac{\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall t \in J \quad \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)'(t) = \frac{\lambda}{\sin^2 t}.$$

En primitivant, on obtient l'existence de  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \in J$  :

$$\frac{\varphi(t)}{\sin t} = -\lambda \frac{\cos t}{\sin t} + \mu \quad \text{et donc} \quad \varphi(t) = -\lambda \frac{\cos t}{t} + \mu \frac{\sin t}{t}.$$

- Notons alors  $\varphi_2$  la fonction  $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ .

La fonction  $\varphi_2$  est définie et deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  (et pas seulement sur  $J$ ), et il est facile de vérifier que  $\varphi_2$  est solution de  $(E_0)$ . Comme  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  ne sont pas proportionnelles, car  $\sin$  et  $\cos$  ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  est :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

**Remarque** La solution  $\varphi : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  de  $(E_0)$  peut s'obtenir par technique « recherche de solutions développables en série entière » (cf. exemple 26 de la page 753).

- 18.18** • Tout d'abord, on constate que l'équation se résout facilement sur les intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  où elle se met sous forme normalisée.

- \* Sur  $]-\infty, 0[$ , les solutions sont les fonctions :

$$t \mapsto \lambda t^2 + t^3 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- \* Sur  $]0, +\infty[$ , les solutions sont les fonctions :

$$t \mapsto \mu t^2 + t^3 \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}.$$

- Recherchons les solutions sur  $\mathbb{R}$ .

**Analyse** Si  $\varphi$  est une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors elle est solution sur  $]-\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ , donc il existe des réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$\forall t < 0 \quad \varphi(t) = \lambda t^2 + t^3 \quad \text{et} \quad \forall t > 0 \quad \varphi(t) = \mu t^2 + t^3.$$

La continuité de  $\varphi$  en 0 entraîne alors  $\varphi(0) = 0$ .

On a donc :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

**Synthèse** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de la forme :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

- \* Cette fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et est manifestement solution de l'équation  $(E)$  sur les intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

- \* On voit rapidement que  $\varphi$  est de plus continue en 0.

- \* Pour tout  $t < 0$ , on a  $\varphi'(t) = 2\lambda t + 3t^2$ . On a donc  $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0$ , ce qui prouve que  $\varphi$  est dérivable à gauche en 0 et  $\varphi'_g(0) = 0$ . De même, on montre que  $\varphi$  est dérivable à droite en 0 et que  $\varphi'_d(0) = 0$ . Comme  $\varphi'_g(0) = \varphi'_d(0)$ , la fonction  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = 0$ .

- \* Enfin, on a  $0\varphi'(0) - 2\varphi(0) = 0$ , donc  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle en 0.

La fonction  $\varphi$  est donc solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- 18.19** 1. • Soit  $\varphi$  une fonction développable en série entière sur un intervalle de la forme  $]-r, r[$  avec  $r > 0$ .

Pour  $t \in ]-r, r[$ , on a :

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

et donc, pour tout  $t \in ]-r, r[$  :

$$\begin{aligned} A(t) &= 4t\varphi''(t) + 2\varphi'(t) - \varphi(t) \\ &= 4t \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n. \end{aligned}$$

En réindexant pour obtenir dans chaque somme des termes en  $t^n$ , obtient :

$$\begin{aligned} A(t) &= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n)t^n. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a :

$$\varphi \text{ solution de } (E_0) \iff A = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0. \quad (\star)$$

Il en résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{1}{(2n)!} a_0,$$

ce qui donne :

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

• Réciproquement :

- \* le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{t^n}{(2n)!}$  vaut  $+\infty$  (on le montre par exemple par le critère de d'Alembert) ;
- \* la fonction  $\varphi_1 : t \mapsto \frac{t^n}{(2n)!}$  est telle que ses coefficients vérifient la propriété  $(\star)$ , et par suite, d'après les calculs effectués dans la première partie du raisonnement,  $\varphi_1$  est solution de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ . Comme de plus  $\varphi_1(0) = 1$ , cela répond à la question.

2. (a) Pour  $t > 0$ , on a  $\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{t})$ .

(b) Sur  $]0, +\infty[$ , l'équation  $(E_0)$  s'écrit sous forme normalisée :

$$(E_0) : x'' + \frac{x'}{2t} - \frac{x}{4t} = 0.$$

L'espace solution  $\mathcal{S}_0$  sur cet intervalle est donc de dimension 2.

Soit  $\varphi$  une solution de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .

Le wronskien  $W$  de la famille  $(\varphi_1, \varphi)$  est solution sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle :

$$x' + \frac{x}{2t} = 0.$$

En résolvant cette équation, on obtient  $W(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a d'autre part :

$$\left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)' = \frac{\varphi' \varphi_1 - \varphi \varphi'_1}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}$$

et donc :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad \left( \frac{\varphi}{\varphi_1} \right)' (t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t} \operatorname{ch}^2(\sqrt{t})}.$$

En primitivant, on obtient qu'il existe une constante  $\mu \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad \frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = 2\lambda \operatorname{th}(\sqrt{t}) + \mu \quad \text{puis} \quad \varphi(t) = 2\lambda \operatorname{sh}(\sqrt{t}) + \mu \operatorname{ch}(\sqrt{t}).$$

Comme la fonction  $\varphi$  a été prise quelconque dans  $\mathcal{S}_0$ , il en résulte que :

$$\mathcal{S}_0 \subset \operatorname{Vect}(t \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{t}), t \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{t})),$$

puis, comme  $\dim \mathcal{S}_0 = 2$ , on obtient :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(t \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{t}), t \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{t})).$$

**Remarque** Une fois connue la solution  $\varphi_1 : t \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{t})$ , on peut, sans utiliser la méthode du wronskien, pressentir que la fonction  $\varphi_2 : t \mapsto \operatorname{sh}(\sqrt{t})$  l'est également. On peut alors conclure la résolution de  $(E_0)$  en vérifiant simplement que cette fonction  $\varphi_2$  est bien solution de  $(E_0)$  et qu'elle est linéairement indépendante de  $\varphi_1$ .

3. (a) Pour  $t < 0$ , on a :

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-t}).$$

(b) Le même raisonnement qu'à la question précédente prouve que si  $\varphi$  est solution de  $(E_0)$  sur un intervalle  $J \subset ]-\infty, 0[$ , alors on a :

$$\varphi_J \in \operatorname{Vect}(t \mapsto \cos(\sqrt{-t}), t \mapsto \sin(\sqrt{-t})).$$

La fonction  $\varphi_2 : t \mapsto \sin(\sqrt{-t})$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $]-\infty, 0[$  et il n'est pas difficile de montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle. On conclut alors, pour des raisons de dimensions, que :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(t \mapsto \cos(\sqrt{-t}), t \mapsto \sin(\sqrt{-t})).$$

**Remarque** On pouvait également pressentir que la fonction  $\varphi_2$  est solution de  $(E_0)$  sur  $]-\infty, 0[$  (ce que l'étude sur  $]0, +\infty[$  rend très vraisemblable).

4. **Analyse.** Soit  $\varphi$  une solution de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Comme  $\varphi$  est solution de  $(E_0)$  sur les intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ , il existe  $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \cos(\sqrt{-t}) + \lambda_2 \sin(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0 \\ \mu_1 \operatorname{ch}(\sqrt{t}) + \mu_2 \operatorname{sh}(\sqrt{t}) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

- La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier continue en 0.  
On a ainsi :

$$\varphi(0) = \lim_{0^-} \varphi = \lim_{0^+} \varphi, \quad \text{et donc} \quad \varphi(0) = \lambda_1 = \mu_1.$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier en 0.

\* Pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\mu_1 \operatorname{sh}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} + \frac{\mu_2 \operatorname{ch}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}.$$

Si  $\mu_2$  n'était pas nul, alors on aurait  $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } \pm\infty$  (selon le signe de  $\mu_2$ ), ce qui contredirait la dérivabilité à droite de  $\varphi$  en 0. Donc  $\mu_2 = 0$ .

\* Pour tout  $t < 0$ , on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda_1 \sin(\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}} - \frac{\lambda_2 \cos(\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}}.$$

Si  $\lambda_2$  n'était pas nul, alors on aurait  $\varphi'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{ } \pm\infty$  (selon le signe de  $\lambda_2$ ), ce qui contredirait la dérivabilité à gauche de  $\varphi$  en 0. Donc  $\lambda_2 = 0$ .

- On obtient :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 \cos(\sqrt{-t}) & \text{si } t < 0 \\ \lambda_1 \operatorname{ch}(\sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et donc finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \lambda_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n)!}.$$

**Synthèse.** Réciproquement, toutes les fonctions de la forme précédente sont solutions de  $(E_0)$  : ce sont les solutions développables en série entière.

- 18.20** • L'espace des solutions de l'équation homogène  $(E_0) : y'' + y = 0$  est :

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{avec} \quad \varphi_1 : t \mapsto \cos t \quad \text{et} \quad \varphi_2 : t \mapsto \sin t.$$

Il est donc clair que toute solution de l'équation homogène est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit donc, pour conclure, de prouver qu'il existe une solution bornée de  $(E)$ .

- Recherchons une solution de  $(E)$  sous la forme  $\varphi_P = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$  avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Pour qu'une telle fonction  $\varphi_P$  soit solution de  $(E)$ , il suffit que :

$$\begin{cases} \lambda'_1 \varphi_1 + \lambda'_2 \varphi_2 = 0 \\ \lambda'_1 \varphi'_1 + \lambda'_2 \varphi'_2 = g, \end{cases}$$

c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda'_1(t) \cos(t) + \lambda'_2(t) \sin(t) = 0 \\ -\lambda'_1(t) \sin(t) + \lambda'_2(t) \cos(t) = g(t), \end{cases}$$

ce qui donne, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\lambda'_1(t) = -\sin(t) g(t) \quad \text{et} \quad \lambda'_2(t) = \cos(t) g(t).$$

En prenant :

$$\lambda_1 : t \mapsto - \int_0^t \sin(u) g(u) du \quad \text{et} \quad \lambda_2 : t \mapsto \int_0^t \cos(u) g(u) du$$

on obtient la solution de  $(E)$  suivante :

$$\varphi_P : t \mapsto -\cos(t) \int_0^t \sin(u) g(u) du + \sin(t) \int_0^t \cos(u) g(u) du.$$

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a donc :

$$\varphi_P(t) = \int_0^t \sin(u-t) g(u) du$$

et donc en intégrant par parties

$$\varphi_P(t) = -g(t) + \cos(t)g(0) + \int_0^t \cos(u-t) g'(u) du.$$

Comme  $g$  est croissante, sa dérivée  $g'$  est à valeurs positives. On en déduit :

$$|\varphi_P(t)| \leq |g(t)| + |g(0)| + \left| \int_0^t g'(u) du \right| \leq 2(|g(t)| + |g(0)|).$$

Cette majoration prouve que la fonction  $\varphi_P$  est bornée.

**18.21** 1. Montrons que  $f \xrightarrow{+∞} 0$ . On en déduira que  $f' \xrightarrow{+∞} 0$ .

Posons  $g = f + \alpha f'$ . La fonction  $f$  est alors solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \alpha y = g.$$

En résolvant l'équation (E), on obtient l'existence d'une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \lambda e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} g(u) du.$$

Comme  $\alpha e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , il reste à prouver que  $e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} g(u) du \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

On a, lorsque  $u \rightarrow +\infty$  :

$$e^{\alpha u} g(u) = o(e^{\alpha u}),$$

donc, la fonction  $u \mapsto e^{\alpha u}$  étant positive et non intégrable, on obtient par intégration des relations de comparaison lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

$$\int_0^t e^{\alpha u} g(u) du = o\left(\int_0^t e^{\alpha u} du\right).$$

Comme  $\int_0^t e^{\alpha u} du = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \sim \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$ , on en déduit, lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

$$e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} g(u) du = o(1).$$

2. Posons  $g = f'' + 3f' + 2f$ . En notant  $D$  l'opérateur de dérivation, on a :

$$f'' + 3f' + 2f = (D^2 + 3D + 2\text{Id})(f) = (D + \text{Id}) \circ (D + 2\text{Id})(f).$$

Posons  $F = (D + 2\text{Id})(f) = f' + 2f$ . Alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g = F' + F$ .

D'après la première question  $F \xrightarrow{+∞} 0$ , puisque  $g \xrightarrow{+∞} 0$ . En appliquant de nouveau la première question, on obtient que  $f \xrightarrow{+∞} 0$  et  $f' \xrightarrow{+∞} 0$ , car  $F \xrightarrow{+∞} 0$ . On en déduit enfin que  $f'' \xrightarrow{+∞} 0$ .

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- 18.22** 1. Comme  $u$  n'est pas l'application nulle (car sinon la famille  $(u, v)$  serait liée),  $t_0$  est un zéro isolé de  $u$  (cf. exemple 22 de la page 750) : il existe  $r > 0$  tel que  $u$  ne s'annule pas sur  $[t_0 - r, t_0 + r]$ .

Notons  $A = \{t \in ]t_0, +\infty[ : u(t) = 0\}$  l'ensemble des zéros de  $u$  sur  $]t_0, +\infty[$  et montrons que  $A$  admet un plus petit élément. L'ensemble  $A$  est une partie non vide (car  $u$  s'annule sur  $]t_0, +\infty[$ ) et minorée (par  $t_0$ ) de  $\mathbb{R}$ , il possède donc une borne inférieure.

Notons  $t_1 = \inf(A)$  et montrons que  $t_1 \in A$ .

- Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite  $(\alpha_n)$  d'éléments de  $A$  tendant vers  $t_1$ . Le fait que  $(\alpha_n)$  soit à valeurs dans  $A$  et la continuité de  $u$  donnent :

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad u(\alpha_n) = 0) \quad \text{et} \quad u(\alpha_n) \rightarrow u(t_1).$$

On a donc  $u(t_1) = 0$ .

- Prouvons alors que  $t_1 > t_0$ . On sait déjà que  $t_1 \geq t_0$ . D'après ce qui précède,  $u$  ne s'annule pas sur  $[t_0, t_0 + r]$ , donc  $t_0 + r \leq t_1$ . Par suite, on a  $t_1 > t_0$ .

2. Montrons que la fonction  $v$  possède un et un seul point d'annulation dans  $]t_0, t_1[$ .

- **Existence.** Le wronskien  $W = uv' - u'v$  de  $(u, v)$  vérifie l'équation différentielle  $W' = 0$ , donc est constant. Comme il est non nul (car  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendantes), il existe  $k \in \mathbb{R}^*$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t)v'(t) - u'(t)v(t) = k. \quad (\star)$$

Comme  $u(t_0) = 0$  et  $u$  n'est pas la fonction nulle, on a  $u'(t_0) \neq 0$ .

De même, comme  $u(t_1) = 0$ , on a  $u'(t_1) \neq 0$ . D'autre part,  $u$  ne s'annulant pas sur l'intervalle  $]t_0, t_1[$ , elle y garde un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

On est donc dans l'une des deux situations suivantes :

- \* *Premier cas* :  $\forall t \in ]t_0, t_1[ \quad u(t) > 0$ . On a alors :

$$\forall t \in ]t_0, t_1[ \quad \frac{u(t)}{t - t_0} > 0$$

puis, comme  $u'(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{u(t)}{t - t_0}$ , on a  $u'(t_0) \geq 0$  et donc  $u'(t_0) > 0$ .

De la même manière, on obtient  $u'(t_1) < 0$ .

- \* *Deuxième cas* :  $\forall t \in ]t_0, t_1[ \quad u(t) < 0$ . Alors, de même que précédemment, on obtient  $u'(t_0) < 0$  et  $u'(t_1) > 0$ .

Dans les deux cas, la relation  $(\star)$ , évaluée en  $t_0$  et en  $t_1$ , impose d'avoir :

$$v(t_0)v(t_1) < 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que la fonction continue  $v$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $]t_0, t_1[$ .

- **Unicité.** À ce stade de l'exercice, on peut affirmer qu'entre deux zéros consécutifs de  $u$  la fonction  $v$  s'annule au moins une fois. Les rôles de  $u$  et  $v$  étant symétriques, on en déduit qu'entre deux zéros consécutifs de  $v$  la fonction  $u$  s'annule au moins une fois. Donc, si  $v$  possédait plusieurs zéros sur l'intervalle  $]t_0, t_1[$ , alors la fonction  $u$  devrait aussi s'y annuler, ce qui est contradictoire avec la définition de  $t_1$ .

**18.23** 1. Soit  $\varphi$  une solution de  $(E_0)$  telle que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

- *Première solution* On a  $\varphi'' = -f\varphi^2$  et donc  $\int_a^b \varphi(t)\varphi''(t) dt = -\int_a^b f\varphi^2(t) dt$ . En intégrant par parties, on a :

$$\int_a^b \varphi(t)\varphi''(t) dt = \underbrace{[\varphi(t)\varphi'(t)]_a^b}_{=0} - \int_a^b \varphi'^2(t) dt.$$

On obtient donc :

$$\int_a^b \varphi'^2(t) dt = \int_a^b f\varphi^2(t) dt.$$

On a  $\varphi'^2 \geq 0$  et  $f\varphi^2 \leq 0$ . On en déduit que  $\int_a^b \varphi'^2(t) dt = 0$ , puis que  $\varphi'^2 = 0$  et donc  $\varphi' = 0$ . La fonction  $\varphi$  est donc constante et comme  $\varphi(a) = 0$ , elle est nulle.

- *Deuxième solution* Si  $\varphi$  n'est pas la fonction nulle, les zéros de  $\varphi$  sont isolés donc on peut considérer le plus petit zéro  $c > a$  de  $\varphi$  (cf. exercice 18.22). La fonction  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $]a, c[$  donc elle y garde un signe constant. Quitte à considérer  $-\varphi$ , on peut supposer  $\varphi > 0$  sur  $]a, c[$ . On a  $\varphi'' = -f\varphi \geq 0$ . La fonction  $\varphi$  est donc convexe. Sa courbe est donc sous la sécante joignant les points d'abscisse  $a$  et  $b$ . On a donc  $\varphi \leq 0$ , ce qui donne une contradiction. Donc  $\varphi$  est nulle.

2. On fixe une base  $(\varphi_1, \varphi_2)$  de l'ensemble des solutions de l'équation homogène  $(E_0)$ . On choisit pour  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les solutions de  $(E_0)$  vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi_1(a) = 1 \\ \varphi'_1(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_2(a) = 0 \\ \varphi'_2(a) = 1 \end{cases}$$

Le wronskien de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  en  $a$  vaut 1 donc  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est bien une famille libre.

Si  $\varphi_P$  une solution particulière de  $(E)$ , toute solution de  $(E)$  s'écrit de manière unique

$$\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \varphi_P \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors  $\varphi(a) = \lambda_1 + \varphi_P(a)$  et  $\varphi(b) = \lambda_1\varphi_1(b) + \lambda_2\varphi_2(b) + \varphi_P(b)$ .

La condition  $\varphi(a) = 0$  équivaut à  $\lambda_1 = -\varphi_P(a)$ . La condition  $\varphi(b) = 0$  équivaut alors à :

$$\lambda_2\varphi_2(b) = -\lambda_1\varphi_1(b) - \varphi_P(b) = \varphi_P(a)\varphi_1(b) - \varphi_P(b).$$

Comme  $\varphi_2$  n'est pas la fonction nulle (en effet, on a  $\varphi'_2(a) = 1$ ), on a d'après la première question  $\varphi_2(b) \neq 0$ , car  $\varphi_2(a) = 0$ . On trouve un couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  unique et donc une solution  $\varphi$  unique telle que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

**18.24** 1. Soit  $M$  tel que  $|\varphi(t)| \leq M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$|\varphi''(t)| = |q(t)\varphi(t)| \leq M|q(t)|.$$

Comme  $q$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , il en est de même de  $\varphi''$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a  $\varphi'(t) = \varphi'(0) + \int_0^t \varphi''(s) ds$  donc  $\varphi'$  possède une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Si  $\ell \neq 0$ , alors  $\varphi'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$ , et comme  $\int_0^{+\infty} \ell ds$  diverge, on a, par intégration des relations d'équivalence :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi(s) ds \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ell t,$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

ce qui contredit le fait que  $\varphi$  est bornée. Ainsi  $\varphi'(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que toutes les solutions de (E) soient bornées. Soit  $(\varphi_1, \varphi_2)$  une base de solutions de (E). Comme il a été remarqué dans l'exemple 23 de la page 751, leur wronskien  $W$  est constant. Mais, par hypothèse,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont bornées, donc d'après la question 1,  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  ont pour limite 0 en  $+\infty$ . On en déduit que :

$$W(t) = \varphi_1(t)\varphi'_2(t) - \varphi'_1(t)\varphi_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Comme  $W$  est une fonction constante, c'est la fonction nulle. Mais cela contredit le fait que  $(\varphi_1, \varphi_2)$  une base de solutions de (E). Donc (E) possède des solutions non bornées.

- 18.25** • Supposons (ii) et montrons qu'il existe une base  $(f, g)$  de  $\mathcal{S}_0$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire.
- \* Remarquons que pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}_0$ , la fonction  $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi(-t)$  est également solution de (E). En effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\tilde{\varphi}'(t) = -\varphi'(-t) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}''(t) = \varphi''(-t),$$

donc, en utilisant l'imparité de  $a$  et la parité de  $b$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}''(t) + a(t)\tilde{\varphi}'(t) + b(t)\tilde{\varphi}(t) &= \varphi''(-t) - a(t)\varphi'(-t) + b(t)\varphi(-t) \\ &= \varphi''(-t) + a(-t)\varphi'(-t) + b(-t)\varphi(-t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- \* Si  $f$  est la solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(f(0), f'(0)) = (1, 0)$ , alors la fonction  $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$  appartient à  $\mathcal{S}_0$ , d'après le point précédent. Elle est solution du même problème de Cauchy que  $f$ , donc  $\tilde{f} = f$ , c'est-à-dire  $f$  est paire.
- \* De la même façon, si  $g$  est la solution de (E) vérifiant la condition initiale  $(g(0), g'(0)) = (0, 1)$ , alors la fonction  $\tilde{g} : t \mapsto -g(-t)$  appartient à  $\mathcal{S}_0$ . Elle est solution du même problème de Cauchy que  $g$ , donc  $\tilde{g} = g$ , c'est-à-dire  $g$  est impaire.
- \* La famille  $(f, g)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ , car le wronskien de  $(f, g)$  en 0 n'est pas nul (il vaut 1).

- Réciproquement, supposons qu'il existe une base  $(f, g)$  de  $\mathcal{S}_0$  avec  $f$  paire et  $g$  impaire. On a :

$$\begin{cases} af' + bf &= -f'' \\ ag' + bg &= -g''. \end{cases}$$

Le déterminant du système est l'opposé du wronskien de  $(f, g)$  qui ne s'annule pas. On a donc un système de Cramer et on obtient :

$$a = \frac{fg'' - f''g}{f'g - fg'} \quad \text{et} \quad b = \frac{f''g' - f'g''}{f'g - fg'}.$$

Comme  $f$  est paire et  $g$  impaire, les fonctions  $f''$  et  $g'$  sont paires, alors que  $g''$  et  $f'$  sont impaires. On en déduit immédiatement que  $a$  est impaire et  $b$  paire.

- 18.26** En notant :

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

l'équation (E) se traduit matriciellement par (EM) :  $X' = AX + B(t)$ .

L'existence d'une solution  $2\pi$ -périodique à (E) équivaut à l'existence d'une solution  $2\pi$ -périodique à (EM).

- Comme il a été remarqué dans l'exemple 3 de la page 735,  $A$  étant constante et  $B$  étant  $2\pi$ -périodique, une solution  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de (EM) est  $2\pi$ -périodique si, et seulement si,  $X(2\pi) = X(0)$ .
- On sait exprimer les solutions de (EM) :

$$X : t \mapsto \exp(tA) \left( X_0 + \int_0^t \exp(-sA)B(s)ds \right) \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{C}^4.$$

D'après le point précédent, une telle solution  $X$  est  $2\pi$ -périodique si, et seulement si,  $X(2\pi) = X(0)$ , ce qui s'écrit :

$$\exp(2\pi A) \left( X_0 + \int_0^{2\pi} \exp(-sA)B(s)ds \right) = X_0,$$

ou encore :

$$(\exp(2\pi A) - I_4) X_0 = - \exp(2\pi A) \int_0^{2\pi} \exp(-sA)B(s)ds.$$

- Justifions que la matrice  $\exp(2\pi A) - I_4$  est inversible ; cela prouvera l'existence (et l'unicité) de  $X_0 \in \mathbb{C}^4$  vérifiant la condition ci-dessus, et donc l'existence (et l'unicité) d'une solution  $2\pi$ -périodique.

Pour justifier que  $\exp(2\pi A) - I_4$  est inversible, il suffit de constater que, comme :

$$\text{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^4 + 1 = 0\},$$

on a :

$$i\mathbb{Z} \cap \text{sp}(A) = \emptyset, \quad \text{donc } 2i\pi\mathbb{Z} \cap \text{sp}(2\pi A) = \emptyset,$$

donc 1 n'est pas valeur propre de  $\exp(2\pi A)$  (cf. proposition 21 de la page 741).

**18.27** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction deux fois dérivable. Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction deux fois dérivable ne s'annulant pas, alors la fonction  $\psi = \frac{\varphi}{\alpha}$  est aussi deux fois dérivable et l'on a :

$$\varphi' = \alpha' \psi + \alpha \psi' \quad \text{et} \quad \varphi'' = \alpha'' \psi + 2\alpha' \psi' + \alpha \psi''.$$

On obtient alors que  $\varphi$  est solution de (E) si, et seulement si,  $\psi$  vérifie :

$$\alpha \psi'' + (2\alpha' + p\alpha) \psi' + (\alpha'' + p\alpha' + q\alpha) \psi = 0.$$

Choisissons alors pour  $\alpha$  une solution non nulle de l'équation d'ordre 1 :

$$y' + \frac{p(t)}{2} y = 0.$$

Une telle fonction  $\alpha$  ne s'annule pas sur  $I$  et, puisque  $p$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,  $\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ . Alors, les solutions  $\varphi$  de l'équation :

$$(E) : x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

sont toutes les fonctions  $\varphi = \alpha\psi$  où  $\psi$  est solution de l'équation :

$$z'' + r(t)z = 0 \quad \text{avec} \quad r = \frac{\alpha'' + p\alpha' + q\alpha}{\alpha}.$$

Comme  $p$  et  $q$  sont continues et  $\alpha$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , la fonction  $r$  est continue.

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

- 18.28** • L'équation (E) est une équation linéaire scalaire homogène d'ordre 2, à coefficients continus, et écrite sous forme normalisée, donc son ensemble  $\mathcal{S}$  de solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  s'écrivant, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a, après simplification :

$$f''(x) - xf(x) = 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n)x^{n+1}.$$

Par unicité du développement en série entière, une telle fonction  $f$  est donc solution de l'équation (E) si, et seulement si, la suite  $(a_n)$  vérifie :

$$a_2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0. \quad (\star)$$

On peut constater qu'une telle suite  $(a_n)$  est entièrement caractérisée par ses deux premiers termes  $a_0$  et  $a_1$  et que tous les termes de la forme  $a_{3n+2}$  sont nuls.

- Nous sommes alors en mesure d'expliciter deux solutions linéairement indépendantes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

- \* Considérons la suite  $(\alpha_n)$  définie par :

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+3} = \frac{\alpha_n}{(n+3)(n+2)}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{3n+1} = \alpha_{3n+2} = 0.$$

Posons, lorsque c'est possible :

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{3n} x^{3n}.$$

La relation de récurrence vérifiée par la suite  $(\alpha_n)$  donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$\left| \frac{\alpha_{3n+3} x^{3n+3}}{\alpha_{3n} x^{3n}} \right| = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La règle de d'Alembert assure alors que le rayon de convergence de la série entière  $\sum \alpha_{3n} t^{3n}$  vaut  $+\infty$ . La fonction  $\varphi_1$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}$ , et est donc une solution de (E) développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

- \* De la même manière, si l'on pose :

$$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+3} = \frac{\beta_n}{(n+3)(n+2)},$$

alors la fonction  $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{3n+1} x^{3n+1}$$

est une solution de (E) développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

- \* Comme  $(\varphi_1(0), \varphi'_1(0)) = (1, 0)$  et  $(\varphi_2(0), \varphi'_2(0)) = (0, 1)$ , les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont linéairement indépendantes, donc forment une base de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions.

**18.29** 1. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On a  $f(x) = \int_0^\pi h(x, \theta) d\theta$  avec :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \theta) &\longmapsto \cos(x \sin \theta). \end{aligned}$$

- Pour  $\theta \in [0, \pi]$ , la fonction  $x \mapsto h(x, \theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .  
Pour  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ , on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta) = -\sin(\theta) \sin(x \sin \theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \theta) = -\sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta).$$

- Pour  $x \in \mathbb{R}$ , les fonctions  $\theta \mapsto h(x, \theta)$ ,  $\theta \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, \theta)$  et  $\theta \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \theta)$  sont continues donc continues par morceaux sur le segment  $[0, \pi]$ , donc intégrables.
- *Hypothèse de domination.* Pour  $(x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ , on a :

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \theta) \right| \leq 1.$$

Puisque la fonction constante égale à 1 est intégrable sur  $[0, \pi]$ , cela fournit l'hypothèse de domination.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique : la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et l'on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = - \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta \quad \text{et} \quad f''(x) = - \int_0^\pi \sin^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  revient à montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -x(f(x) + f''(x)),$$

ce qui s'écrit :

$$- \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta = -x \int_0^\pi ((1 - \sin^2 \theta) \cos(x \sin \theta)) d\theta,$$

ou encore :

$$\int_0^\pi \sin(\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta = \int_0^\pi x \cos^2(\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta.$$

Cela s'obtient via une intégration par parties de la première intégrale, avec les fonctions  $\theta \mapsto -\cos(\theta)$  et  $\theta \mapsto \cos(x \sin \theta)$ , qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi]$ .

2. Sur  $]0, +\infty[$ , l'équation  $(E)$  se met sous forme normalisée. Étant une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, son ensemble solution  $S$  est un espace vectoriel de dimension 2. Par suite, la famille  $(f, g)$  est une base de  $S$  si, et seulement si, elle est libre.

- Puisque  $f$  est bornée au voisinage de 0 (car définie et continue sur  $\mathbb{R}$ ), si  $g$  ne l'est pas, alors la famille  $(f, g)$  est libre.
- Réciproquement, supposons la famille  $(f, g)$  libre et montrons que  $g$  n'est pas bornée au voisinage de 0. Par l'absurde : supposons  $g$  bornée au voisinage de 0. Introduisons le wronskien  $W = f'g - fg'$ . Puisque la famille  $(f, g)$  est libre, le wronskien  $W$  ne s'annule pas (cf. la proposition 34 de la page 751).

On a  $W' = f''g - fg''$ , ce qui donne, puisque  $f$  et  $g$  sont solutions de  $(E)$  :

$$\forall t \in ]0, +\infty[ \quad tW'(t) + W(t) = 0.$$

## Chapitre 18. Équations différentielles linéaires

Comme  $W$  n'est pas nul, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que :

$$\forall t > 0 \quad W(t) = \frac{\lambda}{t}.$$

Par hypothèse,  $g$  est bornée au voisinage de 0, et  $f'$  l'est aussi (car  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f'$  est de classe  $C^1$  donc continue), donc la fonction  $f'g$  est également bornée au voisinage de 0. Comme  $|W(t)| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty$ , on a :

$$f(t)g'(t) = f'(t)g(t) - W(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -W(t) = -\frac{\lambda}{t}.$$

De  $f(0) = \pi$ , on déduit  $g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\lambda}{\pi t}$ . La fonction  $g'$  est de signe constant au voisinage de 0 et n'est pas intégrable sur  $]0, 1[$  donc  $g(1) - g(x) = \int_x^1 g'(t) dt$  tend vers  $\pm\infty$  quand  $x$  tend vers 0, ce qui contredit le fait que  $g$  est bornée au voisinage de 0.

# Chapitre 19 : Calcul différentiel

<b>I</b>	<b>Différentiabilité d'une fonction en un point . . . . .</b>	<b>796</b>
1	Dérivée selon un vecteur . . . . .	796
2	Dérivées partielles . . . . .	797
3	Différentielle en un point . . . . .	798
4	Différentiabilité et dérivabilité . . . . .	801
5	Matrice jacobienne . . . . .	803
6	Gradient . . . . .	804
<b>II</b>	<b>Fonctions différentiables . . . . .</b>	<b>805</b>
1	Application différentielle . . . . .	805
2	Opérations sur les fonctions différentiables . . . . .	806
3	Application au calcul des dérivées partielles . . . . .	810
4	Déivation le long d'un arc . . . . .	811
5	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	813
<b>III</b>	<b>Vecteurs tangents à une partie . . . . .</b>	<b>815</b>
1	Vecteurs tangents . . . . .	815
2	Exemples d'espaces tangents . . . . .	816
3	Cas des ensembles définis par une équation . . . . .	818
<b>IV</b>	<b>Fonctions de classe <math>\mathcal{C}^k</math> . . . . .</b>	<b>821</b>
1	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	821
2	Théorème de Schwarz . . . . .	823
3	Hessienne – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 . . . . .	825
4	Exemples d'équations aux dérivées partielles . . . . .	826
<b>V</b>	<b>Optimisation . . . . .</b>	<b>829</b>
1	Extrema . . . . .	829
2	Conditions nécessaires d'extrema . . . . .	831
3	Utilisation de la compacité . . . . .	833
4	Condition suffisante d'extremum . . . . .	835
5	Optimisation sous contrainte . . . . .	836
	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>849</b>

# Calcul différentiel

19

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont réels, de dimension finie non nulle et munis de normes, notées en général  $\|\cdot\|$ . Sauf mention explicite du contraire, les fonctions considérées sont définies sur un ouvert non vide d'un tel espace vectoriel à valeurs dans un espace vectoriel.

Fixons donc deux espaces vectoriels de dimension finie  $E$  et  $F$  ainsi qu'un ouvert  $\Omega$  non vide de  $E$ .

## Remarques préliminaires

Lorsque l'on fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$ , on sait que l'application  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}^p$  par  $\Phi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i e_i$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^p$  sur  $E$ .

Si  $A$  est une partie non vide de  $E$ , à toute application  $f : A \rightarrow F$  on peut associer une application  $f_{\mathcal{B}}$  définie sur  $\Phi^{-1}(A)$  par :

$$f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = f\left(\sum_{i=1}^p x_i e_i\right).$$

Il est clair que  $f \mapsto f_{\mathcal{B}}$  définit une bijection de  $\mathcal{F}(A, F)$  sur  $\mathcal{F}(\Phi^{-1}(A), F)$ , ce qui permet, pour l'étude d'une fonction définie sur une partie de  $E$ , de se ramener à une fonction définie sur une partie de  $\mathbb{R}^p$ ; on parle alors de **fonction de plusieurs variables**.

## I Différentiabilité d'une fonction en un point

### 1 Dérivée selon un vecteur

Rappelons que  $\Omega$  désigne un *ouvert* non vide de  $E$ .

#### Définition 1

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une application,  $a \in \Omega$  et  $v \in E$ . La **dérivée de  $f$  en  $a$  selon  $v$** , notée  $D_v f(a)$ , est, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction  $t \mapsto f(a + tv)$ .

**Remarques**

- L'ensemble  $\Omega$  étant ouvert, pour tout  $a \in \Omega$  la fonction  $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$  est définie sur un voisinage de 0. Plus précisément, la fonction  $\varphi$  est définie :
  - \* en tout point de  $]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}[$  si  $v \neq 0$ , où  $r > 0$  est tel que  $B_O(a, r) \subset \Omega$ ,
  - \* sur  $\mathbb{R}$  si  $v = 0$  et elle est alors constante, ce qui donne  $D_0f(a) = 0$ .
- Si  $E = \mathbb{R}$  et  $\Omega$  est un intervalle ouvert, et si  $v \neq 0$ , alors  $D_vf(a)$  est définie en  $a \in \Omega$  si, et seulement si, la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , et dans ce cas, on a  $D_vf(a) = vf'(a)$ .

**Ex. 1.** Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = xy^2$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $D_{(a,b)}f(1, 1) = a + 2b$ , puisque, au voisinage de 0 :

$$f((1, 1) + t(a, b)) = (1 + ta)(1 + tb)^2 = (1 + ta)(1 + 2tb + t^2b^2) = 1 + t(a + 2b) + o(t)$$

(lien entre dérivabilité et existence d'un développement limité à l'ordre 1 pour une fonction d'une variable réelle).

**Ex. 2.** Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} M & \mapsto & M^2. \end{array}$$

Pour  $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ , on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$f(M + tH) = M^2 + t(MH + HM) + t^2H^2.$$

Il s'ensuit que  $D_Hf(M)$  est définie et  $D_Hf(M) = MH + HM$ .

**Ex. 3.** Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , pour tout  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $D_H \exp(0) = H$ . En effet, on sait que l'application  $g : t \mapsto \exp(tH)$  est dérivable et  $g'(t) = H \exp(tH)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On conclut en remarquant que  $\exp(0) = I_n$ .

**Attention** L'existence de dérivées en  $a$  selon tout vecteur n'est pas une bonne condition de régularité en  $a$  de la fonction. Par exemple, une fonction peut avoir des dérivées en  $a$  selon tout vecteur sans pour autant être continue en  $a$ .

## 2 Dérivées partielles

### Définition 2

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $F$ .

Pour  $a \in \Omega$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la  **$j$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $a$  dans la base  $\mathcal{B}$** , notée :

$$\partial_j f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

est, lorsqu'elle existe, la dérivée de  $f$  en  $a$  selon le vecteur  $e_j$ .

**Remarques**

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on parle plus simplement de «  $j$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $a$  ».

## Chapitre 19. Calcul différentiel

- **Cas des fonctions de plusieurs variables.** Avec les notations précédentes, si  $E = \mathbb{R}^p$ , alors la  $j$ -ème application partielle de  $f$  est la fonction de la variable réelle :

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p).$$

Dans ce contexte, la  $j$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $a$  dans la base canonique est définie si, et seulement si, la  $j$ -ème application partielle est dérivable en  $a_j$  ;  $\partial_j f(a)$  est alors la dérivée en  $a_j$  de cette  $j$ -ème application partielle de  $f$ , puisque  $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_p)$  est dérivable en  $a_j$  si, et seulement si,  $s \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + s, a_{j+1}, \dots, a_p)$  est dérivable en 0, leurs dérivées étant alors égales.

Sauf mention expresse, lorsque l'on parle de dérivées partielles pour une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , il est sous-entendu que c'est par rapport à la base canonique.

- Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $a = \sum_{i=1}^p a_i e_i \in \Omega$ , alors  $\partial_j f(a)$  est définie si, et seulement si,  $\partial_j f_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p)$  l'est et elles sont alors égales.
- Si  $f : \Omega \rightarrow F$  est définie par une expression où les variables sont notées  $u_1, \dots, u_p$ , on notera  $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_p}$  ses dérivées partielles.
- En particulier, lorsque  $E = \mathbb{R}^2$  ou  $E = \mathbb{R}^3$ , on a l'habitude de noter  $(x, y)$  ou  $(x, y, z)$  les variables. Les dérivées partielles seront donc traditionnellement notées  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ , et éventuellement  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

### 3 Différentielle en un point

Soit  $\varphi : \Omega' \rightarrow F$ , où  $\Omega'$  est un ouvert de  $E$  contenant 0.

#### Notations o et O

- Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on écrit  $\varphi(h) = o(\|h\|^k)$  (sous-entendu au voisinage de 0) lorsqu'il existe une fonction  $\varepsilon : \Omega' \rightarrow F$ , tendant vers 0 en 0, telle que :

$$\forall h \in \Omega' \quad \varphi(h) = \|h\|^k \varepsilon(h).$$

- De même, on écrit  $\varphi(h) = O(\|h\|^k)$  s'il existe une fonction  $\alpha : \Omega' \rightarrow F$ , bornée au voisinage de 0, telle que :

$$\forall h \in \Omega' \quad \varphi(h) = \|h\|^k \alpha(h).$$

- Dans la pratique, on utilisera surtout ces notations avec  $k = 1$  et l'on simplifiera alors les écritures  $o(\|h\|)$  et  $O(\|h\|)$  en  $o(h)$  et  $O(h)$ .

#### Remarques

- Si  $\varphi(h) = O(\|h\|^2)$ , alors  $\varphi(h) = o(h)$ .
- Pour  $k = 0$ , on retrouve la signification habituelle :  $\varphi(h) = o(1)$  si, et seulement si, la fonction  $\varphi$  tend vers 0 en 0 et  $\varphi(h) = O(1)$  si, et seulement si,  $\varphi$  est bornée au voisinage de 0.

- De la même façon que pour les fonctions d'une variable réelle, on se permettra d'écrire des relations du type  $f(h) = g(h) + o(h)$  ou  $f(h) = g(h) + o(\|h\|^2)$  pour signifier respectivement  $f(h) - g(h) = o(h)$  ou  $f(h) - g(h) = o(\|h\|^2)$ .

## Développement limité à l'ordre 1

### Définition 3

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $a \in \Omega$ . On dit que  $f$  est **differentiable en  $a$** , ou que  $f$  admet un **développement limité** à l'ordre 1 en  $a$ , s'il existe  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + u(h) + o(h).$$

**Reformulation** Cela revient à dire qu'il existe une fonction  $\varepsilon$  tendant vers 0 en 0 telle que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

### Proposition 1 (Différentiabilité et continuité)

Une application  $f : \Omega \rightarrow F$  différentiable en  $a \in \Omega$  est continue en  $a$ .

**Démonstration.** Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f(a + h) - f(a) = u(h) + o(h)$ , où  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Comme  $E$  est de dimension finie,  $u$  est continue et donc  $\lim_{h \rightarrow 0} u(h) = 0$ . La continuité de  $f$  en  $a$  en découle.  $\square$

## Différentielle

### Théorème 2 (Différentielle en un point)

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  différentiable en  $a \in \Omega$ . Il existe alors une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que l'on ait  $f(a + h) = f(a) + u(h) + o(h)$  au voisinage de 0. Elle est appelée la **différentielle de  $f$  en  $a$**  et notée  $df(a)$ .

Démonstration page 839

**Terminologie** La différentielle de  $f$  en  $a$  est également appelée **application linéaire tangente à  $f$  en  $a$** .

### Notation

- La valeur en  $h \in E$  de la différentielle de  $f$  en  $a$  se note  $df(a) \cdot h$  pour alléger l'écriture de l'expression parenthésée  $df(a)(h)$ .
- Le développement limité de  $f$  en  $a$  à l'ordre 1 s'écrit donc :

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h).$$

**Point méthode** Pour montrer que  $f$  est différentiable en  $a$ , on peut chercher une application linéaire  $u$  telle que  $f(a + h) - f(a) - u(h) = o(h)$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 4.** Si  $E$  est un espace euclidien, alors  $f : x \mapsto \|x\|^2$  est différentiable en tout point de  $E$ . En effet,  $E$  est un ouvert et pour tout  $(x, h) \in E^2$  :

$$f(x + h) = f(x) + 2(x | h) + \|h\|^2.$$

Ainsi, au voisinage de 0, on a  $f(x + h) = f(x) + 2(x | h) + o(h)$ . L'application  $u : h \mapsto (x | h)$  étant linéaire, il s'ensuit que  $f$  est différentiable en  $x$  et que  $df(x) : h \mapsto 2(x | h)$ .

**Ex. 5.** Montrons que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

est différentiable en  $(0, 0)$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Puisque  $x^4 + y^4 \leq x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$ , on a :

$$0 \leq f(x, y) \leq x^2 + y^2.$$

Cette dernière inégalité est encore vérifiée lorsque  $(x, y) = (0, 0)$ .

Par conséquent, on a  $f(x, y) = O(\|(x, y)\|_2^2)$  au voisinage de 0, donc :

$$f(x, y) = f(0) + o((x, y)).$$

Par suite,  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  et  $df(0, 0)$  est l'application nulle.

### Proposition 3 (Cas particulier des fonctions d'une seule variable)

Supposons que  $\Omega$  soit un intervalle ouvert de  $E = \mathbb{R}$ .

Une application  $f : \Omega \rightarrow F$  est différentiable en  $a \in \Omega$  si, et seulement si,  $f$  est dérivable en  $a$  et alors  $df(a)$  est l'application linéaire  $h \mapsto hf'(a)$ .

En particulier  $f'(a) = df(a) \cdot 1$ .

Démonstration page 839

**Principe de démonstration.** Remarquer que les applications linéaires de  $\mathbb{R}$  dans  $F$  sont les applications de la forme  $t \mapsto tu$ , avec  $u \in F$ .

### Quelques exemples fondamentaux

**Ex. 6. Différentielle d'une application constante**

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction constante et  $a \in \Omega$ .

Pour tout  $h \in E$  tel que  $a + h \in \Omega$ , on a  $f(a + h) = f(a)$  et donc au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) = f(a) + o(h).$$

Il s'ensuit, l'application nulle étant linéaire, que  $f$  est différentiable en  $a$  et que  $df(a) = 0$ .

**Remarque** La réciproque est fausse : une application peut être différentiable en tout point avec une différentielle nulle, sans pour autant être constante, comme le montre l'exemple de la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

**Proposition 4 (Différentielle d'une application linéaire)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

En tout  $a \in \Omega$ , l'application  $f : \Omega \rightarrow F$  est différentiable et  $df(a) = u$ .

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

Démonstration page 839.

**Ex. 7.** Si  $E$  est euclidien et  $v \in E$ , l'application  $u$  définie sur  $E$  par  $f(x) = (v | x)$  est linéaire donc différentiable en tout  $a \in E$  et, pour tout  $h \in E$ , on a  $df(a) \cdot h = (v | h)$ .

## 4 Différentiabilité et dérivabilité

### Dérivée selon un vecteur

**Proposition 5**

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ . Alors la dérivée de  $f$  en  $a$  selon tout vecteur  $v \in E$  existe et :

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$

Démonstration page 839.

**Principe de démonstration.** Remplacer  $h$  par  $tv$  dans la relation :

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h).$$

**Remarque** Si  $f$  est différentiable en  $a$ , sa différentielle est  $v \mapsto D_v f(a)$  qui est donc une application linéaire.

**Point méthode** Une application  $f : \Omega \rightarrow F$  n'est pas différentiable en  $a$  :

- s'il elle n'admet pas de dérivée selon tout vecteur en  $a$ ,
- si elle en admet, mais que l'application  $u : h \mapsto D_h f(a)$  n'est pas linéaire ou ne vérifie pas  $f(a + h) - f(a) - u(h) = o(h)$ .

**Ex. 8.** Une norme sur  $E$  n'est jamais différentiable en 0.

En effet, supposons qu'une norme  $N$  sur  $E$  soit différentiable en 0. Alors, pour tout  $h \in E$ , l'application  $g_h : t \mapsto N(th)$  est dérivable en 0. Cependant,  $g_h(t) = |t|N(h)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  ; cette expression montre que  $g_h$  n'est pas dérivable en 0 lorsque  $h \neq 0$ .

**Ex. 9.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ . Pour le voir, étudions l'existence de  $D_{(h,k)} f(0, 0)$ .

Soit  $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ , on a  $f(th, tk) = t \frac{h^3 + k^3}{h^2 + k^2}$ .

On en déduit que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon  $(h, k)$  et que :

$$D_{(h,k)} f(0, 0) = \frac{h^3 + k^3}{h^2 + k^2}.$$

On constate que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ , car l'application  $u : (h, k) \mapsto D_{(h,k)} f(0, 0)$  n'est pas linéaire : par exemple, on a  $u(1, 0) = u(0, 1) = 1$  et  $u(1, 1) = 1$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

### Dérivées partielles

#### Corollaire 6

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$ .

Si  $f$  est différentiable en  $a \in \Omega$ , alors, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , la dérivée partielle  $\partial_j f(a)$  est définie et  $\partial_j f(a) = df(a) \cdot e_j$ .

On déduit de ce qui précède une expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.

#### Corollaire 7

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Si  $f : \Omega \rightarrow F$  est une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ , alors, pour tout  $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$ , on a :

$$df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a).$$

**Démonstration.** Par linéarité de  $df(a)$ , pour tout  $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$ , on a :

$$df(a) \cdot h = df(a) \cdot \left( \sum_{j=1}^p h_j e_j \right) = \sum_{j=1}^p h_j df(a) \cdot e_j,$$

donc, d'après le corollaire 6, on obtient :

$$df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a). \quad \square$$

**Point méthode** Pour étudier si une fonction  $f : \Omega \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , on peut vérifier l'existence de toutes ses dérivées partielles en  $a$ , puis voir si l'application linéaire  $u : h \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a)$  vérifie  $f(a + h) - f(a) - u(h) = o(h)$ .

**Ex. 10.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f(t, 0) = t$ , et  $t \mapsto t$  est dérivable en 0, de dérivée 1, donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ .
- De même, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $f(0, t) = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Si  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ , sa différentielle ne peut donc être que l'application linéaire :

$$(h, k) \mapsto 1 \times h + 0 \times k = h.$$

Étudions donc  $\Delta(h, k) = f(h, k) - h$  pour  $(h, k) \neq (0, 0)$  au voisinage de  $(0, 0)$  :

$$\Delta(h, k) = \frac{h^3}{h^2+k^4} - h = -\frac{hk^4}{h^2+k^4}.$$

Or, l'inégalité classique  $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$  donne  $|hk^2| \leq \frac{h^2+k^4}{2}$ , donc :

$$|\Delta(h, k)| \leq \frac{k^2}{2} \leq \frac{h^2 + k^4}{2} = o(h, k).$$

Donc  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  et l'on a  $df(0, 0) : (h, k) \mapsto h$ .

## 5 Matrice jacobienne

Posons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une base de  $F$ .

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction différentiable en  $a \in \Omega$  ; notons  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On sait qu'une fonction de la variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie est dérivable si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées sont dérивables (cf. proposition 3 de la page 339). Ainsi, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , puisque  $\partial_j f(a)$  est définie, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les dérivées partielles  $\partial_j f_i(a)$  sont définies et  $\partial_j f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_j f_i(a) e'_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e'_i$ .

### Proposition 8

Avec les hypothèses précédentes, la matrice de  $df(a)$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est :

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

**Démonstration.** Il suffit de remarquer que pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$df(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) e'_i.$$

□

**Terminologie, notation** Lorsque  $E = \mathbb{R}^p$  et  $F = \mathbb{R}^n$ , la matrice de  $df(a)$  dans les bases canoniques est appelée **matrice jacobienne de  $f$  en  $a$** , et notée  $J_f(a)$ .

**Ex. 11.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(u, v) = e^u \cos v \\ f_2(u, v) = e^u \sin v \\ f_3(u, v) = v \end{pmatrix}$ .

Nous verrons plus loin comment démontrer que cette application est différentiable en tout point  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Sa matrice jacobienne est alors :

$$J_f(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ex. 12.** La matrice jacobienne d'une application linéaire  $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est, en tout point de  $\mathbb{R}^p$ , la matrice de  $u$  dans les bases canoniques.

## 6 Gradient

Dans cette section,  $E$  est un espace euclidien et  $F = \mathbb{R}$ .

Rappelons (cf. théorème 1 de la page 158) que pour toute forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$ , il existe un unique  $v \in E$  tel que :

$$\forall h \in E \quad \varphi(h) = (v | h).$$

Donc, si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a \in \Omega$ , il existe un unique  $v \in E$  tel que :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = (v | h).$$

Cela conduit à la définition suivante.

### Définition 4

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ . Le **gradient de  $f$  en  $a$** , noté  $\nabla f(a)$ , est l'unique vecteur de  $E$  vérifiant :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h).$$

**Notation** On trouve aussi la notation  $\text{grad } f(a)$  pour désigner ce gradient.

### Proposition 9 (Composantes du gradient en base orthonormée)

On suppose  $E$  muni d'une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ . Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ , alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j.$$

Démonstration page 840

### Corollaire 10

On munit  $E = \mathbb{R}^p$  du produit scalaire canonique. Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ , alors :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_p f(a) \end{pmatrix} = (J_f)^T.$$

### Première interprétation géométrique du gradient

De manière informelle, le gradient donne la direction de « variation maximale » de  $f$ . Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

### Proposition 11

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $a \in \Omega$ . La restriction à la sphère unité de la fonction  $h \mapsto D_h f(a)$  admet un maximum qui est atteint, si  $\nabla f(a) \neq 0$ , en l'unique vecteur unitaire positivement colinéaire à  $\nabla f(a)$ .

Démonstration page 840

### Principe de démonstration.

Utiliser l'expression  $df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Interprétation topographique** Supposons que le relief d'une montagne soit représenté par le graphe d'une fonction  $f$  de deux variables différentiable en tout point : l'altitude d'un point de coordonnées horizontales  $(x, y)$  est  $z = f(x, y)$ . En tout point, le gradient de  $f$  indique la direction dans laquelle la pente sera la plus grande (c'est la direction de ce que l'on appelle la « ligne de plus grande pente »).

## II Fonctions différentiables

### 1 Application différentielle

#### Définition 5

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$ .

- La fonction  $f$  est **differentiable** si elle est différentiable en tout point de  $\Omega$ . La **differentielle de  $f$**  est alors l'application :

$$\begin{aligned} df : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto df(x). \end{aligned}$$

- La fonction  $f$  est de **classe  $C^1$**  si elle est différentiable et si l'application  $df$  est continue.

**Notation** L'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  de  $\Omega$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$ .

#### Remarques

- Comme toute application différentiable en un point  $a$  est continue en  $a$ , on a l'inclusion  $\mathcal{C}^1(\Omega, F) \subset \mathcal{C}(\Omega, F)$ .
- Dans le cas où  $E = \mathbb{R}$  et  $\Omega$  est un intervalle ouvert, la proposition 3 de la page 800 donne que la définition précédente de la classe  $C^1$  coïncide avec celle donnée au chapitre 8.

**Ex. 13.** Une application constante admet une différentielle nulle en tout point. Elle est donc différentiable, et même de classe  $C^1$  puisque l'application nulle de  $\Omega$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  est continue.

**Ex. 14.** De même, toute application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est différentiable et sa différentielle est l'application *constante*  $x \mapsto u$ . Par continuité d'une application constante,  $u$  est donc de classe  $C^1$ .

#### Notation différentielle

Cette notation est hors programme, mais elle est omniprésente en physique, en sciences de l'ingénieur, etc.

On suppose  $E$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application  $\sum_{j=1}^p x_j e_j \mapsto x_j$  est linéaire, donc différentiable et égale à sa différentielle en tout point, ce qui mène à la noter  $dx_j$  (différentielle de l'application  $x \mapsto x_j$ ).

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable, alors pour tout  $a \in \Omega$ , la relation :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j,$$

peut se récrire :

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j \quad \text{ou encore, en oubliant } a \quad df = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

**Ex. 15.** Si  $f(x, y) = x^2y - y^3$ , on a  $df(x, y) = 2xy \, dx + (x^2 - 3y^2) \, dy$ .

## 2 Opérations sur les fonctions différentiables

### Combinaisons linéaires

#### Proposition 12 (Linéarité)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\Omega$  dans  $F$  ainsi que  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels.

- Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in \Omega$ , alors l'application  $\lambda f + \mu g$  est différentiable en  $a$  et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

- Si  $f$  et  $g$  sont différentiables (respectivement de classe  $C^1$ ), alors l'application  $\lambda f + \mu g$  est différentiable (respectivement de classe  $C^1$ ) et :

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg.$$

Démonstration page 840

#### Corollaire 13

L'ensemble  $C^1(\Omega, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\Omega, F)$ .

### Différentielles et applications multilinéaires

Soit  $F_1, \dots, F_q, G$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit  $f_1 : \Omega \rightarrow F_1, \dots, f_q : \Omega \rightarrow F_q$  des fonctions et  $M : F_1 \times \dots \times F_q \rightarrow G$  une application multilinéaire. On note :

$$\begin{aligned} M(f_1, \dots, f_q) : \Omega &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto M(f_1(x), \dots, f_q(x)). \end{aligned}$$

#### Proposition 14

- Si  $f_1, \dots, f_q$  sont différentiables en  $a \in \Omega$ , alors l'application  $g = M(f_1, \dots, f_q)$  est différentiable en  $a$  et pour tout  $h \in E$  :

$$dg(a) \cdot h = \sum_{k=1}^q M(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), \underbrace{df_k(a) \cdot h}_{k\text{-ième place}}, f_{k+1}(a), \dots, f_q(a)).$$

- Si  $f_1, \dots, f_q$  sont différentiables (respectivement de classe  $C^1$ ), alors  $M(f_1, \dots, f_q)$  est différentiable (respectivement de classe  $C^1$ ).

Démonstration page 840

**Ex. 16.** Si  $f_1, \dots, f_q$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , le produit  $f_1 \cdots f_q$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  et, pour tout  $a \in \Omega$  :

$$d(f_1 \cdots f_q)(a) = \sum_{k=1}^q f_1(a) \cdots f_{k-1}(a) f_{k+1}(a) \cdots f_q(a) df_k(a).$$

Si  $E$  est euclidien, cela peut se réécrire :

$$\nabla(f_1 \cdots f_q)(a) = \sum_{k=1}^q f_1(a) \cdots f_{k-1}(a) f_{k+1}(a) \cdots f_q(a) \nabla f_k(a).$$

Lorsque  $q = 2$ , on obtient :

### Corollaire 15

Soit  $B : F_1 \times F_2 \rightarrow G$  bilinéaire, ainsi que  $f_1 : \Omega \rightarrow F_1$  et  $f_2 : \Omega \rightarrow F_2$ .

- Si  $f_1$  et  $f_2$  sont différentiables en  $a \in \Omega$ , alors  $B(f_1, f_2)$  est différentiable en  $a$  et :
- $$d(B(f_1, f_2))(a) \cdot h = B(df_1(a) \cdot h, f_2(a)) + B(f_1(a), df_2(a) \cdot h).$$
- Si  $f_1$  et  $f_2$  sont différentiables (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ), alors  $B(f_1, f_2)$  est différentiable (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

### Ex. 17. Produit de deux fonctions réelles

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  différentiables en  $a$ , alors  $fg$  est différentiable en  $a$  et :

$$d(fg)(a) = g(a) df(a) + f(a) dg(a).$$

**Ex. 18.** Supposons que  $F$  soit un espace euclidien. Si  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $g : \Omega \rightarrow F$  sont deux applications différentiables en  $a \in \Omega$ , alors  $\varphi = (f | g)$  est différentiable en  $a$  et :

$$\forall h \in E \quad d\varphi(a) \cdot h = (df(a) \cdot h | g(a)) + (f(a) | dg(a) \cdot h).$$

En particulier :

$$\forall h \in E \quad d(\|f\|^2)(a) \cdot h = 2(f(a) | df(a) \cdot h).$$

### Remarques

- L'ensemble  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  est muni d'une structure d'algèbre pour les lois usuelles.
- Plus généralement, si  $F$  est une algèbre, alors  $\mathcal{C}^1(\Omega, F)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(\Omega, F)$ .

### Proposition 16

Les applications polynomiales sur  $E$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Démonstration.** Tout application polynomiale s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de formes coordonnées dans une base, qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  puisque linéaires.  $\square$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 19.** L'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$  est de classe  $C^1$ , car polynomiale.

Un calcul direct donne pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 + yz \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 + xz \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 + xy.$$

L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$$\forall (h, k, \ell) \in \mathbb{R}^3 \quad df(x, y, z) \cdot (h, k, \ell) = (3x^2 + yz)h + (3y^2 + xz)k + (3z^2 + xy)\ell.$$

Exo  
19.3

**Ex. 20.** L'application  $\det$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de classe  $C^1$ , car polynomiale.

### Composition

#### Proposition 17 (Différentielle d'une composée)

Soit  $\Omega'$  un ouvert de  $F$ , ainsi que  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $g : \Omega' \rightarrow G$  telles que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ .

- Si  $f$  est différentiable en  $a \in \Omega$  et si  $g$  est différentiable en  $b = f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a).$$

- Si  $f$  est différentiable (respectivement de classe  $C^1$ ) et  $g$  différentiable (respectivement de classe  $C^1$ ), alors  $g \circ f$  est différentiable (respectivement de classe  $C^1$ ).

Démonstration page 841

**Terminologie** Ce résultat, ainsi surtout que sa conséquence pratique sur les dérivées partielles d'une composée, donnée par la proposition 19 de la page 810, s'appelle aussi la **règle de la chaîne**.

**Ex. 21.** On suppose que  $F$  est un espace euclidien.

- La fonction  $\psi : x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$  est de classe  $C^1$  sur  $F \setminus \{0\}$ .

En effet, d'après l'exemple 4 de la page 800, la fonction  $\varphi : x \mapsto (x | x)$  est différentiable sur  $F$  et  $d\varphi(x) : h \mapsto 2(x | h)$ .

La fonction  $r : t \mapsto \sqrt{t}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $dr(t) : k \mapsto \frac{k}{2\sqrt{t}}$ .

Par conséquent, par composition, la fonction  $\psi$  est différentiable sur  $F \setminus \{0\}$  et :

$$d\psi(x) : h \mapsto \frac{(x | h)}{\|x\|}.$$

- Si  $f : \Omega \rightarrow F$  est une fonction différentiable en  $a \in \Omega$  telle que  $f(a) \neq 0$ , alors  $\|f\| = \psi \circ f$  est différentiable en  $a$  et :

$$d(\|f\|)(a) \cdot h = \frac{(f(a) | df(a) \cdot h)}{\|f(a)\|}.$$

**Ex. 22. Composition par une application linéaire**

Soit  $L \in \mathcal{L}(F, G)$  et  $f : \Omega \rightarrow F$ . D'après la proposition 4 de la page 801, l'application linéaire  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\forall b \in F \quad dL(b) = L$ . Donc, d'après la proposition 17 de la page précédente :

- si  $f$  est différentiable en  $a \in \Omega$ , alors  $L \circ f$  est différentiable en  $a$  et  $d(L \circ f)(a) = L \circ df(a)$ ,
- si  $f$  est différentiable (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ), alors  $L \circ f$  est différentiable (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

**Notation** La fonction  $L \circ f$  se note également  $L(f)$  ou  $Lf$ .

**Ex. 23. Utilisation des fonctions composantes**

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une base de  $F$  et  $f : \Omega \rightarrow F$ .

La fonction  $f$  est différentiable en  $a \in \Omega$  si, et seulement si, toutes ses applications composantes  $f_1, \dots, f_n$  dans  $\mathcal{B}'$  sont différentiables en  $a$  et l'on a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad df(a)_i = df_i(a).$$

En effet :

- si  $f$  est différentiable en  $a$ , chaque fonction  $f_i$  également grâce à la relation  $f_i = p_i \circ f$ , où  $p_i$  est l'application linéaire  $F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n x_i e'_i \mapsto x_i,$$

- si les  $f_i$  sont différentiables en  $a$ , alors  $f$  aussi grâce à l'égalité  $f = \sum_{i=1}^n q_i \circ f_i$  où les applications linéaires  $q_i$  sont définies par  $q_i : \mathbb{R} \longrightarrow F$   
 $t \mapsto t e'_i$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est différentiable (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ) si, et seulement si, toutes les applications composantes sont différentiables (respectivement de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

**Ex. 24. Inverse**

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction ne s'annulant pas et différentiable en  $a \in \Omega$ .

Alors  $\frac{1}{f}$  est différentiable en  $a$  et :

$$d\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{df(a)}{f^2(a)}.$$

En effet, la fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^*$  et  $d\varphi(t) \cdot k = -\frac{k}{t^2}$  pour tout  $(t, k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ . Par composition,  $\frac{1}{f}$  est donc différentiable en  $a$  et :

$$d\left(\frac{1}{f}\right)(a) \cdot h = -\frac{df(a) \cdot h}{f^2(a)}.$$

Les fonctions polynomiales étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , on déduit de l'exemple précédent :

**Proposition 18**

Toute fonction rationnelle définie sur  $\Omega$ , c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Exo  
19.4

**Ex. 25.** Rappelons que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car c'est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}^*$  par l'application déterminant, continue puisque polynomiale.

La formule  $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \text{Com}(M)^T$  montre que les  $n^2$  applications composantes (dans la base canonique) de l'application  $M \mapsto M^{-1}$  sont rationnelles, donc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Il s'ensuit que l'application  $M \mapsto M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### 3 Application au calcul des dérivées partielles

Soit  $\Omega'$  un ouvert de  $F$ , ainsi que  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $g : \Omega' \rightarrow G$  telles que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ .

On note :

- $(x_1, \dots, x_p)$  les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$  et donc  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  les dérivées partielles de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ , lorsqu'elles existent,
- $(y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$  et donc  $\frac{\partial g}{\partial y_i}$  les dérivées partielles de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , lorsqu'elles existent.

**Proposition 19 (Règle de la chaîne)**

On suppose  $f$  différentiable en  $a \in \Omega$  et  $g$  différentiable en  $b = f(a)$ .

En notant  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions composantes de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  on a, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_i}(b).$$

Démonstration page 842.

#### Principe de démonstration.

Utiliser la traduction matricielle de l'égalité  $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$ .

**Remarque** Dans le cas où  $g$  est à valeurs réelles, les  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$  et  $\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)$  sont des réels. On peut alors réécrire la formule précédente dans un ordre « plus naturel » :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).$$

**Ex. 26.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Calculons les dérivées partielles de la fonction  $g : (x, y) \mapsto f(x+y, xy)$  en fonction de celles de  $f$ .

Les applications polynomiales  $u : (x, y) \mapsto x+y$  et  $v : (x, y) \mapsto xy$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , donc différentiables. D'après la règle de la chaîne, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, xy) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, xy) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, xy) + y \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, xy) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, xy) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, xy) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, xy) + x \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, xy). \end{aligned}$$

**Corollaire 20 (Matrice jacobienne d'une composée)**

Avec les mêmes notations que dans la proposition précédente, si  $E = \mathbb{R}^p$ ,  $F = \mathbb{R}^n$  et  $G = \mathbb{R}^q$ , on a :

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(b) \times J_f(a).$$

**4 Dérivation le long d'un arc****Proposition 21**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide, ainsi que  $\gamma : I \rightarrow \Omega$  et  $f : \Omega \rightarrow F$ .

Si  $\gamma$  est dérivable en  $t_0 \in I$  et si  $f$  est différentiable en  $a = \gamma(t_0)$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable en  $t_0$  avec :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = df(a) \cdot \gamma'(t_0).$$

Démonstration page 843.

**Démonstration en un point intérieur à  $I$ .** Lorsque  $I$  est un intervalle ouvert, c'est une conséquence du théorème de différentiabilité d'une composée (proposition 17 de la page 808). En effet, on obtient ainsi la différentiabilité, donc la dérivabilité, en  $t_0$  de  $f \circ \gamma$ , avec  $d(f \circ \gamma)(t_0) = df(a) \circ d\gamma(t_0)$ .

En se rappelant que, pour une fonction différentiable d'une variable, la différentielle est la multiplication par la dérivée, cela donne :

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = d(f \circ \gamma)(t_0) \cdot 1 = df(a) \cdot (d\gamma(t_0) \cdot 1) = df(a) \cdot (\gamma'(t_0)) = df(a) \cdot \gamma'(t_0).$$

Lorsque  $t_0$  est un point intérieur à  $I$ , on applique ce qui précède à la restriction de  $\gamma$  à l'intérieur de  $I$ . Pour le cas général, voir la démonstration à la page 843.  $\square$

**Ex. 27. Cas particulier fondamental** Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction différentiable et  $h \in E$ .

La fonction  $t \mapsto f(a + th)$  est dérivable et l'on a :

$$\frac{d}{dt} f(a + th) = df(a + th) \cdot h.$$

En effet, en posant  $\gamma : t \mapsto a + th$ , la fonction  $f \circ \gamma$  est définie sur l'ouvert  $\gamma^{-1}(\Omega)$  de  $\mathbb{R}$  et il suffit d'appliquer la proposition 21 sur tout intervalle contenu dans cet ouvert.

**Corollaire 22**

On suppose  $E = \mathbb{R}^p$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

Si  $\gamma : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$  est une fonction dérivable sur  $I$  et à valeurs dans  $\Omega$ , et  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction différentiable sur  $\Omega$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \sum_{j=1}^p x'_j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_p(t)).$$

**Démonstration.** C'est une reformulation de la proposition 21 utilisant l'expression de la différentielle donnée au corollaire 7 de la page 802.  $\square$

**Ex. 28.** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable, on a :

$$\frac{d}{dt} (f(t + t^3, 1 - t^2)) = (1 + 3t^2) \frac{\partial f}{\partial x}(t + t^3, 1 - t^2) - 2t \frac{\partial f}{\partial y}(t + t^3, 1 - t^2).$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 29.** Considérons une quantité physique qui dépend du temps et de l'espace. Cela peut être modélisé en introduisant une fonction  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow F$

$$(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t).$$

La position dans l'espace d'un point matériel au cours du temps est donnée par une fonction  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ . Posons  $h : t \mapsto f(x(t), y(t), z(t), t)$ . Si  $f$  est différentiable et  $\gamma$  dérivable, alors la fonction  $h$  est dérivable et :

$$h'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t), t) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t), t) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\gamma(t), t).$$

De manière plus simple, en omettant le point en lequel les dérivées partielles de  $f$  sont évaluées :

$$\frac{d}{dt} \left( f(x(t), y(t), z(t), t) \right) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y} + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

**Attention** Ne pas confondre :

$$\frac{d}{dt} \left( f(x(t), y(t), z(t), t) \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t), z(t), t).$$

### Retour sur la règle de la chaîne

Considérons des applications différentiables  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ . Notons  $y_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les fonctions composantes de  $f$ .

La règle de la chaîne nous dit que l'application  $h = g \circ f$  définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \Omega \quad h(x_1, \dots, x_p) = g(y_1(x_1, \dots, x_p), \dots, y_n(x_1, \dots, x_p)), \quad (\star)$$

est différentiable sur  $\Omega$  et admet pour dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_1(x_1, \dots, x_p), \dots, y_n(x_1, \dots, x_p)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p).$$

On remarque que cela revient exactement à dériver  $(\star)$  par rapport à  $x_j$  en utilisant le corollaire 22 de la page précédente).

On retient facilement cette relation, qui traduit la règle de la chaîne, sous la forme concise ci-dessous, dans laquelle les points où sont évaluées les dérivées partielles sont sous-entendus :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}}.$$

Cette notation est certes abusive, mais elle est très efficace. Il faut simplement ne pas perdre de vue, pour chaque dérivée partielle, le point où elle est évaluée.

**Ex. 30.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $g$  l'application définie par  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Par opérations sur les fonctions différentiables, les applications  $x : (r, \theta) \mapsto r \cos \theta$  et  $y : (r, \theta) \mapsto r \sin \theta$  sont différentiables. Par conséquent, si  $f$  est différentiable, la fonction  $g$  est différentiable et pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

## 5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

### Théorème 23 (Théorème fondamental)

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction. Les assertions ci-dessous sont équivalentes.

(i) La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

(ii) Toutes les dérivées partielles de  $f$  sont définies et continues sur  $\Omega$ .

Démonstration (non exigible) page 843

**Point méthode** Pour démontrer qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  :

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  ;
- si ceux-ci ne s'appliquent pas, on peut chercher à montrer que dans une base donnée toutes les dérivées partielles de  $f$  sont définies et continues sur  $\Omega$ .

**Ex. 31.** La fonction  $f : (x, y) \mapsto e^x \ln(x^2 + 2y^2 + 1)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet :

- la fonction  $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 + 1$  est polynomiale, donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et la fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc, par composition,  $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + 2y^2 + 1)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- De même,  $(x, y) \mapsto e^x$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  par caractère  $\mathcal{C}^1$  de la fonction polynomial  $(x, y) \mapsto x$  et de l'exponentielle.

Par produit,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Ex. 32.** Reprenons la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ .

À l'exemple 5 de la page 800, il a été montré que la fonction  $f$  prolongée par 0 en 0 est différentiable et de différentielle nulle en 0. On note encore  $f$  ce prolongement. Montrons qu'il est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- En tant que fonction rationnelle, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (caractère local de la continuité).
- On a  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Pour s'assurer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , il suffit de montrer :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On a, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \frac{x^5 + 2x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En majorant  $|x|$  et  $|y|$  par  $r = \|(x, y)\|_2$ , on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leqslant 2 \frac{4r^5}{r^4} = 8r = 8\|(x, y)\|_2.$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Cette inégalité est encore vérifiée pour  $(0, 0)$ . Par comparaison :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\rightarrow(0,0)]{} 0.$$

On obtient de la même façon  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow[(x,y)\rightarrow(0,0)]{} 0$ . Par suite, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et intégration

#### Proposition 24

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour toute application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  à valeurs dans  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ , on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

#### Démonstration.

En tant que composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Ainsi, d'après la proposition 21 de la page 811,  $\varphi'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$  et donc :

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad \square$$

**Ex. 33.** Soit  $a \in \Omega$  et  $h \in E$  tel que le segment  $[a, a+h]$  soit contenu dans  $\Omega$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . En posant  $\gamma : t \mapsto a + th$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ , on a :

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 df(a+th) \cdot h dt.$$

**Ex. 34.** Supposons  $f$  différentiable sur un ouvert  $\Omega$  convexe avec une différentielle nulle. Montrons que  $f$  est constante.

Soit  $(a, b) \in \Omega^2$ . Par convexité de  $\Omega$ , le segment  $[a, b]$  est contenu dans  $\Omega$  et en appliquant l'exemple précédent à  $h = b - a$  (la fonction  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  puisque sa différentielle est nulle, donc continue), on obtient :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a+th) \cdot h dt$$

et donc  $f(b) = f(a)$  puisque  $df(a+th) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$  par hypothèse.

**Remarque** L'hypothèse de convexité peut être remplacée par celle de connexité par arcs. C'est l'objet du résultat suivant.

#### Proposition 25 (Caractérisation des fonctions constantes)

Supposons que  $\Omega$  soit un ouvert *connexe par arcs* de  $E$  ; soit  $f : \Omega \rightarrow F$ .

La fonction  $f$  est constante si, et seulement si,  $f$  est différentiable et  $df = 0$ .

Démonstration (non exigible) page 844

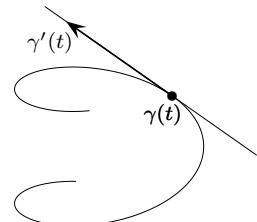
# III Vecteurs tangents à une partie

## 1 Vecteurs tangents

### Tangente à un arc

Un **arc** à valeurs dans  $E$  est simplement une application d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $E$ . On peut naturellement parler d'arc continu, dérivable, etc.

Lorsque  $\gamma$  est un arc dérivable en  $t \in I$  et  $\gamma'(t) \neq 0$ , la droite affine  $\gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t)$  est la **tangente au point de paramètre  $t$** .



**Ex. 35.** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On considère l'arc  $\gamma$  défini par  $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$ . Son image est donc la courbe d'équation  $y = \varphi(x)$ .

La fonction  $\gamma$  est dérivable sur  $I$  et, pour tout  $x \in I$ , on a  $\gamma'(x) = (1, \varphi'(x)) \neq 0$ . Donc l'arc admet une tangente en tout point, et cette tangente au point de paramètre (et donc aussi d'abscisse)  $x$  est dirigée par  $\gamma'(x)$ , donc a pour pente  $\varphi'(x)$ . Cette définition de la tangente coïncide avec celle déjà connue pour des courbes d'équation cartésienne de la forme  $y = \varphi(x)$ .

### Vecteurs tangents

Exo  
19.11

#### Définition 6

Soit  $X$  une partie de  $E$  et  $x \in X$ . Un vecteur  $v$  de  $E$  est un **vecteur tangent à  $X$  en  $x$**  s'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  et une fonction  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  à valeurs dans  $X$ , dérivable en 0, tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .

Exo  
19.12

**Notation** L'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $x$  se note  $T_x X$ .

En d'autres termes, les vecteurs tangents à  $X$  en  $x$  sont les dérivées en 0 des arcs tracés sur  $X$ , définis au voisinage de 0, passant par  $x$  en 0 et dérивables en 0.

**Ex. 36.** Le vecteur 0 est tangent à  $X$  en tout point de  $X$ , comme on le voit en considérant un chemin constant.

**Ex. 37.** Si  $x \in \overset{\circ}{X}$ , alors  $T_x X = E$ .

En effet, pour  $v \in E$ , la fonction  $\gamma : t \mapsto x + tv$  est à valeurs dans  $X$  au voisinage de 0 et est dérivable en 0 avec  $\gamma'(0) = v$ .

**Ex. 38.** Il vient de l'exemple précédent, que si  $\Omega$  est un ouvert, alors  $T_x \Omega = E$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Remarque** L'ensemble  $T_x X$  est un **cône** de  $E$ , c'est-à-dire une partie stable par toutes les homothéties de  $E$ . En effet, soit  $v \in T_x X$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow X$  a pour dérivée  $v$  en 0, alors la dérivée en 0 de l'application  $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ , qui est définie sur un voisinage de 0 et à valeurs dans  $X$ , est  $\lambda v$ , ainsi  $\lambda v \in T_x X$ . En d'autres termes,  $\mathbb{R}v$  est inclus dans  $T_x X$ .

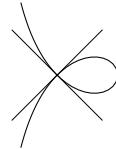
## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 39.** Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $\gamma : I \rightarrow E$  un arc de classe  $C^1$ . Posons  $X = \gamma(I)$ . Soit  $t_0 \in I$ . Comme  $I$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \subset I$ .

En considérant l'arc  $t \mapsto \gamma(t_0 + t)$ , défini sur  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  et à valeurs dans  $X$ , on voit que  $\gamma'(t_0)$  est un vecteur tangent à  $\gamma(I)$  en  $\gamma(t_0)$ .

Par suite  $\mathbb{R}\gamma'(t_0) \subset T_{\gamma(t_0)}X$ .

**Remarque** Comme on peut le voir sur un arc du type ci-contre, il se peut que l'inclusion soit stricte dans le cas où le point correspond à plusieurs paramètres.



**Ex. 40.** Soit  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ , réunion des deux axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ).

Montrons que  $T_{(0,0)}X = X$ .

- En considérant l'application  $x \mapsto (x, 0)$ , on obtient que  $(1, 0)$  est un vecteur tangent à  $X$  en  $(0, 0)$ . De même  $(0, 1) \in T_{(0,0)}X$ . Par suite  $X = \mathbb{R}(1, 0) \cup \mathbb{R}(0, 1) \subset T_{(0,0)}X$ , puisque l'ensemble des vecteurs tangents est un cône.
- Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$  un arc défini sur l'intervalle  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ , tracé sur  $X$ , dérivable en 0 et tel que  $\gamma(0) = (0, 0)$ . On a donc, au voisinage de 0 :

$$x(t) = tx'(0) + o(t) \quad \text{et} \quad y(t) = ty'(0) + o(t),$$

et puisque  $\gamma$  est tracé sur  $X$ , pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  :

$$0 = x(t)y(t) = t^2x'(0)y'(0) + o(t^2).$$

Par unicité du développement limité,  $x'(0)y'(0) = 0$ , ce qui implique que  $\gamma'(0) \in X$ .

Par conséquent  $T_{(0,0)}X = X$ .

**Remarque** Comme on le voit dans cet exemple, l'ensemble  $T_xX$  n'est pas en général un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Lorsque  $T_xX$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on dit que c'est l'**espace tangent** à  $X$  en  $x$ .

## 2 Exemples d'espaces tangents

**Ex. 41. Vecteurs tangents à un sous-espace affine**

Soit  $a \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On pose  $\mathcal{F} = a + F$ .

Soit  $x \in \mathcal{F}$ ; montrons que  $T_x\mathcal{F} = F$ .

- Soit  $v \in F$ . En considérant  $\gamma : t \mapsto x + tv$ , qui est à valeurs dans  $\mathcal{F}$ , on a  $v \in T_x\mathcal{F}$ .
- Soit  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  une fonction dérivable en 0, à valeurs dans  $\mathcal{F}$  et telle que  $\gamma(0) = x$ .

Pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}$  on a  $\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in F$  et comme  $F$  est un fermé de  $E$  (sous-espace vectoriel en dimension finie), il vient que  $\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in F$ .

En conclusion  $T_x\mathcal{F} = F$ .

**Ex. 42. Vecteurs tangents à une sphère**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $S$  la sphère de  $E$  centrée en  $0$  et de rayon  $r > 0$ .

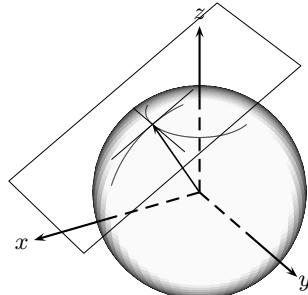
Soit  $a \in S$ ; montrons que  $T_a S$  est l'hyperplan orthogonal au vecteur  $a$ . On procède par double inclusion.

- Soit  $v \in T_a S$ . Il existe donc  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  dérivable en  $0$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$  et l'on a :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \quad (\gamma(t) \mid \gamma(t)) = r^2.$$

En dérivant cette relation en  $0$ , cela donne :

$$2(\gamma(0) \mid \gamma'(0)) = 0 \quad \text{i.e.} \quad (a \mid v) = 0.$$



On en déduit que  $T_a S \subset (\mathbb{R}a)^\perp$ .

- Soit  $v$  un vecteur non nul orthogonal à  $a$ . Montrons qu'il est tangent à  $S$  en  $a$ . Au vu de la remarque de la page 815, on peut le supposer unitaire. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \cos(t)a + r \sin(t)v. \end{aligned}$$

Elle vérifie  $\gamma(0) = a$  et elle est dérivable, avec  $\gamma'(0) = rv$ . De plus le théorème de Pythagore assure qu'elle est à valeurs dans  $S$  puisque  $a$  et  $rv$  sont orthogonaux et de même norme  $r$ . Il s'ensuit que  $rv \in T_a S$ , donc  $v \in T_a S$ , car  $r \neq 0$ . On en déduit  $(\mathbb{R}a)^\perp \subset T_a S$ .

**Ex. 43. Espace tangent au graphe d'une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$** 

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique. Notons  $G$  son graphe :

$$G = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}.$$

Considérons  $m = (x_0, y_0) \in \Omega$  et supposons  $f$  différentiable en  $m$ . On pose  $z_0 = f(x_0, y_0)$  et  $M = (x_0, y_0, z_0)$ . Cherchons les vecteurs tangents à  $G$  en  $M$ .

Soit  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow G$  dérivable en  $0$  tel que  $\gamma(0) = M$ . En notant  $x, y, z$  les trois fonctions composantes de  $\gamma$ , on a :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \quad z(t) = f(x(t), y(t)).$$

En dérivant cette relation en  $0$ , cela donne  $z'(0) = x'(0)\frac{\partial f}{\partial x}(m) + y'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(m)$ .

- Si  $v = (h, k, \ell) \in T_M G$ , on a donc :

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(m) + k\frac{\partial f}{\partial y}(m) - \ell = 0. \tag{*}$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

- Réiproquement, soit  $(h, k, \ell)$  vérifiant (\*). Puisque  $m = (x_0, y_0)$  appartient à  $\Omega$  qui est ouvert, on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  $(x_0 + th, y_0 + tk) \in \Omega$  pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . On peut donc poser :

$$\begin{aligned}\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} x(t) = x_0 + th \\ y(t) = y_0 + tk \\ z(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'arc  $\gamma$  est dérivable en 0 et l'on a  $x'(0) = h$  et  $y'(0) = k$ , donc :

$$z'(0) = x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(m) + y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(m) = h \frac{\partial f}{\partial x}(m) + k \frac{\partial f}{\partial y}(m) \stackrel{(*)}{=} \ell.$$

On en déduit  $v = (h, k, \ell) = \gamma'(0) \in T_M G$  puisque  $\gamma$  est évidemment tracé sur  $G$  et vérifie  $\gamma(0) = M$ .

Finalement,  $T_M G$  est le plan d'équation (\*), appelé **plan tangent** à  $G$  en  $M$ . Il est dirigé par les deux vecteurs non colinéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(m) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(m) \end{pmatrix}.$$

]

### 3 Cas des ensembles définis par une équation

On considère ici une fonction  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $X = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$ . Soit  $a \in X$ . Considérons un arc  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  tracé sur  $X$ , dérivable en 0, et tel que  $\gamma(0) = a$ . On a donc  $g \circ \gamma = 0$ , ce qui, par dérivation en 0 donne :

$$0 = (g \circ \gamma)'(0) = dg(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = dg(a) \cdot \gamma'(0).$$

On en déduit l'inclusion  $T_a X \subset \text{Ker } dg(a)$ .

Cela n'a d'intérêt, évidemment, que si  $dg(a) \neq 0$  et dans ce cas, il y a même égalité, ce qui est l'objet du théorème 26 que nous admettons.

#### Théorème 26

Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $X = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$ .

Si  $a \in X$  et  $dg(a) \neq 0$ , alors  $T_a X = \text{Ker } dg(a)$ .

**Ex. 44.** Reprenons l'exemple de la sphère de centre 0 et de rayon  $r > 0$  dans un espace vectoriel euclidien  $E$  (exemple 42 de la page précédente). Elle est définie par l'équation  $g(x) = 0$ , où  $g : x \mapsto (x \mid x) - r^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$  et :

$$\forall x \in E \quad dg(x) : h \mapsto 2(x \mid h).$$

(cf. exemple 21 de la page 808). En tout point  $a$  de  $S$ , on a donc  $dg(a) \neq 0$  et  $T_a X$  est l'hyperplan orthogonal à  $a$ .

**Ex. 45.** De même, pour l'exemple 43 de la page précédente du graphe  $G$  d'une fonction  $f$ , on peut poser  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$  qui vérifie  $dg(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy - dz$ , donc l'ensemble des vecteurs  $(h, k, \ell)$  tangents en un point  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $G$  est le plan d'équation  $h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \ell = 0$ .

**Ex. 46.** On note  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$ .

Montrons que l'ensemble des vecteurs tangents à  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$  est l'ensemble des matrices de trace nulle.

La fonction  $\det$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $t \in \mathbb{R}^*$ . On a :

$$\det(I_n + tH) = t^n \det\left(\frac{1}{t}I_n + H\right) = t^n \chi_{-H}\left(\frac{1}{t}\right).$$

En utilisant  $\chi_{-H}(X) = X^n - \text{tr}(-H)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(-H)$ , on obtient :

$$\det(I_n + tH) = 1 + \text{tr}(H)t + o(t) \quad \text{ce qui prouve} \quad D_H(\det)(I_n) = \text{tr}(H).$$

Par suite,  $D(\det)(I_n) = \text{tr}$ . Puisque l'application  $\text{trace}$  n'est pas nulle, cela donne, d'après le théorème 26 de la page ci-contre :

$$T_{I_n}(\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(H) = 0\}.$$

**Remarque** On voit bien sur ces exemples la puissance du théorème 26 de la page précédente qui permet d'avoir directement l'espace tangent. En particulier, dans l'exemple 46, l'inclusion  $T_{I_n}(\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})) \subset \text{Ker } \text{tr}$  peut s'obtenir facilement en dérivant en 0 la relation  $\det \gamma(t) = 1$ , où  $\gamma$  est un arc tracé sur  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\gamma(0) = I_n$ .

Mais sans le théorème, pour avoir l'inclusion inverse, il faudrait pouvoir expliciter, pour chaque matrice  $H$  de trace nulle, un tel arc  $\gamma$  vérifiant  $\gamma'(0) = H$ .

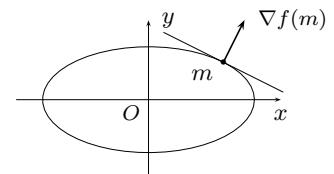
L'arc  $\gamma : t \mapsto \exp(tH)$  convient ici (il est bien un arc tracé sur  $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$  d'après l'exemple 16 de la page 741), mais il n'est pas facile à intuiter.

## Seconde interprétation géométrique du gradient

Dans le cas où  $E$  est euclidien, la conclusion du théorème 26 de la page ci-contre peut se formuler ainsi : si  $\nabla g(a) \neq 0$ , on a  $T_a X = \nabla g(a)^\perp$ .

### Remarques

- La figure ci-contre illustre cette propriété pour la partie de  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation  $x^2 + 4y^2 = 4$ .
- Il est clair que les résultats précédents s'appliquent à  $X = g^{-1}(\{c\})$  pour tout réel  $c$  : en tout point  $a$  de  $X$  où  $\nabla g(a) \neq 0$ , on a  $T_a X = \nabla g(a)^\perp$ . Les ensembles d'équations  $g(x) = c$  sont appelés **lignes de niveau** de la fonction  $g$ .
- Reprenons l'interprétation topographique de la page 805 : pour représenter le relief d'une montagne sur une carte plane on peut tracer les lignes de niveau, correspondant aux lieux où  $f$  est constante,  $f$  étant la fonction qui à tout point de coordonnées  $(x, y)$  associe son altitude  $z = f(x, y)$ . En tout point, le gradient de  $f$  est donc orthogonal à la ligne de niveau passant par ce point.



## Chapitre 19. Calcul différentiel

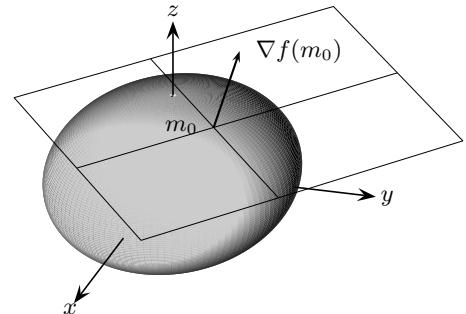
### Ex. 47. Application à l'équation du plan tangent

On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ . On considère  $X = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\}$  ainsi que  $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$  un point tel que  $\nabla g(m_0) \neq 0$ .

Puisque  $\nabla g(m_0) \neq 0$ , l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $m_0$  est le sous-espace vectoriel  $\nabla g(m_0)^\perp$ , qui est de dimension 2. Le **plan tangent** à  $X$  en  $m_0$  est le plan affine  $\mathcal{T}$  passant par  $m_0$  et dirigé par le plan vectoriel  $\nabla g(m_0)^\perp$ . Ce plan est caractérisé par :

$$\forall m \in \mathbb{R}^3 \quad m \in \mathcal{T} \iff (\nabla g(m_0) \mid m - m_0) = 0,$$

c'est-à-dire par l'équation :



$$\boxed{\mathcal{T} : \quad (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(m_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(m_0) + (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(m_0) = 0.}$$

**Ex. 48.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$  et  $S$  la partie de  $\mathbb{R}^3$  définie par l'équation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Considérons  $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ . Il est clair que  $m_0 \neq 0$ , donc :

$$\nabla g(m_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, -\frac{2z_0}{c^2}\right) \neq 0.$$

Il s'ensuit que  $S$  admet en  $m_0$  un plan tangent d'équation :

$$2\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + 2\frac{y_0}{b^2}(y - y_0) - 2\frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Compte tenu de la relation  $\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1$ , cette équation peut s'écrire :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

## IV Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans cette section  $E = \mathbb{R}^p$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  est la base canonique.

### 1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

#### Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles d'une fonction  $f : \Omega \rightarrow F$ , lorsqu'elles existent en tout point de  $\Omega$ , sont des applications de  $\Omega$  dans  $F$ . On peut donc s'intéresser à leurs dérivées partielles éventuelles.

#### Définition 7

Soit  $(j_1, \dots, j_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$ .

Lorsqu'elle existe, la fonction  $\partial_{j_k} \left( \partial_{j_{k-1}} (\dots (\partial_{j_1} f) \dots) \right)$  est appelée **dérivée partielle de  $f$  selon les indices  $(j_1, \dots, j_k)$**  et notée :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}} \quad \partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f \quad \text{ou} \quad \partial_{j_1, \dots, j_k} f.$$

On appelle **dérivée partielle d'ordre  $k$** , une dérivée partielle par rapport à une liste d'indices de longueur  $k$ .

### Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

#### Définition 8

Une application  $f : \Omega \rightarrow F$  est de **classe  $\mathcal{C}^k$**  si toutes ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $\Omega$ .

**Notation**  $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$  désigne l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\Omega$  dans  $F$ .

#### Remarques

- On convient que les fonctions de classe  $\mathcal{C}^0$  sont les fonctions continues.
- Munissons  $F$  d'une base  $\mathcal{B}'$ . Soit  $(j_1, \dots, j_k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^k$ . D'après les propriétés de la dérivation partielle,  $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f$  est définie si, et seulement si,  $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f_i$  est définie pour toute fonction coordonnée  $f_i$ .

De même, par le lien entre la continuité d'une fonction à valeurs dans  $F$  et la continuité de ses fonctions coordonnées, une fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées le sont.

Cela permet de se ramener à des fonctions à valeurs réelles.

**Ex. 49.** Les fonctions constantes sont de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En effet, toutes ses dérivées partielles sont nulles.

**Ex. 50.** Si  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, F)$ , alors  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En effet, toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont constantes (cf. exemple 22 de la page 809), donc toutes les dérivées partielles d'ordre  $k > 1$  sont nulles.

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Il vient de la définition et du théorème fondamental le résultat suivant.

### Proposition 27

Si  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^i$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

Démonstration page 844.

### Corollaire 28

Soit  $k \geq 1$ . Une application  $f : \Omega \rightarrow F$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si, et seulement si, toutes les dérivées partielles de  $f$  d'ordre 1 existent et sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Démonstration page 844.

### Définition 9

Une application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Notation** On note  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, F)$  l'ensemble des applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\Omega$  dans  $F$ .

### Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Les théorèmes opératoires sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  se généralisent sans difficulté aux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  grâce au corollaire 28.

### Proposition 29

Soit  $f$  et  $g$  deux applications de  $\Omega$  dans  $F$  de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , l'application  $\lambda f + \mu g$  est alors de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Démonstration page 844.

**Remarque** Il s'ensuit que  $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(\Omega, F)$ .

### Proposition 30

Soit  $M : F_1 \times \cdots \times F_q \rightarrow G$  une application  $q$ -linéaire, où  $F_1, \dots, F_q, G$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et  $f_1 : \Omega \rightarrow F_1, \dots, f_q : \Omega \rightarrow F_q$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors  $M(f_1, \dots, f_q)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Démonstration page 845.

**Ex. 51.** Si  $f_1, \dots, f_q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , leur produit  $f_1 \cdots f_q$  est alors de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Ex. 52.** Supposons que  $F$  soit un espace euclidien. Si  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $g : \Omega \rightarrow F$  sont deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $\varphi = (f \mid g)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . En particulier  $\|f\|^2$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

### Remarques

- Il vient de la proposition 30 que  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ .
- Plus généralement, si  $F$  est une algèbre, alors  $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$  est une algèbre.
- En particulier,  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre, en considérant  $\mathbb{C}$  comme une  $\mathbb{R}$ -algèbre.

**Proposition 31**

Les applications polynomiales sur  $\mathbb{R}^p$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence du fait que les dérivées partielles d'une application polynomiale sont elles-mêmes polynomiales, et que toute application polynomiale est continue.  $\square$

**Ex. 53.** Les applications  $M \mapsto \det M$  et  $M \mapsto M^k$  (pour  $k \in \mathbb{N}$ ) définies sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\dagger$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition 32**

Soit  $\Omega'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \Omega' \rightarrow G$  deux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  telles que  $f(\Omega) \subset \Omega'$ . L'application  $g \circ f$  est alors de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Démonstration page 845

**Ex. 54.** Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et ne s'annule pas, la fonction  $\frac{1}{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Il suffit, pour le voir, d'écrire  $\frac{1}{f} = g \circ f$ , où  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $g(t) = \frac{1}{t}$ .

**Ex. 55.** Toute fonction rationnelle sur  $\mathbb{R}^p$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur tout ouvert où elle est définie.

**Ex. 56.** L'application définie sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})^\dagger$  par  $f(M) = M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (cf. exemple 25 de la page 810).

## 2 Théorème de Schwarz

**Théorème 33**

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On a alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Démonstration (non exigible) page 846

Exo  
19.15

**Attention** Sans l'hypothèse  $\mathcal{C}^2$ , les dérivées partielles « croisées » peuvent exister mais ne pas être égales.

**Notation** Le résultat se généralise sans problème à des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  : on peut calculer les dérivées partielles d'ordre  $k$  sans se préoccuper de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations.

Cela permet de les écrire sous la forme  $\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}}$ , où  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = k$ .

†. Au moyen de sa base canonique, on identifie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 57.** Soit  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(u, v) \mapsto (u + v, uv)$ .

L'application  $\Phi$ , dont les fonctions coordonnées sont polynomiales sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , est de classe  $C^\infty$ .

Pour tout  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $g(u, v) = f(u+v, uv)$  est de classe  $C^1$  et pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, uv) + v \frac{\partial f}{\partial y}(u+v, uv) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, uv) + u \frac{\partial f}{\partial y}(u+v, uv).\end{aligned}$$

Pour alléger la suite du calcul, nous allons utiliser les conventions données lors de la discussion de la règle de la chaîne en sous-entendant les points en lesquels on calcule les dérivées partielles (cf. page 812), ce qui donne :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (*)$$

Ainsi, si l'on suppose  $f$  de classe  $C^2$  :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Bien comprendre que dans cette formule, une expression comme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{signifie en fait} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(u+v, uv) \right).$$

Pour calculer ces dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  on utilise à nouveau la règle de la chaîne, c'est-à-dire que l'on applique la première formule de  $(*)$  en remplaçant  $f$  par  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Compte tenu du théorème de Schwarz qui donne  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , on obtient donc :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u+v) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + uv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

### 3 Hessienne – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Dans cette section,  $E = \mathbb{R}^p$  et il est muni de sa structure euclidienne canonique. Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

#### Hessienne

##### Définition 10

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in \Omega$ .

La **matrice hessienne** de  $f$  en  $a$ , notée  $H_f(a)$ , est :

$$H_f(a) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p}.$$

#### Remarques

- D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est symétrique.
- On a  $H_f(a) = J_{\nabla f}(a)$ .

**Ex. 58.** Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^p$  par  $f(x) = x^T A x$ . Cette application est polynomiale sur  $\mathbb{R}^p$ , donc de classe  $\mathcal{C}^2$ . On a  $H_f(x) = A + A^T$ .

En effet, notons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ . On a donc  $f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j} x_i x_j$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2a_{k,k}x_k + \sum_{i \neq k} a_{i,k}x_i + \sum_{j \neq k} a_{k,j}x_j$$

puis :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = 2a_{k,k} \quad \text{et, pour } \ell \neq k, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(x) = a_{\ell,k} + a_{k,\ell},$$

d'où le résultat.

**Ex. 59.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $h \in \mathbb{R}^p$  tel que  $[a, a + h] \subset \Omega$ .

On pose alors les fonctions  $\gamma : t \mapsto a + th$  et  $g = f \circ \gamma$  définies sur  $[0, 1]$ . Puisque  $\gamma' = h$ , la dérivation le long d'un arc donne pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$g'(t) = (\nabla f(a + th) \mid h) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th).$$

Appliquant à nouveau ce résultat aux fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ , cela donne :

$$g''(t) = \sum_{j=1}^p h_j \left( \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) = h^T H_f(a + th) h.$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

### Développement limité à l'ordre 2

#### Théorème 34 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in \Omega$ . On a alors au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(a)h + o(\|h\|^2).$$

Démonstration (non exigible) page 847

**Remarque** On peut aussi écrire le développement limité à l'ordre 2 sous la forme :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2} (H_f(a)h \mid h) + o(\|h\|^2).$$

## 4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Commençons par deux exemples importants.

**Ex. 60.** Montrons que les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^p$  et à valeurs dans  $F$  vérifiant  $\partial_p f = 0$  sont les fonctions pour lesquelles il existe  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{p-1}, F)$  telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \quad f(x_1, \dots, x_p) = g(x_1, \dots, x_{p-1}).$$

- Soit  $f$  une telle fonction. Si l'on fixe  $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ , par définition d'une dérivée partielle, la fonction  $t \mapsto f(x_1, \dots, t)$  a une dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , donc est constante. On a donc :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \quad f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_{p-1}, 0),$$

ce qui donne le résultat en posant  $g(x_1, \dots, x_{p-1}) = f(x_1, \dots, x_{p-1}, 0)$ , qui définit bien une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{p-1}$  par composition.

- Réciproquement, si  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{p-1}, F)$ , la fonction  $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto g(x_1, \dots, x_{p-1})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , par composition de  $g$  avec l'application linéaire  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_{p-1})$  et vérifie évidemment  $\partial_p f = 0$ .

**Ex. 61.** Les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \tag{*}$$

sont les fonctions pour lesquelles il existe deux fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  définies sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y).$$

En effet, soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant (\*), c'est-à-dire telle que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$ .

D'après l'exemple 60, il existe donc une fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow F$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \psi(y), \tag{**}$$

et puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Fixons une telle fonction  $\psi$  et posons  $\Psi$  une primitive de  $\psi$ .

Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Il vient de  $(**)$  :  $\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - \Psi(y)) = 0$ . Donc il existe  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow F$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \Psi(y) + \Phi(x)$$

et la relation  $\Phi(x) = f(x, 0) - \Psi(0)$  montre que  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Il est immédiat que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

La réciproque est immédiate.

Dans des exemples un peu plus compliqués, pour déterminer les fonctions  $f : \Omega \rightarrow F$  qui sont solutions d'une équation aux dérivées partielles, on est souvent amené à faire un changement de variable, c'est-à-dire à introduire  $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et poser  $g = f \circ \Phi$ .

La fonction  $g$  est également solution d'une équation aux dérivées partielles, qui dans certains cas est plus simple que l'équation initiale et peut être résolue.

**Ex. 62.** Par un changement de variable linéaire, nous allons résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles :

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{où } (a, b) \neq (0, 0).$$

Cherchons donc des constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  telles que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  (pour avoir une bijection), et telles que le changement de variable  $u = \alpha x + \beta y$ ,  $v = \gamma x + \delta y$  transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation de la forme  $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$  lorsque  $f(x, y) = g(u, v)$ .

Si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = g(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\begin{aligned} a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} &= a \left( \alpha \frac{\partial g}{\partial u} + \gamma \frac{\partial g}{\partial v} \right) + b \left( \beta \frac{\partial g}{\partial u} + \delta \frac{\partial g}{\partial v} \right) \\ &= (a\alpha + b\beta) \frac{\partial g}{\partial u} + (a\gamma + b\delta) \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned}$$

formule dans laquelle les dérivées partielles de  $f$  sont calculées en  $(x, y)$  et celles de  $g$  calculées en  $(u, v) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ .

Choisissons  $\gamma = b$  et  $\delta = -a$ , de sorte que  $a\gamma + b\delta = 0$ . Les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sont choisis de sorte que  $\alpha\delta - \beta\gamma$  et  $a\alpha + b\beta$  soient non nuls : par exemple,  $\alpha = a$  et  $\beta = b$ , mais nous verrons que les valeurs précises de  $\alpha$  et  $\beta$  n'interviennent pas dans le résultat, et importent donc peu.

L'équation  $a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  est équivalente à la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = 0.$$

Comme l'application  $(x, y) \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$  est bijective, cela équivaut à :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0.$$

Ainsi,  $f$  vérifie l'équation si, et seulement si,  $g$  dépend seulement de  $v$ , c'est-à-dire si, et seulement s'il existe une fonction  $h$  d'une seule variable et de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $g(u, v) = h(v)$ .

Les fonctions  $f$  solutions sont alors les fonctions  $f : (x, y) \mapsto h(bx - ay)$ , où  $h$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 63.** Résolvons, sur  $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  l'équation :

$$\forall(x, y) \in \Omega \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (*)$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  qui vérifie (\*). On pose le changement de variable  $(x, y) = (u, \frac{v}{u})$ .

Plus précisément, on introduit :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, \frac{v}{u}\right) \end{aligned} \quad \text{et} \quad g = f \circ \Phi : \quad \begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto f\left(u, \frac{v}{u}\right). \end{aligned}$$

La fonction  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , car ses fonctions coordonnées le sont, comme fonctions rationnelles définies sur  $\Omega$ . Par composition,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Puisque  $\Phi$  est à valeurs dans  $\Omega$  et  $f$  vérifie (\*), on a :

$$\forall(u, v) \in \Omega \quad u \frac{\partial f}{\partial x}\left(u, \frac{v}{u}\right) - \frac{v}{u} \frac{\partial f}{\partial y}\left(u, \frac{v}{u}\right) = 0. \quad (**)$$

- La règle de la chaîne donne :

$$\forall(u, v) \in \Omega \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(u, \frac{v}{u}\right) - \frac{v}{u^2} \frac{\partial f}{\partial y}\left(u, \frac{v}{u}\right).$$

La relation (\*\*) s'écrit  $u \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0$  pour tout  $(u, v) \in \Omega$ , donc  $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ . À  $v \in \mathbb{R}$  fixé, l'application  $u \mapsto g(u, v)$  ayant une dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ , est constante. On a ainsi :

$$\forall(u, v) \in \Omega \quad g(u, v) = \varphi(v) \quad \text{où } \varphi : \quad \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto g(1, v) \end{aligned} \quad \text{est de classe } \mathcal{C}^1.$$

On vérifie facilement que  $\Phi$  est bijective et :

$$\forall(x, y) \in \Omega \quad \Phi^{-1}(x, y) = (x, xy).$$

Puisque  $g = f \circ \Phi$ , on a  $f = g \circ \Phi^{-1}$ , donc :

$$\forall(x, y) \in \Omega \quad f(x, y) = \varphi(xy).$$

Réiproquement, si  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , alors un calcul simple montre que  $(x, y) \mapsto \varphi(xy)$  est une solution de (\*). Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de (\*) sur  $\Omega$  est :

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \mapsto \varphi(xy) \mid \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}.$$

**Ex. 64.** Soit  $c \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminons les  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (\star)$$

Il s'agit d'un cas particulier (unidimensionnel) d'équations de propagation, dites aussi **équations des ondes**.

- Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Comme dans l'exemple 62 de la page précédente, on pose un changement de variable linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{aligned} \quad \text{et} \quad g(u, v) = f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v),$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  et  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Cette dernière condition s'impose du fait que l'on souhaite  $\varphi$  bijective.

- Puisque  $\varphi$  est de classe  $C^1$ , par la règle de la chaîne,  $g$  est de classe  $C^1$  et :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial t}.$$

En itérant, cette formule étant valable pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  et  $g = f \circ \varphi$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left( \beta \frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \alpha \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\alpha \delta + \beta \gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \gamma \delta \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned}$$

(la dernière relation a été obtenue en utilisant le théorème de Schwarz). En prenant  $\alpha = \beta = c$  et  $\delta = -\gamma = 1$ , on a  $\alpha \delta - \beta \gamma = 2c \neq 0$  et ainsi :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

- Par ce changement de variables :

$$(x, t) = (cu + cv, -u + v) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (u, v) = \frac{1}{2c}(x - ct, x + ct),$$

l'équation  $(*)$  est donc équivalente à :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0. \tag{**}$$

D'après l'exemple 61 de la page 826, on sait que les solutions de  $(**)$  sont les fonctions  $g$  somme d'une fonction de  $u$  et d'une fonction de  $v$ .

Par conséquent,  $f$  est solution de  $(*)$  si, et seulement s'il existe  $(\Phi, \Psi) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$  tel que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).$$

## V Optimisation

Dans cette section, les fonctions seront définies sur une partie  $A$  de  $E$  (non nécessairement ouverte) et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Par extension, lorsque  $a \in \overset{\circ}{A}$ , on dit que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a$  si sa restriction à l'intérieur de  $A$  est différentiable en  $a$ . Dans ces conditions  $d_f(a)$  désigne naturellement la différentielle en  $a$  de cette restriction.

### 1 Extrema

Rappelons que si  $A$  est une partie non vide de  $E$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors :

- $f$  admet un maximum (global) en  $a$  si  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x \in A$  ;
- $f$  admet un minimum (global) en  $a$  si  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x \in A$  ;
- $f$  admet un extremum (global) en  $a$  si elle y admet un maximum ou un minimum.

## Chapitre 19. Calcul différentiel

### Définition 11 (Extremum local)

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in A$ . Une application  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  admet :

- un **maximum local** en  $a$  s'il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in W \cap A \quad f(x) \leq f(a),$$

- un **minimum local** en  $a$  s'il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que :

$$\forall x \in W \cap A \quad f(x) \geq f(a),$$

- un **extremum local** en  $a$  si elle admet un maximum ou un minimum local en  $a$ .

En cas d'inégalité stricte pour  $x \in W \cap A \setminus \{a\}$ , on parle alors de **maximum local strict**, de **minimum local strict** et d'**extremum local strict**.

**Remarque** Si  $f$  admet un extremum (global) en  $a$ , alors elle admet un extremum local. Ainsi, couramment, lorsque l'on cherche les extrema globaux, on commence par chercher les extrema locaux.

### Recherche d'extrema

**Point méthode** Pour démontrer qu'une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  admet un extremum en  $a$ , on peut étudier le signe de  $g : h \mapsto f(a+h) - f(a)$ .

- Si  $g$  est de signe fixe au voisinage de 0, alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .
- Si  $g$  est de signe fixe sur tout son domaine de définition, alors  $f$  admet un extremum global en  $a$ .

**Ex. 65.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^2 - x^5 - x^4y^5$  admet un minimum local en  $(0, 0)$ . En effet, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = x^4(1 - x - y^5) + y^2.$$

L'ensemble  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x - y^5 > 0\}$  est un ouvert (c'est l'image réciproque de l'ouvert  $\mathbb{R}_+^*$  par l'application continue  $(x, y) \mapsto 1 - x - y^5$ ), contenant  $(0, 0)$ .

Sur ce voisinage  $W$  de  $(0, 0)$ , on a  $f(x, y) \geq 0$ . Par conséquent,  $f$  admet un minimum local en  $(0, 0)$ . De plus  $f(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in W \setminus \{(0, 0)\}$ , ce qui implique que  $f$  admet un minimum local strict en  $(0, 0)$ .

Mais, il ne s'agit pas d'un minimum global, car  $f(x, 0) = x^4 - x^5 < 0 = f(0, 0)$  lorsque  $x > 1$ .

**Point méthode** En reprenant les notations du point méthode précédent, si l'on montre que, sur tout voisinage de 0, la fonction  $g$  prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, alors  $f$  n'a pas d'extremum local en  $a$ .

En pratique, cela pourra souvent se faire en étudiant le signe de  $t \mapsto g(th)$  pour des vecteurs  $h$  bien choisis.

**Ex. 66.** Considérons la fonction  $f : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + 2xy - x^3 + xy^3$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ . Cette fonction n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ . En effet :

$$f(t, 0) - f(0, 0) = t^2 - t^3 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2 \quad \text{et} \quad f(t, -t) - f(0, 0) = -t^2 - t^3 - t^4 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t^2$$

ce qui prouve que dans tout voisinage de  $(0, 0)$ , la fonction  $f - f(0, 0)$  prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives.

Exo  
19.20

**Attention** Il se peut qu'une fonction admette en un point un minimum local dans toutes les directions, c'est-à-dire, avec les notations précédentes, que la fonction  $t \mapsto g(th)$  admette un minimum local pour tout vecteur  $h$ , sans pour autant que la fonction admette un minimum local en ce point.

## 2 Conditions nécessaires d'extrema

### Condition nécessaire d'ordre 1

#### Proposition 35

Soit  $A \subset E$  non vide et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \overset{\circ}{A}$  et si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $df(a) = 0$ .

Démonstration page 847

**Principe de démonstration.** Remarquer que si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors pour tout  $h \in E$  la fonction réelle de la variable réelle  $t \mapsto f(a + th)$  est définie au voisinage de 0 et admet un extremum local en 0.

#### Définition 12

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in A$ . Le point  $a$  est un **point critique** de  $f$  si  $a$  est dans l'intérieur de  $A$  et si la fonction  $f$  est différentiable en  $a$  avec  $df(a) = 0$ .

### Remarque

Si  $E$  est un espace euclidien, alors  $a \in A$  est un point critique si  $a \in \overset{\circ}{A}$  et  $\nabla f(a) = 0$ .

**Attention** Une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum en un point critique, comme il a déjà été remarqué en première année dans le cas  $p = 1$  ou comme c'est le cas dans l'exemple 66.

**Point méthode** Les extrema locaux de  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  sont à chercher parmi :

- les points critiques de  $f$ ,
- les points de  $\overset{\circ}{A}$  où  $f$  n'est pas différentiable,
- les points de  $A \setminus \overset{\circ}{A}$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 67.** Déterminons les extrema sur  $\mathbb{R}^2$  de  $f : (x, y) \mapsto 3x + x^2 + xy + y^2$ . Comme  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert et que  $f$  est différentiable, puisque polynomiale, un extremum (local ou global) ne peut être atteint qu'en un point critique. Or :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 + 2x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y.$$

Par résolution du système linéaire  $3 + 2x + y = x + 2y = 0$ , on trouve un unique point critique  $(-2, 1)$ . Étudions ce point critique :

$$f(-2 + h, 1 + k) = -6 + 3h + (-2 + h)^2 + (-2 + h)(1 + k) + (1 + k)^2 = f(-2, 1) + h^2 + hk + k^2.$$

Or,  $h^2 + hk + k^2 = (h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0$ . Donc :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad f(-2 + h, 1 + k) - f(-2, 1) \geq 0,$$

ce qui prouve que  $f$  admet un minimum global en  $(-2, 1)$ .

Il est clair qu'il n'y a pas de maximum global puisque  $f$  n'est pas majorée, mais l'étude précédente montre qu'il n'y a pas non plus de maximum local, puisque  $f$  n'a pas d'autre point critique.

**Ex. 68.** Étudions les extrema de  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - 3y^2$  sur le disque unité fermé :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- À l'intérieur du disque, la recherche des points critiques conduit au système :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \quad \text{dont la seule solution est } (0, 0).$$

Or,  $f$  n'a pas d'extremum en  $(0, 0)$  puisque, pour  $t$  non nul, on a  $f(t, 0) = t^2 > 0$  et  $f(0, t) = -3t^2 < 0$ .

- Étudions  $f$  sur le bord de  $D$ . Pour cela paramétrons le cercle  $C = D \setminus \overset{\circ}{D}$  par  $x = \cos \theta$  et  $y = \sin \theta$  :

$$\begin{aligned} f(\cos \theta, \sin \theta) &= \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta - 3 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta - 3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= -1 + 2 \cos 2\theta + \sin 2\theta. \end{aligned}$$

En écrivant  $2 \cos 2\theta + \sin 2\theta = \sqrt{5} \cos(2\theta - \varphi)$ , où  $\varphi$  est tel que  $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , on trouve que la restriction de  $f$  à  $C$  admet un maximum  $-1 + \sqrt{5}$  (atteint, par exemple pour  $\theta = \varphi/2$ ) et un minimum  $-1 - \sqrt{5}$  (atteint, par exemple pour  $\theta = (\varphi + \pi)/2$ ).

- On ne peut pas conclure directement que  $\max_D f = -1 + \sqrt{5}$  et  $\min_D f = -1 - \sqrt{5}$  tant que l'on ne sait pas qu'il existe effectivement de tels extrema globaux. Ici, on peut :
  - soit montrer l'existence d'un maximum et d'un minimum par continuité de  $f$  sur le compact  $D$  (boule unité fermée de  $\mathbb{R}^2$ ),
  - soit montrer que  $f$  est majorée par  $-1 + \sqrt{5}$  et minorée par  $-1 - \sqrt{5}$  sur  $D$ , ce qui se voit bien en écrivant :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2(-1 + 2 \cos 2\theta + \sin 2\theta) = r^2(-1 + \sqrt{5} \cos(2\theta - \varphi)).$$

## Condition nécessaire d'ordre 2

On suppose dans cette section que  $E = \mathbb{R}^p$  et que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$  (on peut prendre  $\Omega = \overset{\circ}{A}$  si  $f$  est définie sur une partie  $A$  non ouverte et d'intérieur non vide).

Soit  $a \in \Omega$ . La matrice  $H_f(a)$  étant symétrique, elle est diagonalisable.

**Rappel** On dit (cf. page 168) qu'elle est positive (respectivement définie positive) si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est réalisée :

(i) les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont positives (respectivement strictement positives),

(ii)  $\forall x \in E \quad x^T H_f(a)x \geq 0$  (respectivement  $\forall x \in E \setminus \{0\} \quad x^T H_f(a)x > 0$ ).

On dira dans la suite que la matrice  $H_f(a)$  est négative (respectivement définie négative) si  $-H_f(a)$  est positive (respectivement définie positive).

### Proposition 36

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \Omega$ , alors  $a$  est un point critique et la matrice hessienne  $H_f(a)$  est :

- positive dans le cas d'un minimum,
- négative dans le cas d'un maximum.

Démonstration page 848

**Principe de démonstration.** Raisonner par l'absurde et utiliser le développement limité de  $f$  en  $a$  à l'ordre 2 (théorème 34 de la page 826).

**Ex. 69.** Considérons  $f : (x, y) \mapsto x^3 + x^2 + y^3 - xy$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  car polynomiale sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2x - y, 3y^2 - x).$$

On en déduit que  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$ . Un calcul simple donne :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det H_f(0, 0) = -1 < 0$ , les deux valeurs propres de  $H_f(0, 0)$  sont non nulles et de signes opposés, donc la fonction  $f$  n'admet pas d'extremum en  $(0, 0)$ .

## 3 Utilisation de la compacité

Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction continue sur un compact non vide, les raisonnements sont souvent facilités par le fait que l'on sait *a priori* qu'il y a un maximum et un minimum (l'exemple 68 de la page ci-contre en donne déjà une illustration).

**Ex. 70.** Déterminons les extrema de :

$$\begin{aligned} f : \Delta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy(1 - x - y), \end{aligned}$$

où  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ .

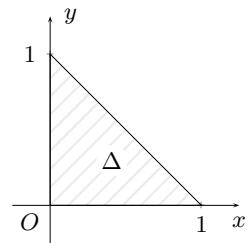
- La fonction  $f$  est continue car polynomiale et sa restriction à  $\overset{\circ}{\Delta}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

- L'ensemble  $\Delta$  est un compact. Il est en effet fermé, car c'est l'intersection de trois demi-plans fermés. De plus, pour tout  $(x, y) \in \Delta$ , on a :

$$0 \leq x \leq 1 - y \leq 1$$

et de même pour  $y$ . Par suite,  $\Delta \subset [0, 1]^2$ . Ainsi,  $\Delta$  est un fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie, il s'agit bien d'une partie compacte.



- Il est clair que  $\overset{\circ}{\Delta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$ .

Par ailleurs, pour tout  $(x, y) \in \Delta$ , on a  $f(x, y) \geq 0$ .

Sur tout point de la frontière, on a  $f(x, y) = 0$  et donc tous les points de la frontière sont des points où  $f$  atteint son minimum. Puisque  $f$  est à valeurs strictement positives sur l'intérieur de  $\Delta$ , nous avons déterminé tous les minima de  $f$ .

- Par continuité et compacité,  $f$  admet un maximum et, puisque  $f$  n'est pas la fonction nulle, ce maximum est atteint en des points de l'intérieur de  $\Delta$ . Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intérieur, il s'agit de points critiques.

- Pour tout  $(x, y) \in \overset{\circ}{\Delta}$  on a :

$$\nabla f(x, y) = (y(1 - 2x - y), x(1 - x - 2y)).$$

Par conséquent,  $(x, y)$  est un point critique si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{i.e. } x = y = 1/3.$$

Par suite, la fonction  $f$  a un seul point critique. Ainsi  $(1/3, 1/3)$  est l'unique point où  $f$  atteint son maximum.

Comme le montre l'exemple suivant, un argument de compacité peut parfois être utilisé pour établir l'existence d'extrema, même lorsque la fonction est pas définie sur un compact. On pourra aussi voir l'exercice 7.3.

**Ex. 71.** Considérons la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^4 - 4xy + y^4$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Commençons par établir  $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ . Il est clair que ce sont les termes de degré 4 qui vont déterminer cette limite. Justifions cela précisément. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; posons  $r = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On a :

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2}((x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2) \geq \frac{r^4}{2}$$

tandis que  $|2xy| \leq x^2 + y^2 = r^2$ , ce qui donne :

$$f(x, y) \geq x^4 + y^4 - |4xy| \geq \frac{r^4}{2} - 2r^2.$$

Comme :

$$\frac{r^4}{2} - 2r^2 \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} +\infty,$$

on en déduit :

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty. \tag{*}$$

- La relation (\*) implique qu'il existe un réel  $r > 0$  tel que pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$  :

$$\|u\| > r \implies f(u) \geq f(0).$$

Puisque  $E$  est de dimension finie, la boule fermée  $B = B_F(0, r)$  est compacte. Il s'ensuit, par continuité, que  $f|_B$  atteint un minimum en un certain point  $u_0$  (théorème des bornes atteintes).

Finalement,  $f$  est minorée sur  $\mathbb{R}^2$  par  $m = \min(f(0), f(u_0))$  et, ce minorant  $m$  étant atteint,  $f$  admet un minimum global.

- Comme  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , elle atteint son minimum en un point critique. Or pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\nabla f(x, y) = 4(x^3 - y, y^3 - x)$ , donc  $(x, y)$  est un point critique si, et seulement si,  $y = x^3$  et  $x^9 = x$ . Les points critiques sont ainsi  $(0, 0), (1, 1)$  et  $(-1, -1)$ . Comme  $f(0, 0) = 0$  et  $f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$ , le minimum est atteint en  $(1, 1)$  et en  $(-1, -1)$ .

**Remarque** La fonction n'admet donc pas d'extremum global en  $(0, 0)$ . Mais elle n'en admet pas non plus de local, puisque  $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$  a pour déterminant  $-16 < 0$ , donc ses deux valeurs propres sont de signes strictement opposés.

## 4 Condition suffisante d'extremum

On suppose dans cette section que  $E = \mathbb{R}^p$  et que  $f$  est de classe  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$  (on peut prendre  $\Omega = \overset{\circ}{A}$  si  $f$  est définie sur une partie  $A$  non ouverte et d'intérieur non vide).

### Proposition 37

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Si  $a \in \Omega$  est un point critique de  $f$  et  $H_f(a)$  est définie positive, alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .

Démonstration page 848

**Principe de démonstration.** Utiliser le fait que  $(h, k) \mapsto h^T H_f(a)k$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^p$  et la formule de Taylor-Young (théorème 34 de la page 826).

**Remarque** De même, si  $a$  est un point critique tel que  $H_f(a)$  soit définie négative, alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .

Dans le cas  $n = 2$ , on dispose d'un critère simple pour déterminer si une matrice symétrique réelle est définie positive puisque son déterminant est le produit des deux valeurs propres et sa trace leur somme (cf. exemple 14 de la page 168).

**Point méthode** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $a$  un point critique de  $f$  ainsi que  $H_f(a)$  sa matrice hessienne en  $a$ .

- Si  $\det H_f(a) > 0$  et  $\text{tr } H_f(a) > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
- Si  $\det H_f(a) > 0$  et  $\text{tr } H_f(a) < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .
- Si  $\det H_f(a) < 0$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $a$ .

**Remarque** Dans le cas où  $\det H_f(a) = 0$ , on ne peut pas conclure directement.

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Ex. 72.** Considérons la fonction  $f : (x, y) \mapsto xy^2 + x^2 + xy + y^2$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

Puisque  $f$  est polynomiale, elle est de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + y, 2xy + x + 2y).$$

On en déduit que  $(0, 0)$  est un point critique de  $f$  et :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det H_f(0, 0) = 3 > 0$  et  $\text{tr } H_f(0, 0) = 4 > 0$ , la matrice  $H_f(0, 0)$  est définie positive, donc  $f$  admet un minimum local strict en  $(0, 0)$ .

Mais ce minimum n'est pas global puisque  $f$  n'est pas minorée :  $f(t, t) = t^3 + 3t^2 \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$ .

## 5 Optimisation sous contrainte

Lorsque l'on cherche les extrema d'une fonction sur une partie  $X$ , l'étude des points critiques et éventuellement de la hessienne ne peut se faire qu'en un point intérieur à  $X$ . Lorsque  $X$  est d'intérieur vide, aucun des résultats précédents ne peut donc s'appliquer. C'est le cas, par exemple, si l'on veut trouver les extrema d'une fonction  $f$  sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On dit alors que l'on cherche à **optimiser  $f$  sous la contrainte**  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

On considère ici un ouvert  $\Omega$  de  $E$ ,  $f$  une fonction de classe-  $C^1$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  et  $X$  une partie de  $\Omega$ .

### Proposition 38

Si la restriction de  $f$  à  $X$  admet un extremum local en  $a \in X$  alors  $T_a X \subset \text{Ker } df(a)$ .  
Démonstration page 848

**Principe de démonstration.** Dériver  $f \circ \gamma$ , lorsque  $\gamma$  est un arc tracé sur  $X$ .

**Remarque** Lorsque  $a$  est intérieur à  $X$ , on sait que  $T_a X = E$  (cf. exemple 38 de la page 815), donc on retrouve que si  $f$  admet un extremum en  $a$ , alors  $df(a) = 0$ .

### Théorème 39 (Optimisation sous contrainte)

Soit  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$ . On pose  $X = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$ .

Si  $f|_X$  admet un extremum local en un point  $a \in X$  et si  $dg(a) \neq 0$ , alors  $df(a)$  est colinéaire à  $dg(a)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $df(a) = \lambda dg(a)$ .  
Démonstration page 848

**Principe de démonstration.**

On applique la proposition 38 en remarquant que  $\text{Ker } dg(a) = T_a X$  (cf. théorème 26 de la page 818), ce qui donne  $\text{Ker } dg(a) \subset \text{Ker } df(a)$ , avec  $df(a)$  et  $dg(a)$  deux formes linéaires.

Exo  
19.21

**Remarque** Si de plus  $E$  est euclidien, la conclusion du résultat peut se reformuler en la colinéarité de  $\nabla f(a)$  et  $\nabla g(a)$ , c'est-à-dire, puisque  $\nabla g(a) \neq 0$ , en l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que  $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ .

**Ex. 73.** Reprenons l'exemple 68 de la page 832.

Pour trouver les extrema de  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - 3y^2$  sur le disque unité, on a eu besoin de trouver les extrema sur le bord, c'est-à-dire le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

En posant  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , on a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

La condition de proportionnalité de  $\nabla f(x, y)$  et  $\nabla g(x, y)$ , se traduit par la nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x+y & x \\ x-3y & y \end{vmatrix} = y^2 + 4xy - x^2.$$

Les extrema de  $f$  sur le cercle sont donc atteints en des points de la forme  $(\cos \theta, \sin \theta)$  tels que :

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2 \sin 2\theta - \cos 2\theta = 0.$$

En prenant  $\varphi$  tel que  $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$  et  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , cela se traduit par  $\sin(2\theta - \varphi) = 0$ , c'est-à-dire  $\theta \equiv \frac{\varphi}{2} [\pi/2]$ .

Il resterait à étudier s'il s'agit effectivement, en chacun de ces points, d'un extremum.

**Ex. 74.** Soit  $n \geq 2$ , ainsi que  $s > 0$  et  $A = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}$ .

Déterminons les extrema de la restriction à  $A$  de  $f$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \prod_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

- Clairement  $A$  est un fermé, inclus dans  $[0, s]^n$ , donc un compact (dimension finie).
- La fonction polynomiale  $f$  est continue, donc elle admet un minimum et un maximum sur  $A$ . Elle est de plus à valeurs positives sur  $A$ . Il est immédiat que  $f(x) = 0$  si, et seulement s'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $x_i = 0$ . Le minimum vaut donc 0 et est atteint aux points où l'une au moins des coordonnées est nulle.
- Le maximum de  $f_A$  est donc atteint en des points de  $A' = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{*n} : \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}$  : ce sont donc ceux qui réalisent le maximum de  $f|_{A'}$ . Or :
  - \*  $f$  est de classe  $C^1$  puisque polynomiale sur l'ouvert  $\Omega = \mathbb{R}_+^{*n}$  ;
  - \*  $g : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - s$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  et  $A' = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$  ;
  - \* enfin,  $\nabla g(x) = (1, \dots, 1) \neq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ .

Le théorème d'optimisation sous contrainte nous donne qu'en un point  $x \in A'$  qui réalise le maximum de  $f|_{A'}$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\nabla f(x) = \lambda(1, \dots, 1).$$

Comme, pour tout  $x \in \Omega$ , on a :

$$\nabla f(x) = f(x) \left( \frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right),$$

on en déduit  $x_1 = \dots = x_n$ , et comme  $x_1 + \dots + x_n = s$ , on a  $x_i = \frac{s}{n}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Le maximum est donc atteint uniquement en  $(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n})$  et vaut  $\frac{s^n}{n^n}$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Remarque** On a donc :

$$\forall x \in A \quad \prod_{i=1}^n x_i \leq \frac{s^n}{n^n},$$

ce qui permet d'en déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n \quad \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

(si  $(x_1, \dots, x_n) = 0$ , c'est évident, et sinon, on prend  $s = x_1 + \cdots + x_n$ ).



## Démonstrations

**Théorème 2** C'est une conséquence immédiate du résultat suivant qui donne l'unicité d'un développement limité à l'ordre 1.

### Lemme

Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle qu'au voisinage de 0 on ait  $u(h) = o(h)$  est nulle.

**Démonstration.** Par définition des relations de comparaison, il existe une boule  $B = B_F(0, r)$  de  $E$ , avec  $r > 0$ , et une fonction  $\varepsilon : B \rightarrow F$  telles que  $u(h) = \|h\|\varepsilon(h)$  pour tout  $h \in B$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

Soit  $x \in E$ . Si  $x = 0$ , du fait que  $u$  est linéaire, on a  $u(0) = 0$ .

Si  $x \neq 0$ , pour tout  $t \in ]0, \frac{r}{\|x\|}]$ , on a  $u(tx) = \|tx\|\varepsilon(tx)$  et donc, par linéarité de  $u$  et homogénéité de la norme :

$$tu(x) = t\|x\|\varepsilon(tx) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u(x) = \|x\|\varepsilon(tx).$$

Puisque  $tx \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ , on a  $\varepsilon(tx) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ . On en déduit  $u(x) = 0$ .

Par suite  $u$  est l'application nulle. □

### Proposition 3

- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + o(h).$$

L'application  $u : h \mapsto hf'(a)$  étant linéaire, on en déduit que  $f$  est différentiable en  $a$  et que  $df(a) : h \mapsto hf'a$ .

- Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on a, au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h).$$

Par ailleurs, puisque  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ , en posant  $\alpha = df(a) \cdot 1 \in F$ , on a  $df(a) : t \mapsto t\alpha$ . Ainsi, au voisinage de 0, on a :

$$f(a + h) = f(a) + h\alpha + o(h)$$

et  $f$  est dérivable en  $a$ , de dérivée  $f'(a) = \alpha = df(a) \cdot 1$ .

**Proposition 4** Soit  $a \in E$ . Pour tout  $h \in E$  on a :

$$u(a + h) = u(a) + u(h),$$

donc au voisinage de 0 :

$$u(a + h) = u(a) + u(h) + o(h).$$

Par suite, l'application  $u$  est différentiable en  $a$  et  $du(a) = u$ .

**Proposition 5** La différentiabilité de  $f$  en  $a$  s'écrit  $f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h)$ , donc il existe un voisinage  $W$  de 0 et une fonction  $\varepsilon : W \rightarrow F$  telle que :

$$\forall h \in W \quad f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0.$$

Fixons  $v \in E$  et posons  $g : t \mapsto f(a + tv)$ . Il existe  $r > 0$  tel que  $B_F(0, r\|v\|) \subset W$ . Par conséquent, pour  $t \in ]-r, r[$  :

$$g(t) = f(a + tv) = f(a) + df(a) \cdot (tv) + |t|\|v\|\varepsilon(tv),$$

et donc, en utilisant la linéarité de  $df(a)$ , on a au voisinage de 0 :

$$g(t) = g(0) + t df(a) \cdot v + o(t).$$

Par suite,  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = df(a) \cdot v$ .

Ainsi  $f$  a une dérivée en  $a$  selon  $v$  et  $D_v f(a) = df(a) \cdot v$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Proposition 9** Pour tout  $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$ , on a :

$$(\nabla f(a) | h) = df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a) = (h | \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j),$$

la dernière égalité venant du fait que la base est orthonormée. Par unicité,  $\nabla f(a) = \sum_{j=1}^p \partial_j f(a) e_j$ .

**Proposition 11** Soit  $h$  un vecteur de norme 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$D_h f(a) = df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h) \leq \|\nabla f(a)\|. \quad (*)$$

Supposons  $\nabla f(a) \neq 0$ . On a l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $(*)$  si, et seulement si,  $h$  est positivement colinéaire à  $\nabla f(a)$ . Puisque  $h$  est unitaire, l'égalité est réalisée exactement lorsque  $h = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ .

### Proposition 12

- Supposons que  $f$  et  $g$  soient différentiables en  $a \in \Omega$ . Ainsi, au voisinage de 0, on a :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h) \quad (1)$$

$$g(a+h) = g(a) + dg(a) \cdot h + o(h). \quad (2)$$

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ; posons  $\varphi = \lambda f + \mu g$ . Par combinaison linéaire des égalités (1) et (2), il vient qu'au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} \varphi(a+h) &= \varphi(a) + \lambda df(a) \cdot h + \mu dg(a) \cdot h + o(h) \\ &= \varphi(a) + (\lambda df(a) + \mu dg(a)) \cdot h + o(h). \end{aligned}$$

Sachant que  $\lambda df(a) + \mu dg(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ , il s'ensuit que  $\lambda f + \mu g$  est différentiable en  $a$  et  $d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$ .

- Il est alors immédiat que si  $f$  et  $g$  sont différentiables, alors  $\lambda f + \mu g$  est différentiable. Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , les applications  $df$  et  $dg$  sont continues. Par combinaison linéaire, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , l'application  $\lambda df + \mu dg$  est continue. Par suite  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Proposition 14

- Supposons  $f_1, \dots, f_q$  différentiables en  $a$ ; on a alors, pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$  :

$$f_k(a+h) = f_k(a) + df_k(a) \cdot h + \alpha_k(h) \quad \text{avec} \quad \alpha_k(h) = o(h).$$

Soit  $h \in E$  tel que  $a+h \in \Omega$ .

Par  $q$ -linéarité de  $M$ , la quantité  $M(f_1(a+h), \dots, f_q(a+h))$  s'écrit comme somme de  $3^q$  termes de la forme  $M(u_1, \dots, u_q)$  où, pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $u_k = f_q(a)$ ,  $u_k = df_k(a) \cdot h$  ou  $u_k = \alpha_k(h)$ , et chaque  $u_k$  est soit constant soit dominé par  $h$  lorsque  $h$  tend vers  $+\infty$ . L'application  $M$  étant multilinéaire en dimension finie, il existe une constante  $C$  telle que :

$$\forall (x_1, \dots, x_q) \in F_1 \times \cdots \times F_q \quad \|M(x_1, \dots, x_q)\| \leq C \|x_1\| \cdots \|x_q\|. \quad (*)$$

En appliquant cette inégalité à l'un des  $q$ -uplets  $(u_1, \dots, u_q)$ , on voit donc que si, parmi les  $u_k$ , il y en a au moins deux qui ne sont pas constants, ou au moins un qui est négligeable devant  $h$ , alors  $M(u_1, \dots, u_q) = o(h)$ . Il reste donc :

$$\begin{aligned} M(f_1(a+h), \dots, f_q(a+h)) &= M(f_1(a), \dots, f_q(a)) \\ &+ \sum_{k=1}^q M(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), df_k(a) \cdot h, f_{k+1}(a), \dots, f_q(a)) + o(h) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $M(f_1, \dots, f_q)$  est différentiable en  $a$ , de différentielle :

$$h \mapsto \sum_{k=1}^q M(f_1(a), \dots, f_{k-1}(a), df_k(a) \cdot h, f_{k+1}(a), \dots, f_q(a))$$

puisque cette application est linéaire en  $h$  par linéarité des  $df_k(a)$  et multilinéarité de  $M$ .

- Le résultat concernant la différentiabilité sur  $\Omega$  est une conséquence immédiate du premier point.
- Supposons  $f_1, \dots, f_q$  de classe  $C^1$ . Soit  $h \in E$ . Les  $f_i$  sont alors continues, ainsi que les applications  $a \mapsto df_k(a) \cdot h$  d'après le lemme ci-dessous. Par multilinéarité de  $M$ , cela donne la continuité de l'application  $a \mapsto dM(f_1, \dots, f_q)(a) \cdot h$ . Grâce au même lemme, on en déduit la continuité de  $dM(f_1, \dots, f_q)$ .

**Lemme**

Une application  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est continue si, et seulement si, pour tout  $h \in E$ , l'application  $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ a & \longmapsto & u(a) \cdot h \end{array}$  est continue.

**Démonstration.**

- Supposons  $u$  continue. Soit  $h \in E$ . L'application  $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F \\ v & \longmapsto & v \cdot h \end{array}$  est linéaire, donc continue, puisque  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, ce qui donne la continuité de  $a \mapsto u(a) \cdot h$  par composition.
- Fixons une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ . Au moyen de l'isomorphisme  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , il suffit de montrer que l'application  $a \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u(a))$  est continue, c'est à dire que toutes ses fonctions composantes sont continues. Or, le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice de  $u(a)$  est  $\varphi_i(u(a) \cdot e_j)$ , où  $\varphi_i$  est la  $i$ -ème forme linéaire coordonnée dans la base  $\mathcal{C}$  dont la continuité, ainsi que celle de  $a \mapsto u(a) \cdot e_j$  par hypothèse, donne le résultat.  $\square$

**Proposition 17**

- Supposons que  $f$  soit différentiable en  $a \in \Omega$  et  $g$  différentiable en  $b = f(a)$ . La différentiabilité de  $g$  en  $b$  se traduit par l'existence d'une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $W$  de 0 telle que :

$$\forall k \in W \quad g(b+k) = g(b) + dg(b) \cdot k + \underbrace{\|\beta(k)\| \varepsilon(k)}_{\beta(k)} \quad \text{et} \quad \varepsilon(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0.$$

Par continuité de  $f$  en  $a$ , il existe un voisinage  $V$  de 0 tel que  $f(a+h) - f(a) \in W$  pour tout  $h \in V$ . La différentiabilité de  $f$  en  $a$  se traduit par l'existence d'une fonction  $\alpha$  définie sur  $V$  telle que :

$$\forall h \in V \quad f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \alpha(h) \quad \text{avec} \quad \alpha(h) = o(h). \quad (*)$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Soit  $h \in V$ . En posant  $k = f(a + h) - f(a) = df(a) \cdot h + \alpha(h)$ , on a :

$$\begin{aligned} g(f(a + h)) &= g(b + k) = g(b) + dg(b) \cdot k + \beta(k) \\ &= g(b) + dg(b) \cdot (df(a) \cdot h) + dg(b) \cdot \alpha(h) \\ &\quad + \|f(a + h) - f(a)\| \varepsilon(f(a + h) - f(a)). \end{aligned}$$

\* On a  $\|dg(b) \cdot \alpha(h)\| \leq \|dg(b)\| \|\alpha(h)\|$  ce qui donne :

$$dg(b) \cdot \alpha(h) = o(h) \quad \text{puisque } \alpha(h) = o(h).$$

\* D'autre part, la relation (\*) donne  $f(a + h) - f(a) = O(h)$  et comme  $\varepsilon$  tend vers 0 en 0, cela donne  $\|f(a + h) - f(a)\| \varepsilon(f(a + h) - f(a)) = o(h)$ .

Finalement :

$$(g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + (dg(b) \circ df(a)) \cdot h + o(h)$$

ce qui prouve que  $g \circ f$  différentiable en  $a$  et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

- Il est alors immédiat que la composée de deux fonctions différentiables est différentiable.

Supposons que  $f$  et  $g$  soient de classe  $C^1$ . Puisque  $f$  et  $dg$  sont continues, l'application  $(dg) \circ f$  est continue. Par ailleurs, l'application  $df$  est continue, ce qui implique que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto (dg(f(x)), df(x)) \end{aligned}$$

est également continue. De plus l'application :

$$\begin{aligned} B : \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (v, u) &\longmapsto v \circ u \end{aligned}$$

est bilinéaire, donc continue (tous les espaces sont de dimension finie).

Ainsi  $d(g \circ f) = B \circ \Phi$  est continue et  $g \circ f$  est de classe  $C^1$ .

**Proposition 19** En posant  $h = g \circ f$  et en notant  $(g_1, \dots, g_q)$  et  $(h_1, \dots, h_q)$  les fonctions composantes de  $g$  et  $h$  dans une base  $\mathcal{B}'$  de  $G$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a)) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(dg(b)) = \left( \frac{\partial g_k}{\partial y_i} \right)_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq i \leq n}}$$

$$\text{ainsi que} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(dh(a)) = \left( \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq k \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$$

et l'égalité  $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$  se traduit par l'égalité matricielle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(dh(a)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(dg(b)) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a)),$$

ce qui donne, pour tout  $(j, k) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!]$  :

$$\frac{\partial(g_k \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(b),$$

soit l'égalité annoncée composante par composante.

**Proposition 21** Il nous reste à démontrer le résultat dans le cas où  $t_0$  est une extrémité de  $I$ . Traitons par exemple le cas où  $t_0 = \min I$ .

Prolongeons  $\gamma$  sur  $]-\infty, t_0]$  en posant  $\forall t \leq t_0 \quad \gamma(t) = a + (t - t_0)\gamma'(t_0)$  (puisque  $a = \gamma(t_0)$ , il n'y a pas ambiguïté dans la définition de  $\gamma$  en  $t_0$ ).

Les restrictions de  $\gamma$  à  $I$  et à  $]-\infty, t_0]$  sont dérivables; en particulier,  $\gamma$  est dérivable à droite et à gauche en  $t_0$  et ces deux dérivées sont égales. Donc  $\gamma$  ainsi prolongée est dérivable. En particulier, elle est continue en  $t_0$  et  $\gamma(t_0)$  est dans l'ouvert  $\Omega$ . On peut donc trouver un intervalle ouvert contenant  $t_0$  sur lequel  $\gamma$  est à valeurs dans  $\Omega$  et en appliquant ce résultat à un tel intervalle on conclut grâce à l'étude précédente.

### Théorème 23

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons  $f$  de classe  $C^1$ . Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $x \in \Omega$ . Puisque  $f$  est différentiable en  $x$ , d'après le corollaire 6 de la page 802,  $\partial_j f(x)$  est définie et :

$$\partial_j f(x) = df(x) \cdot e_j.$$

L'application /

$$\begin{aligned} \Phi_j : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto u \cdot e_j \end{aligned}$$

est linéaire, donc continue car l'espace de départ  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, ce qui implique que  $\partial_j f = \Phi_j \circ df$  est continue.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Supposons que toutes les dérivées partielles soient définies et continues. On munit  $E$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  associée à la base  $\mathcal{B}$ . Soit  $a \in \Omega$ .

- Supposons d'abord que toutes les dérivées partielles soient nulles en  $a$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité, il existe un  $\eta > 0$  tel que  $B_F(a, \eta) \subset \Omega$  et que, pour tous  $x \in B_F(a, \eta)$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on ait  $\|\partial_j f(x)\| \leq \varepsilon/p$ . Soit  $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in B_F(0, \eta)$ .

On note  $s_k = a + h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$  pour  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$s_{k-1} + th_k e_k = a + \sum_{i=1}^{k-1} h_i e_i + th_k e_k \in B_F(a, \eta).$$

On peut donc définir, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , une fonction  $g_k$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  par :

$$g_k(t) = f(s_{k-1} + th_k e_k).$$

Comme  $g'_k(t) = h_k \partial_k f(s_{k-1} + th_k e_k)$  est bornée par  $\frac{\varepsilon}{p} |h_k| \leq \frac{\varepsilon}{p} \|h\|$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\|f(s_k) - f(s_{k-1})\| = \|g_k(1) - g_k(0)\| \leq \|h\| \frac{\varepsilon}{p}.$$

$$\begin{aligned} \text{Il s'ensuit que : } \|f(a+h) - f(a)\| &= \left\| \sum_{k=1}^p (f(s_k) - f(s_{k-1})) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^p \|f(s_k) - f(s_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^p \|h\| \frac{\varepsilon}{p} = \|h\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite,  $f(a+h) = f(a) + o(h)$  au voisinage de 0 et donc  $f$  est différentiable en  $a$  et  $df(a) = 0$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

- Dans le cas général, posons  $u : h \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \partial_j f(a)$ . Dans ces conditions, toutes les dérivées partielles de  $g = f - u$  sont définies et continues. Elles sont de plus toutes nulles en  $a$ . En vertu de ce qui précède,  $g$  est différentiable en  $a$ . Puisque  $u$  est linéaire, elle est différentiable en  $a$ , et donc  $f = g + u$  l'est également.

En prenant une base  $\mathcal{B}'$  de  $F$ , et en notant  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions composantes de  $f$ , la matrice de  $df(a)$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  est  $J_f(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ . La continuité des dérivées partielles de  $f$ , donc des dérivées partielles des  $f_i$ , donne la continuité de l'application  $J_f$  ainsi définie sur  $\Omega$ . Par l'isomorphisme  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $df = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} \circ J_f$  est continue, puisque  $(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1}$  est linéaire donc continue.

On en conclut que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposition 25** Nous savons déjà qu'une application constante a une différentielle nulle. Montrons le sens réciproque.

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  différentiable et de différentielle nulle.

Fixons  $a \in \Omega$  et posons  $A = \{x \in \Omega : f(x) = f(a)\}$ . Commençons par montrer que  $A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $\Omega$ .

- Puisque  $A = f^{-1}(\{f(a)\})$  et que l'application  $f$  est continue,  $A$  est un fermé de  $\Omega$ .
- Soit  $x \in A$ . Puisque  $\Omega$  est un ouvert de  $E$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B_\Omega(x, r) \subset \Omega$ . Puisque les boules sont convexes, d'après l'exemple 34 de la page 814, la restriction de  $f$  à  $B_\Omega(x, r)$  est constante. Il s'ensuit que  $B_\Omega(x, r) \subset A$ . Par conséquent  $A$  est un ouvert de  $\Omega$ .

Puisque  $A$  est non vide (il contient  $a$ ) et est à la fois ouvert et fermé dans  $\Omega$  qui est connexe par arcs, on a  $A = \Omega$  d'après l'exercice 7.18 de la page 311.

**Proposition 27** Raisonnons par récurrence descendante. Vu les hypothèses, il suffit de démontrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^i$ , avec  $i > 1$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{i-1}$ .

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^i$ , toutes ses dérivées partielles d'ordre  $i$  sont définies. Soit une dérivée partielle  $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$  d'ordre  $i-1$ . Toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 sont définies et continues, car ce sont des dérivées partielles d'ordre  $i$  de  $f$ . D'après le théorème fondamental  $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{i-1}} f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc continue. On en conclut que toutes les dérivées partielles d'ordre  $i-1$  sont continues et donc que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{i-1}$ .

### Corollaire 28

- Supposons que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^k$ . D'après la proposition 27 de la page 822 la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque les dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $f$  sont les dérivées partielles d'ordre  $k-1$  de  $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ , on en déduit que les dérivées partielles d'ordre 1 sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .
- Supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  soient définies, et qu'elles soient toutes de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Puisque les dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $f$  sont les dérivées partielles d'ordre  $k-1$  des fonctions  $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ , les dérivées partielles d'ordre  $k$  de  $f$  sont toutes continues et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Proposition 29** Démontrons par récurrence, pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'assertion :

$$\mathcal{H}_k : \forall (f, g) \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda f + \mu g \text{ est de classe } \mathcal{C}^k.$$

Le cas  $k = 0$  correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que  $\mathcal{H}_{k-1}$  soit vraie pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  et  $g : \Omega \rightarrow F$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On sait, par linéarité de la dérivation, que :

$$\partial_j(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial_j f + \mu \partial_j g.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à  $\partial_j f$ ,  $\partial_j g$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  montre que  $\lambda \partial_j f + \mu \partial_j g$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Ainsi, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , les fonctions  $\partial_j(\lambda f + \mu g)$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , et donc  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cela démontre  $\mathcal{H}_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Il vient immédiatement de ce qui précède que si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition 30** Démontrons par récurrence, pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'assertion :

$$\mathcal{H}_k : \forall (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{C}^k(\Omega, F_1) \times \cdots \times \mathcal{C}^k(\Omega, F_q) \quad M(f_1, \dots, f_q) \text{ est de classe } \mathcal{C}^k.$$

Le cas  $k = 0$  correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons  $\mathcal{H}_{k-1}$  vrai pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f_1 : \Omega \rightarrow F_1, \dots, f_q : \Omega \rightarrow F_q$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'après les propriétés de la dérivation des fonctions vectorielles, on a :

$$\partial_j(M(f_1, \dots, f_q)) = M(\partial_j f_1, f_2, \dots, f_q) + \cdots + M(f_1, \dots, f_{q-1}, \partial_j f_q).$$

Puisque  $f_1$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $f_2, \dots, f_q$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , car de classe  $\mathcal{C}^k$ , il vient, de l'hypothèse de récurrence, que  $M(\partial_j f_1, f_2, \dots, f_q)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . De même, les applications  $M(f_1, \dots, \partial_j f_i, \dots, f_q)$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , pour tout  $1 \leq i \leq q$ . Ainsi, par linéarité,  $\partial_j(M(f_1, \dots, f_q))$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

Puisque pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  les fonctions  $\partial_j(M(f_1, \dots, f_q))$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , on en conclut que  $M(f_1, \dots, f_q)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cela démontre  $\mathcal{H}_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Il vient immédiatement de ce qui précède que si  $f_1, \dots, f_q$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $M(f_1, \dots, f_q)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Proposition 32** Démontrons par récurrence, pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'assertion :

$$\mathcal{H}_k : \text{« Pour tout } f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \Omega') \text{ et tout } g \in \mathcal{C}^k(\Omega', G), \text{ l'application } g \circ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k. \text{ »}$$

Le cas  $k = 0$  correspond à une propriété connue des fonctions continues.

Supposons que  $\mathcal{H}_{k-1}$  soit vraie pour un  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  et  $g : \Omega' \rightarrow G$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ . En particulier  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Les fonctions coordonnées de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  sont notées  $f_1, \dots, f_n$ .

D'après la règle de la chaîne (proposition 19 de la page 810), pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$\partial_j(g \circ f) = \sum_{i=1}^n \partial_j f_i \times ((\partial_i g) \circ f).$$

Les applications  $\partial_j f_i$  et  $\partial_i g$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . De plus, la fonction  $f$  étant en particulier de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , l'hypothèse de récurrence donne que les applications  $(\partial_i g) \circ f$  sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Par somme et produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ , pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application  $\partial_j(g \circ f)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ . Par conséquent  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ . Cela termine la démonstration par récurrence.

Il vient immédiatement de ce qui précède, que si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Théorème 33** Il suffit d'appliquer le lemme suivant à  $u = e_i$  et  $v = e_j$ .

**Lemme**

Soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On a alors :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad D_u D_v f = D_v D_u f.$$

**Démonstration.** Soit  $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ . Puisque  $D_u f = \sum_{j=1}^p u_j \partial_j f$  et que les  $\partial_j f$  sont

de classe  $\mathcal{C}^1$ , la fonction  $D_u f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Le même type d'argument montre que  $D_v D_u f$  est continue pour tout  $v \in \mathbb{R}^p$ .

Puisque  $\Omega$  est un ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B_F(a, r) \subset \Omega$ . Soit  $(u, v) \in E^2$  tel que  $\|u\| + \|v\| \leq r$ . On a alors  $\forall (s, t) \in [0, 1]^2 \quad a + su + tv \in \Omega$ .

Notons  $C(u, v) = f(a + u + v) - f(a + u) - f(a + v) + f(a)$ .

- Montrons que  $C(u, v) = \int_0^1 \left( \int_0^1 D_v D_u f(a + su + tv) dt \right) ds$ . Pour cela posons la fonction  $g : s \mapsto f(a + su + v) - f(a + su)$ , définie sur  $[0, 1]$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc :

$$C(u, v) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(s) ds = \int_0^1 D_u f(a + su + v) - D_u f(a + su) ds.$$

La fonction  $D_u f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , pour  $s \in [0, 1]$  :

$$D_u f(a + su + v) - D_u f(a + su) = \int_0^1 D_v D_u f(a + su + tv) dt.$$

Il s'ensuit que :

$$C(u, v) = \int_0^1 \left( \int_0^1 D_v D_u f(a + su + tv) dt \right) ds.$$

- Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . On a, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} C(\lambda u, \lambda v) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 D_{\lambda v} D_{\lambda u} f(a + s\lambda u + t\lambda v) dt \right) ds \\ &= \lambda^2 \int_0^1 \left( \int_0^1 D_v D_u f(a + s\lambda u + t\lambda v) dt \right) ds \end{aligned}$$

(rappelons que pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a  $D_{\lambda u} g = \lambda D_u g$ ).

Pour conclure, utilisons la définition de la limite. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $D_v D_u f$ , il existe  $\eta \in ]0, r]$  tel que  $\|D_v D_u f(a + h) - D_v D_u f(a)\| \leq \varepsilon$  pour tout  $h \in B_F(0, \eta)$ . Ainsi, pour  $0 < |\lambda| \leq \frac{\eta}{1 + \|u\| + \|v\|}$ , puisque  $\|s\lambda u + t\lambda v\| \leq \eta$  pour  $(s, t) \in [0, 1]^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} - D_v D_u f(a) \right\| &= \left\| \int_0^1 \left( \int_0^1 D_v D_u f(a + s\lambda u + t\lambda v) - D_v D_u f(a) dt \right) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 \|D_v D_u f(a + s\lambda u + t\lambda v) - D_v D_u f(a)\| dt \right) ds \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 \varepsilon dt \right) ds = \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent :  $\frac{C(\lambda u, \lambda v)}{\lambda^2} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} D_v D_u f(a)$ .

- En échangeant les rôles de  $u$  et  $v$ , on a aussi  $\frac{C(\lambda v, \lambda u)}{\lambda^2} \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} D_u D_v f(a)$ .  
Puisqu'évidemment  $C(\lambda v, \lambda u) = C(\lambda u, \lambda v)$ , on obtient  $D_v D_u f(a) = D_u D_v f(a)$ .  $\square$

**Théorème 34** On munit  $\mathbb{R}^p$  du produit scalaire canonique et  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  de la norme subordonnée à la norme euclidienne associée.

Il s'agit de montrer que :

$$f(a+h) - f(a) - (\nabla f(a) | h) - \frac{1}{2} h^T H_f(a)h \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|^2).$$

Posons  $g : h \mapsto f(a+h) - f(a) - (\nabla f(a) | h) - \frac{1}{2} h^T H_f(a)h$ , définie sur l'ouvert  $\Omega' = -a + \Omega$ . Puisque les applications  $h \mapsto (\nabla f(a) | h)$  et  $h \mapsto h^T H_f(a)h$  sont polynomiales,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On a de plus :

$$\nabla g(0) = 0 \quad \text{et} \quad H_g(0) = 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

- Par continuité des applications  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$  en 0, il existe un réel  $\eta > 0$  tel que  $B_F(0, \eta) \subset \Omega'$  et :  

$$\forall x \in B_F(0, \eta) \quad \|H_f(x)\| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Fixons un tel  $\eta$ .

- Posons  $h \in \mathbb{R}^p$  tel que  $\|h\| \leq \eta$  et  $\varphi : t \mapsto g(th)$ , définie sur  $[0, 1]$  (en effet, pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $th \in B_F(0, \eta) \subset \Omega'$ ). On a d'après l'exemple 59 de la page 825 :

$$\varphi'(t) = (\nabla g(th) | h) \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = h^T H_g(th)h.$$

En particulier  $\varphi'(0) = 0$ . Soit  $t \in [0, 1]$ . D'après  $(*)$ , on a  $\|H_g(th)\| \leq \varepsilon$ , donc :

$$\|H_g(th)h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On déduit alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$|h^T (H_g(th)h)| \leq \|h\| \|H_g(th)h\| \leq \varepsilon \|h\|^2,$$

c'est-à-dire :

$$|\varphi''(t)| \leq \varepsilon \|h\|^2. \quad (**)$$

- Compte tenu de  $(**)$  et de  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ , l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $\varphi$  donne :

$$|\varphi(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad |g(h)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|^2.$$

Cela conclut alors, puisque cette inégalité est valable pour tout  $h$  vérifiant  $\|h\| \leq \eta$ .

**Proposition 35** Supposons que  $f$  admette un extremum local en  $a \in \overset{\circ}{A}$  et que  $f$  soit différentiable en  $a$ . Pour fixer les idées, supposons que ce soit un maximum. Puisqu'il s'agit d'un maximum et que  $a$  est un point intérieur de  $A$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $B_F(a, \eta) \subset A$  et  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x \in B_F(a, \eta)$ .

Soit  $h \in E \setminus \{0\}$ . L'application  $\varphi : t \mapsto f(a + th)$  est définie sur l'intervalle  $I = \left] -\frac{\eta}{\|h\|}, \frac{\eta}{\|h\|} \right[$  et  $\varphi$  admet un maximum en 0. Puisque  $f$  est différentiable en  $a$ , l'application  $\varphi$  est dérivable en 0 et  $\varphi'(0) = D_h f(a) = df(a) \cdot h$ .

On sait que si une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert admet un maximum en un point où elle dérivable, alors sa dérivée est nulle en ce point. Par conséquent :

$$df(a) \cdot h = \varphi'(0) = 0.$$

Cette dernière relation étant vérifiée pour tout  $h \in E$  (c'est immédiat si  $h = 0$ ), on en déduit que  $df(a) = 0$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**Proposition 36** Traitons le cas d'un minimum local. L'autre s'en déduira en considérant  $-f$ .

Soit  $a$  un point où  $f$  admet un minimum local. On sait que  $a$  est un point critique. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tel que  $x^T H_f(a)x < 0$ .

Au voisinage de 0, on a, d'après la formule de Taylor-Young (théorème 34 de la page 826) :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + o(\|h\|^2) = f(a) + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h + o(\|h\|^2).$$

Ainsi, lorsque  $t$  tend vers 0 :

$$f(a+tx) = f(a) + \frac{t^2}{2}x^T H_f(a)x + o(t^2),$$

Ainsi, la fonction  $t \mapsto f(a+tx) - f(a)$  est à valeurs strictement négatives sur un voisinage de 0 privé de 0, contredisant le fait que  $f$  admette un minimum local en  $a$ .

### Proposition 37

- Puisque  $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ , l'application  $(h, k) \mapsto h^T H_f(a)k$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^p$  (voir remarque de la page 167). On munit  $\mathbb{R}^p$  de la norme euclidienne associée.
- La formule de Taylor-Young (théorème 34 de la page 826) s'écrit donc, avec cette norme :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + \frac{1}{2}\|h\|^2 + o(\|h\|^2).$$

Sachant que  $a$  est un point critique, cela s'écrit aussi :

$$f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}\|h\|^2 = o(\|h\|^2)$$

et il existe donc  $\eta > 0$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{R}^p$  tel que  $a+h \in \Omega$  et  $\|h\| \leq \eta$ , on ait :

$$\left| f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}\|h\|^2 \right| \leq \frac{1}{4}\|h\|^2,$$

ce qui donne :

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{4}\|h\|^2.$$

La fonction  $f$  admet bien un minimum local strict en  $a$ .

**Proposition 38** Soit  $v \in T_a X$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  un arc tracé sur  $X$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . Puisque  $\gamma$  est tracé sur  $X$  et que  $f$  admet un extremum local en  $a$ , la fonction  $\varphi = f \circ \gamma$  admet un extremum local en 0, qui est un point intérieur de  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Il s'ensuit que  $\varphi'(0) = 0$ . Or par dérivation le long d'un arc :

$$\varphi'(0) = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = df(a) \cdot v.$$

Cela prouve que  $T_a X \subset \text{Ker } df(a)$ .

### Théorème 39

Supposons que  $f|_X$  admette un extremum local en  $a \in X$  tel que  $g(a) = 0$  et  $dg(a) \neq 0$ .

- D'après le théorème 26 de la page 818, on a  $T_a X = \text{Ker } dg(a)$ .
- La proposition 38 donne alors que  $\text{Ker } dg(a) \subset \text{Ker } df(a)$ .
- Puisque  $f$  et  $g$  sont des fonctions numériques,  $df(a)$  et  $dg(a)$  sont des formes linéaires.
  - \* Si  $df(a) \neq 0$ , puisque  $dg(a) \neq 0$  par hypothèse, ces deux formes linéaires ont même noyau donc sont proportionnelles et il existe ainsi  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $df(a) = \lambda dg(a)$ .
  - \* Si  $df(a) = 0$ , on a  $df(a) = 0 \times dg(a)$ .

## S'entraîner et approfondir

### Différentielle

**19.1** Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\rightarrow^{797} f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , montrer l'existence et calculer  $D_{(u,v)}f(0, 0)$ .

2. Calculer  $f(t, t^2)$  pour  $t \in \mathbb{R}^*$ . La fonction  $f$  est-elle continue ?

**19.2** On considère  $\mathbb{C}$  muni de sa structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$\rightarrow^{799}$  Montrer que  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  est différentiable en tout point et donner sa différentielle.

$$z \mapsto 1/z$$

**19.3** Montrer la différentiabilité de l'application  $\det$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\rightarrow^{808}$  Montrer que sa différentielle en  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est  $H \mapsto \text{tr}(H \text{Com}(A)^T)$ .

**19.4** Montrer que l'application définie sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  par  $M \mapsto M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et donner sa différentielle.

**19.5** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On dit que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0 \in \Omega$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$  existe.

En notant  $P = \text{Re } f$  et  $Q = \text{Im } f$ , montrer que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0 \in \Omega$  si, et seulement si,  $f$  est différentiable en  $z_0$  et :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

Ces relations sont connues sous le nom d'**équations de Cauchy-Riemann**.

**19.6** Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0$$

est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?

**19.7** On dit qu'une partie  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est un **cône positif** si pour tout  $x \in C$  et  $t > 0$  on a  $tx \in C$ .

Soit  $C$  un cône positif non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  est **homogène de degré  $\alpha$**  si :

$$\forall (x, t) \in C \times \mathbb{R}_+^* \quad f(tx) = t^\alpha f(x).$$

On suppose dans la suite que  $C$  est également un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbb{R})$ .

1. Démontrer que si la fonction  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , alors les dérivées partielles de  $f$  sont homogènes de degré  $\alpha - 1$ .

2. Démontrer que la fonction  $f$  est homogène de degré  $\alpha$  si, et seulement si :

$$\forall x \in \Omega \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x). \quad (\text{Relation d'Euler})$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**19.8** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  par :

$$f(x, y) = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}.$$

Montrer que  $f$  se prolonge sur  $\mathbb{R}^2$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Indication.** On pourra utiliser la fonction  $\psi : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  prolongée par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

**19.9** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  par :

$$F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

1. Montrer que  $F$  admet un prolongement  $G$  continu sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Montrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors la fonction  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Indication.** On pourra écrire  $f(y) - f(x) = (y - x) \int_0^1 f'(x + t(y - x)) dt$ .

\* **19.10** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On pose  $g : (x, y) \mapsto \int_0^x f(t, y) dt$ .

1. Montrer l'existence de  $\frac{\partial g}{\partial x}$  et la calculer.

2. Faire de même avec  $\frac{\partial g}{\partial y}$ .

3. Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

4. On considère deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $F : u \mapsto \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f(t, u) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer  $F'$ .

## Vecteurs tangents

**19.11** Soit  $X$  une partie d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

→<sup>815</sup>

1. Soit  $a \in X$  et  $r > 0$ . Montrer que  $T_a X = T_a(X \cap B_O(a, r))$ .

2. Quels sont les vecteurs tangents à  $X$  en un point **isolé**, c'est-à-dire un point  $a \in X$  pour lequel il existe  $r > 0$  tel que  $X \cap B_O(a, r) = \{a\}$  ?

**19.12** Quels sont les vecteurs tangents à  $X = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  en  $(0, 0)$  ? en  $(1, 0)$  ? en  $(1, 1)$  ?

→<sup>815</sup>

**19.13** Soit  $S$  la surface de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $z = xy$  et  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $S$ .

1. Déterminer le plan tangent à  $S$  en  $M_0$ .

2. Montrer que l'intersection de ce plan avec  $S$  est la réunion de deux droites affines.

\* **19.14** 1. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents au groupe orthogonal  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$  est inclus dans l'ensemble  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  des matrices antisymétriques réelles.

2. Montrer l'inclusion réciproque.

**Indication.** Considérer l'application  $\exp$  sur l'ensemble  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

## Classe $\mathcal{C}^k$

**19.15** Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

→823

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Montrer l'existence et calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

**19.16** Soit  $\Omega$  un ouvert convexe non vide de  $E = \mathbb{R}^p$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On dit que  $f$  est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

1. Soit  $a \in \Omega$  et  $h \in E$ . On pose  $\varphi : t \mapsto f(a + th)$ .

Montrer que  $\varphi$  est définie au voisinage de 0, et qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur tout intervalle  $I$  où elle est définie, avec :

$$\forall t \in I \quad \varphi''(t) = h^T H_f(a + th) h.$$

2. Montrer que  $f$  est convexe si, et seulement si, pour tout  $a \in \Omega$ , la matrice hessienne  $H_f(a)$  est positive.

\* **19.17** Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

1. Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son ouvert  $\Omega'$  de définition et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de  $f$ .
2. On considère l'équation :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{E}$$

- (a) On suppose  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Montrer que toute solution de (E) est constante.
- (b) On suppose  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Montrer que  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  est solution de (E) si, et seulement s'il existe  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $2\pi$ -périodique telle que, pour tout  $(x, y) \in \Omega$ , on ait  $f(x, y) = \varphi(\theta)$  où  $\theta$  est tel que  $(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \theta, \sin \theta)$ .

**19.18** Le **laplacien** d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  est  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ . On définit  $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

1. Exprimer  $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .
2. Exprimer  $\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  en fonction des dérivées partielles de  $g$ .

\* **19.19** On muni  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $J_f$  soit à valeurs dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

1. **Lemme des tresses**

Soit  $X$  un ensemble non vide et  $g : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières. Démontrer que  $g$  est nulle.

2. Démontrer que  $J_f$  est constante.
3. En déduire que  $f$  est la composée d'une translation et d'une isométrie vectorielle.

## Chapitre 19. Calcul différentiel

### Optimisation

**19.20** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$      $\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xrightarrow{\text{à } x^3} & (x, y) & \longmapsto & y^2(y^2 - x^4). \end{array}$

1. Visualiser sur un dessin les trois domaines de  $\mathbb{R}^2$  où la fonction  $f$  est nulle, où elle prend des valeurs strictement positives, et où elle prend des valeurs strictement négatives.
2. Justifier alors rigoureusement ce que la question précédente permet d'intuiter :
  - pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $\varphi : t \mapsto f(tu)$  admet un minimum local en 0 ;
  - pourtant, la fonction  $f$  ne présente pas de minimum local en 0.

**19.21** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension supérieure à 2,  $S$  sa sphère unité et  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . On pose  $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}$      $\begin{array}{ccc} & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (u(x) | x). \end{array}$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$  et déterminer son gradient.
2. Sans utiliser les résultats du chapitre 4 concernant les endomorphismes autoadjoints, montrer que  $f_{|S}$  admet un maximum et que s'il est atteint en  $a \in S$ , alors  $\nabla f(a)$  et  $a$  sont colinéaires.
3. Retrouver ainsi que  $u$  admet une valeur propre réelle.

**19.22** Déterminer les extrema des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4.$$

**19.23** Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$g(x, y) = (2x^2 + 3y^2) \exp(-(x^2 + y^2)).$$

1. Déterminer une fonction  $h$  telle que :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x, y) = h(x^2 + y^2, y^2).$$
2. En déduire les extrema de  $g$ .

**19.24** Soit  $U \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Déterminer les extrema de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto X^T A X + 2 U^T X. \end{aligned}$$

**19.25** Soit  $\Omega$  un ouvert convexe non vide d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **convexe**, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y).$$

Montrer que  $f$  admet un minimum en  $a \in \Omega$  si, et seulement si,  $a$  est un point critique de  $f$ .

**19.26** Le plan  $\mathbb{R}^2$  est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Donner l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $A(1, 0)$ ,  $B(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$  et  $C(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ .  
On se restreindra au cas où  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ .
2. Déterminer les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle de rayon 1.

**19.27** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$ .

1. Soit  $v \in E$ . Démontrer que  $g : x \mapsto f(x) - (x | v)$  admet un minimum.
2. En déduire que l'application  $\nabla f$  est surjective.

**19.28** On pose  $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ .

Déterminer les extrema sur  $\mathcal{E}$  de la fonction  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ .

## Solutions des exercices

**19.1** 1. Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

- Supposons  $v \neq 0$ . Pour tout  $t \neq 0$  on a :

$$f(tu, tv) = t \frac{u^2 v}{t^2 u^4 + v^2}$$

et cette expression est encore valable pour  $t = 0$  puisque  $f(0, 0) = 0$ .

Donc  $f(tu, tv) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \frac{u^2}{v}$ , ce qui prouve que la fonction  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon le vecteur  $(u, v)$  avec  $D_{(u,v)} f(0, 0) = \frac{u^2}{v}$ .

- Si  $v = 0$ , on a  $f(tu, tv) = f(tu, 0) = 0$ , donc  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon le vecteur  $(u, v)$  et  $D_{(u,v)} f(0, 0) = 0$ .

2. Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ , on a  $f(t, t^2) = \frac{1}{2}$  tandis que  $f(0, 0) = 0$ . Il s'ensuit que  $f$  n'est pas continue en 0, sinon, par composition,  $t \mapsto f(t, t^2)$  serait continue en 0.

**19.2** Il est immédiat que  $\mathbb{C}^*$  est un ouvert. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Pour tout  $h \in \mathbb{C}$  tel que  $|h| < |z|$ , on a :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{(z+h)z}.$$

Par ailleurs,  $\frac{1}{(z+h)z} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \frac{1}{z^2}$  et donc  $\frac{1}{z(z+h)} = \frac{1}{z^2} + o(1)$ . Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(z+h) - f(z) = -\frac{h}{z^2} + o(h).$$

Il est clair que l'application  $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longmapsto & -\frac{h}{z^2} \end{array}$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Par conséquent  $f$  est différentiable en  $z$  et :

$$\forall h \in \mathbb{C} \quad df(z) \cdot h = -\frac{h}{z^2}.$$

**19.3** • La fonction  $f = \det$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Notons  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Calculons les dérivées partielles de la fonction  $f$  en  $A$  dans cette base, c'est-à-dire les  $D_{E_{i,j}} f(A)$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a :

$$f(A + tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} + t & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

donc, par linéarité du déterminant par rapport à la  $j$ -ème colonne :

$$f(A + tE_{i,j}) = \det A + t \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ = f(A) + t(-1)^{i+j} \Delta_{i,j},$$

où  $\Delta_{i,j}$  est le mineur d'indice  $(i,j)$  de  $A$ . Il s'ensuit que :

$$\mathrm{D}_{E_{i,j}} f(A) = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

- L'expression de la différentielle d'une fonction différentiable à l'aide de ses dérivées partielles donne, pour tout  $H = (h_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\mathrm{d}f(A) \cdot H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = \mathrm{tr}(H \mathrm{Com}(A)^T).$$

En particulier, si  $A$  est inversible :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f(A) \cdot H = (\det A) \mathrm{tr}(HA^{-1}).$$

**19.4** À l'exemple 25 de la page 810 il a été rappelé que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que l'application  $f : M \mapsto M^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  puisque ses fonctions coordonnées sont rationnelles.

Soit  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  ; on a  $M \times M^{-1} = I_n$ . Par suite, l'application  $M \mapsto M \times f(M)$  est constante sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et donc sa différentielle est nulle. Ainsi, le produit matriciel définissant une application bilinéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ , le corollaire 15 de la page 807 donne, pour  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad H \times M^{-1} + M \times (\mathrm{d}f(M) \cdot H) = 0.$$

On en déduit, pour  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ , que :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{d}f(M) \cdot H = -M^{-1} \times H \times M^{-1}.$$

**19.5** Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  est muni de la base  $\mathcal{B} = (1, i)$ .

- Supposons que  $f$  soit  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ . Il existe alors un nombre complexe, que l'on peut noter  $f'(z_0)$ , tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$ .

Notons  $u$  l'application définie sur  $\mathbb{C}$  par  $u(h) = hf'(z_0)$ . Par définition, au voisinage de 0 :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + o(h) = f(z_0) + u(h) + o(h).$$

De plus  $u$  est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire, car il s'agit d'une homothétie. *A fortiori* elle est  $\mathbb{R}$ -linéaire et donc  $f$  est différentiable en  $z_0$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Donnons un calcul de  $f'(z_0)$ . La différentiabilité implique l'existence de  $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0)$  et  $\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$ . Par définition, on a :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{(P(z_0 + h) - P(z_0)) + i(Q(z_0 + h) - Q(z_0))}{h} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a également } f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{(P(z_0 + ih) - P(z_0)) + i(Q(z_0 + ih) - Q(z_0))}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{Q(z_0 + ih) - Q(z_0) - i(P(z_0 + ih) - P(z_0))}{h} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

- Soit maintenant  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction différentiable en  $z_0$  telle que  $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$  et  $\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$ . L'expression de la différentielle en termes de dérivées partielles donne, pour tout  $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} df(z_0) \cdot h &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \\ &= \left( h_1 \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + h_2 \frac{\partial P}{\partial y}(z_0) \right) + i \left( h_1 \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2 \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \right). \end{aligned}$$

En utilisant les relations entre dérivées partielles, on obtient :

$$df(z_0) \cdot h = \left( h_1 \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) - h_2 \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) \right) + i \left( h_1 \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + h_2 \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) \right)$$

et l'on reconnaît dans cette expression le produit  $h\ell$ , où  $\ell = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)$ .

Par conséquent, la différentiabilité donne :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h\ell + o(h) \quad \text{ou encore} \quad \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \ell + o(1),$$

ce qui implique que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ .

- 19.6** • Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $x \mapsto f(x, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Or :

$$f(x, x) = \frac{1}{2}|x|^{2(\alpha-1)} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Pour que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$ , il faut donc  $2\alpha - 2 > 1$ , c'est-à-dire  $\alpha > 3/2$ .

- Réiproquement, si  $\alpha > 3/2$ , alors la fonction  $\varphi : x \mapsto |x|^\alpha$  est de classe  $C^1$  et sa dérivée est donnée par  $\varphi'(x) = \varepsilon(x)\alpha|x|^{\alpha-1}$ , où  $\varepsilon(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $\varepsilon(x) = -1$  sinon. Il s'ensuit, du fait que  $f(x, y) = \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{x^2+y^2}$ , que  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (caractère local de la continuité). De plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi(y) \frac{\varphi'(x)(x^2 + y^2) - 2x\varphi(x)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Soit  $(x, y) \neq (0, 0)$ . En posant  $r = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a  $|x| \leq r$  et  $|y| \leq r$ , donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq r^\alpha \left( \frac{\alpha r^{\alpha-1} \times r^2 + 2r \times r^\alpha}{r^4} \right) = (\alpha + 2)r^{2\alpha-3}$$

et cette inégalité est vraie si  $(x, y) = (0, 0)$  puisque, la fonction  $x \mapsto f(x, 0)$  étant nulle, on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

Comme  $2\alpha - 3 > 0$ , on a  $\lim_{(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , ce qui prouve que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, 0)$ .

Par symétrie,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue en  $(0, 0)$ .

La fonction  $f$  est donc de classe  $C^1$  si, et seulement si,  $\alpha > 3/2$ .

- 19.7** 1. Soit  $f \in C^1(C, \mathbb{R})$  une fonction homogène de degré  $\alpha$  et  $t > 0$ .

Considérons  $h : x \mapsto f(tx)$ . Pour tout  $x \in C$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ .

Si de plus  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , on a  $h(x) = t^\alpha f(x)$  donc  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ .

Par conséquent :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

2. Soit  $x \in C$ . Posons  $g : t \mapsto f(tx) = f(tx_1, \dots, tx_n)$ . La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , car  $C$  est un cône positif. Elle est de classe  $C^1$  par composition et :

$$\forall t > 0 \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

- Supposons que  $f$  soit homogène de degré  $\alpha$ . On a donc  $g(t) = t^\alpha f(x)$  pour tout  $t > 0$ , donc :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

En particulier, pour  $t = 1$ , on obtient :

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x).$$

- Réiproquement, supposons que  $f$  vérifie la relation d'Euler. On a alors :

$$\forall t > 0 \quad tg'(t) = \sum_{i=1}^n tx_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = \alpha f(tx) = \alpha g(t)$$

donc  $g$  vérifie sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $ty' - \alpha y = 0$ , dont les solutions sont les fonctions  $t \mapsto \lambda t^\alpha$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On en déduit :

$$\forall t > 0 \quad f(tx) = g(t) = t^\alpha g(1) = t^\alpha f(x).$$

Par suite, la fonction  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**19.8** Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $x \neq y$ , on a :

$$f(x, y) = 2 \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}{y-x} = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \psi\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

La fonction  $\psi$  est la somme sur  $\mathbb{R}$  de la série entière  $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$ , donc est de classe  $C^\infty$ .

Les fonctions  $(x, y) \mapsto \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)$  et  $(x, y) \mapsto \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$  sont de classe  $C^\infty$ , par opérations sur les fonctions de classe  $C^\infty$ . Ainsi la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\tilde{f}(x, y) = \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \psi\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

définit un prolongement de classe  $C^\infty$  de  $f$  à  $\mathbb{R}^2$ .

**19.9** 1. Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , on peut écrire, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt = (y-x) \int_0^1 f'\left(x+t(y-x)\right) dt.$$

Donc, la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$G(x, y) = \int_0^1 f'\left(x+t(y-x)\right) dt$$

est un prolongement de  $F$ , et il vérifie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$G(x, x) = \int_0^1 f'\left(x+t(x-x)\right) dt = \int_0^1 f'(x) dt = f'(x).$$

Montrons la continuité de  $G$  à l'aide du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, le paramètre étant ici le couple  $(x, y)$ .

- Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $t \mapsto f'\left(x+t(y-x)\right)$  est continue (par morceaux) sur le segment  $[0, 1]$  par continuité de  $f'$ . Elle est donc intégrable.
- Pour tout  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $(x, y) \mapsto f'\left(x+t(y-x)\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  par composition.
- **Hypothèse de domination.** Soit  $R > 0$  et  $(x, y) \in [-R, R]^2$ .

On a  $x + t(y-x) = (1-t)x + ty \in [-R, R]$  pour tout  $t \in [0, 1]$  par convexité de  $[-R, R]$ . Puisque  $f'$  est continue, elle est bornée sur le segment  $[-R, R]$  par une certaine constante  $M$ , ce qui donne :

$$\forall (x, y) \in [-R, R]^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad |f'\left(x+t(y-x)\right)| \leq M.$$

La fonction constante égale à  $M$  étant intégrable sur l'intervalle borné  $[0, 1]$ , cela fournit l'hypothèse de domination sur  $[-R, R]^2$  et donc au voisinage de tout point de  $\mathbb{R}^2$ , puisque les parties  $]-R, R[^2$  forment un recouvrement de  $\mathbb{R}^2$  par des ouverts quand  $R$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ .

En conclusion,  $G$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. • Démontrons que  $\frac{\partial G}{\partial x}$  est définie. Pour cela fixons  $y \in \mathbb{R}$  et montrons la dérivabilité de la fonction  $x \mapsto G(x, y) = \int_0^1 f'\left(x+t(y-x)\right) dt$ .

\* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto f'\left(x+t(y-x)\right)$  est continue, donc intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .

- \* Pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application  $g_t : x \mapsto f'(x + t(y - x))$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'_t(x) = (1-t) f''(x + t(y - x)).$$

- \* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto g'_t(x)$  est continue, puisque  $f''$  est continue.

\* **Hypothèse de domination.** Soit  $J$  un segment de  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $(x, t) \mapsto f''(x + t(y - x))$  est continue sur le compact  $J \times [0, 1]$ , donc  $y$  est bornée par une constante  $M$ , ce qui donne :

$$\forall x \in J \quad \forall t \in [0, 1] \quad |(1-t)f''(x + t(y - x))| \leq (1-t)M,$$

et la fonction  $t \mapsto (1-t)M$  est continue donc intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .

Cela fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

En conclusion, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous donne l'existence de  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 (1-t) f''(x + t(y - x)) dt.$$

- De la même manière que nous avons démontré la continuité de  $G$ , on démontre la continuité de  $\frac{\partial G}{\partial x}$ . Par suite  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Par symétrie, puisque  $G(x, y) = G(y, x)$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on obtient l'existence et la continuité de la fonction  $\frac{\partial G}{\partial y}$  avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(y, x) = \int_0^1 (1-t) f''(y + t(x - y)) dt.$$

Ainsi,  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  par le théorème fondamental.

- 19.10** 1. À  $y$  fixé, l'application  $x \mapsto g(x, y)$  est dérivable, de dérivée  $x \mapsto f(x, y)$  (intégrale fonction de sa borne supérieure), donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Notons  $I$  le segment d'extrémités 0 et  $x$ .

- Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto f(t, y)$  est continue sur  $I$ .
- Pour tout  $t \in I$ , l'application  $y \mapsto f(t, y)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- **Hypothèse de domination.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $M$  est un majorant de la fonction continue  $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$  sur le compact  $I \times [-a, a]$ , on a :

$$\forall (t, y) \in I \times [-a, a] \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq M$$

et la fonction constante  $M$  est intégrable sur le segment  $I$ .

Cela assure la domination de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $y \mapsto \int_0^x f(t, y) dt$  est donc dérivable et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt.$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

3. Démontrons la continuité des dérivées partielles de  $g$ .

- La fonction  $\frac{\partial g}{\partial x} = f$  est continue.
- Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par le changement de variable  $[t = xu]$ , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y) du.$$

Montrons que  $\Phi : (x, y) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y) du$  est continue.

\* pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y)$  est continue (par morceaux) sur  $[0, 1]$  ;

\* pour tout  $u \in [0, 1]$ , la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  ;

\* **Hypothèse de domination au voisinage de tout point.**

Soit  $a > 0$ . Par continuité, la fonction  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$  est majorée par une constante  $M$  sur le compact  $K_a = [-a, a]^2$  et donc :

$$\forall (x, y) \in K_a \quad \forall u \in [0, 1] \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y) \right| \leq M,$$

la fonction constante  $M$  étant intégrable sur le segment  $[0, 1]$ . Comme  $\mathbb{R}^2$  est recouvert par les ouverts  $\overset{\circ}{K}_a = ]-a, a[^2$ , on a une domination de  $\frac{\partial f}{\partial y}(xu, y)$  au voisinage de tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

Par conséquent, la fonction  $(x, y) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(xu, y) du$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

On en déduit la continuité de  $\frac{\partial g}{\partial y}$ .

Ainsi,  $g$  est de classe  $C^1$ .

4. On remarque que  $F(u) = g(\beta(u), u) - g(\alpha(u), u)$ . Comme  $g$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont de classe  $C^1$ , la règle de la chaîne donne le caractère  $C^1$  de  $F$  sur  $I$  avec, pour tout  $u \in I$  :

$$\begin{aligned} F'(u) &= \beta'(u) \frac{\partial g}{\partial x}(\beta(u), u) + \frac{\partial g}{\partial y}(\beta(u), u) - \alpha'(u) \frac{\partial g}{\partial x}(\alpha(u), u) - \frac{\partial g}{\partial y}(\alpha(u), u) \\ &= \beta'(u) f(\beta(u), u) + \int_0^{\beta(u)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, u) dt - \alpha'(u) f(\alpha(u), u) - \int_0^{\alpha(u)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, u) dt \\ &= \beta'(u) f(\beta(u), u) - \alpha'(u) f(\alpha(u), u) + \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, u) dt. \end{aligned}$$

**19.11** 1. Il est clair que l'on a  $T_a(X \cap B_O(a, r)) \subset T_a X$  puisque tout arc tracé sur  $X \cap B_O(a, r)$  est évidemment aussi tracé sur  $X$ .

Réciproquement, soit  $v \in T_a X$ . Prenons un arc  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow X$  dérivable en 0 et tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma'(0) = v$ . Par continuité de  $\gamma$  en 0, il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall t \in ]-\eta, \eta[ \quad \|\gamma(t) - \gamma(0)\| < r.$$

Comme  $\gamma(0) = a$ , cela signifie que l'arc  $\gamma|_{]-\eta, \eta[}$  est à valeurs dans  $B_O(a, r)$ , donc est tracé sur  $X \cap B_O(a, r)$ . On en déduit que  $v = (\gamma|_{]-\eta, \eta[})'(0) \in T_a(X \cap B_O(a, r))$ .

D'où l'inclusion réciproque.

2. On en déduit que si  $a$  est un point isolé de  $X$ , on a  $T_aX = \{0\}$  puisqu'il existe  $r > 0$  tel que  $X \cap B_O(a, r) = \{a\}$  et que seul le vecteur nul est tangent à un singleton (tout arc tracé sur un singleton est constant).

**19.12** • Le point  $(0, 0)$  est intérieur à  $X$ , donc  $T_{(0,0)}X = \mathbb{R}^2$  (cf. exemple 37 de la page 815).

- Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow [-1, 1]^2$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = (1, 0)$ . On note  $x$  et  $y$  les fonctions coordonnées de  $\gamma$  dans la base canonique. Puisque la fonction  $x$ , qui est dérivable en 0, à valeurs réelles et définie sur l'intervalle ouvert  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ , admet un maximum en 0, on a  $x'(0) = 0$ . Par suite  $T_{(1,0)}X \subset \mathbb{R}(0, 1)$ .

D'autre part, en considérant l'application  $\gamma : t \in ]-1, 1[ \mapsto (1, t)$  qui est à valeurs dans  $X$  et dérivable en 0, on obtient que  $(0, 1) = \gamma'(0) \in T_{(1,0)}X$ . D'après la remarque de la page 815, on en déduit  $\mathbb{R}(0, 1) \subset T_{(1,0)}X$  et, finalement, l'égalité.

- Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow [-1, 1]^2$  dérivable en 0 tel que  $\gamma(0) = (1, 1)$ . On note  $x$  et  $y$  les fonctions coordonnées de  $\gamma$  dans la base canonique. Puisque  $x$  et  $y$  sont maximales en 0, en reprenant le raisonnement précédent, on a  $x'(0) = y'(0) = 0$ . Il s'ensuit que  $T_{(1,1)}X = \{(0, 0)\}$ .

**19.13** 1. Posons  $g : (x, y, z) \mapsto xy - z$ . Elle est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce gradient ne s'annule pas,  $S$  admet un plan tangent en tout point. En particulier, en  $M_0$ , ce plan tangent  $P$  a pour équation  $y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ .

2. Soit  $M = (x, y, z) \in P \cap S$ . On a donc  $z = xy$  et  $y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$  et comme  $z_0 = x_0y_0$ , cela donne :

$$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - xy + x_0y_0 = 0 \quad \text{ou encore} \quad (x - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Le point  $M$  appartient donc :

- à la droite  $D_1$ , intersection de  $P$  et du plan  $P_1$  d'équation  $x = x_0$ ,
- ou à la droite  $D_2$ , intersection de  $P$  et du plan  $P_2$  d'équation  $y = y_0$ .

Ces deux intersections sont bien des droites. En effet, le plan  $P$  n'est pas parallèle à  $P_1$  car leurs vecteurs normaux :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires et de même pour  $P$  et  $P_2$ .

Réciproquement, soit  $M = (x, y, z)$  un point de  $D_1$ . On a alors  $x = x_0$  et :

$$y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x_0(y - y_0) = z - x_0y_0.$$

Cela donne  $z = xy$ , donc  $M$  appartient à  $S \cap P$ . Par symétrie, il en est de même si  $M$  appartient à  $D_2$ .

Conclusion :  $S \cap P = D_1 \cup D_2$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

- 19.14** 1. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  une application dérivable en 0, vérifiant  $\gamma(0) = I_n$ . Montrons que  $\gamma'(0)$  est une matrice antisymétrique.

On a, au voisinage de 0, le développement limité :

$$\gamma(s) = I_n + s\gamma'(0) + o(s)$$

et donc, puisque  $\gamma(s)$  est une matrice orthogonale pour tout  $s \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  :

$$\begin{aligned} I_n &= \gamma(s)^T \gamma(s) \\ &= (I_n + s\gamma'(0)^T + o(s))(I_n + s\gamma'(0) + o(s)) \\ &= I_n + s(\gamma'(0)^T + \gamma'(0)) + o(s). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,  $\gamma'(0)^T + \gamma'(0) = 0$  et donc  $\gamma'(0)$  est une matrice antisymétrique.

2. Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

- Comme  $A^T = -A$ , on a  $\exp(A^T) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ . Montrons donc l'égalité  $\exp(A^T) = \exp(A)^T$  ce qui prouvera la relation  $\exp(A)^T = \exp(A)^{-1}$ , et donc que  $\exp(A)$  est orthogonale.

Par propriété de la transposition, on a  $(A^T)^k = (A^k)^T$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de la transposition, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \frac{(A^T)^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right)^T$$

puis un passage à la limite donne  $\exp(A^T) = \exp(A)^T$  par continuité de la transposition (application linéaire en dimension finie).

- L'application  $\gamma : t \mapsto \exp(tA)$  est donc à valeurs dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , dérivable en 0 avec  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = A$ .

Il s'ensuit que  $A$  est un vecteur tangent à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

En conclusion,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est l'espace des vecteurs tangents à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

- 19.15** 1. • En tant que fonction rationnelle,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Le calcul donne, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

et puisque  $f(t, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

- Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , en posant  $r = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$  :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{|y|(x^4 + 4x^2y^2 + y^4)}{r^4} \leq 6r = 6\|(x, y)\|_2,$$

cette dernière inégalité étant encore valable pour  $(x, y) = (0, 0)$ .

On en déduit que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ . Par suite, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue.

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = -f(y, x)$ , et donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Il s'ensuit que les deux dérivées partielles de la fonction  $f$  existent et sont continues. Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

2. Par la question précédente, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1.$$

Par ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0, x) = x \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

On remarque que ces deux dérivées partielles secondes sont différentes, donc  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ , d'après le théorème de Schwarz.

- 19.16** 1. Comme  $\Omega$  est un ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B_\Omega(a, r) \subset \Omega$ . On a alors  $a + th \in \Omega$  pour tout  $t$  tel que  $|t|\|h\| < r$ , ce qui montre que  $\varphi$  est définie au voisinage de 0. Soit  $I$  un intervalle sur lequel  $\varphi$  est définie.

Par composition de  $t \mapsto a + th$  qui est de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $I$  dans  $\Omega$  et de  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega$ , la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = df(a + th) \cdot h = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th).$$

Appliquant à nouveau ce résultat aux fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \sum_{j=1}^p h_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + th) \right) \\ &= \sum_{j=1}^p h_j \left( \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq p} h_j h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) = h^T H_f(a + th) h. \end{aligned}$$

2. • Supposons  $f$  convexe. Soit  $a \in \Omega$  et  $h \in E$ .

D'après la question précédente, l'application  $\varphi : t \mapsto f(a + th)$  est définie sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  voisinage de 0 et elle est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

\* Montrons qu'elle est convexe. Soit  $(t, u) \in I^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi((1 - \lambda)t + \lambda u) &= f(a + ((1 - \lambda)t + \lambda u)h) \\ &= f((1 - \lambda)(a + th) + \lambda(a + uh)) \\ &\leq (1 - \lambda)f(a + th) + \lambda f(a + uh) = (1 - \lambda)\varphi(t) + \lambda\varphi(u). \end{aligned}$$

\* Il s'ensuit que  $\varphi''$  est positive, et comme  $\varphi''(0) = h^T H_f(a) h$  d'après la question précédente, on en déduit  $h^T H_f(a) h \geq 0$ .

Comme  $h$  a été choisi quelconque, on en déduit que  $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

- Supposons  $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  pour tout  $a \in \Omega$ .

Soit  $(x, y) \in \Omega^2$ . Posons  $h = y - x$ . L'application  $\varphi : t \mapsto f(x + th)$  est définie sur  $[0, 1]$  par convexité de  $\Omega$ . Par la question précédente, elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  et sa dérivée seconde est positive par hypothèse sur la matrice hessienne de  $f$ .

## Chapitre 19. Calcul différentiel

On en déduit que  $\varphi$  est convexe. En particulier, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$g(t) \leqslant (1-t)g(0) + tg(1),$$

c'est-à-dire :

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

La fonction  $f$  est donc bien convexe.

- 19.17** 1. L'application  $\Phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , donc l'ensemble de définition  $\Omega' = \Phi^{-1}(\Omega)$  de  $g$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  puisque  $\Omega$  est ouvert. De plus,  $\Phi$  est de classe  $C^1$  par les théorèmes généraux, donc  $g = f \circ \Phi$  est de classe  $C^1$ .

Par la règle de la chaîne, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta).\end{aligned}$$

2. Commençons par remarquer que l'application  $\Phi$  est surjective. En effet :

- tout nombre complexe  $z = x + iy$  non nul peut s'écrire sous la forme trigonométrique  $z = |z|e^{i\theta}$ , donc tout élément  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  s'écrit sous la forme  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , et l'on sait que  $\theta$  est unique modulo  $2\pi$ .
- $(0, 0) = \Phi(0, 0)$ , par exemple.

Plus précisément, on a montré que  $\Phi(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et l'on a même égalité car les antécédents de  $(0, 0)$  sont exactement les couples  $(0, \theta)$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- (a) Soit  $f$  solution de  $(E)$  sur  $\Omega = \mathbb{R}^2$ . Alors  $\Omega' = \mathbb{R}^2$  et :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0.$$

On a donc  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$  en tout point  $(r, \theta)$  tel que  $r \neq 0$ , puis, par continuité, en tout point de la forme  $(0, \theta)$ . Donc  $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$ .

À  $\theta \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $r \mapsto g(r, \theta)$  a donc une dérivée nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , donc est constante. On en déduit qu'il existe  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad g(r, \theta) = \varphi(\theta).$$

En particulier, on a  $\varphi(\theta) = g(0, \theta) = f(0, 0)$ , donc  $\varphi$  est constante.

Par surjectivité de  $\Phi$ , on en déduit que  $f$  est constante : pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , et alors :

$$f(x, y) = g(r, \theta) = f(0, 0).$$

- (b) Soit  $f$  solution de  $(E)$  sur  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On a  $\Omega' = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et la même étude que dans la question précédente aboutit à l'équation  $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$  sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ , mais on ne peut pas en déduire de la même façon que  $g(r, \theta)$  ne dépend que de  $\theta$ , puisque  $\mathbb{R}^*$  n'est pas un intervalle.

Considérons la restriction de  $g$  à  $\Omega'' = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ . Cette fois-ci,  $\mathbb{R}_+^*$  étant un intervalle, il existe une fonction  $\varphi$  telle que :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad g(r, \theta) = \varphi(\theta),$$

avec  $\varphi$  de classe  $C^1$  et  $2\pi$ -périodique, puisque :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \varphi(\theta) = g(1, \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta).$$

Tout élément  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\}$  s'écrivant sous la forme  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , avec  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , comme on l'a vu plus haut, on a :

$$f(x, y) = g(r, \theta) = \varphi(\theta).$$

Réciprocurement, les calculs de la première question montrent que si  $f$  est de cette forme, alors la fonction  $g = f \circ \Phi$  définie sur  $\Omega''$  vérifie  $r \frac{\partial g}{\partial r} = 0$ , donc :

$$\forall (r, \theta) \in \Omega'' \quad r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

et comme  $\Phi(\Omega'') = \Omega$ , on a aussi :

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire que  $f$  vérifie  $(E)$ .

**19.18** Par opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ , l'application  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Il s'ensuit que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  on a par la règle de la chaîne (en laissant implicites les points d'application) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} & \text{et donc} & \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

ce qui signifie, rappelons le :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta). \quad (2)$$

- Pour tout  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , en appliquant la relation (1) à  $\frac{\partial f}{\partial x}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$ , il vient en notant  $h : (r, \theta) \mapsto \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ , que pour tout  $(r, \theta)$  :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta).$$

En d'autre termes, compte tenu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial r}. \end{aligned}$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial r}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en additionnant les deux expressions, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2},$$

ce qui signifie :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

- 19.19** 1. Soit  $(x, y, z) \in X^3$ . Alors :

$$g(x, \overset{\curvearrowleft}{y}, \overset{\curvearrowleft}{z}) = g(\overset{\curvearrowleft}{x}, \overset{\curvearrowleft}{z}, y) = -g(z, \overset{\curvearrowleft}{x}, \overset{\curvearrowleft}{y}) = -g(\overset{\curvearrowleft}{z}, \overset{\curvearrowleft}{y}, x) = g(y, \overset{\curvearrowleft}{z}, \overset{\curvearrowleft}{x}) = g(\overset{\curvearrowleft}{y}, \overset{\curvearrowleft}{x}, z) = -g(x, y, z).$$

Par conséquent  $g(x, y, z) = 0$ .

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le caractère orthogonal de la matrice jacobienne  $J_f(x)$  donne :

$$J_f(x)^T J_f(x) = I_n \quad \text{i.e.} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \delta_{i,j}. \quad (1)$$

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , en considérant la  $\ell$ -ième dérivée partielle de la relation (1), on obtient pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\forall (i, j, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \quad \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_i}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \right) = 0. \quad (2)$$

Fixons temporairement  $x$  et posons :

$$\forall (i, j, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \quad g(i, j, \ell) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x).$$

D'après le théorème de Schwarz,  $g$  est symétrique par rapport aux deux dernières variables. La relation (2) donne que  $g$  est antisymétrique par rapport aux deux premières variables. Ainsi, d'après le lemme des tresses,  $g = 0$ .

La nullité de  $g$  se traduit par :

$$\forall (j, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}_{(J_f(x))^T} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_\ell \partial x_j}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $J_f(x)$  est orthogonale,  $(J_f(x))^T$  est inversible et donc, pour  $(j, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  fixé, tous les  $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}(x)$  sont nuls. On en déduit que, pour tous  $(j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$ , la fonction  $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_\ell \partial x_j}$  est nulle. Par caractérisation des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}^n$  qui est connexe par arcs (il est convexe), pour tout  $(k, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , les fonctions  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  sont constantes. En conclusion  $J_f$  est constante. Notons  $P$  sa valeur.

3. En retranchant à  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $P$ , on obtient ainsi une fonction de différentielle nulle, donc constante sur  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = f(0) + Px,$$

donc  $f$  est la composée d'une translation et d'une isométrie vectorielle.

- 19.20** 1. On obtient facilement la figure ci-contre.

Les deux paraboles ont pour équation  $y = x^2$  et  $y = -x^2$ .

2. • Soit  $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(tu) = t^4 b^2 (b^2 - t^2 a^4).$$

Si  $b = 0$ , alors  $f(tu) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et l'application  $t \mapsto f(tu)$  a un minimum local en 0.

Si  $b \neq 0$ , alors au voisinage de 0, on a  $f(tb) \underset{0}{\sim} t^4 b^4$ . Puisque la fonction  $t \mapsto t^4 b^4$  est à valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}^*$ , l'application  $t \mapsto f(tu)$  est à valeurs strictement positives au voisinage de 0. Cette dernière fonction admet donc un minimum local en 0.

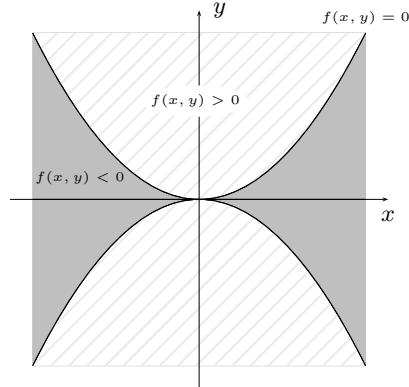
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f\left(t, \frac{t^2}{2}\right) = -\frac{3}{16} t^8.$$

Par suite, dans tout voisinage de  $(0, 0)$ , il existe un point  $(x, y)$  tel que  $f(x, y) < 0$ .

Par conséquent, la fonction  $f$  n'admet pas de minimum local en  $(0, 0)$ .

**Remarque** En prenant  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ , on a même l'exemple d'une fonction qui admet un minimum local strict dans toutes les directions en  $(0, 0)$ , mais qui n'a pas de minimum local en ce point.



- 19.21** 1. Pour  $(x, h) \in E^2$ , on a par linéarité de  $u$  et bilinéarité du produit scalaire :

$$df(x) \cdot h = (\mathrm{d}u(x) \cdot h \mid x) + (u(x) \mid \mathrm{d}\mathrm{Id}_E(x) \cdot h) = (u(h) \mid x) + (u(x) \mid h),$$

c'est-à-dire, utilisant le fait que  $u$  est autoadjoint :

$$df(x) \cdot h = 2(u(x) \mid h).$$

On en déduit que  $\nabla f_u(x) = 2u(x)$ .

2. La fonction  $f_u$  étant continue, elle admet un maximum sur le compact  $S$ . Notons  $a$  un point de  $S$  où ce maximum est atteint.

Introduisons l'application  $g : x \mapsto \|x\|^2 - 1$  définie sur  $\Omega$ .

Elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $S$  est définie par l'équation  $g(x) = 0$ .

Par ailleurs, pour tout  $x \in S$ , on a  $\nabla g(x) = 2\mathrm{Id}_E(x) = 2x \neq 0$  d'après ce qui précède puisque  $g = f_{\mathrm{Id}_E} - 1$ . Le théorème 39 de la page 836 montre alors qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

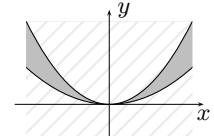
$$\nabla f_u(a) = \lambda \nabla g(a) = 2\lambda a,$$

ce qui est le résultat demandé.

3. On a donc :

$$u(a) = \frac{1}{2} \nabla f_u(a) = \lambda a.$$

Puisque  $a$  appartient à la sphère  $S$ , il est non nul donc est un vecteur propre, ce qui montre que  $\lambda$  est valeur propre de l'endomorphisme  $u$ .



## Chapitre 19. Calcul différentiel

**19.22** Dans cet exercice, on munit  $\mathbb{R}^2$  de sa norme euclidienne canonique.

La fonction  $f$  est polynomiale, donc elle est de classe  $C^1$  et l'on a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(x^3 - x + y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4(y^3 + x - y).$$

Soit  $(x, y)$  un point critique. Alors  $x^3 = -y^3$ , ce qui implique, puisque  $x$  et  $y$  sont réels, que  $x = -y$ . On a alors  $x(x^2 - 2) = 0$ . Ainsi  $(x, y) \in \{(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ .

Il est facile de vérifier que, réciproquement, ces trois points sont effectivement des points critiques, mais nous n'en aurons pas besoin.

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x, x) = 2x^4$  et  $f(x, 0) = x^2(x^2 - 2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x^2$ , donc dans tout voisinage de  $(0, 0)$ , il existe des points où  $f$  prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. On en déduit que  $f$  n'admet pas d'extremum en  $(0, 0)$ .
- Nous allons montrer ci-dessous que  $f$  admet un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$ . Comme elle est de classe  $C^1$  sur un ouvert, ce minimum est atteint en un point critique, qui n'est pas  $(0, 0)$  comme on l'a vu. Par suite, la fonction  $f$  atteint son minimum en  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  ou en  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , et comme la fonction  $f$  prend la même valeur en ces deux points, le minimum est atteint en  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et en  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .
- Montrons donc que  $f$  admet un minimum global. On sait que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ . Il s'ensuit que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4).$$

On en déduit que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \geq \frac{\|(x, y)\|^4}{2} - 4\|(x, y)\|^2 \xrightarrow[\|(x, y)\| \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Par conséquent, il existe  $R > 0$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x, y)\| > R \implies f(x, y) \geq 1.$$

Par suite :

$$\inf_{\|(x, y)\| > R} f(x, y) \geq 1 \quad \text{et} \quad \inf_{\|(x, y)\| \leq R} f(x, y) \leq f(0, 0) = 0.$$

On en déduit l'égalité :

$$\inf_{B_F((0, 0), R)} f(x, y) = \inf_{\mathbb{R}^2} f(x, y). \tag{*}$$

La boule fermée  $B = B_F((0, 0), R)$  étant un compact de  $\mathbb{R}^2$ , la restriction de  $f$  à  $B$  atteint son minimum et ce minimum est le minimum sur  $\mathbb{R}^2$  d'après (\*).

**Remarque** La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$H_f(x, y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

- Aux points  $m = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ , on a  $H_f(m) = 4 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ , qui est une matrice définie positive. On retrouve ainsi que  $f$  admet un minimum local strict en  $m$ , mais rien ne nous assure, sans l'étude précédente, qu'il s'agisse d'un minimum global.
- En revanche  $H_f(0, 0) = 4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  est une matrice non inversible, ce qui ne permet pas de déterminer la nature du point  $(0, 0)$ .

**19.23** 1. Il suffit de prendre :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (v + 2u)e^{-u}. \end{aligned}$$

2. L'application  $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, y^2)$  est une surjection de  $\mathbb{R}^2$  sur :

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq u\}.$$

En effet :

- pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$ ,
- tout  $(u, v) \in A$  admet comme antécédent  $(\sqrt{u-v}, \sqrt{v})$ .

Étudions donc les extrema de  $h$  sur  $A$ .

- La fonction  $h$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < v < u\}$  et :

$$\forall (u, v) \in \Omega \quad \frac{\partial h}{\partial v} = e^{-u} \neq 0.$$

Ainsi,  $h$  n'a pas de point critique.

- Étudions  $h$  sur  $A \setminus \Omega$ .

- \* On a  $h(u, 0) = 2ue^{-u}$ , pour  $u \geq 0$ . L'étude de  $\varphi : t \mapsto te^{-t}$  sur  $[0, +\infty[$  donne le tableau de variations suivant.

$t$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(t)$	+	0	-
$\varphi$	0	$e^{-1}$	0

Ainsi, le maximum de  $u \mapsto h(u, 0)$  vaut  $2e^{-1}$ .

- \* On a  $h(u, u) = 2ue^{-u}$ , le maximum de  $u \mapsto h(u, u)$  vaut  $3e^{-1}$  et il est atteint uniquement en  $(1, 1)$ .
- La fonction  $h$  est à valeurs positives sur  $A$  et  $h(u, v) = 0$  si, et seulement si,  $u = v = 0$ . Elle atteint donc son minimum en  $(0, 0)$ .

Pour tout  $(u, v) \in A$  :

$$h(u, v) = ve^{-u} + 2ue^{-u} \leq ve^{-v} + 2ue^{-u} = \varphi(v) + 2\varphi(u) \leq 3e^{-1}.$$

On en déduit que  $h$  atteint son maximum uniquement en  $(1, 1)$ .

En conclusion :

- la fonction  $g$  atteint son minimum aux points  $(x, y)$  tel que  $x^2 + y^2 = y^2 = 0$ , c'est-à-dire en  $(0, 0)$  ;
- la fonction  $g$  atteint son maximum aux points  $(x, y)$  tel que  $x^2 + y^2 = y^2 = 1$ , c'est-à-dire en  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ .

**19.24** • La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  car polynomiale sur l'ouvert  $\mathbb{R}^n$ . Les extrema, s'ils existent, sont donc atteints en des points critiques.

- Pour tout  $(X, H) \in (\mathbb{R}^n)^2$  on a :

$$f(X + H) = f(X) + (X^T AH + H^T AX + 2U^T H) + H^T AH.$$

Compte tenu du fait que la matrice  $A$  est symétrique et que  $X^T AH$  est une matrice carrée d'ordre 1, donc égale à sa transposée, on a :

$$f(X + H) = f(X) + 2H^T (AX + U) + H^T AH. \tag{1}$$

## Chapitre 19. Calcul différentiel

Par ailleurs, pour tout  $H \in \mathbb{R}^n$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|H^T AH| \leq \|H\| \|AH\| \leq \|A\| \|H\|^2.$$

Il s'ensuit que :

$$f(X + H) = f(X) + 2H^T(AX + U) + O(\|H\|^2),$$

donc  $\nabla f(X) = 2(AX + U)$ .

- La matrice  $A$  étant inversible,  $X_0 = -A^{-1}U$  est l'unique point critique de  $f$ . Par ailleurs, la relation (1) donne pour tout  $H \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + H^T AH > f(X_0),$$

car  $A$  est définie positive. Il s'ensuit que  $f$  admet un unique extremum, qui un minimum strict, atteint en  $X_0$ .

- 19.25** Il suffit de démontrer que si  $a$  est un point critique de  $f$ , alors  $f$  admet un minimum en ce point, la réciproque étant un résultat de cours.

Soit  $b \in \Omega$ . Posons la fonction  $\varphi : t \mapsto f((1-t)a + tb) = f(a + th)$ , où  $h = b - a$ .

Par convexité de  $\Omega$ , elle est définie sur  $[0, 1]$ . Montrons qu'elle est convexe.

Soit  $(t, u) \in [0, 1]^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . On a :

$$\begin{aligned}\varphi((1-\lambda)t + \lambda u) &= f(a + ((1-\lambda)t + \lambda u)h) \\ &= f((1-\lambda)(a + th) + \lambda(a + uh)) \\ &\leq (1-\lambda)f(a + th) + \lambda f(a + uh) = (1-\lambda)\varphi(t) + \lambda\varphi(u).\end{aligned}$$

De plus,  $\varphi$  est dérivable, avec :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi'(t) = (\nabla f((1-t)a + tb) \mid b - a).$$

En particulier,  $\varphi'(0) = (\nabla f(a) \mid b - a) = 0$ .

Par convexité de  $\varphi$ , son graphe se situe au dessus de sa tangente horizontale en 0, donc, en particulier,  $\varphi(1) \geq \varphi(0)$ , ce qui donne  $f(b) \geq f(a)$ .

Cela étant vrai pour tout  $b \in \Omega$ , il s'ensuit que  $f$  admet un minimum en  $a$ .

- 19.26** 1. L'interprétation du déterminant en termes d'aires donne  $\mathcal{A} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}]|}{2}$ .

De plus :

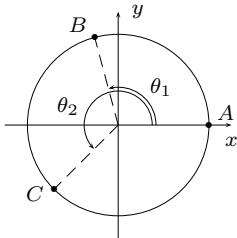
$$\begin{aligned}[\vec{AB}, \vec{AC}] &= \begin{vmatrix} \cos \theta_1 - 1 & \cos \theta_2 - 1 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} & -2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2} \\ 2 \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} & 2 \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \end{vmatrix} \\ &= 4 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \begin{vmatrix} -\sin \frac{\theta_1}{2} & -\sin \frac{\theta_2}{2} \\ \cos \frac{\theta_1}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} \end{vmatrix} \\ &= 4 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.\end{aligned}$$

Puisque  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ , les réels  $\frac{\theta_1}{2}$ ,  $\frac{\theta_2}{2}$  et  $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$  sont dans  $[0, \pi]$ .

Il s'ensuit que  $[\vec{AB}, \vec{AC}] \geq 0$  et donc que :

$$\mathcal{A} = 2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.$$

2.



Considérons un triangle  $ABC$  inscrit dans le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ . Après rotation et symétrie, on peut supposer que :

$$A(1,0), B(\cos \theta_1, \sin \theta_1) \text{ et } C(\cos \theta_2, \sin \theta_2),$$

avec  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ , car cela ne change pas l'aire.

Le problème revient à chercher les maxima de la fonction définie sur :

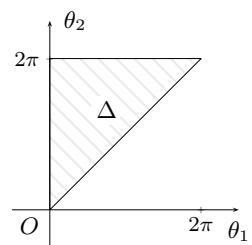
$$\Delta = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi\}$$

$$\text{par } f(\theta_1, \theta_2) = \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}.$$

Par les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\Delta$  et de classe  $C^1$  sur  $\overset{\circ}{\Delta}$ .

Le domaine  $\Delta$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, l'ensemble est fermé comme intersection de demi-plans fermés. Il est de plus clairement borné et donc c'est une partie compacte de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  de dimension finie. Il est facile de vérifier que :

$$\overset{\circ}{\Delta} = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi\}.$$



La fonction  $f$  est à valeurs positives et nulle sur la frontière de  $\Delta$ . Puisque  $f$  est non nulle, les maxima, qui existent par compacité et continuité, sont atteints dans l'intérieur de  $\Delta$  et donc en des points critiques.

Soit  $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ . Le calcul donne :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\theta_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\theta_1}{2} \right) \sin \left( \theta_2 - \frac{\theta_1}{2} \right).$$

Sur l'intérieur de  $\Delta$  on a  $0 < \frac{\theta_1}{2} < \pi$  et donc  $\sin \frac{\theta_1}{2} \neq 0$ . De même  $\sin \frac{\theta_2}{2} \neq 0$ . Par conséquent, si  $(\theta_1, \theta_2)$  est un point critique, alors  $\sin \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) = \sin \left( \theta_2 - \frac{\theta_1}{2} \right) = 0$ , donc :

$$\theta_1 \equiv \frac{\theta_2}{2} \quad [\pi] \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{\theta_1}{2} \quad [\pi],$$

soit encore :

$$\begin{cases} 2\theta_1 + \theta_2 = 0 & [2\pi] \\ \theta_1 + 2\theta_2 = 0 & [2\pi] \end{cases}$$

ce qui implique  $\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad [\frac{2\pi}{3}]$ . Compte tenu de  $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ , la fonction  $f$  admet un unique point critique  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ . Puisqu'il est unique, d'après la discussion menée plus haut, la fonction  $f$  admet un unique maximum en ce point. Les triangles d'aire maximale inscrits dans un cercle sont donc les triangles équilatéraux.

## Chapitre 19. Calcul différentiel

**19.27** 1. Soit  $x \in E$  non nul. On a :

$$g(x) = \|x\| \left( \frac{f(x)}{\|x\|} - \left( \frac{x}{\|x\|} \mid v \right) \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\left( \frac{x}{\|x\|} \mid v \right) \leq \|v\|$  et donc :

$$g(x) \geq \|x\| \left( \frac{f(x)}{\|x\|} - \|v\| \right).$$

Il s'ensuit que  $g(x) \xrightarrow[\|x\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

Il existe donc  $M > 0$  tel que  $g(x) \geq g(0)$  pour tout  $x$  vérifiant  $\|x\| \geq M$ . Notons  $B$  la boule fermée centrée en 0 et de rayon  $M$ . Puisque  $B$  est compacte et que  $g$  est continue à valeurs réelles,  $g|_B$  est minorée et atteint son minimum en un certain point  $x_0$ . La fonction  $g$  est alors minorée sur  $E$  par  $m = \min(g(0), g(x_0))$ , valeur qui est donc atteinte par  $g$ , ce qui prouve que  $g$  admet un minimum.

2. Avec les notations de la question précédente, puisque  $g$  est différentiable sur l'ouvert  $E$  et admet un minimum en  $x_0$ , on a :

$$0 = \nabla g(x_0) = \nabla f(x_0) - v.$$

Puisque cela est vrai pour tout  $v \in E$ , la fonction  $\nabla f$  est surjective.

**19.28** Posons  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$  et  $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x^4 + y^4 + z^4 - 1. \end{array}$

Ces deux fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^3$ .

- L'ensemble  $\mathcal{E} = g^{-1}(\{0\})$  est un fermé de  $\mathbb{R}^3$  et il est inclus dans le compact  $[-1, 1]^3$ , donc est également compact. Par suite,  $f|_{\mathcal{E}}$  admet des extrema.
- Soit  $m = (x, y, z) \in \mathcal{E}$  un point où  $f|_{\mathcal{E}}$  admet un extremum. Puisque  $\nabla g(m) = 2m$  est non nul (car  $0 \notin \mathcal{E}$ ), le théorème d'optimisation sous contrainte (théorème 39 de la page 836) donne la colinéarité de  $\nabla f(m)$  et  $\nabla g(m)$ , donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$(x, y, z) = \lambda(x^3, y^3, z^3). \quad (*)$$

Étudions les points  $m$  de  $\mathcal{E}$  qui vérifient cette condition.

- \* Si  $x, y$  et  $z$  sont tous les trois non nuls, alors  $(*)$  donne  $x^2 = y^2 = z^2$  donc  $3x^4 = 1$ . Cela donne les points  $m = (\pm 3^{-1/4}, \pm 3^{-1/4}, \pm 3^{-1/4})$  et  $f(m) = 3^{1/2}$ .
- \* Supposons deux des trois coordonnées non nulles et la troisième nulle. Vu la symétrie en  $(x, y, z)$  du problème, on peut supposer  $z = 0$ . Comme plus haut, cela implique  $2x^4 = 1$  puis  $m = (\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}, 0)$ . On a alors  $f(m) = 2^{1/2}$ .
- \* Si deux des trois coordonnées sont nulles, alors  $m = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$  ou  $(0, 0, \pm 1)$  et dans ce cas  $f(m) = 1$ .

On en conclut que la valeur du maximum de  $f|_{\mathcal{E}}$  est  $3^{1/2}$  et qu'il est atteint exactement aux points  $m = (\pm 3^{-1/4}, \pm 3^{-1/4}, \pm 3^{-1/4})$ . La valeur du minimum est 1 et elle est atteinte exactement aux points  $m = (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0)$  ou  $(0, 0, \pm 1)$ .

# Index

## A

Abel  
    lemme d' — 507  
    théorème d' — radial 512  
absolue  
    convergence — d'une intégrale 387  
    convergence — d'une série 427  
absolument convergente  
    intégrale — 387  
    série — 427  
accroissements finis  
    inégalité des — 351  
adaptée (base —) 49  
 $\sigma$ -additivité 602  
adhérence  
    d'une partie 220  
    valeur d' — 213, 291  
adhérent (point —) 220  
adjoint d'un endomorphisme 159  
aléatoire (variable — discrète) 608  
Alembert (règle de d'—) 429  
algèbre(s) 17  
    isomorphisme d' — 19  
    morphisme d' — 19  
     $\sigma$  — 601  
angle  
    d'une rotation 171  
    de vecteurs dans le plan 172  
anneau 2  
    intègre 12  
    principal 15  
    produit 3  
    trivial 2  
annulateur  
    idéal — 65  
    polynôme — 64, 113, 119

application(s)  
    bornée 207  
    composantes 297  
    continue 259  
    linéaire tangente 799  
    lipschitzienne 260  
    multilinéaire 268, 300  
    partielle 798  
    polynomiale 19, 299  
    uniformément continue 263  
arc 815  
    tangente à un — 815  
associativité  
    de la somme de sous-espaces vectoriels 44  
    de la somme directe 47  
associés  
    éléments — 5  
    polynômes — 13  
autoadjoint  
    endomorphisme — 163  
    (défini) positif 167  
automorphisme orthogonal 169

## B

base  
    adaptée à une décomposition 49  
    directe 162  
    indirecte 162  
Bayes (formule de —) 637  
Bienaymé-Tchebychev  
    inégalité de —) 688

## Index

blocs  
écriture par — 50  
matrices diagonale par — 52  
matrices triangulaire par — 52  
détaminant d'une — 56  
produit par — 51  
transvection par — 54  
Boole (inégalité de —) 605  
bornée  
application — 207  
partie — 207  
boule 205

## C

caractérisation séquentielle de la limite 255  
caractéristique  
fonction — 705  
polynôme — 100, 112, 116  
sous-espace — 120, 130  
Cauchy  
problème de — 731, 748  
produit de — de deux séries entières 511  
suite de — 309  
théorème de — linéaire 734, 749  
Cauchy-Riemann (équations de —) 849  
Cauchy-Schwarz (inégalité de —) 684  
centrée (variable aléatoire —) 682  
Cesàro (théorème de —) 436  
chaîne (règle de la —) 808, 810, 812  
changement de variable 393  
Chasles (relation de —) 348, 387  
chinois (théorème —) 10  
classe  
d'une fonction 822  
fonctions de —  $\mathcal{C}^1$  343, 805  
fonctions de —  $\mathcal{C}^k$  343, 821  
coalitions (lemme des —) 645  
compacité 288  
compagnon (matrice —) 64, 66, 748  
comparaison  
série-intégrale 429  
théorème de — 384, 388

composantes  
applications — 297  
connexes par arcs 293  
suites — 296  
condition initiale 731  
conditionnelle  
loi(s) — 638  
probabilité — 636  
cône 815  
positif 849  
congruence 7  
conjointe (loi —) 614  
connexité par arcs 293  
constante(s)  
caractérisation des — 340, 814  
d'Euler 435  
continue (fonction —) 259  
par morceaux 346, 376  
continuité  
croissante 604  
d'une intégrale à paramètre 557  
d'une limite uniforme 460  
décroissante 604  
des applications linéaires 264  
en dimension finie 298  
des applications multilinéaires 268  
en dimension finie 300  
en un point 256  
monotone 604  
théorème de — d'une intégrale à paramètre 557  
uniforme 263  
contrainte (optimisation sous —) 836  
convergence  
absolue d'une intégrale 387  
absolue d'une série 427  
dominée (théorème de —) 550  
monotone (théorème de —) 568  
normale  
d'une série de fonctions 464  
presque sûre 624  
simple d'une suite de fonctions 454  
uniforme  
d'une série de fonctions 463  
d'une suite de fonctions 456  
norme de la — 208, 456

- convergente  
 intégrale — 377, 381  
 intégrale absolument — 387  
 série — 424  
 série absolument — 427
- convexe  
 fonction — 851, 852  
 partie — 206
- corps 2, 10
- couple de variables aléatoires 613
- covariance 686
- crible (formule du —) 704
- critique (point — d'une fonction) 831
- croissance de l'espérance 683
- cyclique  
 groupe — 22, 23  
 sous-espace — 58
- ## D
- d'Alembert (règle de —)  
 pour les séries entières 510
- décomposition  
 de Dunford 121, 131  
 en produit d'irréductibles 17  
 en somme directe 48  
 lemme de — des noyaux 68
- définie positive  
 matrice symétrique — 168
- dénombrable  
 ensemble au plus — 587  
 ensemble — 587  
 $\mathbb{Q}$  est — 588  
 $\mathbb{R}$  est non — 590
- densité 222, 262
- dérivabilité  
 à droite 339  
 à gauche 339
- dérivable 338, 340
- dérivation  
 d'une intégrale à paramètre 563  
 d'une limite 462  
 terme à terme 468
- dérivée(s) 338  
 à droite 339  
 à gauche 339  
 d'une série entière 513  
 fonction — 340  
 partielles 797, 821  
 selon un vecteur 796
- déterminant d'une matrice triangulaire  
 par blocs 56
- diagonale par blocs (matrice —) 52
- diagonalisable  
 endomorphisme — 109  
 matrice — 109
- diagonalisation  
 base de — 109  
 simultanée 128
- différentielle  
 d'une fonction 805  
 en un point 799
- directe  
 base — 162
- isométrie vectorielle — 169
- matrice orthogonale — 161
- somme — 46
- discret(e)  
 espace probabilisé — 606  
 loi — 610
- disque ouvert de convergence 507
- distance  
 à une partie 204  
 associée à une norme 203
- distribution de probabilités discrète 606  
 support d'une — 606
- divergence  
 grossière d'une série 425
- divergente  
 intégrale — 377, 381
- diviseur 5
- division euclidienne  
 des polynômes 13
- dominée  
 norme — 226
- théorème de convergence — 550
- double limite (théorème de la —) 460
- droite (dérivabilité à —) 339
- Dunford (décomposition de —) 121, 131

**E**

éléments  
 inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  9  
 propres 92  
 équation aux — 93, 96

endomorphisme  
 adjoint d'un — 159  
 autoadjoint 163  
 défini positif 167  
 positif 167  
 induit 58  
 nilpotent 60  
 d'indice maximal 62  
 symétrique 163

engendré  
 idéal — par un élément 4  
 idéal — par une partie 4  
 sous-groupe — par une partie 20

entière (série —) 506

équation  
 aux éléments propres 93, 96  
 équation différentielle linéaire 730  
 du premier ordre 730  
 à coefficients constants 743  
 non normalisée 758  
 normalisée 747  
 scalaire d'ordre  $n$  747  
 scalaire d'ordre 2 749

équivalence des normes 227  
 en dimension finie 296

espace  
 probabilisable 601  
 probabilisé 603  
 discret 606  
 tangent 816  
 vectoriel réel orienté 162

espérance  
 croissance de l'— 683  
 d'un produit de variables aléatoires  
 indépendantes 683  
 d'une variable aléatoire à valeurs  
 dans  $\mathbb{N}$  678  
 d'une variable aléatoire discrète 679  
 d'une variable aléatoire discrète  
 positive 678  
 linéarité de l'— 681  
 positivité de l'— 683

euclidienne  
 division — des polynômes 13  
 norme — 201

Euler  
 constante d' — 435  
 indicatrice d' — 11, 23  
 théorème d' — 25

événement(s)  
 indépendants 639  
 négligeable 603  
 presque sûr 603

exponentielle  
 d'un endomorphisme 737  
 d'une matrice 738

extraction 213

extractrice (fonction —) 213

extraite (suite —) 213

extremum  
 global 830  
 local 830

**F**

fermé(e) 217  
 partie — 217  
 relatif 223

finie  
 variable aléatoire d'espérance — 679  
 variable aléatoire dont le carré est  
 d'espérance — 684

fonction  
 caractéristique 705  
 continue par morceaux 346, 376  
 convexe 851, 852  
 de classe  $C^1$  343, 805  
 de classe  $C^k$  343, 821  
 dérivée d'une — 340  
 développable en série entière 516  
 différentielle d'une — 805  
 extractrice 213  
 Gamma ( $\Gamma$ ) 567, 568  
 génératrice 689  
 d'une somme de variables  
 aléatoires indépendantes 692  
 gradient d'une — 804  
 homogène 849  
 indicatrice 679  
 intégrable 387  
 points critique d'une — 831

formule

- d'Euler 849
- de Bayes 637
- de Koenig-Huygens 685, 686
- de Leibniz 345
- de Taylor avec reste intégral 351
- de Taylor-Young 353
- de transfert 680
- de Wald 707
- des probabilités composées 636
- des probabilités totales 637
- du crible 704

frontière 222

## G

Gamma ( $\Gamma$ )

fonction — 567, 568

gauche (dérivabilité à —) 339

Gauss

intégrale de — 569

lemme de — 16

générateur

d'un groupe 22

d'un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  15

de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  23

génératrice

fonction — 689

partie — d'un groupe 21

géométrique (loi —) 611

global

minimum —, maximum —,

extremum — 830

gradient d'une fonction 804

grands nombres

loi faible des — 688

groupe(s) 2

cyclique 22, 23

de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  76

monogène 22, 23

(spécial) orthogonal 162, 170

## H

homogène (fonction —) 849

homogénéité 200

## I

idéal(aux)

annulateur 65

d'un anneau commutatif 3

de  $\mathbb{K}[X]$  15

de  $\mathbb{Z}$  6

engendré par un élément 4

engendré par une partie 4

principal 5

trivial 3

indépendance

d'une famille d'événements 639

d'une suite de variables

aléatoires 646

de deux événements 639

de deux variables aléatoires 641

mutuelle de  $n$  variables

aléatoires 643

indicatrice

d'Euler 11, 23

variable — 679

indice de nilpotence 60

indirecte

base — 162

isométrie vectorielle — 169

matrice orthogonale — 161

induit(e)

endomorphisme — 58

norme — 201

inégalité

de Bienayme-Tchebychev 688

de Boole 605

de Cauchy-Schwarz 684

de Markov 688

de Taylor-Lagrange 352

des accroissements finis 351

triangulaire 200, 202

pour l'intégrale 349

initiale (condition —) 731

intégrable (fonction —) 387

## Index

intégrale

- à paramètre 550
- classe  $\mathcal{C}^k$  d'une — 563
- continuité d'une — 557
- dérivation d'une — 563
- limite d'une — 559
- absolument convergente 387
- convergente 377, 381
- d'une fonction vectorielle 347
- de Gauss 569
- de Riemann 385
- divergente 377, 381
- reste d'une — convergente 377
- semi-convergente 394

intégration

- d'une limite uniforme 461
- des relations de comparaison 396
- terme à terme 553
- par convergence uniforme 468

intègre (anneau —) 10, 12

intérieur

- d'une partie 220
  - point — 220
- intervalle ouvert de convergence 507
- inversibles (éléments — de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) 9
- irréductible(s)

- décomposition en produit d'— 17
- polynôme — 14

isométrie vectorielle 168

- directe 169
- indirecte 169
- négative 169
- positive 169

isomorphisme

- d'algèbres 19

## J

jacobienne (matrice —) 803

## K

Koenig-Huygens

- formule de — 685, 686

## L

Lagrange

- inégalité de Taylor — 352
- théorème de — 33

Laplace (transformée de —) 558

laplacien 851

Leibniz (formule de) 345

lemme

- de décomposition des noyaux 68
- de Gauss 16
- des coalitions 645

lien suite/série 426

ligne de niveau 819

limite

- caractérisation séquentielle de la — 255
- d'une intégrale à paramètre 559
- interversion somme — 467
- unicité de la — 211, 255

linéarité de l'espérance 681

lipschitzienne (application —) 260

local (strict)

- extremum —, maximum —,
- minimum — 830

loi(s)

conditionnelle 638

conjointe 614

d'une variable aléatoire discrète 609

de Poisson 612

discrète 610

faible des grands nombres 688

géométrique 611

marginales 614

quotient sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  8

sans mémoire 638

## M

marche aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  682, 708

marginales (lois —) 614

Markov (inégalité de —) 688

matrice(s)

- compagnon 64, 66, 748
- de rotation 161
- diagonale par blocs 52
- jacobienne 803
- nilpotente 60

- orthogonale 160
  - (in)directe 161
  - positive/négative 161
- orthogonallement semblables 161
- symétrique
  - définie positive 168
  - positive 168
- triangulaire par blocs 52
- triangulaire supérieure
  - stricte 62, 75
- maximum
  - global 830
  - local 830
- minimal (polynôme —) 66, 114, 119
- minimum
  - global 830
  - local 830
- mixte (produit —) 163
- monogène (groupe —) 22, 23
- morphisme d'algèbres 19
- multilinéaire (application —) 268, 300
- multiple 5
- multiplicité
  - ordre de — d'une valeur propre 106
- N**
- négative (matrice orthogonale —) 161
- négligeable (événement —) 603
- nilpotence (indice de —) 60
- nilpotent(e)
  - endomorphisme — 60
  - matrice — 60
- niveau (ligne de —) 819
- nombre
  - algébrique 594
  - transcendant 594
- normale
  - convergence — d'une série de fonctions 464
- norme(s) 200
  - d'opérateur 265
  - de la convergence uniforme 208, 456
  - dominée 226
  - équivalence des — en dimension finie 296
  - équivalentes 227, 296
  - euclidienne 201
  - induite 201
  - subordonnée 265
  - triple 265
- noyau d'un morphisme d'anneaux 4
- O**
- optimisation 829
  - sous contrainte 836
- ordre d'un élément d'un groupe 23
- orientation d'un espace vectoriel réel 162
- orthogonal(e)
  - automorphisme — 169
  - groupe (spécial) — 162, 170
  - matrice — 160
    - (in)directe 161
    - positive/négative 161
  - projecteur — 164
  - symétrie — 170
- orthogonallement
  - matrices — semblables 161
- orthogonaux
  - sous-espaces vectoriels — 164
- ouvert(e) 215
  - partie — 215
  - relatif 223
- P**
- partie(s)
  - bornée 207
  - compacte 288
  - connexe par arcs 293
  - convexe 206
  - dense 222
  - étoilée 295
  - fermée 217
  - génératrice d'un groupe 21
  - intégration par — 391
  - ouverte 215
- partielle(s)
  - application — 798
  - dérivée — 797, 821
- PGCD 6, 16
- plan tangent 818, 820
- point critique 831

## Index

- Poisson (loi de —) 612  
polynôme(s)  
    annulateur 64, 113, 119  
    associés 13  
    caractéristique 100, 105, 112, 116  
    division euclidienne des — 13  
    irréductible 14  
    minimal 66, 114, 119  
    premiers entre eux 14  
    scindé simple 112  
    simplement scindé 112  
polynomiale (application —) 299  
positive  
    matrice orthogonale — 161  
    matrice symétrique — 168  
PPCM 7, 16  
premiers entre eux (polynômes —) 14  
presque sûr(e)  
    convergence — 624  
    événement — 603  
primitivation  
    d'une limite uniforme 462  
primitive  
    d'une fonction continue 350  
    d'une séries entière 515  
principal  
    anneau — 15  
    idéal — 5  
principe de superposition 732  
probabilité 602  
    conditionnelle 636  
    sous-additivité d'une — 605  
    sur un univers au plus  
        dénombrable 606  
problème de Cauchy 731, 748  
procédé diagonal 310  
produit  
    anneau — 3  
    mixte 163  
    par blocs 51  
projecteur(s)  
    associés à une décomposition 48  
    orthogonal 164  
    spectraux 128  
prolongement par continuité 258  
proper  
    élément — 92  
    sous-espace — 92, 96  
    valeur — 92, 96  
    vecteur — 92, 96
- ## Q
- quotient 5  
    loi — sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  8
- ## R
- rayon  
    de convergence 507  
    spectral 277  
réflexion 170  
règle  
    de d'Alembert 429  
    de la chaîne 808, 810, 812  
relatif  
    fermé — 223  
    ouvert — 223  
    voisinage — 223  
relation(s)  
    de Chasles 348, 387  
    de comparaison  
        intégration des — 396  
        sommation des — 434  
reste  
    d'une intégrale convergente 377  
    d'une série convergente 425  
Riemann  
    intégrales de — 385  
    somme de — 349  
Riesz (théorème de —) 158  
rotation 169  
    angle d'une — 171  
    du plan 171  
    matrice de — 161  
ruine des joueurs 653

**S**

- scindé (polynôme simplement —) 112
- semblables
  - matrices orthogonalement — 161
- semi-convergente (intégrale —) 394
- séparation (de la norme) 200
- série 424
  - absolument convergente 427
  - convergente 424
  - divergence grossière d'une — 425
  - entière 506
    - de la variable réelle 506
    - somme d'une — 506
  - lien suite/— 426
  - reste d'une — convergente 425
  - télescopique 426
- série(s) de fonctions
  - continuité d'une — 466
  - convergence uniforme d'une — 463
  - dérivation d'une — 468
  - intégration terme à terme
    - d'une — 468
  - somme d'une — 463
- série(s) entière(s)
  - dérivée d'une — 513
  - disque ouvert de convergence
    - d'une — 507
  - fonction développable en — 516
  - intervalle ouvert de convergence
    - d'une — 507
  - lemme d'Abel 507
  - primitive d'une — 515
  - produit de Cauchy de deux — 511
  - rayon de convergence d'une — 507
  - somme de deux — 511
- $\sigma$ -additivité 602
- $\sigma$ -algèbre 601
- simple (convergence —) 454
- simplement scindé (polynôme —) 112
- simultanée
  - diagonalisation — 128
  - trigonalisation — 129
- sommation
  - des relations de comparaison 434
- somme
  - de sous-espaces vectoriels 44
    - associativité de la — 44
  - de Riemann 349
  - directe 46
    - associativité de la — 47
    - décomposition en — 48
  - interversion — limite 467
- sous-additivité d'une probabilité 605
- sous-algèbre 18
- sous-espace
  - caractéristique 120, 130
  - cyclique 58
  - propre 92, 96
  - stable 57
- sous-espaces vectoriels orthogonaux 164
- sous-groupe(s)
  - de  $\mathbb{Z}$  6
  - engendré par une partie 20
- spécial (groupe — orthogonal) 162, 170
- spectral(aux)
  - projecteurs — 128
  - théorème — 165
- spectre 96
- sphère 205
- stable (sous-espace vectoriel —) 57
- subdivision adaptée 346
- subordonnée (norme) 265
- substitution polynomiale 19
- suite(s)
  - composantes 296
  - de Cauchy 309
  - de fonctions
    - convergence simple d'une — 454
    - convergence uniforme d'une — 456
  - de variables aléatoires
    - indépendantes 646
  - de variables aléatoires
    - indépendantes identiquement distribuées 646
  - extraite 213
  - lien —/série 426
- superposition (principe de —) 732

## Index

support  
d'une distribution de probabilités  
discrète 606  
d'une famille sommable 590  
symétrie orthogonale 170  
symétrique  
endomorphisme — 163  
matrice — définie positive 168  
matrice — positive 168  
système  
complet d'événements 603  
associé à un couple 613  
associé à une variable  
aléatoire 609  
différentiel linéaire 733  
quasi-complet d'événements 604

## T

tangent(e)  
à un arc 815  
application linéaire — 799  
espace — 816  
plan — 818, 820  
vecteur — à une partie 815  
taux d'accroissement 338  
Taylor  
formule de — avec reste intégral 351  
formule de — Young 353  
inégalité de — Lagrange 352  
télescopique (série —) 426  
théorème  
de Weierstrass 471  
chinois 10  
(lemme) d'Abel 507  
d'Abel radial 512  
d'Euler 25  
d'intégration terme à terme 553  
de Baire 310  
de Bolzano-Weierstrass 297  
de Cauchy linéaire 734, 749  
de Cesàro 436  
de comparaison 384, 388  
de comparaison pour les séries  
entières 509  
de continuité 557  
de convergence dominée 550  
de convergence monotone 568

de dérivation 560  
de dérivation terme à terme 468  
de Gauss 16  
de Heine 292  
de la double limite 460  
de Lagrange 33  
de réduction des isométries 172  
de Riesz 158, 310  
des bornes atteintes 291  
des compacts emboîtés 309  
spectral 165  
transfert (formule de —) 680  
transformée de Laplace 558  
transvection par blocs 54  
triangulaire  
inégalité 200, 202, 360  
matrice — par blocs 52

tribu 601  
discrète 601

trigonalisable  
endomorphisme — 115  
matrice — 115  
trigonalaisation  
base de — 115  
simultanée 129  
triple (norme) 265

trivial  
anneau — 2  
idéal 3

## U

uniforme  
approximation — 471  
convergence — 456, 463  
unitaire (vecteur —) 202

## V

valeur  
d'adhérence 213  
propre 92, 96  
variable (changement de —) 393

- variable(s) aléatoire(s) discrète(s)  
 indépendantes identiquement  
 distribuées 646  
 centrée 682  
 couple de — 613  
 d'espérance finie 679  
 décorrélées 687  
 de même loi 610  
 dont le carré est d'espérance  
 finie 684  
 indépendantes 641  
 loi d'une — 609  
 $n$ -uplet de — 614
- variance 684  
 d'une somme de variables  
 aléatoires 687  
 d'une somme de variables aleatoires  
 décorrélées 687  
 d'une variable aléatoire discrète 684
- variation  
 méthode de — des constantes 751
- vecteur  
 accélération 343  
 derivée selon un — 796  
 propre 92, 96  
 tangent à une partie 815  
 unitaire 202  
 associé à un vecteur non nul 202  
 vitesse instantanée 338
- vitesse instantanée 338  
 voisinage 219  
 relatif 223
- W**  
 Wald (formule de —) 707  
 wronskien 750
- Y**  
 Young  
 formule de Taylor — 353
- Z**  
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  7