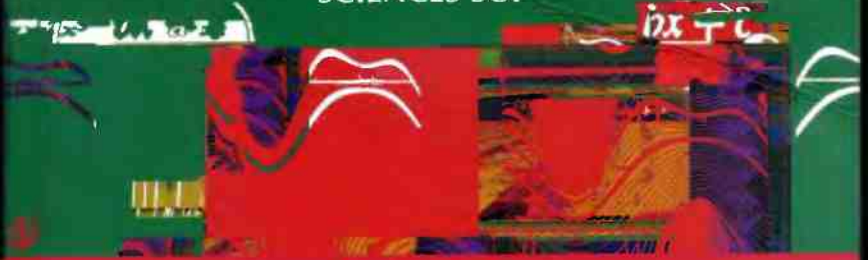
SCIENCES SUP



Cours et exercices corrigés

Licence 1re année • CNAM cycle A • IUT

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Jacques Vélu

DUNOD

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Cours et exercices corrigés

Jacques Vélu
Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers

DUNOD

Illustration de couverture : *Lionel Auvergne*

ISBN 2 10 007409 1

Table des matières

Avant-propos

Ce livre contient le cours enseigné au CNAM, dans la demi-valeur de Mathématiques Générales A2.

Faire cet enseignement relève du défi : nous n'avons que 25 heures de cours et 32 heures d'exercices dirigés pour apprendre les bases du calcul différentiel et du calcul intégral à un vaste public composé d'élèves qui n'ont pas forcément un baccalauréat scientifique. Cette contrainte nous force parfois à montrer plutôt que démontrer, mais sans jamais tomber dans le travers du bachotage...

La disparité de nos élèves oblige à revoir d'abord quelques notions de base, celles de nombre réel ou de dérivée par exemple. Parce qu'il s'agit d'avancer vite et loin en peu de temps, les rappels font l'objet d'un choix. Certains seulement sont détaillés et il y a donc des prérequis. Il faut connaître la trigonométrie (la définition et les propriétés du sinus, du cosinus et de la tangente), les équations et les polynômes du second degré. Il faut savoir faire des calculs algébriques, être capable de raisonner, comprendre la différence entre une démonstration et une observation. Tout cela, théoriquement, est su lorsqu'on passe le bac, pourtant l'expérience têtue montre qu'un an après la sortie du système éducatif, tout ou presque a disparu des mémoires !

Ne plus savoir telle ou telle formule n'est pas catastrophique – il suffit de se replonger dans un livre pour la retrouver – mais la perte du savoir faire, d'autant plus forte qu'il aura été bref, a parfois des allures de voyage sans retour. C'est en refaisant des exercices simples, pris dans les livres gardés du lycée, qu'on remettra en place les mécanismes perdus.

L'enseignement de Mathématiques Générales est souvent abordé avec appréhension par les auditeurs qui reprennent leurs études après quelques années d'interruption. Pourtant, tous les ans, nous avons la joie de voir certains se découvrir une passion pour la discipline qui les avait terrifiés jusque-là. Nos élèves sont remarquables et nous les admirons...

L'ouvrage est classique dans son agencement. S'il présente des originalités, on les trouvera dans la façon de dire les choses. Un élève du CNAM ne se contente pas d'un : « c'est évident », il préfère qu'on lui dise franchement : « cela se démontre mais c'est trop dur pour l'instant ».

Tout au long, l'accent est mis sur l'importance de la notion de formule et le livre se termine par un formulaire. C'est en effet par le biais des formules que nous donnons des noms aux objets mathématiques et que nous pouvons les manipuler. Il est donc utile de leur accorder la place qu'elles méritent.

L'objectif final du cours est d'apprendre à faire des développements limités, calculer des intégrales, résoudre des équations différentielles. Accompagnées d'exercices de niveau varié dont on trouvera les solutions condensées à la fin du livre, ces notions sont présentées, montrées, expliquées et appliquées dans de nombreux exemples. Des « méthodes pratiques » indiquent comment faire les calculs « à la main ».

Avec l'arrivée des logiciels de calcul formel cette pratique est en train de changer. Autrefois, les examinateurs jugeaient les candidats sur leur capacité à bien calculer. Le fait qu'ils trouvent « juste » donnait l'impression qu'ils avaient compris et qu'ils savaient ; les fautes de calculs étaient impitoyablement sanctionnées. A présent la situation est différente car des logiciels, encore trop onéreux pour être largement utilisés, reproduisent au niveau supérieur la révolution des calculettes : quelques ordres et vous avez le développement limité, la dérivée, l'intégrale, la courbe représentative d'une fonction. L'heure du calcul bête et méchant a sonné ! Bien sûr des questions nouvelles surgissent : les ordres donnés sont- ils les bons ? doit-on se fier à ce que donne la machine ? comment interpréter le résultat ? mais le mouvement est irréversible. Bien loin de provoquer le déclin des mathématiques comme certains l'ont imprudemment annoncé, cette irruption de la technologie leur donne encore plus de vigueur (et d'allégresse !). Débarrassés de la corvée des calculs, soulagés de la crainte de se tromper, les mathématiciens ont bien plus de force pour étendre le champ de leur discipline.

L'esprit de nos examens a donc évolué : désormais plus de place est faite à la réflexion. Surmontant les difficultés matérielles, nous installons peu à peu des compléments de formation basés sur l'emploi de ces logiciels. Mes collaborateurs font un travail remarquable dans ce domaine, avec une mention toute particulière pour Isabelle Gil qui a ouvert la brèche et qui nous propose sans cesse des idées nouvelles.

Dans quelques années les supports de cours suivront eux aussi cette évolution pour se changer en séquences vidéo. Cette métamorphose donnera au livre encore plus d'importance quand, face à des élèves réels, les professeurs seront de plus en plus virtuels ; bien loin de disparaître, le livre deviendra alors l'objet unique de la transmission du savoir.

Ce livre est dédié aux nombreux élèves qui m'ont fait découvrir toute l'astuce déployée par mes maîtres pour me faire apprendre les notions difficiles sans me poser trop de question ! Je les en remercie.

rue Saint-Martin
le 12 juin 2000

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 LA DROITE RÉELLE

1.1.1 Les nombres réels jouent un rôle fondamental dans les sciences car ce sont eux qui servent à exprimer la valeur des grandeurs physiques ; le but de ce cours est d'apprendre à les utiliser.

L'ensemble des nombres réels, qu'on note traditionnellement $\mathbb{R}$, est représenté par une ***droite graduée*** (*figure 1.1*). Chaque point de la droite représente un nombre réel qu'on appelle l'***abscisse*** du point. Le point d'abscisse 0 s'appelle l'***origine*** de la droite.

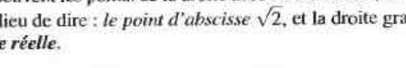


Figure 1.1 La droite réelle

On identifie souvent les points de la droite avec leur abscisse ; on dit par exemple : *le point* $\sqrt{2}$ au lieu de dire : *le point d'abscisse* $\sqrt{2}$, et la droite graduée prend alors le nom de ***droite réelle***.

1.1.2 La première propriété des nombres réels est qu'ils permettent de faire des calculs : on peut les *ajouter* ou les *multiplier* (voir exercices 1.1 et 1.2).

La seconde, tout aussi importante, est qu'on peut *comparer* deux nombres réels afin de voir lequel est le plus grand. La comparaison peut se faire facilement avec les points de la droite. En effet, les graduations permettent de choisir un sens de parcours, qu'on indique par une flèche[1] (*figure 1.1*), on dit alors que la droite est ***orientée***, et cette orientation permet de retrouver l'ordre des nombres : l'inégalité $x \leqslant y$ a lieu quand le point d'abscisse x est avant celui d'abscisse y.

Rappelons que la suite de symboles $x \leqslant y$ se prononce : x est ***inférieur ou égal à*** y, ou bien : x est ***plus petit que*** y. Pour indiquer que x est inférieur ou égal à y, mais que x et y sont différents, on écrit $x < y$, et on dit : x est ***strictement inférieur à*** y. Une inégalité construite avec le symbole $\leqslant$ s'appelle une ***inégalité large*** et une inégalité construite avec $<$ s'appelle une ***inégalité stricte***.

Le procédé fondamental de l'***analyse*** consiste, lorsqu'on a un nombre x mal connu, à trouver deux nombres bien connus a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$. Une telle expression s'appelle un ***encadrement*** de x, le nombre a est un ***minorant*** de x, et b un ***majorant*** ; plus l'écart entre a et b est petit, meilleur est l'encadrement.

Le plus grand nombre *entier* inférieur ou égal à x s'appelle la ***partie entière*** de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. C'est le seul nombre entier, n, qui vérifie les inégalités $n \leqslant x < (n+1)$.

1.2 LES DÉVELOPPEMENTS DÉCIMAUX

1.2.1 Parce que les calculs effectués directement à partir des points de la droite graduée ne sont pas assez commodes pour les besoins pratiques, on représente les nombres réels par des *chiffres*. Rappelons quelques résultats bien connus.

Un nombre réel obtenu en divisant un nombre entier par une puissance de 10 s'appelle un ***nombre décimal***. Les nombres décimaux ont l'intérêt d'être facilement représentés par des chiffres au moyen de leur ***développement décimal***.

Exemple 1.2.1.1 Les nombres réels $\dfrac{124}{10}$ et $\dfrac{-36}{10\,000}$ sont des nombres décimaux dont les développements décimaux sont :

$$\frac{124}{10} = 12{,}4 \quad \text{et} \quad \frac{-36}{10\,000} = -0{,}003\,6$$

Malheureusement (ou heureusement ?) les nombres réels ne sont pas tous des nombres décimaux, ni même des nombres rationnels[2]. Il faut donc adapter ce mode de représentation si l'on veut être capable d'équiper chaque nombre réel d'un développement décimal.

1. Dans les dessins la flèche va souvent de la gauche vers la droite, ce qui permet de parler de la *gauche* ou de la *droite* d'un point.

2. Un nombre *rationnel* est un nombre réel qui peut s'obtenir comme quotient de deux nombres entiers (voir exercice 1.3).

1.2.2 Pour cela on remarque qu'une mesure physique, aussi soigneuse soit-elle, n'est jamais d'une précision absolue, et que le résultat n'est jamais parfaitement connu. Il n'est donc pas nécessaire de représenter *exactement* les nombres réels, il suffit de les connaître de façon approchée, avec une précision qui dépend des besoins.

Le prochain théorème va dans ce sens puisqu'il montre qu'on peut approcher tous les nombres réels par des nombres décimaux avec n'importe quelle précision.

> ***Attention :*** Jusqu'à la fin de cette section tous les nombres considérés sont positifs.

Théorème 1.2.2.1 Soit α un nombre réel positif fixé. A tout entier n est associé un unique nombre décimal ayant pour dénominateur 10^n, qu'on notera $\frac{p_n}{10^n}$, tel que :

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant \alpha < \left(\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}\right) \tag{1.1}$$

Le nombre $\frac{p_n}{10^n}$ est l'***approximation décimale par défaut*** à 10^{-n} près de α, et $\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ est son ***approximation décimale par excès*** à 10^{-n} près.

> ***Démonstration :*** Les inégalités (1.1) équivalent à $p_n \leqslant 10^n\alpha < p_n + 1$. Donc p_n est la partie entière de $10^n\alpha$, ce qui prouve son existence et son unicité.

En marquant sur la droite graduée tous les points dont les abscisses sont les nombres décimaux de dénominateur 10^n on obtient des points régulièrement espacés, séparés par la distance $\frac{1}{10^n}$ (*figure 1.2*). Parmi eux les points d'abscisses $\frac{p_n}{10^n}$ et $\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ sont ceux qui encadrent α : le premier est à sa gauche (il peut coïncider avec α quand α est un nombre décimal), et le second est à sa droite et ne coïncide jamais avec α.

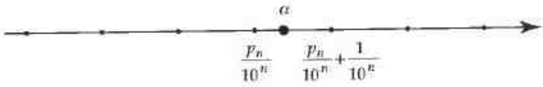


Figure 1.2 Encadrement de α à 10^{-n} près

Exemple 1.2.2.2 Les premières approximations décimales par défaut et par excès à 10^{-n} près de π donnent les encadrements suivants :

n	$\frac{p_n}{10^n}$	$\leqslant \pi <$	$\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$
0	3	$\leqslant \pi <$	4
1	3, 1	$\leqslant \pi <$	3, 2
2	3, 14	$\leqslant \pi <$	3, 15
3	3, 141	$\leqslant \pi <$	3, 142
4	3, 141 5	$\leqslant \pi <$	3, 141 6
5	3, 141 59	$\leqslant \pi <$	3, 141 60
6	3, 141 592	$\leqslant \pi <$	3, 141 593

1.2.3 Dans l'exemple 1.2.2.2 on passe d'une approximation décimale *par défaut* à la suivante, en ajoutant seulement un chiffre ; c'est un phénomène qui peut être observé pour tous les nombres réels.

Théorème 1.2.3.1 Soit α un nombre réel positif quelconque.

- Quand n augmente les approximations décimales par défaut à 10^{-n} près de α croissent, ses approximations décimales par excès décroissent, et toutes deux s'approchent de plus en plus de α.
- À chaque étape le développement décimal de l'approximation décimale par défaut s'allonge d'un chiffre nouveau (éventuellement un 0) qui vient se placer à droite des chiffres du développement décimal de l'approximation décimale par défaut précédente.

Remarque : Pour les approximations décimales par excès la règle serait plus difficile à énoncer, mais nous n'en aurons pas besoin.

1.2.4 Les chiffres qui apparaissent l'un après l'autre quand on calcule les approximations décimales *par défaut* du nombre α s'appellent les ***décimales*** de α.

Le théorème suivant montre qu'à partir d'une approximation décimale par défaut donnée on obtient immédiatement toutes les approximations décimales par défaut précédentes par une opération simple qui consiste à ***tronquer*** le développement décimal.

Théorème 1.2.4.1 Quand $m < n$ l'approximation décimale par défaut à 10^{-m} près se déduit de l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près en effaçant ses $n - m$ derniers chiffres.

Exemple 1.2.4.2 On passe de :
3, 141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
qui est l'approximation décimale par défaut à 10^{-60} près de π. à :
3, 14159265358979323846 qui est son approximation décimale par défaut à 10^{-20} près en effaçant les 40 derniers chiffres.

Plus n est grand, plus on peut déduire d'approximations décimales par défaut à partir de l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près. Alors pourquoi ne pas avoir n le plus grand possible ? Ce qu'on obtiendrait si on pouvait écrire l'une à la suite de l'autre toutes les décimales de α, s'appelle le ***développement décimal infini*** de α.

Exemple 1.2.4.3 Le développement décimal infini de $\frac{4}{11}$:

$$0,36363636363636363636363636363636363636363636363636...$$

s'obtient en répétant une infinité de fois 36.

S'il était matériellement possible d'écrire ce développement infini on aurait d'un coup d'œil toutes les approximations décimales par défaut de α, car il suffirait de le tronquer, en ne gardant que les n premiers chiffres après la virgule, pour retrouver l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près.

1.2.5 Le développement décimal infini d'un nombre réel est une suite infinie de chiffres. On peut donc se demander si une suite infinie quelconque de chiffres, dans laquelle se trouve une virgule, est toujours le développement décimal infini d'un nombre réel. Le théorème suivant montre que c'est presque vrai.

Théorème 1.2.5.1 On se donne une suite *finie* de chiffres $b_1, b_2, \cdots, b_p$ puis une suite *infinie* de chiffres $a_1, a_2, a_3, \ldots$

- Si les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, il existe un et un seul nombre réel positif dont le développement décimal infini est $b_1 b_2 \cdots b_p, a_1 a_2 a_3 \ldots$
- Si les a_n restent constamment égaux à 9 à partir d'un certain rang, il n'existe pas de nombre réel ayant pour développement décimal infini $b_1 b_2 \cdots b_p, a_1 a_2 a_3 \ldots$

Exemple 1.2.5.2 La suite de chiffres $124,652999999999999999999999999...$, dans laquelle il n'y a que des 9 après le dernier 2, n'est pas le développement décimal infini d'un nombre réel[1].

Sauf le cas particulier des nombres décimaux, dont le développement décimal infini s'obtient en ajoutant une infinité de 0 à droite du dernier chiffre non nul de leur développement décimal ordinaire, ou des nombres rationnels, dont le développement décimal infini est périodique (voir exercice 1.7.), en général, et même pour

1. Afin que toute suite infinie devienne le développement décimal infini d'un nombre réel, on adopte parfois une autre définition du développement décimal infini qui conduit à ce paradoxe que les nombres décimaux, pour qui tout devrait être simple, ont un deuxième développement décimal infini en plus de leur développement décimal infini ordinaire ! Avec cette définition la suite de chiffres $124,652999999999999...$ serait le second développement de $124,653$.

les nombres les plus utilisés, comme $\sqrt{2}$ ou π, on ne connaît que les premières décimales d'un nombre réel[1]. Le développement décimal infini est donc un modèle théorique, rarement accessible.

Quand on connaît des nombres réels de façon imprécise, leurs sommes, produits, etc. sont encore plus mal connus. L'***Analyse numérique*** rassemble les techniques qui permettent de faire des calculs avec une précision donnée à l'avance.

1.3 VALEUR ABSOLUE

1.3.1 Sur la droite graduée les nombres réels *positifs* sont représentés par les points placés après l'origine, et les nombres réels *négatifs* par ceux qui sont placés avant.

Les points d'abscisses x et $-x$ étant symétriques par rapport à l'origine (*figure 1.3*), l'un est positif, l'autre est négatif. Celui qui est positif s'appelle la ***valeur absolue*** de x, et on le note $|x|$; on a donc :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue de x mesure la distance entre l'origine et le point d'abscisse x (*figure 1.3*) ; plus $|x|$ est grand, plus ce point est éloigné de l'origine, plus $|x|$ est petit, plus il en est proche.

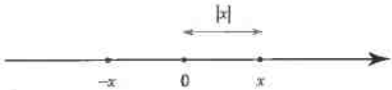


Figure 1.3 La valeur absolue d'un nombre réel

1.3.2 Plus généralement si x et y sont deux nombres réels quelconques, le nombre $|x - y|$ est celui qui est positif parmi les deux nombres $x - y$ et $y - x$, autrement dit :

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geqslant y \\ y - x & \text{si } x \leqslant y \end{cases}$$

On peut aussi dire que $|x - y|$ est le plus grand des deux nombres $x - y$ et $y - x$. Ce nombre positif mesure la distance qui sépare les points d'abscisses x et y (*figure 1.4*). Plus $|x - y|$ est grand, plus ces points sont éloignés, plus $|x - y|$ est petit, plus il sont proches. On dira que $|x - y|$ est la ***distance*** entre x et y.

Pour indiquer que deux nombres réels x et y sont proches, on écrit que $|x - y|$ ne dépasse pas une certaine valeur positive ε, qu'on s'est fixé à l'avance. Il est facile de

1. Il existe une sorte de compétition consistant à calculer le plus possible de décimales de π. Régulièrement les records sont battus et actuellement on en est à plusieurs milliards.

Figure 1.4 La distance séparant deux nombres réels

voir que la condition $|x-y| < \varepsilon$ équivaut à $x-\varepsilon \leqslant y \leqslant x+\varepsilon$, ou bien encore à $y-\varepsilon \leqslant x \leqslant y+\varepsilon$.

1.3.3 Les prochains théorèmes regroupent les propriétés fondamentales liées à la notion de valeur absolue.

Théorème 1.3.3.1 (inégalité triangulaire) Quels que soient les nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a :

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \tag{1.2}$$

L'*inégalité triangulaire*[1] peut se comprendre de deux façons différentes :

• *de la droite vers la gauche* : si les nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont tous proches de 0, alors leur somme est proche de 0 ;

• *de la gauche vers la droite* : si la somme $x_1+x_2+\cdots+x_n$ n'est pas proche de 0, alors au moins un des nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n'est pas proche de 0.

Théorème 1.3.3.2 Quels que soient les nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a :

$$|x_1x_2\cdots x_n| = |x_1|\,|x_2|\cdots|x_n| \tag{1.3}$$

Théorème 1.3.3.3 Si x n'est pas nul :

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \tag{1.4}$$

En *Analyse* on passe son temps à encadrer, majorer, ou minorer, des nombres représenté par des expressions compliquées, en se servant des trois théorèmes précédents.

1. Au chapitre 10, nous verrons pourquoi on lui donne ce nom.

Exemple 1.3.3.4 Cherchons s'il existe des nombres réels x et y tels que :

$$3\sin(x) - 7\cos(\sqrt{x+2y}) + \sin(xy^2) = 12$$

La complication de cette équation pourrait donner à penser qu'il s'agit d'un problème difficile. Cependant l'inégalité triangulaire dit que :

$$\begin{aligned}
&|3\sin(x) - 7\cos(\sqrt{x+2y}) + \sin(xy^2)| \\
&\qquad \leqslant |3\sin(x)| + \left|7\cos(\sqrt{x+2y})\right| + \left|\sin(xy^2)\right| \\
&\qquad \leqslant 3\,|\sin(x)| + 7\left|\cos(\sqrt{x+2y})\right| + \left|\sin(xy^2)\right| \\
&\qquad \leqslant 3+7+1 \\
&\qquad \leqslant 11
\end{aligned}$$

et l'on voit ainsi que l'équation n'a pas de solution.

1.4 INTERVALLES

1.4.1 Les ensembles de nombres réels les plus simples sont les intervalles. Pour mettre un peu d'ordre dans les définitions il est commode d'adjoindre à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments, ***plus l'infini*** noté $+\infty$, et ***moins l'infini*** noté $-\infty$. L'ensemble obtenu ainsi, qui s'appelle la ***droite achevée***, est noté $\overline{\mathbb{R}}$. Par convention $+\infty$ est strictement supérieur à tout nombre réel, et $-\infty$ est strictement inférieur à tout nombre réel.

On appelle ***intervalle*** l'ensemble des nombres réels compris au sens large ou au sens strict, cela dépend de la nature de l'intervalle, entre deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qu'on appelle les ***bornes*** de l'intervalle (*figure 1.5*).

Pour désigner un intervalle on écrit ses bornes, et on les entoure de deux crochets. Les bornes n'étant pas forcément dans l'intervalle, le sens dans lequel on dessine les crochets sert à indiquer si elles y sont, ou si elles n'y sont pas, autrement dit si les inégalités qui définissent l'intervalle sont larges ou strictes.

> ***Remarque :*** Par convention un intervalle est exclusivement constitué de nombres réels. Quand une borne est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, elle ne fait donc pas partie de l'intervalle, c'est pourquoi le crochet correspondant doit toujours être tourné vers l'extérieur.

Les intervalles sont les ensembles de nombres réels où l'on peut passer d'un point quelconque à un autre point quelconque sans sortir de l'ensemble. La figure 1.6 montre un ensemble qui n'est pas un intervalle car il ne possède pas cette propriété. Nous admettrons le théorème suivant qui dit que les intervalles sont les ensembles de nombres réels dépourvus de *trous*.

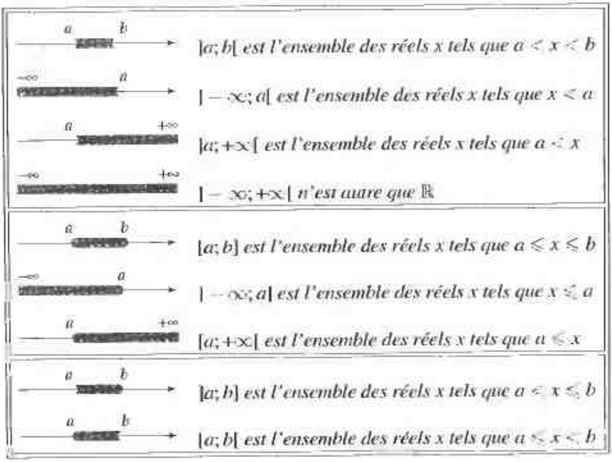


Figure 1.5 Les 9 sortes différentes d'intervalles

Théorème 1.4.1.1 Les intervalles sont les ensembles, E, de nombres réels qui possèdent la propriété suivante : quels que soient x et y dans E tout nombre réel compris entre x et y est aussi dans E.

Les intervalles les plus utiles sont les cinq premiers de la figure 1.5. Un intervalle du type $[a;b]$ avec a et b deux nombres réels s'appelle un ***segment***. Un intervalle du type $]a;b[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;a[$ ou $]-\infty;+\infty[$, autrement dit un intervalle qui ne contient pas ses bornes, s'appelle un ***intervalle ouvert***.

L'idée attachée au mot *ouvert* est qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est ***ouverte*** si, partant d'un point quelconque de $\mathcal{A}$, on a la possibilité de se déplacer de part et d'autre de ce point sans sortir de $\mathcal{A}$. Un intervalle du type $[a;+\infty[$ n'est pas ouvert car on ne peut pas se déplacer à gauche de a sans sortir de l'intervalle ; *dans une partie ouverte il n'y a pas de point en position particulière, sur le bord par exemple.*

De façon plus précise, un ensemble de nombres réels, $\mathcal{A}$, est ***ouvert*** si, quel que soit le point a de $\mathcal{A}$, il existe un intervalle du type $]a-\eta;a+\eta[$ avec $\eta > 0$ contenu dans $\mathcal{A}$: en outre on dit qu'un ensemble est ***fermé*** quand son complémentaire (l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas dedans) est ouvert ; les segments et les intervalles du type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$ sont des intervalles fermés.

Enfin les intervalles du type $]a;b]$ ou $[a;b[$, qui ne sont ni ouverts ni fermés, sont parfois qualifiés de ***semi-ouverts***.

1.4.2 Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide quelconque de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M de $\mathbb{R}$ est un ***majorant*** de $\mathcal{A}$ (ou que $\mathcal{A}$ est ***majorée*** par M) si $a \leqslant M$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$ (*figure 1.6*).
- On dit qu'un nombre réel m est un ***minorant*** de $\mathcal{A}$ (ou que $\mathcal{A}$ est ***minorée*** par m) si $m \leqslant a$ quel que soit a dans $\mathcal{A}$ (*figure 1.6*) .
- On dit que la partie $\mathcal{A}$ est ***bornée*** si elle possède à la fois un majorant et un minorant, ce qui revient à dire qu'on peut l'enfermer dans un segment.

Figure 1.6 En gris un ensemble $\mathcal{A}$ borné qui n'est pas un intervalle

Exemple 1.4.2.1 L'ensemble des entiers naturels n'est pas borné car, quel que soit M, il existe des entiers strictement supérieurs à M.

Si l'ensemble $\mathcal{A}$ est vide on convient que tous les nombres réels sont des majorants et des minorants de $\mathcal{A}$. Nous allons voir quel est l'ensemble des majorants et des minorants d'un ensemble *non vide*.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble majoré. Il est clair qu'un majorant d'un majorant de $\mathcal{A}$ est aussi un majorant de $\mathcal{A}$. Par conséquent si M_1 et M_2 sont des majorants de $\mathcal{A}$, tout nombre réel compris entre M_1 et M_2 est aussi un majorant de $\mathcal{A}$, et il en résulte, d'après le théorème 1.4.1.1, que l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$ est un intervalle.

En outre, parce qu'il y a des majorants arbitrairement grands (puisque tout majorant d'un majorant est un majorant), la borne supérieure de cet intervalle est forcément $+\infty$. En revanche sa borne inférieure ne peut pas être $-\infty$, car $\mathcal{A}$ possède au moins un élément, et tous ses majorants sont supérieurs à cet élément.

Il en résulte que l'ensemble des majorants de $\mathcal{A}$ est un intervalle qui ne peut être que de la forme $[a; \infty[$ ou $]a; \infty[$, avec a un nombre réel. On démontre le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale en *analyse*.

Théorème 1.4.2.2 L'ensemble des majorants d'un ensemble $\mathcal{A}$, majoré, non vide, est un intervalle de la forme $[S; \infty[$.

Ce théorème nous dit que $\mathcal{A}$ possède un majorant particulier, S, qui est plus petit que tous les autres majorants. On l'appelle la ***borne supérieure*** de $\mathcal{A}$, et on le note $\sup(\mathcal{A})$. Par convention, lorsque $\mathcal{A}$ n'est pas majoré, on pose $\sup(\mathcal{A}) = +\infty$. On a un résultat analogue en retournant le sens des inégalités :

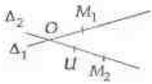
Théorème 1.4.2.3 L'ensemble des minorants d'un ensemble $\mathcal{A}$, minoré, non vide, est un intervalle de la forme $]-\infty; s]$.

Le nombre s s'appelle la ***borne inférieure*** de $\mathcal{A}$, on le note $\inf(\mathcal{A})$, et lorsque $\mathcal{A}$ n'est pas minoré on pose $\inf(\mathcal{A}) = -\infty$.

EXERCICES

1.1. Sur la figure ci-contre les droites parallèles Δ_1 et Δ_2 sont graduées avec la même unité de longueur : O_1 et O_2 sont leurs origines, le point M_1 a pour abscisse x_1 et le point M_2 a pour abscisse x_2. Quelles droites faut-il tracer pour obtenir le nombre réel $x_1 + x_2$?

1.2. Sur la figure ci-contre les droites Δ_1 et Δ_2 sont graduées avec la même unité de longueur ; elles ont O pour origine commune, le point M_1 a pour abscisse x_1, le point M_2 a pour abscisse x_2, le point U a pour abscisse 1. Quelles droites faut-il tracer pour obtenir le nombre réel x_1x_2 ?



1.3. Démontrer qu'il n'existe pas deux nombres entiers p et q, de parité différente, tels que $2q^2 = p^2$. En déduire que le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

1.4. On se donne deux nombres réels x et y tels que $x < y$. Quel est le nombre, n, d'entiers relatifs k vérifiant $x \leqslant k \leqslant y$?

1.5. Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$.

1) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres décimaux d tels que $\alpha < d < \beta$.

2) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres irrationnels i tels que $\alpha < i < \beta$.

1.6. Quand on connaît le développement décimal d'un nombre réel α tel que $0 < \alpha < 1$ comment obtient-on le développement décimal du nombre $1 - \alpha$?

1.7. On note a_n le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule du développement décimal infini du nombre réel α. On dit que le développement de α est ***périodique***, s'il existe deux entiers, r et N, tels que $a_{n+r} = a_n$ quel que soit $n \leqslant N$. Le nombre $p = a_N a_{N+1} \cdots a_{N+r-1}$ s'appelle la ***période***, et r la ***longueur de la période***. Par exemple 241, 572 352 352 35... admet un développement périodique, la période est 235 et elle a pour longueur 3.

1) Démontrer que le nombre α est de la forme $d + \dfrac{1}{10^s}\left(\dfrac{p}{10^r - 1}\right)$ avec d un nombre décimal et s un entier relatif.

2) Démontrer que tout nombre rationnel admet un développement décimal infini périodique.

3) Déduire, des questions précédentes, le développement décimal infini de $a + b$ avec : $a = 1,257\,245\,724\,572\,457\,245...$ et $b = 3\,562,\,142\,241\,562\,415\,624\,156...$

1.8. Soient $\alpha = 0,91991999199991999991999999199999991999999991...$, le nombre réel obtenu en écrivant un 9, un 1, deux 9, un 1, trois 9, un 1, quatre 9, un 1, etc., et $\beta = 0,9119911999119999119999911999999119999999119...$, celui qui s'obtient en écrivant un 9, deux 1, deux 9, deux 1, trois 9, deux 1, etc.

1) En utilisant les résultats de l'exercice précédent, dire si les nombres α et β sont rationnels.

2) Déterminer les chiffres du développement décimal de $\alpha+\beta$ (on demande seulement de deviner le résultat, le démontrer fait appel à des connaissances d'un autre niveau !)

1.9. Démontrer que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ pour tous nombres réels x et y.

1.10. En utilisant les théorèmes 1.3.3.1, 1.3.3.2 et 1.3.3.3 démontrer que, quel que soit x :

$$1 \leqslant \frac{1 + \sqrt{8 - \sin x}}{2 + \cos^2 x} \leqslant 2$$

1.11. Démontrer que l'ensemble, $\mathcal{A}$, des nombres réels de la forme $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, avec x un nombre réel quelconque, est borné. Trouver $sup(\mathcal{A})$ et $inf(\mathcal{A})$.

Chapitre 2

Fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 FONCTIONS

2.1.1 Dans un phénomène physique, il arrive souvent que deux grandeurs soient liées : quand l'une varie, l'autre varie aussi, et d'une façon qui en dépend. La notion de *fonction* permet de formaliser cette idée.

Une loi qui permet d'associer à tout nombre x situé dans une certaine partie, $\mathcal{A}$, de $\mathbb{R}$ un nombre réel y uniquement déterminé par x s'appelle une ***fonction réelle d'une variable réelle***. Si la fonction se nomme f, on note $f(x)$ le nombre y associé à x par f et on l'appelle l'image de x. On dit que $\mathcal{A}$ est le domaine de définition de f ; l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{A}$, noté $f(\mathcal{A})$, s'appelle l'***image*** de f.

Concrètement, on peut voir une fonction f comme une machine (*figure 2.1*).

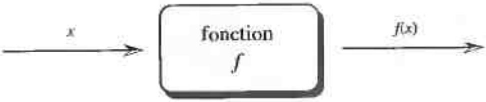


Figure 2.1 Une fonction f

Quand on entre le nombre x, la machine travaille (peu importe comment, cela dépend de f) et le nombre $f(x)$ ressort. L'important c'est qu'en entrant autant de fois qu'on veut la même valeur de x, c'est toujours la même valeur de $f(x)$ qui sort ; la machine doit être *déterministe*, les sorties doivent être uniquement déterminées par les entrées, il n'y a pas de place pour le hasard.

Bien évidemment, cette esquisse de définition manque terriblement de précision et il est possible de l'améliorer, mais nous ne le ferons pas car nous n'en avons pas besoin. Contentons-nous de quelques exemples.

Exemple 2.1.1.1 La loi qui associe à tout nombre réel son inverse est une fonction réelle d'une variable réelle dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé de 0 ; on peut la représenter par la formule $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemple 2.1.1.2 La loi qui donne à l'instant t le nombre d'êtres humains peuplant la Terre est une fonction réelle d'une variable réelle. Il n'existe sans doute pas de formule permettant de calculer $f(t)$ à partir de t bien qu'une valeur $f(t)$ soit associée sans ambiguïté à chaque valeur de t.

Exemple 2.1.1.3 Imaginons que, dans un certain phénomène physique, une grandeur y dépende d'une grandeur x, et qu'un enregistreur dessine la variation de y quand x varie (*figure 2.2*).

Cette courbe définit une fonction réelle d'une variable réelle, puisqu'à chaque valeur de x est associée une valeur de y qu'on peut lire sur le dessin (en admettant que la lecture soit suffisamment précise pour ne pas laisser de doute sur la valeur de y). Le domaine de définition de la fonction ainsi définie est l'ensemble des valeurs balayées par x.

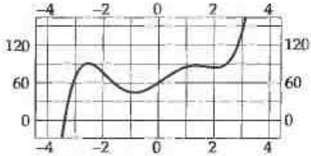


Figure 2.2 Courbe dessinée par un enregistreur

2.1.2 Considérons deux grandeurs physiques représentées par les variables x et y. On dira que y dépend de x au moyen de la fonction f si la grandeur y prend obligatoirement la valeur $f(a)$ quand x prend la valeur a ; on écrit cette propriété $y = f(x)$, bien que x et y soient des grandeurs variables et pas des nombres réels fixés.

Exemple 2.1.2.1 Soit R le rayon d'un cercle variable et S sa superficie. Quand R prend la valeur ρ, la superficie S prend la valeur $\pi\rho^2$. Par conséquent, si l'on note f la fonction qui associe à tout nombre réel le produit de son carré par π, on aura $S = f(R)$.

On retiendra qu'il ne faut pas confondre les variables avec les fonctions qui servent à exprimer leurs liaisons. Lorsqu'on écrit $y = f(x)$ il y a deux variables, x et y, et une fonction, f.

2.2 FORMULES

2.2.1 Il ne faut pas non plus confondre *formule* et *fonction*. Les exemples 2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.1.1.3 montrent qu'une fonction peut être définie au moyen d'une formule, mais que ce n'est pas toujours le cas.

Pour nous, les fonctions définies par des formules sont les plus importantes et ce sont les seules que nous manipulerons bien que nos résultats puissent parfois être énoncés sous la forme générale : *pour toute fonction f alors, ...*

Principe 2.2.1.1 Une fonction f définie par une formule a pour domaine de définition l'ensemble des nombres réels x pour lesquels la formule permet de calculer $f(x)$. Ce domaine de définition est constitué de $\mathbb{R}$ privé de certains points ; ces points peuvent être isolés ou former des intervalles.

Exemple 2.2.1.2 La formule $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$ définit $f(x)$ sauf quand $x = +2$, $x = -2$, et $|x| < 1$; le domaine de définition de f est donc la réunion des intervalles $]-\infty; -2[$, $]-2, -1]$, $[+1; +2[$, $]+2, +\infty[$.

Outre la possibilité de calculer directement $f(x)$ à partir de x, la formule peut servir de nom à la fonction, comme lorsqu'on dit : la fonction x^2. Cependant cette façon de nommer les fonctions a un gros défaut : le nom de la fonction dépend du nom de la variable, ce qui n'est pas vraiment satisfaisant et qui peut conduire à des incohérences lorsque plusieurs variables sont en jeu.

Exemple 2.2.1.3 La fonction x^2 et la fonctions t^2 sont les mêmes quand on ne considère que des fonctions d'une seule variable, mais il peut s'agir de deux fonctions différentes lorsqu'on considère des fonctions de plusieurs variables.

De plus, plusieurs formules peuvent conduire à la même fonction.

Exemple 2.2.1.4 La fonction ***valeur absolue***, définie par la formule $f(x) = |x|$ pourrait aussi être définie par $f(x) = \sqrt{x^2}$.

Puisque plusieurs formules peuvent représenter la même fonction, on précise que deux fonctions f et g définies par des procédés différents sont ***égales*** si elles ont le même domaine de définition et si $f(x) = g(x)$ pour tout x dans ce domaine.

Exemple 2.2.1.5 Les fonctions $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ sont égales.

2.2.2 Avant d'aller plus loin, il n'est pas inutile de préciser un peu la notion de formule. Il vient d'abord à l'esprit qu'une fonction est définie par une formule si l'on peut déterminer ses valeurs au moyen d'une calculette.

De ce point de vue, avoir une formule voudrait dire que le nombre $f(x)$ peut être déterminé à partir de x par un enchaînement de calculs mettant en jeu des *constantes*, les fonctions que l'on trouve sur une calculette : le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente*, l'*exponentielle*, le *logarithme*, et les opérations de la calculette : l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication*, la *division*, l'*élévation à une puissance*.

Exemple 2.2.2.1 On calcule la fonction :

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sin(\cos(\pi x))}{x^6 + 8(\cos x)^2}}$$

en partant de x et en effectuant la succession d'opérations indiquée par le diagramme de la *figure 2.3*.

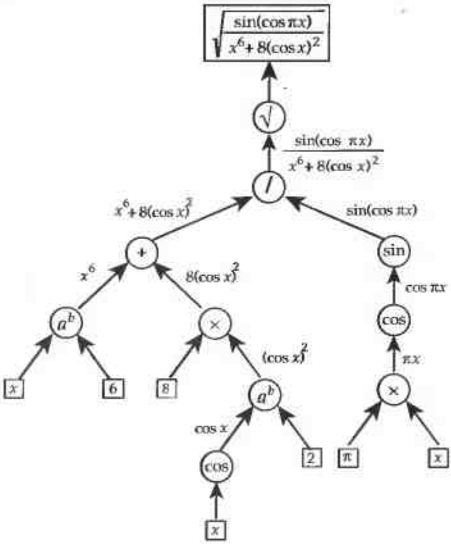


Figure 2.3 Comment calculer $\sqrt{\frac{\sin(\cos(\pi x))}{x^6 + 8(\cos x)^2}}$

2.2.3 C'est à partir de cette idée qu'on parvient à définir de façon rigoureuse la notion de formule. D'abord, on se met d'accord sur une liste finie de ***fonctions de référence*** ; pour nous ce sera :

- les *fonctions constantes*
- $f(x) = x$, qu'on appelle l'***identité***
- la *valeur absolue*
- la *racine carrée*
- l'*exponentielle* (voir chapitre 6)
- le *logarithme* (voir chapitre 6)
- le *cosinus*
- le *sinus*
- la *tangente*
- l'*arcsinus* (voir chapitre 4)
- l'*arctangente* (voir chapitre 4)

Cette liste est une affaire de convention, elle pourrait être modifiée, et nous la modifierons, pour des raisons qu'on verra dans le prochain paragraphe.

Ensuite, on se met d'accord sur une liste finie d'***opérations de référence***. Pour nous ce sera l'*addition*, la *multiplication*, la *division* et la *composition des fonctions*[1].

Rappelons que si f et g sont des fonctions :

- leur ***somme***, notée $f + g$ est la fonction s définie par $s(x) = f(x) + g(x)$,
- leur ***produit***, noté fg, est la fonction p définie par $p(x) = f(x)g(x)$,
- leur ***quotient***, noté $\dfrac{f}{g}$ est la fonction q définie, à condition que g ne soit pas la constante 0, par $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,
- leur ***composée***, notée $f \circ g$ est la fonction c définie par $c(x) = f(g(x))$.

Exemple 2.2.3.1 Si $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2 + 3$ alors :

$$
\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= \sin x + (x^2 + 3) \\
f(x)g(x) &= (\sin x)(x^2 + 3) \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sin x}{x^2 + 3} \\
f \circ g(x) &= \sin(x^2 + 3) \\
g \circ f(x) &= (\sin x)^2 + 3
\end{aligned}
$$

Avec cet exemple, on remarque qu'on n'a pas toujours $f \circ g = g \circ f$ (en fait cette égalité ne se produit que dans des conditions exceptionnelles).

Les fonctions de référence sont considérées comme les formules les plus simples, et on convient que les opérations de référence appliquées à des formules donnent encore des formules. Alors, pour obtenir les formules les plus générales, on part des fonctions de référence, on leur applique des opérations de référence, et on recommence avec les formules qu'on vient de fabriquer. De proche en proche on obtient des formules de plus en plus compliquées ; c'est précisément ce qu'on a fait dans l'exemple 2.2.2.1.

1. La composition des fonctions est indispensable pour pouvoir enchaîner les opérations ; dans l'exemple 2.2.2.1, c'est elle qui permet de calculer le sinus du cosinus.

2.2.4 Les formules qu'on peut fabriquer ainsi dépendent des fonctions et des opérations de référence autorisées. Plus il y a de fonctions et d'opérations de référence, plus il existe de fonctions définissables par des formules. On pourrait donc avoir la tentation d'allonger la liste des fonctions et des d'opérations de référence, c'est ce qui arrive en pratique, mais on pourrait aussi faire le contraire, afin d'éliminer des fonctions ou les opérations superflues.

Par exemple, si on a déjà le *sinus* et le *cosinus* il n'est pas nécessaire d'avoir aussi la *tangente* car $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Il n'est même pas indispensable d'avoir la fonction *cosinus* parce que $\cos x = \sin(\dfrac{\pi}{2} - x)$. La fonction *valeur absolue* pourrait être supprimée parce que $|x| = \sqrt{x^2}$. Enfin, au chapitre 6 nous verrons que $\sqrt{x} = \exp(\dfrac{\ln x}{2})$, ce qui permet aussi de supprimer la *racine carrée*.

Toutefois, parce qu'il est très pratique d'avoir des noms particuliers pour le cosinus, la tangente, la valeur absolue, ou la racine carrée, nous les laisserons parmi les fonctions de référence.

Il en va de même avec les opérations ; par exemple la soustraction ne fait pas partie des opérations de référence parce que $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$.

Le choix d'un bon ensemble de fonctions et d'opérations de référence, ni trop gros, ni trop petit, n'est qu'une affaire de convention et d'usage. Pourtant, même si on allonge les listes, l'expérience montre qu'on finit toujours par rencontrer une fonction intéressante qu'on ne peut pas représenter par une formule. Alors, si on a vraiment besoin de cette nouvelle fonction, on lui donne un nom et on l'ajoute à la liste des fonctions de référence, ce qui a pour effet d'élargir l'ensemble des fonctions représentables par des formules. C'est ce qui a été fait lorsqu'on a découvert la fonction sinus. Elle ne s'exprimait pas par une formule construite en prenant pour fonctions de référence les constantes, l'identité, la valeur absolue et la racine carrée, alors on lui a donné un nom, on l'a représentée par un symbole, et on l'a ajoutée à la liste des fonctions de référence. La situation a de nouveau été la même quand il a fallu admettre l'*exponentielle*, le *logarithme*, ou les fonctions *arcsinus* et *arctangente* comme fonctions de référence.

La liste des opérations a, elle aussi, parfois besoin d'être allongée ; par exemple après le chapitre 8, nous pourrons lui ajouter la *primitivisation* des fonctions.

> ***Mise en garde :*** Dorénavant, quand nous dirons qu'une *fonction possède une formule*, il sera sous-entendu que les fonctions et les opérations de référence sont celles qui ont été indiquées dans le paragraphe précédent : les constantes, l'identité, la racine carrée, la valeur absolue, l'exponentielle, le logarithme, le cosinus, le sinus, la tangente, l'arcsinus et l'arctangente, pour les fonctions, et : l'addition, la multiplication, la division et la composition pour les opérations. Cela s'applique notamment pour les principes 2.2.1.1, 2.4.3.1 et 3.4.1.1.

2.3 COURBE REPRÉSENTATIVE

2.3.1 Lorsqu'une fonction reliant deux grandeurs x et y est donnée par une formule compliquée, on ne voit pas tout de suite comment y réagit aux variations de x. Afin de le voir, il est commode de dessiner la ***courbe représentative*** de f. Pour cela, on calcule $f(x)$ pour plusieurs valeurs de x, ce qui fournit des points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$; quand ces points sont suffisamment rapprochés ils donnent une idée de la courbe.

Exemple 2.3.1.1 Pour tracer la courbe représentative de la fonction définie sur $[0;4]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 14x}{6}$ (*figure 2.4*) on a choisi 16 valeurs a_i, et pour chacune on a calculé $f(a_i)$. Comme les 16 points obtenus donnent une bonne idée de la courbe il n'y a plus qu'à les joindre pour obtenir un tracé continu.

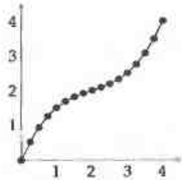


Figure 2.4 Courbe tracée en joignant des points

Il existe aujourd'hui de nombreux logiciels capables d'exécuter automatiquement cette opération, et qui le font vite et bien[1]. Toutefois il faut rester vigilant car la machine ne sait rien de l'allure de la courbe entre les points calculés et, dans le doute, elle fait comme si la variation était régulière, ce qui conduit parfois à des tracés fantaisistes. Il est donc prudent de confronter le tracé aux renseignements qu'on possède sur la *variation* de la fonction (voir chapitre 4).

Exemple 2.3.1.2 Pour $f(x) = 3\cos x - \sin \pi x$ ma machine a dessiné la courbe de la figure 2.5 mais rien ne m'assure que des petites ondulations n'ont pas été oubliées.

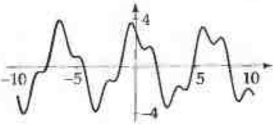


Figure 2.5 Courbe représentative de $f(x) = 3\cos x - \sin \pi x$

Ce qui vient d'être vu concernait les fonctions définies par une formule. La formule provient généralement de considérations théoriques, mais quand on aborde l'étude d'un phénomène physique, on n'a pas toujours de théorie ; on constate d'abord que des grandeurs sont liées, et ensuite on cherche une formule qui pourrait rendre compte de leur liaison.

1. Par exemple *Mathematica*, *Maple*, etc.

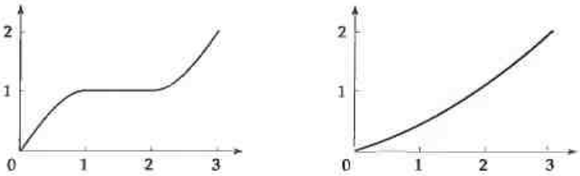
Exemple 2.3.1.3 Sachant comment la température a varié les jours précédents, on aimerait pouvoir prédire comment elle variera dans les prochains jours. Si l'on pouvait trouver une formule permettant de calculer la température en fonction de la date on aurait résolu ce problème, mais jusqu'à maintenant on n'en connaît pas...

La recherche d'une formule à partir d'une courbe est un problème difficile qui n'a pas de solution générale. On verra quelques méthodes dans les exercices.

2.3.2 La *monotonie* d'une fonction est peut-être la propriété qui se voit le mieux sur sa courbe représentative.

• On dit qu'une fonction f est ***croissante*** sur un intervalle $\mathcal{I}$ contenu dans son domaine de définition si, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathcal{I}$, la condition $x_1 \leqslant x_2$ entraîne $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Concrètement cela revient à dire que sa courbe représentative *ne redescend jamais* (*figure 2.6-**a***).

• On dit que la fonction croissante f est ***strictement croissante*** sur l'intervalle $\mathcal{I}$ si, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathcal{I}$, la condition $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) < f(x_2)$. Concrètement cela revient à dire que sa courbe représentative *monte tout le temps sans jamais rester constante* (*figure 2.6-**b***).



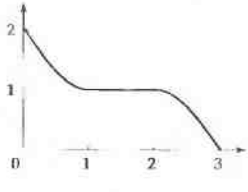
a b

Figure 2.6 Fonctions croissante (a) et strictement croissante (b)

• On dit qu'une fonction f est ***décroissante*** sur un intervalle $\mathcal{I}$ contenu dans son domaine de définition si, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathcal{I}$, la condition $x_1 \leqslant x_2$ entraîne $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Concrètement cela revient à dire que sa courbe représentative ne *remonte jamais* (*figure 2.7-**a***).

• On dit que la fonction décroissante f est ***strictement décroissante*** sur un intervalle $\mathcal{I}$ contenu dans son domaine de définition si, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathcal{I}$, la condition $x_1 < x_2$ entraîne $f(x_1) > f(x_2)$. Concrètement cela revient à dire que sa courbe représentative *descend tout le temps sans jamais rester constante* (*figure 2.7-**b***).

Lorsque f est croissante ou décroissante on dit qu'elle est ***monotone*** sur $\mathcal{I}$. Lorsque f est strictement croissante ou strictement décroissante on dit qu'elle est ***strictement monotone*** sur $\mathcal{I}$.



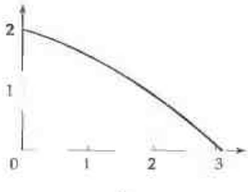


Figure 2.7 Fonctions décroissante (a) et strictement décroissante (b)

Exemple 2.3.2.1 La fonction dont la courbe représentative est dessinée sur la figure 2.8 est monotone sur chacun des intervalles $[a;b]$,$[b;c]$,$[c;d]$,$[d;e]$. Plus précisément,elle est strictement croissante sur $[a;b]$ et $[c;d]$ et strictement décroissante sur $[b;c]$ et $[d;e]$.

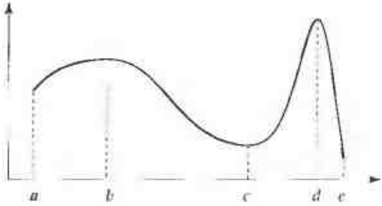


Figure 2.8 Fonction oscillante

2.4 CONTINUITÉ

2.4.1 Pour dessiner la courbe représentative d'une fonction, nous avons vu qu'on place un nombre fini de points et qu'on les joints en supposant que la fonction varie régulièrement. Mais cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée (même par les fonctions définies par des formules).

Exemple 2.4.1.1 Examinons (*figure 2.9*) ce qui peut arriver à $y = f(x)$ quand x varie autour de la valeur 0.

• Dans le cas (a) il ne se passe rien de particulier : y varie en prenant des valeurs qui s'approchent de 2.

• Dans le cas (b) il ne se passe pas grand chose non plus : la courbe fait un angle mais une fois encore y s'approche de 2.

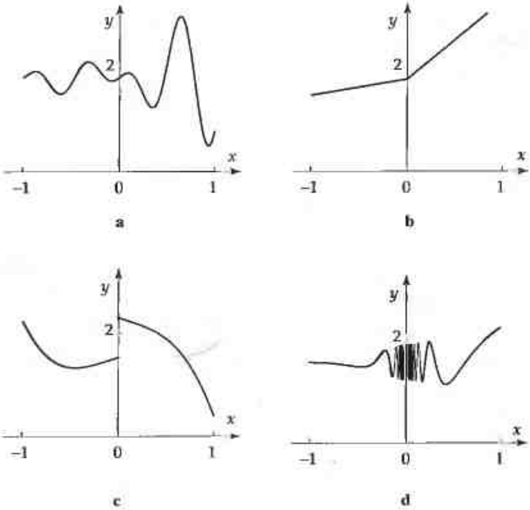


Figure 2.9 Divers comportements d'une fonction

• Dans le cas **(c)** ce n'est plus pareil car la courbe se déchire et y passe brusquement de $1,5$ à $2,2$ quand x traverse la valeur 0.

• Dans le cas **(d)** y oscille indéfiniment sans parvenir à se stabiliser quand x s'approche de 0, et l'on n'a même pas idée de la valeur que pourrait prendre y quand $x = 0$.

Dans les deux premiers cas on dira que y varie de façon *continue*, et dans les deux derniers de façon *discontinue*.

2.4.2 Considérons une fonction f et deux variables x et y, liées par $y = f(x)$. On a envie de dire que la fonction f est *continue* au point a si y s'approche de la valeur $b = f(a)$ quand x s'approche de a.

Cela signifie que l'écart $|y - b| = |f(x) - f(a)|$ peut être rendu arbitrairement petit, à condition que $|x - a|$ soit suffisamment petit.

D'une façon précise la fonction f est ***continue*** en a si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut), on peut trouver un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ contenant a, tel que $|f(x) - f(a)|$ ne dépasse pas ε tant que x reste dans $\mathcal{I}$.

Remarque : Comme il n'est pas gênant d'imposer à l'intervalle $\mathcal{I}$ d'être symétrique autour de a, on peut le choisir de la forme $]a-\eta; a+\eta[$ et dire : la fonction f est continue en a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ quand $|x - a| < \eta$.

Exemple 2.4.2.1 Démontrons que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue en $x = 1$.

Ici nous avons $y = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, et $b = 1$. Alors $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$ équivaut à $-\varepsilon < \dfrac{1}{x} - 1 < \varepsilon$ ou encore à $1 - \varepsilon < \dfrac{1}{x} < 1 + \varepsilon$. Dès que $\varepsilon < 1$ les nombres $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$ sont positifs et, parce que x est positif, ce système d'inégalités équivaut à $\dfrac{1}{1+\varepsilon} < x < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.

Par conséquent si x appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{1+\varepsilon}; \dfrac{1}{1-\varepsilon}\right[$ on est certain que $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$, ce qui prouve que f est continue en 1.

2.4.3 Lorsqu'une fonction est continue en tout point d'un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, on dit qu'elle est ***continue sur l'intervalle*** $\mathcal{I}$. Nous admettrons le principe général suivant :

> **Principe 2.4.3.1** (principe de continuité) Soit $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition d'une fonction f définie par une formule[1]. Alors f est continue sur $\mathcal{I}$.

Pour obtenir ce résultat, on étudie d'abord la continuité de chacune des fonctions de référence, ce qui donne le théorème suivant :

> **Théorème 2.4.3.2** Les fonctions constantes, la fonction identité, les fonctions sinus, exponentielle et logarithme sont continues sur tout leur domaine de définition.

Ensuite, on examine l'effet des opérations entre fonctions continues ce qui donne un second théorème, valable pour n'importe quelles fonctions continues, qu'elles soient définies par des formules ou non.

> **Théorème 2.4.3.3** La somme, le produit, le quotient, la composée de deux fonctions continues sont des fonctions continues.

Alors l'association des théorèmes 2.4.3.2 et 2.4.3.3 conduit au principe de continuité.

Mise en garde : Dans le théorème 2.4.3.3, la dénomination *fonction continue* signifie : une fonction qui est continue sur tout intervalle ouvert contenu dans

1. Voir la mise en garde de la fin du paragraphe 2.2.4.

son domaine de définition. Dans le cas particulier d'un quotient, les points où le dénominateur s'annule ne font pas partie du domaine de définition, et le quotient est continu sur des intervalles ouverts qui ne contiennent pas ces points.

2.5 LIMITES

2.5.1 Il est parfois nécessaire d'étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche d'un point situé au bord de son domaine de définition ; il y a plusieurs possibilités.

Considérons une fonction f et un nombre réel a situé au bord du domaine de définition de f, ce qui veut dire que f n'est pas définie à gauche ou à droite de a, ou qu'elle est définie à gauche et à droite de a, mais pas au point a.

Exemple 2.5.1.1 La formule $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$ définit $f(x)$ sauf quand $x = 0$. Le domaine de définition de f est la réunion des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0;+\infty[$. La courbe représentative est formée de deux demi-droites (*figure 2.10*). Lorsque x s'approche de 0 en restant positif le nombre $y = f(x)$ s'approche de 1 mais quand il s'approche de 0 en restant négatif le nombre y s'approche de -1.

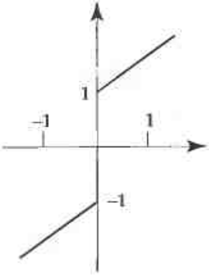


Figure 2.10 Courbe repréentative de $x + \dfrac{|x|}{x}$

Cet exemple nous amène à poser deux définitions.

• On dit que le nombre réel L est la ***limite à droite*** de $f(x)$ quand x tend vers a, et cela s'écrit :

$$L = f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ quand $a < x < a + \eta$; on dit alors : $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a par ***valeurs supérieures***.

• On dit que le nombre réel L est la ***limite à gauche*** de $f(x)$ quand x tend vers a, et cela s'écrit :

$$L = f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quand $a - \eta < x < a$: on dit alors : $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a par ***valeurs inférieures***.

On démontre sans mal que ces limites, si elles existent, sont uniques. Pour la fonction de la *figure 2.10* nous avons $f(0^+) = +1$ et $f(0^-) = -1$.

2.5.2 Le fait qu'une fonction soit monotone permet, dans de nombreux cas, de prouver qu'elle a une limite sans faire le moindre calcul.

• On dit qu'une fonction f est ***majorée*** sur un intervalle $\mathcal{I}$ s'il existe un nombre M tel que $f(x) \leqslant M$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, et l'on dit alors que M est un ***majorant*** de $f(x)$ sur $\mathcal{I}$.

Théorème 2.5.2.1 Soit f une fonction croissante et majorée sur l'intervalle $]a; b[$. Alors f admet une limite à gauche quand x tend vers b et $f(b^-) \leqslant M$ pour tout majorant, M, de $f(x)$.

Théorème 2.5.2.2 Soit f une fonction décroissante et majorée sur l'intervalle $]a; b[$. Alors f admet une limite à droite, L, quand x tend vers a. De plus $f(a^+) \leqslant M$ pour tout majorant, M, de $f(x)$.

• On dit qu'une fonction f est ***minorée*** sur un intervalle $\mathcal{I}$ s'il existe un nombre M tel que $m \leqslant f(x)$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, et on dit alors que m est un ***minorant*** de $f(x)$ sur $\mathcal{I}$.

Théorème 2.5.2.3 Soit f une fonction croissante et minorée sur l'intervalle $]a; b[$. Alors f admet une limite à droite quand x tend vers a et $m \leqslant f(a^+)$ pour tout minorant, m, de $f(x)$.

Théorème 2.5.2.4 Soit f une fonction décroissante et minorée sur l'intervalle $]a; b[$. Alors f admet une limite à gauche, L, quand x tend vers b. De plus $m \leqslant f(b^-)$ pour tout minorant, m, de $f(x)$.

2.5.3 Soient n, un entier supérieur ou égal à 1, et $n+1$ nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$. On dit que f est ***continue par morceaux*** sur le segment $[a_1; a_{n+1}]$ quand, à la fois :

– f est une fonction continue sur chacun des intervalles ouverts $]a_k; a_{k+1}[$;
– $f(x)$ admet une limite à droite en chacun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
– $f(x)$ admet une limite à gauche en chacun des points $a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$.

Le nombre $\sigma = f(a_k^+) - f(a_k^-)$ s'appelle le ***saut*** de f au point a_k.

Exemple 2.5.3.1 La *figure 2.11* montre la courbe représentative d'une fonction f continue par morceaux sur $[1;4]$ avec $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, pour laquelle $f(1^+) = 3$; $f(2^-) = 4,5$; $f(2^+) = 1$; $f(3^-) = 3$; $f(3^+) = 3,8$; $f(4^-) = 2$.

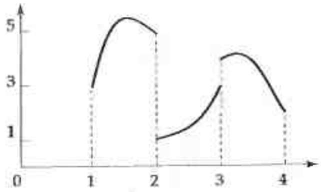


Figure 2.11 Une fonction continue par morceaux

On étend la notion de fonction continue par morceaux en disant que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur $[a;b]$ quel que soit le segment $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Le cas le plus simple de fonction continue par morceaux est celui d'une fonction f définie sur un segment $[a;b]$ telle que :

– f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$;
– f a une limite à droite en a, avec $f(a^+) = f(a)$;
– f a une limite à gauche en b, avec $f(b^-) = f(b)$.

On dit alors que f est ***continue sur le segment*** $[a;b]$.

2.5.4 Quand la fonction f est définie à gauche et à droite du point a, et quand $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent et sont égales à un même nombre L, on écrit :

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

et on dit que L est la ***limite*** de $f(x)$ lorsque x ***tend*** vers a ; on dit aussi que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a. On démontre que cette limite, quand elle existe, est unique.

Il est facile de voir que l'existence d'une limite L, en a, équivaut à la propriété suivante : quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quand $0 < |x - a| < \eta$.

Exemple 2.5.4.1 La formule $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ ne définit pas la fonction f en 0 ; son domaine de définition est la réunion des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0,+\infty[$; la *figure 2.12* montre sa courbe représentative.

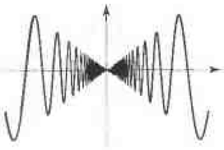


Figure 2.12 La fonction $x\sin\frac{1}{x}$

Nous allons chercher la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. Posons $y = x\sin\frac{1}{x}$: on a toujours $|y| \leqslant |x|$ parce que $|y| = |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|$, et parce qu'un sinus est toujours compris entre -1 et $+1$. Si l'on se donne un nombre $\varepsilon > 0$, il suffit qu'on ait $0 < |x| < \varepsilon$ pour que $|y - 0| < \varepsilon$. Donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

2.5.5 Considérons une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant le nombre a. Puisque f est définie autour de a on peut voir si $f(x)$ a des limites à gauche et à droite en a et les comparer à $f(a)$.

Théorème 2.5.5.1 La fonction f est continue en a si et seulement si :

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Remarque : Il revient au même de dire que la fonction f est continue en a si et seulement si $f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$.

Le théorème 2.5.5.1, associé au principe de continuité, permet de trouver la limite de nombreuses expressions données par des formules.

Exemple 2.5.5.2 Cherchons $\lim_{x\to 2}\left(16 - \sin\frac{\pi x}{4}\right)\sqrt{x^2-1}$. Le domaine de définition de $f(x) = \left(16 - \sin\frac{\pi x}{4}\right)\sqrt{x^2-1}$ est la réunion des intervalles $]-\infty;-1]$ et $[+1;+\infty[$. Donc la fonction f est définie sur un intervalle ouvert contenant 2 et, puisque $f(x)$ est donné par une formule, le principe de continuité nous dit que f est continue en 2, donc :

$$\lim_{x\to 2}\left(16 - \sin\frac{\pi x}{4}\right)\sqrt{x^2-1} = f(2) = 15\sqrt{3}$$

2.5.6 Considérons une fonction f définie à gauche et à droite de a, pour qui $f(a)$ n'est pas défini, mais qui a une limite quand x tend vers a.

À chaque fois qu'on attribue une valeur arbitraire à $f(a)$ on obtient une nouvelle fonction dont le domaine de définition est plus grand que celui de f, puisqu'il contient a. Si l'on prend $\lim_{x\to a} f(x)$ comme valeur de $f(a)$ la nouvelle fonction est continue (c'est la seule façon d'obtenir une fonction continue) ; choisir cette valeur c'est ***prolonger f par continuité***.

Exemple 2.5.6.1 La formule $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ne définit pas f en 0 : le domaine de définition de f n'est que la réunion des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0,+\infty[$. Lorsque x est très proche de 0 les deux nombres $\sin x$ et x sont tous les deux proches de 0, il y a une indétermination ; on démontrera (exemple 2.7.2.2) que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Ce résultat, extrêmement utile, permet de prolonger f par continuité en posant $f(0) = 1$. On obtient alors une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier dont la courbe représentative est donnée par la *figure 2.13*.

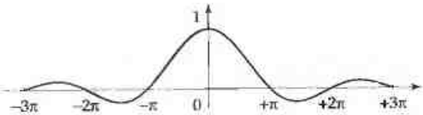


Figure 2.13 La fonction $\dfrac{\sin x}{x}$

2.5.7 Considérons maintenant une fonction f et un point a situé au bord du domaine de définition de f. Lorsque x s'approche de a il peut arriver que le nombre $f(x)$ devienne de plus en plus grand. Les définitions qui suivent traduisent cette situation.

Exemple 2.5.7.1 Lorsque x s'approche de 0 tout en restant positif $f(x) = \dfrac{1}{x}$ devient de plus en plus grand (*figure 2.14*).

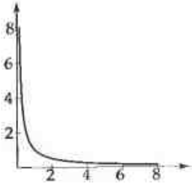


Figure 2.14 La fonction $\dfrac{1}{x}$

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ quand x ***tend à droite vers*** a, et l'on écrit $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$ (aussi grand qu'on veut), il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $A < f(x)$ quand $a < x < a + \eta$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ quand x ***tend à droite vers*** a, et l'on écrit $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$ (aussi grand qu'on veut), il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $f(x) < -A$ quand $a < x < a + \eta$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ quand x ***tend à gauche vers*** a, et l'on écrit $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$ (aussi grand qu'on veut), il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $A < f(x)$ quand $a - \eta < x < a$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ quand x ***tend à gauche vers*** a, et l'on écrit $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ si, quel que soit le nombre $A > 0$ (aussi grand qu'on veut), il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $f(x) < -A$ quand $a - \eta < x < a$.

Lorsque f est définie de part et d'autre de a et que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ on écrit tout simplement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, de même qu'on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ quand $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

2.5.8 Il reste à examiner ce qui peut arriver quand le domaine de définition de la fonction f contient un intervalle du type $]a; +\infty[$ et que x devient de plus en plus grand.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** L ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$ (*figure 2.15*), et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre A tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quand $A < x$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** L ***quand*** x ***tend vers*** $-\infty$, et l'on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre A tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ quand $x < A$.

Exemple 2.5.8.1 La *figure 2.15* montre la courbe représentative d'une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

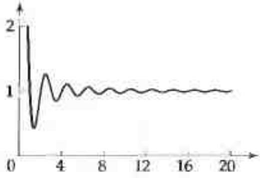


Figure 2.15 Une fonction qui tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$, et l'on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si, quel que soit le nombre B, il existe un nombre A tel que $B < f(x)$ quand $A < x$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$, et l'on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si, quel que soit le nombre B, il existe un nombre A tel que $f(x) < B$ quand $A < x$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $-\infty$, et l'on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si, quel que soit le nombre B, il existe un nombre A tel que $B < f(x)$ quand $x < A$.

• On dit que $f(x)$ ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $-\infty$, et l'on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si, quel que soit le nombre B, il existe un nombre A tel que $f(x) < B$ quand $x < A$.

Exemple 2.5.8.2 La *figure 2.16* montre la courbe représentative de $f(x) = x^2$; on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

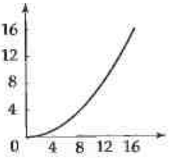


Figure 2.16 La fonction x^2

2.5.9 Les fonctions obtenues en faisant le quotient de deux polynômes seront étudiées longuement au chapitre 11 ; on les appelle des ***fractions rationnelles***. Pour le moment nous retiendrons les résultats suivants.

Théorème 2.5.9.1 Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes. Si α est un nombre réel tel que $A(\alpha) \neq 0$ et $B(\alpha) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha^+} \dfrac{A(x)}{B(x)}$ et $\lim\limits_{x\to\alpha^-} \dfrac{A(x)}{B(x)}$ sont infinies, avec un signe qui est celui de $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ quand x est suffisamment proche de α pour que $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ ne change plus de signe.

Exemple 2.5.9.2 La fonction $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^3-1}$ devient infinie quand x tend vers 1. Le numérateur se rapproche de 9, qui est positif, et le dénominateur est positif quand x est supérieur à 1 et négatif sinon, donc ;

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+3x+5}{x^3-1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+3x+5}{x^3-1} = -\infty$$

Théorème 2.5.9.3 Soit $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots}{b_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots}$, avec a_0 et b_0 non nuls. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^d} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^d}$$

Exemple 2.5.9.4 Pour la fonction $f(x) = \dfrac{3x^4 + 2x + 7}{-x^3 + 4x + 1}$ on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -3x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2.6 CALCUL DES LIMITES

2.6.1 Une fois passée cette avalanche de définitions, il est grand temps de dire pourquoi on s'intéresse aux limites et comment on les calcule.

D'abord, dans les calculs approchés, savoir que $f(x)$ a une limite, L, quand x tend vers a, permet de remplacer $f(x)$, qui est parfois difficile à utiliser, par $f(\alpha)$, avec α choisi suffisament près de a. En effet, les nombres $f(x)$ et $f(\alpha)$ sont proches de L donc proches l'un de l'autre, et cela est valable même si l'on ne connaît pas la valeur exacte de L.

Toutefois, le calcul de $f(\alpha)$, même lorsque α est très proche de a, ne donne jamais qu'une valeur approchée de L. Pour connaître sa valeur exacte, il faudrait employer d'autres moyens, ce qu'on ne sait pas toujours faire.

Cependant, la connaissance d'une valeur exacte ou approchée de L donne souvent des informations sur le comportement de $f(x)$ quand x s'approche de a. Au paragraphe 2.7.3 nous verrons qu'on peut parfois prouver que $f(x)$ va rester positif, ou qu'il reste compris entre certaines valeurs.

L'exemple 2.4.2.1 peut faire penser que la détermination exacte d'une limite n'est pas un exercice commode, et pourtant, quand la fonction est définie au moyen d'une formule, il suffit parfois d'un simple calcul algébrique associé à quelques connaissances et un peu d'astuce pour calculer sa valeur.

Jusqu'à la fin du chapitre, afin de ne pas avoir à passer en revue toute une foule de cas particuliers, nous allons adopter une présentation unifiée. Lorsque nous dirons x ***tend vers*** ω le symbole ω pourra désigner soit un nombre réel a, soit a^+, soit a^-, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Un ***voisinage de*** ω sera :

- n'importe quel intervalle ouvert contenant a si ω est le nombre réel a ;
- n'importe quel intervalle du type $]a; a + \eta[$ si ω est a^+ ;
- n'importe quel intervalle du type $]a - \eta; a[$ si ω est a^- ;
- n'importe quel intervalle du type $]-\infty; A[$ si ω est $-\infty$;
- n'importe quel intervalle du type $]A; +\infty[$ si ω est $+\infty$.

Par exemple : *f est définie au voisinage de* $+\infty$ signifie qu'il existe un nombre A tel que $f(x)$ est défini pour tout $x > A$, ou bien : *f est positive au voisinage de* a^+ signifie qu'il existe un nombre η tel que $f(x) \geqslant 0$ quand $a < x < a + \eta$, etc.

2.6.2 Le théorème 2.5.5.1 permet de calculer la limite de $f(x)$ en un point situé à l'intérieur du domaine de définition de f. Le théorème qui suit, associé à des résultats de référence comme celui de l'exemple 2.7.2.2, permet de calculer des limites, en des points situés au bord du domaine de définition, mais qui n'en font pas partie.

Théorème 2.6.2.1 (théorème de prolongement des égalités) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de ω, ayant des limites quand x tend vers ω. Alors :

- la limite de leur somme est la somme de leurs limites :

$$\lim_{x\to\omega} f(x) + g(x) = \lim_{x\to\omega} f(x) + \lim_{x\to\omega} g(x) \tag{2.1}$$

- la limite de leur produit est le produit de leurs limites :

$$\lim_{x\to\omega} f(x)g(x) = \lim_{x\to\omega} f(x) \lim_{x\to\omega} g(x) \tag{2.2}$$

- la limite de leur quotient est le quotient de leurs limites, à condition que la limite du dénominateur ne soit pas nulle :

$$\lim_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\omega} f(x)}{\lim_{x\to\omega} g(x)} \tag{2.3}$$

et en particulier, si la limite de $g(x)$ n'est pas nulle :

$$\lim_{x\to\omega} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to\omega} g(x)} \tag{2.4}$$

Exemple 2.6.2.2 Pour chercher $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x + \sin x}{5x + \tan x}$ on ne peut pas appliquer directement le théorème 2.6.2.1 car la limite du dénominateur est nulle. Cependant on peut écrire :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{5x + \tan x} = \frac{2 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)}{5 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = g(x)$$

Alors, puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (exemple 2.7.2.2), le théorème 2.6.2.1 nous dit que le numérateur de $g(x)$ a pour limite 3, et puisque $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, nous avons $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1}{\cos x} = 1$. Par conséquent le dénominateur de $g(x)$ a pour limite 6, et finalement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + \sin x}{5x + \tan x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Dans l'exemple précédent, l'astuce consistait à transformer la formule pour que le résultat devienne évident. Malheureusement, le calcul d'une limite n'est pas toujours aussi simple, et c'est au chapitre 7 qu'on apprendra vraiment à résoudre ce genre de problèmes, sans faire appel à la moindre astuce.

2.6.3 Il reste une opération sur les fonctions qui n'a pas été abordée dans le théorème 2.6.2.1, c'est la composition des fonctions.

Théorème 2.6.3.1 Soit g une fonction définie au voisinage de ω qui admet une limite quand x tend vers ω, et soit f une fonction définie et continue au voisinage de cette limite. Alors la fonction composée de g par f admet une limite quand x tend vers ω et :

$$\lim_{x \to \omega} f\Big(g(x)\Big) = f\left(\lim_{x \to \omega} g(x)\right)$$

Exemple 2.6.3.2 La formule $\sqrt{\dfrac{2x+\sin x}{5x+\tan x}}$ peut s'écrire sous la forme $f(g(x))$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+\sin x}{5x+\tan x}$. Nous avons vu dans l'exemple 2.6.2.2 que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \dfrac{1}{2}$. Alors, puisque la fonction f est continue au point $\dfrac{1}{2}$, cela donne $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{2x+\sin x}{5x+\tan x}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

2.7 ENCADREMENT DES LIMITES

2.7.1 Le théorème 2.6.2.1 concerne le comportement des *égalités* quand on passe à la limite. À présent nous allons voir comment se comportent les *inégalités*.

Théorème 2.7.1.1 (théorème de comparaison des limites) Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de ω, telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x dans ce voisinage. Si f et g ont des limites lorsque x tend vers ω alors :

$$\lim_{x \to \omega} f(x) \leqslant \lim_{x \to \omega} g(x)$$

Parce qu'on peut résumer ce théorème en disant que *les inégalités larges restent valables quand on passe à la limite*, il s'appelle aussi le ***théorème de passage à la limite des inégalités***.

En remplaçant f ou g par des constantes, on obtient des conséquences très utiles.

Théorème 2.7.1.2 Soit f une fonction définie au voisinage de ω.

- Supposons qu'il existe une constante m telle que $m \leqslant f(x)$ pour tout x dans ce voisinage. Alors, si f admet une limite lorsque x tend vers ω, on a forcément $m \leqslant \lim\limits_{x \to \omega} f(x)$.
- Supposons qu'il existe une constante M telle que $f(x) \leqslant M$ pour tout x dans ce voisinage. Alors, si f admet une limite lorsque x tend vers ω, on a forcément $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) \leqslant M$.

2.7.2 Le prochain théorème est utile à la fois pour prouver l'existence de certaines limites et pour les calculer.

Théorème 2.7.2.1 (théorème de la pince) Soient f, u et U trois fonctions définies au voisinage de ω, telles que $u(x) \leqslant f(x) \leqslant U(x)$ pour tout x dans ce voisinage. Alors si $u(x)$ et $U(x)$ ont des limites lorsque x tend vers ω, et si ces limites sont égales, la fonction f possède elle aussi une limite et l'on a :

$$\lim_{x \to \omega} u(x) = \lim_{x \to \omega} f(x) = \lim_{x \to \omega} U(x)$$

Ce théorème dit que si le nombre $f(x)$ reste pris entre deux nombres qui s'approchent d'une même limite, il ne peut pas s'échapper, et doit forcément se rapprocher de cette limite ; c'est pour cette raison qu'on l'appelle parfois le *théorème des gendarmes*.

Exemple 2.7.2.2 Voici une belle application du théorème de la pince. Sur le cercle trigonométrique (*figure 2.17*) marquons le point A qui admet x pour abscisse curviligne. Alors, si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, l'arc AD a pour longueur x, le segment AC a pour longueur $\sin x$, le segment AE a pour longueur $\tan x$.

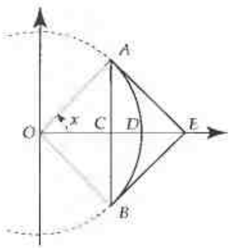


Figure 2.17 Les inégalités $2\sin x \leqslant 2x \leqslant 2\tan x$

Admettons que la longueur du segment ACB est inférieure à la longueur de l'arc ADB qui elle-même est inférieure à la longueur du segment brisé AEB. Cela se traduit par les inégalités $2\sin x \leqslant 2x \leqslant 2\tan x$ d'où on déduit que :

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \tag{2.5}$$

quand $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Si x est négatif on pose $x = -y$ et l'on refait le même raisonnement avec y, ce qui donne $\cos y \leqslant \frac{\sin y}{y} \leqslant 1$, et en repassant à x on obtient $\cos(-x) \leqslant \frac{\sin(-x)}{(-x)} \leqslant 1$, ce qui équivaut aux inégalités (2.5).

Ces inégalités sont donc valables quel que soit x tel que $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

Alors, puisque $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, le théorème de la pince donne :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1 \tag{2.6}$$

On remarquera que le théorème de la pince reste valable quand la limite commune à $u(x)$ et $U(x)$ est $+\infty$ ou $-\infty$, mais dans ce cas il n'est pas necessaire d'avoir un encadrement.

Théorème 2.7.2.3 Soient f et u deux fonctions définies au voisinage de ω, telles que $u(x) \leqslant f(x)$ pour tout x dans ce voisinage. Alors, si $\lim\limits_{x\to\omega} u(x) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = +\infty$.

Théorème 2.7.2.4 Soient f et U deux fonctions définies au voisinage de ω, telles que $f(x) \leqslant U(x)$ pour tout x dans ce voisinage. Alors, si $\lim\limits_{x\to\omega} U(x) = -\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = -\infty$.

2.7.3 Si le théorème 2.7.1.1 avait une réciproque ce serait : *quand f et g sont telles que $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to\omega} g(x)$ il existe un voisinage de ω tel que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x dans ce voisinage*, mais on constate sans peine que cette affirmation peut être mise en défaut quand les limites de $f(x)$ et de $g(x)$ sont égales.

Exemple 2.7.3.1 Si $f(x) = x^2 - x + 1$ et si $g(x) = x$ on a bien $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ puisque $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$, bien que $f(x) \geqslant g(x)$ quel que soit x réel.

Pour éviter cette situation il faut utiliser des inégalités strictes.

Théorème 2.7.3.2 Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to\omega} f(x) < \lim_{x\to\omega} g(x)$. Alors il existe un voisinage de ω tel que $f(x) < g(x)$ pour tout x dans ce voisinage.

Ce théorème admet deux cas particuliers importants.

Théorème 2.7.3.3 Soit f une fonction définie au voisinage de ω, ayant une limite lorsque x tend vers ω.

- Si m est une constante, et si $m < \lim_{x\to\omega} f(x)$, alors il existe un voisinage de ω tel que $m < f(x)$ pour tout x dans ce voisinage. En particulier si la limite de $f(x)$ est strictement positive, on est certain que $f(x)$ est strictemment positive sur un voisinage de ω.
- Si M est une constante, et si $\lim_{x\to\omega} f(x) < M$, alors il existe un voisinage de ω tel que $f(x) < M$ pour tout x dans ce voisinage. En particulier si la limite de $f(x)$ est strictement négative, on est certain que $f(x)$ est strictement négative sur un voisinage de ω.

EXERCICES

2.1. Les fonctions $\dfrac{(1+\tan x)^2}{1+\sin 2x}$ et $\dfrac{(1-\tan x)^2}{1-\sin 2x}$ sont-elles égales ?

2.2. Dessiner l'analogue de la figure 2.3 pour $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{1+x}}$.

2.3. Soient $u(x) = (x-1)^2$ et $v(x) = 5+\sin(6\pi x)$. On pose $f_\alpha(x) = \alpha u(x) + (1-\alpha)v(x)$.

1) En utilisant une machine, tracer sur un même dessin les courbes représentatives sur l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 2$ de $f_\alpha(x)$ avec α variant entre 0 à 1, de dixième en dixième.

2) Déduire de ce qui précède une méthode pour passer continûment d'une courbe représentative donnée à une autre courbe représentative donnée.

2.4. On donne deux points M_1 et M_2 de coordonnées $(a_1; b_1)$ et $(a_2; b_2)$, avec $a_1 \neq a_2$.

1) Quelle est l'équation de la droite qui passe par M_1 et M_2 ?

2) Plus généralement, on se donne n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de coordonnées $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$,..., $(a_n; b_n)$, qui ont des abscisses toutes différentes, et l'on cherche une fonction dont la courbe représentative passe par les points M_i. Si l'on pose :

$$P_i(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

que vaut $P_i(a_i)$, et que vaut $P_i(a_j)$ quand $j \neq i$? Si :

$$P(x) = b_1P_1(x) + b_2P_2(x) + \cdots + b_nP_n(x)$$

que vaut $P(a_i)$, et que peut-on dire de la courbe représentative de P ?

3) Que peut-on dire de général concernant le degré de $P(x)$? En admettant qu'un polynôme non nul de degré d ne peut pas s'annuler plus de d fois sans être nul, démontrer que $P(x)$ est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ dont la courbe représentative passe par les n points $M_1, M_2, \dots, M_n$.

4) Quand on se donne une fonction $f(x)$, et n nombres distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$, on appelle ***polynôme d'interpolation de Lagrange***[1] le polynôme obtenu par la méthode précédente, avec M_i le point de coordonnées $(a_i; f(a_i))$.

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour $f(x) = \sin \pi x$, $n = 4$, et $a_i = \dfrac{i-1}{3}$. Tracer sur un même dessin la courbe représentative de $\sin \pi x$ et de $P(x)$, pour x variant de 0 à π ; on prendra soin de marquer les points M_i.

Même question lorsque $n = 5$ et $a_i = \dfrac{i-1}{4}$.

Qu'arrive-t-il quand $f(x) = \sin \pi x$; $n = 10$; et $a_i = i$?

2.5. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres réels tous différents, avec $n > 1$. On pose :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x + 1)^2$$

1) Que peut-on dire du signe de $f(x)$ lorsque x varie ?

2) Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = Ax^2 + 2Bx + C$ avec A, B et C des coefficients qu'on déterminera.

Pourquoi ne peut-on pas avoir $A = 0$? Quel est le signe de $\Delta = B^2 - AC$?

3) En déduire le théorème suivant : *Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des nombres réels tous différents, avec $n > 1$, alors :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 < n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \tag{2.7}$$

2.6. On sait qu'une certaine fonction, f, est de la forme $f(x) = ux + v$, avec u et v des constantes, mais on ne connaît ni u, ni v. Pour les déterminer on essaye de mesurer expérimentalement $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, ..., $b_n = f(a_n)$, avec $n > 1$, mais les mesures sont entâchées d'imprécision et l'on a trouvé $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ à la place de $b_1, b_2, \dots, b_n$.

1) On note M_i le point de coordonnées $(a_i; b_i)$ et N_i celui de coordonnées $(a_i; \beta_i)$. Quelle distance sépare M_i de N_i ?

1. *Interpoler* une fonction connue seulement par quelques valeurs, c'est imaginer les valeurs de la fonction *entre* ces valeurs, tandis qu'*extrapoler* c'est l'imaginer *en dehors* de ces valeurs.

2) On pose $\delta = \sum_{i=1}^{n} (b_i - \beta_i)^2$, et l'on décide que u et v doivent être choisis pour que δ soit le plus petit possible. La droite qui aura pour équation $y = ux + v$ avec ce choix de u et de v s'appelle la ***droite des moindres carrés***.

En remplaçant b_i par $ua_i + v$ donner une expression de δ de la forme $\delta = Au^2 + Bv^2 + 2Cuv - 2Du - 2Ev + F$ avec des coefficients A, B, C, D, E, F qu'on déterminera, et qui dépendent des nombres a_i et β_i.

3) En utilisant le résultat de l'exercice 2.7.8, dire pourquoi $AB \neq C^2$.

Dans δ faire le changement de variables :

$$u = \frac{BD - CE}{AB - C^2} + U \qquad \text{et} \qquad v = \frac{AE - CD}{AB - C^2} + V$$

pour exprimer δ au moyen de U et V (on trouvera $\delta = AU^2 + BV^2 + 2CUV + F'$ avec un certain F').

4) Quel est le signe de $AU^2 + BV^2 + 2CUV$?

En déduire que les coefficients u et v de la droite des moindres carrés sont :

$$u = \frac{BD - CE}{AB - C^2} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{AE - CD}{AB - C^2}$$

Application numérique : on suppose que $n = 10$, et que les points N_i ont pour coordonnées $(1; 4,4)$, $(2; 7,4)$, $(3; 10,1)$, $(4; 12,6)$, $(5; 16,2)$, $(6; 18,2)$, $(7; 21,3)$, $(8; 25,4)$, $(9; 26,8)$, $(10; 29,7)$.

5) Calculer u et v.

6) Quel aurait été $P(x)$, le polynôme d'interpolation de Lagrange calculé en supposant qu'au lieu d'une droite on a une fonction $f(x)$ dont la courbe représentative passe par les points N_i ?

7) En utilisant une machine, tracer les points N_i et la droite des moindres carrés, puis sur un autre dessin les points N_i et la courbe représentative du polynôme de Lagrange, pour x variant de $0,5$ à $10,5$.

2.7. Calculer les limites suivantes :

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{11x^2+9}{-2x+1} \;;\; L_2 = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2x^2+7x}{x^2-1} \;;\; L_3 = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-15} \;;$$

$$L_4 = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \;;\; L_5 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} \;;\; L_6 = \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \;;$$

$$L_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{3x+\cos x} \;;\; L_8 = \lim_{x\to+\infty} 5x^2 + 7\sin x \;;\; L_9 = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^4 - 3x^2 + \sin 1928x}{x^3 - 5x^2 - 9x + 10}.$$

Chapitre 3

Dérivée d'une fonction

3.1 TANGENTE ET DÉRIVÉE

3.1.1 Quand deux grandeurs physiques sont liées, la variation de l'une provoque une variation de l'autre, et la notion de *dérivée* permet de mesurer la vitesse de cette variation.

Considérons deux fonctions f et g ainsi que trois variables x, y, z, liées par les relations $y = f(x)$, $z = g(x)$, et supposons que les courbes représentatives des fonctions f et g sont celles que montre la *figure 3.1*.

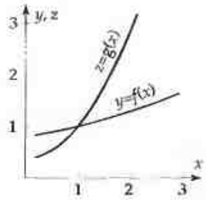


Figure 3.1 Variations de deux grandeurs qui dépendent de x

Quand $x = 1$ les valeurs de y et z sont égales, mais on constate, parce que la courbe représentative de g est plus *redressée* que celle de f, que z varie plus vivement que y lorsque x s'éloigne de 1. On voudrait être capable de prédire un tel résultat sans avoir à dessiner de courbes.

Si les courbes avaient été des droites, ce serait un problème facile car l'inclinaison d'une droite se mesure par sa *pente* et il suffirait de calculer les pentes des deux droites pour voir laquelle est la plus inclinée.

Ici, les courbes représentatives ne sont pas des droites. Cependant, si l'on ne garde de chaque courbe qu'un tout petit morceau, on a presque deux segments de droite et, si un calcul pouvait donner leur pente, on saurait lequel est le plus redressé.

On est donc amené à chercher l'équation de la droite portée par un petit segment de courbe.

3.1.2 Soit f une fonction définie au voisinage de a, continue en a. On marque sur Γ, la courbe représentative de f, le point A de coordonnées $(a\,; f(a))$, et on cherche la droite qui se confond le plus possible avec Γ au voisinage de A.

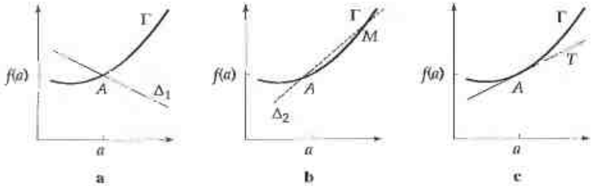


Figure 3.2 Des sécantes et une tangente

Évidemment, les droites comme Δ_1 (*figure 3.2.a*), qui traversent franchement Γ en A, ne conviennent pas. Celles, comme Δ_2 (*figure 3.2.b*), qui recoupent Γ en un point M assez proche de A sont meilleures, mais sont tout autant refusées parce qu'elles traversent quand même Γ. La lauréate serait une droite T (*figure 3.2.c*) qui toucherait Γ en ne faisant que l'effleurer ; on dirait qu'elle est ***tangente*** à Γ au point A.

Ces considérations donnent l'idée de ce qu'il faut faire : pour déterminer l'équation de la tangente on part d'une *sécante* qui passe par A et qui recoupe Γ en un point M voisin de A, puis on rapproche M de A, ce qui a pour effet de faire tourner la sécante autour de A, et, si cette sécante tend vers une position limite lorsque M arrive en A, sa limite est T, la tangente à Γ en A. Voyons comment cela se traduit par des calculs.

Le point A a pour coordonnées $(a\,; f(a))$. Un point M voisin, mais distinct de A, a pour coordonnées $(a+h; f(a+h))$ avec h petit et non nul. L'équation de la sécante qui passe par A et M est :

$$y = \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)(x-a) + f(a)$$

et cette sécante a une limite si et seulement si le coefficient de $(x-a)$ a une limite quand h tend vers 0. Quand la limite existe on dit que la fonction f est ***dérivable*** au point a, et on note :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1}$$

Ce nombre s'appelle la ***dérivée de** f **en** a*, c'est la pente de la tangente à Γ, au point A, et l'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.2.1 Considérons la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$. Sur Γ, sa courbe représentative, le point A a pour coordonnées $(a ; f(a))$, et le point M, d'abscisse $a+h$ a pour coordonnées $(a + h; f(a + h))$. Puisque :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left(3(a+h)^2 - 5(a+h) + 7\right) - \left(3a^2 - 5a + 7\right)}{h} = 6a - 5 + 3h$$

la sécante qui passe par A et M a pour équation :

$$y = [(6a - 5) + 3h](x - a) + 3a^2 - 5a + 7$$

et, quand M s'approche de A, ou, ce qui revient au même, quand h tend vers 0, l'équation de cette sécante se rapproche de :

$$y = (6a - 5)(x - a) + 3a^2 - 5a + 7$$

qui est l'équation de la tangente à Γ, en A. On a donc $f'(a) = 6a - 5$.

La fonction qui associe $f'(a)$ au nombre a s'appelle la ***dérivée de** f* ; on la note[1] f' ou parfois[2] $\dfrac{df}{dx}$. L'opération qui associe f' à f s'appelle la ***dérivation***.

3.1.3 Dans l'exemple 3.1.2.1, nous avons trouvé sans aucune difficulté que la dérivée de $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ est $f'(x) = 6x - 5$ mais il ne faut pas croire que le résultat s'obtient toujours aussi facilement, car le calcul d'une dérivée est un calcul de limite.

Exemple 3.1.3.1 Essayons de trouver la dérivée de $f(x) = \sin x$. Cette fois, le calcul donne :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

mais il n'y a pas de simplification évidente de cette fraction, contrairement à l'exemple précédent. Toutefois on pourrait avoir l'idée d'écrire :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)\sin a + \left(\frac{\sin h}{h}\right)\cos a$$

1. Si la fonction est représentée par un symbole particulier la notation f' ne pose pas de problème ; par exemple, on écrit $\sin'$ pour désigner la dérivée de la fonction *sinus*. Mais quand la fonction est simplement représentée par une formule, on ne sait pas bien où placer l'apostrophe et, faute de mieux, on la met après la formule : on note, par exemple, $(x^2 + \sin x^3)'$ la dérivée de $x^2 + \sin x^3$.

2. Cette notation conduit trop souvent à des confusions, et il est préférable de l'éviter !

parce qu'on sait que $\frac{\sin h}{h}$ tend vers 1 quand h tend vers 0, mais on ne connaît pas encore la limite de $\frac{\cos h - 1}{h}$.

Pour la trouver nous allons transformer la fraction $\frac{\cos h - 1}{h}$. Puisque h est voisin de 0, et que la fonction cosinus est continue, $\cos h + 1$ n'est certainement pas nul. On peut donc écrire :

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)\left(\frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}\right) = -\sin h\left(\frac{\sin h}{h}\right)\left(\frac{1}{\cos h + 1}\right)$$

Quand h tend vers 0, le premier facteur, $-\sin h$, tend vers 0, le deuxième tend vers 1, et le troisième tend vers $\frac{1}{2}$. Il en résulte que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et finalement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos a$$

Nous découvrons ainsi que la dérivée de la fonction *sinus* n'est autre que la fonction *cosinus* ; autrement dit :

$$\sin' x = \cos x \tag{3.3}$$

D'une façon générale, nous verrons que si f est définie par une formule, sa dérivée aussi est définie par une formule qui s'obtient par des calculs qui ne demandent pas d'astuce, contrairement à ce que pourrait faire croire l'exemple précédent.

3.2 VITESSE MOYENNE, VITESSE INSTANTANÉE

3.2.1 La dérivée permet de construire les tangentes de courbes parfois très compliquées. Nous allons voir un autre domaine où elle joue un rôle fondamental.

Imaginons un véhicule en mouvement, notons d la distance (exprimée en kilomètres) qu'il a parcourue au temps t, (exprimé en heures), et f la fonction qui relie d à t, autrement dit $d = f(t)$. Pour savoir si le véhicule est rapide on peut mesurer $f(t+1) - f(t)$, la distance parcourue pendant une heure, entre les temps t et $t+1$. Si on n'a pas la patience d'attendre une heure entière on peut se contenter de mesurer la distance $f(t+\tau) - f(t)$ parcourue pendant une durée τ, plus petite, et faire une *règle de trois* pour en déduire la distance qu'il parcourerait en une heure à condition qu'il garde toujours la même allure ; le nombre $\frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}$ qu'on trouve ainsi s'appelle la ***vitesse moyenne*** du véhicule entre les instants t et $t+\tau$: elle s'exprime en km/h.

La vitesse moyenne est un renseignement qui manque de précision. Elle dit si le véhicule a parcouru beaucoup de kilomètres pendant une durée donnée, mais elle ne donne aucune indication sur la façon dont s'est déroulé le parcours. Afin d'en avoir une idée plus précise il faut consulter la courbe représentative de f, car c'est elle qui permet de suivre la position du véhicule à chaque instant.

L'allure du véhicule peut être régulière (*figure 3.3a*), et alors la vitesse moyenne est sensiblement la même quelle que soit la période de temps sur laquelle on la calcule, ou au contraire irrégulière, avec de brusques accélérations suivies de forts ralentissements (*figure 3.3b*), et dans ce cas la vitesse moyenne dépend beaucoup de la période de temps considérée.

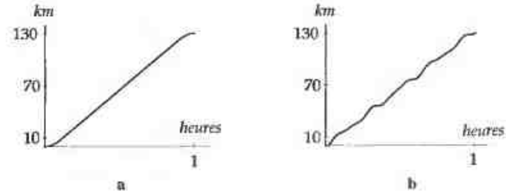


Figure 3.3 Les mouvements de deux véhicules
Pour le véhicule de la *figure 3.3a* la vitesse moyenne calculée sur n'importe quelle période de temps, τ, est presque toujours la même, alors que pour celui de la *figure 3.3b* elle est très différente selon l'intervalle de temps considéré, car son allure est très irrégulière.

3.2.2 Cette remarque donne l'idée de faire les mesures de vitesse moyenne sur des périodes de temps suffisamment brèves pour que la vitesse du véhicule n'ait pas le temps de changer ; autrement dit mesurer $\dfrac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$ avec τ le plus petit possible. Le résultat limite, obtenu en faisant tendre τ vers 0, s'appelle la ***vitesse instantanée*** du véhicule à l'instant t et, bien sûr, cette vitesse instantannée c'est $f'(t)$.

Les *figures 3.4a* et *3.4b* montrent comment les vitesses instantanées des deux véhicules précédents ont varié au cours du temps : le premier s'est presque toujours maintenu un peu au-dessus de 130 km/h, le second a poussé des pointes à 250 km/h, mais s'est presque arrêté trois fois !

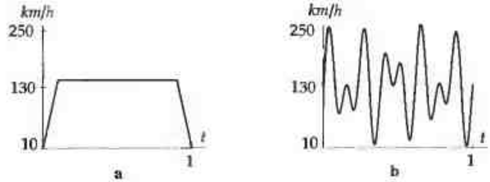


Figure 3.4 Les vitesses instantanées des deux véhicules

3.3 FONCTIONS NON DÉRIVABLES

3.3.1 Puisque $f'(a)$ est la limite d'une fraction, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, dont le dénominateur tend vers 0, il faut nécessairement que le numérateur de cette fraction tende aussi vers 0 pour que la dérivée existe. Cette remarque évidente est si importante qu'elle mérite de figurer comme théorème.

Théorème 3.3.1.1 Seules, des fonctions continues peuvent être dérivables.

On pourrait se demander si toutes les fonctions continues sont dérivables, mais des exemples simples montrent que non.

Exemple 3.3.1.2 La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est continue et la figure 2.12 montre sa courbe représentative. Pour voir si elle est dérivable lorsque $a = 0$ on calcule :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

mais on constate que ce nombre n'a pas de limite quand h tend vers 0 ; par conséquent $f'(0)$ n'existe pas.

En fait cette fonction n'est pas dérivable en 0 parce que la pente de la sécante qui joint l'origine à un point voisin oscille indéfiniment quand ce point se rapproche de l'origine.

3.3.2 Il faut bien comprendre pourquoi la continuité d'une fonction n'entraîne pas automatiquement sa dérivabilité. La continuité de f en a signifie simplement que sa courbe représentative passe par le point A de coordonnées $(a\,; f(a))$. En revanche, l'existence d'une dérivée exige beaucoup plus : la courbe représentative doit ressembler à un petit segment de droite au moment où elle traverse le point A. C'est une condition bien plus forte, qui n'est pas toujours vérifiée, comme le montre le dernier exemple, où la courbe traverse A, mais sans jamais cesser de frissonner.

Dans l'exemple 3.3.1.2, le seul point où f n'est pas dérivable est l'origine. Nous verrons que la plupart des fonctions définies par des formules sont dérivables. Toutefois, quand on les prolonge par continuité, comme c'était le cas dans cet exemple, il arrive qu'elles ne soient pas dérivables aux points où elles ont été prolongées.

Pour les fonctions sans formule, définies par des moyens beaucoup plus compliqués, la dérivabilité ne va pas de soi. On peut, par exemple, fabriquer des fonctions qui sont continues en tout point d'un intervalle, mais qui ne sont dérivables nulle part ; leurs courbes représentatives sont fort difficiles à imaginer car, quel que soit le grossissement avec lequel on les observe, leur aspect est toujours aussi oscillant ! Nous n'en dirons rien car il s'agit d'un domaine qui dépasse largement nos objectifs.

3.3.3 Nous allons examiner deux cas de fonctions qui ne sont pas dérivables, mais *presque* dérivables. Reprenons les notations habituelles : la fonction f est continue en a, et le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$.

Si $f'(a)$ existe cela veut dire que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existent, et sont égales. Cependant, pour certaines fonctions, il peut arriver que ces deux limites existent sans être égales (*figure 3.5*). On dit alors que A est un ***point anguleux*** car, en ce point, la courbe possède deux demi-tangentes qui ne sont pas alignées.

Figure 3.5 Un point anguleux

On peut aussi rencontrer des fonctions discontinues au point a, mais qui ont des limites à gauche et à droite en a, et des demi-tangentes à gauche et à droite en A (*figure 2.13*). Pour une telle fonction on note :

$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a^+)}{h} \quad ; \quad f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a^-)}{h}$$

et on appelle ces limites la ***dérivée à droite*** et la ***dérivée à gauche*** de f au point a. Ces dérivées permettent de définir, pour les fonctions dérivables, l'analogue des fonctions continues par morceaux.

Soient $n+1$ nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ tels que $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, et f une fonction définie sur le segment $[a_1; a_{n+1}]$. On dit que f est ***dérivable par morceaux*** sur ce segment quand elle possède les propriétés suivantes :

– elle est continue et dérivable sur chacun des intervalles ouverts $]a_k; a_{k+1}[$;

– en chacun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elle admet une limite à droite, $f(a_k^+)$, ainsi qu'une dérivée à droite, $f'(a_k^+)$;

– en chacun des points $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ elle admet une limite à gauche, $f(a_k^-)$, ainsi qu'une dérivée à gauche, $f'(a_k^-)$.

Exemple 3.3.3.1 La *figure 2.13* montre la courbe représentative d'une fonction dérivable par morceaux sur le segment $[0; 4]$.

3.3.4 Au paragraphe 3.1.2, nous avons vu que la courbe représentative d'une fonction dérivable en a, admet une tangente au point A, mais il peut arriver qu'une courbe ait une tangente au point A sans que la fonction f soit dérivable en a.

Exemple 3.3.4.1 La *figure 3.6* montre la courbe représentative de

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

À l'origine nous avons $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{|h|}}{|h|}$, ce qui donne $f'(0) = +\infty$, et pourtant, la droite verticale dessinée en pointillé est manifestement tangente à la courbe à l'origine.

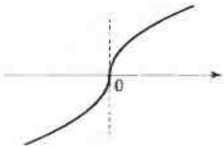


Figure 3.6 Une tangente verticale

Exemple 3.3.4.2 La *figure 3.7* montre la courbe représentative de

$$g(x) = \begin{cases} +\sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \\ +\sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

À l'origine nous avons $\dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{|h|}}{h}$, ce qui donne $g'(0^+) = +\infty$, et $g'(0^-) = -\infty$. Pourtant, une fois encore, la droite verticale dessinée en pointillé est manifestement tangente à la courbe à l'origine.

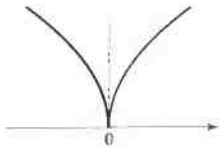


Figure 3.7 Un point de rebroussement

Ces exemples nous amènent à donner deux nouvelles définitions. Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors :

- si f a une limite à droite en a, et si $f'(a^+) = +\infty$, ou $f'(a^+) = -\infty$, on dit que la droite verticale qui passe par A est ***tangente*** en A à la courbe représentative de f ;
- si f a une limite à gauche en a et si $f'(a^-) = +\infty$, ou $f'(a^-) = -\infty$, on dit que la droite verticale qui passe par A est ***tangente*** en A à la courbe représentative de f.

Supposons que f admet au point A une dérivée à gauche, et une dérivée à droite, toutes les deux égales à $\pm\infty$. Si ces dérivées ont le même signe, on est dans la situation de la *figure 3.6*. Au contraire, si elles ont des signes contraires, on est dans la situation de la *figure 3.7*, et l'on dit alors que A est un ***point de rebroussement*** de la courbe.

3.4 CALCUL DES DÉRIVÉES

3.4.1 Analogue au principe de continuité 2.4.3.1, nous avons le résultat général suivant.

Principe 3.4.1.1 (principe de dérivabilité) Soit f une fonction définie par une formule. Notons $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert, contenu dans le domaine de définition de f, qui a la propriété que :

– les racines carrées ou les valeurs absolues, qui figurent éventuellement dans la formule de f, ne s'annulent pas tant que la variable reste dans $\mathcal{I}$,

– les arcsinus, qui figurent éventuellement dans la formule de f, ne prennent pas la valeur $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Alors f est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$ et sa dérivée possède une formule qui se déduit de celle de f.

Exemple 3.4.1.2 La *figure 3.8* montre un morceau de la courbe représentative de $f(x) = x\sqrt{1 + \cos \pi x}$. La racine carrée s'annule à chaque fois que x est un entier relatif impair, et on peut vérifier que cela provoque toujours l'apparition d'un point anguleux. Ailleurs, f est dérivable.

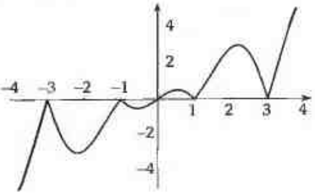


Figure 3.8 La courbe représentative de $f(x) = x\sqrt{1 + \cos \pi x}$

Il peut cependant arriver qu'une fonction f dont la formule contient une racine carrée ou un arcsinus soit dérivable en un point où la racine carrée vaut 0 ou en un point où l'arcsinus vaut $\pm\frac{\pi}{2}$. Le principe de dérivation ne dit rien de général et, pour ces points, il faut regarder au cas par cas.

Exemple 3.4.1.3 La *figure 3.9* montre un morceau de la courbe représentative de $f(x) = \sqrt{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$. La racine carrée s'annule lorsque $x = 0$ mais sans donner de point anguleux, et f est dérivable àl'origine.

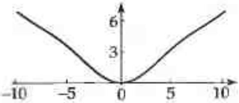


Figure 3.9 La courbe représentative de $f(x) = \sqrt{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$

3.4.2 La démonstration du principe de dérivabilité, comme celle du principe de continuité, comprend deux parties. On montre d'abord que les fonctions de référence sont dérivables, et on détermine leurs dérivées ; la *figure 3.10* donne une première liste de résultats qu'il faut bien connaître, mais on trouvera une liste plus complète dans le *Formulaire*. Ensuite, on montre que la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions dérivables sont dérivables.

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$

Figure 3.10 La dérivée de quelques fonctions de référence

Théorème 3.4.2.1 (linéarité de la dérivation) Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des constantes. Alors la combinaison linéaire $s = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ est dérivable, et :

$$s'(x) = \alpha_1 u_1'(x) + \alpha_2 u_2'(x) + \cdots + \alpha_n u_n'(x) \tag{3.4}$$

Exemple 3.4.2.2 La dérivée de $s(x) = 7\sin x - 2\cos x + 4x^2 - 3x + 1$ est $s'(x) = 7\cos x + 2\sin x + 8x - 3$.

Théorème 3.4.2.3 Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert :

– leur produit $p = uv$ est dérivable et :

$$p'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \tag{3.5}$$

– leur quotient $q = \frac{u}{v}$ est dérivable sur les intervalles où il est défini et :

$$q'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \tag{3.6}$$

Exemple 3.4.2.4 Si $f(x) = x^5 \sin x$, nous avons $f'(x) = 5x^4 \sin x + x^5 \cos x$, et si $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, nous avons $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.

Théorème 3.4.2.5 (dérivation des fonctions composées) Soient u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et v une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{J}$. Alors, si l'image de u est contenue dans $\mathcal{J}$, la fonction composée $u(v(x))$ est dérivable et :

$$u(v(x))' = v'(x)\, u'(v(x)) \tag{3.7}$$

Exemple 3.4.2.6 Si α et β sont des constantes, la dérivée de $c(x) = u(\alpha x + \beta)$ est $c'(x) = \alpha u'(\alpha x + \beta)$.

3.4.3 En combinant les résultats du *Formulaire* et les théorèmes 3.4.2.1, 3.4.2.3, 3.4.2.5, on peut toujours déterminer la formule qui représente $f'(x)$ à partir de celle qui représente $f(x)$. La seule difficulté consiste à bien *disséquer* la formule pour comprendre l'enchaînement des calculs qu'elle met en jeu.

Exemple 3.4.3.1 Cherchons la dérivée de $f(x) = x\sqrt{1 + \cos \pi x}$. On écrit d'abord $f(x) = x\,v(x)$ avec $v(x) = \sqrt{1 + \cos \pi x}$, ce qui donne $f'(x) = v(x) + xv'(x)$.

Ensuite on pose $v(x) = \sqrt{w(x)}$, avec $w(x) = 1 + \cos \pi x$, ce qui donne $v'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}$, c'est-à-dire $v'(x) = \frac{-\pi \sin \pi x}{2\sqrt{1 + \cos \pi x}}$, et finalement :

$$f'(x) = \frac{2 + 2\cos \pi x - \pi x \sin \pi x}{2\sqrt{1 + \cos \pi x}}$$

3.5 DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

3.5.1 En dérivant la fonction f, on fabrique la fonction f'. À son tour, si f' possède une dérivée, on note f'' sa dérivée, et on l'appelle la ***dérivée seconde*** de f. En continuant ainsi, on construit f''', la dérivée troisième de f, puis f'''', la dérivée quatrième, etc.

Ces fonctions s'appellent les ***dérivées successives*** de f ; celle qu'on obtient après n dérivations est la ***dérivée d'ordre*** n de f ; on la note $f^{(n)}$. En particulier f' c'est $f^{(1)}$, la dérivée d'ordre 1 de f, et f'' c'est $f^{(2)}$. Dans un souci d'uniformisation, on convient que f est la dérivée d'ordre 0 de f.

Exemple 3.5.1.1 Puisque la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, et que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, on a, en posant $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \sin x \\ f^{(1)}(x) &= \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

et comme on revient au point de départ après 4 dérivations, on peut écrire en toute généralité, avec k entier :

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

Exemple 3.5.1.2 Pour le polynôme $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 4$ on trouve :

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \\ f^{(1)}(x) &= 3x^2 - 6x + 7 \\ f^{(2)}(x) &= 6x - 6 \\ f^{(3)}(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

après quoi, ses dérivées sont toutes nulles.

Le résultat de l'exemple précédent se généralise à tous les polynômes.

Théorème 3.5.1.3 Soit $P(x)$ un polynôme de degré d.

- Tant que $0 \leqslant n \leqslant d$, la dérivée d'ordre n de $P(x)$ est un polynôme de degré $d - n$.
- La dérivée d'ordre d de $P(x)$ est une constante non nulle.
- Toutes les dérivées d'ordre strictement supérieur à d sont nulles.

Au chapitre 5 nous verrons à quoi servent les dérivées successives mais nous pouvons tout de suite donner l'interprétation de f'' dans une situation particulière.

Si on reprend l'idée d'un véhicule qui se déplace (paragraphe 3.2.1), $f(t)$ représente la distance parcourue et $f'(t)$ la vitesse instantanée au temps t. Puisque la dérivée d'une fonction indique la façon dont elle varie, f'' indique comment varie la vitesse instantanée. Quand $f''(t)$ est grand la vitesse instantanée augmente très vite ; le nombre $f''(t)$ mesure l'***accélération*** du véhicule au temps t.

3.5.2 Soit f une fonction qui admet des dérivées successives $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$. Puisque f est dérivable, elle est continue, puisque $f^{(1)}$ est dérivable, elle est continue, etc., et de proche en proche on voit que toutes les dérivées, jusqu'à $f^{(n-1)}$ sont continues. Si, en plus, $f^{(n)}$ est continue on dit que f est une fonction de ***classe*** C^n. Par convention, une fonction de classe C^0 est tout simplement une fonction continue.

Une fonction qui admet une dérivée d'ordre n quel que soit n s'appelle une fonction de classe C^∞. On dit alors que la fonction est ***indéfiniment dérivable***.

Exemple 3.5.2.1 Puisqu'en dérivant un polynôme on finit toujours par tomber sur la constante 0, tous les polynômes sont de classe C^∞.

On a le principe suivant.

Principe 3.5.2.2 Soit f une fonction définie par une formule. Supposons que $\mathcal{I}$ est un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f tel que :

– les racines carrées ou les valeurs absolues, qui figurent éventuellement dans la formule de f, ne s'annulent pas tant que la variable reste dans $\mathcal{I}$;

– les arcsinus, qui figurent éventuellement dans la formule de f, ne prennent pas la valeur $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Alors f est indéfiniment dérivable en tout point de $\mathcal{I}$.

Une fonction continue par morceaux dont les dérivées $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ sont toutes continues par morceaux s'appelle une fonction de ***classe*** C^n ***par morceaux***.

3.5.3 Voici deux résultats qui généralisent les théorèmes 3.4.2.1 et 3.4.2.3 et qui servent à calculer la dérivée d'ordre n des fonctions.

Théorème 3.5.3.1 Si $s(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \cdots + \alpha_p u_p(x)$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des constantes, et si $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ sont des fonctions qui ont des dérivées d'ordre n, alors :

$$s^{(n)}(x) = \alpha_1 u_1^{(n)}(x) + \cdots + \alpha_p u_p^{(n)}(x) \tag{3.8}$$

Théorème 3.5.3.2 (formule de Leibniz) Si u et v sont des fonctions qui admettent des dérivées d'ordre n, leur produit admet une dérivée d'ordre n, donnée par la formule :

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]^{(n)} = C_n^0 u^{(n)}(x)v(x) + C_n^1 u^{(n-1)}(x)v^{(1)}(x) + C_n^2 u^{(n-2)}(x)v^{(2)}(x) + \\ \cdots + C_n^{n-1} u^{(1)}(x)v^{(n-1)}(x) + C_n^n u(x)v^{(n)}(x)\end{aligned} \tag{3.9}$$

dans laquelle les nombres entiers $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ sont les ***coefficients du binôme***[1] obtenus en développant :

$$(u+v)^n = C_n^0 u^n + C_n^1 u^{n-1} v^1 + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \cdots + C_n^{n-1} u^1 v^{n-1} + C_n^n v^n \tag{3.10}$$

EXERCICES

3.1. On pose $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$. Quelle est l'équation de T, la tangente à Γ, la courbe représentative de $f(x)$, au point d'abscisse $a = +1$? Où T recoupe-t-elle Γ ? Démontrer que T est tangente à Γ en deux points distincts (un telle droite s'appelle une ***bitangente***. En utilisant une machine, représenter sur un même dessin Γ et T.

Reprendre l'exercice avec $f(x) = x^4 - 2(u+v)x^3 + (u^2 + v^2 + 4uv)x^2 + rx + s$ où u, v, r et s sont des nombres réels quelconques, et $a = u$.

3.2. Trouver la dérivée de $\cos x$ en suivant la méthode de l'exemple 3.1.3.1.

3.3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^4 - 2x}{x^3 + 1}\ ; \quad f_2(x) = \frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}}\ ; \quad f_3(x) = \frac{a + \sin x}{1 + a \sin x}\ ;$$

$$f_4(x) = \frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x}\ ; \quad f_5(x) = (4x^3 - 24x)\sin x - (x^4 - 12x^2 + 24)\cos x\ ;$$

$$f_6(x) = (3x^4 + 4x^2 - 7)\sqrt{x^2 - 1}.$$

1. On rappelle que $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ (voir le chapitre 5 pour la définition de $n!$).

3.4. Calculer $f'(a)$ avec $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et $-R < a < +R$. Retrouver que la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon qui arrive en ce point.

3.5. Chercher les points où les fonctions suivantes ne sont pas dérivables (on pourra raisonner sur les courbes représentatives) :

$$f_1(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad ; \quad f_2(x) = |x^3 + x^2 - 5x + 3|$$

3.6. La lettre a désigne un nombre réel quelconque et on pose :

$$u_a(x) = |(x+1)(x-2)| + a|x(x+1)|$$

1) Déterminer les signes de $(x+1)(x-2)$ et $x(x+1)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; +\infty[$. En déduire des expressions de $u_a(x)$ dépourvues de valeur absolue, valables sur chacun de ces intervalles.

2) Calculer les dérivées à gauche et à droite de $u_a(x)$ en chacun des points -1, 0 et 2.

3) Selon les valeurs de a, dire quels sont les points anguleux de la courbe représentative de $u_a(x)$.

3.7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Si f est *paire*, c'est-à-dire si $f(-x) = f(x)$ quel que soit x, que peut-on dire de f' ?

2) Si f est *impaire*, c'est-à-dire si $f(-x) = -f(x)$ quel que soit x, que peut-on dire de f' ?

3) Si f est *périodique de période T*, c'est-à-dire si $f(x+T) = f(x)$ quel que soit x, que peut-on dire de f' ?

4) Si f' est *périodique*, est-ce que f est forcément périodique ?

3.8. Quelle est la dérivée de $u_3(x) = u(u(u(x)))$? Plus généralement quelle est la dérivée de $u_n(x) = u(u(u(u(\cdots(x)\cdots))))$, avec n lettres u ?

3.9. À quoi est égale la dérivée d'ordre n de $p_1(x) = xu(x)$? Même question pour $p_2(x) = x^2u(x)$.

3.10. Calculer la dérivée d'ordre n du produit $u_1(x)u_2(x)\cdots u_p(x)$ pour quelques valeurs de n et de p. À chaque fois, comparer le résultat au développement de $(u_1 + u_2 + \cdots + u_p)^n$.

Quelle pourrait être la généralisation de la formule de Leibniz (3.9) ?

Chapitre 4

Valeurs prises par une fonction

4.1 IMAGE D'UN INTERVALLE

4.1.1 Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux valeurs *prises* par les fonctions ainsi qu'à la façon dont elle les prennent.

La fonction f prend la valeur v s'il existe un nombre réel u tel que $f(u) = v$, ce qui revient à dire que l'équation $f(x) = v$ admet au moins une solution. La recherche des valeurs prises par f peut donc être vue comme l'étude de l'équation $f(x) = v$.

Cette étude passe par toute une série de questions :

– pour quelles valeurs de v l'équation a-t-elle des solutions ?
– combien en a-t-elle ?
– comment les calculer ?
– quelle méthode est la plus efficace ?

Seules les deux premières questions seront vues ici, les autres seront abordées dans les exercices.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que le domaine de définition de f est un intervalle ; si c'était une réunion d'intervalles disjoints, ce qui arrive lorsque f est définie par une formule, on regarderait ce qui se passe sur chacun d'eux.

Nous avons donc une fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{I}$ (ouvert ou fermé, borné ou non borné, pour l'instant cela n'a pas d'importance,) et $f(\mathcal{I})$ désigne l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ quand x parcourt $\mathcal{I}$.

Il est utile de voir $f(\mathcal{I})$ comme l'ensemble des points obtenu en projetant la courbe représentative de f sur l'axe des ordonnées. La *figure 4.1* donne à penser qu'avec une courbe représentative *en un seul morceau*, ce qui est le cas lorsque f est continue, l'ensemble $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ *n'a pas de trou*. Cette idée est confirmée par le théorème suivant.

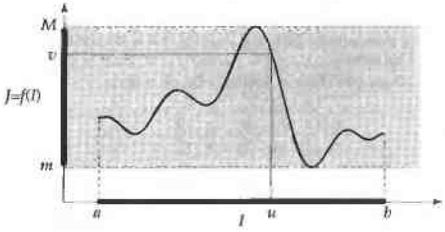


Figure 4.1 Valeurs prises par une fonction

Théorème 4.1.1.1 Quand f est continue, l'ensemble $f(\mathcal{I})$ est un intervalle. Autrement dit, pour que l'équation $f(x) = v$ ait une solution dans $\mathcal{I}$, il faut et il suffit que v se trouve dans un certain intervalle $\mathcal{J}$ (*figure 4.1*).

Dans les deux prochains paragraphes, nous allons voir comment on démontre ce théorème.

4.1.2 Soit g une fonction quelconque ; un nombre r, tel que $g(r) = 0$, s'appelle un *zéro* de la fonction g. La recherche des zéros d'une fonction est un problème fondamental des mathématiques qui occupe une large place en *analyse numérique*.

Théorème 4.1.2.1 (théorème du changement de signe) Soit g une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$; notons a et b deux points quelconques de $\mathcal{I}$. Si l'un des deux nombres $g(a)$ ou $g(b)$ est strictement positif, et l'autre strictement négatif, autrement dit, si $g(a)g(b) < 0$, la fonction g possède au moins un zéro entre a et b.

On résume cette propriété en disant : *une fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler*, ou bien : *un changement de signe détecte la présence d'un zéro*.

Exemple 4.1.2.2 Démontrons que l'équation :

$$5\cos^7 x - 2\sin^3 x = 1$$

possède une infinité de solutions.

On pose $g(x) = 5\cos^7 x - 2\sin^3 x - 1$; alors $g(0) = 4$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. Il en résulte que g possède un zéro compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, mais comme g est périodique, elle possède une infinité de zéros.

Remarque : Lorsque $g(a)g(b) > 0$ on sait que a et b ne sont pas des zéros de g, mais on ne sait rien de plus sur la présence d'un éventuel zéro entre a et b. La *figure 4.2* montre deux cas où $g(a)g(b) > 0$, dans le premier la fonction n'a pas de zéro, alors que dans le second elle en a deux.

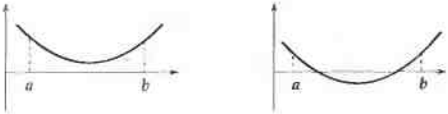


Figure 4.2 Deux cas où $g(a)g(b) > 0$

4.1.3 Le théorème suivant généralise le théorème 4.1.2.1.

Théorème 4.1.3.1 (théorème de la valeur intermédiaire) Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$, et soient a et b deux points de $\mathcal{I}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Alors quel que soit le nombre réel v strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un nombre u strictement compris entre a et b tel que $f(u) = v$.

Démonstration : La fonction $g(x) = f(x) - v$ est continue sur $\mathcal{I}$. Puisque v est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, les deux nombres $g(a) = f(a) - v$ et $g(b) = f(b) - v$ sont de signe contraire, et le théorème 4.1.2.1 dit qu'il existe un nombre u strictement compris entre a et b tel que $g(u) = 0$, ce qui donne $f(u) = v$.

Le théorème de la valeur intermédiaire dit que tout nombre réel compris entre deux éléments de $f(\mathcal{I})$ est aussi dans $f(\mathcal{I})$. Alors le théorème 1.4.1.1 permet de dire que $f(\mathcal{I})$ est un intervalle, ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.1.1.

4.2 IMAGE D'UN SEGMENT

4.2.1 En examinant quelques dessins, on pourrait essayer de deviner la nature de l'intervalle $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné) en fonction de celle de $\mathcal{I}$ et de la fonction f, mais la réponse n'est pas claire.

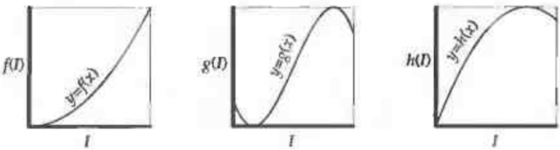


Figure 4.3 Différentes formes de courbe représentative

La *figure 4.3* montre trois fonctions difféentes, f, g, h, et la *figure 4.4* indique pour chacune ce qu'on obtient comme intervalle $\mathcal{J}$, selon ce qu'on prend pour $\mathcal{I}$.

$\mathcal{I}$	$f(\mathcal{I})$	$g(\mathcal{I})$	$h(\mathcal{I})$
$]0\,;1[$	$]0\,;1[$	$[0\,;1]$	$]0\,;1]$
$[0\,;1]$	$[0\,;1]$	$[0\,;1]$	$[0\,;1]$
$]0\,;1]$	$]0\,;1]$	$[0\,;1]$	$]0\,;1]$
$[0\,;1[$	$[0\,;1[$	$[0\,;1]$	$[0\,;1]$

Figure 4.4 La nature de $\mathcal{J}$ en fonction de celle de $\mathcal{I}$

À la deuxième ligne on observe que $\mathcal{J}$ est un segment pour les trois fonctions ; il s'agit d'un résultat général, valable pour toutes les fonctions continues.

Théorème 4.2.1.1 Si f est continue, et si $\mathcal{I}$ est un segment, alors $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ est un segment.

Ce théorème se démontre par étapes. Dans la première on démontre la propriété suivante.

Théorème 4.2.1.2 Si $\mathcal{I}$ est un segment, et si f est continue, alors l'intervalle $\mathcal{J}$ est borné.

Une conséquence de ce théorème est que l'intervalle $\mathcal{J}$ ne pouvant pas avoir de borne infinie est forcément de la forme $[m\,;M]$, $[m\,;M[$, $]m\,;M]$, ou $]m\,;M[$ avec deux nombres réels m et M. Le prochain théorème dit quelle est la bonne, parmi ces quatre éventualités.

Théorème 4.2.1.3 Si $\mathcal{I}$ est un segment, et si f est continue :
- il existe au moins un élément x de $\mathcal{I}$ tel que $f(x) = m$.
- Il existe au moins un élément y de $\mathcal{I}$ tel que $f(y) = M$.

On résume les théorèmes 4.2.1.2 et 4.2.1.3 en disant : *une fonction continue sur un segment est bornée, et atteint ses bornes.*

Puisque les bornes de l'intervalle $f(\mathcal{I})$ font partie de $f(\mathcal{I})$, parmi les quatre éventualités : $[m\,;M]$, $[m\,;M[$, $]m\,;M]$, $]m\,;M[$, la seule qui convient est $f(\mathcal{I}) = [m;M]$, ce qui termine la démonstration du théorème 4.2.1.1.

Le nombre m s'appelle la ***borne inférieure*** de f sur le segment $\mathcal{I}$, ou encore le ***minimum absolu*** de f sur $\mathcal{I}$; on le note $\inf f(\mathcal{I})$.

Le nombre M s'appelle la ***borne supérieure*** de f sur le segment $\mathcal{I}$, ou encore le ***maximum absolu*** de f sur $\mathcal{I}$; on le note $\sup f(\mathcal{I})$.

Au chapitre 5, nous verrons comment on peut déterminer le maximum et le minimum absolus quand la fonction est définie par une formule.

4.3 LE CAS DES FONCTIONS MONOTONES

4.3.1 Nous avons vu à quelle condition l'équation $f(x) = v$ possède une solution dans l'intervalle $\mathcal{I}$; maintenant nous allons voir à quelle condition il n'y en a qu'une seule.

Dire que le nombre v est une valeur prise par f revient à dire que la droite horizontale Δ, d'ordonnée v, coupe la courbe représentative de f (*figure 4.1*), et dire que l'équation $f(x) = v$ n'a qu'une seule solution signifie que cette droite ne la coupe qu'en un seul point (*figure 4.5*).

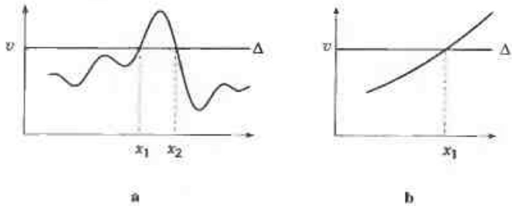


Figure 4.5 Les solutions de l'équation $f(x) = v$

Si l'équation $f(x) = v$ admet plusieurs solutions (*figure 4.5a*), et si $f(x)$ ne reste pas constamment égal à v, c'est que $f(x)$ quitte la valeur v puis y revient, et pour cela, sa courbe représentative doit être tantôt montante, tantôt descendante.

Au contraire, quand la courbe est tout le temps montante (*figure 4.5b*), $f(x)$ ne peut plus revenir à la valeur v une fois celle-ci passée, et l'équation $f(x) = v$ ne peut pas avoir plusieurs solutions (la conclusion serait la même si la courbe était tout le temps descendante).

Ces idées sont confirmées par le théorème suivant.

Théorème 4.3.1.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathcal{I}$.
- Si f est strictement monotone, l'équation $f(x) = v$ n'a jamais plus d'une solution.
- Si l'équation $f(x) = v$ n'a jamais plus d'une solution, f est strictement monotone.

4.3.2 Si, quel que soit v dans $\mathcal{J}$, l'équation $f(x) = v$ a toujours une et une seule solution dans l'intervalle $\mathcal{I}$, on dit que f est une ***bijection*** entre les intervalles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$.

Le théorème suivant, qui regroupe plusieurs résultats, montre comment sont liées les trois notions de *continuité*, de *stricte monotonie* et de *bijection*.

Théorème 4.3.2.1 Notons f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$, et supposons que $J = f(\mathcal{I})$ est aussi un intervalle.

- Si f est continue et strictement monotone, alors c'est une bijection entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$.
- Si f est une bijection continue entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, alors elle est strictement monotone.
- Si f est une bijection entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, strictement monotone, alors elle est continue.

4.4 FONCTION RÉCIPROQUE

4.4.1 Soit f une bijection entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$. Alors, quel que soit v dans l'intervalle $\mathcal{J}$, l'équation $f(x) = v$ n'a qu'une seule solution, u, et en faisant correspondre cette solution à v, on est en train d'inventer une nouvelle fonction qui va associer un nombre u dans $\mathcal{I}$ à chaque nombre v de $\mathcal{J}$ (*figure 4.6*) ; on l'appelle la ***fonction réciproque*** de f (ou parfois la fonction ***inverse*** de f, mais c'est à éviter à cause du risque de confusion avec $\frac{1}{f(x)}$) ; on la note $f^{(-1)}$.

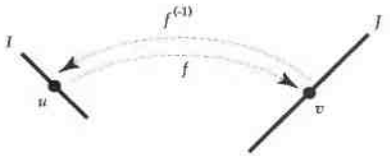


Figure 4.6 La fonction f et sa fonction réciproque $f^{(-1)}$

Exemple 4.4.1.1 La fonction $f(x) = 2x$ associe à chaque nombre réel son double. La connaissance de $v = f(u)$ permet de retrouver u, il suffit de diviser v par 2, donc $f^{(-1)}$ est la fonction qui associe à chaque nombre réel sa moitié.

La fonction $f^{(-1)}$ est la fonction qui permet de retrouver u à partir de $v = f(u)$. On pourrait dire que *f fait un calcul et que $f^{(-1)}$ le défait* ; on a :

$$f^{(-1)}(f(u)) = u\,; \qquad\qquad f(f^{(-1)}(v)) = v \tag{4.1}$$

Mise en garde : Quand on écrit $u = f^{(-1)}(v)$, cela signifie que trois conditions sont satisfaites :

- le nombre u est dans l'intervalle $\mathcal{I}$;
- le nombre v est dans l'intervalle $\mathcal{J}$;
- $v = f(u)$;

et s'il existe un nombre u', hors de l'intervalle $\mathcal{I}$, tel que $v = f(u')$, on n'a pas $u' = f^{(-1)}(v)$.

Théorème 4.4.1.2 Quand on trace sur un même dessin les courbes représentatives de f et de $f^{(-1)}$, et que le repère est orthonormé, les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (*figure 4.7*).

Démonstration : Puisqu'on a, à la fois, $v = f(u)$ et $u = f^{(-1)}(v)$, chaque point M de coordonnées $(u; v)$ sur Γ, la courbe représentative de f, correspond au point M' de coordonnées $(v; u)$ sur Γ', la courbe représentative de $f^{(-1)}$, et comme M' et M sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, la courbe Γ' est la symétrique de Γ par rapport à cette droite.

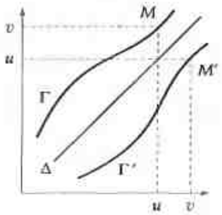


Figure 4.7 Courbes représentatives d'une fonction et de sa réciproque

4.4.2 On peut regrouper les principales propriétés de la fonction réciproque.

Théorème 4.4.2.1 Soit f une fonction *continue* et *strictement monotone* sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Notons $g = f^{(-1)}$, et $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$. Alors :

- $\mathcal{J}$ est un intervalle de même nature que $\mathcal{I}$ (ouvert, fermé ou semi-ouvert) et la fonction f est bijective ;
- le domaine de définition de g est l'intervalle $\mathcal{J}$, son image est l'intervalle $\mathcal{I}$;
- g est continue et strictement monotone, avec la même monotonie que f ;
- g est une bijection entre $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$, et f est sa fonction réciproque ;
- on a $f(g(x)) = x$ pour tout x dans $\mathcal{I}$, ainsi que $g(f(x)) = x$ pour tout x dans $\mathcal{J}$;
- si f est dérivable, et si sa dérivée ne s'annule pas, il en est de même de g et :

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \tag{4.2}$$

Démonstration : Les premières propriétés ne font que reprendre ce qui a été dit. La dernière s'obtient en démontrant d'abord que g est dérivable, ce qui n'est pas tout à fait évident, puis en dérivant l'égalité $f(g(x)) = x$; la formule de la dérivée d'une fonction composée donne $g'(x)f'(g(x)) = 1$ et comme f' ne s'annule pas, (4.2) en découle.

Même si f est définie par une formule, il est rare que sa fonction réciproque le soit aussi. C'est pourquoi le passage de f à $f^{(-1)}$ est un moyen supplémentaire pour fabriquer de nouvelles fonctions. On appelle cette nouvelle opération l'***inversion*** des fonctions ; bien évidemment, si on le souhaite, on peut l'ajouter à la liste des opérations de référence.

Dans la dernière section, nous allons présenter quelques fonctions de référence fabriquées par ce procédé. D'après le théorème 4.3.2.1, une fonction qui est tantôt croissante, tantôt décroissante, n'est pas une bijection. Pour pouvoir lui associer une fonction réciproque, on doit restreindre son domaine de définition à un intervalle sur lequel elle est strictement monotone ; c'est ce que nous ferons dans les exemples.

4.5 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

4.5.1 Pour construire une fonction réciproque du *sinus*, il faut commencer par réduire son domaine de définition à un intervalle où elle est strictement monotone.

Théorème 4.5.1.1 La fonction $f(x) = \sin x$ est une bijection continue, strictement croissante, entre les segments $[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}]$ et $[-1; 1]$. Sa fonction réciproque (*figure 4.8*), appelée ***arc sinus*** et notée arcsin, ou parfois $\sin^{-1}$, a pour domaine de définition $[-1; 1]$ et pour image $[-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}]$; elle est continue, strictement croissante, dérivable et :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.3}$$

$y = \sin x$ $y = \arcsin x$

Figure 4.8 Les fonctions *sinus* et *arc sinus*

Démonstration : Seule la formule (4.3) demande un mot d'explication. Si $f(x) = \sin x$ nous avons $f'(x) = \cos x$ et le théorème 5.1.2.1 donne :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Alors, en posant $y = \arcsin x$ nous avons $\sin y = x$ et, puisque $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$, cela donne $\cos^2 y = 1 - x^2$. Donc $\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$, mais comme $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ le cosinus de y est positif, et finalement $\cos y = \sqrt{1-x^2}$.

Mise en garde : On a $\arcsin(\sin x) = x$ seulement quand x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En effet, il faut toujours penser qu'en écrivant $y = \arcsin x$, le nombre y n'est pas n'importe quel angle dont le sinus est égal à x, c'est celui qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

4.5.2 Maintenant, nous allons construire la fonction réciproque du *cosinus* de la même façon que nous avons construit *arc sinus*.

Théorème 4.5.2.1 La fonction $f(x) = \cos x$ est une bijection continue strictement décroissante entre les segments $[0 ; \pi]$ et $[-1 ; 1]$. Sa fonction réciproque (*figure 4.9*), appelée ***arc cosinus*** et notée arccos, ou parfois $\cos^{-1}$, a pour domaine de définition $[-1 ; 1]$ et pour image $[0 ; \pi]$. Elle est continue, strictement décroissante, dérivable et :

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.4}$$

Figure 4.9 Les fonctions *cosinus* et *arc cosinus*

On doit observer que les courbes représentatives des fonctions *arc sinus* et *arc cosinus* se ressemblent : on passe de la première à la seconde en faisant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation de $+\frac{\pi}{2}$ vers le haut. En d'autres termes :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \tag{4.5}$$

et cette formule montre qu'on peut se dispenser d'utiliser la fonction *arc cosinus*. En réalité, si on fait de *arc sinus* une fonction de référence, c'est pour donner un nom à une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mais cela fait, il n'est plus nécessaire de donner un nom particulier aux primitives de $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, et on n'a donc pas besoin de l'*arc cosinus* parmi les fonctions de référence.

4.5.3 Enfin, nous allons construire la fonction réciproque de la *tangente*, en réduisant une fois encore le domaine de définition.

Théorème 4.5.3.1 La fonction $f(x) = \tan x$ est une bijection continue strictement croissante entre les intervalles ouverts $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ et $]-\infty;+\infty[$. Sa fonction réciproque (*figure 4.10*), appelée ***arc tangente***, et notée arctan, ou parfois $\tan^{-1}$, a pour domaine de définition $]-\infty;+\infty[$ et pour image $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est continue, strictement croissante, dérivable et :

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \tag{4.6}$$

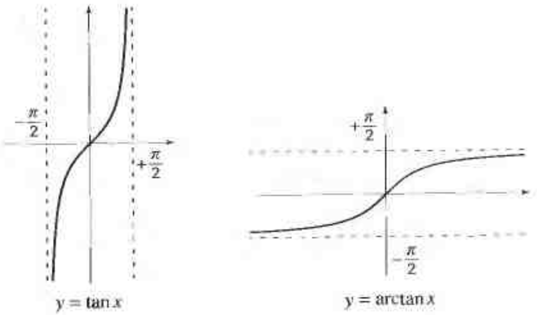


Figure 4.10 Les fonctions *tangente* et *arc tangente*

Démonstration : Seule la formule (4.6) demande un mot d'explication. Si $f(x) = \tan x$ alors $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ et le théorème 5.1.2.1 donne :

$$\arctan' x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$$

En posant $y = \arctan x$, on a $\tan y = x$, et on en déduit (4.6).

Mise en garde : On a $\arctan(\tan x) = x$ seulement quand x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En effet, il faut toujours penser qu'en écrivant $y = \arctan x$, le nombre y n'est pas n'importe quel angle dont la tangente est égale à x, c'est celui qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En revanche, on a toujours $\tan(\arctan x) = x$.

Remarque : Si l'on a ajouté la fonction *arc tangente* aux fonctions de référence, c'est pour donner un nom à une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.

EXERCICES

4.1. En utilisant une machine, dessiner la courbe représentative de $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ pour x variant de -1 à 2. On admettra que $f(x)$ possède un seul zéro réel, qu'on notera r. On va calculer ce zéro par deux méthodes différentes.

• ***Méthode de dichotomie***[1]

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que : $0 < r < 1$.

2) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et améliorer l'encadrement de r. Recommencer avec $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

3) Continuer la méthode pour obtenir r avec 3 chiffres après la virgule. Expliquer en quoi consiste la méhode.

• ***Méthode de Newton***

Pour calculer un zéro d'une fonction φ, on part d'un point A_0, d'abscisse u_0, sur (Γ), la courbe représentative de φ, et on fabrique, par récurrence, une suite de points $A_0, A_1, A_2, \ldots$, de la façon suivante. Le point A_n étant connu, on trace la tangente à (Γ), au point A_n. Cette tangente recoupe (peut-être ?) l'axe des x en un point d'abscisse u_{n+1}, et A_{n+1} est le point de (Γ) d'abscisse u_{n+1} (*figure 4.11*) ; autrement dit $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

On démontre que, sous certaines conditions, le nombre u_n se rapproche très vite du zéro quand n tend vers $+\infty$.

4) Appliquer la méthode de Newton à $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ en prenant $u_0 = 1$.

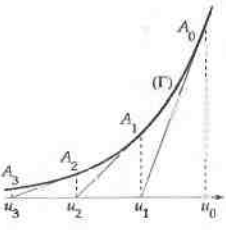


Figure 4.11 La méthode de Newton

1. *Dichotomie* signifie *couper en deux*.

4.2. Imaginer une fonction continue dont le domaine de définition est $\mathcal{I} = [0;+\infty[$ et l'image $\mathcal{J} = [0;1[$. Même question avec $\mathcal{J} = [-1;1]$.

4.3. Démontrer que la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{I} = [+1;+\infty[$ par la formule $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ est strictement croissante. Quelle est son image ? Quelle est sa fonction réciproque ?

4.4. Donner des exemples de fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, autres que la fonction identité, égales à leur fonction réciproque.

4.5. Que vaut $\arcsin(\sin x)$ lorsque $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x \leqslant +\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec k un entier relatif ? Tracer la courbe représentative de $f(x) = \arcsin(\sin x)$. En quels points la fonction f n'est-elle pas dérivable ?

4.6. Donner une autre expression de $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$ au moyen de la fonction *arc sinus*.

4.7. Que vaut $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$?

4.8. En admettant que $\arctan x \leqslant x$ quel que soit $x \geqslant 0$, démontrer la ***formule de Machin*** :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Chapitre 5

Accroissements finis

5.1 EXTREMUMS LOCAUX

5.1.1 Sur une courbe qui *ondule*, comme celle de la *figure 5.1*, il ne fait nul doute que la tangente est horizontale en haut des *bosses*, ou au fond des *creux*. Il paraît tout aussi évident qu'un mobile, dont la vitesse est trop lente, ne parviendra pas à franchir une grande distance dans un laps de temps donné.

Apparemment, ces deux faits semblent n'avoir aucun rapport entre eux, et pourtant nous verrons bientôt qu'ils se rattachent à une idée commune.

On dit que le nombre $f(c)$ est un ***maximum local*** de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, et contenant c, tel que $f(x) \leqslant f(c)$ quel que soit x dans ce voisinage.

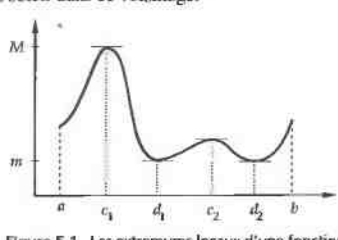


Figure 5.1 Les extremums locaux d'une fonction

Exemple 5.1.1.1 La fonction f de la *figure 5.1* admet pour maximums locaux $f(c_1)$ et $f(c_2)$. Le nombre $f(b)$ n'est pas un maximum local parce que f n'est pas définie à droite de b.

On dit que le nombre $f(d)$ est un ***minimum local*** de f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, et contenant d, tel que $f(d) \leqslant f(x)$ quel que soit x dans ce voisinage.

Exemple 5.1.1.2 La fonction f de la *figure 5.1* admet $f(d_1)$ et $f(d_2)$ comme minimums locaux. Le nombre $f(a)$ n'est pas un minimum local parce que f n'est pas définie à gauche de a.

On dit que $f(c)$ est un ***extremum local*** de f, si $f(c)$ est un maximum ou un minimum local.

Exemple 5.1.1.3 Les extremums locaux de la fonction f de la *figure 5.1* sont $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(d_1)$ et $f(d_2)$.

5.1.2 Le prochain théorème va donner une méthode permettant de situer les extremums locaux des fonctions dérivables. Il confirme l'idée qu'en haut d'une bosse ou au fond d'un creux, la tangente à la courbe représentative est horizontale.

Théorème 5.1.2.1 Si $f(c)$ est un extremum local et si f est dérivable au point c, alors $f'(c) = 0$.

Démonstration : Traitons le cas où $f(c)$ est un maximum local (pour un minimum local, la démonstration suit la même idée).

Notons $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, contenant c, tel que $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout x dans $\mathcal{I}$. Puisque f est dérivable au point c, elle a une dérivée à gauche, $f'(c^-)$, une dérivée à droite, $f'(c^+)$, et ces deux dérivées sont égales à $f'(c)$. Parce que $f(x) \leqslant f(c)$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, on a $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$ quand $x > c$, et $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$ quand $x < c$. En passant à la limite on obtient $f'(c^+) = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$ et $f'(c^-) = \lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$, donc $f'(c) = 0$.

Soit f une fonction dérivable ; un nombre c tel que $f'(c) = 0$ s'appelle un ***point critique*** de f, et $f(c)$, la valeur prise par f au point c, est une ***valeur critique*** de f.

Le théorème 5.1.2.1 dit que les extremums locaux d'une fonction dérivable font partie des valeurs critiques de la fonction. C'est évidemment un résultat utile, puisqu'il ramène la recherche des extremums locaux à la résolution de l'équation $f'(x) = 0$.

Mise en garde : Il ne faudrait pas croire qu'une valeur critique est forcément un extremum local. La *figure 5.2* montre une valeur critique qui n'est ni un maximum local, ni un minimum local. Au paragraphe 5.7.2 nous verrons comment, souvent, on peut savoir si une valeur critique est un maximum ou un minimum local.

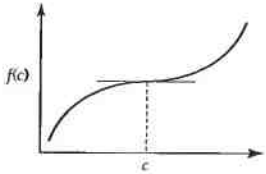


Figure 5.2 Un point critique autre qu'un extremum local

5.2 EXTREMUMS ABSOLUS

5.2.1 Considérons une fonction f définie et continue sur un segment $[a; b]$. Le théorème 4.2.1.2 nous dit que l'ensemble des valeurs prises par f est un segment, $[m; M]$. Dans le cas où f est définie par une formule, nous allons voir quels calculs permettent de déterminer M, le *maximum absolu* de f, et m, son *minimum absolu*.

Une comparaison donne une idée assez juste de la méthode : *le champion du monde est forcément le champion de son pays ; alors, s'il est facile de trouver le champion de chaque pays, on trouvera le champion du monde en établissant d'abord la liste des champions de chaque pays, puis en cherchant le meilleur parmi eux.* Le maximum et le minimum absolus sont les champions du monde, alors que les maximums et les minimums locaux sont les champions dans leur pays...

En effet, soit M le maximum absolu de f sur $[a; b]$, et supposons que $f(c) = M$. Alors il n'y a que deux possibilités :

- ou bien c est égal à a ou b,
- ou bien c est strictement compris entre a et b, et dans ce cas M est un maximum local, car $f(x) \leqslant M$ quel que soit x dans l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Il en résulte que *le maximum absolu fait partie de la liste constituée de tous les maximums locaux, de $f(a)$, et de $f(b)$*. Le raisonnement est le même pour le minimum absolu, *il fait partie de la liste constituée de tous les minimums locaux, de $f(a)$, et de $f(b)$*.

Dans le cas où la fonction f est dérivable, sauf peut-être en quelques points, on peut simplifier encore plus la recherche en disant que *le maximum et le minimum absolus font partie de la liste constituée de toutes les valeurs critiques, des valeurs de $f(x)$ là où f n'est pas dérivable, de $f(a)$, et de $f(b)$*. On en déduit la méthode suivante :

Méthode pratique :

Pour trouver le maximum et le minimum absolus d'une fonction f, définie par une formule :

On fait la liste :

– des valeurs critiques de f ;

– des valeurs prises par f aux points où elle n'est pas dérivable ;

– des valeurs prises par f en a et b ;

puis on regarde quel est le plus grand nombre de cette liste, c'est le maximum absolu, et le plus petit, c'est le minimum absolu.

Exemple 5.2.1.1 Un serpent[1] long de 49 cm tourne autour d'un carré de 40 cm de côté. Quelle est la distance minimale et la distance maximale séparant sa queue de sa tête ?

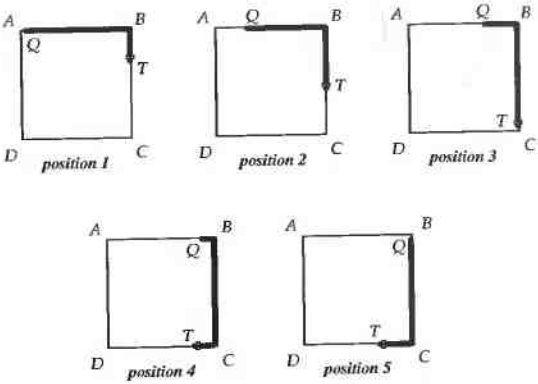


Figure 5.3 La promenade du serpent

La *figure 5.3* montre le serpent au cours de son déplacement : la lettre Q désigne sa queue, et la lettre T sa tête. Puisqu'on a un carré, la dernière position équivaut à la première, et il suffit d'étudier le déplacement lorsque Q va de A à B.

On note x la distance AQ et $f(x)$ la distance qui sépare Q de T. Dans les positions 1, 2 et 3 ($x \leqslant 31$) on a :

$QB = 40 - x \qquad BT = 49 - QB = 9 + x$

$f(x) = QT = \sqrt{QB^2 + BT^2} = \sqrt{2x^2 - 62x + 1681}$

tandis que dans les positions 4 et 5 ($31 \leqslant x \leqslant 40$) on a :

$QB = 40 - x \qquad BC = 40$

$CT = 49 - BC - QB = x - 31$

1. C'est un exercice proposé par l'auteur à un examen partiel du Cnam-Paris.

$f(x) = QT = \sqrt{BC^2 + (QB - CT)^2} = \sqrt{4x^2 - 284x + 6641}$

Il s'agit donc de trouver le maximum et le minimum absolus de f quand x varie de 0 à 40.

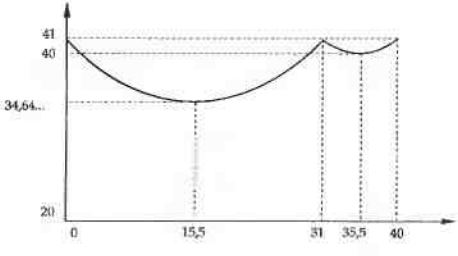


Figure 5.4 Variation de la distance spearant la tête du serpent de sa queue

La *figure 5.4* montre la courbe représentative de la fonction f. Elle est continue sur le segment $[0\,;40]$, dérivable sur chacun des deux intervalles ouverts $]0\,;31[$ et $]31\,;40[$, et :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-31}{\sqrt{2x^2-62x+1681}} & \text{sur }]0;31[, \\ \dfrac{4x-142}{\sqrt{4x^2-284x+6641}} & \text{sur }]31;40[. \end{cases}$$

Nous constatons que $f'(x)$ s'annule lorsque $x = \dfrac{31}{2}$ et $x = \dfrac{71}{2}$, ce qui donne les valeurs critiques $f(15,5) = 34,64\ldots$ et $f(35,5) = 40$. Puisque $f(0) = f(31) = f(40) = 41$, le minimum absolu et le maximum absolu de f sont à chercher parmi les trois nombres $34,64\ldots$, 40, et 41.

On obtient alors que le minimum de f est $34.64\ldots$, et que son maximum est 41.

5.3 LE THÉORÈME DE ROLLE

5.3.1 Malgré sa grande simplicité, nous verrons bientôt que le théorème 5.1.2.1 a des conséquences étonnantes. Pour l'instant, contentons-nous d'un théorème dont l'énoncé paraît évident.

Théorème 5.3.1.1 (théorème de Rolle) Soit f une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$. Si $f(a) = f(b)$, et si $f'(x)$ existe pour tout x dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, alors il existe au moins un point c de $]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$ (*figure 5.5*).

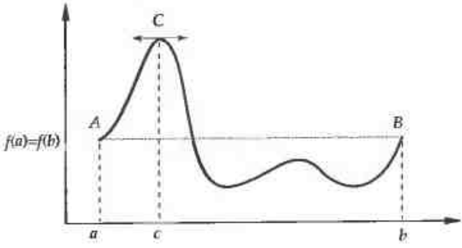


Figure 5.5 Le théorème de Rolle

Démonstration : Puisque f est continue sur le segment $[a\,;b]$, son image est un certain segment $[m\,;M]$ (théorème 4.2.1.1). Si $m = M$, l'image est réduite à une seule valeur, la fonction f est constante, et $f'(c) = 0$ quel que soit c dans $]a\,;b[$.

Supposons donc que $m \neq M$. Alors un des deux nombres m ou M n'est pas égal à $f(a)$ et $f(b)$.

- Si c'est m, notons c l'élément de $[a;b]$ tel que $f(c) = m$. Puisque c ne peut pas être égal à a ou b, il appartient à l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, et puisque m est aussi la plus petite valeur prise sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, c'est un minimum local de f.
- Si c'est M, notons c l'élément de $[a;b]$ tel que $f(c) = M$. Puisque c ne peut pas être égal à a ou b, il appartient à l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, et puisque M est aussi la plus grande valeur prise sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$ c'est un maximum local de f.

Donc, dans tous les cas il y a un extremum local en un point c de $]a;b[$, et en ce point $f'(c) = 0$.

5.3.2 Le théorème de Rolle s'étend facilement à un intervalle qui n'est pas borné.

Théorème 5.3.2.1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$, dérivable sur $]a\,;+\infty[$. Alors, si $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, il existe au moins un point c de $]a\,;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ (*figure 5.6a*).

Théorème 5.3.2.2 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty;a]$, dérivable sur $]-\infty;a[$. Alors, si $f(a) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, il existe au moins un point c de $]-\infty;a[$ tel que $f'(c) = 0$ (*figure 5.6b*).

Théorème 5.3.2.3 Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et si $f'(x)$ existe pour tout x réel, il existe au moins un nombre c tel que $f'(c) = 0$ (*figure 5.6c*).

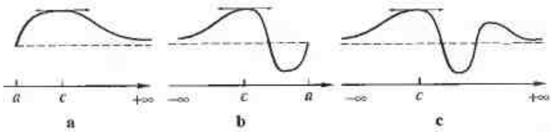


Figure 5.6 Généralisations du théorème de Rolle

5.4 LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

5.4.1 Lorsque $f(a) \neq f(b)$, il n'existe pas forcément de point sur la courbe représentative de f où la tangente est horizontale. Cependant, si on interprète autrement ce que dit le théorème de Rolle, en remplaçant la propriété : *il existe un nombre c tel que* $f'(c) = 0$, par : *il existe point C de la courbe représentative où la tangente est parallèle à la ligne qui joint A à B*, ce qui revient au même, on a un théorème qui reste valabe quand $f(a) \neq f(b)$ (*figure 5.7*).

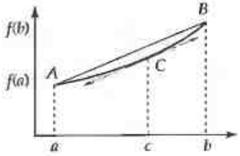


Figure 5.7 Quand $f(a) \neq f(b)$

Théorème 5.4.1.1 Soit f une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$, et dérivable partout dans l'intervalle ouvert $]a;b[$. Sur Γ, la courbe représentative de f, on note A le point de coordonnées $(a;f(a))$ et B celui de coordonnées $(b;f(b))$. Alors il existe un point C de Γ, différent de A et de B, où la tangente à Γ est parallèle à la droite qui joint A à B.

Démonstration : La pente de la droite qui joint A à B est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il faut prouver qu'il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On observe que $f'(c) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ n'est autre que $g'(c)$ lorsque $g(x) = f(x) - x\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. Or cette fonction est continue sur le segment $[a;b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, et $g(b) = g(a) = \dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, donc le théorème de Rolle dit qu'il existe un nombre c de l'intervalle ouvert $]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qu'on voulait démontrer.

5.4.2 En réalité c'est une autre forme du théorème 5.4.1.1 qui est intéressante.

Théorème 5.4.2.1 (théorème des accroissement finis) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Alors quels que soient les nombres a et b dans $\mathcal{I}$ il existe un nombre c compris strictement entre a et b tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{5.1}$$

Remarque : En échangeant a et b, les deux membres de (5.1) changent de signe mais l'égalité reste vraie. Lorsqu'on écrit (5.1) il n'y a donc pas lieu de supposer que a est inférieur à b.

Pas plus que le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis ne donne la façon de déterminer c explicitement, mais cela n'a pas d'importance car ce sont plutôt ses conséquences qui sont utiles.

La première (théorème 5.4.2.2) traduit l'idée *qu'en n'allant pas vite on ne va pas loin pendant un laps de temps donné* ou, au contraire, *qu'en allant vite on va loin.* Elle s'obtient en prenant la valeur absolue de l'égalité des accroissements finis et en faisant une majoration ou une minoration.

Théorème 5.4.2.2 (l'inégalité des accroissements finis) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$.

- s'il existe une constante M telle que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout x dans $\mathcal{I}$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|$ quels que soient a et b dans $\mathcal{I}$;
- s'il existe une constante m telle que $|f'(x)| \geqslant m$ pour tout x dans $\mathcal{I}$, alors $|f(b) - f(a)| \geqslant m\,|b - a|$ quels que soient a et b dans $\mathcal{I}$.

Exemple 5.4.2.3 Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130 km/h. Quand il ressort, deux heures plus tard, à 305 km de son point d'entrée, des gendarmes lui dressent procès-verbal pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait jamais été matériellement contrôlée. Pourquoi le font-ils ?

Parce qu'ils connaissent l'inégalité des accroissements finis !

En effet notons $f(x)$ la distance parcourue par l'automobiliste au temps x ($f(x)$ est mesurée en kilomètres, x en heures). Notons a l'heure d'entrée, et b l'heure de sortie ($b - a = 2$). Si notre automobiliste avait respecté la limitation de vitesse, on aurait eu $|f'(x)| \leqslant 130$ quel que soit x et l'inégalité des accroissements finis aurait donné $|f(b) - f(a)| \leqslant 260$, mais parce que $|f(b) - f(a)| = 305$ la limitation de vitesse n'a été pas respectée. Un gendarme qui connaît le théorème 5.4.2.2 peut donc verbaliser, à condition, bien sûr, de pouvoir prouver que f était continue et dérivable !

5.5 VARIATION DES FONCTIONS

5.5.1 Maintenant, nous allons voir pourquoi le théorème des accroissement finis permet de connaître la variation des fonctions.

Théorème 5.5.1.1 Pour qu'une fonction dérivable f soit constante sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, il faut et il suffit que $f'(x) = 0$, quel que soit x dans $\mathcal{I}$.

Démonstration : Si f est constante sur $\mathcal{I}$, sa dérivée est nulle. Réciproquement, si $f'(x) = 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, le théorème des accroissements finis dit que $f(b) - f(a) = 0$ quels que soient a et b dans $\mathcal{I}$, donc f est constante.

Ce théorème est fondamental car il montre qu'on reconnaît les fonctions constantes à leur dérivée nulle. Il a lui-même une application extrêmement importante.

On dit que la fonction F est une ***primitive***[1] de f sur l'intervalle $\mathcal{I}$ si $F'(x) = f(x)$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$.

Théorème 5.5.1.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$.

1) Si F est une primitive de f, et si C est une constante quelconque, la fonction $F(x) + C$ est aussi une primitive de f.

2) Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, il existe une constant C telle que $F_2(x) = F_1(x) + C$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$.

3) Si f possède des primitives sur $\mathcal{I}$, alors, quel que soit le nombre a dans $\mathcal{I}$, et quel que soit le nombre réel α, il existe une et une seule primitive, F, de f telle que $F(a) = \alpha$. En particulier il existe une et une seule primitive de f qui s'annule au point a.

Démonstration :

1) En dérivant $F(x) + C$ on obtient encore $f(x)$.

2) Réciproquement, puisque F_1 et F_2 ont la même dérivée, leur différence a une dérivée nulle, donc c'est une constante.

3) Enfin, si Φ est une primitive quelconque de f, la fonction $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a) + \alpha$ est une primitive de f telle que $F(a) = \alpha$. De plus, si G est une autre primitive de f telle que $G(a) = \alpha$, il existe une contante C telle que $G(x) = F(x) + C$, et en remplaçant x par a on trouve $C = 0$, d'où l'unicité de F.

Remarque : Le théorème précédent doit être modifié quand on remplace $\mathcal{I}$ par une réunion d'intervalles disjoints : si f est une fonction définie sur une réunion d'intervalles ouverts *disjoints* $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots$, et si F et G sont deux primitives de f il existe des constantes $C_1, C_2, \ldots$ telles que $G(x) = F(x) + C_n$ quel que soit x dans $\mathcal{I}_n$.

1. La littérature anglaise utilise le terme plus parlant d'*antidérivée*.

En particulier, si f est constamment nulle sur une réunion d'intervalles ouverts disjoints $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots$, ses primitives sont constantes, mais avec des constantes qui ne sont pas forcément les mêmes sur chacun des intervalles $\mathcal{I}_n$.

5.5.2 Le signe de la dérivée permet de reconnaître la monotonie des fonctions.

Théorème 5.5.2.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Pour que f soit croissante, il faut et il suffit que $f'(x) \geqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$. Si, en plus, $f'(x) > 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, la fonction f est strictement croissante.

Démonstration : Si f est croissante, on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$ quel que soit x et quel que soit $h \neq 0$. Puisque la limite d'un nombre positif est un nombre positif, on a $f'(x) \geqslant 0$ quel que soit x. Réciproquement si $f'(x) \geqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, le théorème des accroissements finis dit que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \geqslant 0$ quels que soient a et b dans $\mathcal{I}$; donc f est croissante. De plus, si l'on est certain que $f'(c) \neq 0$, on a $f(b) \neq f(a)$ quand $b \neq a$, et la fonction f est strictement croissante.

On démontre de façon analogue le théorème suivant.

Théorème 5.5.2.2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Pour que f soit décroissante, il faut et il suffit que $f'(x) \leqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$. Si, en plus, $f'(x) < 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, la fonction f est strictement décroissante.

5.5.3 Les théorèmes 5.5.2.1 et 5.5.2.2 servent à construire le ***tableau de variation*** des fonctions définies par une formule. C'est un tableau qui indique les intervalles où la fonction est strictement croissante et ceux où elle est strictement décroissante.

Soit f une fonction de classe C^1. Sa dérivée, parce qu'elle est continue, ne peut changer de signe qu'en s'annulant. On commence donc par déterminer les points critiques de f, ce sont les solutions de l'équation $f'(c) = 0$. Les points critiques et les points où f n'est pas dérivable découpent le domaine de définition en intervalles sur lesquels f est strictement monotone. Alors, il n'y a plus qu'à placer les valeurs limites de $f(x)$ aux bornes de ces intervalles pour déterminer la monotonie de f sur chacun des intervalles.

Exemple 5.5.3.1 Établissons le tableau de variation de $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{x-1}$. Le domaine de définition de $f(x)$ est la réunion des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$. Par ailleurs, $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ s'annule lorsque $x = -1$ ou $x = 3$.

Par conséquent, sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[,]-1; 1[,]1; 3[,]3; +\infty[$, la fonction f est strictement monotone. Le calcul des limites de $f(x)$ aux bornes des intervalles donne le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		1^-	1	1^+		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

5.6 LA FORMULE DE TAYLOR

5.6.1 Le théorème des accroissements finis ne mettait en jeu que la dérivée première de f ; nous allons le généraliser en faisant intervenir les dérivées d'ordre supérieur. Rappelons qu'on note :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \tag{5.2}$$

Le nombre $n!$ s'appelle ***factorielle*** n ; on pose $0! = 1$. Les premières valeurs de $n!$ sont données ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040

Théorème 5.6.1.1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Alors, pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, la dérivée d'ordre p de $\dfrac{x^n}{n!}$ est $\dfrac{x^{n-p}}{(n-p)!}$.

5.6.2 À présent nous sommes en mesure d'énoncer la généralisation de la formule (5.1).

Théorème 5.6.2.1 (formule de Taylor) Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, ayant aussi une dérivée d'ordre $n+1$ sur cet intervalle. Alors quels que soient a et b dans $\mathcal{I}$ il existe un nombre c, strictement compris entre a et b, tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{5.3}$$

Démonstration : Nous allons nous inspirer de la démonstration du théorème 5.4.1.1 en posant :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - A(x-a)^{n+1}$$

avec A un nombre qui est choisi de façon que $g(b) = 0$; autrement dit :

$$A = \frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}} \tag{5.4}$$

Le théorème 5.6.1.1 nous dit alors que :

$$g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a) - \frac{f^{(p+1)}(a)}{1!}(x-a) - \cdots - A(x-a)^{n-p+1}$$

quel que soit $p \leqslant n$, d'où les valeurs $g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.

Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de Rolle à la fonction g, et il existe donc un nombre, c_1, strictement compris entre a et b, tel que $g'(c_1) = 0$. Mais, puisque $g'(c_1) = g'(a) = 0$, on peut aussi appliquer le théorème de Rolle à la fonction g', et il existe un nouveau nombre, c_2, strictement compris entre a et c_1, tel que $g''(c_2) = 0$. Cet enchaînement se poursuit avec toutes les dérivées successives de g jusqu'à celle d'ordre n. Il existe donc un nombre c_{n+1}, strictement compris entre a et c_n, et, à plus forte raison, entre a et b, tel que $g^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$. Mais, puisque $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A(n+1)!$, cela donne $A = \dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$, et il n'y a plus qu'à égaler cette valeur à celle donnée par (5.4), et à remplacer c_{n+1} par c, pour obtenir la formule de Taylor.

La formule (5.3) s'appelle la ***formule de Taylor à l'ordre*** n (en particulier la formule des accroissements finis est la formule de Taylor à l'ordre 0) ; son dernier terme s'appelle le ***reste de Lagrange*** (au chapitre 7 nous verrons qu'il y a d'autres façons d'envisager le reste).

Lorsque $a = 0$ et $x = t$, le nombre c, qui est compris entre t et 0, peut se mettre sous la forme $c = \theta t$, avec $0 < \theta < 1$, et la formule de Taylor prend un autre aspect.

Théorème 5.6.2.2 (formule de Mac Laurin) Soit f une fonction qui est de classe C^n dans un voisinage de 0, et qui possède une dérivée d'ordre $n+1$ dans ce voisinage. Alors quel que soit t dans ce voisinage, il existe un nombre θ, strictement compris entre 0 et 1, tel que :

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \qquad (5.5)$$

5.6.3 Quand on connaît bien $f(a)$ et les nombres $f^{(p)}(a)$, mais pas bien $f(b)$, la formule de Taylor pourrait pousser à le remplacer par $f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$, mais tant qu'on ne connaît pas c, on n'a pas le droit de négliger le reste. Cependant, une majoration de la dérivée d'ordre $n+1$ donne une estimation de l'erreur commise et il arrive qu'on soit certain d'obtenir ainsi une bonne approximation de $f(b)$.

Exemple 5.6.3.1 Examinons ce que donne la formule de Mac Laurin à l'ordre 5 dans le cas où $f(x) = \sin x$. Les dérivées successives de f sont connues, ainsi que leur valeur en 0 ;

ce sont :

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(x) = \sin x & f^{(0)}(0) = 0 \\ f^{(1)}(x) = \cos x & f^{(1)}(0) = +1 \\ f^{(2)}(x) = -\sin x & f^{(2)}(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = +1 \\ f^{(6)}(x) = -\sin x & \end{array}$$

La fonction f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, donc, quel que soit t réel, il existe θ, strictement compris entre 0 et 1, tel que :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{\sin(\theta t)}{720}t^6 \tag{5.6}$$

Puisque $|\sin(\theta t)| \leqslant 1$ on en déduit la majoration :

$$\left|\sin t - \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}\right)\right| \leqslant \frac{|t|^6}{720} \tag{5.7}$$

Par exemple, lorsque $|t| \leqslant \frac{1}{10}$, l'erreur commise en remplaçant $\sin t$ par $t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}$ est inférieure à $0,000\,000\,001\,4$. On est donc certain d'avoir 8 chiffres exacts après la virgule, et puisque :

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{6}\frac{1}{1\,000} + \frac{1}{120}\frac{1}{100\,000} = 0,099\,833\,416\,6\ldots$$

on doit avoir $\sin\frac{1}{10} = 0,099\,833\,41\ldots$

5.7 CONCAVITÉ

5.7.1 Nous terminerons ce chapitre par deux applications de la formule de Taylor. Supposons f dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Si a est un point quelconque de $\mathcal{I}$, on note T_a la tangente à Γ, la courbe représentative de f, au point A de coordonnées $(a; f(a))$.

On note P_x et M_x les points d'abscisse x sur Γ et T_a ; autrement dit $P_x = (x; f(x))$ et $M_x = (x; f'(a)(x-a) + f(a))$.

On dit que Γ est ***au-dessus de*** T_a si P_x est au-dessus de M_x quel que soit x, autrement dit si $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ (*figure 5.8a*), et l'on dit que Γ ***tourne sa concavité vers le haut***, ou encore que f est une ***fonction convexe*** sur $\mathcal{I}$, si Γ est au-dessus de T_a quel que soit a.

On dit que Γ est ***en dessous de*** T_a si P_x est en dessous de M_x quel que soit x, autrement dit si $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ (*figure 5.8b*), et l'on dit que Γ ***tourne sa***

concavité vers le bas, ou encore que f est une ***fonction concave*** sur $\mathcal{I}$, si Γ est en dessous de T_a quel que soit a.

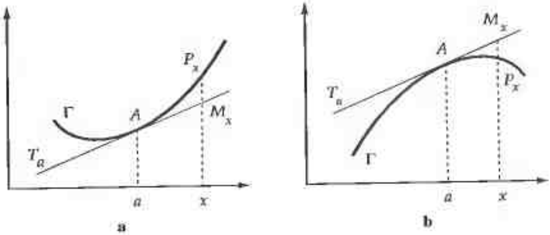


Figure 5.8 Concavité vers le haut et vers le bas

> **Théorème 5.7.1.1** Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $\mathcal{I}$:
> – si $f''(x) \geqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$ alors Γ tourne sa concavité vers le haut sur $\mathcal{I}$;
> – si $f''(x) \leqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$ alors Γ tourne sa concavité vers le bas sur $\mathcal{I}$.

Démonstration : Supposons que $f''(x) \geqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$, et prenons un nombre a quelconque dans $\mathcal{I}$. Si x est un point de $\mathcal{I}$, différent de a, la formule de Taylor nous dit qu'il existe c, compris entre a et x, tel que $f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) = \dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$, et comme $f''(c) \geqslant 0$, la différence $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ est positive. Il en résulte que Γ est au-dessus de T_a, et comme c'est vrai, quel que soit a, on a bien le résultat annoncé.

La seconde affirmation du théorème se démontre de la même façon.

On dit que que le point S de coordonnées $(s\,;f(s))$ est un ***point d'inflexion*** de Γ si, d'un côté de S la courbe Γ tourne sa concavité vers le haut, et de l'autre elle la tourne vers le bas (*figure 5.9*). Parce que la courbe Γ traverse sa tangente, T, au point S on dit que T est une ***tangente d'inflexion***.

En particulier si $f''(x)$ change de signe pour $x = s$, le point S, de coordonnées $(s\,;f(s))$, est un point d'inflexion de Γ.

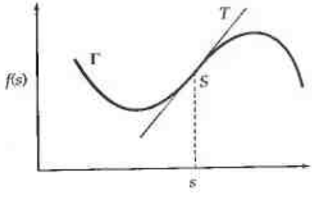


Figure 5.9 Un point d'inflexion

5.7.2 Enfin, la formule de Taylor permet souvent, lorsqu'on a une valeur critique, de déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local.

Théorème 5.7.2.1 Soit f une fonction deux fois dérivable dans un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ contenant un point critique a.
- Si $f''(x) \geqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$ le nombre $f(a)$ est un minimum local de f.
- Si $f''(x) \leqslant 0$ quel que soit x dans $\mathcal{I}$ le nombre $f(a)$ est un maximum local de f.

Démonstration : Soit x un point de $\mathcal{I}$ différent du point critique a. Puisque $f'(a) = 0$, la formule de Taylor nous dit qu'il existe c compris entre a et x tel que $f(x) = f(a) + \dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$.

Alors, si $f''(x) \geqslant 0$ quel que soit x, on a $f(x) \geqslant f(a)$ quel que soit x, et $f(a)$ est un minimum local. La démonstration est semblable pour un maximum.

Si l'on suppose en plus que f'' est continue, ce qui est le cas pour les fonctions définies par des formules, le simple fait que $f''(a)$ soit strictement positif entraîne que $f''(x)$ est strictement positif sur un voisinage de a. Cette remarque donne une variante utile du théorème précédent.

Théorème 5.7.2.2 Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et a un point critique de f contenu dans $\mathcal{I}$.
- Si $f''(a) > 0$ la valeur critique $f(a)$ est un minimum local de f ;
- Si $f''(x) < 0$ la valeur critique $f(a)$ est un maximum local de f.

EXERCICES

5.1. Si $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, avec des nombres réels $a_1, a_2, \ldots a_n$ tous distincts, démontrer que $P^{(d)}$ possède $n-d$ zéros distincts pour tout d tel que $0 \leqslant d < n$.

5.2. On suppose que la fonction f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x)$ a une limite quand x tend vers a^+, démontrer que $f'(a^+)$ existe et que :

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

5.3. Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0.

1) Que peut-on dire de f si f' est impaire ?

2) Que peut-on dire de f si f' est paire ?

5.4. 1) Étudier les variations de la fonction $\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$, tracer sa courbe représentative et déterminer son maximum absolu et son minimum absolu.

2) Quel est le domaine de définition de $f(x) = \arcsin \dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$? Étudier les variations de $f(x)$ et tracer sa courbe représentative. Que peut-on dire du point d'abscisse $x = 1$?

5.5. 1) Montrer que la distance qui sépare le point A de coordonnées $(\cos a; \sin a)$ du point B de coordonnées $(\cos b; \sin b)$ est $2\left|\sin \dfrac{a-b}{2}\right|$.

2) Un point M se déplace sur le cercle trigonométrique, et on note d la somme de ses distances aux points $E = (1; 0)$, $N = (0; 1)$, $W = (-1; 0)$ et $S = (0; -1)$. Sachant que $\tan \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\cos \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, quelles sont la plus grande et la plus petite valeur de d ?

5.6. On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et que $|f''(x)| \leqslant M$. Alors, si a et b sont dans $\mathcal{I}$, montrer qu'il existe A tel que $|A| \leqslant M$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(a)+f'(b)}{2} + \dfrac{(b-a)A}{2}$.

5.7. En appliquant la formule de Mac Laurin à l'ordre 3 à $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, calculer $\sqrt[3]{1\,100}$ avec 3 chiffres après la virgule.

5.8. On pose $f(x) = \arctan x$.

1) En dérivant l'égalité $x = \tan f(x)$ démontrer que $f'(x) = \cos^2 f(x)$.

2) Démontrer par récurrence que, quel que soit $n \geqslant 1$:

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\ \cos^n f(x) \sin\left[nf(x) + n\frac{\pi}{2}\right]$$

3) En déduire que $|f^{(n)}(x)| \leqslant (n-1)!$ quel que soit $n \geqslant 1$, et quel que soit x.

4) Calculer $f^{(n)}(0)$, puis écrire la formule de Mac Laurin pour $f(x)$, à l'ordre $2p$, où p est un entier strictement positif.

5) Déduire, des résultats précédents, que :

$$\left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{2p-1}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2p+1}$$

Utiliser cette formule pour calculer π avec 3 chiffres derrière la virgule. La méthode paraît-elle efficace ?

Chapitre 6

Exponentielles et logarithmes

6.1 COMMENT DÉFINIR LES EXPONENTIELLES ?

6.1.1 Dans ce chapitre nous allons passer en revue les propriétés de deux fonctions extrêmement importantes : l'*exponentielle* et le *logarithme*. En guise d'introduction nous rappellerons les idées qui conduisirent à leur invention.

Soit a un nombre réel fixé ; quand n est un entier supérieur ou égal 1 on pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois la lettre } a} \tag{6.1}$$

mais ensuite, comment peut-on définir a^x quand x est un nombre réel quelconque ?

Si l'on était capable de trouver une définition, on pourait inventer la fonction $f(x) = a^x$, qui s'appellerait l'*exponentielle de base a*, parce que c'est l'exposant qui est variable.

Mais on peut retourner le problème. Au lieu de chercher à définir individuellement des nombres tels que $a^{\sqrt{2}}$ ou a^{π}, on peut chercher à définir directement la fonction a^x. Pour cela on fera comme si elle existait, munie de propriétés *raisonnables*, dans l'espoir qu'à force de l'étudier, on finisse par la raccrocher à quelque chose de connu, ce qui donnera, au bout du compte, le moyen de la définir.

Puisque $(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ fois}}) \times (\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ fois}}$, on a forcément $a^m a^n = a^{m+n}$ quand m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, et parce que cette propriété semble très intéressante, on demandera plus généralement que, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$:

$$a^x a^y = a^{x+y} \tag{6.2}$$

6.1.2 Maintenant notre objectif est clair : le nombre a étant fixé, nous allons chercher s'il existe une fonction $f(x) = a^x$, *continue* et *dérivable* sur $\mathbb{R}$, qui possède la propriété (6.2), et voir comment on peut la définir.

• Lorsque $a = 0$, elle est toute trouvée, c'est la fonction constamment nulle ! Dorénavant nous supposerons $a \neq 0$.

• Lorsque $a = 1$, le problème est encore résolu, car la fonction constamment égale à 1 convient ; nous supposerons donc $a \neq 1$.

Nous allons commencer par étudier l'ensemble des valeurs que devrait prendre notre fonction.

- La propriété (6.2) fait que $a^0 a^1 = a^{0+1} = a^1$, c'est-à-dire $a^0 a = a$, et puisque $a \neq 0$ on doit forcément avoir $a^0 = 1$.
- Ensuite, puisque $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ on doit aussi avoir $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, ce qui montre que a^x doit toujours posséder un inverse ; par conséquent $a^x \neq 0$ quel que soit x dans $\mathbb{R}$.
- Enfin, parce que $a^x = a^{\frac{x}{2}} a^{\frac{x}{2}}$, le nombre a^x est un carré ; il doit donc être positif (strictement positif parce qu'il n'est pas nul), et nous aurons donc $a^x > 0$ quel que soit x dans $\mathbb{R}$. En particulier, puisque $a^1 = a$, il faut forcément que a soit strictement positif pour que la fonction $f(x) = a^x$ ait une chance d'exister ; *il n'y aura donc pas d'exponentielle avec une base négative.*

6.1.3 À présent nous allons nous intéresser à la dérivée de f. Puisque :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \left(\frac{a^h - a^0}{h}\right) = a^x \left(\frac{f(h) - f(0)}{h}\right)$$

en faisant tendre h vers 0, on obtient $f'(x) = a^x f'(0)$, donc *la dérivée de f doit être égale à f multipliée par la constante $\alpha = f'(0)$.*

Examinons les conséquences de cette propriété remarquable.

• Si $\alpha = 0$, la dérivée de f est toujours nulle, et alors f est constante, mais, puisque $f(1) = a$ et $f(0) = 1$, on a forcément $a = 1$, et $f(x)$ est la constante 1.

• Si $\alpha > 0$, la dérivée de f est toujours strictement positive, et f est strictement croissante.

• Si $\alpha < 0$, la dérivée de f est toujours strictement négative, et f est strictement décroissante.

Puisque $a \neq 1$, la fonction continue $f(x) = a^x$ est strictement monotone ; elle admet donc une fonction réciproque qu'on notera g. En dérivant l'égalité $f(g(x)) = x$, il vient $g'(x)f'(g(x)) = 1$, et, à cause de $f'(x) = \alpha f(x)$, cela donne $g'(x)\alpha f(g(x)) = 1$; on en déduit que $g'(x) = \frac{1}{\alpha x}$.

Autrement dit, à un multiple près, la fonction g est une primitive de $\frac{1}{x}$ et de plus, en faisant $x = 0$ dans $g(f(x)) = x$, on sait que $g(1) = 0$.

D'après le théorème 5.5.1.2 ces deux propriétés déterminent g sans ambiguïté, ce qui donne la façon de définir la fonction a^x : partant du nombre α approprié on note g la primitive de $\dfrac{1}{\alpha x}$ qui s'annule lorsque $x = 1$, ensuite on note f sa fonction réciproque, enfin on pose $a^x = f(x)$.

Mais pour cela encore faut-il savoir comment choisir α ![1]

6.2 LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

6.2.1 Les considérations qui précèdent nous incitent à étudier les primitives de $\frac{1}{x}$ (cette fonction étant continue sur l'intervalle $]0 ;+\infty[$, on sait qu'elle y admet des primitives).

On appelle ***logarithme népérien***, et l'on note **ln**, la primitive de $\frac{1}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$, et qui s'annule quand $x = 1$. C'est donc la seule fonction de classe C^∞ qui vérifie :

$$\ln' x = \frac{1}{x} \qquad (6.3) \qquad\qquad \ln 1 = 0 \qquad (6.4)$$

Venons-en tout de suite aux propriétés les plus importantes du logarithme.

Théorème 6.2.1.1 Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des nombres réels strictement positifs quelconques. Alors :

$$\ln(u_1 u_2 \cdots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n \qquad (6.5)$$

Démonstration : Soit v un nombre réel strictement positif quelconque. Posons $g(x) = \ln(vx)$. Alors $g'(x) = v \ln'(vx) = v\frac{1}{vx} = \frac{1}{x}$. Cela montre que $g(x)$ et $\ln x$ sont deux primitives de $\frac{1}{x}$. Il existe donc une constante C telle que $\ln(xv) = \ln x + C$ quel que soit x réel strictement positif. En remplaçnt x par 1 dans cette égalité on trouve $C = \ln v$ donc $\ln(xv) = \ln x + \ln v$.

Ensuite, en remplaçant u_2 par u_2u_3 dans $\ln(u_1u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$, on en déduit que $\ln(u_1u_2u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$. Ainsi, de proche en proche, obtient-on la formule générale (6.5).

Théorème 6.2.1.2 Si l'on convient que $u^0 = 1$ et que $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$, alors, quel que soit le nombre réel strictement positif u, et quel que soit l'entier relatif n :

$$\ln u^n = n \ln u \qquad (6.6)$$

En particulier :

$$\ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u \qquad (6.7)$$

1. On ne sait pas encore ce qu'il vaut, on ne le saura qu'au paragraphe 6.4.2.

Démonstration : Si $n \geqslant 1$ cela résulte de la formule (6.5) avec tous les u_k égaux à u. Si $n = 0$, on constate que les deux membres de (6.6) sont égaux. Si $n = -1$, on écrit $u\left(\frac{1}{u}\right) = 1$ et l'on prend le logarithme des deux membres, ce qui donne $\ln u + \ln\left(\frac{1}{u}\right) = 0$, donc $\ln u^{-1} = \ln\left(\frac{1}{u}\right) = -\ln u$. Si $n < 0$, on a $u^{-n} = \left(u^{-1}\right)^n$, et alors $\ln u^{-n} = n \ln u^{-1} = n(-\ln u) = -n \ln u$.

Théorème 6.2.1.3 Quels que soient u et v positifs :

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v \tag{6.8}$$

Démonstration : Il suffit d'associer les formules (6.5) et (6.6).

6.2.2 À présent nous allons étudier les variations du logarithme népérien. Son domaine de définition est l'intervalle $]0 ; +\infty[$, formé de l'ensemble des nombres réels strictement positifs, noté parfois $\mathbb{R}_+$, et, parce que sa dérivée est toujours strictement positive, c'est une fonction strictement croissante.

Théorème 6.2.2.1 Tout nombre réel est une valeur prise une fois (et une seule) par le logarithme népérien. En outre :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \tag{6.9}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{6.10}$$

Démonstration : Puisque ln est strictement croissante, on a $\ln x > 0$ quand $x > 1$, et $\ln x^n = n \ln x$ devient de plus en plus grand lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui montre que la fonction prend des valeurs arbitrairement grandes. De même, $\ln x < 0$ quand $x < 1$, et alors $\ln x^n = n \ln x$ est un nombre négatif qui s'éloigne de plus en plus de 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que la fonction prend des valeurs négatives arbitrairement éloignées de 0. Il en résulte, puisque l'image de ln est un intervalle, que ça ne peut être que $\mathbb{R}$ tout entier. On voit donc que tout nombre réel (sans distinction de signe) est le logarithme népérien d'un nombre réel positif, mais, comme ln est strictement monotone, c'est le logarithme d'un seul nombre.

La *figure 6.1* montre le tableau de variation de la fonction ln, et la *figure 6.2* sa courbe représentative.

x	0^+		1		$+\infty$
$\ln' x$		$+$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 6.1 Tableau de variation de $\ln(x)$

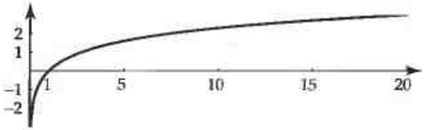


Figure 6.2 La courbe représentative de ln(x)

6.2.3 Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle ***logarithme de base*** a, et on note $\log_a$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{6.11}$$

Puique cette fonction est, à un multiple près, le logarithme népérien, on peut tout de suite retrouver son tableau de variation et sa courbe représentative.

Tout comme le logarithme népérien, le logarithme de base a vérifie les deux importantes relations :

$$\log_a(u_1 u_2 \cdots u_n) = \log_a u_1 + \log_a u_2 + \cdots + \log_a u_n \tag{6.12}$$

$$\log_a u^n = n \log_a u \tag{6.13}$$

mais il vérifie aussi :

$$\log_a a^n = n \tag{6.14}$$

et c'est ce qui le rend intéressant !

Dans la pratique, on n'utilise que trois bases : la base 10 pour le ***logarithme décimal***, la base 2 pour le ***logarithme binaire***, ...et la base e pour le logarithme népérien ! En effet, il existe un unique nombre réel, qu'on note e, tel que :

$$\ln e = 1 \tag{6.15}$$

et (6.11) donne alors $\log_e(x) = \ln x$.

Ce nombre e, qu'on appelle parfois la ***base du logarithme népérien***, est sans doute aussi important, en mathématiques, que π. La *figure 6.2* montre qu'il vaut un peu plus que 2, mais nous ne savons rien de plus pour l'instant. Au paragraphe 6.3.3 nous verrons comment calculer son développement décimal.

6.2.4 Si le logarithme népérien apparaît naturellement comme primitive de $\frac{1}{x}$, au point qu'on l'appelle parfois le ***logarithme naturel***, le logarithme décimal et le logarithme binaire sont utiles quand on représente les nombres entiers par leur développement décimal (paragraphe 1.2), ou binaire (en informatique).

En effet, représenter un entier $n > 0$, dans la base a, consiste à l'écrire :

$$n = \alpha_0 a^s + \alpha_1 a^{s-1} + \cdots + \alpha_s$$

avec des chiffres $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ qui sont des entiers compris entre 0 et $a - 1$. Si le premier, α_0, n'est pas nul, le ***nombre de chiffres*** de n dans la base a est égal à $s + 1$, et on a le théorème suivant.

Théorème 6.2.4.1 Le nombre de chiffres de n, écrit dans la base a, est le premier entier strictement supérieur à $\log_a(n)$.

Démonstration : Puisque $a > 1$ la fonction $\log_a$ est strictement croissante, et parce que $a^s \leqslant n < a^{s+1}$, on a, $s = \log_a(a^s) \leqslant \log_a(n) < \log_a(a^{s+1}) = s + 1$.

Exemple 6.2.4.2 Puisque $\log_{10}(2) = 0,301\ldots$ on a :

$$\log_{10}(2^{417}) = 417 \log_{10}(2) = 125,5\ldots$$

et l'on sait, sans avoir besoin de l'écrire, que le développement décimal de 2^{417} comprend 126 chiffres [1].

Le fait que $10 \log_{10}(2) = 3,01\ldots$ soit presque égal à 3 correspond au fait que $2^{10} = 1\,024$ est presque égal à 10^3. En informatique, parce que des raisons techniques font qu'on utilise davantage les puissances de 2 que celles de 10, on compte plus facilement de 1 024 en 1 024, que de 1 000 en 1 000. On appelle **k** (comme *kilo*, c'est-à-dire comme 1 000) le nombre 1 024, et l'on s'en sert pour compter des objets : par exemple 30 k signifie $30 \times 1\,024 = 30\,072$.

Le ***décibel***, noté **dB**, donne une autre illustration de la proximité entre 2^{10} et 10^3. Les décibels servent à représenter d'une façon particulière le rapport entre deux grandeurs physiques de même nature. Par exemple, dans le cas d'une amplification, quand n représente la nouvelle valeur, et a l'ancienne, on dit qu'on a un ***gain*** de $10 \log_{10}\left(\dfrac{n}{a}\right)$ décibels. Dans cette formule, le facteur 10 est choisi pour qu'*un doublement donne un gain de* +3 dB *(en réalité c'est* $+3,01\ldots$*)*.

6.2.5 De nos jours, les *logarithmes décimaux* interviennent encore dans de nombreux calculs techniques : les décibels, le pH (potentiel Hydrogène) en chimie, les échelles logarithmiques, pour présenter des graphiques de façon plus lisible, etc.

Jusqu'à l'arrivée des calculettes, ils ont été beaucoup empoyés dans les calculs numériques approchés, pour multiplier les nombres réels et extraire les racines carrées

Laissons de côté les *règles à calcul*, devenues aujourd'hui pièces de collection, mais disons quelques mots des *tables de logarithmes*, une autre invention qui n'a pas survécu à l'arrivée des calculatrices.

L'idée était simple : pour multiplier entre eux deux nombres réels positifs, u et v, il suffit d'avoir une table qui donne le logarithme de tous les nombres positifs

1. Pour le lecteur incrédule : $2^{417} = 33846065602060728266338063771277877239214319767771 19$ $84273740183180495765112991409062496875745134225841966700556811959451779072$, mais cela, le croira-t-il ?

(c'est impossible bien sûr, mais on va voir comment s'en tirer) ; on lit dans la table le logarithme de u et celui de v, on les ajoute, et on cherche dans la table le nombre dont le logarithme est égal à cette somme, car ce nombre c'est uv.

Puisque cette table merveilleuse n'existe pas, il faut se débrouiller, et c'est là qu'interviennent les logarithmes décimaux. On remarque que tout nombre positif peut s'érire comme le produit d'une puissance entière de 10, (avec exposant positif ou négatif), par un nombre strictement compris entre 1 et 10 ; par exemple $124,31 = 10^2 \times 1,243\,1$. Comme le logarithme décimal de 10^n c'est n, le logarithme décimal d'un nombre positif quelconque est la somme d'un nombre entier, la caractéristique, qu'on détermine en regardant la position de la virgule dans le nombre, et du logarithme décimal d'un nombre compris entre 1 et 10, la mantisse, qu'on lira dans la table ; par exemple $\log_{10}(124,31) = 2 + \log_{10}(1,243\,1)$. De la sorte, on a seulement besoin d'une table donnant les logarithmes de tous les nombres compris entre 1 et 10, ...mais ça, c'est encore trop !

Pour construire des tables de logarithmes, des mathématiciens patients ont calculé les logarithmes décimaux de tous les nombres décimaux compris entre 1 et 10 ayant un certain nombre de chiffres, n, après la virgule ; plus n était grand, plus les tables étaient grosses et précieuses. Pour trouver le logarithme d'un nombre connu avec n chiffres, ou moins, il suffisait de lire la table ; au contraire, si le nombre était connu avec plus de chiffres, son logarithme tombait entre deux logarithmes de la table, et l'on devait l'évaluer par un petit calcul d'interpolation : on refaisait le même genre d'interpolation quand on utilisait la table en sens inverse.

6.3 L'EXPONENTIELLE

6.3.1 Le logarithme népérien est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$; sa fonction réciproque s'appelle l'***exponentielle*** et nous la noterons ***exp***, en attendant mieux. Le fait que l'exponentielle soit la fonction réciproque du logarithme donne immédiatement les résultats suivants.

$$\exp(\ln x) = x \qquad (6.16) \qquad\qquad \ln(\exp x) = x \qquad (6.17)$$

$$\exp(0) = 1 \qquad (6.18) \qquad\qquad \exp(1) = e \qquad (6.19)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \qquad (6.20) \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad (6.21)$$

Théorème 6.3.1.1 L'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble de ses valeurs est $\mathbb{R}_+$. Elle est strictement croissante, sa courbe représentative est donnée par la *figure 6.3*.

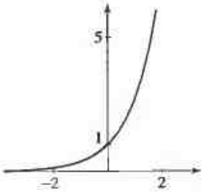


Figure 6.3 La courbe représentative de $\exp(x)$

6.3.2 Parce qu'elle est la fonction réciproque du logarithme, chaque propriété du logarithme se traduit par une propriété de l'exponentielle (et réciproquement). Nous allons énumérer ces propriétés en commençant par celle qui correspond à (6.3).

Théorème 6.3.2.1 L'exponentielle est égale à sa dérivée ; autrement dit :

$$\exp'(x) = \exp(x) \tag{6.22}$$

Démonstration : Il suffit de dériver $\ln(\exp(x)) = x$ pour obtenir $\exp'(x)\dfrac{1}{\exp(x)} = 1$.

Cette propriété caractérise l'exponentielle à un facteur près.

Théorème 6.3.2.2 Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, telle que :

$$f'(x) = \alpha f(x) \tag{6.23}$$

avec un certain nombre α, alors il existe une constante C telle que $f(x) = C \exp \alpha x$ ou, si l'on veut,

$$f(x) = f(0) \exp \alpha x \tag{6.24}$$

Démonstration : Puisque l'exponentielle ne s'annule jamais, la fonction $g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp \alpha x}$ est définie, continue et dérivable sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Sa dérivée :

$$g'(x) = \frac{f'(x) \exp \alpha x - \alpha f(x) \exp'(\alpha x)}{(\exp \alpha x)^2} = \frac{\alpha f(x) \exp \alpha x - \alpha f(x) \exp(\alpha x)}{(\exp \alpha x)^2}$$

est nulle. Par conséquent, $g(x)$ est une constante, qu'on note C, et $f(x) = C \exp \alpha x$. On trouve la valeur de C en remplaçant x par 0 dans cette égalité.

Examinons comment se traduit (6.5).

Théorème 6.3.2.3 Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des nombres réels quelconques. Alors :

$$\exp(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = \exp v_1 \exp v_2 \cdots \exp v_n \tag{6.25}$$

En d'autres termes, *l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles de chaque terme de la somme.*

Démonstration : Notons $u_k = \exp(v_k)$; nous avons :

$$\ln(u_1 u_2 \cdots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n = v_1 + v_2 \cdots + v_n$$

Il suffit alors de prendre le logarithme des deux membres pour obtenir (6.25).

Puisque $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$, on en déduit immédiatement deux autres propriétés :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \qquad (6.26) \qquad\qquad \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y} \qquad (6.27)$$

6.3.3 La formule de Mac Laurin appliquée à la fonction exponentielle dit que :

$$e = \exp(1) = \exp(0) + \frac{\exp'(0)}{1!} + \frac{\exp''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\exp^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{\exp^{(n)}(c)}{n!}$$

avec un certain nombre c compris entre 0 et 1. Alors, puisque toutes les dérivées successives de exp sont égales à exp, et que $\exp(0) = 1$, cela donne :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{\exp(c)}{n!}$$

La fonction exp est strictement croissante, donc $\exp(0) < \exp(c) < \exp(1)$ et :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e}{n!}$$

d'où l'on tire l'encadrement :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < e < \frac{1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}}{1 - \frac{1}{n!}} \qquad (6.28)$$

Par exemple, lorsque $n = 13$, cet encadrement donne :

$$2,718\,281\,828\,4\ldots < e < 2,718\,281\,828\,7\ldots$$

On peut démontrer que e n'est pas un nombre rationnel.

6.4 LA FONCTION a^x

6.4.1 Il est temps de revenir au but initial qui était de définir a^x pour tout x réel. Le prochain théorème va montrer comment faire.

Théorème 6.4.1.1 Quel que soit l'entier relatif n, et quel que soit le nombre réel v :

$$\exp nv = (\exp v)^n \qquad (6.29)$$

Démonstration : Le cas $n = 0$ n'est autre que (6.18). Si l'on prend tous les v_k égaux à v dans (6.25), on obtient (6.29) quand $n > 0$. Si on les prend tous égaux à $-v$ et si l'on utilise (6.26), on obtient (6.29) quand $n < 0$.

En remplaçant v par $\ln a$ dans (6.29) il vient :

$$\exp(n \ln a) = \exp(\ln a)^n = a^n \tag{6.30}$$

Avec cette égalité, on découvre une autre façon de définir a^n, pour n entier relatif, différente de la façon historique (9.1.1.1). L'avantage de cette nouvelle définition est qu'on n'est pas obligé de supposer quoi que ce soit sur la nature de n ; on peut donc l'utiliser pour définir a^n, même lorsque n n'est pas entier, et poser, en toute généralité :

$$a^x = \exp(x \ln a) \tag{6.31}$$

quel que soit x dans $\mathbb{R}$. Dans le cas particulier où $a = e$ cette égalité devient :

$$e^x = \exp(x) \tag{6.32}$$

et l'on a ainsi une nouvelle façon[1] de noter $\exp(x)$. On retiendra :

$$e^{\ln x} = x \quad (6.33) \qquad \ln e^x = x \quad (6.34) \qquad a^x = e^{x \ln a} \quad (6.35)$$

6.4.2 La fonction qui associe a^x à x s'appelle l'***exponentielle de base*** a ; on la note $\exp_a$ mais plus souvent a^x.

Théorème 6.4.2.1 La fonction $\exp_a$ est la fonction réciproque de $\ln_a$. De plus :

$$(a^x)' = \exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x) = \ln(a)\, a^x \tag{6.36}$$

Démonstration : Les fonctions $\exp_a$ et $\ln_a$ sont bijectives ; on vérifie immédiatement que $\exp_a(\ln_a(x)) = x$ et que $\ln_a(\exp_a(x)) = x$. Pour obtenir (6.36) il suffit de dériver $\exp(x \ln(a))$.

Nous avons enfin la réponse à la question posée à la fin du paragraphe (6.1.3) : la mystérieuse constante α n'est autre que $\ln a$!

6.4.3 Dorénavant, nous pouvons manipuler des expressions du type a^u, avec a réel strictement positif et u réel quelconque, mais sans jamais perdre de vue que a^u c'est $e^{u \ln a}$. Voici les principales propriétés de a^u, déduites des propriétés précédentes (ces égalités sont valables quels que soient a et b strictement positifs et quels que soient u et v réels).

$$a^u > 0 \quad (6.37) \qquad a^0 = 1 \quad (6.38) \qquad a^{-u} = \frac{1}{a^u} \quad (6.39)$$

$$a^{u+v} = a^u a^v \quad (6.40) \qquad (ab)^u = a^u b^u \quad (6.41) \qquad (a^u)^v = a^{uv} \quad (6.42)$$

1. En pratique, on utilise plus souvent la notation e^x que la notation $\exp x$.

6.5 LES FONCTIONS PUISSANCE

6.5.1 Si s est une constante réelle *non nulle*, on appelle ***fonction puissance s*** la fonction définie pour tout x strictement positif par $f(x) = x^s = e^{s \ln x}$ (nous éliminons le cas $s = 0$ parce que la fonction puissance 0 est la constante 1).

Théorème 6.5.1.1 La fonction $f(x) = x^s$ est une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ dont la dérivée est :

$$f'(x) = sx^{s-1} \tag{6.43}$$

Elle prend pour valeurs tous les nombres réels strictement positifs, c'est une bijection entre $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+$, sa fonction réciproque est $g(x) = x^{\frac{1}{s}}$.

Démonstration : En dérivant $f(x) = e^{s \ln x}$, on trouve successivement

$$f'(x) = \frac{s}{x} e^{s \ln x} = s\frac{x^s}{x} = sx^{s-1}$$

L'exposant de $e^{s \ln x}$ prend pour valeurs tous les nombres réels et par conséquent x^s prend pour valeurs toutes les valeurs prises par l'exponentielle. Enfin, si l'on calcule $f(g(x))$ ou $g(f(x))$ avec $f(x) = x^s$ et $g(x) = x^{\frac{1}{s}}$, on trouve x dans un cas comme dans l'autre. D'une façon générale, la composée de la fonction x^s par la fonction x^t est la fonction x^{st}.

Remarque : Parce que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$, on peut se dispenser de ranger $\sqrt{x}$ dans les fonctions de référence.

6.5.2 La dérivée de $f(x) = x^s$ ne s'annule pas, elle garde un signe constant qui est celui de s. Par conséquent, selon que s est positif ou négatif, le tableau de variation, et la forme de la courbe représentative, de $f(x)$ ne sont pas les mêmes.

- Si $s > 0$, la fonction $f(x) = x^s$ est strictement croissante, et l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^s = +\infty \tag{6.44}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^s = 0 \tag{6.45}$$

La *figure 6.4* montre la courbe résentative de quelques fonctions x^s avec $s > 0$. Ce schéma donne une idée de la façon dont la courbe se déforme lorsque s varie en partant de 0^+ pour aller vers $+\infty$.

- Si $s < 0$, la fonction $f(x) = x^s$ est strictement décroissante, et l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^s = 0 \tag{6.46}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^s = +\infty \tag{6.47}$$

La *figure 6.5* montre la courbe résentative de quelques fonctions x^s avec $s < 0$. Ce dessin donne une idée de la façon dont la coube se déforme lorsque s varie en partant de $-\infty$ pour aller vers 0^-.

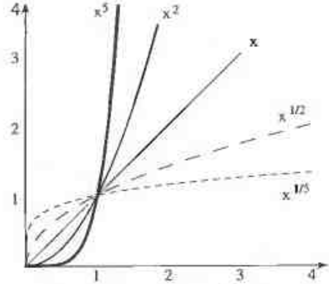


Figure 6.4 Les fonctions x^s avec $s > 0$

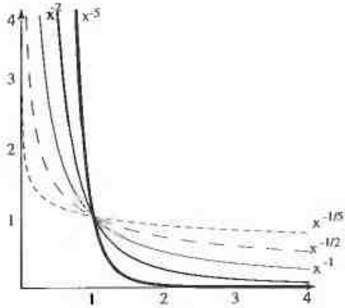


Figure 6.5 Les fonctions x^s avec $s < 0$

6.5.3 Supposons $a > 1$ et $s > 0$. Alors les fonctions a^x, x^s et $\ln x$ tendent toutes les trois vers $+\infty$ lorsque x tend $+\infty$. Le prochain théorème montre qu'on peut établir une hiérarchie parmi ces trois fonctions.

Théorème 6.5.3.1 (croissance comparée) Quel que soit $a > 1$, quel que soit $b < 1$ et quel que soit $s > 0$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^s} = +\infty \quad (6.48) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^s b^x = 0 \quad (6.49)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^s}{\ln x} = +\infty \quad (6.50) \qquad \lim_{x\to 0^+} x^s \ln x = 0 \quad (6.51)$$

En particulier, quel que soit $s > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty \quad (6.52) \qquad \lim_{x\to+\infty} x^s e^{-x} = 0 \quad (6.53)$$

Démonstration :

- Commençons par (6.48). En posant $f(x) = a^{\frac{x}{2}}x^{-s}$, nous avons $f'(x) = (\frac{\ln a}{2} - \frac{s}{x})f(x)$.

Par conséquent, parce que sa dérivée est strictement positive sur $]u; +\infty[$ avec $u = \frac{2s}{\ln a}$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle et n'y prend que des valeurs supérieures à la constante $f(u)$. Alors, $a^x x^{-s} = a^{\frac{x}{2}}f(x) > a^{\frac{x}{2}}f(u)$ quel que soit $x > u$ et, à cause du théorème 2.7.2.3, $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

- Pour démontrer (6.49) il suffit de poser $a = b^{-1}$ et d'utiliser (6.48).
- Pour démontrer (6.50) on remarque que $\frac{x^s}{\ln x} = \frac{(e^{\ln x})^s}{\ln x} = \frac{(e^s)^{\ln x}}{\ln x} = f\big(g(x)\big)$ avec

$f(x) = \frac{(e^s)^x}{x}$ et $g(x) = \ln x$. Alors, puisque f et g tendent toutes les deux vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, la limite de $f\big(g(x)\big)$ est $+\infty$.

- Pour (6.51), on remplace x par $\frac{1}{h}$ dans $x^s \ln x$ ce qui donne :

$$\lim_{x \to 0^+} x^s \ln x = \lim_{h \to +\infty}\left(-\frac{\ln h}{h^s}\right) = 0$$

6.6 LA TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

6.6.1 Maintenant, nous allons étudier des fonctions dont les propriétés ressemblent étonnement à celles des fonctions trigonométriques, ce qui peut paraître comme une curiosité jusqu'au paragraphe 10.6.3 où nous pourrons enfin comprendre leur signification.

- On appelle ***cosinus hyperbolique*** et on note **ch** la fonction *paire* définie par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{6.54}$$

- On appelle ***sinus hyperbolique*** et on note **sh** la fonction *impaire* définie par :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{6.55}$$

- On appelle ***tangente hyperbolique*** et on note **th** la fonction *impaire* définie par :

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \tag{6.56}$$

6.6.2 À part (6.56), qui n'est pas une propriété mais une définition, on voit mal pourquoi les fonctions ch et sh ont été appelées *cosinus* et *sinus*. C'est la ressemblance de leurs propriétés avec celles des fonctions trigonométriques habituelles, mise en évidence par le tableau de la *figure 6.6*, qui explique pourquoi on leur a donné ces noms (chaque propriété du tableau se démontre aisément en remplaçant les fonctions hyperboliques par leur définition).

À cause de la dernière formule de la figure (6.6), le point H_u, de coordonnées $(\operatorname{ch} u; \operatorname{sh} u)$, est toujours situé sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$, d'équation $x^2 - y^2 = 1$

$\cos' x = -\sin x$	$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$
$\sin' x = \cos x$	$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
$\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$
$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$	$\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$
$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$	$\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$
$\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$	$\operatorname{ch}(u-v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$
$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$	$\operatorname{sh}(u-v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v - \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$
$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$	$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$

Figure 6.6 La trigonométrie circulaire et la trigonométrie hyperbolique

(*figure 6.7*). Son abscisse est toujours positive, et, lorsque u varie, il décrit toute la branche droite de $\mathcal{H}$; c'est pour cette raison que les fonctions ch, sh et th s'appellent les ***fonctions hyperboliques*** et que les formules du tableau constituent la ***trigonométrie hyperbolique***.

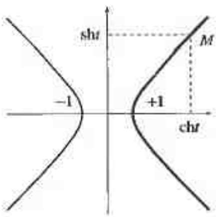


Figure 6.7 L'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$

De son côté, le point M_u, de coordonnées $(\cos u; \sin u)$ décrit le *cercle trigonométrique*, lorsque u varie. Alors, quand on veut les distinguer de leurs homologues hyperboliques, les fonctions *sinus*, *cosinus* et *tangente* habituelles sont appelées les ***fonctions circulaires***, et la trigonométrie classique s'appelle la ***trigonométrie circulaire***.

6.6.3 Malgré les ressemblances dans les formules, les fonctions hyperboliques ont un comportement très différent de celui des fonctions circulaires. D'abord *elles ne sont pas périodiques*, et surtout leurs courbes représentatives ne se ressemblent pas du tout. Leurs tableaux de variation et leurs courbes représentatives sont présentés sur les *figures 6.8, 6.9* et *6.10*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'x$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

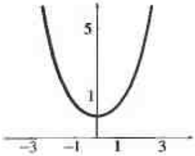


Figure 6.8 La fonction $\mathrm{ch}\,x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'x$		$+$	0	$+$	
$\mathrm{sh}\,x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

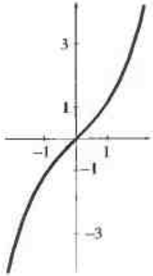


Figure 6.9 La fonction $\mathrm{sh}\,x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'x$		$+$	1	$+$	
$\mathrm{th}\,x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

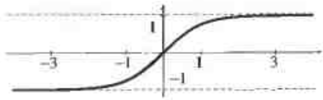


Figure 6.10 La fonction $\mathrm{th}\,x$

6.6.4 En copiant ce qui a été fait au chapitre 5 pour les fonctions circulaires, on peut associer des fonctions réciproques aux fonctions hyperboliques, mais il se trouve que ces nouvelles fonctions ont déjà des formules, ce qui diminue l'intérêt de leur donner un nom. Quoi qu'il en soit, le calcul de leurs dérivées va montrer la ressemblance entre ces nouvelles fonctions et les fonctions circulaires réciproques.

- La fonction ***argument cosinus hyperbolique***, notée **argch**, est obtenue comme fonction réciproque de $\mathrm{ch}\,x$ sur $[0;+\infty[$. C'est une fonction de classe C^∞ définie sur $[+1;+\infty[$; son tableau de variation et sa courbe représentative illustrent la *figure 6.11*.

x	$+1$		$+\infty$
$\operatorname{argch}' x$		$+$	
$\operatorname{argch} x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

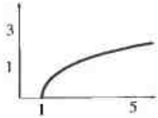


Figure 6.11 La fonction $\operatorname{argch} x$

• La fonction ***argument sinus hyperbolique***, notée **argsh** est obtenue comme fonction réciproque de $\operatorname{sh} x$ sur $]-\infty;+\infty[$. C'est une fonction *impaire*, de classe C^{∞} définie sur $]-\infty;+\infty[$; son tableau de variation et sa courbe représentative sont montrés sur la *figure 6.12*.

x	$-\infty$		$+\infty$
$\operatorname{argsh}' x$		$+$	
$\operatorname{argsh} x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

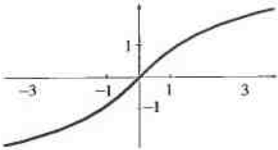


Figure 6.12 La fonction $\operatorname{argsh} x$

• La fonction ***argument tangente hyperbolique***, notée **argth** est obtenue comme fonction réciproque de th sur $]-\infty;+\infty[$. C'est une fonction *impaire*, de classe C^{∞} définie sur $]-1;+1[$; son tableau de variation et sa courbe représentative sont montrés par la *figure 6.13*.

x	-1		$+1$
$\operatorname{argth}' x$		$+$	
$\operatorname{argth} x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

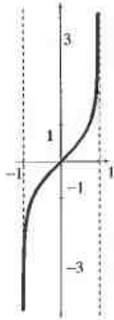


Figure 6.13 La fonction $\operatorname{argth} x$

Théorème 6.6.4.1 Nous avons :

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{6.57}$$

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{6.58}$$

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \tag{6.59}$$

Démonstration : Posons $y = \operatorname{argch} x$. Alors $x = \operatorname{ch} y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, ce qui donne $2x = e^y + \dfrac{1}{e^y}$ ou encore $(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$; donc l'équation du second degré $T^2 - 2xT + 1 = 0$ admet donc e^y comme racine et, puisque le produit de ses racines est égal à 1, l'autre racine est e^{-y} ; de plus $e^y > e^{-y}$. En résolvant cette équation du second degré au moyen des formules habituelles, on lui trouve $x + \sqrt{x^2-1}$ et $x - \sqrt{x^2-1}$ pour racines, mais, puisque $x + \sqrt{x^2-1} > x - \sqrt{x^2-1}$, on a forcément $e^y = x + \sqrt{x^2-1}$, ce qui donne $y = \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Ensuite, on dérive cette formule pour obtenir la deuxième partie de (6.57). Les formules qui concernent sh ou th se démontrent de la même façon.

EXERCICES

6.1. Soit f une fonction définie, continue, dérivable sur $]0; +\infty[$, telle que :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

quels que soient x et y. Démontrer que f est un logarithme.

6.2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer le domaine de définition de la fonction :

$$l_n(x) = \underbrace{\ln(\ln(\ln(\cdots\ln(\ln(x))\cdots)))}_{n \text{ fois le symbole ln}}$$

6.3. Les lettres α et β désignent deux nombres réels strictement positifs. Calculer :

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta \quad ; \quad L_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta}$$

6.4. 1) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ quel que soit n.

2) On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que f est de classe C^∞ et que $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit n.

6.5. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$. Quelle est la valeur minimale de x^x quand x est strictement positif ?

6.6. À tout nombre réel $\alpha > 0$ on associe la fonction $d_\alpha(x) = x^\alpha - \ln x$.

1) Montrer qu'il existe un seul nombre réel positif, A_α, tel que $d'_\alpha(A_\alpha) = 0$.

2) Calculer $m_\alpha = d_\alpha(A_\alpha)$ et dresser le tableau de variation de $d_\alpha(x)$.

3) Pour quelles valeurs de α les courbes représentatives de x^α et $\ln x$ se coupent-elles ? Pour quelles valeurs ne se coupent-t-elles pas ?

4) Pour quelles valeurs de α les courbes représentatives de x^α et de $\ln x$ sont-elles tangentes (elles ont un point d'intersection et en ce point leur tangentes sont confondues) ? Dessiner, dans ce cas, les deux courbes représentatives.

6.7. La lettre n désigne un entier positif. Démontrer que :

$$C(x) = 1 + \operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{ch} 2\alpha x + \cdots + \operatorname{ch} n\alpha x = \frac{\operatorname{ch} nx \operatorname{sh} \frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}$$

Démontrer une formule analogue pour $S(x) = \operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{sh} 2\alpha x + \cdots + \operatorname{sh} n\alpha x$.

6.8. Simplifier les dérivées des fonctions suivantes, et expliquez les résultats :

$$f_1(x) = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}} \; ; \; f_2(x) = \operatorname{argth} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} \; ; \; f_3(x) = \operatorname{argsh} \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$$

Chapitre 7

Développements limités

7.1 FORMES INDÉTERMINÉES

7.1.1 Si f est une fonction définie par une formule, on peut éprouver des difficultés à trouver la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers une valeur pour laquelle $f(x)$ n'est pas défini.

Exemple 7.1.1.1 On ne voit pas, au premier coup d'œil, combien vaut :

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{1 - \cos x}$$

et nous ne connaîtrons sa valeur qu'à la fin du chapitre.

En reprenant les notations du paragraphe 2.6.2, cette situation se rencontre quand :

- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\lim\limits_{x \to \omega} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \omega} v(x) = 0$, et l'on dit qu'on a une ***forme indéterminée du type*** $0/0$;
- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\lim\limits_{x \to \omega} u(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \omega} v(x) = \pm\infty$, et l'on dit qu'on a une ***forme indéterminée du type*** ∞/∞ ;
- $f(x) = u(x)v(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \omega} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \omega} v(x) = \pm\infty$, et l'on dit qu'on a une ***forme indéterminée du type*** $0 \times \infty$.

Dans ce chapitre, nous apprendrons à calculer la limite des formes indéterminées ; on dit ***lever l'indétermination***.

7.1.2 Le théorème qui suit permet de lever beaucoup d'indéterminations du type 0/0.

> **Théorème 7.1.2.1** (règle de L'Hospital) Soient u et v deux fonctions continues au voisinage de a, nulles en a. Si elles sont dérivables en a, et si $v'(a) \neq 0$, alors :
> $$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(a)}{v'(a)} \tag{7.1}$$

Démonstration : On écrit $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{u(x) - u(a)}{v(x) - v(a)} = \dfrac{\dfrac{u(x) - u(a)}{x - a}}{\dfrac{v(x) - v(a)}{x - a}}$. Alors la limite du numérateur est $u'(a)$, et celle du dénominateur $v'(a)$, qui n'est pas nul, d'où le résultat.

Exemple 7.1.2.2 Pour calculer $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1 + x)}$ on pose $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. On a $u'(0) = 1$ et $v'(0) = 1$, ce qui donne $L = 1$.

7.1.3 Malheureusement, la règle de L'Hospital ne permet pas de trouver toutes les limites, en particulier pas celles de l'exemple 7.1.1.1. On est donc amené à faire des calculs plus compliqués qui vont être décrits dans les prochains paragraphes.

La première étape de ces calculs consiste, par un changement de variable, à se ramener à une variable qui tend vers 0 :

- si $\omega = a$, ou a^+, ou a^-, on pose $g(h) = f(a + h)$; alors :
  $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} g(h) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} g(h) \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{h \to 0^-} g(h)$$
- si $\omega = \pm\infty$ on pose $g(h) = f(\frac{1}{h})$; alors :
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{h \to 0^+} g(h) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{h \to 0^-} g(h)$$

Attention : Dans la suite nous supposerons toujours que ce changement de variable a déjà été fait, et que $\omega = 0$.

7.2 TERME PRINCIPAL ET CALCUL DES LIMITES

7.2.1 Les nombres $\sin x$ et x tendent tous les deux vers 0 quand x tend vers 0, mais, parce que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on a envie de dire qu'ils tendent vers 0 à la même vitesse : nous allons préciser cette idée.

Soient C une constante *non nulle* et n un nombre entier de signe quelconque (un *entier relatif*). Si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{Cx^n} = 1$ on dit que Cx^n est le ***terme principal*** de $f(x)$ (au voisinage de 0), et on écrit $f(x) \sim Cx^n$.

Exemple 7.2.1.1 Puisque $1 - \cos x = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\cos x}\right) = 1$$

donc $\dfrac{1}{2}x^2$ est le terme principal de $1 - \cos x$.

On remarque immédiatement que si α est un nombre réel non nul, $\alpha f(x) \sim \alpha C x^n$.

Théorème 7.2.1.2 Notons Cx^n le terme principal de $f(x)$. Alors :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} C & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \\ \pm\infty & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Dans le deuxième cas on dit que $f(x)$ est un ***infiniment petit d'ordre n*** ; dans le dernier on dit que $f(x)$ est un ***infiniment grand d'ordre n*** et le théorème suivant montre que le signe de la limite est le même que celui de Cx^n.

Théorème 7.2.1.3 Si $f(x) \sim Cx^n$, il existe un voisinage de 0 sur lequel $f(x)$ et Cx^n ont le même signe quel que soit $x \neq 0$.

Démonstration : Puisque $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{Cx^n} = 1$, il existe un voisinage de 0 sur lequel on a $0 < \dfrac{f(x)}{Cx^n}$ pour tout $x \neq 0$, ce qui donne bien le résultat annoncé.

Remarque : On peut élargir la notion de terme principal en n'imposant pas à n d'être un nombre entier. Puisque dans ce cas x^n existe seulement quand x est positif, on doit simplement remplacer la définition par $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{Cx^n} = 1$. Cependant, même avec cette définition plus souple, certaines fonctions, telle $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, n'ont toujours pas de terme principal.

Théorème 7.2.1.4 Si la fonction f admet un terme principal, elle en admet un seul.

Démonstration : Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{Cx^n} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{Dx^m} = 1$ cela donne :

$$1 = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{Cx^n}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{Dx^m}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{f(x)}{Cx^n}\right)}{\left(\frac{f(x)}{Dx^m}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{Dx^m}{Cx^n} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{D}{C}\right) x^{m-n}$$

mais le théorème 7.2.1.2 nous dit que l'égalité $1 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{D}{C}\right) x^{m-n}$ ne peut être vraie que si $m - n = 0$ et alors $\frac{D}{C}$ doit être égal à 1.

7.2.2 Le prochain théorème, dont la vérification est immédiate, montre en quoi la connaissance des termes principaux permet de lever les indéterminations.

> **Théorème 7.2.2.1** Si on a $u(x) \sim Cx^n$ et $v(x) \sim Dx^m$ alors :
> $$u(x)v(x) \sim CDx^{n+m} \qquad \text{et} \qquad \frac{u(x)}{v(x)} \sim \frac{C}{D}x^{m-n}$$

Méthode pratique : Pour lever une indétermination, on remplace les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ par leurs termes principaux, puis on calcule la limite de la nouvelle forme indéterminée à l'aide des théorèmes 7.2.2.1 et 7.2.1.2.

Exemple 7.2.2.2 Puisque $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ et $\sin x \sim x$, nous avons :

$$\frac{1-\cos x}{x \sin x} \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et, par conséquent,} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1}{2}$$

7.2.3 Le prochain théorème montre comment, et à quelle condition, on peut calculer le terme principal d'une somme de deux fonctions.

> **Théorème 7.2.3.1** Si $f(x) \sim Cx^n$ et $g(x) \sim Dx^m$ alors :
> $$f(x) + g(x) \sim \begin{cases} Cx^n & \text{si } n < m \\ Dx^m & \text{si } m < n \\ (C+D)x^n & \text{si } n = m \text{ et } C + D \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration : Il suffit de vérifier dans chaque cas que le quotient de $f(x) + g(x)$ par le terme principal annoncé est bien égal à 1.

Exemple 7.2.3.2 Puisque $\tan x \sim x$ et $\sin x \sim x$, le théorème 7.2.3.1 nous dit que $\tan x + \sin x \sim 2x$, mais il ne donne pas le terme principal de $\tan x - \sin x$. Pour le trouver on écrit $\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x)$ et, comme $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, on obtient $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$.

Le théorème 7.2.3.1 ne dit pas quel est le terme principal de $f(x)+g(x)$ quand $n = m$ et $C+D = 0$. Pour l'obtenir, il faut avoir d'autres informations qui permettront de faire un calcul plus poussé, et c'est pour cela que nous aurons besoin des développements limités.

7.3 LA NOTATION *o*

7.3.1 Soient n un entier de signe quelconque – un *entier relatif* – et f une fonction définie au voisinage de 0, *sauf peut-être en* 0.

Si $f(x)$ est de la forme $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ on dit que $f(x)$ est un ***petit o*** de x^n et on écrit $f(x) = o(x^n)$. En particulier $f(x) = o(1)$ signifie tout simplement que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Lorsque $n > 0$ une fonction $o(x^n)$ est une fonction qui tend vers 0 plus fortement que x^n.

Exemple 7.3.1.1 Puisque $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$, on a $1 - \cos x = o(1)$, mais on obtient un résultat plus précis en écrivant :

$$1 - \cos x = x\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}}\right) = x\varepsilon(x)$$

ce qui donne maintenant $1 - \cos x = o(x)$.

Théorème 7.3.1.2 Quels que soient la constante α et le nombre entier $p > 0$, on a $\alpha x^{n+p} = o(x^n)$.

Démonstration : On a $\alpha x^{n+p} = x^n\alpha x^p$ avec $\lim_{x\to 0}\alpha x^p = 0$.

Mise en garde : La notation $f(x) = o(x^n)$ est commode mais doit être utilisée avec prudence. Ainsi, sous prétexte que $1 - \cos x = o(1)$ et que $x = o(1)$, il ne faudrait pas en déduire que $1 - \cos x = x$! En fait il serait plus correct de dire que $o(x^n)$ désigne un *ensemble*, l'ensemble des fonctions de la forme $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, et que la notation $f(x) = o(x^n)$ signale que $f(x)$ appartient à cet ensemble ; elle équivaudrait donc à $f(x) \in o(x^n)$. Nous verrons, dans un instant, ce qu'on peut faire avec cette notation, et les avantages qu'on peut en tirer.

Les ensembles $o(x^n)$ obtenus en prenant toutes les valeurs de n sont emboîtés les uns dans les autres (*figure 7.1*), car nous avons le résultat suivant :

Théorème 7.3.1.3 Si $f(x) = o(x^n)$, alors $f(x) = o(x^{n-p})$ pour tout $p \geqslant 0$.

Démonstration : Si $f(x) = o(x^n)$ on a $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc $f(x) = x^{n-p}\left(x^p\varepsilon(x)\right)$ et, comme $\lim_{x\to 0} x^p\varepsilon(x) = 0$, on a bien $f(x) = o(x^{n-p})$.

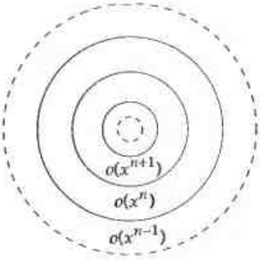


Figure 7.1 Les ensembles $o(x^n)$

Si $N \geqslant n$, dire qu'une fonction est $o(x^N)$ est plus précis que dire qu'elle est $o(x^n)$, puisque la seconde affirmation est une conséquence de la première. On retiendra que *diminuer l'exposant de x dans un o est une perte d'information*, parfois rendue nécessaire, nous y reviendrons plus loin.

7.3.2 Lorsque nous voudrons ajouter ou multiplier des fonctions $o(x^n)$, nous utiliserons les notations suivantes :

- $f(x) + o(x^n)$ désigne la somme de la fonction f et d'une autre fonction dont on sait simplement qu'elle est un $o(x^n)$, c'est-à-dire de la forme $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$;
- $f(x)o(x^n)$ désigne le produit de la fonction f par une autre fonction qui est un $o(x^n)$;
- $o(x^m) + o(x^n)$ désigne la somme d'une fonction $o(x^m)$ et d'une fonction $o(x^n)$;
- $o(x^m)o(x^n)$ désigne le produit d'une fonction $o(x^m)$ par une fonction $o(x^n)$.

De la sorte, il est facile d'effectuer des opérations simples, en utilisant les règles habituelles du calcul algébrique, par exemple :

$$\left(A + o(x^m)\right)\left(B + o(x^n)\right)\left(C + o(x^p)^2\right) = ABC + ABo(x^p)^2 + BCo(x^m) + ACo(x^n)$$
$$+ Ao(x^n)o(x^p)^2 + Bo(x^m)o(x^p)^2 + Co(x^m)o(x^n) + o(x^m)o(x^n)o(x^p)^2 \quad (7.2)$$

Il n'y a rien d'étonnant dans ce calcul, parce que m, n et p sont différents, mais comment développerait-on $\left(A + o(x^m)\right)\left(B + o(x^m)\right)\left(C + o(x^m)^2\right)$? On remplacerait d'abord n et p par m dans (7.2) ce qui donnerait :

$$\left(A + o(x^m)\right)\left(B + o(x^m)\right)\left(C + o(x^m)^2\right) = ABC + ABo(x^m)^2 + BCo(x^m) + ACo(x^m)$$
$$+ Ao(x^m)o(x^m)^2 + Bo(x^m)o(x^m)^2 + Co(x^m)o(x^m) + o(x^m)o(x^m)o(x^m)^2 \quad (7.3)$$

puis, pour aller plus loin, on aurait envie de regrouper les $o(x^m)$, ce qui donnerait :

$$\left(A+o(x^m)\right)\left(B+o(x^m)\right)\left(C+o(x^m)^2\right)=ABC+ABo(x^m)^2+BCo(x^m)$$
$$+ACo(x^m)+Ao(x^m)^3+Bo(x^m)^3+Co(x^m)^2+o(x^m)^4$$

mais *on n'a pas le droit de le faire* parce chaque $o(x^m)$ du membre de gauche de (7.3) peut représenter une fonction différente, et on ne peut pas calculer, dans le membre de droite, comme si c'était toujours la même fonction ! On devrait donc en rester à (7.3), et s'interdire de simplifier... !

Par chance, et c'est l'intérêt de la notation, on n'a pas besoin de se poser toutes ces questions, car le théorème suivant montre qu'on peut quand même simplifier, et plus encore qu'on ne l'aurait imaginé.

Théorème 7.3.2.1 (règles de simplification du o) Les lettres m et n repréentent des entiers relatifs quelconques et p désigne le plus petit des deux nombres n et m. Alors :

$$o(x^n)+o(x^m)=o(x^p) \tag{7.4}$$

$$o(x^m)o(x^n)=o(x^{m+n}) \tag{7.5}$$

$$x^m o(x^n)=o(x^{m+n}) \tag{7.6}$$

$$o(x^m)^n=o(x^{mn}) \tag{7.7}$$

De plus, si u est une fonction bornée sur un voisinage de 0, c'est-à-dire s'il existe une constante M telle que $|u(x)| \leqslant M$ quel que soit x dans ce voisinage, alors :

$$u(x)o(x^n)=o(x^n) \tag{7.8}$$

En particulier, si α est une constante quelconque :

$$\alpha o(x^n)=o(x^n) \tag{7.9}$$

Exemple 7.3.2.2 En développant : $\left(x+o(x^2)\right)\left(x^3+o(x^5)\right)$ et en appliquant successivement (7.6), (7.5) et (7.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\left(x+o(x^2)\right)\left(x^3+o(x^5)\right)&=x^4+xo(x^5)+o(x^2)x^3+o(x^2)o(x^5)\\&=x^4+o(x^6)+o(x^5)+o(x^7)\\&=x^4+o(x^5)\end{aligned}$$

7.3.3 Il faut faire bien attention à ce que signifient les égalités du théorème 7.3.2.1. Par exemple, quand on calcule une égalité du type $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$, il faut résister à la tentation de simplifier par $o(x^n)$, ce qui donnerait $o(x^n) = 0$! L'égalité $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ dit simplement que si l'on ajoute deux fonctions qui sont $o(x^n)$, leur somme l'est aussi ; on ne doit pas aller plus loin. L'utilisation des règles de simplification demande d'appliquer uniquement ce qui est dans le théorème 7.3.2.1, sans aller chercher des règles qui n'y sont pas !

Exemple 7.3.3.1 Comment doit-on simplifier : $o(x^n) - o(x^n)$? Bien évidemment, nous sommes tentés de remplacer cette différence par 0 car un objet (même s'il est inconnu) moins lui-même donne en général 0. Mais ici il faut se rappeler que les deux $o(x^n)$ ne représentent pas forcément le même objet, et cela doit nous mettre en garde.

La règle (7.9), avec $\alpha = -1$, permet de remplacer $-o(x^n)$ par $o(x^n)$, donc $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n) + o(x^n)$, après quoi la règle (7.4) s'applique pour donner finalement $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$.

7.4 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

7.4.1 Soient n un entier relatif, et f une fonction définie au voisinage de 0, *sauf peut-être en* 0. On dit que $f(x)$ *admet un développement limité à l'ordre n, au voisinage de* 0, s'il existe un entier p, de signe quelconque, avec $p \leqslant n$, et des nombres réels $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_n$ tels que $f(x) - \left(\alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n\right) = o(x^n)$.

Lorsqu'on écrit :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$

le membre de droite est le ***développement limité à l'ordre n***, au voisinage de 0, de $f(x)$. La somme $\alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n$ est la ***partie polynomiale*** du développement, et $o(x^n)$ le ***reste***. On écrit toujours les termes des développements limités en les rangeant par puissance croissante.

Exemple 7.4.1.1 Puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)} = 1$, si l'on pose $\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{1 - \cos x}{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}$ on a $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. On en déduit le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \tag{7.10}$$

En divisant cette égalité par x on obtient un autre développement limité :

$$\frac{\cos x}{x} = x^{-1} - \frac{1}{2}x + o(x) \tag{7.11}$$

Exemple 7.4.1.2 Si $f(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d, c'est-à-dire si $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, alors quel que soit $n > d$, la fonction $f(x)$ possède un développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, donné par $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d + o(x^n)$.

Remarque : Dans un développement limité les nombres $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_n$ peuvent être tous nuls, par exemple $\sin^2 x = o(x)$ est le développement limité à l'ordre 1 de $\sin^2 x$.

Même si beaucoup de fonctions ont un développement limité, notamment parmi celles qui sont définies au moyen d'une formule, certaines fonctions n'en ont pas.

7.4.2 Jusqu'ici nous avons toujours parlé *du* développement limité à l'ordre n de $f(x)$ comme s'il n'y en avait qu'un seul. Nous allons voir que c'est bien le cas.

Théorème 7.4.2.1 L'entier n étant fixé, la seule façon de modifier l'écriture du développement limité à l'ordre n de $f(x)$ consiste à lui ajouter ou enlever des termes nuls.

Démonstration : Supposons qu'on ait deux développements limités à l'ordre n :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$
$$f(x) = \beta_q x^q + \beta_{q+1}x^{q+1} + \cdots + \beta_n x^n + o(x^n)$$

On peut commencer par ajouter des termes nuls au début des développements afin qu'ils débutent par des termes de même indice. De la sorte ils se présenteront tous les deux sous la forme :

$$f(x) = \alpha_r x^r + \alpha_{r+1}x^{r+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$
$$f(x) = \beta_r x^r + \beta_{r+1}x^{r+1} + \cdots + \beta_n x^n + o(x^n)$$

En faisant la différence on obtient :

$$0 = (\alpha_r - \beta_r)x^r + (\alpha_{r+1} - \beta_{r+1})x^{r+1} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)x^n + o(x^n)$$

et, puisque $r \leqslant n$, cela donne :

$$(\beta_r - \alpha_r) = (\alpha_{r+1} - \beta_{r+1})x + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)x^{n-r} + o(x^{n-r}) \qquad (7.12)$$

mais, puisque le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers 0, on a forcément $\beta_r = \alpha_r$. Ensuite on divise par x les deux membres de (7.12) et on refait le même raisonnement avec les termes d'indice $r + 1$. En continuant de la sorte on finit par obtenir $\alpha_r = \beta_r, \alpha_{r+1} = \beta_{r+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Quand $f(x)$ possède un développement limité à l'ordre n on peut associer un coefficient à chaque entier relatif k inférieur à n :

- si $p \leqslant k \leqslant n$ c'est le coefficient de x^k tel qu'il figure dans le développement limité,
- si $k < p$ c'est 0.

Les nombres ainsi obtenus s'appellent les ***coefficients*** du développement limité à l'ordre n de $f(x)$. Le théorème 7.4.2.1 dit qu'ils ne dépendent que de f et de n, et pas de la façon dont on les calcule.

Exemple 7.4.2.2 Nous savons que $\frac{\cos x}{x} = x^{-1} - \frac{1}{2}x + o(x)$. Si un autre calcul donne $\frac{\cos x}{x} = \alpha_{-7}x^{-7} + \alpha_{-2}x^{-2} + \alpha_{-1}x^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 x + o(x)$ on sait aussitôt que $\alpha_{-7} = 0$, $\alpha_{-2} = 0$, $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

En revanche, si l'on trouvait $\frac{\cos x}{x} = \beta_0 + \beta_1 x + o(x)$, on aurait la certitude que ce calcul est faux car il manque un terme en x^{-1}.

Théorème 7.4.2.3 Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre N, elle admet un développement limité à n'importe quel ordre plus petit que N.

Plus précisément, soit :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_N x^N + o(x^N)$$

le développement limité à l'ordre N de $f(x)$ (quitte à ajouter des termes nuls au début de ce développement, on peut supposer que $p \leqslant n$). Alors le développement limité à l'ordre n de $f(x)$ est :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$

avec les mêmes coefficients $\alpha_p, \ldots, \alpha_n$.

Autrement dit, pour limiter à l'ordre n un développement qui était limité à un ordre plus grand, N, il suffit d'effacer tous les monômes de degré strictement supérieur à n, et de remplacer $o(x^N)$ par $o(x^n)$. Faire cette opération s'appelle ***tronquer le développement à l'ordre n***. C'est une perte d'information sur la fonction f, mais qui est nécessaire dans certains calculs.

Démonstration : Écrivons $f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_n x^n + \left[\alpha_{n+1}x^{n+1} \cdots + \alpha_N x^N + o(x^N)\right]$. Puisque $\alpha_{n+1}x^{n+1} + \cdots + \alpha_N x^N + o(x^N) = x^n\left[\alpha_{n+1}x + \cdots + \alpha_N x^{N-n} + o(x^{N-n})\right]$, et que $\lim_{x\to 0}\left[\alpha_{n+1}x + \cdots + \alpha_N x^{N-n} + o(x^{N-n})\right] = 0$, on a bien :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$

Il faut noter l'analogie entre le *développement décimal par défaut à 10^{-n} près* d'un nombre réel, et le *développement limité à l'ordre n* d'une fonction. Connaître le nombre réel avec n chiffres après la virgule, c'est le connaître avec une certaine précision ; connaître la fonction en limitant son développement à l'ordre n, c'est aussi la connaître avec une certaine précision.

De même qu'en effaçant les derniers chiffres d'un développement décimal par défaut on obtient encore un développement décimal par défaut, mais moins précis, en effaçant les derniers monômes d'un développement limité on obtient encore un développement limité, mais moins précis. Les chiffres *avant* la virgule du développement décimal ont pour analogues les monômes dont l'exposant est *strictement négatif.* Nous verrons aussi que les opérations sur les développements limités ressemblent beaucoup aux opérations sur les développements décimaux.

7.4.3 Les deux prochains théorèmes montrent pourquoi, et comment, les développements limités permettent de calculer les termes principaux des fonctions.

Théorème 7.4.3.1 Une fonction qui possède un terme principal possède un développement limité dont la partie polynomiale n'est pas nulle. Plus précisément, si $f(x) \sim Cx^p$, alors $f(x) = Cx^p + o(x^p)$.

Démonstration : Posons $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{Cx^p} - 1$. Alors, parce que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{Cx^p} = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = Cx^p + Cx^p\varepsilon(x) = Cx^p + o(x^p)$.

Théorème 7.4.3.2 Si $f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$ avec $\alpha_p \neq 0$ alors $f(x) \sim \alpha_p x^p$. Autrement dit, quand une fonction possède un développement limité dont la partie polynomiale n'est pas nulle, elle possède un terme pricipal qui est le premier monôme non nul de son développement limité.

Démonstration : On a $\dfrac{f(x)}{\alpha_p x^p} = 1 + \dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}x + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{\alpha_p}x^{n-p} + o(x^{n-p})$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\alpha_p x^p} = 1$ et $\alpha_p x^p$ est le terme principal de $f(x)$.

Méthode pratique : Pour calculer le terme principal d'une fonction :

1) On regarde si l'on connaît déjà un développement limité de la fonction, ou bien on en cherche un (nous verrons bientôt comment) d'ordre peu élevé.

2) Si ce développement possède une partie polynomiale non nulle, son premier monôme non nul est le terme principal.

3) Si ce développement ne possède pas de monôme non nul, on recalcule le développement limité à l'ordre suivant.

Pour la raison que nous venons de voir, si $f(x)$ admet un développement limité dont la partie polynomiale n'est pas nulle, son premier monôme non nul s'appelle le ***terme principal du développement***.

7.4.4 Si l'on sait seulement que $f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$, on ne peut en aucune façon répondre à une question du type : *Que vaut* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *?*

Il faut retenir qu'*un développement au voisinage de* 0 *ne donne des renseignements que sur ce qui se passe près de* 0.

Exemple 7.4.4.1 Si $f(x) = 1 + x + o(x)$, la fonction $f(x)$ pourrait être, par exemple, $f(x) = 1 + x + \alpha x^2$, avec n'importe quelle constante α, auquel cas on aurait $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 + \alpha$. Par conséquent, connaissant uniquement le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0, on ne sait rien[1] de $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Pour obtenir des renseignements sur le comportement de $f(x)$ ailleurs qu'en 0, on doit faire le changement de variable du paragraphe 7.1.3, ce qui donne une nouvelle fonction $g(h)$ qu'on développe ensuite au voisinage de $h = 0$, mais pour faire ce changement de variable, il faut connaître $f(x)$ autrement que par son développement limité. Posons quelques définitions.

- Si a est un nombre réel, on appelle ***développement limité à l'ordre n, au voisinage de a***, le développement limité à l'ordre n, au voisinage de $h = 0$, de $g(h) = f(a + h)$.

Exemple 7.4.4.2 Soit $f(x) = 1 + 2x - x^2$. Alors le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 2, de $f(x)$ s'obtient en écrivant le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0, de $g(h) = f(2 + h) = 1 - 2h - h^2$. Comme ce développement est $g(h) = 1 - 2h + o(h)$, on écrira :

$$f(x) = 1 - 2h + o(h) \quad \text{avec } h = x - 2$$

- On appelle ***développement limité à l'ordre n, au voisinage de l'infini***, le développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, de $g(h) = f(\frac{1}{h})$.

Exemple 7.4.4.3 Soit $f(x) = \dfrac{2 + x}{1 + x}$. Le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de *l'infini*, de $f(x)$ s'obtient en écrivant le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $g(h) = f(\frac{1}{h}) = \dfrac{1 + 2h}{1 + h}$. Comme ce développement est $g(h) = 1 + h - h^2 + h^3 + o(h^3)$, on écrira :

$$f(x) = 1 + h - h^2 + h^3 + o(h^3) \quad \text{avec } h = \frac{1}{x}$$

> ***Mise en garde :*** Dans le dernier exemple, on pourrait avoir la tentation d'écrire $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, mais on voit tout de suite les risques de confusion d'une telle écriture car on pourrait croire qu'il s'agit d'un développement limité au voisinage de 0, et que le $o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ qui y figure est une fonction du type $\dfrac{\varepsilon(x)}{x^3}$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, ce qui n'est pas le cas ! Si l'on veut quand même écrire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de l'infini en n'utilisant que la variable x, et pas du tout h, il faut modifier la notation pour avoir quelque chose du type $f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o_\infty\left(\frac{1}{x^3}\right)$ qui montre où on prend la limite.

1. On ne sait même pas si cette limite existe !

7.4.5 Une application importante du calcul des développements limités au voisinage de l'infini est la recherche des asymptotes.

Considérons une fonction $f(x)$ définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la droite d'équation $y = ux + v$ est ***asymptote***[1] à la courbe représentative de $f(x)$, en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} \Big(f(x) - ux - v\Big) = 0$, et en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} \Big(f(x) - ux - v\Big) = 0$.

Méthode pratique : Pour trouver les asymptotes de $f(x)$:

- on calcule le développement limité à l'ordre 0 de $f(x)$ au voisinage de l'infini. S'il se présente sous la forme $f(x) = \frac{u}{h} + v + o(1)$ avec des constantes u et v, non toutes les deux nulles, la droite $y = ux+v$ est asymptote à la courbe.
- Si l'on poursuit le calcul du développement et si l'on trouve qu'il est de la forme $f(x) = \frac{u}{h} + v + wh + o(h)$, avec $w \neq 0$, on connaît le signe de $f(x) - ux - v$ lorsque $|x|$ est grand, ou si l'on préfère quand $|h|$ est petit, car c'est celui de wh. On peut donc dire si la courbe représentative est au-dessus ou au-dessous de son asymptote.

Exemple 7.4.5.1 Le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de l'infini, de $f(x) = \dfrac{x^3 + 7}{x^2 + 5x - 3}$ est $f(x) = \dfrac{1}{h} - 5 + 28h + o(h)$. Par conséquent la droite Δ, d'équation $y = x - 5$ est asymptote à Γ, la courbé représentative de $fx)$, à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Quand x tend vers $+\infty$ la courbe Γ est au-dessus de Δ, et quand x tend vers $-\infty$ c'est le contraire.

7.5 CALCUL DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

7.5.1 Maintenant, nous allons voir comment on peut calculer le développement limité d'une fonction définie par une formule. Nous aurons un théorème général qu'on utilise pour développer les fonctions de référence, puis d'autres théorèmes qui indiquent comment on peut développer une somme, un produit, un quotient, une fonction composée, ce qui donnera le moyen de développer toutes les fonctions définies par une formule, quand elles possèdent un développement. Commençons par le théorème général.

Théorème 7.5.1.1 (formule de Mac Laurin avec le reste de Young) Soient n un entier positif ou nul et f une fonction de classe C^n au voisinage de 0. Alors $f(x)$ possède le développement :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad (7.13)$$

1. Concrètement, une courbe admet une *asymptote* quand elle a une branche infinie qui vient se plaquer contre une droite. Le mot asymptote se prononce comme s'il y avait deux s.

Démonstration : Puisque f est de classe C^n, le théorème 5.5.2.2 dit qu'il existe un nombre θ compris entre 0 et 1 tel que :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

Lorsque x tend vers 0, le nombre θx, qui est coincé entre 0 et x, tend lui aussi vers 0, et puisque $f^{(n)}$ est continue, $f^{(n)}(\theta x)$ tend vers $f^{(n)}(0)$. En posant $\varepsilon(x) = f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)$ nous avons $f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0) + \varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, d'où (7.13).

Remarque : Une conséquence de l'unicité du développement limité fait que si une fonction de classe C^n au voisinage de 0 possède le développement limité :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$

on a forcément $\alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

7.5.2 Le théorème 9.4.2.1 s'applique à toutes les fonctions de classe C^n, qu'elles aient une formule ou non, mais il fournit une méthode permettant de calculer le développement limité à un ordre quelconque de celles qui sont définies par une formule et qui sont dérivables en 0 : on calcule leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre souhaité, puis les valeurs de ces dérivées en 0, après quoi on écrit (7.13). Deux exemples vont montrer cette méthode en action.

Exemple 7.5.2.1 On connaît les dérivées successives de $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

et la formule de Mac Laurin donne le développement limité à l'ordre 4 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Mais on peut aller plus loin et écrire le développement limité de $\sin x$ à n'importe quel ordre car les dérivées successives de cette fonction se répètent de 4 en 4 ; cela donne :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}) \qquad (7.14)$$

D'une façon générale, quand on a une fonction dont les dérivées successives ne se compliquent pas, et quand on peut les calculer toutes, la formule de Mac Laurin donne le développement limité à n'importe quel ordre. Voici quelques exemples qu'il faut bien connaître (on trouvera d'autres développements dans le Formulaire) :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}) \tag{7.15}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{7.16}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{7.17}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{7.18}$$

Contrairement à ce que l'exemple précédent pourrait faire croire, les cas où l'emploi de la formule de Mac Laurin est une méthode efficace restent exceptionnels car plus on dérive, plus les formules des dérivées successives ont tendance à se compliquer, et il est rare qu'on obtienne ainsi une formule générale pour les coefficients du développement.

Exemple 7.5.2.2 Pour $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x-6x^2}$ cela donne :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1 + 24x - 6x^2}{(1 - x - 6x^2)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2(13 + 18x + 216x^2 - 36x^3)}{(1 - x - 6x^2)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6(19 + 312x + 216x^2 + 1728x^4}{(1 - x - 6x^2)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24(97 + 570x + 4680x^2 + 2160x^3 + 12960x^4 - 1296x^5)}{(1 - x - 6x^2)^5}$$

d'où le développement limité à l'ordre 4 :

$$\frac{2-x}{1-x-6x^2} = 2 + x + 13x^2 + 19x^3 + 97x^4 + o(x^4)$$

On observe que la formule de la dérivée se complique de plus en plus au fur et à mesure que son ordre augmente ; la méthode envisagée ne permettra pas de calculer le développement limité à un ordre quelconque.

Sauf pour certaines fonctions de référence, l'intétêt de la formule de Mac Laurin est plus théorique que pratique. Toutefois elle montre que les fonctions continues au voisinage de 0, définies par une formule, ont bien souvent des développements qu'on peut limiter à un ordre arbitraire, ce qui suggère la possibilité d'inventer des développements *illimités* qui seraient les analogues des développements décimaux infinis des nombres réels. Ces développements existent, on les appelle des *développements en série*, mais ils ne seront pas étudiés dans ce cours.

7.5.3 Voici quelques applications de la formule de Mac Laurin.

Théorème 7.5.3.1 Soient n un entier positif ou nul et f une fonction de classe C^n au voisinage de 0. Alors $f'(x)$ admet un développement limité à l'ordre $n-1$ dont la partie polynomiale s'obtient en dérivant la partie polynomiale du développement limité à l'ordre n de $f(x)$. Autrement dit si :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$$

alors :

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Démonstration : Posons $g(x) = f'(x)$. Puisque la dérivée d'ordre k de g est la dérivée d'ordre $(k+1)$ de f, la fonction g admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre $n-1$. On peut donc écrire :

$$g(x) = g(0) + \frac{g^{(1)}(0)}{1!}x + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

mais $\dfrac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} = \dfrac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!} = k\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, ce qui donne le résultat.

Exemple 7.5.3.2 Le développement à l'ordre 7 de $f(x) = \sin x$ est :

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5\,040} + o(x^7)$$

D'après le théorème précédent, sa dérivée admet le développement :

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

et l'on retrouve bien le développement limité à l'ordre 6 de $\cos x$.

Bien évidemment, le théorème 7.5.3.1 est particulièrement appréciable quand on cherche le développement de $f'(x)$ et qu'on connaît déjà celui de $f(x)$, surtout si la formule qui donne $f'(x)$ est compliquée.

Exemple 7.5.3.3 Sachant que :

$$f(x) = \frac{\cos(x\sqrt{1+x^2}) - \sin(x\sqrt{1-x^2})}{\cos(x\sqrt{1-x^2}) + \sin(x\sqrt{1+x^2})} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

il est plus facile d'écrire directement $f'(x) = -2 + 4x - 8x^2 + o(x^2)$ que de calculer la formule pour $f'(x)$ et le développement limité qui lui correspond !

Une autre façon d'employer le théorème 7.5.3.1 conduit au résultat suivant.

Théorème 7.5.3.4 Si $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$, et si l'on sait par ailleurs que f est de classe C^n, alors une primitive quelconque F, de f, admet le développement limité à l'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(0) + \frac{\alpha_0}{1}x + \frac{\alpha_1}{2}x^2 + \frac{\alpha_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Autrement dit, quand les hypothèses d'existence et de continuité des dérivées sont vérifiées, le développement limité de la primitive s'obtient en prenant une primitive de la partie principale du développement limité de la fonction, en ajustant son terme constant, et en augmentant de 1 l'exposant dans le o.

Démonstration : Puisque f est continue, elle a des primitives et, puisque sa dérivée d'ordre n est continue, les dérivées successives d'une primitive de f sont continues jusqu'à l'ordre $n+1$. Alors, si F est une primitive de f, on a :

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

autrement dit :

$$F(x) = F(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

mais en raison de l'unicité du développement limité à un ordre donné :

$$\frac{f^{(k)}(0)}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{k+1}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha_k}{k+1}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé.

Exemple 7.5.3.5 Toutes les dérivés de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sont continues. Il en résulte que la fonction $F(x) = \arctan x$ admet des développements limités à n'importe quel ordre. Nous avons $F(0) = 0$, et comme nous verrons dans l'exemple 7.5.7.2 que :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

on obtient :

$$\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \qquad (7.19)$$

7.5.4 Maintenant, nous allons voir comment on calcule le développement limité d'une *somme* de fonctions à partir de leurs développements limités, et plus généralement d'une combinaison linéaire de fonctions.

Théorème 7.5.4.1 Si $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n, si $g(x)$ admet un développement limité à l'ordre m, alors $f(x) + g(x)$ admet un développement limité à l'ordre p, le plus petit des nombres n et m qui s'obtient par la méthode pratique qui suit.

Méthode pratique : Pour calculer le développement limité d'une somme de fonctions :

1) on tronque le développement limité dont l'ordre est le plus élevé afin de le limiter au même ordre que l'autre ;
2) on écrit l'un au-dessous de l'autre les deux développements en laissant des espaces pour les monômes nuls, puis on ajoute les développements terme à terme.

Exemple 7.5.4.2 Développons $f(x) + g(x)$ avec :

$$f(x) = 2x^{-3} + x - 5x^2 + 7x^5 + o(x^5) \quad \text{et} \quad g(x) = 8x^{-1} + 4x^2 + 9x^3 + o(x^3)$$

1) On limite le développement de $f(x)$ à l'ordre 3, ce qui donne :

$$f(x) = 2x^{-3} + x - 5x^2 + o(x^3)$$

2) On écrit l'un au-dessous de l'autre les deux développements en laissant des espaces pour les monômes nuls, puis on les ajoute, ce qui donne :

$$\begin{array}{cccccc} 2x^{-3} & & +x & -5x^2 & & +o(x^3) \\ & +8x^{-1} & & +4x^2 & +9x^3 & +o(x^3) \\ \hline 2x^{-3} & +8x^{-1} & +x & -x^2 & +9x^3 & +o(x^3) \end{array}$$

Le prochain théorème résulte immédiatement de (7.9).

Théorème 7.5.4.3 Si $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$ et si c désigne une constante quelconque, alors $cf(x) = c\alpha_0 + c\alpha_1 x + c\alpha_2 x^2 + \cdots + c\alpha_n x^n + o(x^n)$.

En associant les théorèmes 7.5.4.1 et 7.5.4.3, on peut calculer le développement limité d'une différence et, plus généralement, d'une combinaison linéaire de fonctions ; on dispose les calculs comme pour les sommes.

Exemple 7.5.4.4 En faisant la différence des deux développements limités $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ on obtient :

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Cet exemple montre en quoi les développements limités améliorent le théorème 7.2.3.1. On avait $\tan x \sim x$ et $\sin x \sim x$, mais cela ne permettait pas d'en déduire le terme principal de $\tan x - \sin x$ autrement qu'en utilisant des astuces. Au contraire, ayant développé $\tan x$ et $\sin x$ à l'ordre 3, on trouve immédiatement que $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$.

Pour parvenir à ce résultat, on a développé $\tan x$ et $\sin x$ jusqu'à ce qu'on trouve un terme non nul dans le développement de $\tan x - \sin x$, mais on ne savait pas au départ qu'il faudrait aller jusqu'à l'ordre 3. C'est une situation fréquente lorsqu'on cherche le terme principal d'une combinaison linéaire de fonctions : on fait les calculs en élevant progressivement l'ordre des développements jusqu'à ce qu'on finisse par trouver un monôme non nul dans le développement.

7.5.5 Passons au développement limité du *produit* de deux fonctions. Plusieurs cas sont à distinguer ; nous commencerons par le plus important. Tous les théorèmes qui suivent résultent du théorème 7.3.2.1.

Théorème 7.5.5.1 Supposons que :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n) \qquad \text{avec} \quad \alpha_0 \neq 0$$
$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots\cdots + \beta_m x^m + o(x^m) \qquad \text{avec} \quad \beta_0 \neq 0$$

Alors $f(x)g(x)$ possède un développement limité à l'ordre p, le plus petit des deux nombres n et m, et ce développement est donné par la méthode pratique qui suit.

Méthode pratique : Pour calculer le développement limité d'un produit de deux fonctions qui ont des termes principaux constants et non nuls, on effectue les opérations suivantes, en disposant les calculs comme on le ferait pour multiplier deux nombres entiers.

1) On tronque le développement limité dont l'ordre est le plus élevé afin de le limiter au même ordre que l'autre, puis on écrit l'un au-dessous de l'autre les deux développements en laissant des espaces pour les monômes nuls.

2) Tour à tour, on multiplie le premier développement par chaque monôme du second, mais en éliminant systématiquement du résultat les monômes dont l'exposant serait strictement plus grand que celui du petit o. Le résultat de chaque nouvelle multiplication est écrit sous les résultats des multiplications précédentes.

3) On ajoute terme à terme les résultats de toutes ces multiplications.

Exemple 7.5.5.2 Multiplication de $f(x) = 2 + x + 5x^2 + x^4 + 17x^6 + o(x^6)$ par $g(x) = 3 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$.

On commence par tronquer le développement de $f(x)$ pour le limiter à l'ordre 3, puis on écrit les deux développements l'un au-dessous de l'autre. Ensuite, on multiplie $f(x)$ par chacun des trois monômes de $g(x)$ en éliminant les monômes de degré strictement supérieur à 3, après quoi on ajoute entre eux les résultats de toutes les multiplications :

$$\begin{array}{ccccc}
2 & +x & +5x^2 & & +o(x^3) \\
3 & & -2x^2 & +x^3 & +o(x^3) \\
\hline
6 & +3x & +15x^2 & & +o(x^3) \\
 & & -4x^2 & -2x^3 & +o(x^3) \\
 & & & 2x^3 & +o(x^3) \\
\hline
6 & +3x & +11x^2 & & +o(x^3)
\end{array}$$

ce qui donne finalement :

$$\left(2+x+5x^2+x^4+17x^6+o(x^6)\right)\left(3-2x^2+x^3+o(x^3)\right)=6+3x+11x^2+o(x^3)$$

Après ce cas particulier, passons à un cas plus général.

Méthode pratique : Pour calculer le développement limité de $f(x)g(x)$ quand :

$$f(x)=\alpha_r x^r+\cdots+\alpha_n x^n+o(x^n)$$
$$g(x)=\beta_s x^s+\cdots+\beta_m x^m+o(x^m)$$

avec $\alpha_r \neq 0$ et $\beta_s \neq 0$, on effectue les opérations suivantes.

1) On met en facteur x^r dans $f(x)$ et x^s dans $g(x)$, et on écrit :

$$f(x)g(x)=x^{r+s}\left(\alpha_r+\cdots+\alpha_n x^{n-r}+o(x^{n-r})\right)\left(\beta_s+\cdots+\beta_m x^{m-s}+o(x^{m-s})\right)$$

2) On calcule $\left(\alpha_r+\cdots+\alpha_n x^{n-r}+o(x^{n-r})\right)\left(\beta_s+\cdots+\beta_m x^{m-s}+o(x^{m-s})\right)$ par la méthode précédente, puis on multiplie le résultat par x^{r+s}, ce qui donne le développement de $f(x)g(x)$ limité à l'ordre p, le plus petit des deux nombres $n+s$ et $m+r$.

Exemple 7.5.5.3 Calculons $u(x)v(x)$ avec :

$$u(x)=2x^{-1}+1+5x+x^3+17x^5+o(x^5)$$
$$v(x)=3x^2-4x^4+x^5+o(x^5)$$

On écrit d'abord :

$$u(x)=x^{-1}\left(2+x+5x^2+x^4+17x^6+o(x^6)\right)$$
$$v(x)=x^2\left(3-2x^2+x^3+o(x^3)\right)$$

ce qui donne :

$$u(x)v(x)=x\left(2+x+5x^2+x^4+17x^6+o(x^6)\right)\left(3-2x^2+x^3+o(x^3)\right)$$

Puisque $u(x)v(x)=xf(x)g(x)$ avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de l'exemple 7.5.5.2, on obtient immédiatement :

$$u(x)v(x)=6x+3x^2+11x^3+o(x^4)$$

Au passage, on constate que le développement obtenu est limitéà l'ordre 4, qui est bien le plus petit des deux nombres $5+2=7$ et $5+(-1)=4$.

Reste à voir comment on calcule le développemment du produit quand un des deux développements a sa partie polynomiale nulle.

Théorème 7.5.5.4 Si $g(x)=o(x^m)$, alors :

$$f(x)g(x)=\begin{cases} o(x^{p+m}) & \text{quand } f(x)=\alpha_p x^p+\cdots+\alpha_n x^n+o(x^n) \text{ avec } \alpha_p\neq 0,\\ o(x^{n+m}) & \text{quand } f(x)=o(x^n).\end{cases}$$

7.5.6 Maintenant, passons au développement limité du *quotient* de deux fonctions. Comme pour le produit, plusieurs cas sont à distinguer : nous commencerons par le cas le plus important.

Théorème 7.5.6.1 Supposons que :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n) \qquad \textit{avec} \quad \alpha_0 \neq 0$$
$$g(x) = 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m + o(x^m)$$

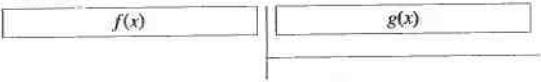
Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ possède un développement limité à l'ordre p, le plus petit des deux nombres n et m, et ce développement est donné par la méthode pratique suivante qu'on appelle ***la division selon les puissances croissantes de*** $f(x)$ ***par*** $g(x)$.

Méthode pratique : Pour calculer le développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand :

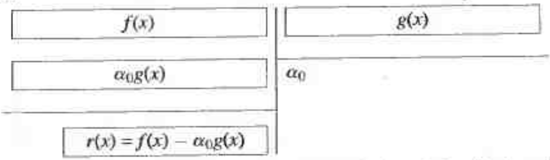
$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n) \quad \text{avec } \alpha_0 \neq 0$$
$$g(x) = 1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m + o(x^m)$$

on effectue les opérations qui suivent :

1) On tronque le développement limité dont l'ordre est le plus élevé afin de le limiter au même ordre que l'autre, puis on dispose les calculs comme on le ferait pour la division de deux nombres entiers.



2) On commence par inscrire α_0 sous la barre horizontale de droite. Ensuite on multiplie $g(x)$ par α_0, et on écrit le résultat à gauche, sous $f(x)$, puis on soustrait ce résultat de $f(x)$. De la sorte, on obtient un développement limité à l'ordre p, qui n'a plus de terme constant, et qu'on appelle provisoirement $r(x)$.



3) Si la partie polynomiale de $r(x)$ est nulle, le calcul est fini, et il n'y a plus qu'à lire la partie polynomiale du développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous la barre de droite.

Si la partie polynomiale de $r(x)$ n'est pas nulle on passe à l'étape 4.

4) On inscrit le terme principal de $r(x)$ sous la barre horizontale de droite, puis on multiplie $g(x)$ par ce terme principal, et on écrit le résultat à gauche, sous $r(x)$, mais en éliminant du résultat tous les monômes dont l'exposant est strictement plus grand que p. Ensuite on soustrait ce résultat de $r(x)$, ce qui donne un nouveau développement limité à l'ordre p qu'on appelle encore $r(x)$, puis on repasse à l'étape 3.

5) Dans le calcul de l'étape 4 le développement $r(x)$ perd au moins un monôme par rapport au précédent $r(x)$. Par conséquent, la répétition des étapes 3 et 4 conduit toujours à un $r(x)$ dont la partie polynomiale est nulle, et le calcul s'arrête.

Exemple 7.5.6.2 Nous allons appliquer cette méthode pour retrouver le développement limité de l'exemple 7.5.2.2. Nous avons $f(x) = 2 - x$ et $g(x) = 1 - x - 6x^2$. Puisque nous voulons un développement limité à l'ordre 4 de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, nous écrirons $f(x) = 2 - x + o(x^4)$ et $g(x) = 1 - x - 6x^2 + o(x^4)$. La division donne :

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
2 & -x & & & & 1 & -x & -6x^2 & & \\
\cline{6-10}
2 & -2x & -12x^2 & & & 2 & +x & +13x^2 & +19x^3 & +97x^4 \\
\cline{1-5}
 & x & +12x^2 & & & & & & & \\
 & x & -x^2 & -6x^3 & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 13x^2 & +6x^3 & & & & & & \\
 & & 13x^2 & -13x^3 & -78x^4 & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & 19x^3 & +78x^4 & & & & & \\
 & & & 19x^3 & -19x^4 & & & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +97x^4 & & & & & \\
 & & & & +97x^4 & & & & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

et on retrouve bien $\dfrac{2 - x}{1 - x - 6x^2} = 2 + x + 13x^2 + 19x^3 + 97x^4 + o(x^4)$. Au passage on pourra constater l'avantage de cette méthode sur celle de l'exemple 7.5.2.2.

Passons maintenant à un cas plus général de la division.

Méthode pratique : Pour calculer le développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_r x^r + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n) && \text{avec } \alpha_r \neq 0 \\
g(x) &= \beta_s x^s + \cdots + \beta_m x^m + o(x^m) && \text{avec } \beta_s \neq 0
\end{aligned}
$$

on effectue les opérations suivantes.

1) On met en facteur x^r dans $f(x)$ et $\beta_s x^s$ dans $g(x)$, ce qui donne :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{r-s}}{\beta_s} \left(\frac{\alpha_r + \alpha_{r+1} x + \cdots + a_n x^{n-r} + o(x^{n-r})}{1 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_m x^{m-s} + o(x^{m-s})} \right)$$

avec $\gamma_k = \dfrac{\beta_{s+k}}{\beta_s}$.

2) Au moyen de la méthode pratique précéente on calcule

$$\frac{\alpha_r + \cdots + \alpha_n x^{n-r} + o(x^{n-r})}{1 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_m x^{m-s} + o(x^{m-s})}$$

et on multiplie le résultat par $\dfrac{x^{r-s}}{\beta_s}$, ce qui donne le développement de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limité à l'ordre p, où p désigne le plus petit des deux nombres $n-s$ et $m+r-2s$.

Exemple 7.5.6.3 Appliquons la méthode au calcul de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec :

$$f(x) = 2x + x^5 - 3x^6 + 7x^9 + o(x^9) \text{ et } g(x) = 8x^{-2} + 4x + 9x^2 + o(x^2)$$

On écrit :

$$f(x) = x\left[2 + x^4 - 3x^5 + 7x^8 + o(x^8)\right]$$

$$g(x) = 8x^{-2}\left[1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{8}x^4 + o(x^4)\right]$$

ce qui donne d'abord :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3}{8}\left(\frac{2 + x^4 - 3x^5 + 7x^8 + o(x^8)}{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{8}x^4 + o(x^4)}\right)$$

puis on fait la division de droite ce qui donne finalement :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^6 - \frac{5}{16}x^7 + o(x^7)$$

On constate que le développement obtenu est à l'ordre 7, qui est bien le plus petit des deux nombres $9-(-2)$ et $2+1-2(-2)$.

Pour en finir avec les quotients, il reste à voir ce qui arrive quand un des développements a sa partie polynomiale nulle.

Théorème 7.5.6.4 Si $f(x) = o(x^n)$, et si $g(x) = \beta_s x^s + \cdots + \beta_m x^m + o(x^m)$, avec $\beta_s \neq 0$, on a seulement le développement limité $\dfrac{f(x)}{g(x)} = o(x^{n-s})$.

Enfin, quand $g(x) = o(x^m)$, on ne sait même pas si le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, car la fonction $g(x)$ pourrait être la constante 0. Sans information sur $g(x)$, il n'est donc pas possible de trouver le développement limité de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: on en est réduit à développer $g(x)$ à un ordre plus élevé, dans l'espoir, peut-être vain, de lui trouver un terme principal.

7.5.7 Maintenant nous allons voir comment on peut calculer le développement d'une *fonction composée*, autrement dit comment calculer le développement de $f\big(g(x)\big)$ à partir de celui de $f(x)$ et de $g(x)$.

Nous partons de $f(x) = \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$ et nous voulons obtenir le développement de $f\big(g(x)\big) = \alpha_r g(x)^r + \cdots + \alpha_n g(x)^n + o(g(x)^n)$. Puisque le développement de $f(x)$ est au voisinage de 0, le problème n'a de sens que si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. On est donc obligé de supposer que le développement de $g(x)$ est de la forme $g(x) = \beta_q x^q + \cdots + \beta_m x^m + o(x^m)$ avec $q > 0$.

Commençons par un cas particulier qui se déduit sans mal du théorème 7.3.2.1.

Théorème 7.5.7.1 Si $f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$, le développement de $f(Cx^m)$, avec $m > 0$ et C une constante non nulle, s'en déduit en remplaçant x par Cx^m dans la partie polynomiale, et x par x^m dans le petit o.

Exemple 7.5.7.2 De (7.16) on déduit :

$$\frac{1}{1 - Cx^m} = 1 + Cx^m + C^2x^{2m} \cdots + C^n x^{nm} + o(x^{nm}) \tag{7.20}$$

En particulier :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{7.21}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \tag{7.22}$$

Le théorème 7.5.7.1 a pour conséquence un résultat pratique qui permet parfois de diminuer le volume des calculs.

Théorème 7.5.7.3 Soit $f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n)$. Alors :
- si $f(-x) = f(x)$, la partie polynomiale de ce développement n'a que des monômes de degré pair ;
- si $f(-x) = -f(x)$, la partie polynomiale de ce développement n'a que des monômes de degré impair.

Démonstration : D'après le théorème 7.5.7.1 :

$$f(-x) = \alpha_p(-1)^p x^p + \alpha_{p+1}(-1)^{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n(-1)^n x^n + o(x^n)$$

Dans ce nouveau développement les monômes de degré pair n'ont pas changé alors que les monômes de degré impair ont changé de signe.

- Si $f(-x) = f(x)$ on développe deux fois la même fonction mais l'unicité du développement limité fait que les coefficients des deux développements sont les mêmes, et cela n'est possible que s'il n'y a pas de monôme de degré impair.
- Si $f(-x) = -f(x)$ les coefficients du développement de $f(-x)$ sont les opposés des coefficients du développement de $f(x)$ (toujours à cause de l'unicité du développement limité), et cela n'est possible que s'il n'y a pas de monôme de degré pair dans le développement de $f(x)$.

Exemple 7.5.7.4 Parce que $\cos(-x) = \cos x$, le développement de $\cos x$ n'a que des monômes de degré pair. Parce que $\sin(-x) = -\sin x$, celui de $\sin x$ n'a que des monômes de degré impair ; de même pour le développement limité de $\tan x$.

Bien sûr, ces résultats ne sont pas nouveaux pour $\sin x$ et $\cos x$, puisqu'on connaît leur développement limité à n'importe quel ordre, mais le renseignement sur le développement de $\tan x$ est plus neuf, car nous ne le connaissons pas à n'importe quel ordre.

Remarque : C'est à cause du théorème 7.5.7.3 qu'une fonction f telle que $f(-x) = f(x)$ s'appelle une fonction ***paire*** et qu'une fonction f telle que $f(-x) = -f(x)$ s'appelle une fonction ***impaire***.

Pour passer au cas général de la composition des fonctions nous devons d'abord compléter le théorème 7.3.2.1.

Théorème 7.5.7.5 (règles de simplification du o − suite) Quels que soient les entiers m et n, on a :

$$o(x^n) \circ x^m = o(x^{nm}) \tag{7.23}$$

$$o(x^n) \circ o(x^m) = o(x^{nm}) \tag{7.24}$$

Démonstration : Commençons par démontrer (7.23). Si $f(x) = o(x^n)$ cela signifie que $f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Alors $f(x^m) = x^{nm}\varepsilon(x^m) = x^{nm}\varepsilon_1(x)$ en posant $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x^m)$ et, puisque $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$, on a bien $f(x^m) = o(x^{nm})$.

Pour démontrer (7.24) considérons $f(x) = o(x^n)$ et $g(x) = o(x^m)$. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$ telles que $f(x) = x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = x^m\varepsilon_2(x)$, ce qui donne

$$f\big(g(x)\big) = g(x)^n\varepsilon_1\big(g(x)\big) = x^{nm}\varepsilon_2(x)^n\varepsilon_1\big(x^m\varepsilon_2(x)\big) = x^{nm}\varepsilon_3(x)$$

en posant $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_2(x)^n\varepsilon_1\big(x^m\varepsilon_2(x)\big)$ et, puisque $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$, on obtient encore $f(x^m) = o(x^{mn})$.

Théorème 7.5.7.6 Supposons que :

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1}x^{p+1} + \cdots + \alpha_n x^n + o(x^n) \tag{7.25}$$

$$g(x) = \alpha_q x^q + \alpha_{q+1}x^{q+1} + \cdots + \alpha_m x^m + o(x^m) \tag{7.26}$$

avec $q > 0$. Alors $f\big(g(x)\big)$ admet un développement obtenu en écrivant d'abord :

$$f\big(g(x)\big) = \alpha_p g(x)^p + \alpha_{p+1}g(x)^{p+1} + \cdots + \alpha_n g(x)^n + o(g(x)^n)$$

puis en développant chaque $g(x)^k$ à l'aide des règles des théorèmes 7.3.2.1 et 7.5.7.5.

Exemple 7.5.7.7 Supposons que $u(x) = 1 + ax^p + o(x^p)$. Alors :

$$\ln\big(u(x)\big) = \ln(1 + ax^p + o(x^p)) = f(g(x))$$

avec $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = ax^p + o(x^p)$. Puisque $f(x) = x + o(x)$, cela donne :

$$f\big(g(x)\big) = g(x) + o(g(x)) = ax^p + o(x^p) + o(ax^p + o(x^p)) = ax^p + o(x^p)$$

et finalement :

$$\ln\big(1 + ax^p + o(x^p)\big) = ax^p + o(x^p) \tag{7.27}$$

Si α est une constante quelconque, on a $u(x)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(u(x)\right)}$, et comme $e^x = 1+x+o(x)$, on obtient $u(x)^\alpha = 1 + \alpha(ax^p + o(x^p)) + o(\alpha(ax^p + o(x^p)))$, ou encore :

$$\big(1 + ax^p + o(x^p)\big)^\alpha = 1 + \alpha a x^p + o(x^p) \tag{7.28}$$

7.5.8 Pour clore ce chapitre nous répondrons enfin à la question de l'exemple 7.1.1.1 en calculant L. On sait que $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, mais pour trouver le terme principal du numérateur, il va falloir faire un développement limité à un ordre qu'on ne connaît pas encore.

Si l'on se contente de l'ordre 1 on a $\sin x = x + o(x)$ et $\tan x = x + o(x)$, d'où $\sin(\tan x) = \tan x + o(\tan x) = x + o(x)$ et $\tan(\sin x) = \sin x + o(\sin x) = x + o(x)$, ce qui donne $\sin(\tan x) - \tan(\sin x) = o(x)$, et on n'a pas encore trouvé le terme principal ; il faut donc aller plus loin...

Puisque le numérateur, $n(x)$, est une fonction impaire, son développement limité àl'ordre 2 n'a pas de terme de degré pair. Il est donc de la forme $ax + o(x^2)$, mais le calcul précédent montre que $a = 0$ sinon $n(x)$ ne pourrait pas être un $o(x)$. Donc $n(x)$ est un $o(x^2)$ et la fraction est égale à $\dfrac{o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2} = o(1)$, ce qui fait que $L = 0$.

> ***Remarque :*** On n'a pas cherché à calculer le terme principal de $n(x)$ pour éviter de se lancer dans un calcul de développement limité qui s'annonçait compliqué. En fait ce n'était pas une mauvaise idée, car il aurait fallu aller jusqu'à l'ordre 7 pour obtenir un monôme non nul ! En effet :
>
> $$\sin(\tan x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1\,008}x^7 + o(x^7)$$
>
> $$\tan(\sin x) = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5\,040}x^7 + o(x^7)$$
>
> et par conséquent $\sin(\tan x) - \tan(\sin x) = -\dfrac{1}{30}x^7 + o(x^7)$.

EXERCICES

7.1. Quels sont les ordres pour lesquels $f(x) = \sqrt{|x|}$ admet un développement limité au voisinage de 0 et dans ce cas, quel est-il ?

7.2. Calculer les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x} \quad ; \quad f_2(x) = \tan x \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{e^x - 1} \ ;$$
$$f_4(x) = \ln \cos x \quad ; \quad f_5(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}} \quad ; \quad f_6(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2x\cos(s) + x^2}}$$

7.3. Sachant qu'il existe des constantes u, v, w telles que $\cos 3x = u\cos x + v\cos^2 x + w\cos$ retrouver ces constantes en développant les deux membres.

7.4. Quels sont les termes principaux des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \arcsin(\sin^2 x) - \operatorname{th} x\ ;$$
$$f_2(x) = 1 - \sqrt{1+x^2} + \log(\cosh x)\ ;$$
$$f_3(x) = 3\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 8.$$

7.5. La lettre u désignant un nombre réel quelconque, on pose $f(x) = \dfrac{e^{ux} - 1}{e^x - 1}$.

1) Calculer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $f(x)$.

2) Lorsque $u = n + 1$, avec n entier, supérieur ou égal à 1, écrire $f(x)$ comme une somme d'exponentielles. En déduire que :

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad 1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{24}$$

7.6. Calculer les développements suivants, limités à l'ordre 4 :

fonction	au voisinage de
$f_1(x) = \ln x$	$+2$
$f_2(x) = \sqrt{5 - x^2}$	$+2$
$f_3(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2}$	$+\infty$
$f_4(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$	$+\infty$
$f_5(x) = \arctan x$	$+1$
$f_6(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$	$+1$

7.7. Quel est le développement limité à l'ordre n de $f(x) = e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$?

7.8. Trouver l'asymptote de la courbe représentative de $f(x) = \dfrac{(x+1)^7+3}{(x^2+5)^3}$ et dire comment la courbe est placée par rapport à cette asymptote.

Chapitre 8

Intégrales

8.1 AIRES

8.1.1 L'idée de mesurer, au moyen d'une aire, l'étendue d'une portion de plan délimitée par une courbe fermée, remonte aux origines des mathématiques, mais à part le cas du rectangle, dont l'aire est, par définition, égale au produit de la longueur par la largeur, le calcul est loin d'être évident et demande beaucoup d'imagination.

Après le rectangle, le triangle est le domaine[1] dont l'aire est la plus facile à calculer.

Théorème 8.1.1.1 L'aire d'un triangle ABC est $\mathcal{A} = \dfrac{BC \times AH}{2}$ où H est le pied de la hauteur issue de A (*figure 8.1*).

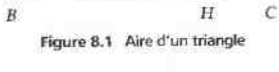


Figure 8.1 Aire d'un triangle

1. Le mot *domaine* signifiera *portion de plan.*

Démonstration : Dans le cas où H est entre A et B, on prend un triangle de mêmes dimensions, que l'on coupe en deux le long de la hauteur, puis on dispose les morceaux autour du triangle initial de façon à former un rectangle dont les côtés ont mêmes mesures que BC et AH (*figure 8.2*).

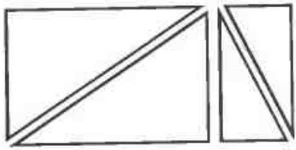


Figure 8.2 Découpage d'un triangle

Quand H n'est pas entre A et B (*figure 8.3*) on procède par différence ; l'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABH, diminuée de l'aire du triangle ACH, ce qui donne $\mathcal{A} = \dfrac{BH \times AH}{2} - \dfrac{CH \times AH}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2}$.

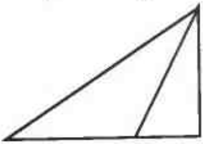


Figure 8.3 Cas d'un angle obtus

8.1.2 Le méthode de découpage qui vient d'être utilisée repose sur deux propriétés.

Propriétés

(P1) *Les aires de deux domaines qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement ou un retournement sont égales.*

(P2) *L'aire du domaine obtenu en collant deux portions de plan le long des courbes qui les délimitent est égale à la somme de leurs aires.*

Ces propriétés permettent de calculer l'aire des polygones (ce sont les domaines qui se découpent en un nombre fini de triangles), mais pour les domaines plus compliqués cela ne suffit plus, et il faut faire appel à une troisième propriété.

Propriété

(P3) *Quand un domaine $\mathcal{D}_1$ est contenu dans un domaine $\mathcal{D}_2$, l'aire de $\mathcal{D}_1$ est inférieure à celle de $\mathcal{D}_2$.*

Cette propriété permet d'avoir une idée de l'aire d'un domaine limité par une courbe fermée Γ : on dessine un polygone $\wp_1$ qui est contenu dans le domaine, et un polygone $\wp_2$ qui le contient (*figure 8.4*) ; les aires de ces polygones, qu'on peut calculer par découpage, fournissent un encadrement de $\mathcal{A}$, l'aire du domaine.

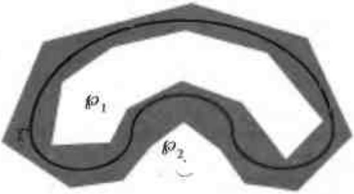
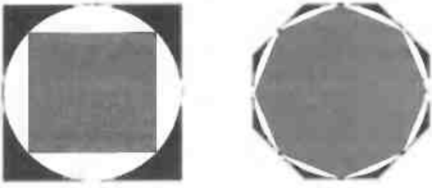


Figure 8.4 Calcul approché de l'aire d'un domaine compliqué

Mais on peut sans doute faire mieux. Quand les polygones $\wp_1$ et $\wp_2$ sont très proches de la courbe Γ, on peut penser que leurs aires sont très voisines, et que l'encadrement est très bon, si bien qu'en passant à la limite, avec des polygones collant de mieux en mieux à la courbe, on pourrait peut-être obtenir la valeur exacte de $\mathcal{A}$. C'est cette méthode de *calcul des aires par approximation* que nous allons essayer de mettre au point.

Exemple 8.1.2.1 Archimède savait que l'aire d'un disque est égale au carré du rayon multiplié par un nombre qui est le même pour tous les disques, et qu'il a appelé π. La *figure 8.5* ***a*** où l'on a encadré le disque de rayon 1 par deux carrés, et la *figure 8.5* ***a***, où il est encadré par deux octogones réguliers, donnent respectivement $2 < \pi < 4$ et $2\sqrt{2} < \pi < 8(\sqrt{2} - 1)$. En continuant à multiplier par 2 le nombre de côtés des polygones réguliers, Archimède à découvert une façon d'obtenir des approximations de plus en plus précises de π.



a b

Figure 8.5 Encadrement d'un disque par des polygones réguliers

8.1.3 Cependant, calculer l'aire d'un polygone en le découpant en triangles n'est pas toujours une opération aisée, surtout quand il s'agit d'un polygone compliqué. C'est pourquoi nous allons nous restreindre à des domaines d'une forme spéciale qui pourront être encadrés par des polygones dont l'aire est particulièrement facile à calculer. Toutefois les résultats que nous obtiendrons permettront, plus tard, de calculer l'aire de domaines d'une forme beaucoup plus générale.

Dans ce qui suit nous étudierons uniquement le problème suivant : *étant donnée une fonction f définie sur le segment $[a; b]$, comment calculer $\mathcal{A}$, l'aire du domaine limité par Γ, la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x = a$, $x = b$ (figure 8.6 **a**)*?

La raison d'un tel choix est simple : pour cette forme de domaine, on peut employer des polygones $\wp_1$ et $\wp_2$ constitués de bandes rectangulaires verticales (*figures 8.6 **b** et 8.6 **c***) et l'aire de ces polygones se calcule simplement, en ajoutant les aires des rectangles verticaux qui les constituent.

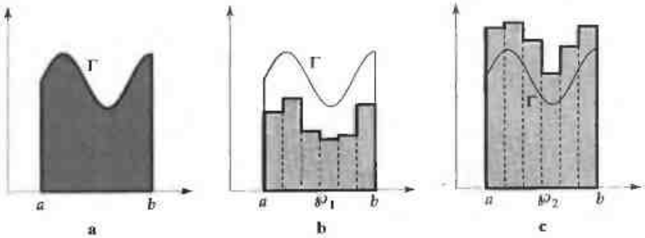


Figure 8.6 La méthode de calcul des aires

Exemple 8.1.3.1 Nous savons déjà que $\mathcal{A}$, l'aire du triangle isocèle limité par la droite d'équation $y = x$, l'axe des abscisses, et la verticale d'équation $x = 1$ (*figure 8.7 **a***) est égale à $\frac{1}{2}$, mais nous allons voir si notre méthode de calcul des aires par approximation redonne ce résultat.

On partage le segment $[0; 1]$ en n parties égales pour dessiner un polygone $\wp_1$ en forme d'escalier, contenu dans le triangle (*figure 8.7 **b***), et un polygone $\wp_2$, lui aussi en forme d'escalier, qui le contient (*figure 8.7 **c***) ; pour obtenir une bonne approximation, on fait arriver ces polygones jusqu'à la droite $y = x$.

Le polygone $\wp_1$ est constitué de n rectangles qui ont tous pour base $\frac{1}{n}$, et dont les hauteurs respectives sont $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$. Son aire, $\mathcal{A}_1$, est donc :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\right)$$

Pour $\wp_2$ il y a encore n rectangles de base $\frac{1}{n}$, mais de hauteurs respectives $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Son aire, $\mathcal{A}_2$, est donc :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right)$$

Parce que :

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \tag{8.1}$$

on peut écrire $\mathcal{A}_1 = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ et $\mathcal{A}_2 = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, d'où l'encadrement :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

On constate bien que les aires des deux polygones se rapprochent de $\frac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini, ce qu'on espérait retrouver.

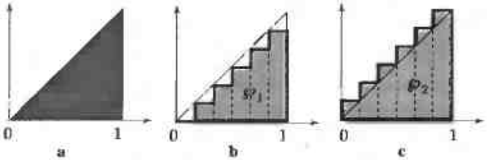


Figure 8.7 Calcul de l'aire du triangle isocèle

Cet exemple donne confiance dans la méthode. Elle permettra non seulement de calculer des aires, si on sait trouver des limites, ce qui n'est pas certain (voir section 9.1), mais aussi de définir précisément la notion d'aire car, jusqu'à présent, nous en étions restés à de vagues intuitions.

8.2 FONCTIONS EN ESCALIER

8.2.1 Maintenant nous allons mettre au point les idées qui ont été dégagées jusqu'ici, en reprenant tout au départ. La lettre f désigne une fonction définie sur le segment $[a; b]$. On veut lui associer un nombre qui représente l'aire du domaine situé entre a et b, sous sa courbe représentative, quand elle est disposée comme sur la *figure 8.6 a*, mais pour l'instant la notion d'aire n'est pas encore définie, et il faut la définir.

Nous allons commencer par traiter le cas de fonctions pour lesquelles la définition ne fait aucun doute. Ce sont celles dont la courbe représentative est constituée de *traits droits horizontaux*, car le domaine situé sous une telle courbe[1] est une juxtaposition de bandes rectangulaires verticales. Commençons par quelques définitions.

Une ***subdivision*** du segment $[a;b]$ consiste en un nombre fini de points $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ tels que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ (l'espacement de ces points n'est pas forcément régulier) ; on note $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$ une telle subdivision.

On dit que s est une ***fonction en escalier*** sur le segment $[a;b]$, s'il existe une subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$ de $[a;b]$ et des constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ telles que $s(x) = C_k$ quand $a_{k-1} < x < a_k$. Concrètement, les fonctions en escaliers sont les fonctions dont la courbe représentative est constituée de *marches* (*figure 8.8*).

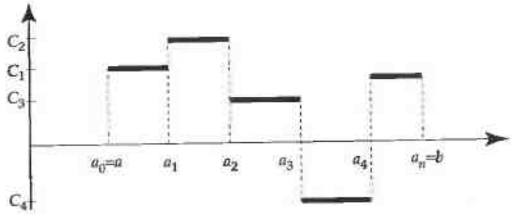


Figure 8.8 Courbe représentative d'une fonction en escalier

Mise en garde : On ne dit pas si les nombres $s(a_k)$ sont définis car cela n'a aucune importance. Tout ce qui compte, c'est la subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$ et les constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$. Dans la suite, nous ferons comme si s n'était pas définie pour les points a_k.

8.2.2 Si les constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ sont positives ou nulles, l'aire du polygone situé sous la courbe représentative de s est :

$$\mathcal{A} = C_1(a_1 - a_0) + C_2(a_2 - a_1) + \cdots + C_n(a_n - a_{n-1}) \tag{8.2}$$

Quand les constantes sont de signe quelconque, le nombre $\mathcal{A}$ calculé ainsi est encore la somme des aires des rectangles verticaux, mais chacune est affectée d'un signe. En effet, $C_k(a_k - a_{k-1})$ est l'aire du $k^{\text{ième}}$ rectangle quand $C_k > 0$, et son opposé quand $C_k < 0$.

La somme qui figure dans le membre de droite de (8.2) s'appelle ***intégrale de f sur le segment*** $[a;b]$, et pour des raisons qui seront expliquées au paragraphe 8.3.2

1. Si l'on peut appeler *courbe* une succession de marches !

on la note $\int_a^b s(x)\, dx$. Donc :

$$\int_a^b s(x)\, dx = C_1(a_1 - a_0) + C_2(a_2 - a_1) + \cdots + C_n(a_n - a_{n-1}) \tag{8.3}$$

Exemple 8.2.2.1 La fonction constante C peut être vue comme une fonction en escalier sur $[a\,;b]$ et on a la formule :

$$\int_a^b C\, dx = C(b-a) \tag{8.4}$$

8.2.3 Il faut tout de suite lever une ambiguïté qui se cache derrière la définition (8.3). Soit f une fonction en escalier. Si on ajoute un nombre fini de points à la subdivision qui la définit, on peut considérer que f est définie au moyen de la nouvelle subdivision, et alors le calcul de l'intégrale sur $[a\,;b]$ n'est plus le même car il y a davantage de termes à ajouter. Le prochain théorème montre que le nouveau calcul donne le même résultat que l'ancien ; il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter de cette situation.

Théorème 8.2.3.1 La valeur de l'intégrale d'une fonction en escalier n'est pas modifiée quand on ajoute, à la subdivision qui définit la fonction, des points placés arbitrairement.

Démonstration : Si on rajoute un seul point c entre a_{k-1} et a_k, là où l'on avait $C_k(a_k - a_{k-1})$ dans la somme (8.3) il y a maintenant $C_k(a_k - c) + C_k(c - a_{k-1})$, ce qui revient au même. Pour ajouter plusieurs points à la subdivision on les ajoute un à un, et à chaque ajout la somme ne change pas.

L'intérêt de ce résultat est que pour calculer l'intégrale d'une fonction en escalier on peut toujours ajouter des points à la subdivision qui la définit. En particulier, quand on a deux fonctions en escalier on peut ajouter, à chacune de leur subdivision, les points qui figurent dans l'autre subdivision et considérer, finalement, que les deux fonctions sont définies par une subdivision commune.

8.3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

8.3.1 Après les fonctions en escalier nous allons passer à des fonctions plus générales. Considérons une fonction f définie sur le segment $[a;b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points.

On dit que f est ***intégrable*** s'il existe un nombre $\mathcal{S}$ vérifiant la propriété suivante : *pour toute fonction en escalier s, telle que $|f(x) - s(x)| \leqslant \varepsilon$ quel que soit x dans*

$[a; b]$, *on a :*

$$\left| \mathcal{S} - \int_a^b s(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon\, |b-a| \tag{8.5}$$

Il est facile de vérifier que ce nombre $\mathcal{S}$, s'il existe, est nécessairement unique ; on l'appelle l'***intégrale de f sur le segment*** $[a; b]$, ou encore l'***intégrale de a à b de f***, et on le note $\int_a^b f(x)\, dx$ (au prochain paragraphe, nous verrons le pourquoi de cette notation). Il y a deux idées à retenir dans la définition (8.5).

• D'abord, quand on ne sait pas si une fonction f est intégrable, on le constate par le fait que les intégrales des fonctions en escalier qui approchent f s'accumulent vers un nombre, qu'on appelle l'intégrale de f.

• Ensuite, supposons que f est intégrable et que s est une fonction en escalier. Quand la différence entre f et s est majorée par ε, la différence entre leurs intégrales est majorée par $\varepsilon\,|b-a|$ et, par conséquent, quand s se rapproche de f, son intégrale se rapproche de celle de f. On peut donc dire que *l'intégrale de f est la limite des intégrales des fonctions en escalier qui l'approchent.*

On démontre le théorème fondamental suivant.

> **Théorème 8.3.1.1** Toute fonction continue, ou continue par morceaux, sur le segment $[a; b]$ est intégrable.

La première idée, pour calculer l'intégrale d'une fonction f, continue, sera donc de trouver des fonctions en escalier qui l'approchent, de calculer leur intégrale, et de trouver la limite de ces intégrales quand elles s'approchent de plus en plus de f. Mais comment peut-on construire des fonctions en escalier qui approchent f de mieux en mieux ? C'est sur la construction de ces fonctions que repose la démonstration du théorème 8.3.1.1, qui est loin d'être évidente.

8.3.2 Le ***pas*** de la subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$ est le plus grand des nombres $|a_k - a_{k-1}|$. Dire qu'il est inférieur à ε signifie que l'écart entre deux points consécutifs ne dépasse pas ε. Il ne peut tendre vers 0 que si le nombre de points augmente, et si les nouveaux points se dispersent bien le long du segment $[a; b]$.

Soit f définie sur $[a; b]$. Choisissons de façon quelconque un point x_k dans chacun des intervalles $\left[a_{k-1}; a_k\right]$, et posons $C_k = f(x_k)$. Avec la subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$, et les constantes C_k, nous pouvons construire une fonction en escalier s, dont la courbe représentative approche plus ou moins bien celle de f (*figure 8.9*).

L'intégrale de s s'appelle la ***somme de Riemann*** associée à la subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$ et aux points $x_1, \ \ldots, \ x_n$; elle est égale à :

$$f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(x_n)(a_n - a_{n-1}) \tag{8.6}$$

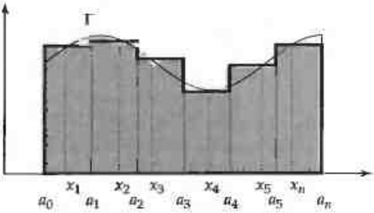


Figure 8.9 Une somme de Riemann

Le théorème suivant est le passage le plus difficile de la démonstration ; c'est de lui qu'on déduit qu'une fonction continue est intégrable.

Théorème 8.3.2.1 Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\eta > 0$, tel que, pour toute fonction en escalier, s, construite comme il vient d'être dit, on a la majoration $|f(x) - s(x)| \leqslant \varepsilon$ quel que soit x dans $[a;b]$, dès que le pas de la subdivision est inférieur à η.

Il résulte, de ce théorème, que si on se donne un nombre ε, il existe un nombre, η, ayant la propriété que toute somme de Riemann dont le pas est inférieur à η approche l'intégrale de f à $\varepsilon(b-a)$ près. On peut donc dire que *l'intégrale de f est la limite des sommes de Riemann quand leur pas tend vers* 0, ou encore que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{pas \to 0} \left[f(x_1)(a_1 - a_0) + \cdots + f(x_n)(a_n - a_{n-1})\right] \tag{8.7}$$

Exemple 8.3.2.2 Dans l'exemple 13.1, nous avons calculé la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, en prenant la limite de deux sommes de Riemann.

Maintenant, nous pouvons expliquer pourquoi on emploie une notation si compliquée pour désigner l'intégrale. Une somme de Riemann est une somme de termes $f(x)\Delta x$, avec x qui prend des valeurs réparties entre a et b. Lorsque le pas de la subdivision devient de plus en plus petit, les accroissements Δx deviennent *infiniment petits*, et on les note dx. L'intégrale est donc, en quelque sorte, une *somme infinie de termes infiniment petits* ! Alors, pour rappeler que c'est une somme, mais pour en marquer le caractère paradoxal, on utilise le symbole $\int$ qui reprend le S de *somme*, et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : *somme de a à b de $f(x)\,dx$*. Le terme $f(x)\,dx$ s'appelle l'***intégrande***, dx est la ***différentielle***, x est la ***variable d'intégration***, a et b sont les ***bornes*** de l'intégrale, a la ***borne inférieure***, et b la ***borne supérieure***.

> ***Remarque :*** Le nom de la variable d'intégration n'a aucune importance, c'est un ***symbole muet***, et on peut le remplacer par n'importe quel symbole qui ne prête pas à confusion. On peut donc écrire $\int_a^b f(t)\,dt$ à la place de $\int_a^b f(x)\,dx$ mais en revanche, il est interdit d'écrire $\int_a^b f(a)\,da$.

8.3.3 Revenons une dernière fois à la notion d'aire. Considérons une fonction f *continue* et *positive* sur $[a;b]$, et une subdivision $[a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_n]$.

Si on calcule une somme de Riemann, σ, en choisissant les x_k de façon que $f(x_k)$ soit toujours le minimum de f sur le segment $[a_{k-1};a_k]$, le polygone qui est associé à σ est au-dessous de la courbe, mais il la touche sur chacun des intervalles $[a_{k-1};a_k]$. De même, si on choisit les x_k de façon que $f(x_k)$ soit toujours le maximum de f sur le segment $[a_{k-1};a_k]$, le polygone associé à cette somme de Riemann, Σ, est au-dessus de la courbe, et il la touche sur chacun des intervalles $[a_{k-1};a_k]$. Les deux nombres σ et Σ, qui encadrent l'intégrale et s'en rapprochent, sont donc les aires de deux polygones situés au-dessous et au-dessus de la courbe, et qui vont venir se plaquer sur elle. C'est pourquoi nous dirons que $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'***aire*** du domaine situé entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Quand la fonction f prend des valeurs négatives, le domaine situé entre la courbe représentative et l'axe des abscisses se partage en deux parties — ce qui est au-dessus de l'axe des abscisses et ce qui est au-dessous (*figure 8.10*) — et l'intégrale de f est égale à la somme des aires des parties situées au-dessus diminuée de la somme des aires des parties qui sont au-dessous.

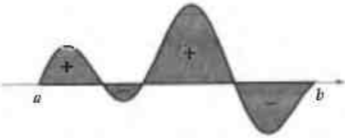


Figure 8.10 L'intégrale d'une fonction de signe quelconque

On aurait pu définir les aires en partant d'une autre idée (par exemple en découpant le domaine située sous la courbe en rectangles horizontaux plutôt que verticaux). Cela conduirait à d'autres définitions de l'aire et des intégrales.

Quand on change de méthode, l'intégrale des fonctions *les plus simples* — les fonctions continues par exemple — est toujours la même, en revanche, d'autres fonctions ont une intégrale ou n'en ont pas, selon les définitions adoptées.

La méthode qui vient d'être présentée et qui consiste à approcher les fonctions par des fonctions en escalier s'appelle l'***intégration de Riemann***. Elle attribue une intégrale aux fonctions continues, aux fonctions continues par morceaux et à d'autres fonctions beaucoup plus difficiles à décrire. Mais il existe des fonctions qui ne s'approchent pas bien par des fonctions en escalier et qui ne sont pas intégrables de cette façon. Des méthodes d'intégration plus puissantes, par exemple celle de *Lebesgue*, permettent d'intégrer beaucoup plus de fonctions.

8.4 PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

8.4.1 Certaines propriétés des intégrales, faciles à démontrer pour les fonctions en escalier, persistent en passant à la limite, et sont donc encore vraies pour les fonctions continues, ou continues par morceaux. Nous allons en énoncer quelques-unes dont la demonstration pourra être faite en exercice.

Commençons par les propriétés qui concernent les bornes.

Théorème 8.4.1.1 (relation de Chasles) Si f est une fonction intégrable sur le segment $[a;b]$, elle est intégrable sur n'importe quel segment plus petit, et si c désigne un point strictement compris entre a et b on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{8.8}$$

La similarité de cette propriété avec celle des vecteurs, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, explique pourquoi on lui a donné le même nom.

La formule (8.8) donne une idée pour définir $\int_a^b f(x)\,dx$ dans le cas où la condition $a < b$ n'est pas réalisée. En effet, si on veut définir une telle intégrale de façon que la relation de Chasles soit toujours vérifiée, on doit forcément avoir :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

ce qui donne d'abord :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{8.9}$$

puis l'égalité $\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$ fait qu'on doit poser :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.10}$$

Nous adopterons ces conventions, mais nous verrons plus tard, avec (9.3), un meilleur argument pour les justifier.

8.4.2 Maintenant, venons-en aux propriétés qui concernent l'intégrande.

Théorème 8.4.2.1 (linéarité de l'intégrale) On a les propriétés suivantes.

- La somme de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable et l'intégrale de la somme est la somme des intégrales :

$$\int_a^b [u(x)+v(x)]\ dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx \tag{8.11}$$

- Un multiple constant d'une fonction intégrable est une fonction intégrable et l'intégrale du multiple est le multiple de l'intégrale :

$$\int_a^b Cu(x)\,dx = C\int_a^b u(x)\,dx \tag{8.12}$$

- Une combinaison linéaire de fonctions intégrables est intégrable et l'intégrale de la combinaison linéaire est la combinaison linéaire des intégrales :

$$\int_a^b [C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+\cdots]\ dx = C_1\int_a^b u_1(x)\,dx + C_2\int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots \tag{8.13}$$

Démonstration : Ces propriétés sont immédiates pour des fonctions en escalier associées à la même subdivision. Elles sont donc vraies pour des fonctions en escalier quelconques, puisqu'on peut toujours supposer qu'elles sont associées à la même subdivision. Enfin, pour des fonctions intégrables quelconques, il suffit de passer à la limite sur les sommes de Riemann.

8.4.3 Voici un autre type de propriétés qui concerne l'intégrande.

Théorème 8.4.3.1 Soient u_1 et u_2 deux fonctions intégrables et deux nombres a et b avec $a < b$.

- Si $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ quel que soit x dans $[a;b]$, on a :

$$\int_a^b u_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b u_2(x)\,dx \tag{8.14}$$

- Si $u_1(x) \leqslant u_2(x)$ quel que soit x dans $[a;b]$, et s'il existe un intervalle ouvert contenu dans $[a;b]$ tel que $u_1(x) < u_2(x)$ quand x est dans cet intervalle, alors :

$$\int_a^b u_1(x)\,dx < \int_a^b u_2(x)\,dx \tag{8.15}$$

Remarque : Il faut faire bien attention à la condition $a < b$ car, à cause de (8.10), les inégalités seraient retournées dans le cas contraire.

Théorème 8.4.3.2 Quand la fonction u est intégrable sur le segment $[a;b]$, il en est de même de $|u|$, et :

$$\left|\int_a^b u(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |u(x)|\,dx \tag{8.16}$$

Concrètement, ce théorème traduit le fait que la somme des aires des parties grises de la *figure 8.10*, qui est l'intégrale de $|u|$, est supérieure à la somme obtenue en comptant avec le signe $-$ les aires des parties qui sont au-dessous de l'axe des abscisses. On utilise souvent ce théorème dans un cas particulier.

Théorème 8.4.3.3 Soient u une fonction intégrable sur le segment $[a;b]$, et M un nombre réel positif tels que $|u(x)| \leqslant M$ quel que soit x dans $[a;b]$. Alors

$$\left|\int_a^b u(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a) \tag{8.17}$$

8.5 INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

8.5.1 Si u est une fonction définie sur un intervalle ouvert, $\mathcal{I}$, intégrable sur tout segment contenu dans $\mathcal{I}$, on peut calculer l'intégrale de u sur des segments de plus en plus grands, contenus dans $\mathcal{I}$, dont les bornes se rapprochent de celles de I. Quand l'intégrale a une limite on dit qu'elle est ***convergente***, sinon on dit qu'elle est ***divergente***. Selon que les bornes de I sont des nombres réels, α ou β, ou bien $+\infty$ ou $-\infty$ on note :

$$\int_\alpha^b u(x)\,dx = \lim_{A\to\alpha^+}\left(\int_A^b u(x)\,dx\right) \qquad \int_a^\beta u(x)\,dx = \lim_{B\to\beta^-}\left(\int_a^B u(x)\,dx\right)$$

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty}\left(\int_a^B u(x)\,dx\right) \qquad \int_{-\infty}^b u(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^b u(x)\,dx\right)$$

$$\int_\alpha^\beta u(x)\,dx = \lim_{A\to\alpha^+}\left(\int_A^c u(x)\,dx\right) + \lim_{B\to\beta^-}\left(\int_c^B u(x)\,dx\right)$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{A\to\alpha^+}\left(\int_A^c u(x)\,dx\right) + \lim_{B\to+\infty}\left(\int_c^B u(x)\,dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\beta} u(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^c u(x)\,dx\right) + \lim_{B\to\beta^-}\left(\int_c^B u(x)\,dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^c u(x)\,dx\right) + \lim_{B\to+\infty}\left(\int_c^B u(x)\,dx\right)$$

Toutes ces intégrales, obtenues par un passage à la limite sur les bornes, s'appellent des ***intégrales généralisées***. Il est facile de vérifier que les résultats des quatre derniers calculs ne dépendent pas du choix de c.

Exemple 8.5.1.1 Dans l'exemple 9.2.1.2 nous démontrerons que :

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a$$

quels que soient a et b, donc :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left(\int_A^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \lim_{A\to-\infty}(-\arctan(A)) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty}\left(\int_0^B \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) = \lim_{B\to+\infty}(\arctan(B)) = \frac{\pi}{2}$$

et finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Remarque : Si α et β sont deux nombres réels et si la fonction u est intégrable sur le segment $[\alpha;\beta]$, il y a un risque de confusion entre l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta u(x)\,dx$, et l'intégrale ordinaire obtenue en intégrant u sur le segment $[\alpha;\beta]$, mais on démontre que ces deux intégrales ont la même valeur, ce qui évite toute ambiguïté.

8.5.2 Les formules de la section 8.4 restent valables pour les intégrales généralisées à condition que toutes les intégrales qui y figurent existent. Nous allons voir des conditions qui assurent l'existence d'une intégrale généralisée, sans chercher à passer en revue toutes les possibilités pour les bornes.

Théorème 8.5.2.1 Si l'intégrale généralisée existe pour la fonction $|u|$, elle existe aussi pour la fonction u.

> ***Mise en garde :*** La réciproque est fausse. Il arrive que l'intégrale généralisée existe pour u et pas pour $|u|$. On peut se rappeler du théorème en pensant : *Qui peut le plus peut le moins !*

Théorème 8.5.2.2 Soit u une fonction intégrable sur tout segment contenu dans l'intervalle $[a; +\infty[$.

- S'il existe un nombre réel $s > 1$ tel que $|u(x)| \leqslant x^{-s}$ au voisinage de $+\infty$, alors
$$\int_a^{+\infty} |u(x)|\ dx \text{ et } \int_a^{+\infty} u(x)\ dx \text{ existent.}$$
- S'il existe un nombre réel $s \leqslant 1$ tel que $x^{-s} \leqslant u(x)$ au voisinage de $+\infty$, alors
$$\int_a^{+\infty} u(x)\ dx = +\infty.$$

Démonstration : Nous verrons au prochain chapitre que
$$\int_c^B x^{-s}\ dx = \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{c^{s-1}} - \frac{1}{B^{s-1}}\right)$$
quand c et B sont des nombres positifs et $s \neq 1$. Fixons c et posons $f(B) = \int_c^B |u(x)|\ dx$; alors, puisque $|u(x)| \leqslant x^{-s}$, nous avons $f(B) \leqslant \int_c^B x^{-s}\ dx$, ce qui donne :
$$f(B) \leqslant \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{c^{s-1}} - \frac{1}{B^{s-1}}\right) \leqslant \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{c^{s-1}}\right)$$
et il en résulte que $f(B)$ est majoré par une constante.

De plus, puisque $f(B+h) = f(B) + \int_B^{B+h} |u(x)|\ dx$, et que cette dernière intégrale est positive, nous voyons que f est une fonction croissante. Par conséquent $f(B)$ a une limite quand B tend vers $+\infty$.

Pour la deuxième propriété posons $f(B) = \int\limits_c^B u(x)\,dx$. Quand $s > 1$ on a :

$$\frac{1}{1-s}\left(B^{1-s} - \frac{1}{c^{s-1}}\right) = \int\limits_c^B x^{-s}\,dx \leqslant f(B)$$

et $f(B)$ tend vers $+\infty$ quand B tend vers $+\infty$.

Quand $s = 1$, on refait le même calcul avec la formule $\int\limits_c^B x^{-1}\,dx = \ln(B) - \ln(c)$ qui sera démontrée au prochain chapitre.

Théorème 8.5.2.3 Soit u une fonction définie sur un intervalle $]0; c]$, intégrable sur tout segment contenu dans cet intervalle.

- S'il existe un nombre réel $s < 1$ tel que $|u(x)| \leqslant x^{-s}$ sur un intervalle $]0; c]$,

$$\text{alors } \int\limits_0^c |u(x)|\,dx \text{ et } \int\limits_0^c u(x)\,dx \text{ existent.}$$

- S'il existe un nombre réel $s \geqslant 1$ tel que $x^{-s} \leqslant u(x)$ sur un intervalle $]0; c]$, alors

$$\int\limits_0^c u(x)\,dx = +\infty.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

8.6 VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION

8.6.1 Le calcul des aires n'est pas le seul problème qui se résout par un calcul d'intégrale, il y en a bien d'autres.

Exemple 8.6.1.1 Supposons parfaitement connue $v(t)$, la vitesse instantanée d'un mobile au temps t (les temps sont mesurés en heures et les vitesses en km/h), et notons $f(t)$ la distance parcourue par ce mobile au temps t. Pour calculer $f(b) - f(a)$, la distance parcourue entre les temps $t = a$ et $t = b$, on découpe l'intervalle $[a; b]$ en courtes périodes de temps, de $t_0 = a$ à t_1, puis de t_1 à t_2, etc., et enfin de t_{n-1} à $t_n = b$. Pendant la période qui va de t_{i-1} à t_i la vitesse du mobile n'a pas beaucoup le temps de changer, elle reste donc à peu près égale à $v(\theta_i)$ où θ_i désigne un instant quelconque entre t_{i-1} et t_i, donc la distance parcourue pendant cette période est à peu près $v(\theta_i)(t_{i-1} - t_i)$. Ce raisonnement donne une distance totale parcourue à peu près égale à :

$$v(\theta_1)(t_1 - t_0) + v(\theta_2)(t_2 - t_1) + \cdots + v(\theta_n)(t_n - t_{n-1})$$

qui n'est autre que la somme de Riemann associée à la subdivision $[t_0;\ t_1;\ \ldots;\ t_n]$ et aux points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Bien sûr ce résultat n'est pas tout à fait exact car la vitesse a quand même le temps de varier dans l'intervalle $[t_{i-1}; t_i]$, mais plus ces intervalles sont courts, plus le résultat du calcul s'approche de la bonne distance, et puisque les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale de $v(t)$ sur $[a; b]$, quand le pas de leur subdivision tend vers 0, on trouve que la distance parcourue est $f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)\, dt$. On peut aussi remarquer que la vitesse moyenne pour la durée du trajet est $\frac{1}{b-a} \int_a^b v(t)\, dt$.

Cet exemple est le type même de problème qu'on résout en calculant une intégrale : deux grandeurs x et y étant liées (ici c'était le temps et la distance parcourue), on demande de calculer l'accroissement de y quand x passe de la valeur a à la valeur b.

Pour résoudre ce genre de problème, on découpe d'abord l'intervalle $[a; b]$ en petits intervalles, si courts que sur chacun d'eux y varie *presque de façon uniforme* par rapport à x, ce qui permet de faire un calcul approché de l'accroissement de y sur chaque petit intervalle, en faisant comme si la variation était réellement uniforme. La somme de tous ces petits accroissements approchés, qui prend l'allure d'une *somme de Riemann*, donne une valeur approchée de l'accroissement total de y. Ensuite il n'y a plus qu'à faire tendre la longueur des petits intervalles vers 0 pour obtenir, à la limite, la valeur exacte de l'accroissement, ce qui revient à remplacer les sommes de Riemann par l'intégrale qui est leur limite.

8.6.2 Lorsqu'on a n nombres, $C_1, C_2, \cdots, C_n$, leur *moyenne* $\mu = \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$ est la valeur qu'ils prendraient s'ils devenaient égaux, tout en gardant la même somme.

Par analogie, la ***valeur moyenne*** d'une fonction f sur le segment $[a; b]$ est la valeur, μ, qu'aurait cette fonction si elle devenait constante, tout en gardant la même intégrale sur $[a; b]$. Dans le cas où la fonction représente la vitesse instantanée d'un mobile au temps t, le nombre μ est la vitesse moyenne du mobile entre les temps a et b.

La définition de la moyenne se traduit par $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \mu\, dx = \mu(b-a)$ et on a donc :

$$\mu = \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b f(x)\, dx \tag{8.18}$$

Exemple 8.6.2.1 Puisque $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ la valeur moyenne de x entre 0 et 1 est $\frac{1}{2}$, ce qui correspond bien à l'idée intuitive de la moyenne.

Remarque : Quand la fonction f est positive, sa moyenne, μ, est la hauteur qu'il faut donner à un rectangle construit sur $[a; b]$, pour qu'il ait la même aire que le domaine située sous Γ, la courbe représentative de f. Sur la *figure 8.11* le rectangle a la même aire que le domaine gris.

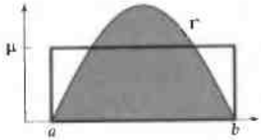


Figure 8.11 Moyenne d'une fonction

8.6.3 Supposons maintenant que f est une fonction continue sur le segment $[a; b]$; on note M son maximum absolu, et m son minimum absolu.

Théorème 8.6.3.1 Il existe un nombre c dans $[a; b]$ tel que :

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f(x)\,dx \tag{8.19}$$

Démonstration : Puisque $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout x de $[a; b]$ le théorème 8.4.3.1 dit que :

$$\int_a^b m\ \,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\ \,dx$$

ce qui donne l'encadrement :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

d'où l'on déduit que :

$$m\ \leqslant \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Cela montre que la valeur moyenne de f sur le segment $[a; b]$ est comprise entre le minimum et le maximum de f, et, puisque f est continue, c'est une valeur prise par la fonction.

8.7 PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE

8.7.1 A présent, nous allons voir pourquoi le calcul d'une intégrale peut être qualifié d'***antidérivation***. Le théorème qui suit a une importance considérable et nous verrons au prochain chapitre comment il permet de calculer les intégrales de certaines fonctions définies par des formules.

Théorème 8.7.1.1 Une fonction f, continue sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ admet toujours des primitives. et la fonction F définie[1] sur $\mathcal{I}$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{8.20}$$

est la seule primitive de f qui s'annule au point a. Toute autre primitive, Φ, de f, est donnée par :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \Phi(a) \tag{8.21}$$

En particulier, si u est de classe C^1 on a :

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt + u(a) \tag{8.22}$$

Démonstration : Si F est la fonction définie par (8.20), nous avons :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right)$$

On reconnaît dans le membre de droite la moyenne de f entre x et $x+h$. Comme f est continue, il existe c compris entre x et $x+h$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Quand h tend vers 0, avec x fixé, le nombre c tend vers x, parce qu'il est compris entre x et $x+h$, et alors $f(c)$ tend vers $f(x)$ parce que la fonction f est continue ; on a donc $F'(x) = f(x)$. Il en résulte que F est une primitive de f qui s'annule au point a, et l'on sait déjà que f n'a qu'une seule primitive vérifiant cette propriété.

1. Nous utilisons t comme variable d'intégration parce que x est déjà utilisé dans les bornes, mais nous pourrions prendre n'importe quel autre symbole qui ne prête pas à confusion.

Le théorème 8.7.1.1 appelle quelques commentaires. Si l'on ne fait pas d'hypothèses sur les fonctions, l'intégration et la dérivation sont des opérations qui vont en sens inverse[1] : quand on dérive après avoir intégré on retrouve la fonction de départ, de même qu'on la retrouve (à une constante près) en intégrant sa dérivée.

Cependant, alors qu'il est toujours possible d'intégrer une fonction continue, il n'est pas toujours possible de la dériver. De plus, la dérivée d'une fonction de classe C^n n'est que de classe C^{n-1}, alors que ses primitives sont de classe C^{n+1}. L'intégration améliore la qualité des fonctions en gommant leurs irrégularités, tandis que la dérivation les accentue. La comparaison des *figures 3.3* et *3.4*, où l'on voit les courbes représentatives de deux fonctions et de leurs dérivées, illustre bien cette idée.

8.7.2 Pour chaque valeur de a, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

C'est pourquoi on emploie la notation $\int f(x)\,dx$ pour désigner une primitive quelconque de f. Une telle intégrale, dont on n'a pas précisé les bornes, s'appelle une ***intégrale indéfinie***. En réaction, une intégrale du type $\int_a^b f(t)\,dt$, dont les bornes sont connues, s'appelle une ***intégrale définie***. Retenons qu'une *intégrale définie est un nombre*, et qu'une *intégrale indéfinie est une fonction connue à une constante près*.

Trouver $\int f(x)\,dx$ à partir de $f(x)$, c'est ***intégrer*** f. Concrètement, cela revient à chercher, par n'importe quel moyen, une primitive Φ de f, ce qui permet d'écrire $\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$ avec la lettre C qui représente un nombre réel quelconque, et qu'on appelle la ***constante d'intégration***.

Exemple 8.7.2.1 Parce que $\dfrac{x^{s+1}}{s+1}$ est une primitive de x^s, quand $s \neq -1$, on écrit :

$$\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} + C$$

Remarque : Puisque les bornes ne sont pas précisées dans une intégrale indéfinie, on peut donner n'importe quel nom à la variable d'intégration, et souvent, comme dans la formule $\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C$, on lui donne le nom de la variable qu'on est en train d'utiliser.

1. C'est pour cela que la primitive s'appelle parfois, notament en anglais, l'*antidérivée*.

EXERCICES

8.1. 1) Que vaut $\mathcal{A}_n$, l'aire d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 ? Retrouver que la limite de l'aire de ce polygone, quand n tend vers l'infini, est égale à l'aire du cercle circonscrit.

2) Que vaut $\mathcal{P}_n$, le périmètre du polygone ?

3) Comment sont liés $\mathcal{A}_{2n}$ et $\mathcal{P}_n$?

Retrouver que le périmètre d'un cercle de rayon 1 est le double de son aire.

8.2. On note f la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$, la partie entière de x. Dessiner la courbe représentative de $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

8.3. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1) Si f est *impaire*, démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ quel que soit a.

2) Si f est *paire*, démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ quel que soit a.

8.4. Exprimer au moyen d'une intégrale, les limites, quand n tend vers $+\infty$, des suites :

$$a_n = \left(\ln\frac{1}{n+1} + \ln\frac{1}{n+2} + \cdots + \ln\frac{1}{n+n}\right)\frac{1}{n} + \ln n$$

$$b_n = \frac{1}{n^3}\left(1^2\sin\frac{\pi}{n} + 2^2\sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + (n-1)^2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$c_n = \sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}}$$

8.5. On se donne 4 nombres a, b, c, d tels que $a < b < c < d$ et une fonction f intégrable sur $[a;d]$. Trouver la valeur de :

$$\int_a^b f(t)\,dt\int_c^d f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt\int_d^b f(t)\,dt + \int_a^d f(t)\,dt\int_b^c f(t)\,dt$$

8.6. Soit f une fonction continue, positive, sur le segment $[a; b]$. Démontrer que $\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$ si f n'est pas la constante 0.

8.7. Les lettres P et Q désignent deux polynômes, et a est n'importe quel nombre réel tel que $Q(x) \neq 0$ quand $x \geqslant a$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_a^\infty \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$ existe.

8.8. On définit une fonction f sur $[0; +\infty[$ de la façon suivante (la lettre n désigne un entier non nul quelconque).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quand } 0 < x < 1 \\ n & \text{quand } n < x < n + \dfrac{1}{n2^n}, \\ 0 & \text{quand } n + \dfrac{1}{n2^n} < x < n + 1. \end{cases}$$

1) Dessiner la courbe représentative de $f(x)$.

2) On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Démontrer que $F(x)$ est une fonction croissante majorée, puis calculer $\int_0^\infty f(t)\,dt$.

3) Si u est une fonction définie sur $[a; +\infty[$, la condition $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour que l'intégrale $\int_a^\infty u(t)\,dt$ existe ?

Chapitre 9

Calcul des intégrales

9.1 CALCUL NUMÉRIQUE ET CALCUL FORMEL

9.1.1 Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au calcul des intégrales, mais il faut d'abord préciser ce qu'on veut dire par *calcul* car ce mot peut être compris de plusieurs façons.

Un encadrement suffisamment précis d'une intégrale, au moyen de sommes de Riemann, permet d'obtenir ses premières décimales : c'est le ***calcul numérique*** de l'intégrale.

Exemple 9.1.1.1 Calculons $\mathcal{A}$, l'aire du triangle curviligne (*figure 9.1a*) limité par l'arc de sinusoïde d'équation $y = \sin x$, l'axe des abscisses, et la droite verticale d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$, en l'encadrant par deux sommes de Riemann s et S obtenues en découpant le segment $[0; \dfrac{\pi}{2}]$ en n parties égales (*figures 9.1b* et *9.1c*).

Parce que la fonction f est strictement croissante, on a $s \leqslant \mathcal{A} \leqslant S$ avec :

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2n} f\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{0}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} f\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n}\right)\right]$$

Lorsque $n = 1\,000$ cela donne l'encadrement $0,999\,2\ldots \leqslant \mathcal{A} \leqslant 1,000\,7\ldots$ et en augmentant n, on obtiendrait des valeurs encore plus précises de $\mathcal{A}$.

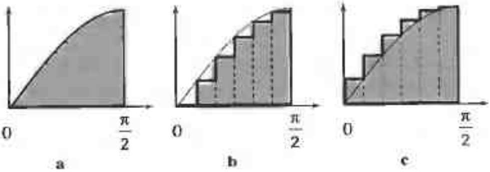


Figure 9.1 Aire d'un arc de sinusoïde

L'***Analyse numérique***, avec ses méthodes très élaborées, permet d'accélérer le calcul approché des intégrales définies. Mais cela ne suffit pas car on a parfois besoin d'une expression qui relie la valeur de l'intégrale à des nombres particuliers. Dans ce cas, le mot *calcul* doit être compris dans un autre sens : l'intégrale doit apparaître comme une valeur d'une certaine fonction définie par une formule ; c'est le ***calcul formel*** de l'intégrale.

Exemple 9.1.1.2 On peut prolonger le calcul de l'exemple précédent en transformant s et S grâce à la formule :

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin p\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2p+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \tag{9.1}$$

ce qui donne :

$$s = \frac{\pi}{4n}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right) \qquad \text{et} \qquad S = \frac{\pi}{4n}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\right)$$

On en déduit l'encadrement :

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n}}{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}\right)} \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{\cos\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{\pi}{4n}}{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}\right)}$$

Quand n tend vers l'infini, les dénominateurs tendent vers 1, pendant que $\sin\frac{\pi}{4n}$ tend vers 0, et que $\cos\frac{\pi}{4n}$ tend vers 1. Les deux membres extrêmes de cette inégalité ayant la même limite, le théorème de la pince nous dit que $\mathcal{A} = 1$. Nous avons donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

Dorénavant l'expression ***calcul intégral*** signifiera *calcul formel* des intégrales.

9.1.2 Si on a réussi à calculer les intégrales des exemples 8.1.3.1 et 9.1.1.2, c'est grâce aux formules (8.1) et (9.1), qui ont permis de mettre en évidence la limite des sommes de Riemann. Toutefois, cela reste une situation exceptionnelle et, même pour les fonctions les plus simples, il est bien rare d'avoir cette possibilité.

Exemple 9.1.2.1 Inspirons-nous de l'exemple 9.1.1.1 pour calculer $\mathcal{A}$, l'aire du domaine situé entre la courbe représentative de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (*figure 9.2*).

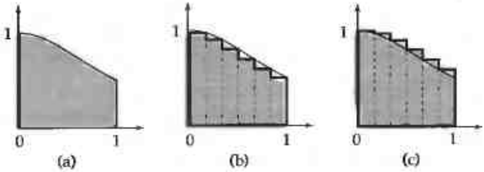


Figure 9.2 Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Cette fois la fonction f est décroissante et les deux sommes de Riemann s et S sont :

$$s = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n^2+0^2} + \frac{1}{n^2+1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right)$$

Malheureusement, on ne sait pas transformer ces expressions pour mettre en évidence leur limite comme on l'avait fait dans les exemples précédents. On est bloqué et la seule chose que l'on puisse dire, pour l'instant, c'est :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

9.2 PRIMITIVES ET INTÉGRALES

9.2.1 Dans l'exemple précédent, ce ne sont pas les sommes de Riemann qui permettent de trouver la valeur de l'intégrale, mais l'intégrale qui permet de trouver la limite des sommes de Riemann ! C'est la situation générale car il est très rare qu'on parvienne à calculer directement la limite des sommes de Riemann. Il faut donc chercher ailleurs le *calcul formel* des intégrales. La solution va venir du théorème 8.7.1.1.

Soit Φ une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et soient a et b deux nombres de $\mathcal{I}$. Le nombre $\Phi(b) - \Phi(a)$ s'appelle la ***variation de*** Φ entre a et b : on le note :

$$[\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9.2}$$

Le nom de la variable n'a aucune importance, elle est *muette* ; ici c'est t mais cela aurait pu être n'importe quel autre symbole qui ne prête pas à confusion.

En remplaçant x par b dans la formule (8.27) on obtient le résultat suivant.

Théorème 9.2.1.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$. Alors quelle que soit la primitive Φ, de f, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [\Phi(t)]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9.3}$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale d'une fonction dès lors qu'on connaît une de ses primitives.

Exemple 9.2.1.2 La dérivée de $\arctan x$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$ et par conséquent :

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a \tag{9.4}$$

et en reprenant l'exemple 9.1.2.1 on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

9.2.2 Avec le théorème précédent on se dit qu'on peut faire des calculs formels d'intégrales pour toutes les fonctions définies au moyen d'une formule, mais il faut vite déchanter !

Alors que la dérivée d'une fonction définie au moyen d'une formule est elle-même définie au moyen d'une formule, les primitives des fonctions définies au moyen d'une formule n'ont pas toujours de formule, et quand elles en ont, il n'est pas toujours facile de les trouver.

La *figure 9.3* représente trois ensembles emboîtés, qu'il faudrait compléter par une infinité d'autres ensembles :
- vers l'intérieur : les dérivées des dérivées des fonctions définies au moyen d'une formule, etc. ;
- vers l'extérieur : les primitives des primitives des fonctions définies au moyen d'une formule, etc.

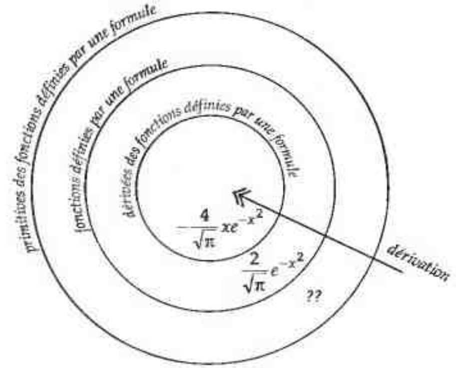


Figure 9.3 Les fonctions définies par une formule

Tous ces ensembles sont distincts. Quand on dérive, on passe d'un ensemble à celui qui est juste en dessous, quand on intègre on passe à celui qui est juste au-dessus.

Il arrive qu'une primitive d'une fonction définie au moyen d'une formule soit extrêmement utile, bien que cette primitive n'ait pas de formule (c'est ce qui est arrivé quand on a découvert le logarithme). Alors on donne un nom à cette fonction, on la représente par un symbole, et on la range parmi les fonctions de référence. Puisque sa dérivée est de classe C^∞, elle-même est de classe C^∞, et toutes les nouvelles fonctions définissables par des formules qui l'emploient seront aussi de classe C^∞.

Exemple 9.2.2.1 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ est une fonction de classe C^∞ dont les primitives ne sont pas exprimables au moyen d'une formule. Alors, parce qu'on en a besoin en *statistiques* et dans le *calcul des probabilités*, on donne un nom à sa primitive qui s'annule quand $x = 0$; on l'appelle la ***fonction***

d'erreur, et on la note **erf**. Cela permet de représenter de nouvelles fonctions, utiles elles aussi, au moyen d'une formule, par exemple $1 - \operatorname{erf}(x)$.

9.2.3 Il n'existe pas de procédé simple permettant de savoir si les primitives d'une fonction définie par une formule sont, elles aussi, définies par une formule et, quand on sait qu'elles le sont, il n'est pas toujours facile de trouver les formules qui les définissent.

Faute de mieux, puisqu'on n'a pas de mal à calculer la formule des dérivées, on constitue des listes où apparaissent côte à côte des fonctions et leurs dérivées. Quand on doit intégrer une fonction, on regarde si elle figure parmi la liste les dérivées, auquel cas la fonction qui est placée à côté d'elle est une de ses primitives.

Exemple 9.2.3.1 On calcule la dérivée de $\arctan(\operatorname{th} x)$ et on trouve $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$; cette information est mise dans la liste. Si un jour on a besoin d'une primitive de $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$, on saura en consultant la liste que :

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}\, dx = \arctan(\operatorname{th} x) + C$$

Bien évidemment, cette méthode a vite fait d'atteindre ses limites, car on ne peut pas dériver *toutes* les fonctions définies par des formules !

Des listes impressionnantes ont été publiées depuis longtemps[1], et de nos jours certains logiciels de *calcul formel*[2] largement diffusés sont capables de retrouver à peu près tous les résultats accumulés dans ces listes. On peut donc considérer que les formules des primitives les plus utiles peuvent toujours être lues à un endroit où un autre ! On trouvera dans le Formulaire une courte liste constituée des primitives qu'il serait bon de connaître par cœur.

Deux techniques, l'*intégration par partie* et le *changement de variable*, associées à la consultation des listes permettent d'augmenter considérablement le nombre de fonctions dont on saura représenter les primitives par des formules. Nous verrons en quoi elles consistent dans les deux prochaines sections.

9.3 INTÉGRATION PAR PARTIE

9.3.1 Comme son nom le suggère, l'***intégration par partie*** consiste à n'intégrer qu'une partie seulement de la fonction.

1. Par exemple, *Gradshteyn, Ryzhik* Tables of Integrals, Series, and Products, Academic press.
2. Par exemple : *Mathematica, Maple.*

Théorème 9.3.1.1 (formule d'intégration par partie) Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $\mathcal{I}$. Alors, si V est une primitive quelconque de v, et si u est de classe C^1, on a :

$$\int u(x)\, v(x)\ dx = u(x)\, V(x) - \int u'(x)\, V(x)\ dx \tag{9.5}$$

$$\int_a^b u(t)\, v(t)\ dt = [u(t)\, V(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, V(t)\ dt \tag{9.6}$$

Démonstration : Nous avons $[u(x)\, V(x)]' = u(x)\, v(x) + u'(x)\, V(x)$ et, par conséquent, une primitive de $u(x)\, v(x)$ est égale à une primitive de $[u(x)\, V(x)]'$ diminuée d'une primitive de $u'(x)\, V(x)$, ce qui donne bien (9.5). La seconde formule s'en déduit en utilisant (9.3).

Exemple 9.3.1.2 Pour chercher les primitives de $f(x) = x\cos x$, nous pouvons poser $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$. Alors $u'(x) = 1$, $V(x) = \sin x$ et la formule d'intégration par partie donne :

$$\int x\ \cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx$$

après quoi il est facile de continuer l'intégration et on trouve finalement :

$$\int x\ \cos x\ dx = x\sin x + \cos x + C$$

Pour qu'une intégration par partie serve à quelque chose, il faut savoir intégrer $u'(x)\ V(x)$. Toute l'astuce consiste donc à bien choisir qui est u et qui est v lorsqu'on écrit la fonction à intégrer sous la forme $u(x)v(x)$.

Exemple 9.3.1.3 Pour calculer $\int x\ \cos x\ dx$, nous aurions pu décider de poser $u(x) = \cos x$ et $v(x) = x$, mais cela aurait donné :

$$\int x\ \cos x\ dx = \frac{x^2}{2}\ \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x\ dx$$

qui nous éloigne de la solution…

On peut toujours essayer de faire une intégration par parties en décidant que v est la constante 1, mais c'est rarement intéressant. Cependant, il existe un exemple classique où ce choix est judicieux.

Exemple 9.3.1.4 Pour calculer $\int \ln x\ dx$, on décide de poser $u(x) = \ln x$ et $v(x) = 1$, ce qui donne $u'(x) = \frac{1}{x}$, $V(x) = x$ et :

$$\int \ln x\ dx = x\ln x - \int \left(\frac{1}{x}\right) x\ dx = x\ln x - \int dx$$

d'où la primitive du logarithme :

$$\int \ln x \ dx = x \ln x - x + C \tag{9.7}$$

9.3.2 Un cas bien adapté à la méthode d'intégration par partie est celui où $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec P un polynôme, et α une constante non nulle.

Méthode pratique :

Pour intégrer une fonction de la forme $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$:

On pose $u(x) = P(x)$ et $v(x) = e^{\alpha x}$, ce qui donne :

$$\int e^{\alpha x}P(x)\, dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}P(x) - \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}P'(x)\, dx$$

Ensuite on recommence la même opération avec $P'(x)$ à la place de $P(x)$ et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on obtienne le polynôme nul.

Exemple 9.3.2.1 Pour calculer $\int e^x(x^2 - x + 1)\ dx$ par cette méthode, on pose $u(x) = x^2 - x + 1$ et $v(x) = e^x$, ce qui donne :

$$\int e^x(x^2 - x + 1)\ dx = e^x(x^2 - x + 1) - \int e^x(2x - 1)\ dx$$

puis on recommence avec $\int e^x(2x - 1)\ dx$. Cette fois $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^x$, ce qui donne $\int e^x(2x - 1)\ dx = e^x(2x - 1) - \int 2e^x\ dx$ et, puisque $\int 2e^x\ dx = 2e^x + C$, on a finalement :

$$\int e^x(x^2 - x + 1)\ dx = e^x(x^2 - 3x + 4) + C$$

9.4 CHANGEMENT DE VARIABLE

9.4.1 La deuxième technique d'intégration s'appelle le ***changement de variable***.

Théorème 9.4.1.1 (formule de changement de variable) Soient u une fonction de classe C^1 sur un segment $[a; b]$ et f une fonction continue telle que $f(u(t))$ soit défini quand t parcourt $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(s)\, ds \tag{9.8}$$

Démonstration : Notons F une primitive quelconque de f. Alors la fonction composée $F(u(t))$ est dérivable et sa dérivée est $F'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t)$. Par conséquent :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_a^b F'(u(t))u'(t)\,dt = [F(u(t))]_a^b = F(u(b)) - F(u(a))$$

mais, comme :

$$F(u(b)) - F(u(a)) = [F(s)]_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(s)\,ds$$

on obtient bien le résultat annoncé.

Méthode pratique :

Pour changer de variable :

1) on repère qui est $u(t)$ et on écrit l'intégrale sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt$;

2) on remplace $u(t)$ par s (le nom de la nouvelle variable n'a pas d'importance, il faut seulement qu'il ne soit pas déjà utilisé) ;

3) on remplace $u'(t)\,dt$ par ds ;

4) on remplace a et b par $u(a)$ et $u(b)$;

5) enfin, on calcule $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(s)\,ds.$

Exemple 9.4.1.2 Pour calculer $\displaystyle\int_0^m t\cos(t^2)\,dt$ on pose $u(t) = t^2$ et $f(x) = \cos x$, ce qui donne :

$$\int_0^m t\cos(t^2)\,dt = \int_0^m \frac{\cos(u(t))u'(t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{m^2} \cos s\,ds = \frac{\sin(m^2)}{2} + C$$

9.4.2 En pratique on utilise souvent la formule (9.8) pour passer du membre de droite à celui de gauche. Dans ce sens, l'énoncé est le suivant.

Théorème 9.4.2.1 Soit f une fonction continue sur le segment $[\alpha;\beta]$. Si u est une fonction strictement monotone de classe C^1 sur le segment $[a;b]$, telle que $u(a) = \alpha$ et $u(b) = \beta$, alors :

$$\int_\alpha^\beta f(s)\,ds = \int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,dt \tag{9.9}$$

Méthode pratique :

Pour changer de variable dans $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\, ds$:

1) on détermine deux nombres a et b, ainsi que u, une fonction strictement monotone de classe C^1 sur le segment $[a; b]$ telle que $u(a) = \alpha$ et $u(b) = \beta$;

2) on remplace s par $u(t)$ (le nom de la nouvelle variable n'a pas d'importance, il faut seulement qu'il ne soit pas déjà utilisé pour désigner autre chose) ;

3) on remplace ds par $u'(t)\, dt$;

4) on remplace α par a et β par b ;

5) enfin, on calcule $\displaystyle\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\; dt$.

Exemple 9.4.2.2 Soit ω un nombre réel strictement positif, nous allons calculer $\displaystyle\int_{\omega}^{\omega^2} \frac{1}{s \ln s}\, ds$ en faisant un changement de variable.

Nous posons $a = \ln \omega$, $b = 2 \ln \omega$, $u(t) = e^t$. La fonction u est strictement croissante sur $[\ln \omega; 2 \ln \omega]$, avec $u(\ln \omega) = \omega$ et $u(2 \ln \omega) = \omega^2$.

Alors, en posant $s = e^t$, l'intégrande $\dfrac{1}{s \ln s}$ devient $\dfrac{1}{e^t\, t}$ et ds devient $e^t\, dt$. Nous reportons ces changements dans l'intégrale en remplaçant ω par $\ln \omega$ et ω^2 par $2 \ln \omega$, ce qui donne :

$$\int_{\omega}^{\omega^2} \frac{1}{s \ln s}\, ds = \int_{\ln \omega}^{2 \ln \omega} \frac{1}{e^t t} e^t\, dt = \int_{\ln \omega}^{2 \ln \omega} \frac{1}{t}\, dt$$

et finalement :

$$\int_{\omega}^{\omega^2} \frac{1}{s \ln s}\, ds = [\ln t]_{\ln \omega}^{2 \ln \omega} = \ln(2 \ln \omega) - \ln(\ln \omega) = \ln\left(\frac{2 \ln \omega}{\ln \omega}\right) = \ln 2$$

9.4.3 Dans le théorème 9.4.2.1, les segments sur lesquels on intègre jouent un rôle important, car on se sert du fait que la fonction u est strictement monotone, et une fonction peut être strictement monotone sur un segment et pas sur un autre.

Malgré cela, la technique du changement de variable s'adapte aux intégrales indéfinies. Quand les calculs peuvent être menés jusqu'au bout, elle permet de trouver une formule pour la primitive d'une fonction, mais l'absence de bornes d'intégrations donne parfois des doutes sur la validité des calculs. Il faut plutôt voir cette méthode comme un moyen commode permettant de deviner la formule de la primitive. De toute façon, une fois la formule trouvée, il convient de la dériver pour vérifier qu'on retrouve bien la fonction, f, qu'on cherchait à intégrer, et surtout il faut examiner pour quelle partie du domaine de définition de f cette formule est valable.

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int f(x)\ dx$ par un changement de variable :

1) on choisit un couple de fonctions u et v, réciproques l'une de l'autre, strictement monotones, de classe C^1 ;

2) on remplace x par $u(y)$ dans $f(x)$ et dx par $u'(y)\,dy$, ce qui donne :

$$\int f(x)\ dx = \int f(u(y))\,u'(y)\ dy$$

3) on trouve une primitive, $H(y)$, de $f(u(y))\,u'(y)$, ce qui donne :

$$\int f(u(y))\,u'(y)\ dy = H(y) + C$$

4) on remplace y par $v(x)$ dans $H(y)$ et finalement :

$$\int f(x)\ dx = H(v(x)) + C$$

5) on examine sur quel intervalle la formule précédente est valable, et, par précaution, on vérifie que la dérivée de $H(v(x))$ est bien $f(x)$.

Exemple 9.4.3.1 En faisant le changement de variable $x = \sin y$, nous allons trouver une formule pour $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$. Remplaçons $\sqrt{1-x^2}$ par $\sqrt{1-\sin^2 y}$ et dx par $\cos y\ dy$, ce qui donne :

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y}\ \cos y\,dy$$

Nous transformons l'intégrande :

$$\int \sqrt{1-\sin^2 y}\ \cos y\,dy = \int \sqrt{\cos^2 y}\cos y\,dy = \int |\cos y|\cos y\,dy$$

En décidant de poser $y = \arcsin x$, nous convenons que $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$, donc $0 \leqslant \cos y \leqslant 1$, et :

$$\int |\cos y|\cos y\,dy = \int \cos^2 y\ dy = \int \frac{1+\cos 2y}{2}\,dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4} + C$$

Pour revenir plus facilement à la variable x, nous allons transformer cette formule. Nous avons $\sin 2y = 2\sin y\cos y$. Puisque $0 \leqslant \cos y \leqslant 1$, cela peut s'écrire

$\sin 2y = 2\sin y\sqrt{1-\sin^2 y}$, ce qui donne :

$$\int \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y \; dy = \frac{y}{2} + \frac{\sin y\sqrt{1-\sin^2 y}}{2} + C$$

et finalement :

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que la fonction $F(x)$ du membre de droite est de classe C^1 sur le segment $[-1;+1]$, et que sa dérivée est bien $\sqrt{1-x^2}$.

En utilisant le calcul précédent on peut retrouver que l'aire d'un cercle de rayon 1 est égale à π. En effet, si $\mathcal{A}$ désigne l'aire du demi-cercle limité par la courbe représentative de la fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et l'axe des abscisses (*figure 9.4*), nous avons :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx = F(+1) - F(-1) = \left(+\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

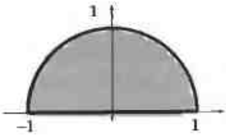


Figure 9.4 Calcul de l'aire d'un demi-cercle

9.4.4 Comme pour les intégrales définies, les changements de variable dans les intégrales indéfinies peuvent se faire dans les deux sens et nous avons une deuxième possibilité de calcul.

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale indéfinie $\int f(u(x))\, u'(x) \; dx$ par un changement de variable (quand est $u'(x)$ est continue et ne s'annule pas) :

1) on remplace $u(x)$ par t dans $f(u(x))$ et $u'(x)\, dx$ par dt, ce qui donne :

$$\int f(u(x))\, u'(x) \; dx = \int f(t) \; dt$$

2) on calcule une primitive, $F(t)$, de $f(t)$, et on obtient :

$$\int f(u(x))\, u'(x)\ \ dx = F(t) + C$$

3) dans $F(t)$ on remplace t par $u(x)$ et finalement :

$$\int f(u(x))\, u'(x)\ \ dx = F(u(x)) + C$$

4) on examine sur quels intervalles cette formule est valable.

Exemple 9.4.4.1 La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier ; elle admet donc des primitives continues sur $\mathbb{R}$ et, afin de les représenter par des formules, on va calculer l'intégrale $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\, dx$ par changement de variable. On écrit d'abord :

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{1 + 4\tan^2 x}\right) \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

pour que l'intégrande soit de la forme $f(u(x))u'(x)$ avec $u(x) = 2\tan x$. Ensuite on pose $2\tan x = t$, ce qui donne $dt = \dfrac{2\, dx}{\cos^2 x}$ et :

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\arctan t + C$$

d'où la formule :

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + C \tag{9.10}$$

En particulier, $F(x)$, la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = 0$, doit être égale à $\dfrac{1}{2}\arctan(2\tan x)$. Le calcul n'était pas difficile mais on devrait se méfier du résultat, car $\tan x$, la fonction employée pour changer de variable, est continue seulement sur certains intervalles, et il y a lieu d'être prudent...

Si l'on dérive sans précaution $\dfrac{1}{2}\arctan(2\tan x)$ on retrouve bien $f(x)$, mais si l'on a la curiosité de tracer sa courbe représentative (*figure 9.5*), on découvre qu'elle n'est même pas continue ! Ce ne peut donc pas être une primitive de $f(x)$.

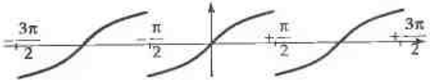


Figure 9.5 La fonction $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)$

L'erreur vient du changement de variable qui était correct seulement sur l'intervalle où $\arctan x$ est la fonction réciproque de $\tan x$, c'est-à-dire sur $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$, car sur un intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2}+n\pi;+\frac{\pi}{2}+n\pi[$, avec n un entier relatif quelconque, c'est $\arctan x + n\pi$ qui est la fonction réciproque de $\tan x$, et pas $\arctan x$!

Par conséquent la formule (9.10) est valable seulement quand $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ et, si on veut une formule valable pour tout x, il faut découper $\mathbb{R}$ en intervalles $]-\frac{\pi}{2}+n\pi;+\frac{\pi}{2}+n\pi[$ et prendre une fonction réciproque différente pour chaque intervalle.

De la sorte on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + n\pi \quad \text{sur} \quad]-\frac{\pi}{2}+n\pi;+\frac{\pi}{2}+n\pi[\tag{9.11}$$

On remarque que cette fonction se déduit de (9.10) avec $C = n\pi$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi;+\frac{\pi}{2}+n\pi[$, ce qui revient à prendre une constante d'intégration différente pour chaque intervalle.

Maintenant, $F(x)$ définie par (9.11) est continue et sa courbe représentative est dessinée sur la *figure 9.6* ; on remarque qu'elle se déduit de la courbe de $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)$ (*figure 9.5*) en faisant des translations sur ses morceaux pour les amener à se recoller.

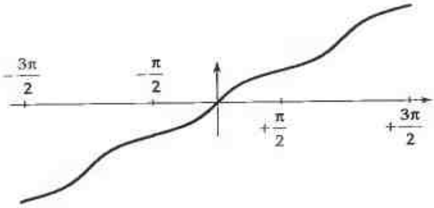


Figure 9.6 Une primitive de $\frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

9.4.5 Un cas bien adapté à la méthode du changement de variable est celui où la fonction f s'écrit comme une *fraction rationnelle* en $\sin x$ et $\cos x$ (c'était le cas dans l'exemple précédent).

Méthode pratique :

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx$ quand P et Q sont des polynômes :

1) on commence par poser $x = 2\arctan t$, ce qui donne $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$;

2) l'intégrale devient :

$$\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx = \int \frac{P\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)}{Q\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)}\left(\frac{2}{1+t^2}\right)dt$$

et on est ramené à intégrer une fraction rationnelle, ce qu'on apprendra à faire dans le chapitre 11.

3) enfin il n'y a plus qu'à remplacer t par $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, dans la primitive de la fraction rationnelle, pour obtenir une formule dont on prendra soin de vérifier la validité.

Exemple 9.4.5.1 Pour calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{4}{(4\cos x + 3\sin x)^2}$, on fait le changement de variable $x = 2\arctan t$:

$$\int \frac{4}{(4\cos x + 3\sin x)^2}\,dx = \int \frac{2\,(1+t^2)}{(2+3t-2t^2)^2}\,dt$$

Dans le chapitre 11 on verra qu'on peut écrire :

$$\frac{2\,(1+t^2)}{(2+3t-2t^2)^2} = \frac{2}{5(-2+t)^2} + \frac{2}{5(1+2t)^2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,(1+t^2)}{(2+3t-2t^2)^2}\,dt &= \int \frac{2}{5(-2+t)^2}\,dt + \int \frac{2}{5(1+2t)^2}\,dt \\ &= \frac{2}{5(2-t)} - \frac{1}{5(1+2t)} + C\end{aligned}$$

Après quoi on remplace t par $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ et finalement :

$$\int \frac{4}{(4\cos x + 3\sin x)^2}\,dx = \frac{\sin x}{4\cos x + 3\sin x} + C$$

formule qui est valable tant que x reste dans un intervalle où les fonctions ne subissent pas de discontinuité.

EXERCICES

9.1. Soit P un polynôme de degré d. Calculer la dérivée de :

$$f(x) = x\left[P(\ln x) - P'(\ln x) + P''(\ln x) + \ldots + (-1)^d P^{(d)}(\ln x)\right]$$

Que vaut $\int P(\ln x)\,dx$? En particulier calculer $\int_0^x \ln^3 t\ \ dt$.

9.2. Calculer les intégrales suivantes en faisant une intégration par partie.

$$I_1 = \int x^n \ln x\,dx; \qquad I_2 = \int \arctan x\,dx; \qquad I_3 = \int \ln^2 x\,dx$$

9.3. À tout entier $n \geqslant 0$, on associe $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ \ dt$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Dans le cas où $n \geqslant 2$, écrire $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t\ \ dt$, puis faire une intégration par partie pour obtenir une relation liant u_n à u_{n-2}.

3) En déduire que $u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $u_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

9.4. Calculer les intégrales suivantes en faisant un changement de variable.

$$I_1 = \int_2^3 \frac{dt}{10 - 6t + t^2} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1} \qquad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta t + t^2}\ dt$$

$$I_4 = \int \frac{dt}{(a\cos t - \sin t)^2} \qquad I_5 = \int \frac{\sqrt{t^a + 1}}{t}\,dt \qquad I_6 = \int \frac{dt}{t(1 + t^n)}$$

9.5. 1) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \;\; dt$. En faisant un changement de variable montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos(\frac{\pi}{4} - t) \;\; dt$. Après avoir développé le cosinus, montrer que :

$$I = \frac{\pi}{4} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t) \;\; dt$$

2) En déduire la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) \;\; dt$.

9.6. On pose $u_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t^2} \;\; dt$, avec $n \geqslant 0$ et entier.

1) Calculer $u_0(x)$ et $u_1(x)$.

2) Que vaut $u_n(x) + u_{n+2}(x)$? En déduire que :

$$u_{2p}(x) = \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \frac{x^{2p-3}}{2p-3} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x}{1} + (-1)^p \arctan x$$

$$u_{2p+1}(x) = \frac{x^{2p}}{2p} - \frac{x^{2p-2}}{2p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^2}{2} + \frac{(-1)^p}{2} \ln(1+x^2)$$

3) On pose $t_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n y \;\; dy$. Après avoir fait un changement de variable, utiliser les questions précédentes pour donner d'autres expressions de t_{2p} et t_{2p+1}.

4) On pose $s(x) = \frac{4x}{\pi} - \tan x$. Que valent $s(0)$ et $s(\frac{\pi}{4})$? Calculer $s'(x)$. Montrer que $s'(x)$ est une fonction strictement monotone sur $[0; \frac{\pi}{4}]$; en déduire que $s'(x)$ ne peut s'annuler qu'une fois sur ce segment. Quel est le signe de $s\left(\frac{\pi}{6}\right)$? Pourquoi tout cela entraîne-t-il que $0 \leqslant \tan x \leqslant \frac{4x}{\pi}$ quel que soit x dans $[0; \frac{\pi}{4}]$?

5) Utiliser le dernier résultat de la question précédente pour montrer que $0 < t_n < \dfrac{\pi}{4(n+1)}$. En déduire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier P tel que les inégalités suivantes soient vérifiées quel que soit $p > P$:

$$\left|\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right)\right| < \varepsilon$$

$$\left|\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{p}\right)\right| < 2\varepsilon$$

Chapitre 10

Nombres complexes

10.1 L'ORIGINE DES NOMBRES COMPLEXES

10.1.1 D'abord inventés pour que *toutes* les équations du deuxième degré aient des solutions, les nombres complexes ont montré plus tard qu'ils étaient un des outils les plus puissants des mathématiques. Nous allons commencer par rappeler les premières étapes de leur invention.

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, et c sont trois nombres réels, avec a non nul, on la multiplie par a, ce qui donne $a^2x^2 + abx + ac = 0$, puis on l'écrit $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ac = 0$. En notant $\Delta = b^2 - 4ac$, le ***discriminant*** de l'équation, celle-ci devient :

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{4}$$

- Si $\Delta > 0$, on a $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, et l'équation a deux solutions :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation ne peut pas avoir de solution, parce que le nombre positif $\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$ ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif. Toutefois, si on *imaginait* qu'il existe un nombre i, dont le carré serait égal à -1, et si on s'autorisait à calculer avec ce nombre comme si c'était un nombre réel, on aurait :

$$\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = -(-\Delta) = \Delta$$

et Δ serait le carré de $i\sqrt{-\Delta}$, ce qui donnerait les deux solutions :

$$x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad x' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On constate donc qu'il suffit d'inventer le nombre i pour que toutes les équations du deuxième degré, à coefficients réels, aient des solutions.

10.1.2 D'accord, il n'y a qu'à inventer i, mais après ? Puisqu'il a été décidé qu'on pouvait calculer avec i comme si c'était un nombre réel, en l'inventant on invente beaucoup d'autres nombres, par exemple $2i$, mais aussi $4-5i$, $(-7+2i)^3$, et pourquoi pas :

$$\alpha = \left(\frac{\left(\frac{2-i3}{5+i}\right)^2 - \left(\frac{2+i}{3+i}\right)}{\left(\frac{11-i7}{12}\right)^4 + \left(\frac{3+i9}{4+i6}\right)^2}\right)^3 \tag{10.1}$$

Tout cela s'annonce bien compliqué, mais en réalité ce ne l'est pas autant qu'on pourrait le craindre...

D'abord la *somme* ou la *différence* de deux nombres de la forme $a+ib$, avec a et b réels, sera de la même forme, puisque :

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a') + i(b+b') \tag{10.2}$$

$$(a+ib)-(a'+ib') = (a-a') + i(b-b') \tag{10.3}$$

C'est vrai aussi pour leur *produit* puisque, compte tenu de la propriété $i^2 = -1$:

$$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+a'b) \tag{10.4}$$

Mais que faire de $\dfrac{(a'+ib')}{(a+ib)}$? On remarque qu'en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $a-ib$ il vient :

$$\frac{a'+ib'}{a+ib} = \frac{(a'+ib')(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{(aa'+bb')+i(ab'-a'b)}{a^2+b^2}$$

ce qui donne :

$$\frac{a'+ib'}{a+ib} = \left(\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\right) \tag{10.5}$$

Finalement, en inventant un nombre i tel que $i^2=-1$ et en se donnant le droit de l'utiliser dans les calculs comme si c'était un nombre réel, on fabrique, par la même occasion, l'ensemble des nombres de la forme $a+ib$, avec a et b réels, et les *additions*, *soustractions, multiplications, divisions* faites avec ces nombres donnent encore des nombres de ce type. On décidera d'appeler ***nombres complexes*** [1] les nombres $a+ib$ et de noter $\mathbb{C}$ leur ensemble.

Bien évidemment, on ne saurait se contenter d'une définition de cet acabit basée sur un vague : *on invente i*, comme le firent les premiers mathématiciens qui se sont intéressés aux nombres complexes. Cette imprécision fut la cause de raisonnements fallacieux qui contribuèrent jadis à rendre suspects, voire *diaboliques*, des nombres qualifiés d'*imaginaires*. Par exemple, si on admet trop hâtivement que l'égalité $-\alpha = (i\sqrt{\alpha})^2$ donne le droit décrire $\sqrt{-\alpha} = i\sqrt{\alpha}$, on tombe sur le paradoxe suivant, obtenu en faisant jouer à -1 le rôle de α :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{-1(-1)} = i\sqrt{-1} = i^2 = -1$$

10.1.3 Pour définir précisément les nombres complexes, on remarque qu'aucun calcul ne pourrait donner une égalité du type $a+ib = a'+ib'$ avec $a \neq a'$ ou $b \neq b'$ car $a-a' = i(b'-b)$ conduirait à $(a-a')^2 = -(b'-b)^2$, et cette égalité entre nombres réels n'est possible que si $a = a'$ et $b = b'$.

Alors, puisque le nombre complexe $a+ib$ correspond sans ambiguïté au couple (a,b), on pourrait admettre qu'un nombre complexe c'est un couple de nombres réels, que le nombre complexe i c'est le couple $(0,1)$, et que le nombre réel a c'est le couple $(a,0)$.

On décide donc que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, c'est $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples de nombres réels, muni de l'*addition* et la *multiplication* définies par :

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \tag{10.6}$$

$$(a,b) \times (a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b) \tag{10.7}$$

On retrouve sans peine toutes les propriétés habituelles de l'addition et de la multipliplication : *associativité, distributivité, commutativité*. Le couple $(0,0)$ est le seul à ne pas avoir d'inverse, et le quotient de deux couples, obtenu en résolvant l'équation $(a,b) \times (x,y) = (a',b')$, est donné par :

$$\frac{(a',b')}{(a,b)} = \left(\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}, \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\right) \tag{10.8}$$

De plus, quels que soient les nombres réels a et b on peut écrire :

$$(a,b) = (a,0) + (0,1) \times (b,0)$$

et si l'on dit que les couples $(a,0)$ et $(b,0)$, représentent les nombres réels a et b, et que le couple $(0,1)$ est un nombre complexe noté i, l'égalité précédente montre que tout nombre complexe est bien de la forme $a+ib$.

Finalement, nous avons obtenu ce que nous voulions, les nombres complexes sont définis de façon rigoureuse, mais plus rien n'empêche de revenir à l'idée simple qu'un nombre complexe c'est $a+ib$ avec a et b deux nombres réels.

1. Complexes veut dire : *faits de plusieurs parties.*

10.1.4 Si $z = a + ib$, le nombre réel a s'appelle la ***partie réelle*** de z, et le nombre réel b sa ***partie imaginaire*** (*attention* : la partie imaginaire est un nombre réel !) ; on écrit $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$. Il faut noter que :

$$\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \qquad \text{et} \qquad \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2) \tag{10.9}$$

L'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle[1]. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, par exemple $2i$, s'appelle un ***nombre imaginaire pur***.

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont à la fois la même partie réelle et la même partie imaginaire. *Écrire l'égalité de deux nombres complexes revient donc à écrire l'égalité de deux nombres réels.*

10.2 CONJUGAISON

10.2.1 Dans le paragraphe 10.1.2, nous avons vu l'intérêt d'associer $a - ib$ à $a + ib$ pour trouver la formule (10.5). Le nombre complexe $a - ib$ s'appelle le ***conjugué*** de $a + ib$. La fonction qui associe $a - ib$ à $a + ib$ s'appelle la ***conjugaison complexe*** ; on la note en recouvrant le nombre complexe à conjuguer par une *barre* :

$$a - ib = \overline{a + ib} \tag{10.10}$$

Le conjugué de z est donc noté $\overline{z}$, ce que l'on prononce *z-barre*. On obtient immédiatement les formules :

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad (10.11) \qquad \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad (10.12) \qquad z\overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \quad (10.13)$$

On retiendra que z est réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$, et que z est imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$.

Avec cette définition de la conjugaison, il faut impérativement que le nombre complexe soit sous la forme $a + ib$ pour qu'on puisse calculer son conjugué. Dans le cas du nombre α défini par la formule (10.1) on pourrait donc croire qu'il n'y a que deux possibilités ; ou bien on en reste à :

$$\overline{\alpha} = \overline{\left(\frac{\left(\frac{2 - i3}{5 + i}\right)^2 - \left(\frac{2 + i}{3 + i}\right)}{\left(\frac{11 - i7}{12}\right)^4 + \left(\frac{3 + i9}{4 + i6}\right)^2} \right)^3}$$

ou bien on calcule sa partie réelle et sa partie imaginaire, ce qui donne :

$$\alpha = \left(\frac{1289483360401188402855936}{3892293023553845602656 25}\right) - i \left(\frac{2208843016151304714308812 8}{4281522325909230162921875}\right)$$

1. Attention : quand on dit *z est un nombre complexe*, rien ne lui interdit d'être réel !

après quoi on écrit :

$$\overline{\alpha} = \left(\frac{128948336040118840285593 6}{389229302355384560265625}\right) + i\left(\frac{2208843016151304714308812 8}{428152232590923016292187 5}\right)$$

Mais il y a encore une autre possibilité...

Théorème 10.2.1.1 (principe de conjugaison) Pour obtenir le conjugué d'un nombre complexe décrit comme le résultat d'un enchaînement d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions, on garde la même formule, mais on remplace i par $-i$ partout où il se trouve.

Démonstration : Puisqu'on enchaîne les opérations il suffit de vérifier que le conjugué d'une somme (10.14), d'une différence (10.15), d'un produit (10.16), ou d'un quotient (10.17) s'obtient ainsi.

Pour la somme on change i en $-i$ dans les membres de gauche et de droite de la formule (10.2) ; ils deviennent respectivement $(a-ib)+(a'-ib')$ et $(a+a')-(b+b')i$, mais ces nombres complexes sont égaux, comme on le voit en appliquant (10.2) avec $-b$ et $-b'$ à la place de b et b'. La démonstration est semblable pour les trois autres opérations.

Le principe de conjugaison appliqué au nombre α défini par (10.1) donne maintenant :

$$\overline{\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{2+i3}{5-i}\right)^2 - \left(\frac{2-i}{3-i}\right)}{\left(\frac{11+i7}{12}\right)^4 + \left(\frac{3-i9}{4-i6}\right)^2}\right)^3$$

On retiendra les formules :

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad (10.14) \qquad\qquad \overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad (10.15)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \qquad (10.16) \qquad\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (10.17)$$

$$\overline{(\overline{z})} = z \qquad (10.18)$$

ainsi que la formule suivante, valable pour tout entier relatif n :

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \qquad (10.19)$$

10.3 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

10.3.1 On sait bien l'intérêt qu'il y a à représenter les nombres réels par les points d'une droite graduée. Il y a une représentation analogue pour les nombres complexes.

Puisqu'un nombre complexe c'est un couple de nombres réels, et qu'un couple de nombres réels ce sont les coordonnées d'un point dans le plan, on représente chaque

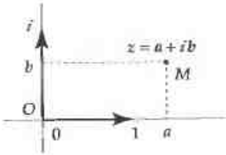


Figure 10.1 Le plan complexe

nombre complexe par un point du plan. Plus précisément, dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point M de coordonnées (a, b) représente le nombre complexe $z = a + ib$ (*figure 10.1*). On dit que M est l'***image*** de z, et que z est l'***affixe***[1] de M.

Souvent on dit : *le point* $a+ib$, au lieu de dire : *le point* M. Cela revient à identifier l'ensemble $\mathbb{C}$ avec le plan qui pour l'occasion s'appelle le ***plan complexe***. L'origine du repère est le point 0, les extrémités des vecteurs du repère sont respectivement 1 et i, les nombres réels sont les points situés sur l'axes des abscisses, qu'on appelle alors l'***axe réel***, et les nombres imaginaires purs sont les points situés sur l'axe des ordonnées, qui devient l'***axe imaginaire***.

Avec cette représentation le point $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe réel (*figure 10.2*), et le point $-z$ est le symétrique de z par rapport à l'origine.

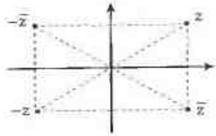


Figure 10.2 Les symétries par rapport aux axes

10.3.2 L'introduction des nombres complexes permet de reconsidérer la géométrie d'un nouveau point de vue qui consiste à traduire les propriétés géométriques en propriétés des nombres complexes et réciproquement. Nous y consacrerons la section 10.5 mais nous allons tout de suite présenter les premiers résultats. Tous les théorèmes de ce paragraphe se déduisent immédiatement de (10.2).

Théorème 10.3.2.1 Si z_1 et z_2 sont deux points du plan complexe, le point situé au milieu du segment qui les joints a pour affixe $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$ (*figure 10.3*).

1. Affixe est un mot féminin.

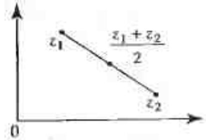


Figure 10.3 Le milieu d'un segment

La condition pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme est que ses diagonales aient le même milieu. Cette caractérisation se traduit de la façon suivante.

Théorème 10.3.2.2 Soient z_1, z_2, z_3, z_4, quatre points du plan complexe. Pour que le quadrilatère obtenu en prenant les sommets dans cet ordre soit un parallélogramme, il faut et il suffit qu'on ait l'égalité :

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

Ce théorème peut s'appliquer dans deux cas particuliers importants.

Théorème 10.3.2.3 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

- Le point z_1+z_2 est placé de façon à ce que le quadrilatère $0, z_1, z_1+z_2, z_2$, avec les sommets qui se suivent dans cet ordre, soit un parallélogramme (*figure 10.4* **a**).
- Le point z_1-z_2 est placé de façon à ce que le quadrilatère $0, z_1-z_2, z_1, z_2$, avec les sommets qui se suivent dans cet ordre, soit un parallélogramme (*figure 10.4* **b**).

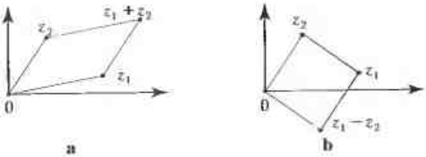


Figure 10.4 *Somme et différence* de deux nombres complexes

10.4 FORME TRIGONOMÉTRIQUE

10.4.1 Un point z du plan complexe peut être repéré par ses ***coordonnées cartésiennes***, c'est-à-dire par sa partie réelle et sa partie imaginaire. Mais on peut aussi le repérer à l'aide de deux autres nombres, ρ et θ, en utilisant des ***coordonnées polaires*** (*figure 10.5*).

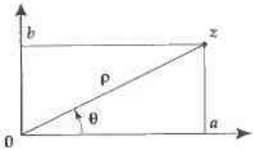


Figure 10.5 Coordonnées polaires

Le nombre ρ est la distance qui sépare le point z de l'origine ; on l'appelle la ***valeur absolue*** de z, ou parfois le ***module*** de z ; on le note $|z|$. Le théorème de Pythagore donne immédiatement $\rho^2 = a^2 + b^2$, ce qu'on peut écrire :

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \tag{10.20}$$

On a donc :

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}} \tag{10.21}$$

Théorème 10.4.1.1 Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, la distance qui les sépare dans le plan complexe est égale à $|z_1 - z_2|$.

Démonstration : Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des longueurs égales. Par conséquent, la distance qui sépare z_1 et z_2 est la même que celle qui sépare 0 de $z_1 - z_2$ (*figure 10.4* b) et qui n'est autre que $|z_1 - z_2|$.

Théorème 10.4.1.2 (inégalité triangulaire) Quels que soient les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on a :

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \tag{10.22}$$

Démonstration : Nous démontrerons (10.22) dans le cas où $n = 2$; le cas général s'en déduit par récurrence. Pour démontrer :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{10.23}$$

on pose $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ et on doit alors prouver que, quels que soient les nombres réels a, b, a', et b', l'inégalité suivante est vraie :

$$\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2} \tag{10.24}$$

Parce que la fonction racine carrée est croissante, l'inégalité $x \leqslant y$ équivaut à $x^2 \leqslant y^2$ quand x et y sont des nombres réels *positifs*. Alors, après avoir élevé (10.24) au carré, et simplifié, nous sommes ramenés à démontrer que l'inégalité $aa' + bb' \leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}$ est vraie quels que soient les nombres réels a, b, a' et b'. Cette inégalité est évidemment vraie quand le membre de gauche est négatif. Quand ce n'est pas le cas, on peut l'élever au carré, puis simplifier, et elle équivaut alors à $2aa'bb' \leqslant a^2b'^2 + b^2a'^2$, ce qui s'écrit $0 \leqslant (ab' - ba')^2$ et qui bien sûr est toujours vrai.

Remarque : Il est bien connu, même si la démonstration générale est loin d'être évidente, que *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre*. Le théorème précédent dit que dans le triangle ayant pour sommets 0, z_1, et $z_1 + z_2$ (*figure 10.4 a*), le chemin est plus court quand on va de 0 à $z_1 + z_2$ en ligne droite, que si l'on passe par z_1 ; c'est ce qui explique le nom donné à l'inégalité (10.23) et plus généralement à (10.22).

Dans le cas où les nombres z_k de (10.22) sont réels, on retrouve l'inégalité (1.2) et c'est pourquoi on a donné aussi à cette dernière le nom d'inégalité triangulaire.

10.4.2 Le nombre θ (*figure 10.5*) est l'angle de la rotation autour de O qui amène l'axe réel en coïncidence avec la droite OM, orientée de O vers M ; on l'appelle l'***argument*** de z et on le note $\arg z$. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

L'argument de $z = a + ib$ peut être représenté par n'importe quel nombre θ tel qu'on ait en même temps :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{10.25}$$

et il est seulement *défini à 2π près*. Cela veut dire que, si un nombre θ peut être pris comme argument de z, alors tous les nombres $\theta + k2\pi$, avec k un entier relatif quelconque, peuvent aussi être pris comme argument de z, et ce sont les seuls nombres qui ont cette propriété. Pour le signaler on écrit :

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi} \tag{10.26}$$

ce qui se prononce *l'argument de z est égal à θ modulo 2π*.

Exemple 10.4.2.1 L'égalité :

$$\arg i = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

signifie que les nombres de la liste infinie :

$$\left\{\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\right\}$$

sont tous ceux qui peuvent servir d'argument à i.

10.4.3 Connaissant ρ et θ, il est facile de retrouver a et b :

$$a = \rho\cos\theta \qquad b = \rho\sin\theta \tag{10.27}$$

et, puisque $z = a + ib$, on peut écrire :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{10.28}$$

Cette expression s'appelle la ***forme trigonométrique*** de z. Pour la distinguer de l'expression $z = a + ib$, on appelle cette dernière la ***forme cartésienne*** de z.

Exemple 10.4.3.1 La forme trigonométrique de $1 + i$ est :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

> ***Mise en garde :*** il ne suffit pas d'avoir une expression du type $r(\cos t + i\sin t)$, avec r réel, pour que ce soit la forme trigonométrique d'un nombre complexe, il faut en plus que r soit positif.

Théorème 10.4.3.2 Soit $z = r(\cos t + i\sin t)$ avec r et t réels, et $r \neq 0$. Alors :
- Si $r > 0$, on a $|z| = r$ et $\arg z = t \pmod{2\pi}$.
- Si $r < 0$, on a $|z| = -r$ et $\arg z = t + \pi \pmod{2\pi}$.

Démonstration : D'abord $|z|^2 = (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2$ donc $|z| = |r|$. Ensuite, si θ est l'argument de z, on a $z = |r|(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos t + i\sin t)$. Dans le cas où $r > 0$, cela donne $\cos\theta = \cos t$ et $\sin\theta = \sin t$, donc $\theta = t \pmod{2\pi}$, et dans le cas où $r < 0$, cela donne $\cos\theta = -\cos t$ et $\sin\theta = -\sin t$, donc $\theta = t + \pi \pmod{2\pi}$.

10.4.4 La forme trigonométrique, avec sa racine carrée dans le module de z, et ses fonctions trigonométriques portant sur l'argument, n'a pas l'air aussi pratique que la forme cartésienne, mais en fait c'est seulement le passage d'une forme à l'autre qui est compliqué.

Chacune a ses avantages. Les formules (10.9) montrent que la forme cartésienne est particulièrement bien adaptée à l'addition ; celles qui suivent montrent que la forme trigonométrique est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Théorème 10.4.4.1 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Alors :

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| \tag{10.29}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \tag{10.30}$$

Démonstration : Notons ρ_1 le module de z_1, ρ_2 celui de z_2, θ_1 l'argument de z_1, θ_2 celui de de z_2. Alors $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, et :

$$z_1 z_2 = \rho_1\,\rho_2\,[(\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\,\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\sin\theta_2)]$$
$$z_1 z_2 = \rho_1\,\rho_2\,[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Il n'y a plus qu'à appliquer le théorème 10.4.3.2 pour obtenir (10.29) et (10.30).

10.5 GÉOMÉTRIE PLANE

10.5.1 Au paragraphe 10.3.2, nous avions remarqué que les nombres complexes pouvaient conduire à une autre approche de la géométrie ; nous allons développer cette idée.

Fixons un vecteur $\overrightarrow{V}$; on appelle ***translation de vecteur*** $\overrightarrow{V}$ la transformation du plan qui associe au point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$ (*figure 10.6*).

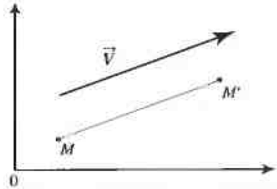


Figure 10.6 Les vecteurs du plan complexe

Théorème 10.5.1.1 Notons α et β les composantes de $\overrightarrow{V}$ et posons $u = \alpha + i\beta$. Alors l'affixe z' de M' se déduit de l'affixe z de M par :

$$z' = z + u \tag{10.31}$$

Démonstration : On sait que les coordonnées de M' se déduisent de celles de M en leur ajoutant les composantes de $\overrightarrow{V}$.

Il en résulte qu'un nombre complexe peut tout aussi bien représenter un point du plan, qu'un vecteur. Puisque z représente M, z' représente M', et u représente $\overrightarrow{V}$, l'égalité du théorème 10.5.1.1 peut s'écrire $M' = M + \overrightarrow{V}$. De même, puisque $z' - z = u$, on peut écrire $M' - M = \overrightarrow{V}$.

10.5.2 Les ***similitudes directes*** sont d'autres transformations fondamentales de la géométrie. Rappelons qu'elles sont définies par trois données : leur *centre*, qui est un point, leur *angle*, et leur *rapport*, qui est un nombre réel strictement positif.

La similitude $\mathcal{S}$, définie par (C, θ, ρ), transforme un point M quelconque en un point M' obtenu en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{CM}$ autour de C de l'angle θ, tout en lui faisant subir une homothétie de rapport ρ et de centre C (*figure 10.7*). Lorsque $\rho = 1$, on a simplement affaire à une ***rotation*** d'angle θ.

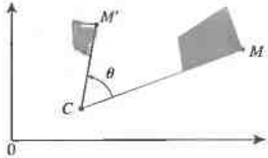


Figure 10.7 La similitude de centre C, d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, de rapport $\rho = \frac{1}{2}$

Théorème 10.5.2.1 Soit $\mathcal{S}$, la similitude directe définie par (C, θ, ρ). Posons $u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et notons v l'affixe de C. Alors, si z et z' sont les affixes de M et de M', le transformé de M par $\mathcal{S}$, le nombre complexe z' se déduit de z par :

$$z' = uz + (1-u)v \tag{10.32}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{S}$ est la rotation d'angle θ autour de l'origine, on a simplement :

$$z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z \tag{10.33}$$

Démonstration : Le vecteur $\overrightarrow{CM}$ est représenté par $z - v$, et $\overrightarrow{CM'}$ par $z' - v$. L'angle que fait $\overrightarrow{CM'}$ avec l'axe des abscisses est égal à l'angle que fait $\overrightarrow{CM}$, augmenté de θ, et la longueur de $\overrightarrow{CM'}$ est égale à la longueur de $\overrightarrow{CM}$ multipliée par ρ. Le théorème 10.4.4.1 nous dit alors que $z' - v$ se déduit de $z - v$ en le multipliant par le nombre complexe de module ρ et d'argument θ, qui n'est autre que u. On a donc $z' - v = u(z - v)$, ce qui donne bien le résultat annoncé.

Exemple 10.5.2.2 Le point $z' = \left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) z = \left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) z$ se déduit du point z par une rotation d'angle $+\dfrac{2\pi}{3}$ autour de l'origine.

10.5.3 Jusqu'ici nous sommes partis de la géométrie pour aller vers les nombres complexes, mais voyons maintenant comment on peut aller dans l'autre sens, et comment des allers et retours permettent de retrouver simplement des théorèmes de géométrie.

Théorème 10.5.3.1 Soient u et v deux nombres complexes avec u non nul. Alors :

– si $u \neq 1$, le point $z' = uz + v$ se déduit du point z par une similitude directe de centre $\dfrac{v}{1-u}$, d'angle $\arg u$ et de rapport $|u|$;

– si $u = 1$, le point $z' = z + v$ se déduit du point z par une translation de vecteur v.

Démonstration : Quand $u \neq 1$, il suffit d'appliquer le théorème 10.5.2.1 et quand $z' = z + v$, il suffit d'appliquer le théorème 10.5.1.1.

On appelle ***fonctions affines complexes*** les fonctions de la forme $f(z) = uz + v$ avec u et v deux nombres complexes tels que $u \neq 0$. La conséquence du théorème est que *les similitudes directes et les translations du plan sont en correspondance avec les fonctions affines complexes.*

Théorème 10.5.3.2 Si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont des similitudes directes ou des translations, leur composée est aussi une similitude directe ou une translation.

Démonstration : La composée de deux fonctions affines complexes est encore une fonction affine complexe.

10.6 EXPONENTIELLE COMPLEXE

10.6.1 Une fonction qui associe un nombre complexe à un nombre réel s'appelle une ***fonction complexe d'une variable réelle***.

Si la fonction s'appelle f, on peut lui associer les deux fonctions réelles d'une variable réelle, a et b obtenues en posant $a(t) = \Re(f(t))$ et $b(t) = \Im(f(t))$. Puisque $f(t) = a(t) + ib(t)$, la fonction f est connue quand on connaît les fonctions a et b, et réciproquement, si on connaît f, on en déduit a et b. Il en résulte qu'une fonction complexe d'une variable réelle n'est rien d'autre que deux fonctions réelles d'une variable réelle, mais la notion de fonction complexe d'une variable réelle est intéressante parce que $f(t)$ n'apparaît pas toujours sous sa forme cartésienne.

La représentation géométrique des fonctions complexes d'une variable réelle n'est pas la même que celle des fonctions réelles d'une variable réelle. Lorsque t varie, le nombre complexe $f(t)$ se déplace dans le plan complexe et, si f est assez régulière, il décrit une *courbe*. On peut donc représenter $f(t)$ en dessinant cette courbe et en marquant dessus quelques points, avec les valeurs de t qui amènent $f(t)$ sur ces points.

Exemple 10.6.1.1 Lorsque t varie le nombre complexe $f(t) = \dfrac{1}{t-i}$ décrit un cercle de centre $\dfrac{i}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ (*figure 10.8*). En effet, nous avons :

$$f(t) - \frac{i}{2} = \left(\frac{-i}{2}\right)\left(\frac{t+i}{t-i}\right)$$

mais, comme t est réel, $|t+i| = |t-i|$, et :

$$\left|f(t) - \frac{i}{2}\right| = \frac{|-i|}{|2|}\frac{|t+i|}{|t-i|} = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que $f(t)$ reste à la distance $\dfrac{1}{2}$ du point $\dfrac{i}{2}$.

Nous avons marqué quelques points sur ce cercle. Lorsque t est négatif, avec une grande valeur absolue, $f(t)$ est proche de l'origine, sur la partie gauche du cercle. Lorsque t augmente, le point $f(t)$ parcourt en montant toute la moitié gauche du cercle pour arriver, quand $t = 0$, au point i. Ensuite, lorsque t tend vers $+\infty$, il redescend, à droite du cercle, vers l'origine, ainsi que le montre la flèche.

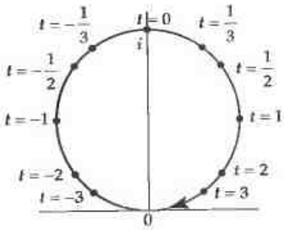


Figure 10.8 La courbe décrite par $f(t)=\frac{1}{t-i}$

On peut définir la notion de ***continuité*** et de ***dérivabilité*** pour les fonctions complexes d'une variable réelle. La fonction f est continue quand a et b sont continues, elle est dérivable quand a et b sont dérivables, et $f'(t)=a'(t)+ib'(t)$.

Si f est continue sa courbe ne se *déchire* pas. Si elle est dérivable, sa courbe a des tangentes sauf, peut-être, aux points pour lesquels $a'(t)$ et $b'(t)$ s'annulent en même temps.

10.6.2 À présent considérons la fonction $f(t)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$ avec α et β deux nombres réels fixés. C'est une fonction continue, dérivable, et :

$$f'(t)=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+e^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t+i\beta\cos\beta t)=\alpha f(t)+i\beta f(t)$$

ce qui donne $f'(t)=(\alpha+i\beta)f(t)$. De plus :

$$\begin{aligned}f(t_1+t_2)&=e^{\alpha(t_1+t_2)}\left[\cos\beta(t_1+t_2)+i\sin\beta(t_1+t_2)\right]\\&=e^{\alpha t_1}e^{\alpha t_2}\left[(\cos\beta t_1\cos\beta t_2-\sin\beta t_1\sin\beta t_2)+i(\sin\beta t_1\cos\beta t_2+\cos\beta t_1\sin\beta t_2)\right]\\&=e^{\alpha t_1}e^{\alpha t_2}(\cos\beta t_1+i\sin\beta t_1)(\cos\beta t_2+i\sin\beta t_2)\end{aligned}$$

et par conséquent $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$.

Quand α est un nombre réel, la fonction réelle d'une variable réelle $g(t)=e^{\alpha t}$ vérifie $g'(t)=\alpha g(t)$ et $g(t_1+t_2)=g(t_1)g(t_2)$. La ressemblance avec les formules vérifiées par $f(t)$ a donné à Euler l'idée de noter $f(t)=e^{(\alpha+i\beta)t}$.

Si u est un nombre complexe quelconque, on pose donc :

$$e^u=e^{\Re(u)+i\Im(u)}=e^{\Re(u)}\big(\cos\Im(u)+i\sin\Im(u)\big) \tag{10.34}$$

Une expression du type e^u, avec u complexe, s'appelle une ***exponentielle complexe***, et :

$$|e^u|=e^{\Re(u)} \qquad \arg(e^u)=\Im(u) \tag{10.35}$$

La formule (10.34) a servi à définir e^u, mais on peut l'utiliser dans l'autre sens. Quand on rencontre une expression semblable au membre de droite de (10.34), on peut l'écrire comme une exponentielle. Par exemple, si z désigne un nombre complexe quelconque, non nul, puisque $z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$ on peut écrire :

$$z = |z|\, e^{i \arg z} \tag{10.36}$$

et l'expression du membre de droite s'appelle la ***forme exponentielle*** du nombre z. En particulier *tout nombre complexe de module* 1 *est de la forme* e^{it} *avec* t *réel.*

Exemple 10.6.2.1

$$-1 = e^{i\pi} \qquad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Parce que $\overline{e^{\alpha+i\beta}} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t) = e^{\alpha - i\beta}$, nous avons :

$$\overline{(e^u)} = e^{\overline{u}} \tag{10.37}$$

et le principe de conjugaison (théorème 10.2.1.1) s'élargit pour devenir : *Pour obtenir le conjugué d'un nombre complexe décrit comme le résultat d'un enchaînement d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions, d'exponentiations, on garde la même formule, mais on remplace i par $-i$ partout où il se trouve.*

10.6.3 Dans le cas où $u = it$, avec t réel, on a simplement :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t \tag{10.38}$$

$$\left|e^{it}\right| = 1 \qquad \arg e^{it} = t \qquad e^{-it} = \overline{(e^{it})} = \frac{1}{e^{it}} \tag{10.39}$$

et les ***formules d'Euler*** (10.40) se déduisent immédiatement de (10.38) :

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \tag{10.40}$$

Ces formules sont de la plus haute importance. Leur conséquence la plus frappante est qu'il suffit de se rappeler de $e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} e^{it_2}$, de $e^{i2\pi} = 1$ et de $(e^{it})' = ie^{it}$ pour retrouver toutes les formules de trigonométrie ; nous en verrons une illustration dans le prochain paragraphe.

Si on compare (10.40) à (6.51) et (6.52), on constate que :

$$\operatorname{ch} t = \cos(it) \qquad \operatorname{sh} t = -i \sin(it) \tag{10.41}$$

ce qui explique, enfin, la ressemblance entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires.

10.6.4 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On écrit $e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$, puis on remplace le membre de gauche par $\cos nt + i \sin nt$, tandis qu'on remplace celui de droite par $(\cos t + i \sin t)^n$, après quoi on développe. Ensuite, en écrivant que les parties réelles et imaginaires des deux membres sont égales, on obtient le résultat suivant :

Théorème 10.6.4.1 (formules de Moivre) Quel que soit n, entier, $n \geqslant 1$:

$$\cos nt = C_n^0(\cos t)^n - C_n^2(\cos t)^{n-2}(\sin t)^2 + C_n^4(\cos t)^{n-4}(\sin t)^4 - \cdots \tag{10.42}$$

$$\sin nt = C_n^1(\cos t)^{n-1}\sin t - C_n^3(\cos t)^{n-3}(\sin t)^3 + C_n^5(\cos t)^{n-5}(\sin t)^5 - \cdots \tag{10.43}$$

De plus, la formule $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ permet de transformer les formules précédentes afin de représenter $\cos nt$ comme un polynôme en $\cos t$, et $\sin nt$ comme le produit de $\sin t$ par un polynôme en $\cos t$ quand n est pair, ou comme un polynôme en $\sin t$ quand n est impair.

Exemple 10.6.4.2 Avec $n = 3$ ce calcul donne :

$$\begin{aligned}\cos 3t + i \sin 3t &= (\cos t + i \sin t)^3 \\ &= \cos^3 t + 3\cos^2 t\, i \sin t + 3 \cos t\, i^2 \sin^2 t + i^3 \sin^3 t \\ &= \left[\cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t\right] + i\left[3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t\right]\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

$$\sin 3t = 3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$$

EXERCICES

10.1. Si on avait défini la multiplication sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b)$$

quels couples auraient eu un inverse et quel aurait été leur inverse ?

10.2. Calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le module de :

$$z = \frac{(2-i)^3 - (1-i)^3}{(2+i)^3 - (1+i)^3}$$

10.3. Trouver la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$u = i^{387} \qquad v = (1+i)^{1000} \qquad w = (3 - i\sqrt{3})^{192}$$

10.4. 1) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs associés aux nombres complexes u et v soient colinéaires (c'est-à-dire parallèles) ?

2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs associés aux nombres complexes u et v soient orthogonaux ?

10.5. On note u et v deux nombres complexes distincts.

1) Démontrer que, dans le plan complexe, z est à égale distance de u et de v équivaut à la condition $(v - u)\overline{z} + (\overline{v} - \overline{u})z = v\overline{v} - u\overline{u}$.

2) Dans le plan complexe, on considère trois points u, v et w formant un triangle, et on note z le centre du cercle circonscrit à ce triangle (on rappelle qu'il s'agit du point situé à égale distance des trois points).

Écrire les équations certifiant que z est à égale distance de u et de v et à égale distance de v et de w. Après avoir éliminé $\overline{z}$, calculer z.

10.6. Que peut-on dire des quatre points distincts z_1, z_2, z_3, z_4 qui vérifient la condition $z_2 - iz_1 = z_3 - iz_2 = z_4 - iz_3 = z_1 - iz_4$?

10.7. Quelle est la transformation géométrique qui associe au point d'affixe z le point d'affixe $z' = i\overline{z}$?

10.8. Dans le plan complexe, on considère deux transformations, la symétrie S par rapport à l'origine, et la rotation R d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de 1.

Quelles sont les transformations composées $S \circ R$ et $R \circ S$?

10.9. Les lettres a, b, c, d désignent quatre nombres complexes et on considère la fonction complexe d'une variable réelle $f(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$. On suppose que c et d ne sont pas tous les deux nuls ainsi que a et b.

1) Si $c\overline{d} - d\overline{c} = 0$, quelle courbe parcourt le nombre complexe $f(t)$ quand t varie ?

2) Si $c\overline{d} - d\overline{c} \neq 0$, en mettant $f(t)$ sous la forme $f(t) = \gamma + p\left(\dfrac{\overline{c}t+\overline{d}}{ct+d}\right)$ dire sur quelle courbe se déplace le nombre complexe $f(t)$ quand t varie ?

10.10. Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

$$z_1 = 3 - i\sqrt{3}\ ;\ z_2 = \frac{\sqrt{3} - i3}{1+i}\ ;\ z_3 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i3}\ ;\ z_4 = 3(1+i) + \sqrt{3}(1-i)$$

10.11. Trouver le module et l'argument de $z-1$ quand $z = e^{it}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10.12. 1) Quelle est la forme exponentielle de $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$?

2) Mettre $\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right) + i\left(\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$ sous forme exponentielle.

3) Montrer que $\dfrac{e^{i\alpha} + ie^{i\beta}}{e^{i\alpha} - ie^{i\beta}}$ est un nombre purement imaginaire.

Chapitre 11

Polynômes et fractions rationnelles

11.1 ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

11.1.1 Nous avons vu que l'invention de i permet de résoudre toutes les équations du deuxième degré à coefficients réels. Mais peut-on résoudre celles dont les coefficients sont complexes ? En reprenant le calcul de la section 10.1, on observe que la question revient à chercher si le nombre complexe Δ a des racines carrées et à trouver combien il en a. Nous allons aborder le problème général de la recherche des racines d'ordre quelconque d'un nombre complexe.

On dit que le nombre complexe u est une ***racine d'ordre n*** de A si $u^n = A$. On remarque que 0 est la seule racine d'ordre n de 0.

Théorème 11.1.1.1 Un nombre complexe non nul possède n racines d'ordre n différentes. Plus précisément, soit $A = Re^{iT}$ un nombre complexe non nul tel que $|A| = R$ et $\arg(A) = T$. Si k est un entier relatif quelconque on pose :

$$u_k = R^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{T}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} = R^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{T}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{T}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right] \tag{11.1}$$

Alors $u_k = u_{k'}$ si et seulement si $k - k'$ est un multiple entier de n, et les solutions de l'équation $X^n = A$ sont les nombres complexes $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Démonstration : Soit $u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec ρ un nombre réel positif et θ un nombre réel quelconque. Si $u^n = A$ on a $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = R(\cos T + i\sin T)$, ce qui donne $\rho^n = R$ et $n\theta = T + k2\pi$ avec un certain entier relatif, k. Il en résulte que $\rho = R^{\frac{1}{n}}$ et $\theta = \dfrac{T}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}$, par conséquent $u = u_k$.

Réciproquement, tous les nombres u_k, avec k un entier relatif quelconque, sont des solutions de $X^n = A$, mais la condition nécessaire et suffisante pour que $u_k = u_{k'}$ est que $\left(\frac{T}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\frac{T}{n} + k'\frac{2\pi}{n}\right)$ soit un multiple entier de 2π, ce qui équivaut à $k - k'$ multiple entier de n. Par conséquent, en faisant varier k de 0 à $n-1$, on obtient bien *toutes* les solutions de l'équation $X^n = A$.

Exemple 11.1.1.2 Le nombre complexe $1+i$ possède 3 racines cubiques et, puisque $1 + i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, ce sont :

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

Le théorème 11.1.1.1 appliqué à la résolution des équations du deuxième degré, donne le résultat suivant :

Théorème 11.1.1.3 Une équation du deuxième degré à coefficients complexes a deux racines quand son discriminant n'est pas nul, et une seule quand il est nul.

11.1.2 Les racines d'ordre n de 1 s'appellent les ***racines n-ièmes de l'unité*** ; ce sont les nombres $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, avec :

$$\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \tag{11.2}$$

On remarque que $\omega_0 = 1$, et que $\omega_{\frac{n}{2}} = -1$ quand n est pair. Dans tous les cas :

$$\omega_k = \omega_1^k \qquad \overline{\omega_k} = \omega_k^{-1} = \omega_{-k} \tag{11.3}$$

Théorème 11.1.2.1 Dans le plan complexe, le polygone obtenu en joignant ω_0 à ω_1, ω_1 à ω_2, ..., ω_{n-2} à ω_{n-1} et enfin ω_{n-1} à ω_0 est un polygone régulier à n côtés centré sur l'origine (*figure 11.1*).

Démonstration : Les points $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ se déduisent du point 1 par des rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Par conséquent tous les côtés du polygone, ainsi que tous ses angles sont égaux.

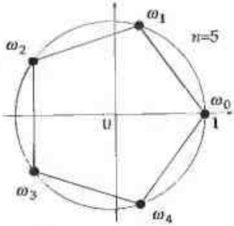


Figure 11.1 Les racines 5-ièmes de l'unité

Remarque : Avec les notations du théorème 11.1.1.1, on a $u_k = u_0\omega_k$. Donc, dans le plan complexe, les points $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ se déduisent des points $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ par la similitude directe associée à u_0 qui a pour centre O, pour angle $\dfrac{T}{n}$ et pour rapport $R^{\frac{1}{n}}$. Il en résulte que le polygone obtenu en joignant u_0 à u_1, u_1 à u_2, …, u_{n-2} à u_{n-1} et enfin u_{n-1} à u_0 est lui-aussi un polygone régulier centré sur O.

11.1.3 Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $X^n = 1$. S'il arrive qu'on sache résoudre cette équation autrement que nous venons de le faire, cela peut donner une formule pour $\cos\left(k\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et $\sin\left(k\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Exemple 11.1.3.1 Lorsque $n = 5$, l'équation $X^5 = 1$ admet pour racines, outre $\omega_0 = 1$, les nombres complexes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ (*figure* 11.1) avec :

$$\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \omega_4 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \qquad \omega_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On peut écrire $X^5 - 1 = (X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1) = 0$. Comme le nombre ω_0 est solution de $X - 1 = 0$, les autres racines sont les solutions de $X^4+X^3+X^2+X+1 = 0$. En divisant par X^2, on met d'abord cette équation sous la forme :

$$X^2 + \frac{1}{X^2} + X + \frac{1}{X} + 1 = 0$$

puis on la transforme pour obtenir :

$$\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 + \left(X + \frac{1}{X}\right) - 1 = 0$$

Les nombres $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$, avec k variant de 1 à 4, sont les solutions de cette équation, autrement dit :

$$\left(\omega_k + \frac{1}{\omega_k}\right)^2 + \left(\omega_k + \frac{1}{\omega_k}\right) - 1 = 0$$

mais puisque :

$$\omega_1 + \frac{1}{\omega_1} = \omega_4 + \frac{1}{\omega_4} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$\omega_2 + \frac{1}{\omega_2} = \omega_3 + \frac{1}{\omega_3} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

les nombres réels $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les solutions de l'équation $Y^2 + Y - 1 = 0$. Parce que cette équation a une racine positive, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et une racine négative, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, et parce que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ on a forcément :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

En utilisant la relation $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ et en tenant compte des signes des sinus, on en déduit que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \qquad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

11.2 POLYNÔMES COMPLEXES

11.2.1 Soient d un entier supérieur ou égal 0 et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d$ des nombres complexes, avec $a_0 \neq 0$. On dit que $P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + a_2X^{d-2} + \cdots + a_d$ est un ***polynôme de degré d*** à coefficients complexes ; les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d$ sont les ***coefficients*** de $P(X)$: lorsque $a_0 = 1$, on dit que $P(X)$ est ***unitaire***.

Dans la suite de ce chapitre le mot *polynôme* voudra dire *polynôme à coefficients complexes*. Si $P(X)$ est un polynôme et α un nombre complexe, on notera $P(\alpha)$ le nombre complexe $a_0\alpha^d + a_1\alpha^{d-1} + a_2\alpha^{d-2} + \cdots + a_d$.

Une constante *non nulle* est un polynôme de degré 0. On convient que la constante 0 est un polynôme, mais que son degré est $-\infty$. En convenant aussi que $-\infty + d = -\infty$, pour tout entier d, on obtient le théorème suivant :

Théorème 11.2.1.1 Le produit de deux polynômes est un polynôme dont le degré est la somme de leur degré.

Soit $P(X)$ un polynôme de degré $d > 0$; on dit qu'on a ***factorisé*** $P(X)$ quand on l'a écrit comme un produit de *plusieurs* polynômes non constants.

Exemple 11.2.1.2 Le polynôme $X^3 - 6X + 5$ se factorise en :

$$X^3 - 6X + 5 = (X - 1)(X^2 + X - 5)$$

Un peu comme les nombres entiers qui se factorisent en un produit de nombres premiers, on va voir que chaque polynôme non constant peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1.

11.2.2 Soit $P(X)$ un polynôme de degré $d > 0$. On dit que le nombre complexe r est une ***racine*** de $P(X)$ si $P(r) = 0$. Un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une constante non nulle, n'a pas de racine. On convient que n'importe quel nombre complexe est une racine du polynôme nul.

Bien évidemment s'il existe un polynôme $Q(X)$ de degré $d-1$ tel que $P(X) = (X-r)Q$ on a $P(r) = 0$ et le nombre r est une racine de $P(X)$, mais la réciproque est vraie.

Théorème 11.2.2.1 Si r est une racine de $P(X)$, il existe un polynôme $Q(X)$ de degré $d - 1$ tel que $P(X) = (X - r)Q(X)$.

Démonstration : On suppose que r est une racine de $P(X)$ et on va démontrer que le polynôme $Q(X)$ existe. On écrit $Q(X) = b_0X^{d-1} + b_1X^{d-2} + \cdots + b_{d-1}$ avec des coefficients b_i inconnus qu'il s'agit de déterminer. Alors, pour que :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - r)\left(b_0X^{d-1} + b_1X^{d-2} + \cdots + b_{d-1}\right) \\ &= b_0X^d + (b_1 - rb_0)X^{d-1} + \cdots + \left(b_{d-1} - rb_{d-2}\right)X - rb_{d-1} \end{aligned}$$

il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 - rb_0 \\ a_2 &= b_2 - rb_1 \\ &\cdots\cdots \\ a_{d-1} &= b_{d-1} - rb_{d-2} \\ a_d &= -rb_{d-1} \end{aligned}$$

On peut toujours résoudre les d premières équations, ce qui donne :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_0r + a_1 \\ b_2 &= a_0r^2 + a_1r + a_2 \\ &\cdots\cdots \\ b_{d-1} &= a_0r^{d-1} + a_1r^{d-2} + \cdots + a_{d-1} \end{aligned}$$

et alors, pour que le polynôme $Q(X)$ existe, il faut et il suffit que ces valeurs soient compatibles avec la dernière équation, autrement dit que :

$$a_d = -r\left(a_0r^{d-1} + a_1r^{d-2} + \cdots + a_{d-1}\right)$$

ce qui est une autre façon de dire que r est une racine de $P(X)$.

11.2.3 Le théorème précédent précisait le lien entre les racines d'un polynôme et sa factorisation. Celui qui suit montre que tout polynôme peut être factorisé.

Théorème 11.2.3.1 (théorème de d'Alembert-Gauss) Tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine.

La démonstration de ce théorème fondamental, qui est loin d'être évidente, n'indique pas comment on peut trouver les racines des polynômes. On connaît bien des formules pour les polynômes de degré 2, 3, ou 4, qui mettent en jeu des radicaux, mais Galois et Abel ont démontré qu'il n'existe pas de formule de ce type pour les polynômes de degré plus élevé. Sauf dans des cas exceptionnels, on ne sait donc pas représenter les racines par des formules et, on en est réduit à leur donner des noms particuliers quand on a besoin de les utiliser.

Un polynôme non constant a, au moins, une racine. Mais combien en a-t-il ?

Théorème 11.2.3.2 Si $d \geqslant 1$ est le degré du polynôme $P(X)$, il existe des nombres complexes, $s_1, s_2, \ldots, s_d$, pas forcément distincts, tels que :

$$P(X) = a_0(X - s_1)(X - s_2)\cdots(X - s_d) \tag{11.4}$$

Démonstration : Le polynôme $P(X)$, de degré d, possède au moins une racine qu'on note s_1. On peut donc l'écrire $P(X) = (X - s_1)Q_1(X)$ avec un polynôme $Q_1(X)$ de degré $d - 1$. Mais à son tour, si $d - 1 \geqslant 1$, le polyôme $Q_1(X)$ possède au moins une racine qu'on note s_2, et on peut l'écrire $Q_1(X) = (X - s_2)Q_2(X)$ avec un polynôme $Q_2(X)$ de degré $d - 2$. En continuant à enchaîner les factorisations, on arrive à un polynôme $Q_d(X)$, constant, qui ne peut être que a_0, et alors on a (11.4).

On utilise souvent une conséquence du théorème 11.2.3.2 :

Théorème 11.2.3.3 Soit $P(X)$ un polynôme dont le degré ne dépasse pas n. Alors, si on lui trouve plus de n racines distinctes, on est certain qu'il est nul. En particulier, le seul polynôme qui ait une infinité de racines est le polynôme nul.

Démonstration : Un polynôme constant non nul n'a pas de racine. Par conséquent, si $P(X)$ possède une racine, ou bien c'est la constante 0, ou bien son degré d est supérieur ou égal à 1. Dans ce cas, il existe des nombres complexes, $s_1, s_2, \ldots, s_d$, tels que $P(X) = a_0(X - s_1)(X - s_2)\cdots(X - s_d)$ et, si r est une racine quelconque de $P(X)$, on doit avoir $0 = P(r) = a_0(r - s_1)(r - s_2)\cdots(r - s_n)$. Donc r est forcément égal à un des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_d$ et $P(X)$ ne peut pas avoir plus de d racines distinctes.

11.2.4 On peut reformuler le théorème 11.2.3.2 en tenant compte du fait que plusieurs des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de (11.4) peuvent être égaux.

Théorème 11.2.4.1 Si $d \geqslant 1$ est le degré du polynôme $P(X)$, il existe des nombres complexes distincts, $r_1, r_2, \ldots, r_p$, avec $p \leqslant d$, et des entiers strictement positifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$, avec $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$, tels que :

$$P(X) = a_0(X - r_1)^{m_1}(X - r_2)^{m_2} \cdots (X - r_p)^{m_p} \tag{11.5}$$

et les nombres $p, r_1, r_2, \ldots, r_p$ et $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont les seuls à avoir cette propriété.

La factorisation (11.5) s'appelle la ***factorisation complète*** de $P(X)$. Elle joue le rôle, pour les polynômes, de la *décomposition en facteurs premiers* pour les entiers. Les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p$, sont toutes les racines *distinctes* de $P(X)$, et les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p$ s'appellent les ***multiplicités*** des racines. D'une façon générale, on dit que r_k est une ***racine d'ordre*** m_k, mais lorsque la multiplicité est égale à 1, on dit que la racine est ***simple*** et sinon on dit qu'elle est multiple.

Exemple 11.2.4.2 Puisque :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^6 + 2X^5 - 5X^4 - 4X^3 + 7X^2 + 2X - 3 \\ &= (X-1)^3(X+1)^2(X+3) \end{aligned}$$

le polynôme $P(X)$ admet la racine triple $+1$, la racine double -1 et la racine simple -3.

Si $P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + a_2X^{d-2} + \cdots + a_d$, on appelle ***dérivée*** de $P(X)$ le polynôme :

$$P'(X) = a_0\, d X^{d-1} + a_1\,(d-1)X^{d-2} + \cdots + 2a_{d-2}X + a_{d-1}$$

On vérifie sans peine que :

$$(P(X) + Q(X))' = P'(X) + Q'(X) \tag{11.6}$$

$$(P(X)\, Q(X))' = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X) \tag{11.7}$$

Bien évidemment on a aussi des dérivées successives, $P'(X)$, $P''(X)$, $P'''(X)$,... et la ***formule de Taylor*** :

$$P(X) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha)^1 + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!}(X-\alpha)^d \tag{11.8}$$

On en déduit par récurrence le résultat suivant.

Théorème 11.2.4.3 Le nombre complexe r est une racine d'ordre m de $P(X)$ si et seulement si :

$$P(r) = P'(r) = P''(r) = \cdots = P^{(m-1)}(r) = 0 \qquad P^{(m)}(r) \neq 0 \tag{11.9}$$

Si $P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d$ est un polynôme à coefficients complexes, on appelle ***conjugué*** de $P(X)$ et on note $\overline{P}(X)$ le polynôme :

$$\overline{P}(X) = \overline{a_0}X^d + \overline{a_1}X^{d-1} + \cdots + \overline{a_d}$$

Bien évidemment, quel que soit le nombre complexe α, on a :

$$\overline{P}(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} \qquad (11.10)$$

et on démontre facilement le résultat suivant :

Théorème 11.2.4.4 Le conjugué de la dérivée d'ordre k d'un polynôme est égal à la dérivée d'ordre k du conjugué ; autrement dit :

$$\overline{\left(P^{(k)}\right)} = \left(\overline{P}\right)^{(k)} \qquad (11.11)$$

Le théorème 11.2.4.3 aura pour conséquence :

Théorème 11.2.4.5 Quand $P(X)$ a tous ses coefficients réels, à chaque fois qu'un nombre r est une racine de $P(X)$ avec la multiplicité m, le nombre $\overline{r}$ est aussi une racine de $P(X)$, et avec la même multiplicité.

Démonstration : Si r est une racine d'ordre m de $P(X)$, on a :

$$P(r) = P'(r) = P''(r) = \cdots = P^{(m-1)}(r) = 0 \qquad P^{(m)}(r) \neq 0$$

Puisque $\overline{P^{(k)}(r)} = \overline{P^{(k)}}(\overline{r})$, en prenant les conjugués il vient :

$$\overline{P}(\overline{r}) = \overline{P}'(\overline{r}) = \overline{P}''(\overline{r}) = \cdots = \overline{P}^{(m-1)}(\overline{r}) = 0 \qquad \overline{P}^{(m)}(\overline{r}) \neq 0$$

ce qui donne, parce que $P(X)$ a ses coefficients réels :

$$P(\overline{r}) = P'(\overline{r}) = P''(\overline{r}) = \cdots = P^{(m-1)}(\overline{r}) = 0 \qquad P^{(m)}(\overline{r}) \neq 0$$

et le théorème 11.2.4.3 montre alors que $\overline{r}$ est une racine d'ordre m de $\overline{P}(X)$.

11.3 FRACTIONS RATIONNELLES

11.3.1 On appelle ***fraction rationnelle*** à coefficients complexes, toute expression de la forme $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ avec $A(X)$ et $B(X)$ des polynômes à coefficients complexes, $B(X)$ n'étant pas le polynôme nul. Les polynômes sont donc des fractions rationnelles particulières.

Si s est un nombre complexe et si $A(s) = 0$ et $B(s) = 0$, il existe des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ tels que $A(X) = (X - s)P$ et $B(X) = (X - s)Q(X)$, ce qui donne :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{(X-s)P(X)}{(X-s)Q(X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Lorsqu'on passe de $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ à $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$, on dit qu'on ***simplifie*** la fraction rationnelle, et à force de la simplifier, on arrive à une fraction qui ne peut plus l'être. À ce moment on fait une dernière transformation : on remplace $\dfrac{a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots}{b_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots}$, avec b_0 non nul, par $\dfrac{\frac{a_0}{b_0}X^n + \frac{a_1}{b_0}X^{n-1} + \cdots}{X^d + \frac{b_1}{b_0}X^{d-1} + \cdots}$, de façon à ce que le dénominateur soit un polynôme unitaire.

L'expression ainsi obtenue s'appelle la ***forme réduite*** de la fraction rationnelle, son numérateur s'appelle le ***numérateur*** de la fraction rationnelle et son dénominateur le ***dénominateur*** de la fraction rationnelle. On notera n le degré du numérateur et d celui du dénominateur.

Exemple 11.3.1.1 Posons $F(X) = \dfrac{X^6 - 2X^5 + 1}{(X-1)^3(X+3)}$. Puisque 1 est une racine de $X^6 - 2X^5 + 1$, on peut simplifier par $X - 1$ pour obtenir :

$$F(X) = \frac{X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{(X-1)^2(X+3)}$$

qui est la forme réduite de $F(X)$; on a $n = 5$ et $d = 3$.

L'opération qui consiste à passer à la forme réduite s'appelle la ***réduction***. Dans la suite nous nous intéresserons uniquement à des fractions rationnelles réduites, dont on sait factoriser complètement le dénominateur.

Les racines du dénominateur s'appellent les ***pôles*** de la fraction. On dit qu'un pôle est ***simple*** quand sa multiplicité est égale à 1, sinon c'est un pôle ***multiple***.

Exemple 11.3.1.2 La fraction rationnelle de l'exemple précédent admet $+1$ comme pôle double et -3 comme pôle simple.

11.3.2 Parmi toutes les fractions rationnelles, on appelle ***éléments simples*** tous les monômes, $1, X, X^2, \ldots$, et toutes les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{c}{(X-s)^m}$, avec c un nombre complexe non nul, s un nombre complexe quelconque, et m un entier supérieur ou égal 1.

Théorème 11.3.2.1 Toute fraction rationnelle peut s'écrire de façon unique comme une somme d'éléments simples. Cette somme s'appelle la ***décomposition en éléments simples*** de la fraction. Elle est composée :

- d'une ***partie entière*** qui est un polynôme de degré $n-d$ quand $n \geqslant d$, et qui est la constante 0 quand $n < d$;
- d'une ***partie polaire*** associée à chacun des pôles. Pour le pôle s, de multiplicité m, la partie polaire est une somme d'éléments simples de la forme :

$$\frac{c_{-m}}{(X-s)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(X-s)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(X-s)}$$

avec des constantes $c_{-m}, c_{-(m-1)}, \ldots, c_{-1}$ et $c_{-m} \neq 0$.

Exemple 11.3.2.2 On a la décomposition en éléments simples :

$$F(X) = \frac{X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{(X-1)^2(X+3)}$$
$$= X^2 - 2X + 6 + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{-19}{X+3}$$

La partie entière de $F(X)$ est $X^2 - 2X + 6$, sa partie polaire relative au pôle 1 est $\dfrac{-1}{(X-1)^2} + \dfrac{-1}{X-1}$ et sa partie polaire relative au pôle 3 est $\dfrac{-19}{X+3}$.

Dans les deux prochains paragraphes, nous allons voir comment on calcule la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

11.3.3 Nous allons commencer par le calcul de la partie entière de $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$.

Méthode pratique :

Pour calculer la partie entière de $F(X) = \dfrac{a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots}{X^d + b_1X^{d-1} + \cdots}$:

1) On range les monômes de $A(X)$ et de $B(X)$ par puissance *décroissantes* en les disposant comme pour diviser deux nombres entiers :

$$\begin{array}{l|l} \boxed{a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots} & \boxed{X^d + b_1X^{d-1} + \cdots} \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2) On commence par inscrire a_0X^{n-d} sous la barre horizontale de droite — c'est le quotient des termes de plus haut degré dans $A(X)$ et $B(X)$ — puis on multiplie $B(X)$ par a_0X^{n-d}. On écrit le résultat sous $A(X)$, puis on le soustrait de $A(X)$, ce qui donne un nouveau polynôme qui n'a plus de monôme de degré n, et qu'on note $R(X)$; c'est le *reste partiel* de la division.

$$
\begin{array}{c|l}
\boxed{a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots} & \boxed{X^d + b_1X^{d-1} + \cdots} \\
\hline
\boxed{a_0X^{n-d}B(X)} & a_0X^{n-d} \\
\cline{1-1}
\boxed{R(X) = A(X) - a_0X^{n-d}B(X)} &
\end{array}
$$

3) On regarde si le degré de $R(X)$ est strictement inférieur à d :

– si oui, le calcul est fini et il n'y a plus qu'à lire la partie entière dessous la barre de droite ;

– sinon on recommence les opérations de l'étape 2 avec $R(X)$ à la place de $A(X)$ et le quotient des deux termes de plus haut degré à la place de a_0X^{n-d}.

4) On continue d'enchaîner les étapes 2 et 3 jusqu'à ce qu'on rencontre, à l'étape 3, un reste partiel dont le degré est strictement inférieur à d (cela finit toujours par se produire car le degré du reste partiel diminue à chaque étape). À ce moment, la partie entière est écrite sous la barre de droite.

L'opération qui vient d'être décrite s'appelle la ***division selon les puissances décroissantes*** de $A(X)$ par $B(X)$.

Exemple 11.3.3.1 Pour calculer la partie entière de :

$$F(X) = \frac{X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{(X-1)^2(X+3)} = \frac{X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1}{X^3 + X^2 - 5X + 3}$$

on écrit :

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
X^5 & -X^4 & -X^3 & -X^2 & -X & -1 & X^3 & +X^2 & -5X & +3 \\
\cline{7-10}
X^5 & +X^4 & -5X^3 & 3X^2 & & & X^2 & -2X & +6 & \\
\cline{1-6}
 & -2X^4 & +4X^3 & -4X^2 & -X & -1 & & & & \\
 & -2X^4 & -2X^3 & +10X^2 & -6X & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & 6X^3 & -14X^2 & +5X & -1 & & & & \\
 & & 6X^3 & +6X^2 & -30X & 18 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -20X^2 & +35X & -19 & & & &
\end{array}
$$

et on trouve $X^2 - 2X + 6$.

11.3.4 Maintenant voyons la façon de calculer les parties polaires.

Méthode pratique :

Pour obtenir la partie polaire relative au pôle complexe s, de multiplicité m :

1) On remplace X par $s + h$, ce qui donne :

$$F(s+h) = \frac{U(h)}{h^mV(h)}$$

avec $U(h)$ et $V(h)$ deux polynômes en h dont les termes constants ne sont pas nuls (il n'est pas encore nécessaire de les développer) ;

2) On calcule le développement limité à l'ordre -1 de $\dfrac{U(h)}{h^m V(h)}$. Pour cela on développe $U(h)$ et $V(h)$ en ne gardant que les monômes de degré strictement plus petit que m, on les range par puissances *croissantes*, et on fait la division des deux polynômes comme au paragraphe 7.5.6 en calculant avec les nombres complexes comme si c'était des nombres réels. On obtient ainsi un développement limité :

$$\frac{c_{-m}}{h^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{h^{(m-1)}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{h}+o(\frac{1}{h})$$

et la partie polaire relative à s est :

$$\frac{c_{-m}}{(X-s)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(X-s)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(X-s)}$$

Exemple 11.3.4.1 Pour calculer la partie polaire relative au pôle 1 dans :

$$F(X)=\frac{X^5-X^4-X^3-X^2-X-1}{(X-1)^2(X+3)}$$

1) On remplace X par $1+h$, ce qui donne :

$$F(1+h)=\frac{(1+h)^5-(1+h)^4-(1+h)^3-(1+h)^2-(1+h)-1}{h^2(4+h)}$$

2) On développe en ne gardant que les monômes de degré strictement inférieur à 2 :

$$F(1+h)=\frac{-4-5h}{h^2(4+h)}$$

puis on calcule le développement limité à l'ordre -1 :

$$F(1+h)=\frac{-4-5h}{h^2(4+h)}=\left(\frac{-1}{4h^2}\right)\frac{4+5h}{1+\dfrac{h}{4}}=\frac{-1}{h^2}+\frac{-1}{h}+o\left(\frac{1}{h}\right)$$

ce qui donne la partie polaire $\dfrac{-1}{(X-1)^2}+\dfrac{-1}{(X-1)}$.

11.3.5 Dans le cas où la fraction rationnelle a *tous* ses coefficients réels, la décomposition en éléments simples a des propriétés vis-à-vis de la conjugaison complexe.

Théorème 11.3.5.1 Si $F(X)=\dfrac{A(X)}{B(X)}$ a tous ses coefficients réels :

- Les coefficients de la partie entière sont réels ;
- Les coefficients de la partie polaire relative à un pôle réel sont réels ;
- Si s est un pôle qui n'est pas réel, la partie polaire relative à $\bar{s}$ se déduit par conjugaison de la partie polaire relative à s, en faisant comme si X était réel.

Démonstration : Ces propriétés résultent de la façon dont on calcule la partie entière et les parties polaires. Dans le calcul de la partie entière, aucun nombre complexe n'apparaît, donc le polynôme obtenu ne peut avoir que des coefficients réels, et il en est de même quand on calcule la partie polaire relative à un pôle réel.

Pour obtenir la partie polaire relative au pôle s, on fait des calculs à partir des coefficients de $F(X)$, qui sont réels, et de s, dans lesquels n'interviennent que des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions. Pour obtenir la partie polaire relative à $\bar{s}$, on refait les mêmes calculs mais cette fois avec $\bar{s}$ à la place de s. Tous les nombres complexes qu'on rencontre dans un des calculs sont les conjugués de ceux qu'on rencontre dans l'autre, ce qui fait que les résultats des deux calculs sont conjugués.

Exemple 11.3.5.2 La fraction rationnelle :

$$\frac{X^8+2X^4+5}{X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1}$$

a son dénominateur qui se factorise pour donner :

$$\frac{X^8+2X^4+5}{(X^2+1)^2(X-1)}=\frac{X^8+2X^4+5}{(X-i)^2(X+i)^2(X-1)}$$

Elle a donc deux pôles complexes conjugués et un pôle réel. Dans l'exemple 11.3.6.2 nous montrerons que sa décomposition en éléments simples est :

$$X^3+X^2-X-1+\frac{2}{X-1}+\left(\frac{1+i}{(X-i)^2}+\frac{1}{X-i}\right)+\left(\frac{1-i}{(X+i)^2}+\frac{1}{X+i}\right)$$

11.3.6 En complément, nous allons donner quelques « trucs » permettant d'alléger le calcul de la décomposition en éléments simples, ce qui est bien agréable quand on fait les calculs sans machine...

On commence par factoriser le dénominateur de la fraction, après quoi on la simplifie, ce qui donne sa forme réduite, ses pôles et leur multiplicité. Ensuite, on écrit sa décomposition en éléments simples en laissant les coefficients indéterminés. On tient compte du théorème 11.3.5.1, quand les coefficients de la fraction sont réels.

On calcule d'abord la partie entière de la fraction comme il a été dit, puis on détermine les parties polaires des pôles *simples* en utilisant le résultat suivant.

Théorème 11.3.6.1 Si $\dfrac{c_{-1}}{X-s}$ est la partie polaire relative au pôle simple s de $\dfrac{A(X)}{B(X)}$, alors :

$$c_{-1}=\frac{A(s)}{B'(s)} \tag{11.12}$$

Démonstration : La décomposition en éléments simples peut s'écrire :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{c_{-1}}{X-s} + C(X)$$

avec $C(X)$ la somme des autres termes de la décomposition et, puisque $B(s) = 0$, la formule de Taylor (11.8) appliquée à $B(X)$ montre que $B(X) = (X-s)B'(s)+(X-s)^2 D(X)$, avec un certain polynôme $D(X)$. Donc :

$$\frac{(X-s)A(X)}{B(X)} = \frac{A(X)}{B'(s)+(X-s)D(X)} = c_{-1} + (X-s)C(X)$$

après quoi il n'y a plus qu'à remplacer X par s dans l'égalité de droite pour obtenir le résultat.

Quand la fraction possède un pôle d'ordre $m > 1$ on peut encore calculer le coefficient c_{-m} de sa partie polaire en adaptant la méthode précédente.

Méthode pratique :

Pour calculer le coefficient c_{-m} de la partie polaire relative à un pôle d'ordre m :

1) On écrit :

$$\frac{A(X)}{B(X)} = \frac{c_{-m}}{(X-s)^m} + C(X)$$

avec $C(X)$ la somme des autres termes de la décomposition en éléments simples.

2) On multiplie les deux membres par $(X-s)^m$, ce qui donne :

$$\frac{(X-s)^m A(X)}{B(X)} = c_{-m} + (X-s)^m C(X)$$

3) Dans le membre de gauche on retrouve $(X-s)^m$ au dénominateur, car $B(X) = (X-s)^m D(X)$ avec un certain polynôme $D(X)$ tel que $D(s) \neq 0$, qu'on connaît parce que $B(X)$ est complètement factorisé. On simplifie de façon à faire disparaître $(X-s)^m$, et on a alors :

$$\frac{A(X)}{D(X)} = c_{-m} + (X-s)^m C(X)$$

4) On remplace X par s dans l'égalité précédente, et on trouve :

$$c_{-m} = \frac{A(s)}{D(s)}$$

Pour obtenir les autres coefficients des parties polaires des pôles multiples, on peut donner des valeurs particulières à X dans la décomposition en éléments simples ; chaque valeur donne une équation linéaire qui lie les coefficients inconnus. Quand on a assez d'équations, on résout le système linéaire et on obtient ainsi les derniers termes inconnus de la décomposition en éléments simples.

Exemple 11.3.6.2 Retrouvons la décomposion en éléments simples de l'exemple 11.3.5.2. On part de la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^8 + 2X^4 + 5}{X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X - 1}$$

1) On factorise son dénominateur :

$$F = \frac{X^8 + 2X^4 + 5}{(X - i)^2(X + i)^2(X - 1)}$$

2) On écrit sa décomposition en éléments simples avec des coefficients inconnus qui tiennent compte du théorème 11.3.5.1 :

$$\frac{X^8 + 2X^4 + 5}{(X - i)^2(X + i)^2(X - 1)} = a_3X^3 + a_2bX^2 + a_1X + a_0 + \frac{b}{X-1} + \frac{c_{-2}}{(X-i)^2} + \frac{c_{-1}}{X-i} + \frac{\overline{c_{-2}}}{(X+i)^2} + \frac{\overline{c_{-1}}}{X+i}$$

3) On calcule la partie entière par division, ce qui donne :

$$\frac{X^8 + 2X^4 + 5}{(X - i)^2(X + i)^2(X - 1)} = X^3 + X^2 - X - 1 + \frac{b}{X-1} + \frac{c_{-1}}{X-i} + \frac{c_{-2}}{(X-i)^2} + \frac{\overline{c_{-1}}}{X+i} + \frac{\overline{c_{-2}}}{(X+i)^2} \quad (11.13)$$

4) On calcule b. Puisque $B'(X) = 5X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$, on obtient :

$$b = \frac{A(1)}{B(1)} = \frac{1+2+5}{5-4+6-4+1} = 2$$

5) On calcule c_{-2} en multipliant les deux membres de 11.13 par $(X - i)^2$ et en simplifiant, ce qui donne :

$$\frac{(X^8 + 2X^4 + 5)}{(X + i)^2(X - 1)} = c_{-2} + C(X)\,(X - i)^2$$

On remplace X par i dans cette égalité et il vient :

$$c_{-2} = \frac{(i^8 + 2i^4 + 5)}{(2i)^2(i - 1)} = 1 + i$$

Donc :

$$\frac{X^8 + 2X^4 + 5}{(X - i)^2(X + i)^2(X - 1)} = X^3 + X^2 - X - 1 + \frac{2}{X-1} + + \left(\frac{1+i}{(X-i)^2} + \frac{c_{-1}}{X-i}\right) + \left(\frac{1-i}{(X+i)^2} + \frac{\overline{c_{-1}}}{X+i}\right) \quad (11.14)$$

6) Il reste à trouver c_{-1}. On peut remplacer X par -1 dans F et dans (11.14), ce qui donne :

$$-1 = -1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{c_{-1}}{-1-i} + \frac{1}{1-i} + \frac{\overline{c_{-1}}}{-1+i}$$

et on en déduit que :

$$\frac{1-c_{-1}}{1+i} + \frac{1-\overline{c_{-1}}}{1-i} = 0 \qquad (11.15)$$

On peut recommencer en remplaçant X par 0 dans (11.14) ; cette fois :

$$-5 = -1 - 2 - 1 - i - \frac{c_{-1}}{i} - 1 + i + \frac{\overline{c_{-1}}}{i}$$

et on en déduit que $c_{-1} = \overline{c_{-1}}$. En reportant ce résultat dans (11.15), on obtient $c_{-1} = \overline{c_{-1}} = 1$ et on retrouve ainsi le résultat de l'exemple 11.3.5.2.

11.4 UTILISATIONS DE LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

11.4.1 Dans le paragraphe 7.5.6 nous avons vu comment obtenir le développement limité à un ordre donné, au voisinage de 0, d'un quotient de deux polynômes, sans qu'on ait pu donner une expression générale du coefficient de X^n en fonction de n. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle va permettre de trouver une formule.

En effet, en décomposant une fraction rationnelle en éléments simples, on obtient des termes qui entrent tout de suite dans son développement limité au voisinage de 0, ce sont les monômes de la partie entière et les éléments simples de la forme $\frac{c}{X^p}$, quand il y en a, et il reste donc à calculer le développement limité des autres éléments simples, ceux qui sont de la forme $\frac{c}{(X-s)^p}$ avec $s \neq 0$.

Pour cela on écrit :

$$\frac{c}{(x-s)^p} = \frac{c}{(-s)^p\left(1-\frac{x}{s}\right)^p} = \frac{c}{(-s)^p}\left(1-\frac{x}{s}\right)^{-p}$$

et alors :

$$\frac{c}{(x-s)^p} = \frac{c}{(-s)^p}\left[1 + (-p)\left(-\frac{x}{s}\right) + \frac{(-p)(-p-1)}{2}\left(-\frac{x}{s}\right)^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{s}\right)^n\right] + o(x^n) \qquad (11.16)$$

Exemple 11.4.1.1 Dans l'exemple 7.5.6.2 nous avons vu que :

$$\frac{2-x}{1-x-6x^2} = 2 + x + 13x^2 + 19x^3 + 97x^4 + o(x^4)$$

mais on peut retrouver et améliorer ce résultat en écrivant :

$$\frac{2-x}{1-x-6x^2} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+2x}$$

car :

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 3^2x^2 + \cdots + 3^n x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (-2)^2x^2 + \cdots + (-2)^n x^n + o(x^n)$$

et finalement :

$$\frac{2-x}{1-x-6x^2} = (1+1) + (3-2)x + \cdots + \left[3^n + (-2)^n\right] x^n + o(x^n)$$

> ***Remarque :*** On peut se demander si les méthodes de calcul des développements limités que nous avons vues au chapitre 7 sont utilisables quand on a des pôles qui ne sont pas réels. Il n'y a pas lieu de s'inquiéter car on démontre qu'on peut faire les calculs comme si tous les nombres considérés étaient réels.

11.4.2 Une autre application de la décomposition en éléments simples concerne l'intégration des fractions rationnelles.

> ***Méthode pratique :***
>
> Pour intégrer une fraction rationnelle on la décompose en éléments simples puis on intègre chaque élément simple.

Exemple 11.4.2.1 La fonction $f(x) = \dfrac{2-x}{1-x-6x^2}$ est continue sur les intervalles $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $]-\frac{1}{2}; +\frac{1}{3}[$, $]+\frac{1}{3}; +\infty[$; elle admet donc des primitives sur chacun de ces trois intervalles. Pour l'intégrer on écrit :

$$\frac{2-x}{1-x-6x^2} = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+2x}$$

ce qui donne :

$$\int \frac{2-x}{1-x-6x^2}\,dx = \int \frac{1}{1-3x}\,dx + \int \frac{1}{1+2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|1-3x| + \frac{1}{2}\ln|1+2x| + C$$

et on a donc :

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{3}\ln(1-3x) - \frac{1}{2}\ln(-1-2x) + C_1 & \text{sur} \quad]-\infty; -\frac{1}{2}[\\ -\frac{1}{3}\ln(1-3x) + \frac{1}{2}\ln(1+2x) + C_2 & \text{sur} \quad]-\frac{1}{2}; +\frac{1}{3}[\\ -\frac{1}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(1+2x) + C_3 & \text{sur} \quad]+\frac{1}{3}; +\infty[\end{cases}$$

Dans un tel calcul, l'intégration de la partie entière et des parties polaires relatives aux pôles *réels* ne présente pas de difficulté, mais les choses ne sont pas aussi simples quand la fraction possède des pôles qui ne sont pas réels.

On démontre qu'on a le droit d'intégrer un élément simple de la forme $\frac{c}{(x-s)^p}$, avec $p > 1$, comme si c et s étaient réels. On écrit donc :

$$\int \frac{c}{(x-s)^p}\,dx = \left(\frac{1}{1-p}\right)\frac{c}{(x-s)^{p-1}} + C$$

Toute la difficulté vient des éléments simples de la forme $\frac{c}{x-s}$, avec s un nombre qui n'est pas réel, car le logarithme d'un nombre complexe est une notion *fort délicate*... Mais, puisque la fraction rationnelle est à coefficients réels, on trouve aussi $\frac{\overline{c}}{(x-\overline{s})}$ parmi ses éléments simples et, en regroupant ces deux éléments simples, on aura à intégrer $\frac{c}{(x-s)} + \frac{\overline{c}}{(x-\overline{s})}$. Alors on peut vérifier, par exemple en dérivant, que :

$$\int \left(\frac{c}{(x-s)} + \frac{\overline{c}}{(x-\overline{s})}\right) dx = \Re(c)\ln\left(x^2 - 2\Re(s)x + |s|^2\right) + \Im(c)\,2\arctan\left(\frac{\Im(s)}{x-\Re(s)}\right) + C \quad (11.17)$$

Cela revient à dire que si a, b, u et v sont des nombres réels tels que $u^2 < 4v$, on a :

$$\int \frac{ax+b}{x^2+ux+v}\,dx = \frac{a}{2}\ln(x^2+ux+v) + \frac{2b-au}{\sqrt{4v-u^2}}\arctan\left(\frac{2x+u}{\sqrt{4v-u^2}}\right) + C \quad (11.18)$$

Exemple 11.4.2.2 Dans l'exemple 11.3.5.2, nous avons vu que :

$$F = \frac{x^8+2x^4+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$$

se décompose en :

$$F = x^3 + x^2 - x - 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1+i}{(x-i)^2} + \frac{1}{x-i} + \frac{1-i}{(x+i)^2} + \frac{1}{x+i}$$

Pour calculer une primitive de cette fraction, on intègre chaque élément simple, ce qui donne :

$$\int \left(x^3 + x^2 - x - 1 + \frac{2}{x-1}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{1+i}{(x-i)^2}\, dx = -\frac{1+i}{(x-i)} + C$$

$$\int \frac{1-i}{(x+i)^2}\, dx = -\frac{1-i}{(x+i)} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right) dx = \ln\left(x^2+1\right) + C$$

et finalement :

$$\int \frac{x^8 + 2x^4 + 5}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{2(x-1)}{x^2+1} + 2\ln|x-1| + \ln\left(x^2+1\right) + C$$

EXERCICES

11.1. On se donne un nombre complexe $A = a + ib$, avec $b \neq 0$, et on cherche $z = x + iy$, tel que $z^2 = A$.

1) Écrire les équations vérifiées par x et y.

2) Éliminer y pour obtenir une équation vérifiée par x.

3) Que valent x et y ?

4) Résoudre l'équation $-5 + 12i = z^2$.

11.2. On pose $u_1 = 0$ et on définit u_n par récurrence en posant $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$.

1) Montrer que $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$. Que vaut $\cos\frac{\pi}{8}$?

2) Quelles sont les solutions de l'équation $X^8 + 1 = 0$?

3) À chaque solution, z, de l'équation précédente, on associe $t = z + \frac{1}{z}$. Quelles sont les 4 valeurs prises par t ?

4) Montrer que $z^4 + \frac{1}{z^4} = (t^2 - 2)^2 - 2$.

En déduire d'autres expressions des 4 valeurs prises par t.

5) Que valent $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$?

11.3. Décomposer en éléments simples les fractions suivantes et calculer une primitive de chacune :

$$f_1(x) = \frac{x^5 - 15x^2 + 21}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f_2(x) = \frac{x^6 - 21x - 64}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$$

$$f_3(x) = \frac{5}{(x+1)^5 - x^5 - 1}$$

11.4. On se donne trois nombres réels a, b et c, avec $b \neq c$. Comment faut-il les choisir pour que $\displaystyle\int \frac{x+a}{(x-b)^2(x-c)^2}\,dx$ soit une fraction rationnelle ?

11.5. On se donne quatre nombres réels a, b, c et d, avec $c \neq d$. Comment faut-il les choisir pour que $\displaystyle\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}\,dx$ soit une fraction rationnelle ?

11.6. Soit $P(x)$ un polynôme de degré strictement inférieur à n. On se donne n nombres complexes distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tels que $P(a_i) \neq 0$ quel que soit i, et on pose $S(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

Calculer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P(x)}{S(x)}$.

Quel est le lien avec le polynôme d'interpolation de Lagrange (voir exercice 2.4) ?

11.7. Si $P(X) = a_0(X-s_1)^{m_1}\cdots(X-s_p)^{m_p}$ est la factorisation complète du polynôme $P(X)$ quelle est la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$?

11.8. On se donne trois entiers $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, r tel que $0 \leqslant r < n$. On note ω_0, $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, les racines de l'unité d'ordre n.

Montrer qu'on a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{x^{kn+r}}{x^n - 1} = x^r + x^{n+r} + \cdots + x^{(k-1)n+r} + \frac{1}{n}\left(\frac{\omega_0^{r+1}}{x-\omega_0} + \frac{\omega_1^{r+1}}{x-\omega_1} + \cdots + \frac{\omega_{n-1}^{r+1}}{x-\omega_{n-1}}\right)$$

11.9. Après les avoir décomposées en éléments simples, calculer le développement limité à l'ordre n des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{5 - 13x}{1 - 5x + 6x^2} \qquad f_2(x) = \frac{8x - 4x^2}{1 - x - x^2 + x^3}$$

11.10. La lettre θ désigne un nombre réel quelconque.

1) Chercher les pôles, puis décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2\cos\theta\, x + x^2}$$

2) Calculer le développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, de $f(x)$.

11.11. Dans le développement limité :

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + o(x^n)$$

le coefficient F_k s'appelle le ***nombre de Fibonacci d'ordre*** n.

1) Calculer F_0, F_1 et F_2.

2) Écrire de deux façons différentes le développement limité de $(1 - x - x^2)f(x)$. En déduire une relation entre F_k, F_{k-1} et F_{k-2} valable pour tout $k \geqslant 2$. Pourquoi F_k est-il toujours un entier positif ?

3) Décomposer $f(x)$ en éléments simples et utiliser ce résultat pour donner une expression de F_k en fonction de k.

Chapitre 12

Équations différentielles du premier ordre

12.1 POURQUOI DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ?

12.1.1 Les équations différentielles sont des équations d'un type particulier dans lesquelles l'inconnue est une fonction. Plus précisément, une ***équation différentielle d'ordre n*** est une équation qu'on peut ramener, après d'éventuelles transformations, à la forme :

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \tag{12.1}$$

avec t une variable qui parcourt un intervalle ouvert, $\mathcal{I}$, et $x(t)$ une fonction inconnue, n fois dérivable sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

On rencontre des équations différentielles à chaque fois qu'on étudie un phénomène dont le comportement dépend de certaines grandeurs et de la façon dont ces grandeurs varient. En particulier, les équations différentielles jouent un rôle déterminant lorsqu'on veut prédire l'évolution des phénomènes au cours du temps.

Exemple 12.1.1.1 Quand on plonge un corps dans un milieu ambiant, sa température varie sous l'influence de ce milieu ; on voudrait savoir comment. Autrement dit, si T est la température du corps au temps t, on voudrait connaître la fonction f telle que $T = f(t)$. Pour mettre ce problème en équation, nous faisons le raisonnement suivant.

Pendant une très courte période de temps Δt, la température varie de ΔT, et $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ représente sa vitesse de variation. Si on note A la température du milieu ambiant, on peut penser que plus l'écart entre T et A est grand, plus cette vitesse de variation est importante. Alors, pour simplifier, nous supposerons que $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ est proportionnelle à l'écart $T - A$, et que rien d'autre n'entre en jeu. Cette hypothèse, qui colle assez bien à l'expérience tant que les écarts de température et les durées ne sont pas trop grands, se traduit par une égalité du type $\frac{\Delta T}{\Delta t} = -k(T - A)$ avec un coefficient de proportionnalité constant, qu'on note $-k$ parce qu'il doit être négatif (en effet, si la température du milieu ambiant est plus basse que celle du corps celui-ci se refroidit et ΔT doit être négatif, alors que dans le cas contraire il se réchauffe et ΔT doit être positif). Lorsque la période de temps est infiniment courte, le rapport $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ est égal à $f'(t)$ et on a donc :

$$f'(t) = -k\,(f(t) - A)$$

équation qui a été suggérée pour la première fois par Newton.

Plaçons-nous dans le cas particulier où A ne varie pas au cours du temps[1]. Si on pose $g(t) = f(t) - A$, on obtient $g'(t) = -kg(t)$. Le théorème 6.3.2.2 dit alors que $g(t) = Ce^{-kt}$ pour un certaine constante C, ce qui donne $f(t) = A + Ce^{-kt}$. Si T_0 est la température du corps au moment où il est plongé dans le milieu ambiant, au temps $t = t_0$, on doit avoir $T_0 = A + Ce^{-kt_0}$. Donc $C = (T_0 - A)e^{kt_0}$, et finalement :

$$f(t) = A + (T_0 - A)e^{k(t_0 - t)}$$

Maintenant, nous pouvons prédire l'évolution de la température du corps au cours du temps. Elle aura l'allure montrée sur la *figure 12.1*. Le cas (a) se produit quand T_0 est supérieur à A, le cas (b) quand T_0 est égal à A, le cas (c) quand T_0 est inférieur à A. On constate que plus le temps passe, plus T se rapproche de A, mais on ne doit pas oublier les hypothèses qui ont été faites pour arriver à cette conclusion : la durée considérée n'est pas trop longue, A ne varie pas, etc. !

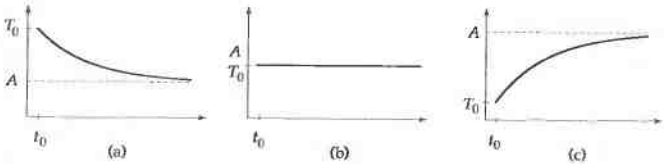


Figure 12.1 Évolution d'une température au cours du temps

1. La validité de cette hypothèse dépend des circonstances de l'expérience. Si on apporte un objet très chaud dans une pièce exiguë et froide, la température de la pièce va s'élever ; c'est ainsi qu'on s'est chauffé pendant des millénaires ! En revanche, si on le met dans un vaste hangar, la température de l'air dans le hangar ne changera pas de façon notable, alors que l'objet se refroidira.

L'exemple qui précède montre la démarche suivie pour étudier ce genre de problème. Dans un premier temps, on met le problème en équation, c'est la ***modélisation***. Elle consiste à repérer les grandeurs qui décrivent le phénomène et à faire les hypothèses physiques qui permettront de dire comment ces grandeurs sont liées à leurs dérivées. Ensuite, quand on a obtenu une ou plusieurs équations différentielles (car il y a aussi des ***systèmes d'équations différentielles***), on cherche à les résoudre. Une fois les équations résolues, on exploite les résultats — tracés de courbes, calculs — et on les confronte à l'expérience.

La modélisation et la comparaison des résultats à l'expérience sont l'affaire de la discipline concernée : physique, chimie, économie, etc. Dans ce qui suit, nous allons uniquement nous intéresser à la partie du travail effectuée par le mathématicien : la résolution des équations différentielles. Ce découpage est parfois trop arbitraire. Quand le mathématicien ne sait pas quoi faire, il est bien content de trouver des indications dans les résultats expérimentaux...

12.1.2 On dit qu'une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $\mathcal{I}$ est une ***solution*** de l'équation différentielle (12.1) si, quand on remplace $x(t)$ par cette fonction, les deux membres de l'équation sont égaux quel que soit t dans $\mathcal{I}$.

Exemple 12.1.2.1 La fonction t est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x'(t) - 2t^2 x(t) = 1 - 2t^3$$

La ***résolution*** d'une équation différentielle c'est la détermination de *toutes* ses solutions[1]. Bien sûr certaines équations différentielles ont des ensembles de solutions qu'on pourrait qualifier de *stupides*, comme $\sin^2 x'(t) + \cos^2 x'(t) = 1$ qui a pour solution n'importe quelle fonction dérivable, ou $x'(t)^2 + x(t)^2 = -1$ qui ne peut pas avoir de solution parce que la somme de deux carrés ne peut jamais être strictement négative, mais la plupart des équations différentielles intéressantes — celles qui proviennent de situations concrètes — ont une *infinité* de solutions, et d'un type bien précis.

Lorsqu'on trouve des formules pour ces solutions, ce qui n'est pas fréquent, on constate qu'elles mettent en jeu des constantes arbitraires, à la façon de l'équation différentielle $x'(t) = a(t)$ qui admet pour solutions $x(t) = \int a(t)\, dt + C$, avec C une constante quelconque. Ces constantes, dont le nombre est égal à l'ordre de l'équation différentielle, s'appellent des ***constantes d'intégration***.

La présence des constantes d'intégration fait, qu'à elle seule, une équation différentielle ne permet pas de déterminer complètement une fonction ; on sait seulement à quoi la fonction ressemble, et il faut faire intervenir d'autres propriétés pour la connaître complètement. C'est ce qu'a montré l'exemple 12.1.1.1 : l'équation différentielle fait que la solution est de la forme $f(t) = A + Ce^{-kt}$, avec une certaine

1. Parce que certaines équations différentielles se résolvent en calculant des intégrales (voir section 12.3), on dit parfois *intégrer* au lieu de *résoudre* ; la résolution des équations différentielles doit donc être vue comme une généralisation de l'intégration.

constante C, mais on a besoin d'un autre renseignement, qui ne provient pas de l'équation, pour connaître C et déterminer complètement $f(t)$.

Jusqu'à la fin du chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux équations différentielles du *premier ordre*, et principalement aux équations différentielles linéaires ; puis dans le chapitre 13, nous étudierons certaines équations différentielles linéaires du *deuxième ordre*.

12.2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

12.2.1 On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** toute équation différentielle qui se ramène à la forme :

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t) \tag{12.2}$$

avec des fonctions $a(t)$ et $b(t)$ connues et une fonction $x(t)$ inconnue. La fonction $b(t)$ s'appelle le ***second membre*** de l'équation. Dans le cas où $b(t)$ est la constante 0, on dit que l'équation est ***homogène***.

Exemple 12.2.1.1 L'équation différentielle de l'exemple 12.1.2.1 est linéaire du premier ordre, mais elle n'est pas homogène.

Le caractère particulier de ces équations permet de les résoudre ; voyons comment.

Supposons qu'on ait trouvé une solution particulière, $p(t)$, de (12.2), et que $g(t)$ soit une autre solution. Alors, en faisant la différence des égalités $g'(t) - a(t)g(t) = b(t)$ et $p'(t) - a(t)p(t) = b(t)$, on obtient :

$$\left[g'(t) - p'(t)\right] - a(t)\left[g(t) - p(t)\right] = 0$$

Mais en posant $h(t) = g(t) - p(t)$, on a aussi $h'(t) = g'(t) - p'(t)$ et on constate que $h(t)$ est une solution de l'équation :

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0 \tag{12.3}$$

Cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est l'***équation sans second membre*** associée à (12.2) qui prend alors le nom d'***équation complète***.

Le calcul précédent peut être refait en sens inverse. Si $p(t)$ est une solution de (12.2) et $h(t)$ une solution quelconque de (12.3), on vérifie immédiatement que $g(t) = h(t) + p(t)$ est une solution de (12.2).

Par tradition, une solution, $p(t)$, qu'on connaît s'appelle une ***solution particulière*** de l'équation et une solution quelconque, $g(t)$, s'appelle la ***solution générale*** de l'équation ; ce que nous venons de voir s'énonce de la façon suivante.

Théorème 12.2.1.2 La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation sans second membre.

Dans les deux prochains paragraphes, nous verrons comment on peut résoudre l'équation sans second membre et l'équation complète.

12.2.2 Pour résoudre l'équation homogène (12.3), on fait le raisonnement suivant. Si $y(t)$ est une solution qui ne s'annule pas, on peut diviser l'équation par $y(t)$ ce qui donne $\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$. La fonction $y(t)$ ne s'annulant pas, $\ln|y(t)|$ est défini pour tout t dans $\mathcal{I}$, et c'est une primitive de $\frac{y'(t)}{y(t)}$. Si $A(t)$ désigne une primitive de $a(t)$ (on suppose dorénavant que $a(t)$ est continue), on a $\ln|y(t)| = A(t) + \gamma$ avec une certaine constante γ, et cette égalité donne :

$$|y(t)| = e^{A(t)+\gamma} = e^{\gamma}\, e^{A(t)}$$

Selon que $y(t)$ garde le signe + ou le signe − on a $y(t) = e^{\gamma}\, e^{A(t)}$ ou $y(t) = -e^{\gamma}\, e^{A(t)}$, mais dans tous les cas $y(t) = C\,e^{A(t)}$ avec une constante C non nulle, et on vérifie tout de suite que n'importe quelle fonction de ce type est bien une solution de (12.3).

Nous venons de trouver toutes les solutions qui ne s'annulent pas, mais quelles sont les autres ?

Le raisonnement précédent prouve que la fonction $c(t) = y(t)e^{-A(t)}$ est constante dans le cas particulier où $y(t)$ ne s'annule pas. Cela nous donne l'idée de voir si $c(t)$ est encore constante dans le cas généal. Pour le vérifier on calcule la dérivée de $c(t)$:

$$c'(t) = y'(t)e^{-A(t)} - A'(t)y(t)e^{-A(t)} = \left[y'(t) - a(t)y(t)\right] e^{-A(t)} = 0$$

Nous avions vu juste : la fonction $c(t)$ est constante et $y(t)$ est bien de la forme $y(t) = C\,e^{A(t)}$ avec une constante C et, puisque toutes les fonctions de cette forme sont des solutions de l'équation (12.3), nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 12.2.2.1 Si $a(t)$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et si $A(t)$ est une primitive quelconque de $a(t)$, les solutions de l'équation homogène (12.3) définies sur $\mathcal{I}$ sont toutes les fonctions $y(t) = C\,e^{A(t)}$ avec C une constante arbitraire.

Ce théorème a des conséquences importantes.

Théorème 12.2.2.2 Si $a(t)$ est une fonction continue, la seule solution de l'équation (12.3) qui s'annule est la fonction constamment nulle, les autres solutions ne s'annulent jamais.

En d'autres termes, une solution de l'équation (12.3) qui prend une valeur non nulle ne s'annule jamais, et une solution qui prend la valeur 0 est partout nulle.

Théorème 12.2.2.3 Quand on a trouvé une solution particulière non nulle de l'équation (12.3), toutes les autres solutions s'obtiennent en la multipliant par une constante arbitraire.

12.2.3 La démonstration du théorème 12.2.2.1 donne la façon de résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre.

Méthode pratique : Pour obtenir les solutions de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$:

1) On l'écrit $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$, ce qui donne, par intégration, $\ln|y(t)| = \displaystyle\int a(t)\,dt$.

2) On cherche une primitive $A(t)$ de $a(t)$.

3) On écrit $\ln|y(t)| = A(t) + \gamma$, puis $|y(t)| = e^{\gamma}\,e^{A(t)}$ et enfin $y(t) = C\,e^{A(t)}$ avec C, une constante arbitraire.

Exemple 12.2.3.1 Appliquons cette méthode pour résoudre :

$$y'(t) - (2t+1)y(t) = 0$$

On écrit $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = 2t+1$, ce qui donne $\ln|y(t)| = \displaystyle\int (2t+1)\,dt$. Puisque $t^2 + t$ est une primitive de $2t+1$, on a $\ln|y(t)| = t^2 + t + \gamma$, donc $|y(t)| = e^{\gamma}\,e^{t^2+t}$ et enfin $y(t) = C\,e^{t^2+t}$ avec une constante C arbitraire.

12.3 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE

12.3.1 Maintenant, nous allons aborder la résolution de $x'(t) - a(t)x(t) = b(t)$. Nous avons résolu l'équation sans second membre en dérivant $c(t) = x(t)\,e^{-A(t)}$. Pourquoi ne pas faire la même chose pour l'équation complète ? Cette fois le calcul donne :

$$c'(t) = \left[x'(t) - a(t)x(t)\right]e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$$

Si on suppose que $b(t)$ est continue, ce que nous ferons toujours doréavant, on peut noter $B(t)$ une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$, et alors nous avons forcément $c(t) = B(t) + C$ avec C une constante. Cela montre que $x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = B(t)\,e^{A(t)} + C\,e^{A(t)} \tag{12.4}$$

À l'inverse, on vérifie immédiatement que toute fonction de cette forme, avec C une constante arbitraire, est une solution de l'équation différentielle complète. Nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème 12.3.1.1 Si $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, si $A(t)$ une primitive particulière de $a(t)$, et $B(t)$ une primitive particulière de $b(t)e^{-A(t)}$, les solutions de l'équation différentielle $x'(t)-a(t)x(t) = b(t)$, définies sur $\mathcal{I}$, sont toutes les fonctions $x(t) = B(t)\,e^{A(t)} + C\,e^{A(t)}$ avec C une constante arbitraire.

12.3.2 Dans la pratique, on résout l'équation complète par la méthode suivante, dite de ***variation de la constante***.

Méthode pratique : Pour obtenir les solutions de l'équation complète :

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t)$$

1) On résout l'équation sans second membre $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ et on trouve $y(t) = C\,e^{A(t)}$.

2) On écrit[1] que $x(t) = c(t)\,e^{A(t)}$, puis on remplace $x(t)$ par cette expression dans l'équation complète qui devient :

$$c'(t)e^{A(t)} + \underbrace{A'(t)c(t)e^{A(t)}} - \underbrace{a(t)c(t)e^{A(t)}} = b(t)$$

et qui se simplifie en $c'(t)e^{A(t)} = b(t)$.

3) On intègre l'équation $c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$ en cherchant une primitive $B(t)$ de $b(t)e^{-A(t)}$, ce qui donne :

$$c(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt = B(t) + C$$

et finalement :

$$x(t) = B(t)\,e^{A(t)} + Ce^{A(t)}$$

Exemple 12.3.2.1 Appliquons la méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation $x'(t) - 2x(t) = (1-t)e^t$.

L'équation sans second membre $y'(t) - 2y(t) = 0$, s'écrit $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = 2$, donc $\ln|y(t)| = 2t + \gamma$, et $y(t) = Ce^{2t}$.

Pour résoudre l'équation complète on remplace $x(t)$ par $c(t)e^{2t}$ ce qui donne :

$$c'(t)e^{2t} + 2c(t)e^{2t} - 2c(t)e^{2t} = (1-t)e^t$$

Donc $c'(t) = (1-t)e^{-t}$ et $c(t) = \displaystyle\int (1-t)e^{-t}\,dt = te^{-t}+C$. Finalement $x(t) = t\,e^t+Ce^{2t}$.

Au passage, nous constatons que la solution générale de l'équation complète, $x(t)$, est bien la somme d'une solution particulière, $t\,e^t$, et de la solution générale de l'équation sans second membre Ce^{2t}.

1. C'est de là que la méthode tire son nom : alors qu'il y avait une constante pour $y(t)$, il y a maintenant une grandeur variable pour $x(t)$.

12.3.3 Nous savons maintenant que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme $g(t) = p(t) + Ch(t)$, avec des fonctions dérivables $p(t)$ et $h(t)$ fixées, la deuxième ne s'annulant jamais, et avec C une constante arbitraire. Cette propriété admet une réciproque.

Théorème 12.3.3.1 Les fonctions de la forme $p(t) + Ch(t)$, avec des fonctions dérivables $p(t)$ et $h(t)$ fixées, la deuxième ne s'annulant jamais, et C une constante arbitraire, sont toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x'(t) - \frac{h'(t)}{h(t)}x(t) = p'(t) - \frac{h'(t)}{h(t)}p(t) \tag{12.5}$$

Démonstration : Notons $g(t) = p(t) + Ch(t)$ avec C une constante quelconque ; nous avons $\frac{g(t) - p(t)}{h(t)} = C$. En dérivant, cela donne :

$$\frac{\left[g'(t) - p'(t)\right] h(t) - [g(t) - p(t)]\, h'(t)}{h(t)^2} = 0$$

et cette condition revient à dire que $g(t)$ est une solution de (12.5).

Il est évident que $p(t)$ est une solution particulière de cette équation et que $h(t)$ est une solution non nulle de l'équation sans second membre. Par conséquent, quand on prend toutes les valeurs de C, on obtient toutes les solutions de (12.5).

12.3.4 Si on dresse le bilan des paragraphes 12.3.2 et 12.2.3, on voit qu'en l'absence de toute indication on résout l'équation différentielle (12.2) au moyen de deux intégrations successives.

Toutefois, quand on connaît une solution particulière, il n'est plus nécessaire de faire appel à la méthode de variation de la constante, et il n'y a plus qu'une seule intégrale à calculer ; mais il y a encore mieux !

Quand on connaît deux solutions particulières distinctes, $p_1(t)$ et $p_2(t)$, leur différence $h(t) = p_1(t) - p_2(t)$ est une solution de (12.3) qui prend au moins une valeur non nulle, donc qui ne s'annule jamais. D'après le théorème 12.2.2.3, toutes les solutions de (12.3) sont de la forme $C\,h(t)$ avec C une constante arbitraire. Il en résulte que la solution générale de (12.2) est de la forme $g(t) = p_2(t) + C\,[p_1(t) - p_2(t)]$ et on n'a plus besoin de faire d'intégration.

Exemple 12.3.4.1 Sachant que l'équation différentielle :

$$x'(t) - \frac{1}{t-1}x(t) = -\frac{1}{t-1}$$

admet 1 et t pour solutions particulières, on n'a pas besoin de calculer une intégrale pour la résoudre, sa solution générale est simplement $g(t) = 1 + C(t - 1)$.

12.3.5 On sait que les solutions de l'équation différentielle (12.2) vont s'écrire sous la forme $g(t) = p(t) + Ch(t)$ mais, quand on n'a pas fixé les fonctions $p(t)$ et $h(t)$, il existe une infinité de façon de les écrire sous cette forme.

Exemple 12.3.5.1 Les solutions de l'exemple 12.3.4.1 peuvent s'écrire $g(t) = 1+C(t-1)$, mais on aurait aussi pu écrire $g(t) = (2t-1) + C(1-t)$; pour cela il suffisait de remplacer C par $2-C$.

En revanche, quand $p(t)$ et $h(t)$ sont fixées, à chaque solution correspond une valeur de la constante C et à chaque valeur de C correspond une solution. Nous allons préciser cette correspondance entre solution et valeur de C.

Fixons un point t_0 de l'intervalle $\mathcal{I}$ et considérons une solution $g(t) = p(t) + Ch(t)$ de l'équation. Alors, si on pose $\gamma_0 = g(t_0)$, on a $\gamma_0 = p(t_0) + Ch(t_0)$ et puisque $h(t_0)$ n'est pas nul, cette égalité donne la valeur de C. On en déduit que :

$$g(t) = p(t) + \frac{\gamma_0 - p(t_0)}{h(t_0)} h(t) \tag{12.6}$$

Dire qu'au départ, quand $t = t_0$, la valeur de $g(t_0)$ est égale à un certain nombre γ_0, c'est se donner une ***condition initiale***. Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Théorème 12.3.5.2 Si $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et si t_0 est un point fixé de $\mathcal{I}$, alors, quel que soit le nombre réel γ_0, il existe une et une seule fonction qui vérifie l'équation différentielle (12.2) et la condition initiale $x(t_0) = \gamma_0$.

12.3.6 Une équation différentielle du type :

$$u(t)x'(t) + v(t)x(t) = w(t) \tag{12.7}$$

avec des fonctions $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ connues, peut se mettre sous la forme :

$$x'(t) - \frac{v(t)}{u(t)} x(t) = \frac{w(t)}{u(t)} \tag{12.8}$$

Supposons les fonctions $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ continues sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ et notons t_0 un point de l'intervalle $\mathcal{I}$.

- Si $u(t_0) \neq 0$, les coefficients de l'équation (12.8) sont définis et continus sur un voisinage de t_0, et le théorème 12.3.5.2 s'applique à cette équation ; donc, quel que soit le nombre γ_0, il existe une et une seule fonction définie au voisinage de t_0 qui vérifie l'équation différentielle (12.7) et la condition initiale $x(t_0) = \gamma_0$.

- $u(t_0) = 0$, on n'est pas certain que l'équation (12.7) ait des solutions définies, continues et dérivables au voisinage de t_0. Bien sûr il existe des solutions à gauche et à droite de t_0 mais tout va dépendre de leur comportement quand t tend vers t_0 et on peut avoir des situations bien différentes selon les cas.

Exemple 12.3.6.1 La solution générale de l'équation différentielle :

$$2(t-1)(t+2)x'(t)+6x(t)=-(t+2)^2$$

est $x(t)=\frac{t}{2}+1+C\frac{t+2}{t-1}$ et la figure 12.4-(b) montre les courbes représentatives de quelques solutions. Toutes passent par le point de coordonnées $(-2;0)$ et toutes, sauf la solution particulière $x(t)=\frac{t}{2}+1$, présentent une asymptote verticale au point $t=1$. On voit donc que le théorème 12.3.5.2 ne s'applique pas à cette équation quand $t_0=-2$ ou $t_0=1$, mais qu'il s'applique dans tous les autres cas.

12.4 ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU PREMIER ORDRE

12.4.1 La simplicité des équations différentielles linéaires permet de trouver une description précise de leurs solutions mais, quand on a affaire à une équation qui n'est pas linéaire, il est rare qu'on puisse aller aussi loin, bien que certaines propriétés importantes restent vraies.

Il n'est pas possible d'obtenir des résultats valables pour toutes les équations du premier ordre. Les seules qu'on puisse un peu étudier sont celles qui peuvent se ramener à la forme :

$$x'(t)=u\,(t,x(t)) \tag{12.9}$$

ce qui est clairement le cas pour les équations linéaires.

Pour avoir des indications sur les solutions d'une telle équation, on dessine le ***champ des éléments de contact***. Cette notion repose sur l'idée que la courbe représentative d'une fonction $x(t)$, qui vérifie la condition initiale $x(t_0)=\gamma_0$, passe par le point P_0 de coordonnées (t_0,γ_0) et qu'en plus, si cette fonction est une solution de (12.9), on a $x'(t_0)=u\,(t_0,\gamma_0)$. Par conséquent, on connaît la tangente à sa courbe représentative au point P_0 et, si on trace une minuscule portion de la tangente, qu'on appelle un ***élément de contact***, on peut considérer qu'à peu de chose près on a dessiné un petit morceau de la courbe.

En prenant beaucoup de points P_0 dans le plan, on tracera une multitude de petits segments et on verra apparaître une esquisse des courbes représentatives des solutions ; on les appelle les ***courbes intégrales*** de l'équation différentielle.

Exemple 12.4.1.1 La *figure 12.2* ***a*** représente le champ des éléments de contact associé à l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $x'(t)=x(t)$ et quelques courbes intégrales sont représentées sur la *figure 12.2* ***b***. Les solutions sont les fonctions $x(t)=Ce^t$ avec des constantes C quelconques. La seule qui s'annule est la fonction constamment nulle, qui correspond à $C=0$. Si on laisse de côté l'axe des abscisses qui est une courbe intégrale particulière, toutes les autres courbes intégrales se déduisent les unes des autres par une translation parallèle à l'axe des abscisses ou par une symétrie par rapport à cet axe suivie d'une telle translation.

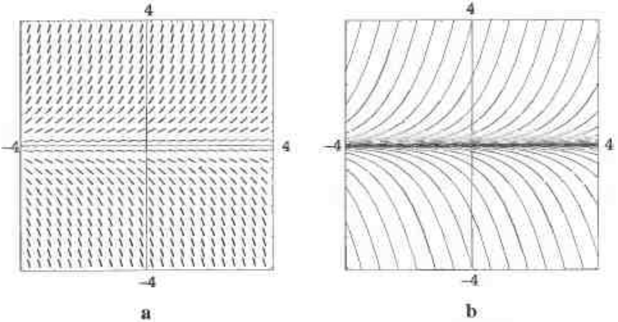


Figure 12.2 Éléments de contacts et courbes intégrales pour $x'(t) = x(t)$

Exemple 12.4.1.2 La *figure 12.3* ***a*** représente le champ des éléments de contact associé à l'équation différentielle $x'(t) = t + x(t)^2$. On y devine assez bien la forme des courbes intégrales tracées sur la *figure 12.3* ***b***.

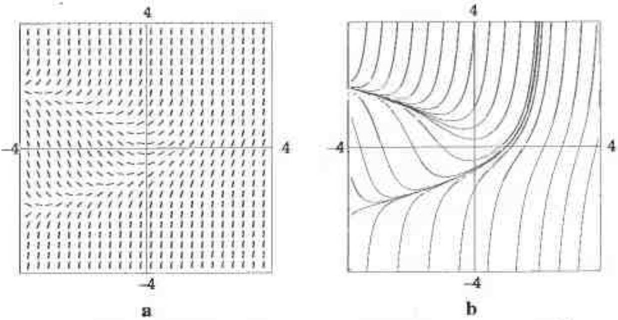
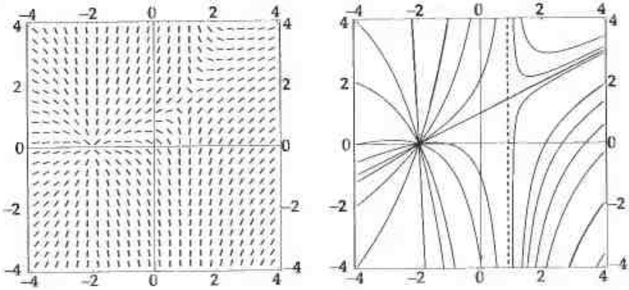


Figure 12.3 Éléments de contacts et courbes intégrales pour $x'(t) = t + x(t)^2$

Exemple 12.4.1.3 La *figure 12.4* ***a*** montre le champ des éléments de contact associé à l'équation $2(t-1)(t+2)x'(t) + 6x(t) = -(t+2)^2$. On voit que les courbes intégrales tracées sur la *figure 12.4* ***b*** passent toutes par le point de coordonnées $(-2; 0)$. Ce point est d'ailleurs le seul point d'abscisse -2 par lequel passent des courbes intégrales. À part la solution particulière $x(t) = \dfrac{t}{2} + 1$, les courbes intégrales présentent toutes une asymptote verticale au point $t = 1$.



a **b**

Figure 12.4 Éléments de contacts et courbes intégrales pour l'équation différentielle $2(t-1)(t+2)x'(t)+6x(t)=-(t+2)^2$

12.4.2 Le fait que se procédé permette de *voir* les courbes intégrales repose sur le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles, connu sous le nom de ***théorème de Cauchy-Lipschitz***, et qui généralise le théorème 12.3.5.2.

Ce théorème dit que si la fonction u, dans (12.9), vérifie une certaine condition de régularité, alors, quel que soit le nombre réel γ_0 dans l'intervalle $\mathcal{I}$, il existe une et une seule fonction qui vérifie l'équation différentielle (12.9) et la condition initiale $x(t_0) = \gamma_0$.

Énoncer la condition de régularité nous emmènerait beaucoup trop loin. Cependant nous avons rencontré une condition qui la remplace dans le cas particulier des équations différentielles linéaires, c'est la condition : *les fonctions* $a(t)$ *et* $b(t)$ *sont continues*.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz a pour conséquence que, par un point du plan situé au dessus de l'intervalle $\mathcal{I}$, passe une et une seule courbe intégrale. Autrement dit, les courbes intégrales ne se croisent pas et ne se touchent pas. Si on pouvait les dessiner toutes, on verrait que la bande infinie du plan qui se trouve au-dessus de l'intervalle $\mathcal{I}$ est constituée d'un empilement de courbes intégrales collées les unes contre les autres (*figure 12.5*).

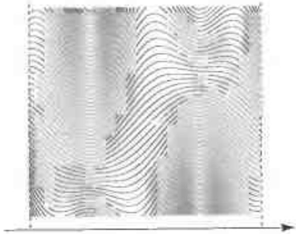


Figure 12.5 Les courbes intégrales d'une équation différentielle

Ce théorème dit aussi qu'une fois le nombre t_0 fixé on peut repérer chaque solution $x(t)$ par le nombre $\gamma_0 = x(t_0)$, et on retrouve ainsi le fait que les solutions dépendent d'une constante. Quand on peut trouver une formule, la fonction $x(t)$ s'exprime à l'aide de t, t_0 et y_0, résultat que nous avions déjà rencontré avec (12.6).

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz consiste à construire des solutions approchées de l'équation différentielle à l'aide des éléments de contact (*figure 12.6*). On trace un petit segment de pente $u(t_0, y_0)$ qui part de P_0 et on note P_1 son extrémité, ainsi que t_1 et y_1 les coordonnées de P_1. Puis, partant de P_1, on trace un nouveau petit segment de pente $u(t_1, y_1)$ et on recommence cette construction autant qu'on le peut. La chaîne de petits segments qu'on obtient ainsi est la courbe représentative d'une fonction qui est proche d'une solution. Tout le travail consiste à démontrer que cette chaîne possède une limite quand la longueur des segments tend vers 0, que cette limite est une courbe intégrale et qu'il n'y a pas d'autre courbe intégrale qui passe par P_0.

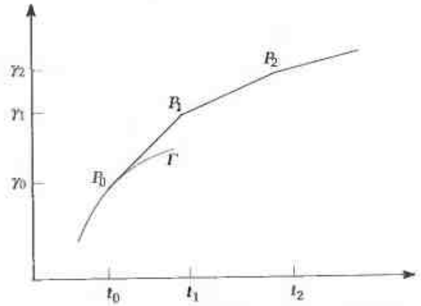


Figure 12.6 Construction approchée d'une courbe intégrale

12.5 RÉSOLUTION DE QUELQUES ÉQUATIONS

12.5.1 Nous allons donner brièvement quelques *recettes* permettant, dans certains cas, de trouver des formules pour représenter les solutions d'une équation différentielle.

On appelle ***équation à variables séparables*** une équation différentielle linéaire qui peut se ramener à la forme :

$$x'(t) = a(t)b(x(t)) \tag{12.10}$$

S'il existe un nombre y tel que $b(y) = 0$, la fonction constamment égale à y est une solution et toutes les solutions constantes sont obtenues de cette façon.

Pour chercher les autres solutions, supposons que a et b sont des fonctions continues et que la fonction b, qui est connue, ne s'annule pas sur un certain intervalle $\mathcal{J}$. Tant que la fonction inconnue $x(t)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{J}$, on aura $\dfrac{x'(t)}{b(x(t))} = a(t)$. Si $B(x)$ est une primitive fixée de $\dfrac{1}{b(x)}$, la fonction $\dfrac{x'(t)}{b(x(t))}$ est la dérivée de $B(x(t))$ et par conséquent, en notant $A(t)$ une primitive fixée de $a(t)$, il existe une constante C telle que $B(x(t)) = A(t) + C$. Puisque la dérivée de $B(x)$ ne s'annule pas, elle garde un signe constant, donc $B(x)$ est strictement monotone et admet une fonction réciproque $B^{(-1)}(x)$. On trouve finalement que $x(t) = B^{(-1)}(A(t)+C)$ et on en déduit une méthode permettant de résoudre ces équations.

Méthode pratique : Pour obtenir les solutions d'une équation à variables séparables $x'(t) = a(t)b(x(t))$:

1) on écrit d'abord l'équation sous la forme $\dfrac{dx}{dt} = a(t)b(x)$, puis sous la forme $\dfrac{dx}{b(x)} = a(t)\,dt$ (c'est ici qu'on *sépare* les variables) ;

2) ensuite on intègre chaque membre séparément, autrement dit on écrit $\displaystyle\int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)\,dt$;

3) on détermine une primitive $B(x)$ de $\dfrac{1}{b(x)}$ et une primitive $A(t)$ de $a(t)$, ce qui donne $B(x) = A(t) + C$;

4) on cherche $B^{(-1)}(x)$, la fonction réciproque de $B(x)$, et on écrit :

$$x(t) = B^{(-1)}(A(t) + C)$$

5) on vérifie la validité de la formule trouvée.

Mise en garde : Cette méthode est surtout un moyen pour deviner les solutions et il ne faut pas négliger l'étape 5 !

Exemple 12.5.1.1 Résolvons l'équation à variables séparables :

$$x'(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$$

Après séparation des variables, elle s'écrit $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$. L'intégration donne $\arcsin x = t + C$ et on en déduit que $x(t) = \sin(t + C)$.

Arrivé là, on pourrait conclure, trop hâtivement, que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et que leurs courbes représentatives sont des sinusoïdes, mais c'est évidemment faux car l'équation initiale impose que $x'(t) \geqslant 0$ quel que soit t, ce qui n'est pas le cas pour $\sin(t + C)$. L'erreur vient de ce que notre calcul n'a plus de sens quand $x(t) = \sin(t + C)$ arrive à la valeur 1 puisqu'on divise par 0...

En fait, les solutions sont les suivantes. Il y a d'abord deux solutions particulières, la constante +1 et la constante −1. Elles ont pour courbes représentatives deux droites horizontales D_+ et D_- qui limitent la bande du plan où se trouvent toutes les courbes intégrales.

Les autres courbes intégrales sont constituées d'un morceau de la droite D_- qui va de $-\infty$ jusqu'à un point arbitraire, de coordonnées $(-\frac{\pi}{2} - C; -1)$, puis d'un arc de sinusoïde montant de ce point jusqu'au point de coordonnées $(+\frac{\pi}{2} - C; +1)$ et enfin d'un morceau de la droite D_+ qui va de ce dernier point jusqu'à $+\infty$ (*figure 12.7*).

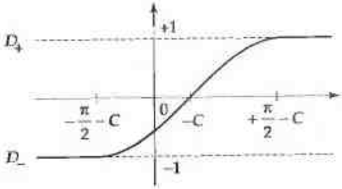


Figure 12.7 Une courbe intégrale de $x'(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$

La *figure 12.8* montre l'ensemble des courbes intégrales ; elles se déduisent les unes des autres par une translation parallèle à l'axe des abscisses.

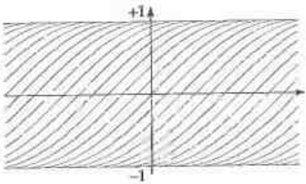


Figure 12.8 Toutes les courbes intégrales de $x'(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$

12.5.2 À présent nous allons généraliser le théorème 12.3.3.1. Fixons quatre fonctions dérivables, $u(t)$, $v(t)$, $r(t)$, $s(t)$, définies sur un intervalle ouvert T, et considérons la fonction :

$$g_C(t) = \frac{u(t) + Cv(t)}{r(t) + Cs(t)}$$

avec C une constante quelconque. Quand la fonction $v(t)r(t) - u(t)s(t)$ est nulle il y a une simplification possible et les fonctions $g_C(t)$ ne dépendent pas de C. Pour cette raison nous supposerons que $v(t)r(t) - u(t)s(t)$ ne s'annule pas.

Dans le cas où $s(t)$ est la fonction nulle, $g_C(t)$ est de la forme $p(t) + Ch(t)$ et on dit qu'elle dépend ***linéairement*** de C ; c'est une situation que nous avons déjà étudiée. Quand $s(t)$ n'est pas la fonction nulle on dit que $g_C(t)$ dépend ***homographiquement*** de C.

Nous pouvons calculer C à partir de $g_C(t)$, ce qui donne $C = \dfrac{g_C(t)r(t) - u(t)}{-g_C(t)s(t) + v(t)}$, et puisque C est une constante, le numérateur de la dérivée du membre de droite est nul. On a donc :

$$\begin{aligned} g'_C(t)\,[v(t)r(t) - s(t)u(t)] + \left[u(t)v'(t) - u'(t)v(t)\right] \\ + g_C(t)\left[s(t)u'(t) - s'(t)u(t) + v(t)r'(t) - v'(t)r(t)\right] \\ + g_C(t)^2\left[r(t)s'(t) - r'(t)s(t)\right] = 0 \quad (12.11) \end{aligned}$$

Une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$x'(t) = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t) \qquad (12.12)$$

avec des fonctions connues $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ s'appelle une ***équation de Riccati*** ; celle de l'exemple 12.4.1.2 était une équation de Ricatti ; les équations linéaires sont des cas particuliers d'équation de Riccati. Nous avons démontréle résultat suivant :

Théorème 12.5.2.1 Soient $u(t)$, $v(t)$, $r(t)$, $s(t)$, quatre fonctions dérivables, définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, telles que $v(t)r(t) - u(t)s(t)$ ne s'annule pas. Alors les fonctions $g_C(t) = \dfrac{u(t) + Cv(t)}{r(t) + Cs(t)}$, avec C une constante quelconque, sont des solutions de l'équation de Riccati (12.12).

Examinons la réciproque. Nous partons de l'équation (12.11). Quand les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont continues sur l'intervalle $\mathcal{I}$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. En particulier deux courbes intégrales différentes ne se rencontrent jamais.

Notons $p(t)$ une solution particulière de (12.12) et $x(t)$ une solution différente de $p(t)$. Alors la fonction $y(t) = \dfrac{1}{x(t) - p(t)}$ est partout définie sur l'intervalle $\mathcal{I}$ et $x(t) = p(t) + \dfrac{1}{y(t)}$ ce qui donne, en reportant dans (12.12) :

$$p'(t) - \frac{y'(t)}{y(t)^2} = a(t)p(t)^2 + 2a(t)\frac{p(t)}{y(t)} + \frac{a(t)}{y(t)^2} + b(t)p(t) + \frac{b(t)}{y(t)} + c(t)$$

mais, parce que $p(t)$ est une solution de (12.12), cette équation se simplifie en :

$$-\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 2a(t)\frac{p(t)}{y(t)} + \frac{a(t)}{y(t)^2} + \frac{b(t)}{y(t)}$$

d'où on déduit que :

$$y'(t) + [b(t) + 2a(t)p(t)]\, y(t) + a(t) = 0$$

Puisque $y(t)$ est solution d'une équation linéaire, elle est de la forme $y(t) = r(t)+Cs(t)$, avec deux fonctions $r(t)$ et $s(t)$ fixées, la seconde ne s'annulant pas, et une constante C arbitraire, ce qui donne :

$$x(t) = p(t) + \frac{1}{r(t) + Cs(t)} = \frac{(p(t)r(t) + 1) + Cp(t)s(t)}{r(t) + Cs(t)}$$

On constate que les solutions de l'équation de Riccati autres que $p(t)$ dépendent homographiquement de la constante C, et si on accepte de dire que la fraction est égale à $p(t)$ quand C est infinie, cette formule représente toutes les solutions de l'équation (12.12).

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

> **Théorème 12.5.2.2** Les solutions d'une équation de Riccati dépendent homographiquement d'une constante.

Remarque : Pour obtenir les solutions d'une équation de Riccati par la méthode qui vient d'être présentée, il faut connaître une solution particulière puis calculer deux intégrales pour résoudre l'équation linéaire. Quand on ne connaît pas de solution particulière, on n'est pas capable de démarrer les calculs. Au contraire, quand on connaît deux solutions particulières, on n'a plus qu'une seule intégrale à calculer, et quand on en connaît trois, on n'a plus besoin d'en calculer aucune.

12.5.3 Pour terminer, voici une dernière famille d'équations différentielles dont la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire. On appelle ***équation de Bernoulli*** toute équation de la forme :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^{\alpha} \tag{12.13}$$

Quand α est égal à 0 ou 1, il s'agit simplement d'une équation linéaire. Pour la réoudre dans le cas général, on pose $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$. Alors $y'(t) = (1-\alpha)x'(t)x(t)^{-\alpha}$ et en reportant dans (12.13) la valeur de $x'(t)$ tirée de cette égalité, on obtient après simplification :

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t)$$

On aura donc $y(t) = p(t) + Ch(t)$ pour des fonctions $p(t)$ et $h(t)$ convenables, et la solution générale de l'équation de Bernoulli est de la forme :

$$x(t) = [p(t) + Ch(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

EXERCICES

12.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) $x'(t) - 3x(t) = 9t - 6$ (E_2) $2x'(t) + 5x(t) = 9e^{2t}$

(E_3) $4x'(t) - x(t) = -17\sin t$ (E_4) $x'(t) + 6x(t) = 20\sin t - 9\cos t$

12.2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) $t\,x'(t) - ax(t) = (b-a)t^b$

(E_2) $t\,x'(t) - atx(t) = (b-at)t^b$

(E_3) $\sin 2t\, x'(t) - 2x(t) = at^{2a-1}\sin 2t - t^{2a}$

(E_4) $\sin t\, x'(t) - \cos t\, x(t) = \cos 3t$

12.3. Trouver les solutions des équations différentielles suivantes qui vérifient les conditions initiales indiquées.

$x'(t) + 2\tan t\, x(t) = 2t\tan t + 4\tan t + 1$ $x(0) = 2$

$\cos t\, y'(t) + 2\sin t\, y(t) = 2t\sin t + \cos t$ $y(0) = 5$

$2\cos t\, z'(t) + 4\sin t\, z(t) = 3 - \cos 2t$ $z(\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12.4. Résoudre l'équation différentielle :

$$x'(t) - (\alpha t^{\alpha-1} + 1)x(t) = (1 - \alpha t^{\alpha})e^t$$

dans laquelle α désigne un nombre réel quelconque et t parcourt $]0;+\infty[$.

12.5. On étudie l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad t(t+2)\,x'(t) - 2x(t) = 2t^2$$

1) Si P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$, quel est le degré de $Q(t) = t(t+2)\,P'(t) - 2P(t)$? En déduire qu'une solution polynomiale de (E) est forcément de la forme $x(t) = at+b$ avec $a \neq 0$.

2) Montrer que (E) possède une seule solution qui soit un polynôme et déterminer ce polynôme. Résoudre (E).

3) Dessiner quelques courbes intégrales de (E).

Quels sont les points du plan où passe une et une seule courbe intégrale ?

Quels sont ceux où il n'en passe pas ?

Quels sont ceux où il en passe plusieurs ?

4) On note $x_c(t)$ la solution de (E) qui vérifie la condition initiale $x_c(-1) = c$.

Pour quelles valeurs de c la courbe représentative de $x_c(t)$ possède-t-elle au moins un point $A(c)$ où la tangente est horizontale ?

Quelle est la courbe décrite par $A(c)$ quand c varie ?

12.6. Résoudre l'équation différentielle :

$$x'(t) = \left(\frac{x(t)+3}{t+3}\right)^2$$

d'abord en la considérant comme une équation à variables séparables, puis comme une équation de Ricatti.

12.7. On considère l'équation de Ricatti :

$$\cos 2t\, x'(t) + \cos t\, x(t)^2 = u(t)$$

dans laquelle $u(t)$ est une fonction choisie pour que $x(t) = 2\sin t$ soit une solution.

1) Que vaut $u(t)$?

2) Résoudre l'équation différentielle. Dessiner quelques courbes intégrales.

3) Montrer qu'il existe des solutions constantes.

4) Indiquer des points du plan où passent plusieurs courbes intégrales, et d'autres où il n'en passe aucune.

12.8. On considère l'équation de Ricatti :

$$(t^2 - t)x'(t) = 2x(t)^2 - (t+2)x(t) + t$$

Trouver des solutions de cette équation (on cherchera des polynômes de petit degré) puis résoudre l'équation.

Chapitre **13**

Équations différentielles d'ordre plus grand que 1

13.1 RÉSULTATS GÉNÉRAUX

13.1.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise aux équations différentielles d'ordre supérieur à 1. Étant donnée une équation différentielle d'ordre n de la forme :

$$x^{(n)}(t) = u\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \tag{13.1}$$

avec des fonctions définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, on démontre que si u vérifie une certaine condition de régularité, alors, quel que soit t_0 dans $\mathcal{I}$ et quels que soient les nombres réels $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, il existe *une* et *une seule* fonction $x(t)$ qui vérifie l'équation différentielle (13.1) et les conditions initiales :

$$x(t_0) = \gamma_0 \quad x'(t_0) = \gamma_1 \quad \cdots \quad x^{(n-1)}(t_0) = \gamma_{n-1}$$

On voit donc qu'une équation différentielle d'ordre n possède une infinité de solutions et qu'on a besoin de n conditions supplémentaires quand on veut en choisir une.

Il faut bien comprendre que l'unicité affirmée par le théorème de Cauchy-Lipschitz est une condition très forte. Il nous dit que si $p(t)$ et $q(t)$ sont deux solutions particulières, il suffit qu'on ait :

$$p(t_0) = q(t_0) \qquad p'(t_0) = q'(t_0) \quad \cdots \quad p^{(n-1)}(t_0) = q^{(n-1)}(t_0)$$

une fois en un certain point t_0 de $\mathcal{I}$ pour que :

$$p(t) = q(t) \qquad p'(t) = q'(t) \quad \cdots \quad p^{(n-1)}(t) = q^{(n-1)}(t)$$

quel que soit t dans $\mathcal{I}$.

13.1.2 Nous allons utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour décrire l'ensemble des solutions d'un type particulier d'équations différentielles.

On appelle ***équation différentielle linéaire d'ordre n*** toute équation différentielle qui peut se ramener à la forme :

$$x^{(n)}(t) - a_1(t)x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_n(t)x(t) = b(t) \tag{13.2}$$

avec des fonctions $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, $b(t)$ connues, définies sur un intervalle ouvert $\mathcal{I}$, et une fonction $x(t)$ inconnue définie elle aussi sur $\mathcal{I}$. Les fonctions $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, s'appellent les ***coefficients*** de l'équation et $b(t)$ le second membre.

Si $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ et $b(t)$ sont continues, les conditions permettant d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz sont remplies, et les conclusions du théorème sont valables.

Quand $b(t)$ est la constante 0, on dit que l'équation est ***homogène***. En particulier, l'équation homogène :

$$x^{(n)}(t) - a_1(t)x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_n(t)x(t) = 0 \tag{13.3}$$

est l'***équation sans second membre*** associée à (13.2) qui prend alors le nom d'***équation complète***.

Enfin, le théorème 12.2.1.2 se généralise immédiatement aux équations linéaires d'ordre quelconque.

Théorème 13.1.2.1 La solution générale de l'équation complète (13.2) s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation complète à la solution générale de l'équation sans second membre (13.3).

Alors, une fois encore, la résolution va se décomposer en deux parties : la résolution de l'équation sans second membre, puis la recherche d'une solution particulière.

13.2 ÉQUATIONS LINÉAIRES HOMOGÈNES

13.2.1 Contrairement aux équations homogènes du premier ordre dont la résolution se ramène au calcul d'une intégrale, on ne sait pas résoudre les équations linéaires homogènes d'ordre supérieur ou égal à 2, sauf dans des cas très particuliers.

Exemple 13.2.1.1 On ne sait pas résoudre une équation aussi simple que l'***équation de Airy*** :

$$x''(t) - tx(t) = 0$$

mais, parce que cette équation joue un rôle important en optique et dans d'autres domaines de la physique, on donne un nom à deux solutions particulières qu'on appelle les ***fonctions de Airy*** ; on les note **Ai** et **Bi**.

Malgré l'énormité de cet obstacle, nous pourrons obtenir des informations sur la nature des solutions des équations homogènes parce que ces équations possèdent une propriété fondamentale énoncée dans le prochain théorème. Commençons par une définition :

Soient $p_1(t), \ldots, p_r(t)$ des fonctions et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, des constantes. On dit que la fonction $p(t) = \alpha_1 p_1(t) + \cdots + \alpha_r p_r(t)$ est une ***combinaison linéaire*** des fonctions $p_1(t), \ldots, p_r(t)$.

> **Théorème 13.2.1.2** Si $p_1(t), \ldots, p_r(t)$ sont des solutions de l'équation (13.3), toutes les combinaisons linéaires de $p_1(t), \ldots, p_r(t)$ sont des solutions de (13.3).

Démonstration : On écrit les r équations obtenues en remplaçant $x(t)$ par chacune des fonctions $p_k(t)$, puis on multiplie ces équations par les constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et on les ajoute membre à membre.

Ce théorème donne l'idée de voir s'il est possible d'écrire toutes les solutions de (13.3) à partir de certaines d'entre elles, en faisant des combinaisons linéaires. C'est ce que nous allons constater.

13.2.2 Fixons un point t_0 dans l'intervalle $\mathcal{I}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit qu'il existe n solutions particulières, $e_0(t), \ldots, e_{n-1}(t)$ de l'équation (13.3) vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{array}{lllll}
e_0(t_0)=1 & e_0'(t_0)=0 & \cdots & e_0^{(n-2)}(t_0)=0 & e_0^{(n-1)}(t_0)=0 \\
e_1(t_0)=0 & e_1'(t_0)=1 & \cdots & e_1^{(n-2)}(t_0)=0 & e_1^{(n-1)}(t_0)=0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
e_{n-2}(t_0)=0 & e_{n-2}'(t_0)=0 & \cdots & e_{n-2}^{(n-2)}(t_0)=1 & e_{n-2}^{(n-1)}(t_0)=0 \\
e_{n-1}(t_0)=0 & e_{n-1}'(t_0)=0 & \cdots & e_{n-1}^{(n-2)}(t_0)=0 & e_{n-1}^{(n-1)}(t_0)=1
\end{array}$$

En d'autres termes :

$$e_j^{(i)}(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{13.4}$$

> **Théorème 13.2.2.1** La fonction $p(t) = \alpha_1 e_0(t) + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}(t)$ est la seule solution de (13.3) qui vérifie les conditions initiales :
>
> $$p(t_0) = \alpha_0 \qquad p'(t_0) = \alpha_1 \quad \cdots \quad p^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1} \tag{13.5}$$

Démonstration : On sait qu'il existe une seule solution vérifiant des conditions initiales données. Quand on calcule les dérivées successives de $p(t)$ on obtient :

$$p^{(i)}(t) = \alpha_1 e_0^{(i)}(t) + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}^{(i)}(t)$$

et il suffit de remplacer t par t_0 pour obtenir (13.5).

On déduit, de ce théorème, le résultat suivant.

Théorème 13.2.2.2 Quand on change un ou plusieurs des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ dans $p(t) = \alpha_1 e_0(t) + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}(t)$, on change de solution.

> ***Démonstration :*** Bien évidemment, la solution obtenue n'est plus la même parce qu'elle ne vérifie plus les mêmes conditions intiales !

13.2.3 Maintenant notons $g(t)$ une solution quelconque de (13.3) et posons :

$$p(t) = g(t_0)e_0(t) + \cdots + g^{(n-1)}(t_0)e_{n-1}(t)$$

D'après le théorème 13.2.2.1, cette fonction $p(t)$ est la solution de (13.3) qui vérifie les conditions initiales :

$$p(t_0) = g(t_0) \quad p'(t_0) = g'(t_0) \quad \cdots \quad p^{(n-1)}(t_0) = g^{(n-1)}(t_0)$$

et, d'après l'unicité affirmée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a forcément $p(t) = g(t)$ quel que soit t. Ce résultat associé au theorème 13.2.2.2 donne le théorème suivant :

Théorème 13.2.3.1 La solution générale de (13.3) est une combinaison linéaire des solutions particulières $e_0(t), \dots, e_{n-1}(t)$. Elle s'écrit :

$$g(t) = g(t_0)e_0(t) + \cdots + g^{(n-1)}(t_0)e_{n-1}(t) \tag{13.6}$$

et c'est la seule façon de l'écrire comme combinaison linéaire de $e_0(t), \dots, e_{n-1}(t)$.

Exemple 13.2.3.2 Considérons l'équation homogène :

$$x''(t) - \left(\frac{t\cos t}{\cos t + t\sin t}\right)x'(t) + \left(\frac{\cos t}{\cos t + t\sin t}\right)x(t) = 0$$

avec $\mathcal{I} =]-2;2[$. On peut vérifier que la fonction $\cos t + t\sin t$ ne s'annule pas sur cet intervalle ; les coefficients de l'équation sont donc des fonctions continues. Avec $t_0 = 0$, on observe que $e_0(t) = \cos t$ et $e_1(t) = t$. Par conséquent, la solution générale de l'équation est $g(t) = g(0)\cos t + g'(0)t$.

Même si, dans le cas général, on ne sait pas trouver de formules pour représenter les solutions $e_0(t), \dots, e_{n-1}(t)$, le théorème 13.2.3.1 est de la plus grande importance car il donne une description de l'ensemble des solutions de (13.3) en montrant de quelle façon elles dépendent de n constantes arbitraires.

Exemple 13.2.3.3 Bien qu'on ne sache pas résoudre au moyen d'une formule l'équation de Airy (exemple 13.2.1.1), on peut prouver que toutes ses solutions sont de la forme $g(t) = C_1 Ai(t) + C_2 Bi(t)$, avec C_1 et C_2 deux constantes arbitraires.

13.2.4 Après le théorème 13.2.3.1, nous pouvons nous demander s'il existe d'autres familles de solutions particulières $q_0(t), \ldots, q_{n-1}(t)$ définies par d'autres conditions initiales, ayant la propriété que la solution générale s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $q_0(t), \ldots, q_{n-1}(t)$. Une telle famille de solutions s'appelle une ***base*** de l'ensemble des solutions.

Pour traiter ce problème dans sa totalité, il faudrait faire appel aux techniques de l'*algèbre linéaire*, mais cela nous ferait sortir du cadre de ce cours. Nous allons nous restreindre aux équations d'ordre 2 car c'est un ordre suffisamment bas pour qu'on puisse présenter les calculs sans avoir à mettre en œuvre des notions générales et parce que, dans la pratique, ce sont les équations les plus utilisées.

Étant données $q_0(t)$ et $q_1(t)$ deux solutions de l'équation :

$$x''(t) - a_1(t)x'(t) - a_2(t)x(t) = 0 \tag{13.7}$$

on appelle ***wronskien*** de q_0 et q_1 la fonction :

$$W_{q_0,q_1}(t) = q_0(t)q_1'(t) - q_0'(t)q_1(t) \tag{13.8}$$

Théorème 13.2.4.1 (caractérisation des bases) La condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions $q_0(t)$ et $q_1(t)$ forment une base de l'ensemble des solutions est qu'en un point arbitraire, t_0, de l'intervalle $\mathcal{I}$, on ait $W_{q_0,q_1}(t_0) \neq 0$.

Démonstration : Pour que $q_0(t)$ et $q_1(t)$ forment une base de l'ensemble des solutions, il est nécessaire qu'on puisse associer à chaque solution, $g(t)$, arbitrairement choisie, deux constantes, C_0 et C_1, telles que $g(t) = C_0q_0(t) + C_1q_1(t)$ quel que soit t dans $\mathcal{I}$.

En dérivant, on doit aussi avoir $g'(t) = C_0q_0'(t) + C_1q_1'(t)$. Alors, si on choisit un point t_0 de l'intervalle $\mathcal{I}$, ces constantes C_0 et C_1 doivent vérifier :

$$\begin{aligned} g(t_0) &= C_0q_0(t_0) + C_1q_1(t_0) \\ g'(t_0) &= C_0q_0'(t_0) + C_1q_1'(t_0) \end{aligned} \tag{13.9}$$

ce qui donne un système dont elles sont les inconnues, mais il se trouve que le déterminant du système n'est autre que $q_0(t_0)q_1'(t_0) - q_0'(t_0)q_1(t_0) = W_{q_0,q_1}(t_0)$, ce qui permet de détailler les diverses possibilités.

On sait qu'un système de ce type admet toujours une solution quand son déterminant est différent de 0, et qu'au contraire, quand son déterminant est nul, il n'a pas toujours de solution selon ce qu'on a mis dans le membre de gauche.

Alors, quand $W_{q_0,q_1}(t_0) = 0$, on peut choisir les deux nombres $g(t_0)$ et $g'(t_0)$ pour que le système (13.9) ne puisse pas être résolu, et, puisqu'on ne peut pas trouver C_0 et C_1, la solution $g(t)$ définie par ce choix de $g(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire de $q_0(t)$ et $q_1(t)$; donc $q_0(t)$ et $q_1(t)$ ne forment pas une base.

Au contraire, quand $W_{q_0,q_1}(t_0) \neq 0$, notons $g(t)$ une solution quelconque de l'équation différentielle et calculons les nombres C_0 et C_1 qui vérifient (13.9). Ces nombres sont uniques, et la fonction $p(t) = C_0q_0(t) + C_1q_1(t)$ construite avec ces valeurs de C_0 et de C_1 est telle que $p(t_0) = C_0q_0(t_0) + C_1q_1(t_0) = g(t_0)$ et

$p'(t_0) = C_0q_0'(t_0) + C_1q_1'(t_0) = g'(t_0)$; elle vérifie donc les mêmes conditions initiales que $g(t)$, ce qui fait que $g(t) = p(t) = C_0q_0(t) + C_1q_1(t)$ quel que soit t. Il en résulte que toute solution, $g(t)$, de l'équation différentielle s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $q_0(t)$ et $q_1(t)$; ces fonctions forment donc une base.

13.2.5 D'après le théorème précédent, lorsqu'on prend deux solutions $q_0(t)$ et $q_1(t)$, ou bien elles forment une base, et alors $W_{q_0,q_1}(t_0) \neq 0$ avec t_0 quelconque, ou bien ce n'est pas le cas. Cela entraîne que $W_{q_0,q_1}(t)$ ne s'annule jamais, ou bien est toujours nul. C'est une propriété qu'on va retrouver autrement. Écrivons que $q_1(t)$ et $q_0(t)$ sont solutions de l'équation (13.7) :

$$q_1''(t) - a_1(t)q_1'(t) - a_2q_1(t) = 0$$
$$q_0''(t) - a_1(t)q_0'(t) - a_2q_0(t) = 0$$

Multiplions la première équation par $q_0(t)$, la deuxième par $q_1(t)$, puis retranchons, nous obtenons :

$$\left[q_0(t)q_1''(t) - q_0''(t)q_1(t)\right] - a_1(t)\left[q_0(t)q_1'(t) - q_0'(t)q_1(t)\right] = 0$$

Mais, parce que $W'_{q_0,q_1}(t) = q_0(t)q_1''(t) - q_0''(t)q_1(t)$, cela signifie que $W_{q_0,q_1}(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$W'_{q_0,q_1}(t) - a_1(t)W_{q_0,q_1}(t) = 0 \tag{13.10}$$

Comme la solution d'une telle équation différentielle ne s'annule jamais ou est constamment nulle, on retrouve la propriété annoncée.

> ***Remarque :*** Supposons que $q_0(t)$ ne s'annule jamais sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Puisque :
>
> $$\left(\frac{q_1(t)}{q_0(t)}\right)' = \frac{W_{q_0,q_1}(t)}{q_0(t)^2}$$
>
> la condition $W_{q_0,q_1}(t) = 0$ quel que soit t équivaut au fait que la fonction $\frac{q_1(t)}{q_0(t)}$ est constante ; le raisonnement serait le même si c'était $q_1(t)$ qui ne s'annulait pas, donc, quand une des fonctions $q_0(t)$ ou $q_1(t)$ ne s'annule pas, la condition pour qu'elles forment une base est que l'une ne soit pas un multiple constant de l'autre.

13.3 ÉQUATIONS LINÉAIRES AVEC SECOND MEMBRE

13.3.1 Pareillement aux équations différentielles du premier ordre, on peut obtenir une solution particulière de l'équation complète :

$$x''(t) - a_1(t)x'(t) - a_2(t)x(t) = b(t) \tag{13.11}$$

à partir des solutions de l'équation sans second membre, en appliquant une ***méthode de variation des constantes***.

Parce que la solution générale de l'équation sans second membre est $h(t) = C_0q_0(t) + C_1q_1(t)$ avec deux fonctions $q_0(t)$ et $q_1(t)$ qui forment une base, on cherche la solution de l'équation complète sous la forme $x(t) = c_0(t)q_0(t) + c_1(t)q_1(t)$, avec des fonctions $c_0(t)$ et $c_1(t)$ qu'on va déterminer. Nous aurons :

$$x'(t) = \left[c_0(t)q_0'(t) + c_1(t)q_1'(t)\right] + \left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right]$$

puis, en dérivant :

$$x''(t) = \left[c_0(t)q_0''(t) + c_1(t)q_1''(t)\right] + \left[c_0'(t)q_0'(t) + c_1'(t)q_1'(t)\right] + \left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right]'$$

Si on reporte dans (13.11) on obtient d'abord :

$$\begin{aligned} c_0(t)&\left[q_0''(t) - a_1(t)q_0'(t) - a_2(t)q_0(t)\right] \\ &+ c_1(t)\left[q_1''(t) - a_1(t)q_1'(t) - a_2(t)q_1(t)\right] \\ &+ \left[c_0'(t)q_0'(t) + c_1'(t)q_1'(t)\right] + \left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right]' \\ &- a_1(t)\left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right] = b(t) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette somme disparaissent parce que $q_0(t)$ et $q_1(t)$ sont des solutions de l'équation sans second membre et il reste :

$$\left[c_0'(t)q_0'(t) + c_1'(t)q_1'(t)\right] + \left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right]' - a(t)\left[c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)\right] = b(t)$$

mais puisqu'on a introduit deux fonctions inconnues, $c_0(t)$ et $c_1(t)$, alors qu'au départ seule $x(t)$ était inconnue, on a le droit d'imposer une condition entre $c_0(t)$ et $c_1(t)$. Nous déciderons que $c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t)$ est constamment nulle, ce qui fait que sa dérivée aussi est nulle, et l'équation précédente devient $c_0'(t)q_0'(t) + c_1'(t)q_1'(t) = b(t)$. Nous avons donc un système :

$$\begin{aligned} c_0'(t)q_0(t) + c_1'(t)q_1(t) &= 0 \\ c_0'(t)q_0'(t) + c_1'(t)q_1'(t) &= b(t) \end{aligned} \tag{13.12}$$

Parce que $q_0(t)$ et $q_1(t)$ forment une base, leur wronskien ne s'annule pas. On peut donc calculer $c_0'(t)$ et $c_1'(t)$ à partir des équations précédentes, après quoi, il n'y aura plus qu'à intégrer pour récupérer $c_0(t)$, $c_1(t)$ et $x(t)$.

Exemple 13.3.1.1 L'équation sans second membre associée à

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^t \tag{13.13}$$

admet pour solutions $q_0(t) = e^{-t}$ et $q_1(t) = e^{3t}$. Ces deux solutions forment une base parce que leur wronskien $W_{q_0,q_1}(t) = 4e^{2t}$ ne s'annule pas. En résolvant le système (13.12), on obtient $c_0'(t) = \dfrac{e^{-2t}}{4}$ et $c_1'(t) = -\dfrac{e^{-2t}}{4}$. L'intégration de ces égalités donne

$c_0(t) = -\dfrac{e^{2t}}{8} + C_0$ et $c_1(t) = -\dfrac{e^{-2t}}{8} + C_1$, avec C_0 et C_1 des constantes arbitraires, et finalement $x(t) = -\dfrac{e^t}{4} + C_0e^{-t} + C_1e^{3t}$.

13.3.2 Une autre façon de résoudre (13.11), utile quand on ne connaît qu'une seule solution de l'équation sans second membre, s'appelle la ***méthode d'abaissement de l'ordre***.

Étant donnée $q(t)$, une solution de l'équation sans second membre, on cherche à écrire la solution générale de l'équation complète sous la forme $x(t) = c(t)q(t)$. Pour cela, on dérive deux fois et on reporte dans (13.12), ce qui donne, après une simplification due au fait que $q(t)$ est une solution de l'équation sans second membre :

$$c''(t)q(t) + c'(t)\left[2q'(t) - a_1(t)q(t)\right] = b(t)$$

Alors, si $d(t) = c'(t)$, on obtient $d(t)$ en résolvant l'équation du premier ordre :

$$d'(t)q(t) + d(t)\left[2q'(t) - a_1(t)q(t)\right] = b(t) \tag{13.14}$$

d'où le nom de la méthode. Ensuite, on calcule $c(t)$ par une intégration et aussitôt après on a $x(t)$.

Exemple 13.3.2.1 Supposons qu'on ne connaisse que $q(t) = e^{-t}$ comme solution de l'équation sans second membre associée à (13.13). On pose $x(t) = c(t)e^{-t}$, on dérive deux fois et on reporte dans (13.13), ce qui donne $c''(t)e^{-t} - 4c'(t)e^{-t} = e^t$, ou encore $d'(t) - 4d(t) = e^{2t}$ avec $d(t) = c'(t)$. L'équation sans second membre associée à cette équation linéaire du premier ordre a pour solution e^{4t} et la méthode de variation de la constante donne $d(t) = -\dfrac{e^{2t}}{2} + De^{4t}$ avec D une constante arbitraire. En intégrant, on obtient $c(t) = -\dfrac{e^{2t}}{4} + \dfrac{D}{4}e^{4t} + C_0$ avec C_0 une constante arbitraire. Si on pose $C_1 = \dfrac{D}{4}$, cela donne finalement $x(t) = -\dfrac{e^t}{4} + C_0e^{-t} + C_1e^{3t}$ et on retrouve le résultat de l'exemple 13.3.1.1.

13.4 ÉQUATIONS LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

13.4.1 Une équation différentielle qu'on peut mettre sous la forme :

$$a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_nx(t) = f(t) \tag{13.15}$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$, des nombres réels fixés, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ une fonction connue et $x(t)$ une fonction inconnue, s'appelle une ***équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants***. On rencontre des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants dans de nombreuses branches de la physique ; voici un premier exemple, mais nous en verrons un autre dans la section 13.5.

Exemple 13.4.1.1 Notons $q(t)$ la charge du condensateur au temps t dans le circuit électrique ***RLC*** de la figure 13.1, constitué d'un géérateur de tension de force électromotrice E, d'un condensateur de capacité C, d'une résistance R, et d'une bobine d'inductance L. On démontre que :

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$$

et la résolution de cette équation permet de savoir comment varient $q(t)$ et sa dérivée, $i(t)$, l'intensité du courant qui passe dans le circuit. L'équation sans second membre correspond au cas où le générateur de courant est inopérant.

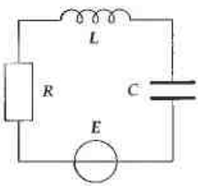


Figure 13.1 Un circuit RLC

13.4.2 Nous allons étudier les équations différentielles d'ordre 2 linéaires à coefficients constants en commençant par celles qui sont homogènes. La résolution de l'équation *différentielle* du deuxième ordre :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0 \tag{13.16}$$

se ramène à la résolution de l'équation *algébrique* du deuxième degré :

$$aT^2 + bT + c = 0 \tag{13.17}$$

qu'on appelle ***équation caractéristique***. Le lien entre les deux équations provenant du théorème suivant.

> **Théorème 13.4.2.1** Soit r un nombre réel ou complexe. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction réelle ou complexe $s(t) = e^{rt}$, de la variable réelle t, vérifie (13.16) est que r soit une racine de l'équation caractéristique.

Démonstration : On trouve $as''(t) + bs'(t) + cs(t) = (ar^2 + br + c)e^{rt}$ et, comme l'exponentielle ne s'annule pas, le premier membre est nul si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique.

Le théorème 13.4.2.1 va avoir pour conséquence le résultat suivant.

Théorème 13.4.2.2 La solution générale de $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$ est :

$$x(t) = \begin{cases} C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} & \text{quand (13.17) a deux racines \textit{réelles} distinctes } r_1 \text{ et } r_2, \\ C_1e^{ut}\cos vt + C_2e^{ut}\sin vt & \text{quand (13.17) a deux racines \textit{complexes} distinctes } u+iv \text{ et } u-iv, \\ C_1e^{rt} + C_2te^{rt} & \text{quand (13.17) a la racine \textit{double} } -\dfrac{b}{2a}. \end{cases}$$

Démonstration : Nous allons examiner séparément chacun des trois cas.

• Dans le cas où (13.17) a deux racines *réelles* distinctes, r_1 et r_2, les deux solutions $s_1(t) = e^{r_1t}$ et $s_2(t) = e^{r_2t}$ ont leur wronskien $W_{s_1,s_2}(t) = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}$ qui ne s'annule pas. Il en résulte que les solutions sont les fonctions $x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$ avec des constantes C_1 et C_2 arbitraires.

Exemple 13.4.2.3 L'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire $x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = 0$, qui est $T^2 - 2T - 3 = 0$, a pour racine -1 et 3, donc la solution générale est $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$.

• Dans le cas où l'équation caractéristique (13.17) a deux racines *complexes* distinctes, $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$, les fonctions $e^{r_1t} = e^{(u+iv)t} = e^{ut}(\cos vt + i\sin vt)$ et $e^{r_2t} = e^{(u-iv)t} = e^{ut}(\cos vt - i\sin vt)$ sont des solutions de (13.16), mais elles ne sont plus à valeurs réelles. On vérifie sans peine que toutes les combinaisons linéaires de ces fonctions, avec des coefficients réels ou complexes, vérifient aussi (13.16). Il en résulte que leur partie réelle, $s_1(t) = e^{ut}\cos vt = \dfrac{1}{2}e^{r_1t} + \dfrac{1}{2}e^{r_2t}$, et leur partie imaginaire, $s_2(t) = e^{ut}\sin vt = \dfrac{1}{2i}e^{r_1t} - \dfrac{1}{2i}e^{r_2t}$, sont des solutions réelles de (13.16). Comme le wronskinen de ces fonctions ne s'annule pas, car il est égal à ve^{2u}, les solutions de (13.16) sont les fonctions $x(t) = C_1e^{ut}\cos vt + C_2e^{ut}\sin vt$, avec C_1 et C_2 des constantes arbitraires.

Exemple 13.4.2.4 L'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire $x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 0$, qui est $T^2 - 2T + 10 = 0$, a pour racine $1 + 3i$ et $1 - 3i$, donc la solution générale est $x(t) = C_1e^t\cos 3t + C_2e^t\sin 3t$.

• Reste le cas où l'équation caractéristique a une racine *double*, qui vaut alors $r = -\dfrac{b}{2a}$. Nous ne connaissons plus que la solution $s_1(t) = e^{rt}$, mais nous pouvons résoudre l'équation par la méthode d'abaissement de l'ordre. Posons $x(t) = \gamma(t)s(t)$; alors $x'(t) = \gamma'(t)s(t) + \gamma(t)rs(t)$, puis $x''(t) = \gamma''(t)s(t) + 2\gamma'(t)rs(t) + \gamma(t)r^2s(t)$, et (13.16) devient $a\gamma''(t)s(t) + (2ar + b)\gamma'(t)s(t) + (ar^2 + br + c)\gamma s(t) = 0$. Le dernier terme du membre de gauche est nul parce que r est une racine de l'équation caractéristique, et celui du milieu est nul parce que $r = -\dfrac{b}{2a}$. Il reste seulement $a\gamma''(t) = 0$ et en intégrant deux fois, on obtient que $\gamma(t) = C_1 + C_2t$, avec C_1 et C_2 des constantes arbitraires ; la solution généale de l'équation est donc $x(t) = C_1e^{rt} + C_2te^{rt}$.

Exemple 13.4.2.5 L'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$, qui est $T^2 - 4T + 4 = 0$, a pour racine double 2, et la solution générale est $x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}$.

13.4.3 Pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \tag{13.18}$$

on peut utiliser la méthode de variation des constantes, ou la méthode d'abaissement de l'ordre. Cependant, quand $f(t)$ est un polynôme, une exponentielle, un sinus, un cosinus, ou plus généralement une somme de fonctions du type $P(t)e^{ut}\cos vt$ ou $P(t)e^{ut}\sin vt$, avec $P(t)$ un polynôme, on dispose d'une méthode encore plus simple pour trouver une solution particulière. Nous allons en détailler les diverses étapes.

- D'abord les formules d'Euler donnent :

$$P(t)e^{ut}\cos vt = \frac{P(t)}{2}e^{(u+iv)t} + \frac{P(t)}{2}e^{(u-iv)t}$$
$$P(t)e^{ut}\sin vt = \frac{P(t)}{2i}e^{(u+iv)t} - \frac{P(t)}{2i}e^{(u-iv)t}$$

et, en utilisant ces formules, une fonction du type $P(t)e^{ut}\cos vt$, ou $P(t)e^{ut}\sin vt$, avec un polynôme $P(t)$, peut toujours s'écrire sous la forme $A(t)e^{\alpha t} + \overline{A}(t)e^{\overline{\alpha}t}$ avec A un certain polynôme à coefficients réels ou complexes, $\overline{A}$ le polynôme obtenu en conjuguant ses coefficients, et α le nombre complexe $u + iv$.

Il en résulte qu'une somme de fonctions du type $P(t)e^{ut}\cos vt$ ou $P(t)e^{ut}\sin vt$ peut toujours s'écrire comme une somme de fonctions du type $A(t)e^{\alpha t}$ avec des polynômes $A(t)$ à coefficients réels ou complexes, et des nombres α réels ou complexes ; c'est la première étape du calcul.

Exemple 13.4.3.1 Pour chercher une solution particulière de l'équation différentielle $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 6 + 14t + 2t^2 + e^{-t}\cos t$, on commence par l'écrire :

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 6 + 14t + 2t^2 + \frac{e^{(-1+i)t}}{2} + \frac{e^{(-1-i)t}}{2} \tag{13.19}$$

- La deuxième étape repose sur le théorème suivant.

Théorème 13.4.3.2 (principe de superposition) Fixons trois nombres a, b, c, avec $a \neq 0$. Si $e_1(t)$ est une solution de $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_1(t)$, si $e_2(t)$ est une solution de $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_2(t)$, …, si $e_r(t)$ est une solution de $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_r(t)$, alors :

$$p(t) = \alpha_1e_1(t) + \alpha_2e_2(t) + \cdots + \alpha_re_r(t)$$

est une solution de :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = \alpha_1f_1(t) + \alpha_2f_2(t) + \cdots + \alpha_rf_r(t)$$

Démonstration : Il suffit d'ajouter les équations :

$$ap_1''(t)+bp_1'(t)+ce_1(t)=f_1(t)$$
$$ap_2''(t)+bp_2'(t)+ce_2(t)=f_2(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ap_r''(t)+bp_r'(t)+ce_r(t)=f_r(t)$$

après les avoir multipliées par les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

Grâce à ce théorème, la deuxième étape consiste à remplacer la résolution de l'équation initiale par celle de plusieurs équations dont le second membre est uniquement de la forme $A(t)e^{\alpha t}$.

Exemple 13.4.3.3 Pour chercher une solution particulière de l'équation (13.19), on cherche des solutions particulières des équations :

$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)=6+14t+2t^2$$
$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)=\frac{e^{(-1+i)t}}{2}$$
$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)=\frac{e^{(-1-i)t}}{2}$$

• Dans la troisième étape on traite séparément chacune de ces nouvelles équations au moyen du théorème suivant.

Théorème 13.4.3.4 Soit l'équation différentielle :

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=A(t)e^{\alpha t} \tag{13.20}$$

dans laquelle $A(t)$ est un polynôme non nul, à coefficients réels ou complexes, et α un nombre réel ou complexe quelconque. Si α est une racine de l'équation caractéristique $aT^2+bT+c=0$, on note m sa multiplicité (dans le cas où α n'est pas une racine, on pose $m=0$). Alors, il existe un unique polynôme, $B(t)$, ayant le même degré que $A(t)$, tel que $B(t)t^m e^{\alpha t}$ soit une solution de (13.20).

On déduit du théorème 13.4.3.4 une façon de trouver une solution particulière de (13.20) qu'on appelle la ***méthode des coefficients indéterminés***.

Méthode pratique : Pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=A(t)e^{\alpha t}$$

avec α est un *nombre réel* et $A(t)$ un polynôme de degré d :

1) On cherche si α est une solution de l'équation caractéistique et on détermine sa multiplicité m.

2) On écrit $B(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_dt^d$ avec $d+1$ coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_d$ indéterminés.

3) On remplace $x(t)$ par $B(t)t^m e^{\alpha t}$ dans le premier membre de l'équation, ce qui donne un polynôme que multiplie $e^{\alpha t}$.

4) On écrit que les coefficients de ce polynôme sont les mêmes que ceux de $A(t)$, ce qui donne un sytème linéaire dont les inconnues sont $c_0, c_1, \ldots, c_d$.

5) Ce système admet une solution unique ; on le résout pour avoir $B(t)$.

Exemple 13.4.3.5 Nous poursuivons le calcul commencé dans les exemples 13.4.3.1 et 13.4.3.3. L'équation caractéristique d'une équation différentielle de la forme $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = f(t)$ est $T^2 + 2T + 2 = 0$; elle a pour racines $-1 + i$ et $-1 - i$.

• Pour l'équation $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 6 + 14t + 2t^2$, nous avons $\alpha = 0$ et $m = 0$. Nous cherchons donc une solution particulière de la forme $c_0 + c_1 t + c_2 t^2$. En reportant dans l'équation, on trouve :

$$(2c_0 + 2c_1 + 2c_2) + (2c_1 + 2c_2)t + 2c_2 t^2 = 6 + 14t + 2t^2$$

d'où le système :

$$\begin{aligned} 2c_0 + 2c_1 + 2c_2 &= 6 \\ 2c_1 + 2c_2 &= 14 \\ 2c_2 &= 2 \end{aligned}$$

qui donne la solution particulière $-3 + 5t + t^2$.

• Pour l'équation $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{2}e^{(-1+i)t}$, nous avons $\alpha = -1 + i$, qui est une racine simple de l'équation caractéistique ; ici $d = 0$ et $m = 1$. Nous cherchons donc une solution particulière de la forme $c_0 t e^{(-1+i)t}$. En substituant dans l'équation, il vient $2ic_0 = \frac{1}{2}$, ce qui donne la solution particulière $-\frac{i}{4}e^{(-1+i)t}$.

• Pour l'équation $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{2}e^{(-1-i)t}$, nous verrons bientôt, avec le théorème 13.4.3.6, qu'on n'a pas besoin de refaire tous les calculs et que $+\frac{i}{4}e^{(-1-i)t}$ est une solution particulière.

Finalement l'équation différentielle :

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 6 + 14t + 2t^2 + e^{-t}\cos t$$

admet la solution particulière :

$$-3 + 5t + t^2 - \frac{i}{4}e^{(-1+i)t} + \frac{i}{4}e^{(-1-i)t} = -3 + 5t + t^2 + \frac{e^{-t}\cos t}{4} + \frac{e^{-t}\sin t}{2}$$

• Quand on a un terme du type $P(t)e^{ut}\cos vt$ ou $P(t)e^{ut}\sin vt$ dans le second membre de l'équation (13.18), la méthode qui vient d'être présentée conduit à rechercher des solutions particulières pour deux équations de la forme :

$$\begin{aligned} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= A(t)e^{\alpha t} \\ ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= \overline{A}(t)e^{\overline{\alpha} t} \end{aligned} \tag{13.21}$$

où les coefficients du polynôme $\overline{A}(t)$ sont les conjugués des coefficients de $A(t)$. Le théorème qui suit montre qu'il suffit de résoudre une seule de ces équations, car les solutions de l'autre s'obtiennent simplement en conjugant celles de la première.

Théorème 13.4.3.6 Chaque solution d'une équation (13.21) est la conjuguée d'une solution de l'autre équation.

> ***Démonstration :*** Notons $\overline{x}(t)$ la conjuguée de $x(t)$. Parce que les coefficients du premier membre sont réels et parce que la conjuguée de la dérivée est la dérivée de la conjuguée, en conjuguant les deux membres de $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = A(t)e^{\alpha t}$, on obtient $a\overline{x}''(t) + b\overline{x}'(t) + c\overline{x}(t) = \overline{A}(t)e^{\overline{\alpha}t}$ et on voit que $\overline{x}(t)$ est une solution de la deuxième équation. Puisque ce raisonnement fait jouer un rôle symétrique aux deux équations, on a bien le résultat annoncé.

13.5 OSCILLATEUR HARMONIQUE

13.5.1 Pour montrer à quoi servent les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants, nous allons voir comment la résolution de ces équations permet de suivre et de prédire le comportement de certains phénomènes physiques.

Un phénomène physique qu'on peut décrire par une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants s'appelle un ***oscillateur harmonique***. Nous avons déjà rencontré un oscillateur harmonique avec le circuit RLC (exemple 13.4.1.1), mais voici un autre exemple tout aussi fondamental.

Une masse ponctuelle m est suspendue à un ressort vertical et on examine son mouvement quand elle est soumise à diverses forces (*figure 13.2*).

Figure 13.2 Un oscillateur harmonique

On note $x(t)$ la position de la masse au temps t, repérée sur l'axe vertical dirigé vers le bas, le point O étant choisi comme origine. Alors, la vitesse de cette masse est $x'(t)$, son accélération est $x''(t)$ et la loi fondamentale de la mécanique nous dit que $mx''(t)$ égale la somme des force auxquelles la masse est soumise.

Parmi ces forces, il y a la pesanteur[1], la force de rappel du ressort, éventuellement des forces de frottement, et peut-être d'autres forces qui pourront lui être appliquées.

La force exercée par la pesanteur est constante, égale à mg. En première approximation, on peut considérer que la force de rappel exercée par le ressort est proportionnelle à son allongement ; par conséquent, si L désigne la longueur du ressort au repos, cette force est égale à $-k\big(x(t) - L\big)$ avec un coefficient, k, constant et positif. On peut considérer aussi que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse, donc égale à $-bx'(t)$ avec un coefficient b constant et positif[2]. Enfin, si on note $F(t)$ les autres forces qui s'exercent sur la masse, en supposant qu'elles ne dépendent que du temps, la loi fondamentale de la mécanique se traduit par :

$$m\,x''(t) = mg - k\big(x(t) - L\big) - b\,x'(t) + F(t)$$

égalité qu'on transforme aussitôt en :

$$m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = (mg + kL) + F(t) \tag{13.22}$$

Dans le cas où il n'y a pas d'autres forces que la pesanteur, la force de rappel du ressort et les frottements, c'est-à-dire quand $F(t) = 0$, l'équation se simplifie en :

$$m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = (mg + kL) \tag{13.23}$$

et la constante $L + \dfrac{mg}{k}$ est une solution, ce qui signifie que si on abandonne la masse dans la position $L + \dfrac{mg}{k}$, avec une vitesse nulle, elle ne bougera pas. Cette position de repos correspond au point d'équilibre où l'étirement du ressort contrebalance exactement l'effet de la pesanteur. Si on pose $y(t) = x(t) - \left(L + \dfrac{mg}{k}\right)$, ce qui revient à faire un changement d'origine et à prendre pour nouvelle origine de l'axe vertical cette position d'équilibre, l'équation (13.22) devient :

$$m\,y''(t) + b\,y'(t) + k\,y(t) = F(t) \tag{13.24}$$

mais on a l'habitude de poser $\lambda = \dfrac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $f(t) = \dfrac{F(t)}{m}$, ce qui donne finalement :

$$y''(t) + 2\lambda\,y'(t) + \omega_0^2\,y(t) = f(t) \tag{13.25}$$

et c'est cette équation que nous allons étudier. D'ailleurs, *tous* les oscillateurs harmoniques, et en particulier les circuits RLC, sont décrits par cette même équation à condition d'adopter des notations appropriées, et c'est pourquoi on l'appelle l'***équation de l'oscillateur harmonique***.

Dans les prochains exemples, nous supposerons toujours que $m = 1$ et $k = 10$, et nous verrons ce qu'il advient de la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$, selon ce qu'on choisit pour b et $F(t)$.

1. Si le mouvement avait été horizontal, l'effet de la pesanteur aurait été annulé par la réaction du support.
2. Les coefficients k et b sont positifs car les forces de rappel et de frottement s'opposent au mouvement.

13.5.2 Dans le cas d'une ***oscillation propre***, c'est-à-dire quand il n'y a ni force extérieure, ni frottement, l'équation (13.25) est simplement $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$.

Elle a pour solutions les fonctions de la forme $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$, avec C_1 et C_2 des constantes arbitraires ou, si l'on préfère, les fonctions $y(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, avec a un nombre réel positif quelconque et φ un nombre réel quelconque. La masse oscille indéfiniment de part et d'autre de sa position d'équilibre ; son mouvement est *périodique*, et ω_0 s'appelle la ***pulsation propre*** (*figure 13.3*).

Exemple 13.5.2.1 La solution de l'équation $y''(t) + 10y(t) = 0$ qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est $y(t) = 4\cos\left(\sqrt{10}t\right)$; sa courbe représentative est dessinée sur la *figure 13.3*.

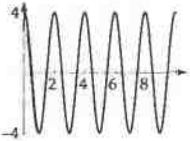


Figure 13.3 Oscillations propres de l'oscillateur harmonique

13.5.3 Dans le cas où il n'y a pas de force extérieure, mais où on introduit un frottement non nul, l'équation différentielle est :

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0 \tag{13.26}$$

et son équation caractéristique devient $T^2 + 2\lambda T + \omega_0^2 = 0$.

- Tant que $\lambda < \omega_0$, elle a deux racines complexes, $-\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, et les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = e^{-\lambda t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$, avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, C_1 et C_2 des constantes arbitraires. Si on veut, on peut écrire $y(t) = e^{-\lambda t} a\cos(\omega_1 t + \varphi)$, avec a un nombre réel positif quelconque, et φ un nombre réel quelconque. La masse oscille indéfiniment de part et d'autre de sa position d'équilibre tout en s'en rapprochant un peu plus à chaque oscillation, on a un mouvement *pseudo-périodique* (*figure 13.4*), et ω_1 s'appelle la ***pseudo-pulsation***.

Exemple 13.5.3.1 La solution de l'équation $y''(t) + y'(t) + 10y(t) = 0$ qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est :

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[4\cos\left(\frac{\sqrt{39}\,t}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{39}}\sin\left(\frac{\sqrt{39}\,t}{2}\right)\right]$$

Sa courbe représentative est dessinée sur la *figure 13.4*.

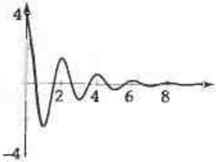


Figure 13.4 Oscillations amorties de l'oscillateur harmonique

• Quand $\lambda = \omega_0$, l'équation caractéristique a une racine double, $r = -\lambda$, et les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\lambda t}$. La masse se rapproche indéfiniment de son point d'équilibre sans jamais l'atteindre, il n'y a pas d'oscillation, mais on est à la limite des oscillations ; on dit qu'on atteint l'***amortissement critique*** (*figure 13.5*).

Exemple 13.5.3.2 Avec $m = 1$ et $k = 10$, la valeur critique du coefficient d'amortissement est $b = \sqrt{40}$ et la solution de l'équation $y''(t) + 2\sqrt{10}y'(t) + 10y(t) = 0$ qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est :

$$y(t) = \left(4 + \sqrt{40}t\right) e^{-\sqrt{10}t}$$

Sa courbe représentative est dessinée sur la *figure 13.5*.

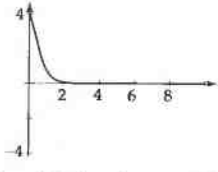


Figure 13.5 Amortissement critique

• Quand $\lambda > \omega_0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles négatives, $r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, $r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$, et les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. La masse se rapproche indéfiniment de son point d'équilibre sans jamais l'atteindre, il n'y a pas d'oscillation (*figure 13.6*).

Exemple 13.5.3.3 La solution de l'équation $y''(t) + 11y'(t) + 10y(t) = 0$ qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est :

$$y(t) = -\frac{4}{9}e^{-10t} + \frac{40}{9}e^{-t}$$

Sa courbe représentative est dessinée sur la *figure 13.6*.

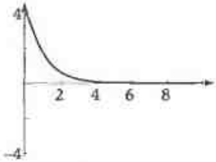


Figure 13.6 Mouvement très amorti

Quand λ augmente, r_1 tend vers 0 et r_2 tend vers $-\infty$. On démontre que plus λ augmente, plus $y(t)$ met du temps pour s'approcher de 0 ; on retrouve une propriété évidente : plus le frottement est grand, plus la masse tarde à revenir à sa position d'équilibre.

Au contraire, plus λ se rapproche de ω_0, en restant au dessus, plus la masse revient vite vers sa position d'équilibre[1]. Cette propriétéest utilisée dans le réglage des amortisseurs, dont le rôle dans une suspension de voiture est de ramener le plus vite possible la voiture dans sa position d'équilibre, sans la laisser osciller.

13.5.4 Maintenant, voyons ce qui arrive lorsqu'on applique à la masse une force extérieure périodique, $f(t) = A\cos\omega t$. Avec cette force, l'équation différentielle 13.25 devient :

$$y''(t) + 2\lambda\, y'(t) + \omega_0^2\, y(t) = A\cos\omega t \tag{13.27}$$

Nous allons d'abord traiter le cas limite où il n'y a pas de frottement avant de voir, dans le prochain paragraphe, quelle est l'influence du frottement sur le mouvement.

Si $\lambda = 0$, l'équation (13.27) se simplifie en :

$$y''(t) + \omega_0^2\, y(t) = A\cos\omega t \tag{13.28}$$

Quand $\omega \neq \omega_0$, la solution générale de (13.28) est :

$$y(t) = C_1\ \cos\omega_0 t + C_2\ \sin\omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t$$

La masse reste toujours à une distance finie de sa position de repos, même si, à cause du terme $\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$, la valeur maximale de $y(t)$ est grande quand ω est proche de ω_0.

Exemple 13.5.4.1 Avec $m = 1$, $k = 10$, $A = 1$ et les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$, on obtient :

$$y(t) = \frac{39 - 4\omega^2}{10 - \omega^2}\cos\sqrt{10}\,t + \frac{1}{10 - \omega^2}\cos\omega t$$

1. On le voit bien en comparant les figures 13.5 et 13.6.

La figure 13.7 montre la courbe représentative de cette solution pour $\omega = 2$, et la figure 13.8 montre la forme de la courbe pour $\omega = 2.8$.

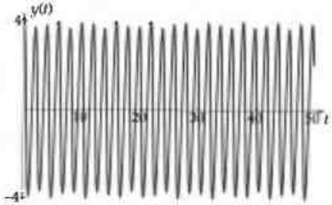


Figure 13.7 Mouvement entretenu sans frottement

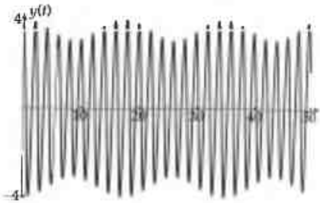


Figure 13.8 Battements

Comme on le voit dans l'exemple précédent, lorsque ω se rapproche de ω_0, des ***battements***, c'est-à-dire des ondulations périodiques, apparaissent. À la limite, lorsque $\omega = \omega_0$, la solution générale de l'équation (13.28) devient :

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{t}{2\,\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Elle prend des valeurs arbitrairement grandes — on dit que l'oscilateur entre en ***résonance*** — mais, comme le ressort ne peut pas s'allonger indéfiniment, l'expérience risque sans doute de se terminer par sa destruction.

Exemple 13.5.4.2 La solution de l'équation :

$$y''(t) + 10\,y(t) = \cos \sqrt{10}\,t$$

qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est

$$y(t) = 4 \cos \sqrt{10}t + \frac{t}{2\sqrt{10}} \sin \sqrt{10}\,t$$

La *figure 13.9* montre sa courbe représentative.

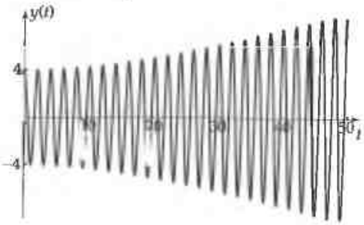


Figure 13.9 Résonance

13.5.5 Reste à examiner le cas le plus intéressant, celui où le frottement n'est pas nul. L'équation différentielle est maintenant de la forme :

$$y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = A \cos \omega t \tag{13.29}$$

avec $\lambda \neq 0$. Ses solutions sont la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre, étudiée au paragraphe 13.5.3, et qui décrit le mouvement produit en abscence de force extérieure.

On note φ le nombre tel que :

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{-2\lambda\,\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

alors, si on résout (13.29) en appliquant la méthode de la section 13.4, on obtient les résultats suivants :

- quand $\lambda < \omega_0$, l'équation caractéristique admet les deux racines complexes $r_1 = -\lambda + i\omega_1$, $r_2 = -\lambda - i\omega_1$, avec la pseudo-pulsation $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, et la solution générale de (13.29) est :

$$y(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t\right) + \frac{A\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

- quand $\lambda = \omega_0$, l'équation caractéristique admet la racine double $r = -\lambda$, et la solution générale de (13.29) est :

$$y(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{A\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

- quand $\lambda > \omega_0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles négatives, r_1 et r_2, et la solution générale de (13.29) est :

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{A\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Dans tous les cas, la solution de l'équation (13.29) est la somme d'une fonction péiodique de période ω, qu'on appelle le ***régime permanent***, et d'une fonction qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, qu'on appelle le ***régime transitoire***. Les fonctions s'appellent ainsi parce que plus le temps passe, plus le mouvement ressemble au régime permanent (*figure 13.10*).

Ce régime transitoire, obtenu en posant $A = 0$ dans $y(t)$, est une solution de l'équation sans second membre (13.26) ; autrement dit, c'est une fonction qu'on aurait si le mouvemement n'était pas entretenu, et nous savions déjà qu'une telle fonction décrit un retour vers la position d'équilibre.

Exemple 13.5.5.1 La solution de l'équation :

$$y''(t) + y'(t) + 10\,y(t) = \cos 3t$$

qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$ est :

$$y(t) = \frac{1}{10}\cos 3t + \frac{3}{10}\sin 3t + e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{39}{10}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + \frac{7}{10}\sqrt{\frac{3}{13}}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t\right)$$

et la *figure 13.10* montre sa courbe représentative.

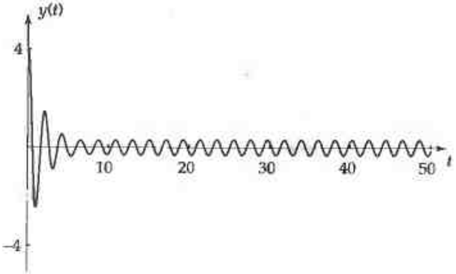


Figure 13.10 Régime transitoire et régime permanent

Il faut remarquer que les conditions initiales servent à déterminer le régime transitoire mais n'ont pas d'influence sur le régime permanent.

On peut chercher la valeur de ω qui fait *résonner* l'oscillateur harmonique : c'est la valeur pour laquelle l'amplitude $\dfrac{A}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\,\omega^2}}$ du régime permanent est la plus grande possible. Pour cela, il faut que $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\,\omega^2 = \omega^4 + 2\omega_0^2(2\lambda^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4$ soit le plus petit possible.

- Si $2\lambda^2 \geqslant \omega_0^2$, on a une somme de trois termes positifs et le minimum est atteint quand les deux premiers sont nuls, c'est-à-dire quand $\omega = 0$; le frottement est trop fort pour qu'il y ait une résonnance.

- Si $2\lambda^2 < \omega_0^2$, on écrit $\omega^4 + 2\omega_0^2(2\lambda^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4 = (\omega^2 + 2\lambda^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$ et on voit que le minimum est atteint quand $\omega^2 + 2\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$, ce qui correspond à la pulsation de résonnance $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$, et alors l'amplitude est égale à $\dfrac{A}{2\lambda\,\omega_1}$.

EXERCICES

13.1. 1) Soient u et v deux fonctions de classe C^2 sur un intervalle $\mathcal{I}$. On suppose que leur wronskien ne s'annule pas sur $\mathcal{I}$, et on considère l'équation différentielle :

$$[u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]x''(t) + [v(t)u''(t) - v''(t)u(t)]x'(t) \\ + [u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)]x(t) = 0$$

Quelles sont les solutions de cette équation ?

2) Réciproquement, démontrer que si u et v sont deux fonctions qui forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation $x''(t) - a_1(t)x'(t) - a_2(t)x(t) = 0$ celle-ci peut se mettre sous la forme précédente.

3) En déduire qu'étant donné deux fonctions dont le wronskien ne s'annule pas, à un coefficient près, il existe une et une seule équation différentielle d'ordre 2, linéaire et homogène, dont elles forment une base de l'ensemble des solutions.

4) Quelle équation différentielle d'ordre 2, linéaire et homogène, admet les fonctions $u(t) = \sin t$ et $v(t) = t$ comme base de l'ensemble des solutions ?

13.2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$(E_1)\quad x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0$; $\qquad (E_2)\quad x''(t) + 6x'(t) + 2x(t) = 0$

$(E_3)\quad x''(t) - 8x'(t) + 17x(t) = 0$; $\qquad (E_4)\quad x''(t) - 4x'(t) + 19x(t) = 0$

$(E_5)\quad x''(t) + 10x'(t) + 25x(t) = 0$; $\qquad (E_6)\quad x''(t) - 12x'(t) + 36x(t) = 0$

13.3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\quad x''(t) + 6x'(t) + 5x(t) = 3e^{-4t}$$
$$(E_2)\quad x''(t) + 2x'(t) - 8x(t) = 36e^{2t}$$
$$(E_3)\quad x''(t) - 8x'(t) + 15x(t) = 24(t^2 + t + 1)e^{5t}$$
$$(E_4)\quad x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 12(t^2 + t)e^{3t}$$

13.4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1)\quad x''(t) - 9x'(t) + 18x(t) = 280\,\mathrm{ch}\,t$$
$$(E_2)\quad x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 60\,\mathrm{sh}\,t$$
$$(E_3)\quad x''(t) - x(t) = 48t^2\,\mathrm{ch}\,t$$
$$(E_4)\quad x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 192t\,\mathrm{sh}\,2t$$

13.5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \quad x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 10\sin t$$

$$(E_2) \quad x''(t) - 9x'(t) + 18x(t) = 370\cos t$$

$$(E_3) \quad x''(t) + x(t) = (12t^2 - 48t + 6)\cos t$$

$$(E_4) \quad x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = (17t + 19)\sin 2t$$

13.6. Quelle solution de l'équation différentielle :

$$x''(t) + 9\,x(t) = 6\sin 3t + 54e^{-3t} + 9$$

vérifie les conditions initiales $x(0) = 2$, et $x'(0) = -1$?

13.7. 1) Soient u et v deux polynômes non nuls dont le wronskien est nul. Démontrer qu'il existe une constante C telle que $u(t) = C\,v(t)$ quel que soit t.

2) On ne suppose plus que u et v sont des polynômes. Donner un exemple de fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$, différentes de la constante 0, dont le wronskien est nul, mais telles que $u(t)$ n'est pas un multiple constant de $v(t)$.

13.8. Trouver deux fonctions u et v sachant que :

$$u'(t) = -3u(t) - 15v(t)\ ; \qquad u(0) = 2$$

$$v'(t) = 2u(t) + 8v(t)\ ; \qquad v(0) = -1$$

13.9. 1) On pose $f(t) = \dfrac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}$. Exprimer $(1-t^2)f'(t)$ à l'aide de t et de $f(t)$.

2) En dérivant l'égalité précédente montrer que $f(t)$ est solution de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre :

$$(1-t^2)x''(t) - 3tx'(t) - x(t) = 0 \qquad (13.30)$$

3) Quelles sont toutes les solutions de cette équation ?

4) Qu'obtient-on si on dérive n fois l'équation différentielle ?

5) Déduire de la question précédente une expression de $f^{(n)}(0)$ au moyen de $f^{(n-2)}(0)$.

6) Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?

7) Quel est le développement limité à l'ordre $2p$ de $f(t)$? En déduire le développement limité à l'ordre $2p+1$ de $(\arcsin t)^2$.

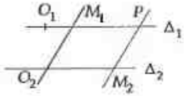
Annexe A

Solutions des exercices

CHAPITRE 1

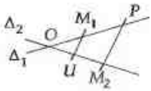
Exercice 1.1

La figure ci-contre montre les deux droites parallèles qu'il faut tracer. Parce que le quadrilatère $O_2M_1PM_2$ est un parallélogramme, on a $\overline{M_1P} = x_2$, et le point P a pour abscisse $x_1 + x_2$ sur la droite Δ_1.



Exercice 1.2

La figure ci-contre montre les deux droites parallèles qu'il faut tracer. Parce que les triangles OUM_1 et OM_2P sont homothétiques on a $\dfrac{OU}{OM_2} = \dfrac{OM_1}{OP}$ et le point P a bien pour abscisse x_1x_2 sur la droite Δ_1.



Exercice 1.3

S'il existait deux entiers p et q tels que $2q^2 = p^2$, le nombre p serait pair ; on pourrait l'écrire $p = 2P$ avec P entier, ce qui donnerait $2q^2 = 4P^2$, puis $q^2 = 2P^2$ après simplification. On en déduirait que q est pair lui aussi, ce qui n'est pas possible s'ils sont de parité différente.

Il en résulte que $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel, sinon on pourrait le représenter par une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ et on aurait $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ qui donnerait $2q^2 = p^2$ avec p et q de parité différente, ce qui n'est pas possible.

Exercice 1.4

Le plus grand entier inférieur ou égal à y est $\lfloor y \rfloor$. Ceux qui le précèdent sont $\lfloor y \rfloor - 1$, $\lfloor y \rfloor - 2, \ldots$ et s'il y a n entiers compris entre x et y cela veut dire que $x \leqslant \lfloor y \rfloor - (n-1)$ et $\lfloor y \rfloor - n < x$. On déduit de ces deux inégalités que $n \leqslant \lfloor y \rfloor - x + 1 < n + 1$, ce qui montre que $n = \lfloor (\lfloor y \rfloor - x + 1) \rfloor$.

On peut préciser encore ce résultat en posant $y = \lfloor y \rfloor + y'$ avec $0 \leqslant y' < 1$, et $y - x = \lfloor y - x \rfloor + \delta$ avec $0 \leqslant \delta < 1$, car $n = \lfloor \lfloor y - x \rfloor + (1 - y') + \delta \rfloor$ donc :

$$n = \begin{cases} \lfloor y - x \rfloor & \text{quand } \delta < y', \\ \lfloor y - x \rfloor + 1 & \text{quand } y' \leqslant \delta. \end{cases}$$

Exercice 1.5

1) Démontrons qu'il existe une infinité de nombres décimaux d tels que $\alpha < d < \beta$. D'après le résultat de l'exercice 1.4, à 1 près, il y a $\lfloor 10^n(\beta - \alpha) \rfloor$ entiers relatifs, k, qui vérifient $10^n\alpha \leqslant k \leqslant 10^n\beta$. Par conséquent le nombre d'entiers strictement compris entre $10^n\alpha$ et $10^n\beta$ tend vers l'infini quand n augmente, car il diffère d'au plus 2 de $10^n(\beta - \alpha)$. Or, si k est un entier tel que $10^n\alpha < k < 10^n\beta$ on a $\alpha < \frac{k}{10^n} < \beta$, donc en augmentant n cela donne la possibilité de construire des fractions $\frac{k}{10^n}$, chaque fois difféentes différentes, comprises entre α et β.

2) Démontrons maintenant qu'il existe une infinité de nombres irrationnels i tels que $\alpha < i < \beta$. D'aprè l'exercice 1.3 le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. Alors, quel que soit le nombre rationnel d, le nombre $i = \sqrt{2}d$ est irrationnel. En effet, si i était rationnel $\frac{i}{d}$ le serait aussi, et $\sqrt{2}$ serait rationnel. Donc on construit une infinité de nombres rationnels d tels que $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < d < \frac{\beta}{\sqrt{2}}$ et pour chacun, on a $\alpha < d\sqrt{2} < \beta$, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.6

Soit $\frac{p_n}{10^n}$ l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de α. Posons $q_n = 10^n - 1 - p_n$ (les chiffres de q_n sont les compléments à 9 des chiffres de p_n ; par exemple si $p_n = 70\,295$ alors $q_n = 29\,704$).

On a $\frac{q_n}{10^n} = 1 - \frac{p_n}{10^n} - \frac{1}{10^n}$.

• Dans le cas où α n'est pas un nombre décimal, il n'est jamais égal à son approximation décimale par défaut ; on a donc des inégalités strictes $\frac{p_n}{10^n} < \alpha < \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$, et ces inégalités donnent $\frac{q_n}{10^n} < 1 - \alpha < \frac{q_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$. Cela montre que $\frac{q_n}{10^n}$ est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de $1 - \alpha$ et par conséquent les chiffres de $1 - \alpha$ sont les compléments à 9 des chiffres de α.

• Dans le cas où α est décimal, il existe n tel que $\frac{p_n}{10^n} = \alpha$ et alors $\frac{q_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = 1 - \alpha$. Cela montre que les chiffres de $1 - \alpha$ s'obtiennent en prenant le complément à 9 des chiffres de α sauf pour le dernier chiffre non nul, où il faut prendre le complément à 10 (étant bien entendu que tous les 0 qui viennent après ce dernier chiffre restent inchangés).

Exercice 1.7

Notons d le nombre décimal représenté par la partie *non périodique* du développement décimal de α, et posons $u = \alpha - d$ (par exemple, pour $241,572\,352\,35\ldots$, on aura $d = 241,57$ et $u = 0,002\,352\,35\ldots$, tandis que pour $237,373737\ldots$ on aura $d = 200$ et $u = 37,3737\ldots$).

On peut décaler les chiffres de u, ce qui revient à le multiplier par une certaine puissance de 10, positive ou négative, afin que le nombre obtenu, $u' = u10^s$, soit de la forme $0,pppppp\ldots$ avec p la période de α. Alors, puisque $10^r u' = p,pppp\ldots = p' + u$, on a $u' = \frac{p}{10^r - 1}$, ce qui donne le résultat.

Réciproquement, si α est rationnel on peut le représenter par une fraction, et quand on divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur afin de calculer le développement décimal infini de α, les restes successifs sont tous inférieurs au dénominateur. Il n'y a donc qu'un nombre fini de restes possibles et après qu'on ait épuisé tous les chiffres de a, on doit rencontrer un reste qui avait déjà été trouvé. À partir de ce reste, la suite des restes se répète indéfiniment et ainsi les quotients successifs se répètent aussi, ce qui fait que le développement décimal est périodique.

On a $a = \frac{6\,984}{5\,555}$, $b = \frac{197\,894\,812\,23}{5\,555\,500}$, et

$$a + b = \frac{6\,984}{5\,555} + \frac{19\,789\,481\,223}{5\,555\,500} = \frac{21\,993\,873\,561\,153}{6\,172\,160\,500}.$$

En divisant le numérateur par le dénominateur on obtient :

$a + b = 3\,563,399\,487\,286\,988\,081\,401\,966\,134\,872\,869\,880\,814\,019\,661\,348\,728\,698\,808\ldots$

avec la période 48 728 698 808 140 196 613, de longueur 20.

Exercice 1.8

Ni α, ni β ne peuvent être rationnels car leurs développements décimaux infinis ne sont pas périodiques (voir exercice 1.7). En effet, ces nombres ont des tranches arbitrairement longues de 9, et leur période, de longueur fixées finirait forcément par tomber toute entière dans une de ces tranches ; elles seraient donc uniquement constituées de 9, ce qui n'est pas possible puisque le développement ne peut pas se terminer uniquement par des 9. On peut démontrer que :

$$a+b$$
$$= 1,831\,911\,191\,911\,919\,911\,919\,991\,191\,999\,911\,919\,999\,911\,919\,999\,991\,191\,999\,999\,9\ldots$$

Dans ce développement on trouve d'abord $1,831\,91$, puis $1\,191$ suivi de un 9, puis $1\,191$ suivi de deux 9, puis $1\,191$ suivi de trois 9, etc.

Exercice 1.9

On a $x = y + (x - y)$, donc $|x| = |y + (x - y)| \leqslant |y| + |x - y|$ et de même $y = x + (y - x)$, donc $|y| = |x + (y - x)| \leqslant |x| + |y - x|$. Il en résulte que $|x| - |y| \leqslant |x - y|$ et $|y| - |x| \leqslant |y - x|$. Par conséquent, le plus grand des deux nombres $|x| - |y|$ et $|y| - |x|$, c'est à-dire $||x| - |y||$, est inférieur à $|y - x| = |x - y|$.

Exercice 1.10

Puisque $7 \leqslant 8 - \sin x \leqslant 9$, et parce que la fonction racine carrée est croissante, on a $\sqrt{7} \leqslant \sqrt{8 - \sin x} \leqslant 3$. D'autre part $2 \leqslant 2 + \cos^2 x \leqslant 3$, donc :

$$1 = \frac{1+2}{3} \leqslant \frac{1+\sqrt{7}}{3} \leqslant \frac{1+\sqrt{8-\sin x}}{2+\cos^2 x} \leqslant \frac{1+3}{2} = 2$$

Exercice 1.11

On a $1 - \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \geqslant 0$. Donc $1 \geqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ quel que soit x, et 1 est un majorant de $\mathcal{A}$; par conséquent $\sup(\mathcal{A})$, qui est le plus petit majorant, est inférieur ou égal à 1. Par ailleurs, comme 1 est dans $\mathcal{A}$, puisqu'il correspond à $x = 0$, on a aussi $\sup(\mathcal{A}) \geqslant 1$ ce qui donne $\sup(\mathcal{A}) = 1$.

Pour la borne inférieure, on remarque que $1 + \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2} \geqslant 0$ donc $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ quel que soit x. Il en résulte que -1 est un minorant de $\mathcal{A}$, et $\inf(\mathcal{A})$, qui est le plus grand minorant est supérieur ou égal à -1. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < 2$; alors, quand $x \geqslant \sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}}$, on a $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} < -1 + \varepsilon$, ce qui montre que $-1 + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\mathcal{A}$. Par conséquent aucun nombre strictement supérieur à -1 n'est un minorant de de $\mathcal{A}$ et on a $\inf(\mathcal{A}) \leqslant -1$. Finalement $\inf(\mathcal{A}) = -1$.

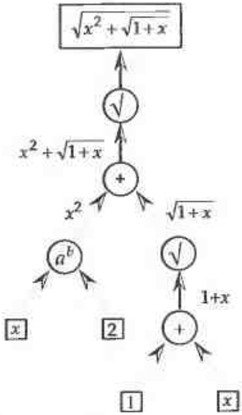
CHAPITRE 2

Exercice 2.1

Oui, elles sont égales aussi à $\frac{1}{\cos^2 x}$.

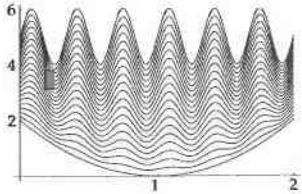
Exercice 2.2

La figure ci-contre indique la façon de calculer $f(x)$.



Exercice 2.3

1) Les courbes représentatives des fonctions f_α sont dessinées sur la figure ci-contre :

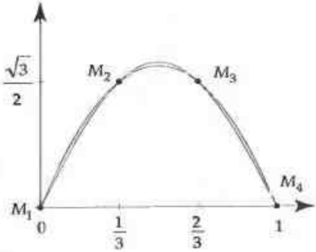


2) Pour passer de la courbe représentative de $u(x)$ à celle de $v(x)$, on pose $f_\alpha(x) = \alpha u(x) + (1-\alpha)v(x)$ et on fait varier α de 0 à 1.

Exercice 2.4

1) L'équation de la droite est :

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1) + b_1$$
$$= b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} + b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$



2) On a $P_i(a_i) = 1$ et $P_i(a_j) = 0$ quand $i \neq j$. De plus $P(a_i) = b_i$ quel que soit i, donc la courbe représentative de $P(x)$ passe par tous les points M_i.

3) Le degré de $P(x)$ est inférieur ou égal à $n-1$ mais il peut être strictement plus petit. Si on avait un polynôme $Q(x)$ tel que $Q(a_i) = b_i$ quel que soit i, alors $P(x) - Q(x)$ serait un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui s'annule au moins n fois, donc il serait nul, ce qui montre que $P(x)$ est le seul à posséder la propriété.

4) On trouve $-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}x(x-1)$. Sur la figure précédente on remarque que les courbes représentatives de $P(x)$ et de $\sin \pi x$ sont très voisines ; les points M_i ont été marqués. Lorsque $n = 5$, on trouve :

$$P(x) = \frac{4}{3}\,(x-1)\,x\,\left(9 - 8\sqrt{2} - 16\left(3 - 2\sqrt{2}\right)x + 16\left(3 - 2\sqrt{2}\right)x^2\right)$$

et la ressemblance entre les deux courbes est encore plus forte. En revanche quand $n = 10$ et $a_i = i$, parce que $P(a_i) = 0$ quel que soit i, on trouve pour $P(x)$ la constante 0 ce qui, évidemment, est une très mauvaise interpolation de $\sin \pi x$!

Exercice 2.5

1) Le nombre $f(x)$ reste positif, et il ne peut pas être nul car il faudrait que chaque carré soit nul, et pour cela x devrait prendre plusieurs valeurs différentes en même temps.

2) On a $f(x) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2)x^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)x + n = Ax^2 + 2Bx + C$. Le coefficient A ne peut pas être nul car il faudrait que tous les α_i soient nuls, ce qui n'est pas le cas puisqu'ils sont différents.

Le discriminant Δ est strictement négatif sinon le trinôme aurait des racines alors qu'il ne doit pas s'annuler.

3) L'inégalité demandée est la simple traduction de $\Delta < 0$.

Exercice 2.6

1) La distance est $|b_i - \beta_i| = \sqrt{(b_i - \beta_i)^2}$.

2) On obtient :

$$\delta = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2)u^2 + nv^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)uv - 2(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i)u - 2(\sum_{i=1}^{n} \beta_i)v + (\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2)$$

3) La question 3 de l'exercice 2.5 dit que $AB - C^2 > 0$ donc $AB - C^2 \neq 0$. Le changement de variable donne :

$$\delta = AU^2 + BV^2 + 2CUV + \frac{-BD^2 + 2CDE - AE^2 + ABF - C^2F}{AB - C^2}$$

4) Si on trouvait U et V tels que $AU^2 + BV^2 + 2CUV < 0$, en les remplaçant par un multiple on pourrait obtenir un nombre négatif ayant une valeur absolue arbitrairement grande et alors δ prendrait des valeurs négatives, ce qui n'est pas le cas. Donc $AU^2 + BV^2 + 2CUV \geqslant 0$ quels que soient U et V, et :

$$\delta \geqslant \frac{-BD^2 + 2CDE - AE^2 + ABF - C^2F}{AB - C^2}$$

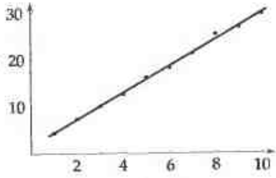
Par conséquent la plus petite valeur prise par δ s'obtient quand $U = 0$ et $V = 0$.

5) On trouve $u = 2,836\,97\ldots$ et $v = 1,606\,67\ldots$

6) De même :

$$P(x) = -\frac{773}{3628800}x^9 + \frac{493}{44800}x^8 - \frac{146837}{604800}x^7 + \frac{28673}{9600}x^6 - \frac{3877577}{172800}x^5 + \frac{678331}{6400}x^4 - \frac{70744963}{226800}x^3 + \frac{18327557}{33600}x^2 - \frac{2540869}{5040}x + \frac{1887}{10}$$

7) La figure **a** montre les points N_i avec la droite des moindres carrés et la figure **b** montre les points N_i avec la courbe représentative de $P(x)$.



a

b

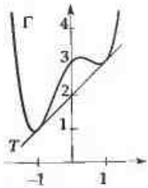
Exercice 2.7

$L_1 = -\infty$; $L_2 = +\infty$; $L_3 = \dfrac{3}{4}$;
$L_4 = 1$; $L_5 = a$; $L_6 = -\pi$;
$L_7 = \dfrac{2}{3}$; $L_8 = +\infty$; $L_9 = +\infty$

CHAPITRE 3

Exercice 3.1

La tangente a pour équation $y = x + 2$. Pour trouver les points où elle recoupe Γ on résout l'équation $x+2 = x^4 - 2x^2 + x + 3$ et on trouve pour seules solutions $x = +1$ et $x = -1$. On constate que la tangente au point d'abscisse -1 est la même qu'au point d'abscisse $+1$, donc cette droite est bitangente à Γ. La figure ci-contre montre Γ et T.



Dans le cas plus général où

$$f(x) = x^4 - 2(u+v)x^3 + (u^2 + v^2 + 4uv)x^2 + rx + s$$

la tangente au point $x = u$ a pour équation

$$y = [2uv(u+v) + r]x + [s - u^2v^2].$$

Parce que cette expression ne change pas quand on échange u et v, on doit forcément trouver la même équation pour la tangente au point d'abscisse v. Quand u et v sont différents cette droite est donc bitangente à la courbe représentative de $f(x)$.

Exercice 3.2

Nous avons $\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h}$ et nous savons que les limites de $\frac{\cos h - 1}{h}$ cet $\frac{\sin h}{h}$ sont respectivement 0 et 1. Donc $\cos' a = -\sin a$.

Exercice 3.3

On trouve :

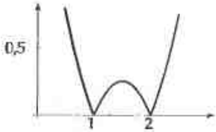
$$f_1'(x) = \frac{x^6+8x^3-2}{(x^3+1)^2} \;;\quad f_2'(x) = -\frac{(x+2)}{\sqrt{x+1}(x-\sqrt{x+1})^2} \;;\quad f_3'(x) = \frac{(1-a^2)\cos x}{(1+a\sin x)^2}\;;$$

$$f_4'(x) = \frac{3(1+\cos x)}{(\cos x + \cos 2x)^2} \;;\quad f_5'(x) = x^4 \sin x \;;\quad f_6'(x) = 15(x^3+x)\sqrt{x^2-1}$$

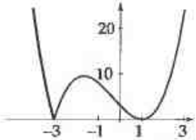
Exercice 3.4

On trouve $f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{R^2-x^2}}$. La courbe représentative de $f(x)$ est le demi-cercle de centre O de rayon R situé au-dessus de l'axe des abscisses. Son point d'abscisse a a pour coordonnées $(a; \sqrt{R^2-a^2})$ et la pente du rayon qui joint ce point à l'origine est $\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{a}$. Puisque le produit de cette pente avec celle de la tangente est égal à -1, ces deux droites sont orthogonales.

Exercice 3.5



La courbe représentative de la fonction $f_1(x)$ se déduit de la parabole qui représente x^2-3x+2 en faisant une symétrie par rapport à l'axe des abscisses sur la partie de la parabole qui est située sous cet axe. Elle possède des points anguleux pour $x=1$ et $x=2$ (on le vérifie en calculant les dérivées à gauche et à droite en ces points).



Nous avons $f_2(x) = |(x-1)^2(x+3)| = (x-1)^2|(x+3)|$ et le seul point anguleux de la courbe représentative de $f_2(x)$ est le point d'abscisse -3.

Exercice 3.6

On a le tableau suivant :

intervalle	$u_a(x)$	$u_a'(x)$
$]-\infty;-1]$	$(1+a)x^2+(a-1)x-2$	$2(1+a)x+(a-1)$
$[-1;0]$	$-(1+a)x^2+(1-a)x+2$	$-(1+a)x+(1-a)$
$[0;2]$	$(a-1)x^2+(a+1)x+2$	$(a-1)x+(a+1)$
$[2;+\infty[$	$(1+a)x^2+(a-1)x-2$	$(1+a)x+(a-1)$

On en déduit que :

$$u_a'(-1^-) = -a-3 \qquad u_a'(-1^+) = a+3$$
$$u_a'(0^-) = -a+1 \qquad u_a'(0^+) = a+1$$
$$u_a'(+2^-) = 5a-3 \qquad u_a'(+2^+) = 5a+3$$

Donc, pour $a \neq -3$ et $a \neq 0$ la courbe possède trois points anguleux en $x = -1$, $x = 0$ et $x = 2$. En revanche si $a = -3$ le point $x = -1$ n'est plus anguleux, et si $a = 0$ c'est le point $x = 0$ qui ne l'est plus.

Exercice 3.7

1) En dérivant $f(-x) = f(x)$ on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, donc f' est impaire.

2) En dérivant $-f(-x) = f(x)$ on obtient $f'(-x) = f'(x)$, donc f' est paire.

3) En dérivant $f(x+T) = f(x)$ on obtient $f'(x+T) = f'(x)$, donc f' est périodique de période T.

4) La fonction f n'est pas forcément périodique, par exemple $f(x) = x$ n'est pas périodique mais sa dérivée l'est !

Exercice 3.8

On trouve $u_3'(x) = u'(x)\, u'(u(x))\, u'(u(u(x)))$ et plus généralement :

$$u_n'(x) = u'(x)\, u'(u_1(x))\, u'(u_2(x)) \cdots u'(u_{n-1}(x))$$

Exercice 3.9

La formule de Leibniz donne

$$p_1^{(n)}(x) = xu^{(n)}(x) + nu^{(n-1)}(x) \quad \text{et} \quad p_2(x) = x^2\, u^{(n)}(x) + 2n\, x\, u^{(n-1)}(x) + (n-1)nu^{(n-2)}(x)$$

Exercice 3.10

Par exemple, avec $p = 3$ et $n = 5$ on trouve d'une part :

$$\begin{aligned}
&[u_1(x)\, u_2(x)\, u_3(x)]^{(5)} = \\
&\quad + 30\, u_3'(x)\, u_1''(x)\, u_2''(x) + 30\, u_2'(x)\, u_1''(x)\, u_3''(x) + 30\, u_1'(x)\, u_2''(x)\, u_3''(x) \\
&\quad + 20\, u_2'(x)\, u_3'(x)\, u_1^{(3)}(x) + 10\, u_3(x)\, u_2''(x)\, u_1^{(3)}(x) + 10\, u_2(x)\, u_3''(x)\, u_1^{(3)}(x) \\
&\quad + 20\, u_1'(x)\, u_3'(x)\, u_2^{(3)}(x) + 10\, u_3(x)\, u_1''(x)\, u_2^{(3)}(x) + 10\, u_1(x)\, u_3''(x)\, u_2^{(3)}(x) \\
&\quad + 20\, u_1'(x)\, u_2'(x)\, u_3^{(3)}(x) + 10\, u_2(x)\, u_1''(x)\, u_3^{(3)}(x) + 10\, u_1(x)\, u_2''(x)\, u_3^{(3)}(x) \\
&\quad + 5\, u_3(x)\, u_2'(x)\, u_1^{(4)}(x) + 5\, u_2(x)\, u_3'(x)\, u_1^{(4)}(x) + 5\, u_3(x)\, u_1'(x)\, u_2^{(4)}(x) \\
&\quad + 5\, u_1(x)\, u_3'(x)\, u_2^{(4)}(x) + 5\, u_2(x)\, u_1'(x)\, u_3^{(4)}(x) + 5\, u_1(x)\, u_2'(x)\, u_3^{(4)}(x) \\
&\quad + u_2(x)\, u_3(x)\, u_1^{(5)}(x) + u_1(x)\, u_3(x)\, u_2^{(5)}(x) + u_1(x)\, u_2(x)\, u_3^{(5)}(x)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

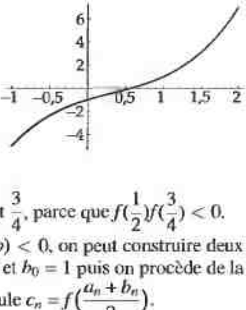
$$
\begin{aligned}
(u_1 + u_2 + u_3)^5 = \\
&+ 30\, u_3^1\, u_1^2\, u_2^2 + 30\, u_2^1\, u_1^2\, u_3^2 + 30\, u_1^1\, u_2^2\, u_3^2 \\
&+ 20\, u_2^1\, u_3^1\, u_1^3 + 10\, u_3^0\, u_2^2\, u_1^3 + 10\, u_2^0\, u_3^2\, u_1^3 \\
&+ 20\, u_1^1\, u_3^1\, u_2^3 + 10\, u_3^0\, u_1^2\, u_2^3 + 10\, u_1^0\, u_3^2\, u_2^3 \\
&+ 20\, u_1^1\, u_2^1\, u_3^3 + 10\, u_2^0\, u_1^2\, u_3^3 + 10\, u_1^0\, u_2^2\, u_3^3 \\
&+ 5\, u_3^0\, u_2^1\, u_1^4 + 5\, u_2^0\, u_3^1\, u_1^4 + 5\, u_3^0\, u_1^1\, u_2^4 \\
&+ 5\, u_1^0\, u_3^1\, u_2^4 + 5\, u_2^0\, u_1^1\, u_3^4 + 5\, u_1^0\, u_2^1\, u_3^4 \\
&+ u_2^0\, u_3^0\, u_1^5 + u_1^0\, u_3^0\, u_2^5 + u_1^0\, u_2^0\, u_3^5
\end{aligned}
$$

On remarque la similitude des deux formules : elles ont les mêmes coefficients et la dérivée $u_i^{(j)}(x)$ dans l'une, correspond à u_i^j dans l'autre. Cette propriété, qui est toujours vraie, constitue la généralisation de la formule de Leibniz.

CHAPITRE 4

Exercice 4.1

La figure ci-contre montre la courbe représentative de $f(x)$.



1) On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $f(x)$ s'annule entre 0 et 1 et, comme r est le seul zéro, on a $0 < r < 1$.

2) On trouve $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,1\ldots$ donc r se trouve entre $\frac{1}{2}$ et 1, parce que $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$.
De même, $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0,3\ldots$ donc r se trouve entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, parce que $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

3) Partant d'une fonction f continue telle que $f(a)f(b) < 0$, on peut construire deux suites de nombres par récurrence. On pose de $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ puis on procède de la façon suivante. Une fois a_n et b_n sont connus on calcule $c_n = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $c_n < 0$ on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Si $c_n > 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.
- Si $c_n = 0$ on a trouvé r et on s'arrête !

On vérifie aisément que $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant r \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ quel que soit n. De plus, puisque $b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on est certain que plus n grandit, plus a_n et b_n se rapprochent de r et plus on connaîtra de décimales de r.

Pour la fonction $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ on obtient ainsi, en notant $\varepsilon(c_n)$ le signe de c_n :

n	a_n	b_n	$\varepsilon(c_n)$
0	0	1	−
1	0,5	1	+
2	0,5	0,75	+
3	0,5	0,625	−
4	0,5625	0,625	+
5	0,5625	0,59375	+
6	0,5625	0,578125	+
7	0,5625	0,570313	−
8	0,566406	0,570313	−
9	0,568359	0,570313	−
10	0,569336	0,570313	−
11	0,569824	0,570313	+
12	0,569824	0,570068	+
13	0,569824	0,569946	+

Puisque $a_{13} < r < b_{13}$, cela donne $r = 0,569\ldots$

4) Les calculs donnent $u_0 = 1$, $u_1 = 0,666\ldots$, $u_2 = 0,574\,07\ldots$, $u_3 = 0,569\,84\ldots$ On constate que dès le troisième terme de la suite, on a retrouvé 3 décimales de r (en fait, les deux suivantes sont exactes et on a 5 décimales exactes !).

Exercice 4.2

Avec $\mathcal{I} = [0; +\infty[$ la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ donne $\mathcal{J} = [0; 1[$ alors que la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1}$ donne $\mathcal{J} = [-1; 1]$.

Exercice 4.3

On a $f(x') - f(x) = 2(x' - x)(x' + x - 2)$. Par conséquent, quand x et x' sont dans $\mathcal{I} = [+1; +\infty[$, la différence $f(x') - f(x)$ a le même signe que $x' - x$, et la fonction est strictement croissante.

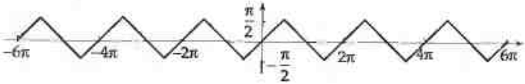
On a $f(1) = 3$ et $f(x)$ prend des valeurs arbitrairement grandes ; donc l'image de f est $[3; +\infty[$. Si on se donne v dans $\mathcal{J} = [3; +\infty[$, les nombres réels u tels que $f(u) = v$ sont $u_1 = \dfrac{2 + \sqrt{2(v-3)}}{2} = 1 + \sqrt{\dfrac{v-3}{2}}$ et $u_2 = \dfrac{2 - \sqrt{2(v-3)}}{2} = 1 - \sqrt{\dfrac{v-3}{2}}$ mais seul le premier est dans $\mathcal{I} = [+1; +\infty[$, donc $f^{(-1)}(x) = 1 + \sqrt{\dfrac{x-3}{2}}$.

Exercice 4.4

Les fonctions $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$, avec a, b, c des nombres réels tels que $a^2 + bc \neq 0$.

Exercice 4.5

Lorsque k est pair, parce que $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - k\pi \leqslant +\frac{\pi}{2}$ et $\sin(x - k\pi) = \sin x$, on a $\arcsin(\sin x) = x - k\pi$. Au contraire, lorque k est impair, parce que $-\frac{\pi}{2} \leqslant k\pi - x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ et $\sin(k\pi - x) = \sin x$, on a $\arcsin(\sin x) = k\pi - x$.



La figure ci-dessus montre la courbe représentative de f ; elle est constituée de segments de droite de pente +1 qui passent par les points d'abscisses $k\pi$ avec k pair, et de segments de droite de pente -1 qui passent par les points d'abscisses $k\pi$ avec k impair. La fonction n'est jamais dérivable en un point où l'arc sinus vaut $\pm\frac{\pi}{2}$ car les points correspondants sont anguleux.

Exercice 4.6

Puisque $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. D'autre part $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, donne $x^2 = \sin^2 y$ et, comme $0 \leqslant \sin y$, parce que $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\sin y = |x|$. Finalement :

$$y = \arcsin|x| = |\arcsin x|.$$

Exercice 4.7

Posons $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ et $t = \arctan x$.

Puisque $f(-x) = -f(x)$ on va d'abord supposer que $x > 0$ et que $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Alors, $0 < \frac{\pi}{2} - t < \frac{\pi}{2}$ et, parce que $\tan(\frac{\pi}{2} - t) = \frac{1}{\tan t}$, on a $\frac{\pi}{2} - t = \arctan\frac{1}{\tan t} = \arctan\frac{1}{x}$. Par conséquent $\frac{\pi}{2} = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ quand $x > 0$, et d'une façon générale :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = signe(x)\frac{\pi}{2}$$

Exercice 4.8

Puisque la fonction arctan est croissante, $\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} > 0$ et le membre de droite est positif ; de plus $4\arctan\frac{1}{5} \leqslant \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $0 < 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$, et il suffit de prouver que les tangentes des deux membres sont égales. Pour cela on utilise la formule :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Si $u = \arctan\frac{1}{5}$ et $v = \arctan\frac{1}{239}$, on a $\tan u = \frac{1}{5}$ et $\tan v = \frac{1}{239}$ et la formule d'addition des tangentes donne successivement, $\tan 2u = \frac{5}{12}$, $\tan 4u = \frac{120}{119}$, $\tan(4u - v) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$.

CHAPITRE 5

Exercice 5.1

On démontre la propriété par récurrence sur d. Elle est vraie lorsque $d = 0$. Supposons-la vraie pour une certaine valeur de d telle que $n - d \geqslant 2$. Nous avons $P^{(d)}(x) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_{n-d})$ avec des nombres $b_1, b_2, \ldots b_{n-d}$ tous distincts, et il y a au moins 2 nombres b_i. Le théorème de Rolle appliqué au segment $[b_i; b_{i+1}]$ dit que la dérivée de $P^{(d)}(x)$ est nulle pour un nombre c_i situé entre b_i et b_{i+1}. Par conséquent $P^{(d+1)}(x)$ s'annule pour les $n - d - 1$ nombres c_i, qui sont tous distincts, puisqu'ils sont pris dans des intervalles deux à deux disjoints. Donc la propriété est vraie pour $d + 1$ et on a $0 \leqslant d + 1 < n$. Par conséquent elle sera vraie pour $d = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Exercice 5.2

Le théorème des accroissements finis dit qu'il existe c tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

quel que soit x dans $]a; b[$. Puisque $a < c < x$ le nombre c tend lui aussi vers a^+ lorsque x tend vers a^+, et $f'(c)$ tend vers $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, il en résulte que :

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Exercice 5.3

1) On a $f'(x) + f'(-x) = 0$, or le premier membre est la dérivée de $f(x) - f(-x)$, donc $f(x) - f(-x) = C$, avec C une constante, et en posant $x = 0$, on voit que cette constante est nulle ; la fonction f est paire.

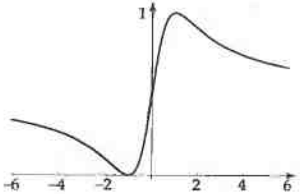
2) On a $f'(x) - f'(-x) = 0$, or le premier membre est la dérivée de $f(x) + f(-x)$, donc $f(x) + f(-x) = C$, avec C une constante. On peut récrire cette égalité sous la forme $f(x) - \dfrac{C}{2} = -\left(f(-x) - \dfrac{C}{2}\right)$, ce qui montre que la fonction $g(x) = f(x) - \dfrac{C}{2}$ est impaire, et parce que $f(x) = g(x) + \dfrac{C}{2}$ on voit que f est la somme d'une fonction impaire et d'une constante.

Exercice 5.4

1) Avec $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$ on a :

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

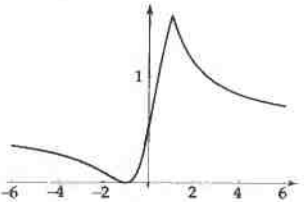
et on détermine facilement la monotonie de $g(x)$. La figure ci-contre montre la courbe représentative de $g(x)$. Le maximum absolu de $g(x)$ est $g(1) = 1$ et son minimum absolu $g(-1) = 0$.



2) Le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R}$ car $g(x)$ est toujours compris entre 0 et 1. On trouve :

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)\sqrt{(x-1)^2(3x^2+2x+3))}}$$

et la figure ci-contre montre la la courbe représentative de $f(x)$.



Le point d'abscisse 1 est un point anguleux de la courbe. En effet, nous avons : $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{(3x^2+2x+3))}} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ et on en déduit que $f'(1^-) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f'(1^+) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 5.5

1) Les points A et B sont sur le cercle trigonométrique. Si on note O l'origine, et H le milieu de AB, le triangle OAB est isocèle, d'angle au sommet $|a-b|$ et AB, la longueur de sa base, est le double de $AH = 2|\sin\dfrac{a-b}{2}|$.

2) Notons $(\cos t; \sin t)$ les coordonnées de M. Parce que les points M, E, N, W, et S sont sur le cercle trigonométrique on peut utiliser le résultat précédent pour calculer chacune des distances qui les séparent. On trouve ainsi $ME = 2|\sin\frac{t}{2}|$, $MN = 2|\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})|$, $MW = 2|\cos\frac{t}{2}|$, $ME = 2|\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})|$.

On remarque alors qu'il suffit de faire varier t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, à cause des symétries du problème, ce qui permet de supprimer toutes les valeurs absolues dans les formules précédentes. On est donc ramené à chercher le maximum absolu et le minimum absolu de :

$$d(t) = 2\sin\frac{t}{2} + 2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) + 2\cos\frac{t}{2} + 2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})$$

lorsque t parcourt le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} d'(t) &= \cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2} - \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) + \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) \\ &= \cos\frac{t}{2} - (1 + \sqrt{2})\sin\frac{t}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée s'annule quand $\tan\frac{t}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \tan\frac{\pi}{8}$ et, compte tenu de l'intervalle où se trouve t, cela donne $t = \frac{\pi}{4}$.

Alors le maximum absolu et le minimum absolu de $d(t)$ sont un des deux nombres $d(0) = d(\frac{\pi}{4}) = 2(1 + \sqrt{2}) = 4,82\ldots$ ou

$$d\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = 5,22\ldots$$

Le maximum est donc obtenu quand M se trouve à égale distance entre deux points consécutifs parmi E, N, W et S, et le minimum, quand il est sur un de ces points.

Exercice 5.6

La formule de Taylor à l'ordre 2 dit qu'il existe c compris entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2\frac{f''(c)}{2}$$

et aussi qu'il existe d compris entre a et b tel que :

$$f(a) = f(b) + (a-b)f'(b) + (b-a)^2\frac{f''(d)}{2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(b) - (b-a)^2\frac{f''(d)}{2}$$

En ajoutant cette égalité à la première on obtient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(a)+f'(b)}{2}+(b-a)A$$

avec $A=\dfrac{f''(c)-f''(d)}{2}$ et $|A|=|\dfrac{f''(c)-f''(d)}{2}|\leqslant\dfrac{|f''(c)|+|f''(d)|}{2}\leqslant M.$

Exercice 5.7

L'idée est que $\sqrt[3]{1\,100}=10\sqrt[3]{1,1}=10\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{10}}$. Parce que :

$$f'(x)=\frac{1}{3(1+x)^{\frac{2}{3}}}\qquad f''(x)=\frac{-1}{9(1+x)^{\frac{5}{3}}}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27(1+x)^{\frac{8}{3}}}\qquad f''''(x)=\frac{-80}{81(1+x)^{\frac{11}{3}}}$$

la formule de Mac Laurin dit que si $|x|<1$ il existe θ, avec $0<\theta<1$ tel que :

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10}{243(1+\theta x)^{\frac{11}{3}}}x^4$$

Appliqué à $x=\dfrac{1}{10}$ cela donne :

$$\left|\sqrt[3]{1\,100}-10\left(1+\frac{1}{30}-\frac{1}{900}+\frac{5}{81\,000}\right)\right|\leqslant\frac{1}{24\,300}$$

Autrement dit :

$$\left|\sqrt[3]{1\,100}-10,3228\ldots\right|\leqslant 0,000\,04\ldots$$

Donc $\sqrt[3]{1\,100}=10,322\ldots$.

Exercice 5.8

1) Puisque la dérivée de tan est $\dfrac{1}{\cos^2}$, en dérivant $x=\tan f(x)$ on obtient d'abord $1=\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$, ce qui donne bien $f'(x)=\cos^2 f(x)$.

2) Lorsque $n=1$, on a :

$$(n-1)!\ \cos^n f(x)\sin\left[nf(x)+n\frac{\pi}{2}\right]=0!\ \cos f(x)\ \sin[f(x)+\frac{\pi}{2}]=\cos f(x)\cos f(x)$$

et la propriété est vraie pour $n = 1$. Ensuite supposons que la propriété est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. En dérivant, il vient :

$$f^{(n+1)}(x) = (n-1)!\ [-n f'(x) \sin f(x)\ \cos^{n-1} f(x) \sin\left[nf(x) + n\frac{\pi}{2}\right] \\ + (n-1)!\ \cos^n f(x)\ nf'(x) \cos\left[nf(x) + n\frac{\pi}{2}\right]$$

En remplaçant $f'(x)$ par $\cos^2 f(x)$, et en faisant des mises en facteur, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = n!\ \cos^{n+1} f(x)\Bigg(-\sin f(x)\ \sin\left[nf(x) + n\frac{\pi}{2}\right] \\ + \cos f(x)\ \cos\left[nf(x) + n\frac{\pi}{2}\right]\Bigg)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= n!\ \cos^{n+1} f(x) \cos\left[(n+1)f(x) + n\frac{\pi}{2}\right] \\ &= n!\ \cos^{n+1} f(x) \cos\left[(n+1)f(x) + (n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= n!\ \cos^{n+1} f(x) \sin\left[(n+1)f(x) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

donc la relation est valable pour $n+1$, ce qui prouve qu'elle est valable quel que soit $n \geqslant 1$.

3) La majoration $|f^{(n)}(x)| \leqslant (n-1)!$ résulte de ce que les sinus et les cosinus ont une valeur absolue majorée par 1.

4) En faisant $x = 0$ dans la formule de la question 2) on obtient :

$$f^{(n)}(0) = (n-1)!\ \cos^n f(0) \sin\left[nf(0) + n\frac{\pi}{2}\right] = (n-1)!\ \sin\left[n\frac{\pi}{2}\right]$$

c'est-à-dire :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p, \\ (-1)^p(2p)! & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

La formule de Mac Laurin dit qu'il existe θ, compris strictement entre 0 et 1 tel que :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \frac{f^{(2p+1)}(\theta x)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

5) On trouve la majoration demandée en faisant $x = 1$ dans la formule de Mac Laurin, et en utilisant la majoration de la question 3. Si on calcule π en le remplaçant par :

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{2p-1}\right)$$

l'erreur commise est majorée par $\dfrac{4}{2p+1}$, ce qui n'est pas *vraiment petit*, et on peut craindre que la méthode demande beaucoup de calculs pour trouver quelques chiffres après la virgule. D'ailleurs le calcul montre qu'il faut aller jusqu'à $p = 2\,454$ pour trouver 3 chiffres et :

$$\sum_{k=1}^{2454} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 3,141\,18\ldots$$

CHAPITRE 6

Exercice 6.1

On a $f(1) = 2f(1) = 0$. Si on dérive $f(xy) = f(x) + f(y)$ par rapport à x, en faisant comme si y est une constante, on obtient $yf'(xy) = f'(x)$. De même, en dérivant par rapport à y, avec cette fois x constant, il vient $xf'(xy) = f'(y)$. On en déduit que $xf'(x) = yf'(y)$ quels que soient x et y, donc $xf'(x)$ est une constante, C, et $f'(x) = \frac{C}{x}$, ce qui montre que $f(x) = C\ln x$.

Exercice 6.2

La fonction réciproque de $l_n(x)$ est :

$$e_n(x) = \underbrace{\exp(\exp(\exp(\cdots\ln(\ln(x))\cdots))}_{n \text{ fois le symbole exp}}$$

En composant les exponentielles on trouve :

$$]-\infty;+\infty[\ \xrightarrow{\exp}\ ]0;+\infty[\ \xrightarrow{\exp}\ ]1;+\infty[\ \xrightarrow{\exp}\ ]e;+\infty[\ \xrightarrow{\exp}\ \cdots$$

Plus précisément, si $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, et si on définit une suite de nombres u_n en posant $u_{n+1} = e^{u_n}$, on montre facilement par récurrence, à l'aide de l'égalité $\exp(]a;+\infty[) =]\exp(a);+\infty[$, que $\exp(]u_n;+\infty[) =]u_{n+1};+\infty[$. Par conséquent l'image de $e_n(x)$ est l'intervalle $]u_n;+\infty[$ et le domaine de définition de $l_n(x)$ est cet intervalle.

Exercice 6.3

Pour calculer L_1, on pose $y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, ce qui donne $L_1 = \lim\limits_{y\to 0^+}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}(y\ln y)^{\beta} = 0$.

Pour calculer L_2, on pose $y = \ln x$, ce qui donne $L_2 = \lim\limits_{y\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}y}}{y}\right)^{\beta} = 0$.

Exercice 6.4

1) On pose $h = \frac{1}{x^2}$, ce qui donne $|x| = h^{-\frac{1}{2}}$ et $\left|\frac{1}{x^n}\exp(-\frac{1}{x^2})\right| = \frac{h^{\frac{n}{2}}}{e^h}$. Le théorème 6.5.3.1 dit que $\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{h^{\frac{n}{2}}}{e^h} = 0$, donc $\left|\frac{1}{x^n}\exp(-\frac{1}{x^2})\right|$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et le théorème de la pince donne $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$.

2) Parce qu'elle est définie par une formule, la fonction f est de classe C^∞ en dehors de $x = 0$. Il faut vérifier qu'elle est indéfiniment dérivable en 0. On fait une démonstration par récurrence qui comprend deux étapes.

Démontrons d'abord que $f^{(n)}(x)$ est une somme de termes du type $\frac{1}{x^k}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ en dehors de 0. Cette propriété est vraie pour $n = 0$. Si elle est vraie pour une certaine valeur de n, alors, parce que la dérivée de $\frac{1}{x^k}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ est une somme de termes de ce type, elle est vraie aussi pour $n+1$ et elle est donc vraie pour tout n.

Démontrons maintenant que f admet une dérivée d'ordre n en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit n. D'abord c'est vrai pour $n = 0$. Ensuite, si f admet une dérivée d'ordre n en 0 et si $f^{(n)}(0) = 0$ pour une certaine valeur de n, alors, puisque $\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{f^{(n)}(x)}{x}$ la question 1 montre que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x}$ existe et vaut 0. Donc $f^{(n)}(x)$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$, ce qui montre que la propriété est vraie quel que soit n.

Exercice 6.5

On a $x^x = e^{x\ln x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$, cela donne $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$ (on remarquera la cohérence de ce résultat avec la convention $0^0 = 1$).

D'autre part la fonction $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ est dérivable, et sa dérivée, $f'(x) = (1+\ln x)f(x)$, s'annule seulement quand $x = e^{-1}$. Puisque $f(e^{-1}) = e^{-\frac{1}{e}} = 0,6922\ldots < f(1)$ cette valeur critique est le minimum absolu de $f(x)$.

Exercice 6.6

1) Nous avons $d'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \frac{1}{x}$. Par conséquent $d'_\alpha(x)$ s'annule quand $x^\alpha = \frac{1}{\alpha}$, ce qui donne $A_\alpha = \alpha^{-\frac{1}{\alpha}}$.

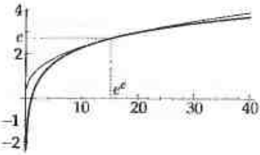
2) On trouve $m_\alpha = \left(\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha - \ln\left(\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha}(1+\ln\alpha)$ et on a le tableau de variation :

x	0		A_α		$+\infty$
$d'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	
$d_\alpha(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m_α	$\nearrow$	$+\infty$

3) Pour que les deux courbes se coupent, il faut et il suffit que $d_\alpha(x)$ s'annule et pour que $d_\alpha(x)$ s'annule, il faut et il suffit que son minimum absolu soit négatif. Par conséquent les courbes se coupent quand $\alpha \leqslant \frac{1}{e}$, elles ne se coupent pas quand $\alpha > \frac{1}{e}$.

4) Elles sont tangentes dans le cas limite de la question précédente, quand $\alpha = \frac{1}{e}$; on peut le vérifier. Leur intersection a pour abscisse le nombre x tel que $d_{\frac{1}{e}}(x) = 0$, qui est, dans ce cas, $A_{\frac{1}{e}} = e^e$; elle a pour ordonnée $\ln e^e = e$.

Au point d'intersection, la tangente à la courbe représentative de $x^{\frac{1}{e}}$ a pour pente $\frac{1}{e}(A_{\frac{1}{e}})^{\frac{1}{e}-1} = e^{-e}$ et la tangente à la courbe représentative du logarithme a pour pente $\frac{1}{A_{\frac{1}{e}}} = \frac{1}{e^e} = e^{-e}$. Les courbes représentatives sont dessinées sur la figure ci-contre :



Exercice 6.7

En remplaçant les cosinus hyperboliques par leur définition on obtient :

$$C(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{kx} + \sum_{k=0}^{n} e^{-kx}\right)$$

La formule de la somme des termes d'une progression géométrique dit que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^{x} - 1} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})x} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})x} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} + \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})x} - e^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(n+\frac{1}{2})x} - e^{-(n+\frac{1}{2})x} + e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{(e^{n\frac{x}{2}} + e^{-n\frac{x}{2}})(e^{(n+1)\frac{x}{2}} - e^{-(n+1)\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement $C(x) = \dfrac{\operatorname{ch}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$. De la même façon, on trouve

$S(x) = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\frac{(n+1)x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$.

Exercice 6.8

La dérivée de $f_1(x)$ est :

$$f_1'(x) = \left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\right)' \frac{1}{2\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} - 1}} = \frac{\operatorname{sh} x}{4\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{4\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{4}}} = \frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{2|\operatorname{sh} x|}$$

Elle est égale à $+\frac{1}{2}$ quand $x > 0$ et à $-\frac{1}{2}$ quand $x < 0$; donc $f_1(x) = \frac{|x|}{2} + C$ avec une constante C mais comme $f_1(0) = 0$ on a $C = 0$.

Le même genre de calcul donne $f_2(x) = \frac{|x|}{2}$ et $f_3(x) = x$.

CHAPITRE 7

Exercice 7.1

Quel que soit $n \geqslant 0$, on a $f(x) = x^{-n}\left(x^n\sqrt{|x|}\right) = o(x^{-n})$ donc $f(x)$ admet des développements limités à tout ordre négatif ou nul. Si $f(x)$ admettait un développement limité à l'ordre 1, on aurait $f(x) = \sqrt{|x|} = a + bx + x\varepsilon(x)$, ce qui donnerait $a = 0$ par passage à la limite, mais après avoir divisé par x on aurait un membre de gauche qui devient infini, et un membre de droite qui tend vers 0, ce qui n'est pas possible. Enfin, si $f(x)$ avait un développement à un ordre supérieur à 1 elle aurait un développement à l'ordre 1, et on vient de voir que ce n'est pas vrai.

Exercice 7.2

On trouve :

$f_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^4)$; $f_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$;

$f_3(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^3}{720} + o(x^4)$; $f_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$;

$f_5(x) = 1 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{37}{128}x^3 - \frac{605}{2048}x^4 + o(x^4)$;

$f_6(x) = \frac{\cos s}{1}x + \frac{\cos 2s}{2}x^2 + \frac{\cos 3s}{3}x^3 + \frac{\cos 4s}{4}x^4 + o(x^4)$.

Exercice 7.3

Le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 donne :

$$\cos 3x - (u\cos x + v\cos^2 x + w\cos^3 x) =$$
$$(1-u-v-w) + \left(\frac{-9+u+2v+3w}{2}\right)x^2 + \left(\frac{81-u-8v-21w}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

et en écrivant que tous les coefficients sont nuls, on obtient un système de 3 équations à 3 inconnues, u, v et w, qui a pour solution $u=-3$, $v=0$, $w=4$; on retrouve ainsi que :

$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x.$$

Exercice 7.4

On trouve $f_1(x) \sim \frac{7}{90}x^6$; $f_2(x) \sim \frac{1}{24}x^4$; $f_3(x) \sim \frac{5}{16}x^8$.

Exercice 7.5

1) On a $f(x) = u + \frac{u(u-1)}{2}x + \frac{u(2u^2-3u+1)}{12}x^2 + \frac{u^2(u-1)^2}{24}x^3 + o(x^3)$.

2) La formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique dit que :

$$\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} = 1 + e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}$$

et en faisant les développements limités à l'ordre 3, au voisinage de 0, dans les deux membres de l'égalité précédente, il vient :

$$(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3)$$
$$= (n+1) + \left(\sum_{k=0}^{n} n\right)\frac{x}{1} + \left(\sum_{k=0}^{n} n^2\right)\frac{x^2}{2} + \left(\sum_{k=0}^{n} n^3\right)\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Il suffit alors d'égaler les coefficients des termes de degré 2 et 3 pour obtenir les formules demandées.

Exercice 7.6

On trouve :

$$f_1(x) = \log 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} - \frac{h^4}{64} + o(h^4)$$
$$f_2(x) = 1 - 2h - \frac{5h^2}{2} - 5h^3 - \frac{105h^4}{8} + o(h^4)$$
$$f_3(x) = \frac{1}{h^2} + \frac{3}{h} + 7 + 15h + 30h^2 + 60h^3 + 120h^4 + o(h^4)$$

$$f_4(x) = 1 + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)$$
$$f_5(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} - \frac{h^4}{40} + o(h^4)$$
$$f_6(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{h^2}{6\sqrt{3}} + \frac{h^3}{9\sqrt{3}} + \frac{7h^4}{108\sqrt{3}} + o(h^4)$$

Exercice 7.7

D'abord $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ quel que soit n. Par conséquent, si $g(h) = e^{-\frac{1}{h}}$, on a $g(h) = h^n \left(\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^n}\right)$ avec $\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^n} = 0$, ce qui montre que $g(h) = o(h^n)$ et qui donne le développement $e^{-x} = o(h^n)$.

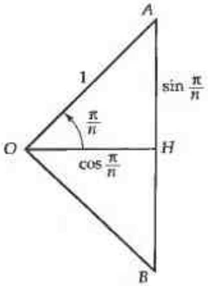
Exercice 7.8

Au voisinage de l'infini on a $f(x) = \frac{1}{h} + 7 + 6h + o(h)$. Par conséquent la courbe admet la droite $y = x + 7$ pour asymptote ; elle est au-dessus quand x tend vers $+\infty$, et au-dessous quand x tend vers $-\infty$.

CHAPITRE 8

Exercice 8.1

1) Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier, à n côtés, inscrit dans un cercle de centre O, l'aire de ce polygone est n fois celle du triangle AOB.



L'angle AOB est égal à $\frac{2\pi}{n}$. Il en résulte que l'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ et $\mathcal{A}_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. En écrivant $\mathcal{A}_n = \pi\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$ on voit que $\mathcal{A}_n$ tend vers π lorsque n tend vers l'infini.

2) La longueur du côté AB est égale à $2\sin\frac{\pi}{n}$ et $\mathcal{P}_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$.

3) On a $\mathcal{P}_n = 2\mathcal{A}_{2n}$. Par conséquent $\mathcal{P} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{P}_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\mathcal{A}_{2n} = 2\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$, on a

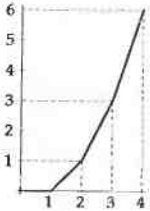
$$\mathcal{P} = 2\mathcal{A}.$$

Exercice 8.2

Lorsque n est entier, et $n \leqslant x < n+1$ on a $\lfloor x \rfloor = n$ donc :

$$F(x) = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} (n-1)\,dt + \int_n^x n\,dt$$

et $F(x) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + nx = \frac{n(n-1)}{2} + nx$, ce qui donne la courbe représentative :



Exercice 8.3

1) Pour calculer l'intégrale au moyen de sommes de Riemann on peut faire des subdivisions du segment $[-a; a]$ symétriques par rapport à l'origine et choisir les points où on évalue $f(x)$ symétriquement par rapport à l'origine. Parce que f est impaire, la somme de Riemann ainsi obtenue est nulle. La limite de ces sommes de Riemann est donc 0 et l'intégrale est nulle.

2) On construit des sommes de Riemann de la même façon, mais cette fois, parce que f est paire, la somme de Riemann obtenue est le double d'une somme de Riemann utilisée pour calculer l'intégrale de $f(t)$ sur le segment $[0; a]$, ce qui donne le résultat.

Exercice 8.4

- Pour la première suite on écrit :

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) + \ln\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\right]$$

et on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $\ln\frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0, 1]$; sa limite est $\int_0^1 \ln\frac{1}{1+t}\,dt$.

- Pour la deuxième on écrit :

$$b_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1^2}{n}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{2^2}{n}\sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \frac{\overline{n-1}^2}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

et on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x^2 \sin \pi x$ sur le segment $[0, 1]$: sa limite est $\int_0^1 t^2 \sin \pi t \, dt$.

- Enfin, pour la troisième on écrit :

$$\ln c_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{0}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

et on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $\ln(1+x)$ sur le segment $[0, 1]$. Sa limite est $\int_0^1 \ln(1+t)\, dt$ donc la limite de c_n est :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(1+t)\, dt\right).$$

Exercice 8.5

En utilisant la formule de Chasles on écrit :

$$\int_a^b f(t)\,dt \int_c^d f(t)\,dt + \left(\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt\right)\left(-\int_c^d f(t)\,dt - \int_b^c f(t)\,dt\right)$$
$$+ \left(\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt\right)\int_b^c f(t)\,dt$$

et, en développant, on trouve 0.

Exercice 8.6

Si f n'est pas la constante 0, il existe c tel que $f(c) > 0$. On choisit arbitrairement un nombre s tel que $0 < s < f(c)$ et on pose $\varepsilon = f(c) - s$. Parce que f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $s = f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ quand $c - \alpha < x < c + \alpha$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{c-\alpha} f(t)\,dt + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t)\,dt + \int_{c+\alpha}^b f(t)\,dt$$

et parce que les trois intégrales sont positives on a

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t)\,dt \geqslant \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} s\,dt = 2\alpha s > 0.$$

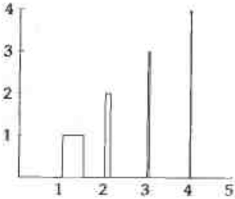
Exercice 8.7

La condition est degré(Q) − degré(P) $\geqslant 2$. En effet, on note ax^p et bx^q les termes de plus haut degré de $P(x)$ et de $Q(x)$.

Lorsque x tend vers $+\infty$ on a $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{ax^p}{bx^q}u(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$, donc il existe c tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant |u(x)| \leqslant 2$ quand $c < x$. Alors, si on calcule $\displaystyle\int_c^\infty \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$, on a $\left|\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right| \leqslant 2\left|\dfrac{a}{b}\right| x^{p-q}$, ce qui fait, dans le cas où $q-p \geqslant 2$, que l'intégrale converge, et on a aussi $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{a}{b}\right| x^{p-q} \leqslant \left|\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right|$ ce qui fait, dans le cas où $q-p \leqslant 1$, qu'elle diverge.

Exercice 8.8

La fonction F est croissante, car $F(y) - F(x) = \displaystyle\int_x^y f(t)\,dt$ est du signe de $y - x$. Sa courbe représentative est dessinée ci-contre.



Si $x < n+1$ on a :

$$\begin{aligned} F(x) \leqslant F(n+1) &= \int_0^{n+1} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{1.2^1} + \frac{2}{2.2^2} + \cdots + \frac{n}{n.2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} < 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que $F(x)$ est majorée par 1.

Si $n \leqslant x < n+1$ on a $F(n) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant F(x) < 1 - \dfrac{1}{2^n} = F(n+1)$ et le théorème de la pince montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$.

2) D'une part la condition n'est pas suffisante car $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t}$ ne converge pas et, d'autre part, on vient de voir une intégrale qui converge, bien que la fonction ne tende pas vers 0, ce qui prouve que la condition n'est pas nécessaire.

CHAPITRE 9

Exercice 9.1

On trouve :

$$f'(x) = P(\ln x) - P'(\ln x) + P''(\ln x) + \ldots + (-1)^d P^{(d)}(\ln x) \\ + \frac{x}{x}\left[P'(\ln x) - P''(\ln x) + P'''(\ln x) + \ldots + (-1)^d P^{(d+1)}(\ln x)\right]$$

Donc $f'(x) = P(\ln x) + (-1)^d P^{(d+1)}(\ln x)$ et, comme P est un polynôme de degré, d cela donne $f'(x) = P(\ln x)$. Donc :

$$\int P(\ln x)\, dx = x\left[P(\ln x) - P'(\ln x) + P''(\ln x) + \ldots + (-1)^d P^{(d)}(\ln x)\right] + C$$

En particulier $\displaystyle\int_0^x \ln^3 t\, dt = x\left(\ln^3 x - 3\ln^2 t + 6\ln t - 6\right)$.

Exercice 9.2

- Quand $n \neq -1$:

$$I_1 = \int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

- quand $n = -1$:

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

résultat qu'on peut aussi retrouver par changement de variable.

$$I_2 = \int \arctan x\, dx = x\arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$$

$$I_3 = \int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int x\left(\frac{2}{x}\right)\ln x\, dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

Exercice 9.3

1) On trouve $u_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

2) L'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t \, dt \\
&= \left[-\cos t \; \sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, (n-1) \cos t \sin^{n-2} t \, dt \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t \, dt \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} t - \sin^n t) \, dt \\
&= (n-1) u_{n-2} - (n-1) u_n
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$u_n = \frac{n-1}{n} u_{n-2}.$$

3) Les résultats des questions précédentes donnent :

$$\begin{aligned}
u_{2p} &= \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\cdots\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p)(2p-1)(2p-4)\cdots(3)(2)(1)}{(2p)^2(2p-2)^2\cdots(4)^2(2)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\
u_{2p+1} &= \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\cdots\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{(2p)^2(2p-2)^2\cdots(4)^2(2)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 9.4

1) On a :

$$I_1 = \int_2^3 \frac{dt}{10 - 6t + t^2} = \int_2^3 \frac{dt}{1 + (t-3)^2} = \int_{-1}^0 \frac{du}{1+u^2} = \arctan(0) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4}$$

2) En posant $e^t = u$ il vient :

$$\int_1^A \frac{dt}{e^t - 1} = \int_e^{e^A} \frac{du}{(u-1)u} = \int_e^{e^A} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du = \left[\ln\frac{u-1}{u}\right]_e^{e^A}$$

ce qui donne :

$$I_2 = \lim_{A \to +\infty} \left[\ln \frac{e^A - 1}{e^A} - \ln \frac{e-1}{e} \right] = -\ln \frac{e-1}{e}$$

3) On peut supposer $\sin\theta > 0$ (on changera ensuite θ en $-\theta$), ce qui revient, à cause de la périodicité, à supposer $0 < \theta < \pi$. Alors le changement de variable $u = \dfrac{x - \cos\theta}{\sin\theta}$ donne :

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta t + t^2}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{\frac{dt}{\sin\theta}}{1 + \left(\frac{t - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2} = \int_{-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

et, puisque $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, on obtient :

$$I_3 = \int_{\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_{\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

mais, parce que $-\dfrac{\pi}{2} < \theta - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, on a $I_2 = \pi - \theta$ et finalement :

$$I_3 = \begin{cases} \pi - \theta & \text{quand } 0 < \theta < \pi, \\ 0 & \text{quand } 0 = \theta, \\ -\pi - \theta & \text{quand } -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

4) On écrit :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{dt}{(a\cos t - \sin t)^2} = \int \frac{1}{(a - \tan t)^2} \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int \frac{du}{(a-u)^2} = \frac{1}{a-u} + C = \frac{\cos t}{a\cos t - \sin t} + C \end{aligned}$$

5) On pose $u = \sqrt{t^a + 1}$, ce qui donne $u^2 = t^a + 1$ et $2u\, du = at^{a-1}\, dt = a(u^2 - 1)\dfrac{dt}{t}$. Le changement de variable donne :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{\sqrt{t^a+1}}{t}\, dt = \frac{2}{a} \int \frac{u^2\, du}{u^2 - 1} = \frac{2}{a} \int \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 - 1} - \frac{1}{1 - u^2} \right) du \\ &= \frac{2}{a}\left(u - \operatorname{argth} u\right) + C = \frac{2}{a}\left(\sqrt{t^a + 1} - \operatorname{argth} \sqrt{t^a + 1} \right) + C \end{aligned}$$

6) On pose $t^n = u$ ce qui donne :

$$I_6 = \int \frac{dt}{t(1+t^n)} = \frac{1}{n}\int \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{n}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du$$
$$= \frac{1}{n}\ln u - \frac{1}{n}\ln(1+u) + C = \ln t - \frac{\ln(1+t^n)}{n} + C$$

Exercice 9.5

1) On trouve le résultat en faisant le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - t$. On en déduit que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t \cos\frac{\pi}{4} + \sin t \sin\frac{\pi}{4}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \sin t)\right) dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(\cos t + \sin t)\right) dt = \frac{\pi}{4}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t + \sin t\right) dt$$

2) La dernière intégrale se transforme :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t + \sin t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos t(1+\tan t)\right) dt = I + J$$

On a donc $I = \frac{\pi}{4}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + I + J$ ce qui donne finalement

$$J = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

Exercice 9.6

1) On trouve $u_0(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x$ et $u_1(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2) Bien évidemment on a $u_n(x) + u_{n+2}(x) = \int_0^x \frac{t^n(1+t^2)}{1+t^2}\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Pour obtenir le résultat demandé on fait la somme alternée des relations quand n est pair et varie de 0 à $2p-2$. On refait de même avec les indices impairs.

3) En posant $t = \arctan y$ on obtient $t_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n y\, dy = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt = u_n(1) - u_n(0)$

et on en déduit immédiatement que :

$$t_{2p} = \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-3} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{1} + (-1)^p \frac{\pi}{4}$$
$$t_{2p+1} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1}{2} + \frac{(-1)^p}{2}\ln(2)$$

4) On a $s(0) = s\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, et $s'(x) = \frac{4}{\pi} - \tan^2 x$. Dans $]0; \frac{\pi}{4}[$ la fonction s' est strictement monotone, car sa dérivée, $s''(x) = -2(1 + \tan^2 x)\tan x$, est strictement négative ; il en résulte qu'elle ne peut s'annuler qu'une fois, et que s n'a qu'un seul point critique dans cet intervalle. Or le théorème de Rolle dit que si $s(x)$ s'annulait en un point r tel que $0 < r < \frac{\pi}{4}$ on aurait un point critique entre 0 et r, et un autre entre r et $\frac{\pi}{4}$, ce qui fait au moins un de trop. Par conséquent $s(x)$ ne s'annule pas, garde un signe constant et, puisque $s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{3} > 0$, on est certain que $0 \leqslant s(x)$ quel que soit x dans $[0; \frac{\pi}{4}]$, ce qui donne l'encadrement $0 \leqslant \tan x \leqslant \frac{4x}{\pi}$.

5) On en déduit que $0 \leqslant \tan^n x \leqslant \left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$ et :

$$0 < t_n < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4x}{\pi}\right)^n dx = \frac{\pi}{4(n+1)}$$

Il en résulte que $|t_n| < \varepsilon < 2\varepsilon$ quand $n > \frac{\pi}{4\varepsilon} - 1$ et on peut prendre $P = \frac{\pi}{4\varepsilon} - 1$.

CHAPITRE 10

Exercice 10.1

D'abord on remarque que $(0,0)\times(x,y) = (0,0)$ quels que soient x et y. Par conséquent le couple $(0,0)$ n'a pas d'inverse.

Supposons donc que (a,b) est un couple différent de $(0,0)$. Alors, l'égalité $(a,b) \times (x,y) = (1,0)$ équivaut au système de deux équations $ax + by = 1$ et $bx + ay = 0$.

En multipliant la première par a, la seconde par b, puis en retranchant, on obtient $(a^2 - b^2)x = a$. De même, en multipliant la première par b, la seconde par a et en retranchant, on obtient $(a^2 - b^2)y = -b$.

Si $a^2 \neq b^2$ on trouve que $\left(\dfrac{a}{a^2-b^2}, \dfrac{-b}{a^2-b^2}\right)$ est l'unique inverse de (a,b). En revanche, si $a^2 = b^2$, c'est-à-dire si $a = \pm b$, on obtient les deux égalités $0 = a$ et $0 = -b$ et puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls, il n'y a pas d'inverse.

Exercice 10.2

On trouve $-\dfrac{65}{97} - i\dfrac{72}{97}$. On peut vérifier que le module de z est égal à 1 en le calculant, mais on peut aussi ne pas faire de calcul en observant que z est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module.

Exercice 10.3

L'idée consiste à passer par la forme exponentielle.

Parce que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ on a $u = e^{i\frac{593\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+296\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

De même $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, ce qui donne $v = 2^{500}$.

Enfin $3 - i\sqrt{3} = -i2\sqrt{3}\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = -i2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $w = 12^{96}$.

Exercice 10.4

1) Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si le rapport des nombres complexes est réel, autrement dit égal à son conjugué, ce qui donne la condition $u\overline{v} - v\overline{u} = 0$.

2) Ils sont orthogonaux si et seulement si l'un se déduit de l'autre par une similitude de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, autrement dit si leur rapport est imaginaire pur donc l'opposé de son conjugué, ce qui donne la condition $u\overline{v} + v\overline{u} = 0$.

Exercice 10.5

1) La condition $|z-u| = |z-v|$ équivaut à $|z-u|^2 = |z-v|^2$ ou encore à $(z-u)(\overline{z}-\overline{u}) = (z-v)(\overline{z}-\overline{v})$. Il suffit alors de développer pour obtenir le résultat demandé.

2) On a les équations :

$$(v-u)\overline{z} + (\overline{v}-\overline{u})z = v\overline{v} - u\overline{u}$$
$$(w-v)\overline{z} + (\overline{w}-\overline{v})z = w\overline{w} - v\overline{v}$$

et en éliminant $\overline{z}$ on obtient :

$$z = \frac{\overline{u}u(w-v) + \overline{v}v(u-w) + \overline{w}w(v-u)}{\overline{u}(w-v) + \overline{v}(u-w) + \overline{w}(v-u)}$$

Exercice 10.6

La condition $z_2 - iz_1 = z_3 - iz_2$ peut sécrire $z_1 - z_2 = i(z_3 - z_2)$, ce qui signifie que z_1 se déduit de z_3 par la rotation de centre z_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a un résultat analogue avec les autres égalités, ce qui montre que le quadrilatère obtenu en prenant z_1, z_2, z_3, z_4, dans cet ordre, est un carré.

Exercice 10.7

Puisque $|z| = |z'|$, le triangle Ozz' est isocèle, et son axe de symétrie est la droite qui joint O au milieu de zz'. Mais, parce que $\frac{z+z'}{2} = \left(\frac{z+\overline{z}}{4} + \frac{z-\overline{z}}{4i}\right)(1+i)$ et que $\frac{z+\overline{z}}{4} + \frac{z-\overline{z}}{4i}$ est un nombre réel, cet axe de symétrie est la droite (D) portée par le vecteur de coordonnées $(1;1)$. Le point z' est le symétrique de z par rapport à la droite (D). La transformation est donc la symétrie par rapport à (D).

Exercice 10.8

Par la symétrie S le point z devient $z' = -z$ qui, à son tour, par la rotation R, devient $z'' = 1 + i(z' - 1)$, ce qui donne $z'' = 1 - i - iz = -i - i(z+i)$. Il en réulte que $R \circ S$ est la rotation de centre $-i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

De même, par la rotation R le point z devient $z_1 = 1 + i(z-1)$, qui, à son tour, devient $z_2 = -z_1$ par la symétrie S, ce qui donne $z_2 = -1 - i(z-1) = -1 + i - iz = i - i(z-i)$, et par conséquent $S \circ R$ est la rotation de centre $+i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 10.9

1) Quand $c = 0$ le point $f(t)$ se déduit de t par une similitude. Puisque t parcourt l'axe rél, $f(t)$ parcourt la droite qui s'en déduit par cette similitude. Nous supposerons donc maintenant $c \neq 0$.

Puisque c n'est pas nul la condition $c\overline{d} - d\overline{c} = 0$ peut s'écrire $\frac{d}{c} = \frac{\overline{d}}{\overline{c}}$. Par conséquent ce rapport est réel ; notons-le r. Alors

$$f(t) = \frac{at+b}{c(t+r)} = \frac{a(t+r)+(b-ar)}{c(t+r)} = \frac{a}{c} + \left(\frac{1}{t+r}\right)\frac{b-ar}{c}$$

Si $b - ar = 0$ le point $f(t)$ ne bouge pas. Dans le cas contraire il décrit la droite qui passe par $\frac{a}{c}$ et qui est parallèle au vecteur $\frac{b-ar}{c}$.

2) Supposons maintenant que $c\overline{d} - d\overline{c} \neq 0$. On a :

$$f(t) - \gamma = \frac{(a-c\gamma)t + b - \gamma d}{ct+d}$$

et on veut que $(a - c\gamma)t + b - \gamma d = \rho \bar{c} t + \rho \bar{d}$. Cela donne :

$$a - c\gamma = \rho\bar{c} \qquad \text{et} \qquad b - d\gamma = \rho\bar{d}$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues on obtient :

$$\gamma = \frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{c\bar{d} - d\bar{c}} \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{ad - bc}{c\bar{d} - d\bar{c}}$$

et, puisque $|f(t) - \gamma| = |\rho| \ |\dfrac{\bar{c}t + \bar{d}}{ct + d}| = |\rho|$ on voit que $f(t)$ est sur le cercle de centre γ et de rayon $|\rho|$.

Exercice 10.10

On trouve $z_1 = 3\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = \sqrt{6}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$; $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $z_4 = 2\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice 10.11

Puisque $z = \cos t + i \sin t$ on a :

$$\begin{aligned} z - 1 &= \cos t - 1 + i \sin t \\ &= -2\sin^2(\frac{t}{2}) + i2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2}) \\ &= 2\sin(\frac{t}{2})\left(-\sin(\frac{t}{2}) + i\cos(\frac{t}{2})\right) \\ &= 2\sin(\frac{t}{2})\left(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2})\right) \end{aligned}$$

Parce que $0 \leqslant \dfrac{t}{2} \leqslant \pi$, on a $0 \leqslant 2\sin(\dfrac{t}{2})$ et, par conséquent, $|z| = 2\sin(\dfrac{t}{2})$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{t}{2}$.

Exercice 10.12

1) On a $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right)$, et, par conséquent :

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \begin{cases} 2\cos(\dfrac{\alpha - \beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} & \text{quand } 2\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2}) \geqslant 0, \\ -2\cos(\dfrac{\alpha - \beta}{2})e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi\right)} & \text{quand } 2\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2}) < 0. \end{cases}$$

2) On écrit $\left(\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5}\right) + i\left(\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5}\right) = e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}e^{i\frac{4\pi}{5}}$, et, parce que $2\cos\dfrac{2\pi}{5} > 0$ c'est la forme exponentielle de l'expression donnée.

3) En écrivant :

$$\frac{e^{i\alpha}+ie^{i\beta}}{e^{i\alpha}-ie^{i\beta}}=\frac{e^{i\alpha}+ie^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)}}{e^{i\alpha}-ie^{i\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}=i\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

on constate que l'expression donnée est purement imaginaire.

CHAPITRE 11

Exercice 11.1

1) On a $(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy=a+ib$, ce qui donne le système de deux équations $x^2-y^2=a$ et $2xy=b$.

2) Puisque ni x ni y ne sont nuls, parce que $b\neq 0$, on a $y=\dfrac{b}{2x}$ et en reportant dans la première équation on obtient $4x^4-4ax^2-b^2=0$, ce qu'on peut récrire $(2x^2-a)^2=a^2+b^2$.

3) Le membre de droite est positif. On a donc $2x^2=a\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Parce que x est réel, son carré est positif, mais parmi les deux nombres $a+\sqrt{a^2+b^2}$ et $a-\sqrt{a^2+b^2}$ seul le premier est réel, donc $2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}$ et :

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

après quoi le nombre y est donné par $y=\dfrac{b}{2x}$.

4) Avec cette méthode on trouve

$$z=\pm(2+i3).$$

Exercice 11.2

1) La propriété $u_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ est vraie pour $n=1$. Puisque $(2\cos\alpha)^2=2+2\cos 2\alpha$, si $u_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ on a $u_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{2^n}}=\sqrt{\left(2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}$, et parce que $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\geqslant 0$ cela donne $u_{n+1}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Donc, par récurrence, la propriété est vraie quel que soit n. En particulier $\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) En écrivant $X^8=-1$ on obtient que les solutions sont les 8 nombres complexes $e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\right)}$, avec k variant de 0 à 7. Il revient au même de dire que ce sont les nombres $e^{i\frac{k\pi}{8}}$, avec k impair, variant de 0 à 15.

3) Si $x = e^{it}$, alors $y = x + \dfrac{1}{x} = 2\cos t$. Par conséquent les 4 valeurs prises par y sont $2\cos\dfrac{\pi}{8}, 2\cos\dfrac{3\pi}{8}, 2\cos\dfrac{5\pi}{8}, 2\cos\dfrac{7\pi}{8}$.

4) En développant $((x+\frac{1}{x})^2-2)^2-2$ on trouve bien $x^4+\frac{1}{x^4}$, et puisque $x^4+\frac{1}{x^4}=0$, les nombres y sont les solutions de l'équation $(y^2-2)^2-2=0$, c'est-à-dire $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

5) D'une part $-\sqrt{2+\sqrt{2}} < -\sqrt{2-\sqrt{2}} < \sqrt{2-\sqrt{2}} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$, et d'autre part $2\cos\dfrac{7\pi}{8} < 2\cos\dfrac{5\pi}{8} < 2\cos\dfrac{3\pi}{8} < 2\cos\dfrac{\pi}{8}$. Donc :

$$2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad 2\cos\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$2\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad 2\cos\frac{7\pi}{8} = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Exercice 11.3

Les décompositions et les primitives sont

$$f_1(x) = x^3+3x^2+7x-\frac{7}{x-1}-\frac{7}{x-2}$$
$$\int f_1(x)\,dx = \frac{x^4}{4}+x^3+\frac{7x^2}{2}-7\ln|x-2|-7\ln|x-1|+C$$
$$f_2(x) = x^2-2x+7-\frac{1}{3\,(x+1)}+\frac{14}{(x+1)^2}-\frac{21}{2\,(x+2)}-\frac{7}{6\,(x-2)}$$
$$\int f_2(x)\,dx = \frac{x^3}{3}-x^2+7x-\frac{\ln|x+1|}{3}-\frac{14}{x+1}-\frac{21\,\ln|x+2|}{2}-\frac{7\,\ln|x-2|}{6}+C$$
$$f_3(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$\int f_3(x)\,dx = \ln|x|-\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Exercice 11.4

On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{x+a}{(x-b)^2(x-c)^2} = \frac{b-a}{(b-c)^2(x-b)^2}+\frac{2a-b-c}{(b-c)^3(x-b)}+\frac{c-a}{(c-b)^2(x-c)^2}+\frac{2a-b-c}{(c-b)^3(x-c}$$

Pour ne pas avoir de logarithme dans la primitive il faut et il suffit que $2a = b+c$.

Exercice 11.5

On a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{(a-c)(b-c)}{(c-d)^2(x-c)^2} + \frac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(c-d)^3(x-c)} + \frac{(a-d)(b-d)}{(d-c)^2(x-d)^2} + \frac{(a+b)(c+d)-2(ab+cd)}{(d-c)^3(x-d)}$$

et, pour ne pas avoir de logarithme dans la primitive, il faut et il suffit que

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

Exercice 11.6

La partie entière est nulle, les pôles sont simples, et la partie polaire relative au pôle a_i est $\dfrac{P(a_i)}{S'(a_i)(x-a_i)}$, ce qui donne la décomposition :

$$\frac{P(x)}{S(x)} = \frac{P(a_1)}{S'(a_1)(x-a_1)} + \frac{P(a_2)}{S'(a_2)(x-a_2)} + \cdots + \frac{P(a_n)}{S'(a_n)(x-a_n)}$$

La dérivée de $S(x)$ s'obtient en dérivant l'un après ses facteurs et en ajoutant les résultats, ce qui donne $S'(a_i) = (a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)$ et alors, en multipliant les deux membres de la décomposition en éléments simples, on retrouve la formule d'interpolation de Lagrange :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

qui, bien évidemment, reste valable quand il existe i tel que $P(a_i) = 0$.

Exercice 11.7

La dérivée de $(x-a)^m$ est $\dfrac{m}{x-a}(x-a)^m$. Pour dériver $P(x)$ on dérive l'un aprè l'autre chaque facteur, ce qui donne des termes de la forme $\dfrac{m_iP(x)}{x-s_i}$, puis on fait la somme de ces termes. On obtient :

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_iP(x)}{x-s_i}$$

d'où on déduit que :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{m_i}{x-s_i}$$

Exercice 11.8

Les pôles sont $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, et ils sont tous simples. On obtient les parties polaires annoncées en appliquant le théorème 11.3.6.1.

On constate que ces parties polaires ne dépendent pas de k. Donc la somme des parties polaires est aussi celle de la fraction $\frac{x^r}{x^n - 1}$. Pour cette fraction la partie entière est nulle, donc la somme des parties polaires est égale à la fraction, et on voit ainsi que la somme des parties polaires est toujours égale à $\frac{x^r}{x^n - 1}$. On obtient alors la partie entière par différence, ce qui donne, $E(x) = \frac{x^{kn+r}}{x^n - 1} - \frac{x^r}{x^n - 1} = x^r \left(\frac{x^{kn} - 1}{x^n - 1} \right)$, après quoi on termine en utilisant l'identité $\frac{u^k - 1}{u - 1} = 1 + u + \cdots + u^{k-1}$ avec x^n à la place de u.

Exercice 11.9

On obtient :

$$f_1(x) = \frac{3}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x} = \sum_{k=0}^{n} (3.2^k + 2.3^k) x^k + o(x^n)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{2}{(1 - x)^2} - \frac{3}{1 + x} = \sum_{k=0}^{n} \left[1 + 2(k + 1) - 3(-1)^k\right] x^k + o(x^n)$$

Exercice 11.10

1) On a $1 - 2\cos\theta\, x + x^2 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$, d'où la décomposition :

$$f(x) = \frac{\frac{-1}{2}}{x - e^{-i\theta}} + \frac{\frac{-1}{2}}{x - e^{i\theta}}$$

2) On écrit :

$$f(x) = \frac{\frac{e^{i\theta}}{2}}{1 - e^{i\theta} x} + \frac{\frac{e^{-i\theta}}{2}}{1 - e^{-i\theta} x}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i(k+1)} 2\theta^k}{x} + o(x^n) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-i(k+1)} 2\theta^k}{x} + o(x^n) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{i(k+1)\theta} + e^{-i(k+1)\theta}}{2} \right) x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \cos(k + 1)\theta x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

Exercice 11.11

1) On trouve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$.

2) D'abord $(1 - x - x^2)f(x) = 1 + o(x^n)$, ensuite :

$$\begin{aligned}(1 - x - x^2)f(x) &= (1 - x - x^2)\Big(F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + o(x^n)\Big)\\ &= F_0 + (F_1 - F_0)x + \sum_{k=2}^{n}(F_k - F_{k-1} - F_{k-2})x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

ce qui donne $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, à cause de l'unicité du développement.
Puisque F_0 et F_1 sont des entiers positifs, cette relation fait que F_n est toujours un entier positif.

La factorisation $1 - x - x^2 = -\left(x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ conduit à la décomposition :

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{\dfrac{1}{-\sqrt{5}}}{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + x\right)} + \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + x\right)})$$

3) On transforme d'abord l'égalité précédente, ce qui donne :

$$f(x) = \frac{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}x}{1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}x}{1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

puis on fait le développement limité de chaque terme, et on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]x^k + o(x^n)$$

Alors, l'unicité du développement limité donne la ***formule de Binet*** :

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

CHAPITRE 12

Exercice 12.1

On trouve :

(E_1) $x(t) = 1 - 3t + Ce^{3t}$;

(E_2) $x(t) = e^{2t} + Ce^{-\frac{5t}{2}}$;

(E_3) $x(t) = \sin t + 4\cos t + Ce^{\frac{t}{4}}$;

(E_4) $x(t) = 3\sin t - 2\cos t + Ce^{-6t}$

Exercice 12.2

On trouve :

(E_1) $x(t) = t^b + Ct^a$;

(E_2) $x(t) = t^b + Ce^{at}$;

(E_3) $x(t) = \dfrac{t^{2a}}{2} + C\tan t$;

(E_4) $x(t) = 2\cos 2t - 3 + C\sin t$

Exercice 12.3

On trouve :

$$x(t) = t + 2\,; \qquad y(t) = t + 5\cos^2 t\,; \qquad z(t) = \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t$$

Exercice 12.4

La résolution de l'équation sans second membre donne $h(t) = Ce^{t^n+t}$, puis la méthode de variation de la constante donne la solution générale $x(t) = te^t + Ce^{t^n+t}$.

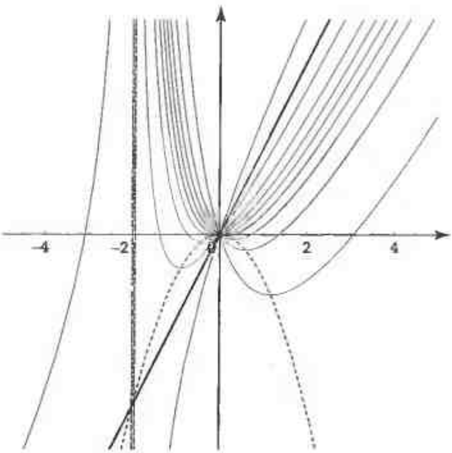
Exercice 12.5

1) Bien évidemment si $P(t)$ est nul, il en est de même de $Q(t)$. Si $P(t)$ est une constante non nulle, c'est-à-dire si son degré est 0, il en est de même de $Q(t)$. Enfin, si $d > 0$ le degré de $Q(t)$ est $d + 1$.

Alors, pour que $P(t)$ soit une solution, il faut qu'on ait $Q(t) = 2t^2$, ce qui est possible seulement si $d > 0$ et $d + 1 = 2$. Donc $P(t) = at + b$, avec $a \neq 0$.

2) En remplaçant $P(t)$ par $at + b$ dans (E) on trouve que $P(t) = 2t$. La résolution de l'équation sans second membre, $t(t+2)\,h'(t) - 2h(t) = 0$, donne $\dfrac{h'(t)}{h(t)} = \dfrac{2}{t(t+2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+2}$ d'où $h(t) = \dfrac{t}{t+2}$. Puisqu'on connaît une solution particulière de (E), sa solution générale est $x(t) = 2t + \dfrac{Ct}{t+2}$.

3) La figure qui suit montre quelques courbes intégrales de (E). La solution particulière $x(t) = 2t$ est marquée en gras.



En écrivant l'équation (E) sous la forme :

$$x'(t) - \frac{2}{t(t+2)}x(t) = \frac{2t}{t+2}$$

on voit qu'il passe une et une seule courbe intégrale en tout point dont l'abscisse est différente de 0 et -2. Au contraire, puisqu'à part $x(t) = 2t$ aucune solution n'est définie au point $x = -2$ (l'asymptote verticale d'équation $x = -2$ est marquée en doubles pointillés), le seul point d'abscisse -2 par lequel passe une courbe intégrale est donc $(-2; -4)$.

Enfin, toutes les solutions s'annulent lorsque $x = 0$, donc toutes les courbes intégrales passent par l'origine.

4) Parce que $x(-1) = -2 - C = c$ on aura $x_c(t) = 2t - \frac{(c+2)t}{t+2}$, et alors

$$x'(t) = \frac{2(t^2 + 4t - c + 2)}{(t+2)2}.$$

Cette dérivée ne peut s'annuler que si $c + 2 > 0$ (dans le cas $c = -2$ il n'y a pas de point à tangente horizontale puisque la courbe intégrale est une droite). Elle s'annule lorsque $t = t_+ = -2 + \sqrt{c+2}$ et $t = t_- = -2 - \sqrt{c+2}$, et on a

$$x_c(t_+) = t_+\Big(2 - \frac{c+2}{\sqrt{c+2}}\Big) = -t_+^2,$$

ainsi que

$$x_c(t_-) = t_-\Big(2 - \frac{c+2}{\sqrt{c+2}}\Big) = -t_-^2.$$

La courbe intégrale admet deux points avec tangente horizontale, $A_+ = (t_+; -t_+^2)$, et $A_- = (t_-; -t_-^2)$. Parce que l'ordonnée de ces points est l'opposée du carré de leur abscisse, ils sont sur la parabole d'équation $x = -t^2$, représentée en pointillé sur la figure, et parce que tout nombre réel est de la forme t_+, quand il est supérieur à -2, ou de la forme t_-, quand il lui est inférieur, on est certain que tous les points de cette parabole sont les points à tangente horizontale d'une courbe intégrale[1].

Exercice 12.6

- On met l'équation sous la forme :

$$\frac{x'(t)}{(x(t)+3)^2} = \frac{1}{(t+3)^2}$$

et on intègre les deux membres, ce qui donne :

$$-\frac{1}{x(t)+3} = -\frac{1}{t+3} + C$$

et on obtient :

$$x(t) = \frac{(1+3C)t + 9C}{(1-3C) - tC}$$

- L'autre méthode consiste à mettre l'équation sous la forme :

$$x'(t) = \frac{x(t)^2}{(3+t)^2} + \frac{6\,x(t)}{(3+t)^2} + \frac{9}{(3+t)^2}$$

après avoir remarqué, sur l'équation initiale, que $x(t) = -3$ est une solution, on pose $x(t) = -3 + \dfrac{1}{y(t)}$, ce qui donne :

$$y'(t) = -\frac{1}{(t+3)^2}$$

équation qu'on intègre immédiatement et qui redonne le résultat.

Exercice 12.7

1) En remplaçant $\cos(2t)$ par $1 - 2\sin^2 t$, et $x(t)$ par $2\sin t$, on obtient $u(t) = 2\cos t$.

2) On pose $x(t) = 2\sin t + \dfrac{1}{y(t)}$ ce qui donne :

$$y'(t)\cos 2t - 2\sin 2t\, y(t) = \cos t$$

et la solution générale de cette équation est $y(t) = \dfrac{\sin t}{\cos 2t} + \dfrac{C}{\cos 2t}$, ce qui donne finalement :

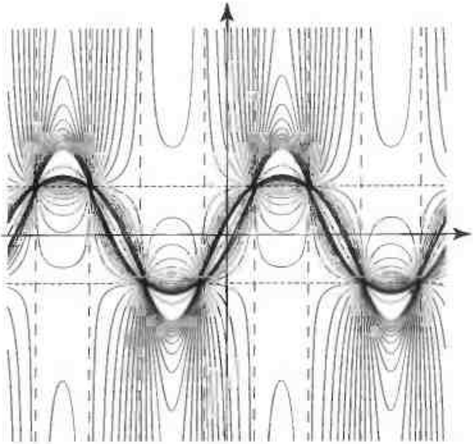
$$x(t) = \frac{1 + C2\sin t}{\sin t + C}$$

On retrouve la solution particulière $x(t) = 2\sin t$ en prenant $C = \pm\infty$.

1. On pouvait trouver plus facilement l'équation de la parabole en remplaçant $x'(t)$ par 0 dans l'équation (E).

La figure qui suit montre quelques courbes intégrales. Les solutions sont des fonctions périodiques de périodes 2π, donc le réseau des courbes intégrales se répète par une translation de 2π parallèle à l'axe des abscisses.

3) Si $x(t)$ est constante on a $x'(t) = 0$ et forcément $x(t)^2 = 2$, d'où les deux solutions constantes $x(t)^2 = \sqrt{2}$ et $x(t)^2 = -\sqrt{2}$. Les droites horizontales qui leur correspondent ont été tracées en pointillé.



4) La figure montre tout de suite, et on en a la preuve parce que $x(\frac{\pi}{4}) = x(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$ et $x(\frac{-\pi}{4}) = x(\frac{-3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, que toutes les courbes intégrales passent par les points $(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$, $(\frac{3\pi}{4}; \sqrt{2})$, $(-\frac{\pi}{4}; -\sqrt{2})$ et $(\frac{-3\pi}{4}; -\sqrt{2})$ et leurs translatés.

Puisqu'elles passent toutes par ces points, aucune ne peut passer par des points de même abscisse mais d'ordonnée différente.

On peut montrer que ce sont les seuls points du plan à avoir ces propriétés.

Exercice 12.8

On trouve $x(t) = 1$ et $x(t) = t$ puis la solution générale $x(t) = \dfrac{t^2 + Ct}{t^2 + C}$.

CHAPITRE 13

Exercice 13.1

1) Les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ sont des solutions. Comme leur wronskien n'est pas nul, elles forment une base de l'ensemble des solutions et ainsi, toute solution de l'équation différentielle est de la forme $C_1u(t) + C_2v(t)$.

2) On a $u''(t) - a_1(t)u'(t) - a_2(t)u(t) = 0$ et $v''(t) - a_1(t)v'(t) - a_2(t)v(t) = 0$. En multipliant la première équation par $v''(t)$, et la seconde par $u''(t)$, et en retranchant, on obtient $u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t) = a_2(t)[u'(t)v(t) - u(t)v'(t)]$, ce qui donne $a_2(t) = \dfrac{u'(t)v''(t) - u''(t)v'(t)}{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}$.
De même, en multipliant la première équation par $v(t)$, et la seconde par $u(t)$, et en retranchant, on obtient $v(t)u''(t) - v''(t)u(t) = a_1(t)[u'(t)v(t) - u(t)v'(t)]$, ce qui donne $a_1(t) = \dfrac{v(t)u''(t) - v''(t)u(t)}{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}$. On retrouve bien l'équation différentielle de la question 1.

3) La question 2 montre qu'à un coefficient près une telle équation est forcément l'équation de la question 1.

4) On obtient $(\sin t - t\cos t)x''(t) - t\sin t\, x'(t) + \sin t\, x(t) = 0$.

Exercice 13.2

On obtient :

(E_1) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$;

(E_2) $x(t) = C_1e^{(-3+\sqrt{7})t} + C_2e^{(-3-\sqrt{7})t}$

(E_3) $x(t) = e^{4t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$;

(E_4) $x(t) = e^{2t}(C_1\cos\sqrt{15}\,t + C_2\sin\sqrt{15}\,t)$

(E_5) $x(t) = e^{-5t}(C_1 + C_2 t)$;

(E_6) $x(t) = e^{6t}(C_1 + C_2 t)$

Exercice 13.3

On obtient :

(E_1) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-5t} - e^{-4t}$;

(E_2) $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-4t} + (6t - 1)e^{2t}$

(E_3) $x(t) = (4t^3 + 12t + C_1)e^{5t} + C_2e^{3t}$;

(E_4) $x(t) = (t^4 + 2t^3 + C_1t + C_2)e^{3t}$

Exercice 13.4

On obtient :

(E_1) $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{6t} + 5e^{-t} + 14e^{t}$;

(E_2) $x(t) = C_1e^{4t} + (-10t + C_2)e^{t} - 3e^{-t}$;

(E_3) $x(t) = (-12t^2 + C_1)\,\mathrm{ch}\,t + (8t^3 + 12t + C_2)\,\mathrm{sh}\,t$;

(E_4) $x(t) = (16t^3 + C_1 + C_2)e^{2t} - (6t + 3)e^{-2t}$

Exercice 13.5

On obtient :

$$(E_1)\quad x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} + 2\cos t + \sin t\,;$$

$$(E_2)\quad x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{6t} + 17\cos t - 9\sin t\,;$$

$$(E_3)\quad x(t) = (3t^2 - 12t + C_1)\cos t + (2t^3 - 12t^2 + C_2)\sin t\,;$$

$$(E_4)\quad x(t) = -4t\cos 2t + (t+1)\sin 2t + (C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)e^{-t}$$

Exercice 13.6

On trouve $x(t) = 1 + (3t+1)e^{-3t} - t\cos 3t$.

Exercice 13.7

1) Puisque v n'est pas la constante 0, il existe un intervalle sur lequel $v(t)$ n'est jamais nul. Alors, la fonction $\dfrac{u(t)}{v(t)}$ est définie sur cet intervalle, et sa dérivée est nulle, parce que le wronskien de u et v est nul. Elle est donc égale à une constante C sur cet intervalle, mais alors $u(t) - C\,v(t)$ est nul pour tout t dans l'intervalle et, parce qu'un polynôme qui a une infinité de zéro est nul, on a $u(t) - C\,v(t) = 0$ quel que soit t dans $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions u et v suivantes conviennent :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < 0, \\ t^2 & \text{quand } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} t^2 & \text{quand } x < 0, \\ 0 & \text{quand } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Elles sont dérivables, leur wronkien est nul car il est la somme de deux produits qui sont toujours nuls, et si on avait $u(t) = C\,v(t)$ quel que soit t en prenant $t < 0$ il faudrait que $C = 0$ ce qui n'est pas possible car $u(t)$ n'est pas toujours nul.

Exercice 13.8

La deuxième équation donne $u(t) = \dfrac{1}{2}v'(t) - 4v(t)$ et $v'(0) = -4$. En dérivant, cela donne $u'(t) = \dfrac{1}{2}v''(t) - 4v'(t)$, puis en remplaçant $u(t)$ et $u'(t)$ dans la première équation il vient :

$$v''(t) - 5v'(t) + 6v(t) = 0$$

On résout cette équation en utilisant les conditions initiales $v(0) = -1$ et $v'(0) = -4$, ce qui donne $v(t) = e^{2t} - 2e^{3t}$, et on en déduit, $u(t) = -3e^{2t} + 5e^{3t}$.

Exercice 13.9

1) On a $f'(t) = \dfrac{1}{1-t^2} + \dfrac{t \arcsin t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$, ce qui donne $(1-t^2)f'(t) = 1 + tf(t)$.

2) En dérivant on obtient $(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = f(t) + tf'(t)$ et on constate que $f(t)$ est solution de $(1-t^2)x''(t) - 3tx'(t) - x(t) = 0$.

3) On trouve que les solutions de l'équation précédente sont les fonctions $x(t) = C_1 + C_2$.

4) En dérivant n fois cette équation différentielle on obtient :

$$(1-t^2)\,x^{(n+2)}(t) - 2\,n\,t\,x^{(n+1)}(t) - n(n-1)\,x^{(n)}(t) - 3\,t\,x^{(n+1)}(t) - 3\,n\,x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t) = 0$$

qui se simplifie en :

$$(1-t^2)\,x^{(n+2)}(t) - (2\,n+3)\,t\,x^{(n+1)}(t) - (n+1)^2\,x^{(n)}(t) = 0$$

5) En remplaçant x par f et t par 0 on obtient :

$$f^{(n+2)}(0) = (n+1)^2 f^{(n)}(0)$$

et cette relation est valable quel que soit $n \geqslant 0$.

6) On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

7) La relation de la question 5), et le fait que $f(0) = 0$, entraînent que $f^{(2p)}(0) = 0$ quel que soit p, ce qui était prévisible, puisque $f(t)$ est paire. En revanche, on trouve :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= 1\\
f^{(3)}(0) &= 2^2 f^{(1)}(0)\\
f^{(5)}(0) &= 4^2 f^{(3)}(0)\\
f^{(7)}(0) &= 6^2 f^{(5)}(0)\\
&\cdots\cdots\\
f^{(2p-1)}(0) &= (2p-2)^2 f^{(2p-3)}(0)
\end{aligned}$$

Après avoir multiplié membre à membre et simplifié on obtient :

$$f^{(2p-1)}(0) = 2^2 4^2 6^2 \cdots (2p-2)^2 = 2^{2p-2}(p-1)!^2$$

et on a le développement limité :

$$\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + \cdots + \frac{2^{2p-2}(p-1)!^2}{(2p-1)!}x^{2p-1} + o(x^{2p})$$

Parce que la fonction $\dfrac{\arcsin^2 t}{2}$ est une primitive de $f(t)$, par intégration, on en déduit le développement :

$$\arcsin^2 t = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \cdots + \frac{2^{2p-1}(p-1)!^2}{(2p)!}x^{2p} + o(x^{2p+1})$$

Annexe B

Formulaire

IDENTITÉS REMARQUABLES

$$0! = 1$$

$$n! = 1.2.3\cdots n$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

$$(u+v)^n = u^n + C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \cdots + C_n^{n-1} u v^{n-1} + v^n$$

$$u^n - v^n = (u-v)\left(u^{n-1} + u^{n-2} v + u^{n-3} v^2 + \cdots + v^{n-1}\right)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ quand } x \neq 1$$

EXPONENTIELLES, LOGARITHMES

$\exp 0 = 1$	$\ln 1 = 0$
$\exp(v_1 + v_2) = \exp v_1 \exp v_2$	$\ln(u_1 u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$
$\exp(v_1 - v_2) = \dfrac{\exp v_1}{\exp v_2}$	$\ln \dfrac{u_1}{u_2} = \ln u_1 - \ln u_2$
$\exp nv = (\exp v)^n$	$\ln u^n = n \ln u$

$$\exp' x = \exp x \qquad \ln' x = \frac{1}{x}$$

$$a^x = \exp(x \ln a) \qquad \ln_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-u} = \frac{1}{a^u}$$

$$a^{u+v} = a^u a^v \qquad a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$$

$$(ab)^u = a^u b^u \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

$$a^{uv} = (a^u)^v$$

TRIGONOMÉTRIE

Fonctions circulaires	Fonctions hyperboliques
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$	$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$
$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$
$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$	$\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$
$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$
$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$	$\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$
$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$	$\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$
$\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$	$\operatorname{th}(u+v) = \dfrac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$
$\cos u \cos v = \dfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$	$\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v = \dfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(u+v) + \operatorname{ch}(u-v)]$
$\sin u \sin v = \dfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$	$\operatorname{sh} u \operatorname{sh} v = \dfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(u+v) - \operatorname{ch}(u-v)]$
$\sin u \cos v = \dfrac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)]$	$\operatorname{sh} u \operatorname{ch} v = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sh}(u+v) + \operatorname{sh}(u-v)]$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\dfrac{p+q}{2}\operatorname{ch}\dfrac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$	$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\dfrac{p+q}{2}\operatorname{ch}\dfrac{p-q}{2}$
$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$	$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \dfrac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$
$\cos' x = -\sin x$	$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$
$\sin' x = \cos x$	$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
$\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$
$\tan\dfrac{x}{2} = t$	$\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = t$
$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$
$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$
$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$	$\operatorname{th} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

FONCTIONS RÉCIPROQUES

Fonctions circulaires	Fonctions hyperboliques
$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$	$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
$0 \leqslant \quad \arccos x \leqslant \pi$	$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$	$\operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
$\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

DÉRIVÉES

Fonction	Dérivée
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$Cu(x)$	$Cu'(x)$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)^\alpha$	$\alpha\,u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$u(\alpha x+\beta)$	$\alpha u'(\alpha x+\beta)$
$u(v(x))$	$v'(x)\,u'(v(x))$

FORMULE DE LEIBNIZ

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = C_n^0u^{(n)}(x)v(x) + C_n^1u^{(n-1)}(x)v^{(1)}(x) + C_n^2u^{(n-2)}(x)v^{(2)}(x) + \cdots + C_n^{n-1}u^{(1)}(x)v^{(n-1)}(x) + C_n^nu(x)v^{(n)}(x)$$

Fonction	Dérivée
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha\,e^{\alpha x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{argsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

PRIMITIVES

Fonction	Primitive
$u'(x)u(x)^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$(x-s)^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{(x-s)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\|$
$\dfrac{1}{x-r}$ avec r réel	$\ln\|x-r\|$
$\dfrac{\gamma+i\delta}{(x-\alpha-i\beta)}+\dfrac{\gamma-i\delta}{(x-\alpha+i\beta)}$	$\gamma\ln(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)+2\delta\arctan\left(\dfrac{\beta}{x-\alpha}\right)$
$\dfrac{ax+b}{x^2+ux+v}$	$\dfrac{a}{2}\ln(x^2+ux+v)+\dfrac{2b-au}{\sqrt{4v-u^2}}\arctan\left(\dfrac{2x+u}{\sqrt{4v-u^2}}\right)$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\|$

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$
$e^{\alpha x}$ avec $\alpha \neq 0$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right\rvert$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2\arctan e^x$
$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$
$\ln x$	$x(\ln x-1)$

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{argth} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Index

Q

R

S

T