MODULO

Mathématique mise à niveau TS4

ANALIA BERGÉ

Mathématique
mise à niveau
TS4

ANALIA BERGÉ

Avec la collaboration de :

Mélanie Nadeau
Collège de Rosemont

MODULO

Mathématique mise à niveau
TS4

Analia Bergé

Conception éditoriale : Éric Mauras
Édition : Yzabelle Martineau
Coordination : Solange Lemaitre-Provost
Révision linguistique et correction d'épreuves : Nicole Blanchette
Conception graphique : Josée Poulin (Pige communication)
Conception de la couverture : Micheline Roy

Catalogage avant publication
de Bibliothèque et Archives nationales du Québec
et Bibliothèque et Archives Canada

Bergé, Analia

Mathématique : mise à niveau TS4.

Comprend un index.

ISBN 978-2-89650-496-1

1. Mathématiques – Manuels d'enseignement supérieur. I. Titre

QA39.3.B47 2015 510 C2015-940392-8

MODULO

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada
Téléphone : 514 273-1066
Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324
info.modulo@tc.tc

ISBN 978-2-89650-496-1

Dépôt légal : 1er trimestre 2015
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

1 2 3 4 5 M 19 18 17 16 15

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Fonds du livre du Canada (FLC) pour nos activités d'édition.

Remerciements

Je remercie les évaluateurs Modulo : Jean-François Bastien (Cégep de l'Outaouais), Bruno Carrier (Cégep de Saint-Hyacinthe), Louise Gagné (Cégep de Chicoutimi), Hugues Gilbert (Cégep Édouard-Montpetit), Christiane Lacroix et Doris Léonard (Collège Lionel-Groulx), et Carole Provost (Collège Ahuntsic) ; Paulette Perreault et Jean-Nicolas Richer (Collège de Rosemont), qui ont enseigné la version préliminaire du livre de 2011 à 2013 ; le consultant scientifique David Goulet (Cégep Garneau) ; et enfin le réviseur scientifique Jean-Philippe Beauchamp (Cégep Édouard-Montpetit). Tous ont donné des suggestions constructives et respectueuses.

Sources iconographiques

Couverture : Mitch Diamond/Getty Images ; **Ouverture de chapitre :** Sergey Nivens/Shutterstock.com ; **p. 3, 13, 16... (lecteur), p. 23, 47, 76... (trophée) :** IkazNarsis/Shutterstock.com.

Avant-propos

Message aux étudiants

Vous avez été mon inspiration. J'ai côtoyé des élèves de mise à niveau pendant cinq ans ; je sais donc d'expérience que la mathématique ne se retrouve pas fréquemment parmi vos matières préférées. Vos objectifs de carrière sont fort diversifiés, et parfois il vous est difficile de concevoir en quoi l'apprentissage de la mathématique pourrait vous être utile.

Certes, les activités présentées dans ce manuel ne se trouveront peut-être pas parmi les tâches que vous aurez à accomplir dans l'exercice de votre profession ou de votre emploi. Cependant, je peux vous assurer que les voies que votre réflexion ouvrira quand vous résoudrez ces problèmes faciliteront sans doute la résolution d'autres problèmes, ceux-là directement liés à votre emploi, à votre profession ou à votre vie en général. Aussi ai-je systématiquement tenté de donner du sens aux notions et activités que vous allez voir dans les pages qui suivent.

Je vous invite donc à vous plonger spontanément dans un problème ou dans la recherche de réponses à des questions mathématiques, même si vous ne savez pas toujours d'emblée comment procéder pour les résoudre. Vous allez rapidement constater que vous en avez la capacité et pourrez vraiment aimer faire des mathématiques de cette façon.

Une session de découverte vous attend. Serez-vous de la partie ?

Remerciements

Je tiens à remercier mes professeures de didactique des mathématiques ainsi que tous les didacticiens de mathématiques dont j'ai lu les travaux, et de qui j'ai presque tout appris. Plusieurs des activités mathématiques incluses dans ce livre sont inspirées du travail – fortement influencé par les travaux de pionniers des didacticiens français – auquel j'ai collaboré pendant des années en Argentine. Cette inspiration se remarque surtout dans les chapitres consacrés aux fonctions et à l'algèbre ; on reconnaîtra par exemple le problème classique du prestidigitateur dans la présentation de l'algèbre.

Je remercie spécialement Éric Mauras, éditeur concepteur du Groupe Modulo, qui a été la première personne à imaginer le présent manuel. C'est lui qui m'a invitée à me lancer dans ce projet. L'ouverture d'Éric envers mes idées et sa confiance en mon approche ont créé d'excellentes conditions de travail. Je remercie aussi chaleureusement Yzabelle Martineau, éditrice du projet. Les mots me manquent pour décrire à quel point le travail réalisé ensemble a été plaisant et efficace. Avec un professionnalisme exceptionnel, une sensibilité et un sens de l'humour toujours présents, elle a réussi à mener à terme ce projet.

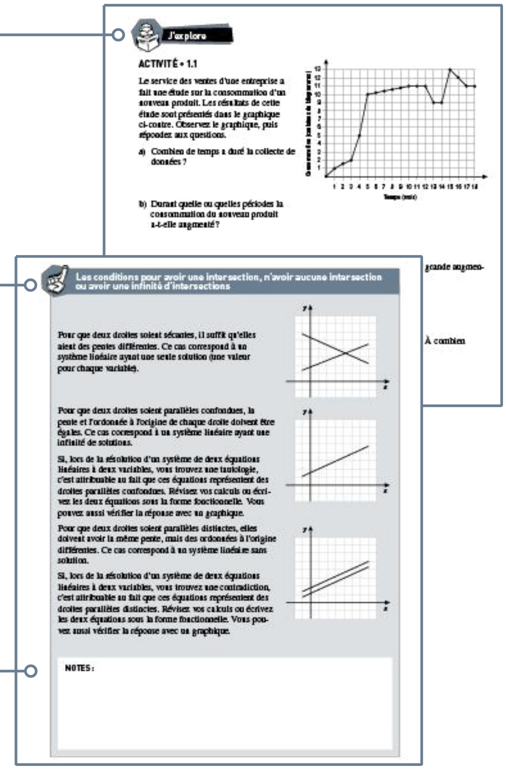
Merci à Mélanie Nadeau pour la laborieuse tâche qu'elle a entreprise de rédiger les réponses à la plupart des activités mathématiques et pour sa collaboration au début du projet. Je remercie mes collègues de l'Unité départementale de sciences de l'éducation à l'UQAR et mes anciens collègues du Cégep de Rimouski pour la valorisation de mon travail.

D'une façon plus personnelle, quelques personnes m'ont accompagnée dans cette aventure. Je remercie Leandro pour son écoute, son soutien et son encouragement permanents ; Paula, Julián et Yesica, qui ont vécu avec une mère très occupée et dont le jeune regard a nourri le projet. Malgré la distance, j'ai reçu l'encouragement de mes frères Fernando et Marcelo, ainsi que celui de mes parents, Carmen et Hector Julio, que je remercie pour leur appui inconditionnel.

Caractéristiques du manuel

J'explore

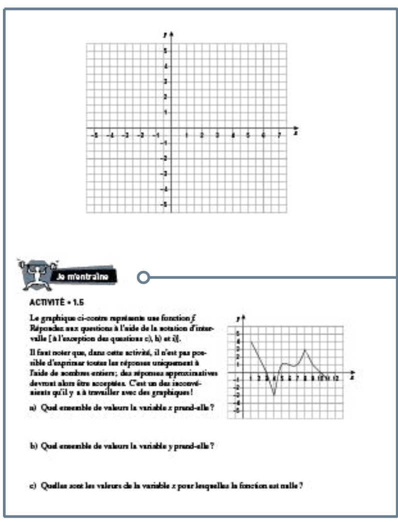
Chaque activité, signalée par le pictogramme d'un lecteur, se présente de la même manière : une mise en situation actuelle et invitante, une ou plusieurs questions, et un espace pour indiquer la réponse.



Encadré théorique

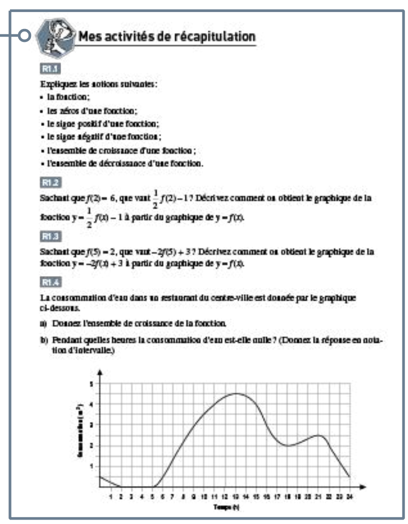
Chaque note théorique, signalée par le pictogramme d'une main, se présente de la même manière : une ou des définitions formelles, et un retour sur l'activité précédente pour faire le lien entre la définition formelle et le travail que l'étudiant vient de compléter.

Une section NOTES est souvent prévue pour l'étudiant afin de lui permettre de préciser le contenu de l'encadré ou d'ajouter des détails fournis par le professeur.



Je m'entraîne

Certaines activités, signalées par le pictogramme d'un leveur de poids, se trouvent en fin de section. Les réponses courtes de ces activités sont données à la toute fin du manuel de l'étudiant.



Mes activités de récapitulation

Ces activités, signalées par le pictogramme d'un trophée, se trouvent à la fin du chapitre. Elles sont numérotées avec le préfixe « R ».

Elles peuvent servir d'exercices à la maison, pour s'assurer que les concepts présentés sont maîtrisés.

Table des matières

CHAPITRE

1 LA NOTION DE FONCTION

Objectifs d'apprentissage

- Lire et interpréter des graphiques de fonctions en général
- Connaître et s'approprier les notions de variable et de fonction réelle
- Connaître et s'approprier les notions de domaine, d'image, de variation, de signe, d'extremums et de coordonnées à l'origine d'une fonction dans un graphique
- Utiliser la notation d'intervalle pour décrire des ensembles de nombres réels
- Lire et utiliser des règles de correspondance et des tableaux de valeurs
- Aborder la notion de réciproque d'une fonction
- Comprendre les compressions, les étirements et les translations verticales du graphique d'une fonction et associer leur effet aux divers paramètres agissant sur la règle d'une fonction

A. La lecture de graphiques, les variables et la notion de fonction

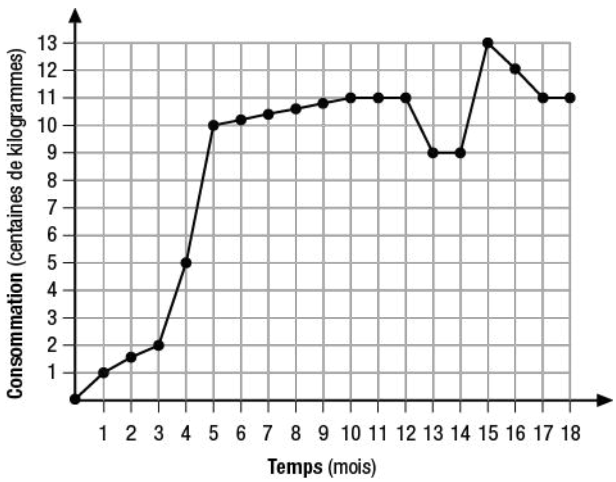
Dans la vie de tous les jours, nous avons souvent l'occasion de voir des graphiques, notamment dans les médias. En effet, les graphiques servent entre autres à présenter visuellement des situations et des phénomènes qui seraient difficiles à saisir autrement : rendement d'une entreprise, températures au cours de la dernière décennie, comparaison de la situation de l'emploi chez les hommes et chez les femmes, etc. L'éventail de leur usage est vaste !

Dans ce cours, vous aurez l'occasion d'étudier et de réaliser quelques graphiques qui sont particulièrement intéressants du point de vue des mathématiques. Nous vous proposons dans un premier temps de faire quelques activités de lecture de graphiques que vous pourrez accomplir sans explication préalable de la part de votre enseignant.

J'explore

ACTIVITÉ • 1.1

Le service des ventes d'une entreprise a fait une étude sur la consommation d'un nouveau produit. Les résultats de cette étude sont présentés dans le graphique ci-contre. Observez le graphique, puis répondez aux questions.



a) Combien de temps a duré la collecte de données ?

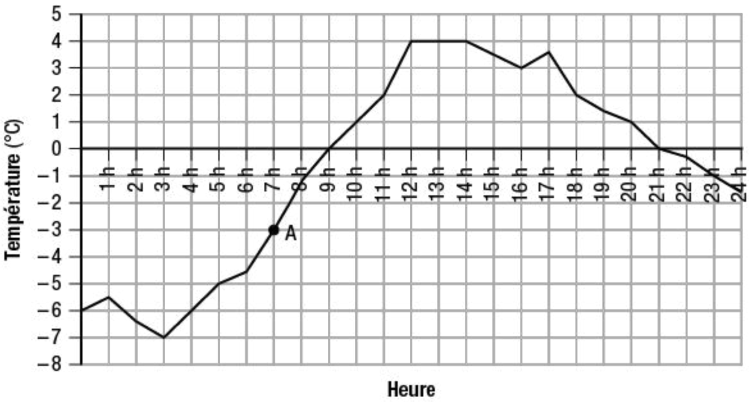
b) Durant quelle ou quelles périodes la consommation du nouveau produit a-t-elle augmenté ?

c) Parmi les périodes indiquées en b), durant quelle période y a-t-il eu la plus grande augmentation de la consommation ? Justifiez votre réponse.

d) Pendant quel mois la consommation du produit a-t-elle été la plus grande ? À combien s'élevait-elle ?

ACTIVITÉ • 1.2

Le graphique ci-dessous montre la variation de température horaire à Rimouski le 22 mars, entre l'heure 0 et minuit, minuit exclu. Observez le graphique, puis répondez aux questions.



a) Le point A du graphique donne une certaine information. Laquelle ?

b) À quelle heure de la journée la température était-elle de 2 °C ? de –1 °C ?

c) Que s'est-il passé entre midi et 14 h ?

d) De combien de degrés la température a-t-elle varié entre 7 h et 13 h ?

e) À quel moment ou à quels moments la température a-t-elle atteint le point de congélation ?

La notion de fonction

En mathématique, on utilise la notion de **fonction** pour décrire une situation de variation comme celle de l'activité 1.2. Une **fonction** (notée par *f, g, h,* etc.) est une relation entre deux ou plusieurs variables, avec certaines conditions. Les variables en jeu dans le cas examiné ici sont le temps et la température (nous ne donnerons pas ici une définition de la notion de variable).

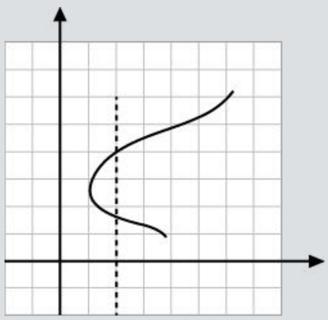
La variation de l'une des variables fait normalement varier l'autre, à laquelle on donne le nom de **variable dépendante.** Cette variable dépend de la première variable, que l'on appelle **variable indépendante.** Dans l'activité 1.2, la température varie en fonction du temps. Donc, la température est la variable dépendante et le temps est la variable indépendante.

Dans ce cours, nous travaillerons uniquement avec des fonctions n'ayant qu'une variable indépendante et prenant des valeurs dans l'ensemble des nombres réels. On note la variable indépendante par une lettre (x, par exemple) et on la place sur l'axe horizontal dans un graphique (nommé « axe des abscisses ») ; on note la variable dépendante par une autre lettre (y, par exemple) et on la place sur l'axe vertical dans un graphique (nommé « axe des ordonnées »). Ces lettres peuvent varier selon le contexte. Ici, il pourrait s'agir de T et de t.

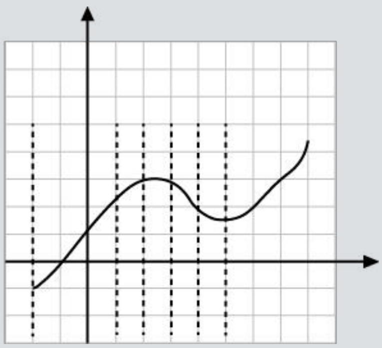
Dans le graphique de l'activité 1.2, on peut voir qu'une seule valeur de température correspond à chaque mesure de temps, pas plus. L'idée qu'il y ait plus d'une valeur de température pour une période de temps donnée est illogique. Afin que la notion de fonction soit utile pour décrire des phénomènes, la définition de fonction exige qu'**à chaque valeur de la variable indépendante corresponde au plus une valeur de la variable dépendante.**

Comment voit-on cela dans un graphique ? Chaque droite verticale coupe une seule fois le graphique de la fonction.

Le graphique suivant, par exemple, n'est pas le graphique d'une fonction (car il y a au moins une droite verticale qui le coupe plus d'une fois).



Par contre, le graphique ci-dessous est celui d'une fonction (chaque droite verticale coupe une seule fois le graphique de la fonction).



Le fait que y dépend de x par la fonction f est noté par l'expression $y = f(x)$, et on utilise aussi cette notation pour des valeurs données de x et de y, de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, $f(7) = -3$ et $-3 = f(7)$ signifient respectivement « quand $x = 7$, alors la fonction f prend la valeur $y = -3$ » et, dans le contexte de l'activité 1.2, « à 7 (heures), la température est de –3 (degrés Celsius) ».

NOTES :

f) Toujours d'après le même graphique, trouvez $f(5)$, $f(10)$, $f(21)$. Que représentent ces valeurs ?

g) Remplissez le tableau suivant.

x **(temps, en heures)**	***y*** **(température, en degrés Celsius)**
0	
3	
	−3
	−1
11	
16	
20	
	−1

h) Donnez les moments de la journée où la température est positive.

i) Donnez les moments de la journée où la température est négative.

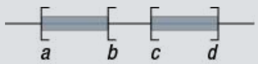
La notation d'intervalle borné

Pour exprimer toutes les valeurs de la variable qui sont délimitées par deux valeurs fixes (nommées « borne inférieure » et « borne supérieure »), on peut utiliser la notation d'intervalle, que l'on exprime à l'aide de crochets. Par exemple, si l'on nomme x la variable indépendante et si l'on veut exprimer toutes les valeurs de cette variable entre 9 et 21 (y compris les bornes), on peut écrire $9 \leq x \leq 21$ ou bien $x \in [9\,;\,21]$. On peut ne pas inclure les bornes ou en inclure seulement une. Par exemple, pour exprimer les valeurs de variable $9 \leq x < 21$, on écrit $x \in [9\,;\,21[$.

Voici les quatre types d'intervalles bornés par a et b.

Inégalité	Représentation sur la droite	Notation d'intervalle
$a \leq x \leq b$		$[a\,;b]$
$a \leq x < b$		$[a\,;b[$
$a < x \leq b$		$]a\,;b]$
$a < x < b$		$]a\,;b[$

On utilise l'union ($\cup$) d'intervalles pour exprimer des valeurs appartenant à un intervalle ou à un autre :



$[a\,;b[\, \cup \,[c\,;d]$

NOTES :

j) Trouvez les moments de la journée où la température est croissante. Exprimez-les en notation d'intervalle.

k) Trouvez les moments de la journée où la température est décroissante.

l) Quelle est la température la plus basse ? À quelle heure l'a-t-on enregistrée ?

La notation de fonction (*suite*)

Soit une fonction $y = f(x)$. On peut considérer les éléments suivants :

Le domaine
C'est l'ensemble des valeurs que prend la variable indépendante. Dans ce cours, les variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble image
C'est l'ensemble des valeurs que prend la variable dépendante.

Les zéros de la fonction (ou abscisses à l'origine)
Ce sont les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction prend la valeur zéro ($y = 0$).

Le signe d'une fonction
On s'intéresse aux valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction prend des valeurs **positives** ($y > 0$).

On s'intéresse aux valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction prend des valeurs **négatives** ($y < 0$).

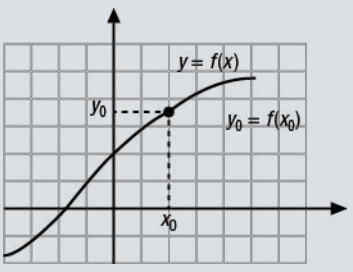
La variation
On s'intéresse aux valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction croît strictement (la **croissance**).

On s'intéresse aux valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction décroît strictement (la **décroissance**).

Les préimages de $y = k$
Ce sont les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction prend la valeur k ($y = k$).

L'ordonnée à l'origine
C'est la valeur de la variable dépendante y pour laquelle la variable indépendante prend la valeur zéro ($y = f(0)$).

Les extremums (maximum et minimum)
Ce sont les valeurs maximales et minimales d'une fonction. On donne la valeur maximale (et minimale) que prend la variable y et la valeur de la variable x où l'extremum est atteint.

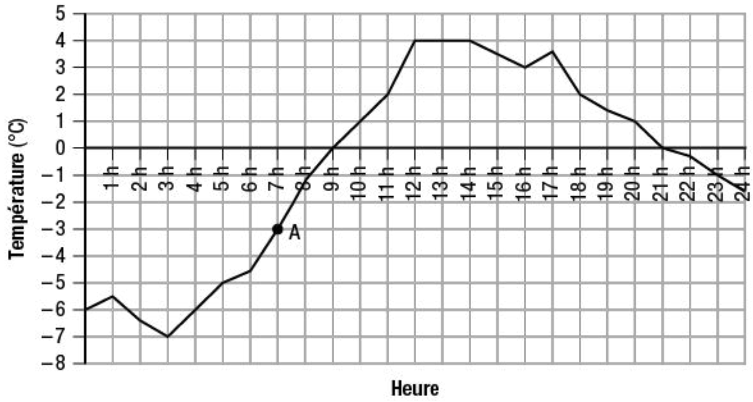


La notation $f(x_0) = y_0$ (lire « f de x_0 est égale à y_0 ») signifie que y_0 est l'image de x_0 ou que x_0 est une préimage de y_0 par la fonction f.

NOTES :

ACTIVITÉ • 1.3

À partir de l'information fournie par le graphique ci-dessous et en utilisant la notation d'intervalle, remplissez le tableau. La première ligne a été remplie pour vous.



Domaine	$x \in [0 ; 24]$
Ensemble image	
Zéros de la fonction	
Signe positif	
Signe négatif	
Croissance	
Décroissance	
Ordonnée à l'origine	
Minimum de la fonction	
Maximum de la fonction	

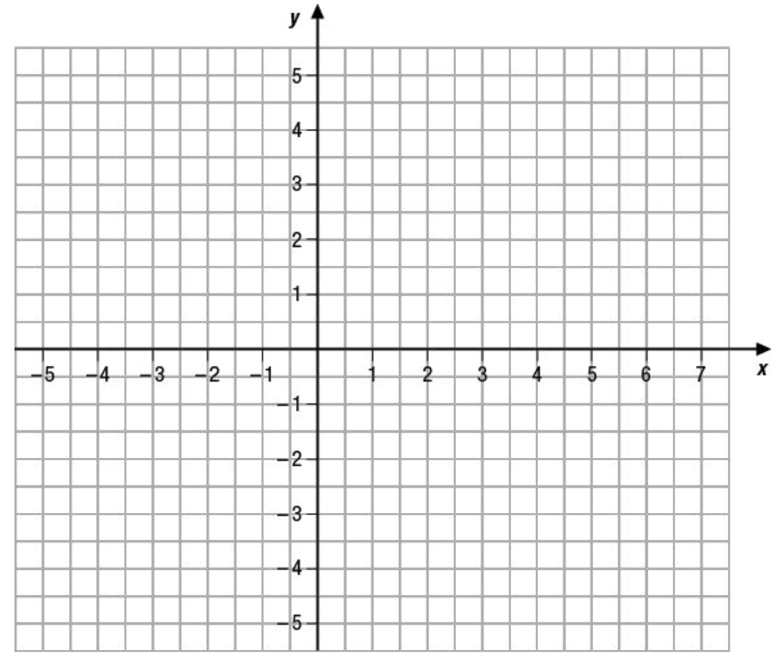
ACTIVITÉ • 1.4

Tracez le graphique d'une fonction qui vérifie simultanément les trois conditions suivantes (à la page suivante).

a) Le domaine est $]-5 ; 7]$.

b) L'image est $[-4 ; 3]$.

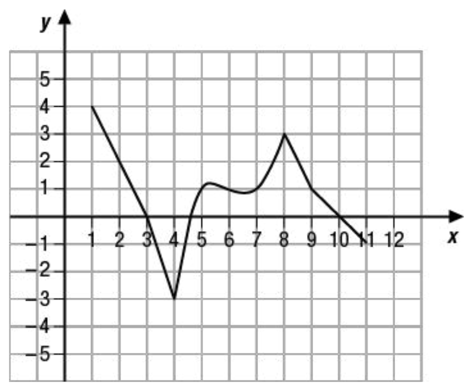
c) $f(-3) = 2, f(1) = 0$.



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 1.5

Le graphique ci-contre représente une fonction *f*. Répondez aux questions à l'aide de la notation d'intervalle [à l'exception des questions c), h) et i)].



Il faut noter que, dans cette activité, il n'est pas possible d'exprimer toutes les réponses uniquement à l'aide de nombres entiers ; des réponses approximatives devront alors être acceptées. C'est un des inconvénients qu'il y a à travailler avec des graphiques !

a) Quel ensemble de valeurs la variable x prend-elle ?

b) Quel ensemble de valeurs la variable y prend-elle ?

c) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est nulle ?

d) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est positive ?

e) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est négative ?

f) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction croît ?

g) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction décroît ?

h) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction prend la valeur 2 ?

i) Quelles sont les images de 6, de 8 et de 11 par la fonction f ?

j) Remplissez le tableau à partir des renseignements que le graphique fournit.

x	y
3	
6	
10	
	2
	2
	2
11	
	4
	3
	3

ACTIVITÉ • 1.6

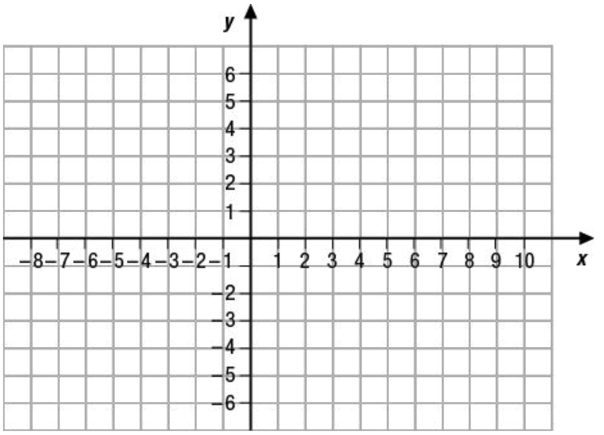
Tracez le graphique d'une fonction qui vérifie simultanément les quatre conditions suivantes :

a) le domaine est $[-6\,;\,8]$;

b) l'image est $[-4\,;\,5]$;

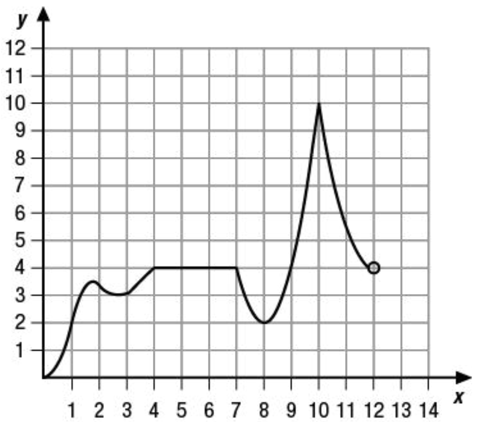
c) $f(-4) = 2$, $f(1) = 3$, la fonction a deux zéros, l'un d'eux en $x = 3$;

d) f décroît sur $]-1\,;\,7[$.



ACTIVITÉ • 1.7

Le graphique ci-contre représente une fonction $y = f(x)$.



Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et justifiez votre réponse.

a) Le domaine de la fonction est $[0\,;\,10]$.

b) L'image de la fonction est $[0\,;\,12]$.

c) Les deux variables peuvent être choisies comme variables indépendantes.

d) On a $f(2) = 1$.

e) La fonction est positive pour toutes les valeurs du domaine.

B. La règle de correspondance, la réciproque et les différentes façons de décrire une fonction

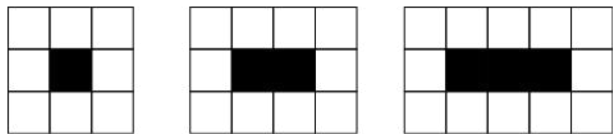
Nous venons de travailler avec une fonction représentée par un graphique. Cependant, un graphique n'est pas la seule façon de représenter une fonction : on peut aussi la décrire grâce à une règle de correspondance, un énoncé ou un ensemble de valeurs dans un tableau. Chacune de ces formes présente des avantages et des inconvénients.

Les deux activités qui suivent vous permettent de vous familiariser avec la règle de correspondance et le tableau de valeurs.

J'explore

ACTIVITÉ • 1.8

Dans une usine de carreaux de céramique, on offre un motif en blanc et noir, que l'on compose pour créer différents types de carreaux, comme dans l'illustration ci-contre.



Les carreaux de céramique peuvent avoir 1, 2, 3, 4, 5, ... carrés noirs entourés de carrés blancs.

a) Combien de carrés blancs utilise-t-on dans un carreau ayant 15 carrés noirs ?

b) Pour 18 carrés blancs, combien de carrés noirs utilise-t-on ?

c) Pour 115 carrés noirs, combien de carrés blancs utilise-t-on ?

d) Pour 288 carrés blancs, combien de carrés noirs utilise-t-on ?

e) Est-il possible qu'un carreau de céramique de ce type ait 87 carrés blancs ? Pourquoi ?

f) Trouvez une règle de correspondance qui donne le nombre de carrés blancs en fonction du nombre de carrés noirs. Utilisez-la pour vérifier vos réponses aux questions a) et c).

g) Trouvez une règle de correspondance qui donne le nombre de carrés noirs en fonction du nombre de carrés blancs. Utilisez-la pour vérifier vos réponses aux questions b), d) et e).

La règle de correspondance et la réciproque d'une fonction

Dans l'activité 1.8, si x représente le nombre de carrés noirs et y, le nombre de carrés blancs, on exprime y en fonction de x en utilisant la **règle de correspondance** $y = f(x) = 2x + 6$. Cette règle permet de trouver rapidement les valeurs de la variable dépendante pour n'importe quelle valeur de la variable indépendante en la remplaçant dans la règle.

Quand la fonction est donnée par une règle de correspondance et que le domaine n'est pas précisé, on tient alors pour acquis qu'il s'agit de son domaine naturel, c'est-à-dire le plus grand ensemble de nombres pour lesquels il est possible de calculer l'image grâce à la règle de correspondance.

Quand la situation le permet, on peut choisir indifféremment celle des deux variables qui sera la variable indépendante. Dans l'activité 1.8, il est possible d'exprimer y en fonction de x ou x en fonction de y. Ces fonctions sont des fonctions réciproques l'une de l'autre. Partant de la règle $y = f(x) = 2x + 6$, on peut isoler x et obtenir $x = \frac{y-6}{2}$, que l'on peut écrire sous la forme $x = f^{-1}(y) = \frac{y-6}{2}$ ou $f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - 3$. Normalement, on exprime y en fonction de x. Pour cette raison, lorsqu'on cherche une réciproque, on remplace y par x une fois qu'on a isolé x.

Afin de trouver la réciproque d'une fonction $y = f(x)$, quand c'est possible, on peut isoler x et intervertir les variables x et y.

NOTES :

Les différentes façons de décrire une fonction

Les fonctions s'expriment par :

- des **règles de correspondance exprimées par des expressions algébriques** (exemple : le nombre de carrés blancs en fonction du nombre de carrés noirs est $y = f(x) = 2x + 6$). Les règles de correspondance permettent d'obtenir les valeurs en jeu avec précision ;
- des **graphiques** : graphiques de courbes, de droites, etc. ; sur le plan cartésien à deux axes (axe des abscisses et axe des ordonnées), on place normalement la variable indépendante x sur l'axe horizontal (ou axe des abscisses). Les graphiques donnent un aperçu général de la dépendance, de la variation, de la croissance et du signe de la fonction ;

- des **tableaux de valeurs** (les tableaux sont forcément incomplets, car ils ne donnent que des valeurs de la variable dépendante pour un nombre limité de valeurs de la variable indépendante). Les tableaux aident à dessiner les graphiques ;
- des **mots** qui décrivent un phénomène, tels les énoncés des problèmes.

Les différentes façons de décrire les fonctions présentent des avantages et des inconvénients, dont les suivants.

- Le **graphique** donne un aperçu général, mais il n'est pas toujours très précis.
- La **règle de correspondance** permet de connaître exactement la valeur de la variable dépendante qui correspond à n'importe quelle valeur de la variable indépendante ; en revanche, il est difficile de se représenter son graphique.
- Le **tableau** donne une idée limitée de la fonction.
- Les **mots** ne donnent pas toujours une idée précise de la fonction.

Dans tous les cas, à chaque élément du domaine correspond un et seulement un élément de l'ensemble image.

NOTES :

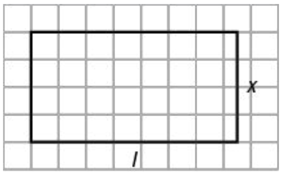
Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 1.9

Mille saumons sont introduits dans un vivier et on a déterminé que l'évolution de la population varie selon la fonction $s(t) = 250(-t^2 + 8t + 4)$, où t représente le temps, mesuré en mois.

Déterminez la quantité de saumons aux mois 2, 5, 7 et 8.

ACTIVITÉ • 1.10



On veut délimiter un terrain rectangulaire de longueur l et de largeur x en utilisant complètement une corde qui mesure 500 m de longueur.

a) Déterminez l'expression de l en fonction de x. Si $l = l(x)$, calculez $l(10)$.

b) Quel est le domaine de cette fonction ?

c) Déterminez l'expression de l'aire A du rectangle en fonction de la largeur x. Calculez $A(10)$.

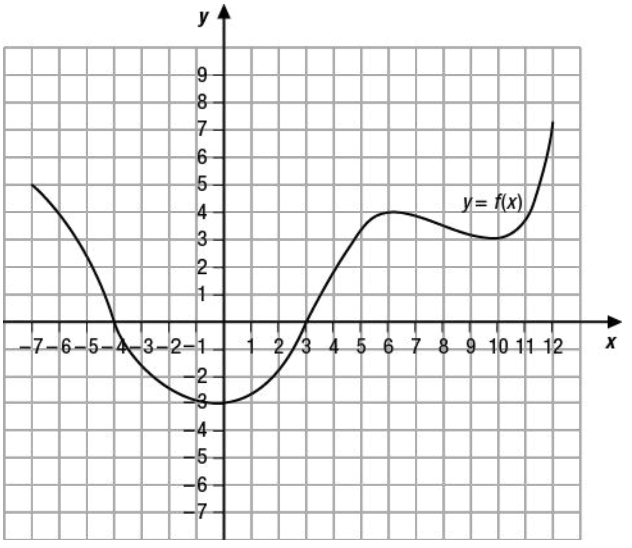
C. Une introduction aux paramètres additifs et multiplicatifs dans la règle de correspondance

Comment le graphique d'une fonction se modifie-t-il si l'on ajoute des valeurs à sa règle de correspondance ou si on en soustrait ? Qu'arrive-t-il si l'on multiplie cette règle par 2 ou par $\frac{1}{2}$? C'est ce que nous verrons dans les deux activités suivantes, que vous pouvez réaliser sans explication préalable de la part de votre enseignant.

J'explore

ACTIVITÉ • 1.11

Le graphique ci-contre correspond à la fonction $y = f(x)$. Répondez aux questions.



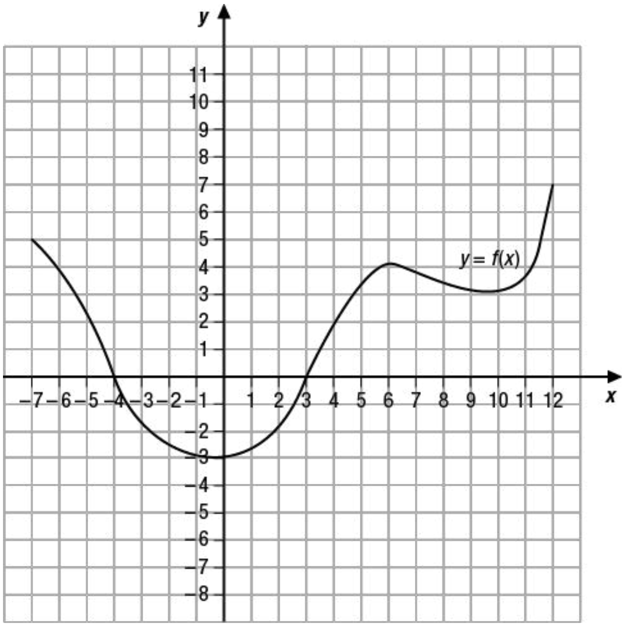
a) Imaginez que, pour chaque valeur de x, la valeur de y augmente de deux unités. Cela correspond à la fonction $y = f(x) + 2$. Tracez le graphique de cette fonction.

b) Tracez le graphique de la fonction $y = f(x) - 2$ dans le même graphique.

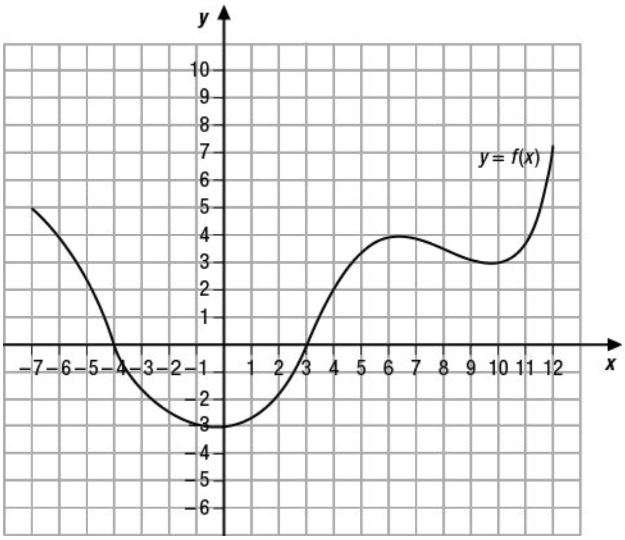
ACTIVITÉ • 1.12

Soit le graphique de la fonction $y = f(x)$ de l'activité 1.11.

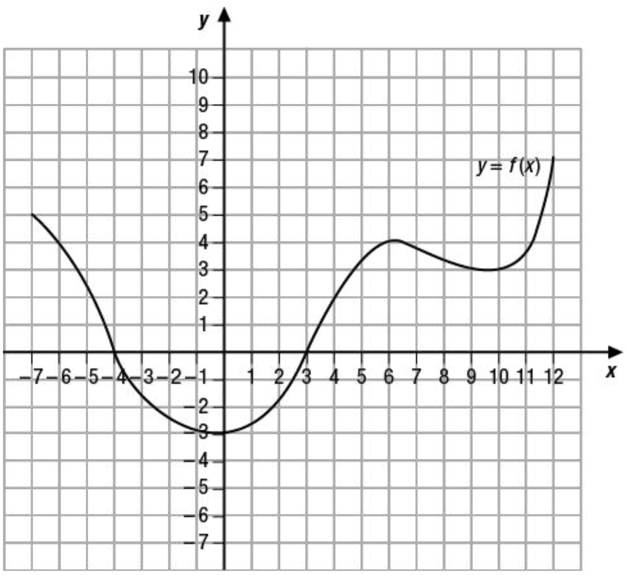
a) Imaginez que, pour chaque valeur de x, la valeur de y correspond au double de ce qu'on voit dans le graphique. Cela correspond à la fonction $y = 2f(x)$. Tracez le graphique de cette fonction.



b) Tracez le graphique de la fonction $y = \frac{1}{2}f(x)$ et celui de la fonction $y = \frac{1}{2}f(x) + 2$ à partir du graphique ci-contre.



c) Tracez le graphique de la fonction $y = -f(x)$ et celui de la fonction $y = -\frac{1}{2}f(x)$ à partir du graphique ci-contre.



Les translations verticales et les paramètres multiplicatifs

Les translations verticales

Si on a une fonction donnée par une règle de correspondance $y = f(x)$, alors on obtient le graphique de $y = f(x) + a$ à partir de celui de $y = f(x)$ en faisant une translation verticale.

Cette translation sera ascendante si $a > 0$ et descendante si $a < 0$.

Les étirements ou les compressions dans le sens du graphique ($y = af(x)$, $a > 0$)

Si on a une fonction donnée par une règle de correspondance $y = f(x)$, alors on obtient le graphique de $y = a \cdot f(x)$, avec le paramètre multiplicatif $a > 0$, à partir de celui de $y = f(x)$ en faisant un étirement ou une compression du graphique.

En effet, $y = 2 \cdot f(x)$ est le double de $y = f(x)$, c'est-à-dire un étirement au double du graphique qui respecte encore les zéros, car $2 \cdot 0 = 0$. On a un étirement chaque fois que le paramètre est plus grand que 1.

Si le paramètre a est positif et plus petit que 1, par exemple $a = \frac{1}{2}$, alors le graphique de $y = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ sera réduit à celui de la moitié de $y = f(x)$, et l'effet sera celui d'une compression du graphique.

Les étirements ou les compressions dans le sens opposé au graphique ($y = af(x)$, $a < 0$)

Si l'on a une fonction donnée par une règle de correspondance $y = f(x)$, alors on obtient le graphique de $y = -f(x)$ à partir de celui de $y = f(x)$ en faisant une réflexion horizontale du graphique par rapport à l'axe des abscisses.

En effet, à chaque valeur de x correspond l'opposé de $y = f(x)$, soit $y = -f(x)$.

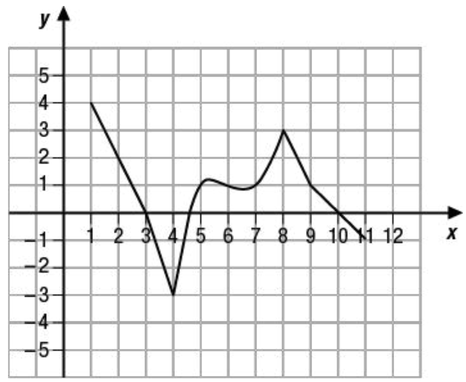
Les mêmes règles que celles du cas précédent s'appliquent : si $a < -1$, alors on a une réflexion suivie d'un étirement ; si $-1 < a < 0$, on a une réflexion suivie d'une compression.

NOTES :

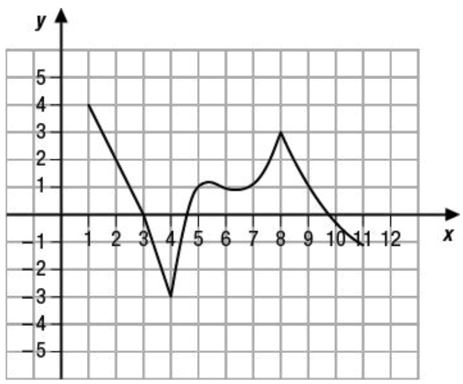
Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 1.13

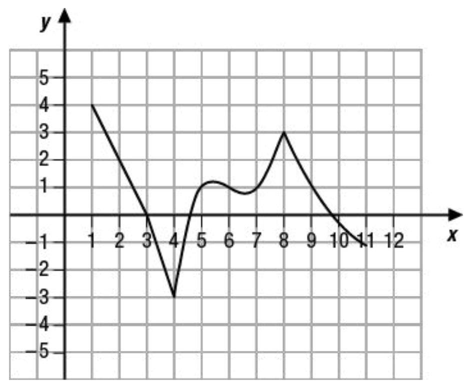
Soit le graphique de la fonction $y = f(x)$ ci-dessous.



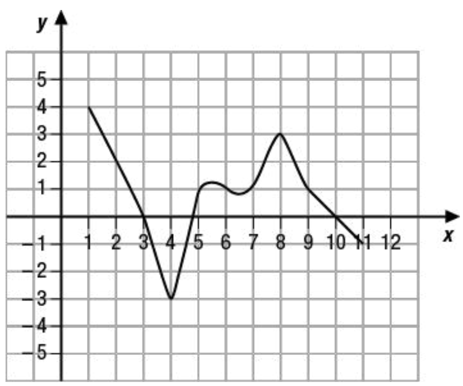
a) Tracez les graphiques des fonctions $f(x) + 1$ et $f(x) - 1$ dans le plan cartésien suivant.



b) Tracez le graphique de la fonction $\frac{1}{2}f(x)$ dans le plan cartésien suivant.

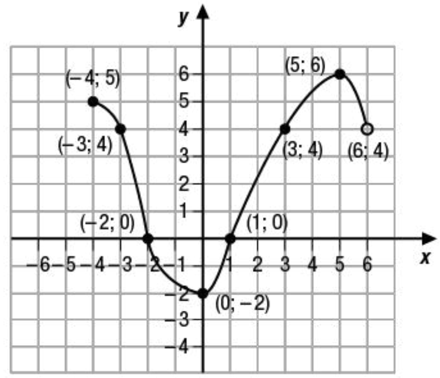


c) Tracez le graphique de la fonction $-f(x)$ dans le plan cartésien suivant.



ACTIVITÉ • 1.14

La fonction $f(x)$ est donnée par le graphique ci-contre.



a) Déterminez le domaine de la fonction.

b) Déterminez l'ensemble image de la fonction (selon ce qu'on voit dans le graphique).

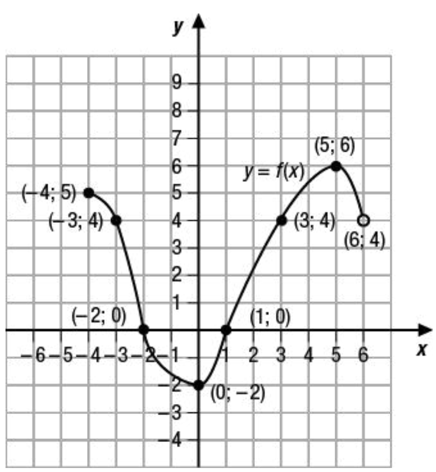
c) Déterminez les valeurs du domaine pour lesquelles la fonction est croissante et celles pour lesquelles la fonction est décroissante.

d) Déterminez les valeurs du domaine pour lesquelles la fonction est positive, celles pour lesquelles elle est négative et celles pour lesquelles elle est nulle.

e) Déterminez les images de –2, 0 et 3, c'est-à-dire les valeurs de $f(-2)$, $f(0)$ et $f(3)$.

f) Déterminez la préimage ou les préimages de 4, c'est-à-dire la valeur de $f^{-1}(4)$.

g) Tracez les graphiques des fonctions $f(x) + 3$ et $\frac{1}{2}f(x)$.



D. Rappel – Les opérations sur les fractions

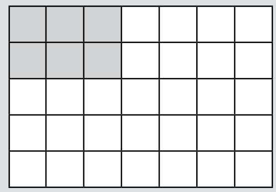
Tout au long de ce cours, vous verrez des fractions et des opérations sur les fractions. C'est le moment de revenir sur ces opérations que vous avez déjà étudiées.

Les quatre opérations arithmétiques avec des fractions

1. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Exemple : $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2+2+2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7}$

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$



Par exemple, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$. On peut visualiser cette règle à l'aide du schéma rectangulaire ci-contre. On prend $\frac{3}{7}$ à l'horizontale et $\frac{2}{5}$ à la verticale. Le fait d'imaginer la multiplication comme l'aire d'un rectangle permet de visualiser que l'on prend 6 rectangles sur un total de 35.

3. Diviser par une fraction équivaut à multiplier par son inverse : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Par exemple, $\frac{7}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

4. L'addition et la soustraction sont immédiates si on a le même dénominateur :

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$

Par exemple, $\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}$

5. Si les fractions ont des dénominateurs différents, on doit réduire au même dénominateur (on choisira de préférence le plus petit commun multiple) : $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

Par exemple, $\frac{7}{5} + \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{21}{15} + \frac{10}{15} = \frac{31}{15}$

NOTES :

J'explore

ACTIVITÉ • 1.15

Effectuez les opérations suivantes.

a) $3 \cdot \frac{x}{6} =$

b) $\frac{\frac{x}{7}}{\frac{2}{y}} =$

c) $\frac{x}{2} + \frac{4}{y} =$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 1.16

Quelle expression représente le résultat de chaque calcul ? Choisissez la bonne réponse.

a) $3 \cdot \frac{x}{5}$

- **i)** $\frac{3x}{15}$
- **ii)** $\frac{3x}{5}$
- **iii)** $\frac{x}{15}$
- **iv)** $\frac{15}{x}$

b) $-2 \div \frac{x}{2}$

- **i)** $-x$
- **ii)** $-4x$
- **iii)** $-\frac{4}{x}$
- **iv)** $\frac{1}{x}$

c) $\frac{\frac{2}{3}}{x}$

- **i)** $\frac{2}{3x}$
- **ii)** $\frac{2x}{3}$
- **iii)** $\frac{3}{2x}$
- **iv)** $\frac{2}{3}x$

ACTIVITÉ • 1.17

Effectuez les opérations suivantes.

a) $10 \cdot \frac{x}{4} =$

b) $\frac{\frac{a}{12}}{\frac{3}{b}} =$

c) $\frac{s}{5} + \frac{3}{t} =$

d) $\frac{-\frac{a}{8}}{\frac{4}{b}} + \frac{a}{16} =$

Mes activités de récapitulation

R1.1

Expliquez les notions suivantes :

- la fonction ;
- les zéros d'une fonction ;
- le signe positif d'une fonction ;
- le signe négatif d'une fonction ;
- l'ensemble de croissance d'une fonction ;
- l'ensemble de décroissance d'une fonction.

R1.2

Sachant que $f(2) = 6$, que vaut $\frac{1}{2}f(2) - 1$? Décrivez comment on obtient le graphique de la fonction $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$ à partir du graphique de $y = f(x)$.

R1.3

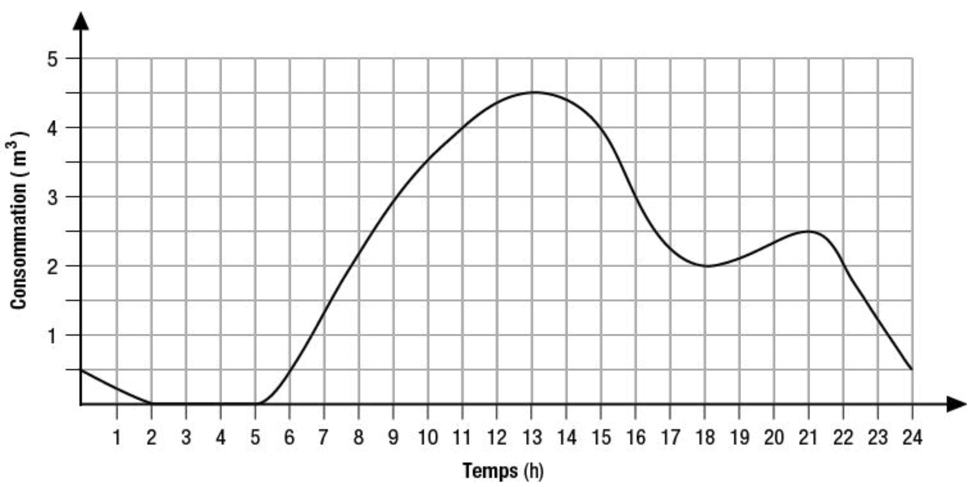
Sachant que $f(5) = 2$, que vaut $-2f(5) + 3$? Décrivez comment on obtient le graphique de la fonction $y = -2f(x) + 3$ à partir du graphique de $y = f(x)$.

R1.4

La consommation d'eau dans un restaurant du centre-ville est donnée par le graphique ci-dessous.

a) Donnez l'ensemble de croissance de la fonction.

b) Pendant quelles heures la consommation d'eau est-elle nulle ? (Donnez la réponse en notation d'intervalle.)



CHAPITRE

2 LA FONCTION LINÉAIRE

Objectifs d'apprentissage

- Reconnaître les fonctions de proportionnalité directe et comprendre leurs propriétés
- Maîtriser les caractéristiques et la représentation graphique des fonctions linéaires
- Trouver le zéro et déterminer le signe d'une fonction linéaire
- Savoir reconnaître et exprimer un lien linéaire de différentes façons
- Reconnaître deux droites parallèles des points de vue graphique et algébrique

A. La fonction de proportionnalité directe

Les fonctions de proportionnalité directe s'appliquent à plusieurs aspects de la vie courante. L'activité suivante en donne des exemples.

J'explore

ACTIVITÉ • 2.1

Pierre a acheté 5 m^3 de bois qu'il a payés 45 $. Son amie a payé 90 $. Quel volume de bois l'amie a-t-elle acheté ? Une autre personne a besoin de 2,5 m^3 de bois. Combien paiera-t-elle ?

a) Dans cette situation, quelles sont les variables en jeu ?

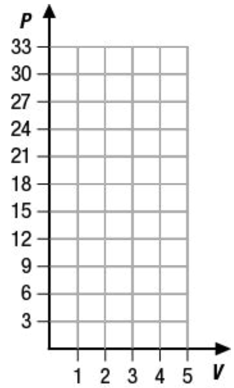
b) Donnez des noms aux variables (indiquez leurs unités) et remplissez le tableau ci-dessous.

x	y
5	45
2,5	
10	
100	
x	

c) Dans le tableau que vous avez rempli en b), il y a certaines régularités. Lesquelles remarquez-vous ?

d) Trouvez la règle de correspondance qui donne le prix à payer en fonction de la quantité de bois achetée.

e) Illustrez cette situation par un graphique.



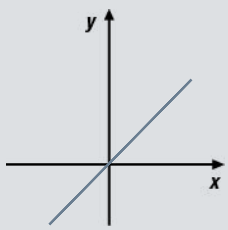
La fonction de proportionnalité directe et le taux de variation

Une fonction est une **fonction de proportionnalité directe** lorsque sa règle de correspondance prend la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre réel non nul. Pour une fonction de proportionnalité directe, $f(0) = 0$. Dans la fonction de proportionnalité directe $f(x) = ax$, a porte le nom de **taux de variation** ou de **constante de proportionnalité.**

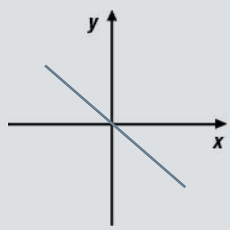
La représentation graphique d'une fonction de proportionnalité directe est une droite oblique passant par le point (0 ; 0).

Pour une fonction de proportionnalité directe $f(x) = ax$, on a que « au double de x correspond le double de l'image de x », « au triple de x correspond le triple de l'image de x », « à la moitié de x correspond la moitié de l'image de x », etc.

On travaille souvent avec des fonctions de proportionnalité dans lesquelles a est un nombre réel positif. Dans ces cas, les droites ont une pente positive, et les fonctions associées sont des fonctions croissantes.



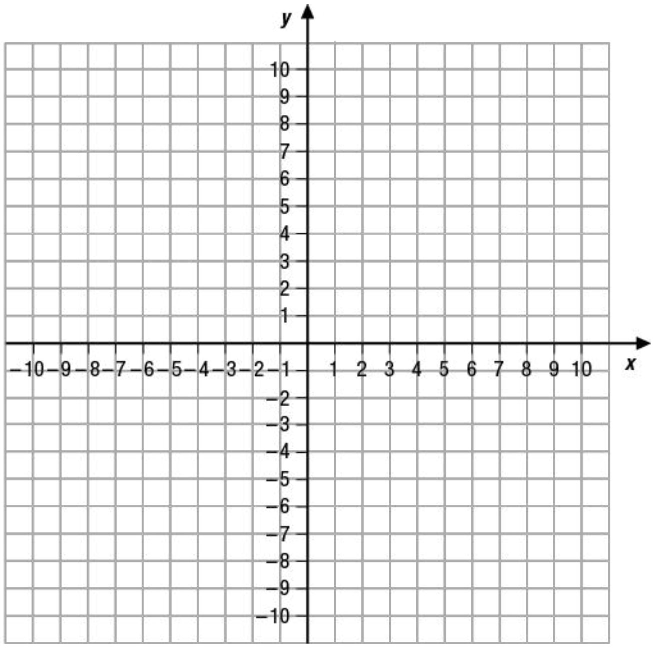
Les règles de correspondance du type $f(x) = ax$, où $a < 0$, correspondent aux graphiques de fonctions décroissantes. Dans ces cas, la pente des droites associées est négative.
Exemple : $f(x) = -2x$.



NOTES :

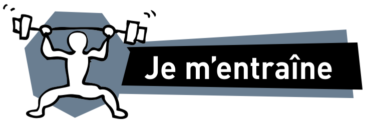
ACTIVITÉ • 2.2

a) Tracez le graphique de $f(x) = -4x$ et de $g(x) = \frac{3}{4}x$. Vérifiez si vos graphiques sont justes en obtenant deux autres points à partir des règles de correspondance de $y = f(x)$ et de $y = g(x)$.



b) Lesquels des points suivants appartiennent au graphique de $f(x)$ ou de $g(x)$? Pour répondre, utilisez les règles de correspondance données plus haut plutôt qu'un simple examen visuel.

i) $(2; 8)$ **ii)** $(5; -20)$ **iii)** $(12; 9)$ **iv)** $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ **v)** $(0; 0)$

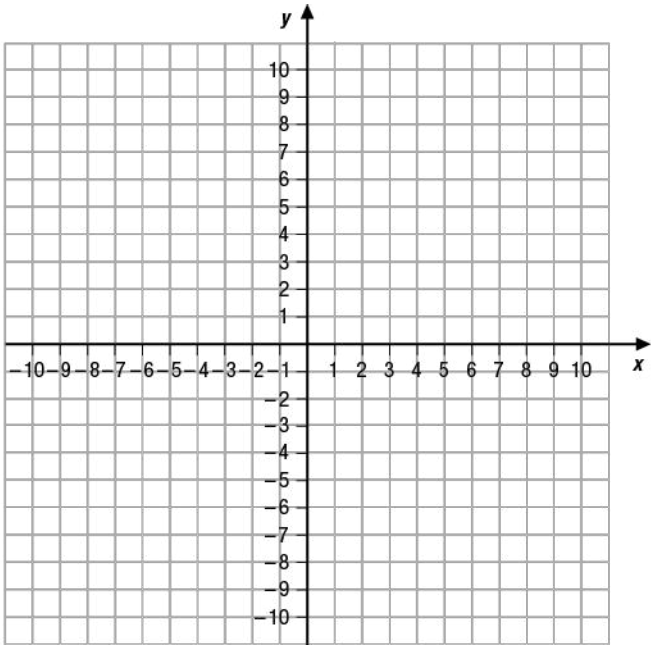


ACTIVITÉ • 2.3

Décrivez les principales caractéristiques d'une fonction de proportionnalité directe.

ACTIVITÉ • 2.4

Tracez les graphiques des fonctions de proportionnalité directe suivantes : $f_1(x) = -3x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$ et $f_3(x) = -\frac{1}{2}x$. Au besoin, construisez des tableaux de valeurs.



B. La fonction linéaire et sa représentation graphique

Vous avez sûrement étudié les fonctions linéaires au secondaire. Même si vous ne vous en souvenez pas, vous pouvez faire les deux activités suivantes.

J'explore

ACTIVITÉ • 2.5

Dans un laboratoire de chimie, un baril servant à conserver une substance chimique a une capacité de 20 L. Au fur et à mesure que le baril se remplit, on recueille les données ci-contre sur sa masse.

Volume de substance (en litres)	1	2	4
Masse du baril (en kilogrammes)	8,5	13,5	23,5

a) Quelle est la masse du baril lorsqu'il contient 3 L de la substance chimique ?

b) Quelle est la masse du baril lorsqu'il est vide ?

c) Quelle est la masse maximale du baril ? Pourquoi ?

d) Trouvez la masse du baril lorsqu'il contient 7 L, 10 L et 13 L de la substance chimique.

e) Trouvez une règle de correspondance permettant de déterminer la masse du baril en fonction du nombre de litres de substance chimique qu'il contient.

f) Quel intérêt y a-t-il à connaître une telle règle de correspondance ? Inventez une question qui demande qu'on connaisse la règle pour y répondre.

ACTIVITÉ • 2.6

Un technicien en réparations à domicile affiche un tarif de 58 $ par heure de travail. Il demande un supplément de 25 $ pour son déplacement.

a) Trouvez le coût d'une réparation si elle nécessite 2 heures de travail ; 3 heures de travail ; 1,5 heure de travail.

b) Trouvez une fonction (une règle de correspondance et le domaine correspondant) décrivant le coût d'une réparation qui nécessite x heures de travail (y compris le déplacement).

c) Le technicien a reçu 170 $ pour une réparation. Pendant combien de temps a-t-il travaillé ?

La fonction linéaire et les coordonnées à l'origine : ordonnée et abscisse à l'origine

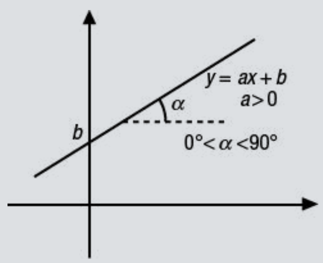
Les fonctions des activités 2.5 et 2.6 ont la forme $f(x) = ax + b$; ces fonctions sont appelées des **fonctions linéaires** ou **affines.**

Si $b = 0$, la fonction linéaire est une fonction de proportionnalité directe. Si $b \neq 0$, on peut voir la fonction $f(x) = ax + b$ comme un déplacement vertical de b unités de la fonction de proportionnalité directe $f(x) = ax$.

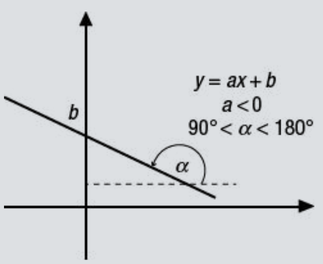
Le graphique d'une fonction linéaire est une droite non verticale. L'équation $y = ax + b$ porte le nom d'**équation de la droite** (associée à la fonction $f(x) = ax + b$).

Le nombre a de la règle de correspondance s'appelle **taux de variation** de la fonction ou **pente** de la droite. Il indique que, pour chaque unité d'augmentation de la variable indépendante, la variable dépendante varie de a unités.

Si $a > 0$, la droite forme un angle α avec l'horizontale, où $\alpha \in \,]0°; 90°[$.



Si $a < 0$, la droite forme un angle α avec l'horizontale, où $\alpha \in \,]90°; 180°[$.



Toutes les droites (sauf les droites verticales) ont un point de rencontre avec l'axe des ordonnées (axe vertical). L'ordonnée de ce point est l'image de la fonction pour la valeur $x = 0$ et est appelée **ordonnée à l'origine** (c'est le b de la règle de correspondance ; $b = f(0)$).

Toutes les droites (sauf les droites horizontales) ont un point de rencontre avec l'axe des abscisses (axe horizontal). L'abscisse de ce point est appelée le **zéro** ou l'**abscisse à l'origine** et elle correspond à la valeur que prend la variable x quand $y = 0$.

Pour trouver le zéro, ou l'abscisse à l'origine, on doit résoudre $f(x) = 0$.

Exemple : Pour trouver l'abscisse à l'origine de la droite $y = 3x - 4$, on résout $0 = 3x - 4$.

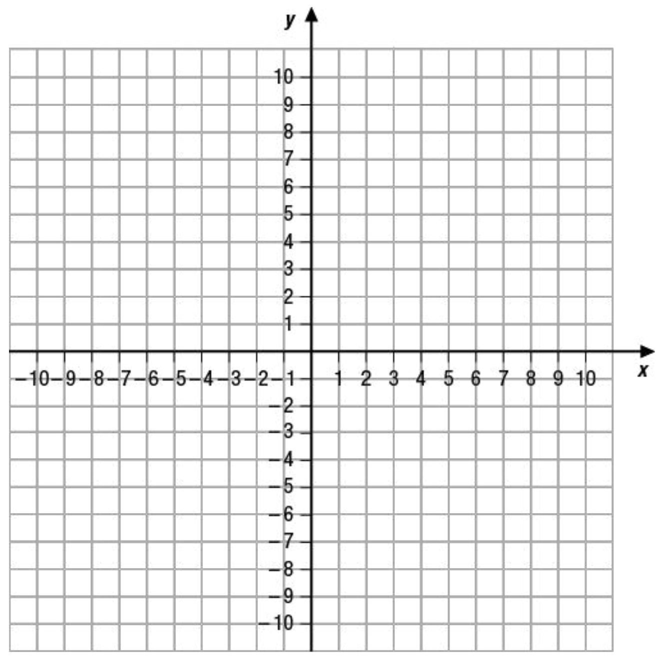
En isolant x, on obtient $x = \frac{4}{3}$. La droite passe donc par le point $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 2.7

Trouvez l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine de la droite ci-dessous, puis tracez le graphique à partir de ces deux données.

$$y = \frac{2}{3}x - 1$$

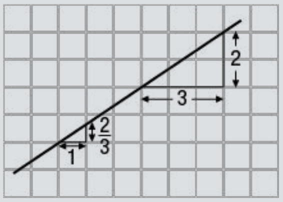


Savoir lire la règle de correspondance et interpréter le taux de variation

Dans l'activité 2.7, vous avez tracé le graphique de la fonction $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$.

Voici l'information que vous donne la règle de correspondance :

- Le « −1 » de la règle de correspondance est l'ordonnée à l'origine. Cette valeur vous indique que la droite coupe l'axe vertical au point $(0\ ;\ -1)$. Placez ce point dans le plan cartésien.
- Le taux de variation de $\frac{2}{3}$ vous indique que, si l'abscisse augmente de 1 unité, alors l'ordonnée augmentera de $\frac{2}{3}$ unité. Ces nombres peuvent paraître peu pratiques pour tracer le graphique. La proportionnalité vous permet d'affirmer que, si l'abscisse augmente de 3 unités, alors l'ordonnée augmentera de $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ unités.



- Remarquez que les coordonnées de deux points d'une droite suffisent pour calculer le taux de variation de la fonction linéaire associée. Si l'on sait que f est une fonction linéaire, et que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$, alors son graphique contiendra les points de coordonnées $(x_1\,;\,y_1)$ et $(x_2\,;\,y_2)$. Le taux de variation, ou pente, est donné par le rapport entre la variation des ordonnées et la variation des abscisses :

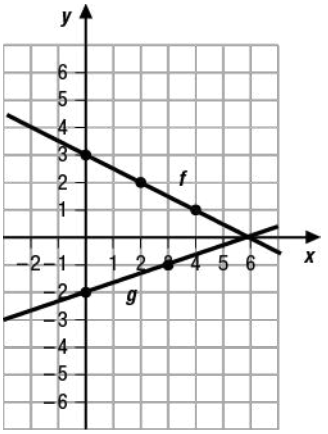
  $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ou bien $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

  Ici, on peut prendre deux points quelconques appartenant à la droite, par exemple $(x_1\,;\,y_1) = (3;\,1)$ et $(x_2\,;\,y_2) = (6;\,3)$. La pente est alors le quotient $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{6-3} = \dfrac{2}{3}$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 2.8

Obtenez les règles de correspondance des fonctions linéaires représentées par les graphiques ci-contre. Vérifiez vos règles de correspondance en plaçant des points dans les graphiques pour voir s'ils coïncident avec la droite.



Trois façons de tracer le graphique d'une droite

Vous connaissez maintenant trois façons de tracer le graphique d'une droite à partir de la règle de correspondance $y = ax + b$, où a et b sont connus.

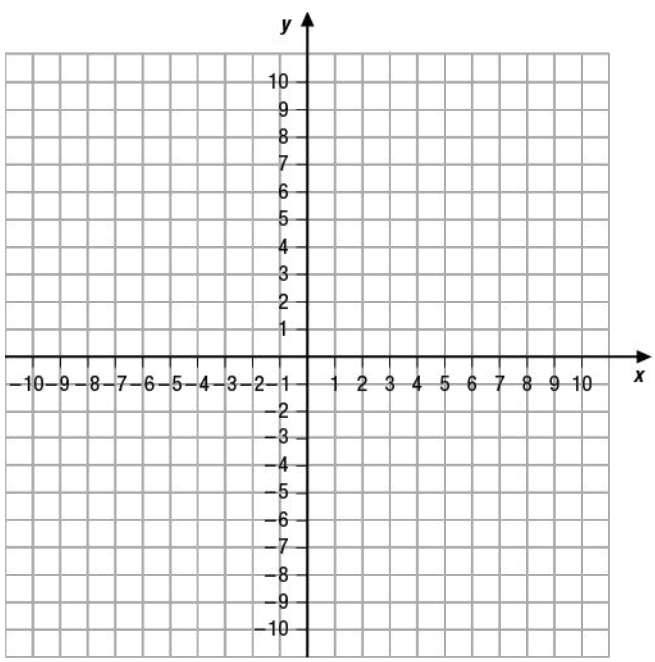
- On calcule l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine. En plaçant ces données dans le plan cartésien, on peut tracer le graphique de la droite.
- On trouve deux points en choisissant des valeurs de x et en déterminant les valeurs de y correspondantes à partir de la règle de correspondance. En reliant ces deux points, on obtient le graphique de la droite.
- On place l'ordonnée à l'origine dans le plan cartésien et on utilise la pente pour trouver un autre point.

NOTES :

ACTIVITÉ • 2.9

Au chapitre 1, nous avons vu les notions de zéro et de signe d'une fonction du point de vue graphique. Estimez le zéro de la fonction $f(x) = 2x - 5$ à l'aide d'une méthode graphique. Puis trouvez-le en utilisant une méthode algébrique (déterminez la valeur de x en faisant des déductions).

Zéro :



Faites ensuite l'étude du signe de la fonction (autrement dit, donnez les valeurs pour lesquelles la fonction est positive et les valeurs pour lesquelles la fonction est négative).

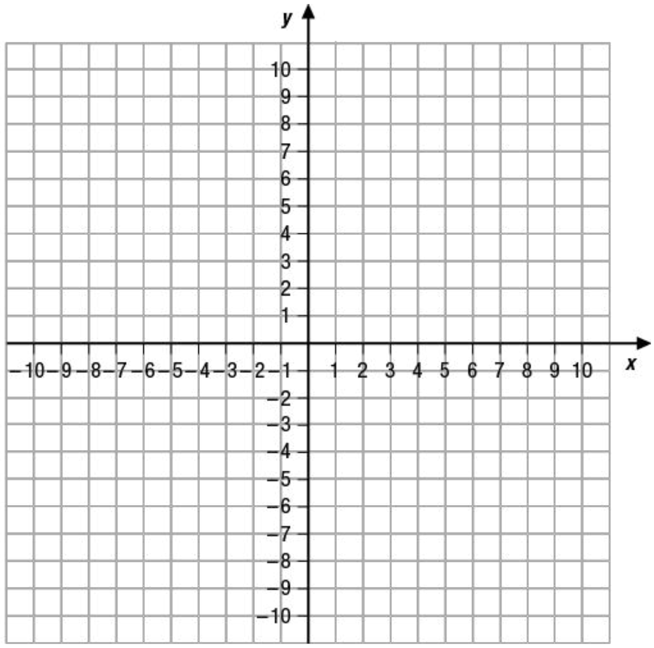
ACTIVITÉ • 2.10

On sait que la fonction f est linéaire, et que $f(3) = -2$ et $f(-2) = 4$. Trouvez le zéro de f et étudiez le signe de la fonction.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 2.11

a) Tracez le graphique de la fonction $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ à partir de deux points convenables (par exemple, pour trouver un point, prenez $x = 3$ et trouvez la valeur de y correspondante).

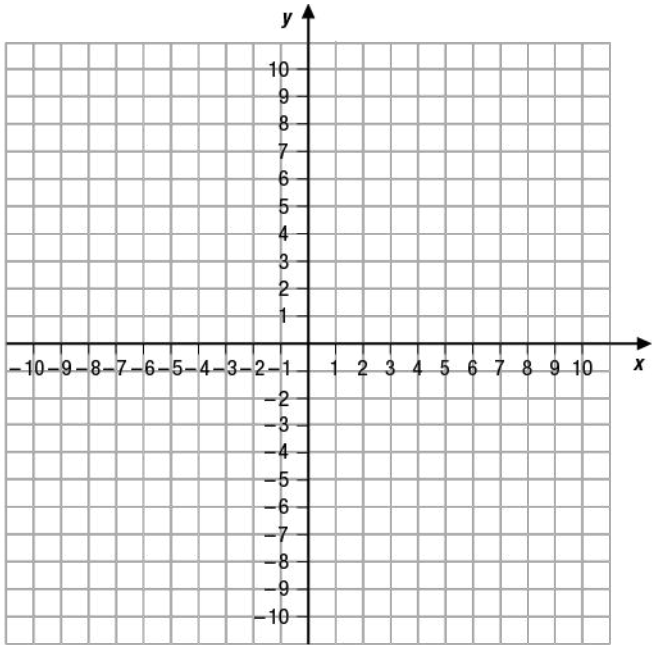


b) Repérez dans votre graphique les valeurs présentes dans la règle de correspondance. Où apparaît la valeur 4 ? Où apparaît la valeur $-\frac{2}{3}$?

ACTIVITÉ • 2.12

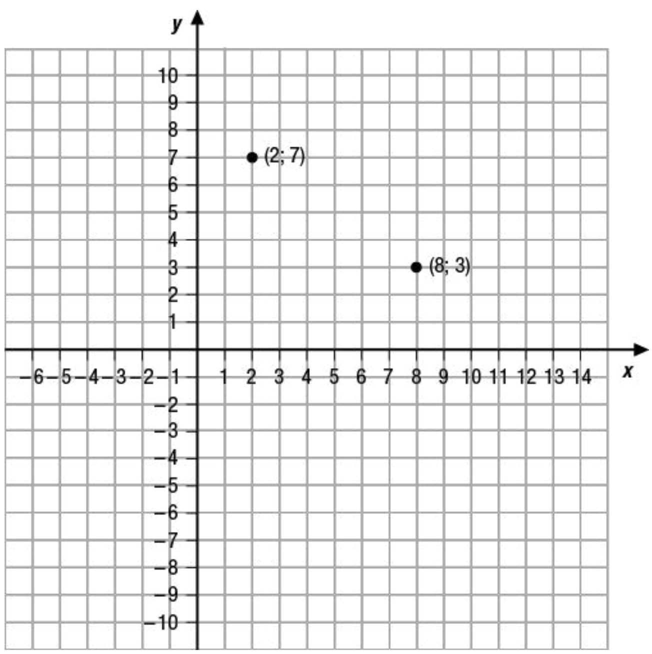
Tracez, dans le même plan cartésien (à la page suivante), le graphique des fonctions linéaires suivantes. Trouvez ensuite leur zéro et déterminez leur signe.

a) $f(x) = \frac{3}{5}x - 4$ **b)** $g(x) = -\frac{4}{3}x$



ACTIVITÉ • 2.13

À partir des deux points représentés dans le plan cartésien ci-dessous, trouvez l'équation de la droite passant par ces deux points. Quel sera le zéro de la fonction linéaire associée ? Estimez-le à l'aide d'une méthode graphique et déterminez-le à l'aide d'une méthode algébrique.



ACTIVITÉ • 2.14

Une famille part en voyage en voiture. Au moment du départ, le réservoir contient 45 L d'essence ; une heure plus tard, il reste 30 L d'essence dans le réservoir.

a) Trouvez la règle de correspondance qui donne la quantité d'essence en fonction du temps, sachant que la diminution d'essence suit une fonction linéaire.

b) Combien de temps la famille peut-elle rouler sans s'arrêter pour faire le plein ?

ACTIVITÉ • 2.15

Pour une fonction linéaire f, on sait que le taux de variation est 3 et que $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{4}$. Quelle est l'équation de la droite associée à cette fonction ?

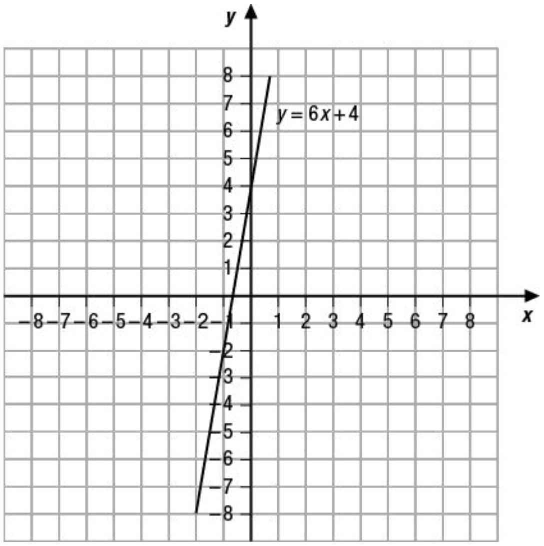
ACTIVITÉ • 2.16

Déterminez la pente de la droite qui contient les points $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ et $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{2}\right)$.

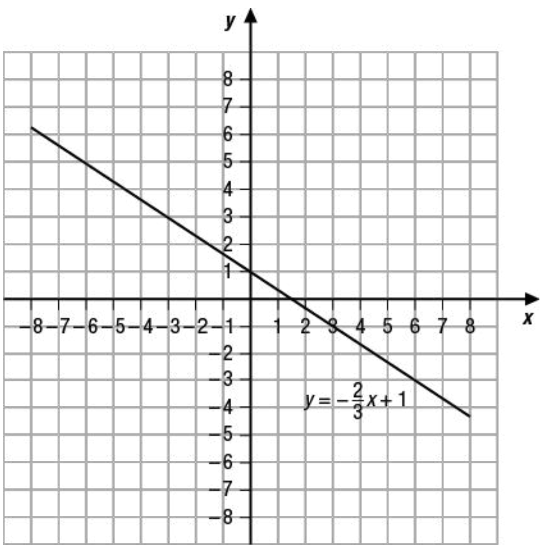
ACTIVITÉ • 2.17

Trouvez le zéro des fonctions suivantes, puis étudiez leur signe.

a) $f(x) = 6x + 4$



b) $g(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$



ACTIVITÉ • 2.18

La concentration d’alcool dans le sang décroît jusqu’à ce que l’alcool soit entièrement métabolisé. Des observations faites sur un homme de 80 kg qui a pris deux cannettes de bière à 5 % sont données dans le tableau suivant. (Source : Calculateur du taux d’alcoolémie, http://educalcool.qc.ca/faits-conseil-et-outils/outils/calculateur-du-taux-dalcoolemie/. Les données ont été légèrement modifiées à des fins pédagogiques.)

Temps écoulé depuis la consommation (min)	30	60	90	120	150	180
Milligrammes d’alcool par 100 millilitres de sang	42	34,5	27	19,5	12	4,5

a) Pour cet homme, dans l’intervalle de temps considéré, la concentration d’alcool dans le sang décroît-elle de façon linéaire par rapport au temps ? Si oui, donnez le taux de variation. Si non, justifiez votre réponse.

b) Trouvez une règle de correspondance qui donne la concentration d’alcool dans le sang en fonction du temps.

C. D’autres façons d’exprimer un lien linéaire

Jusqu’à présent, vous avez travaillé la linéarité de y par rapport à x en utilisant une équation du type $y = ax + b$. Dans les activités qui suivent, vous allez voir d’autres façons d’exprimer un lien linéaire entre x et y.

J'explore

ACTIVITÉ • 2.19

Considérez l'équation $2x + 3y = 12$. Cette équation exprime un lien entre les variables x et y.

a) Montrez que ce lien est linéaire en écrivant l'équation sous la forme $y = ax + b$.

b) Transformez l'équation $2x + 3y = 12$ de sorte qu'elle ait la forme $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ avec des valeurs de c et de d convenables.

c) Remarquez les valeurs 6 et 4 des dénominateurs obtenus en b). Elles apparaissent dans le graphique, comme l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine de la droite. Expliquez ce fait.

Les différentes façons d'exprimer l'équation d'une droite

Il y a différentes façons d'exprimer l'équation d'une droite :

- l'équation fonctionnelle de la droite : $y = ax + b$ (pente a, ordonnée à l'origine b) ;
- l'équation générale de la droite : $Ax + By + C = 0$ (d'où on pourra isoler y et obtenir la pente de la droite et son ordonnée à l'origine) ;
- l'équation réduite (ou symétrique) de la droite : $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ (où c est l'abscisse à l'origine et d est l'ordonnée à l'origine).

NOTES :

ACTIVITÉ • 2.20

Pour chacune des équations linéaires suivantes, trouvez les deux autres façons d'exprimer les droites. Par exemple, si la droite est donnée par son équation fonctionnelle, trouvez les équations générale et réduite.

a) $D_1 : 3x + 4y - 12 = 0$ **b)** $D_2 : \frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$ **c)** $D_3 : y = 2x - 4$

ACTIVITÉ • 2.21

De la droite $3x + 2y - 4 = 0$, on sait que le point $(4 ;\ y_0)$ lui appartient. Trouvez la valeur de y_0.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 2.22

Rédigez une stratégie pour trouver l'équation réduite (ou symétrique) d'une droite quand on connaît l'équation générale.

ACTIVITÉ • 2.23

Pour chacune des équations linéaires suivantes, trouvez l'équation fonctionnelle, l'équation générale et l'équation réduite (ou symétrique).

a) $5x = 2y - 15$

b) $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$

c) $\frac{2x - y}{4} = 1$

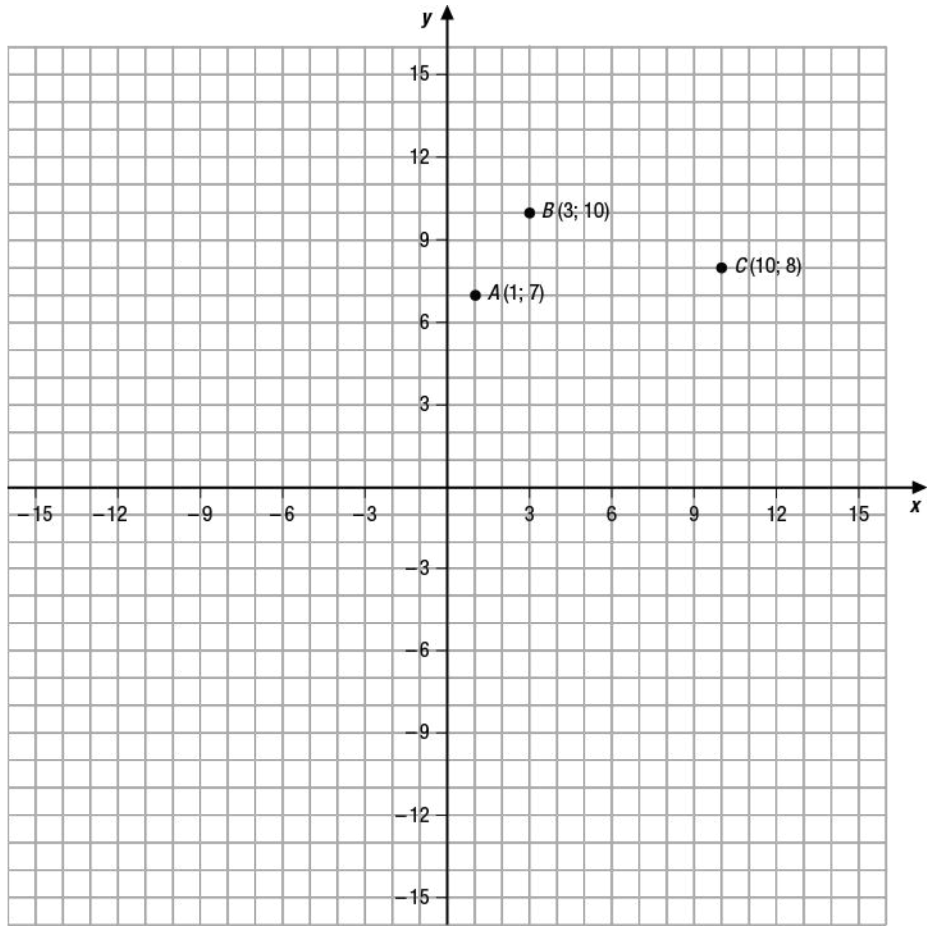
D. Les droites parallèles

Comment exprimer le parallélisme entre deux droites ou deux segments de droite ? À quelles conditions des droites ou des segments de droite sont-ils parallèles ? C'est ce que nous vous proposons d'explorer dans les activités suivantes.

J'explore

ACTIVITÉ • 2.24

Soit les points $A(1; 7)$, $B(3; 10)$ et $C(10; 8)$. Donnez les coordonnées d'un point $D(x;\ y)$ tel que le segment CD soit parallèle à AB.



ACTIVITÉ • 2.25

a) Trouvez une droite parallèle à $y = \frac{2}{3}x - 3$. Combien y en a-t-il ?

b) Trouvez la forme fonctionnelle de toutes les droites parallèles à $y = \frac{2}{3}x - 3$.

c) Trouvez une droite parallèle à $y = \frac{2}{3}x - 3$ contenant le point (6 ; 5).

La condition de parallélisme

Pour que deux droites soient parallèles, elles doivent avoir le **même taux de variation.**

Par exemple, la droite d'équation $6x - 3y + 5 = 0$ est parallèle à $y = 2x + 6$, car les deux droites ont le même taux de variation. Ce taux est égal à 2.

NOTES :

ACTIVITÉ • 2.26

Déterminez l'équation de la droite parallèle à $7x - 5y + 6 = 0$ qui passe par (1 ; 3).

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 2.27

Soit la droite D : $y = -3x + 4$. Trouvez l'équation des droites suivantes.

a) Deux droites parallèles à D

b) La droite qui contient le point $(2;\ 1)$ et qui est parallèle à D

ACTIVITÉ • 2.28

Soit la droite D : $4x + 5y - 15 = 0$. Trouvez l'équation des droites suivantes.

a) Deux droites parallèles à D

b) La droite qui contient le point $(2;\ 1)$ et qui est parallèle à D

ACTIVITÉ • 2.29

Soit la droite D : $\frac{x}{2}+\frac{y}{7}=1$. Trouvez l'équation des droites suivantes.

a) Deux droites parallèles à D

b) La droite qui contient le point $(2; 1)$ et qui est parallèle à D

Mes activités de récapitulation

R2.1

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) La fonction linéaire $y = 4x - 27$ passe par le point (5 ; 7).

b) La fonction linéaire $y = f(x)$ associée à la droite $2x - 3y + 7 = 0$ est croissante.

c) L'équation générale $2x - 3y - 1 = 0$ passe par le point $(2;\ 1)$.

R2.2

Pour les tableaux de valeurs ci-dessous, déterminez si la variable y varie linéairement par rapport à la variable x. Si c'est le cas, trouvez la formule qui exprime y en fonction de x.

a)

x	y
2	7
3	10
5	16
6	19
10	31

b)

x	y
2	3
3	3,5
5	4,5
7	5,5
8	6

c)

x	y
0,5	1,5
1	2,5
2	3,5
2,5	5,5
3	7

R2.3

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions linéaires ?

a) $f_1(x) = 3 + \dfrac{1}{4}x$ **b)** $f_2(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ **c)** $f_3(x) = 4$

d) $f_4(x) = \dfrac{4}{x} + 5$ **e)** $f_5(x) = \dfrac{3x^2 + 5x}{x}$ **f)** $f_6(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{x}$

g) $f_7(x) = (x-1)(x+2) - x^2$ **h)** $f_8(x) = -3x$

R2.4

Soit les points $A(1;\ 7)$ et $B(3;\ 10)$. Donnez les coordonnées de $C(x;\ y)$ telles que C soit un point sur la droite donnée par les points A et B.

R2.5

Trouvez l'équation de la droite passant par les points donnés.

a) $(-3;\ 2)$ et $(7;\ 1)$ **b)** $(6;\ -3)$ et $(-1\ ;\ 5)$

R2.6

Trouvez l'équation de la droite de pente m passant par le point P.

a) $P(8;\ 2)$ et $m = \frac{-1}{3}$ **b)** $P(2;\ -5)$ et $m = 4$

R2.7

Soit la droite de pente -5 passant par les points $P(-1;\ 4)$, $Q(a;\ 7)$ et $R(-2;\ b)$. Trouvez les valeurs de a et de b.

R2.8

Trouvez le signe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x - 2$ **b)** $h(x) = 3x - 4$ **c)** $g(x) = -4x + 5$

R2.9

Pour chaque droite, déterminez les caractéristiques facilement remarquables (pente et ordonnée à l'origine ou intersection avec les axes), puis tracez le graphique.

a) $y = \frac{-1}{2}x - \frac{3}{2}$ **b)** $y - 2x - 3 = 0$

c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ **d)** $3y - 2x = 9$

R2.10

En vidant une piscine à l'aide d'une pompe à débit constant, on note les données suivantes.

Temps de fonctionnement de la pompe (en heures)	4	6	7	10		11
Volume d'eau qui reste (en mètres cubes)	6	5		3	4	

a) Complétez le tableau.

b) Quel volume d'eau contenait la piscine au moment où elle a commencé à se vider ?

c) Écrivez une formule qui permettra de déterminer le volume d'eau qui reste dans la piscine en fonction du temps de fonctionnement de la pompe.

R2.11

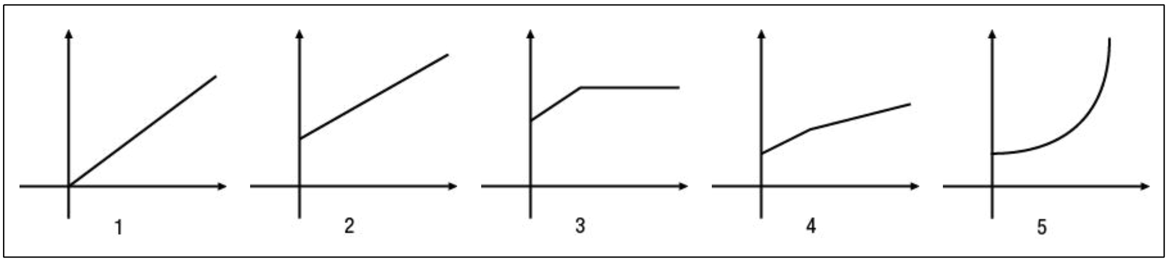
On met de l'eau à chauffer dans une bouilloire et on note la température de l'eau en fonction du temps. Jusqu'à ce que l'eau bouille, la formule donnant la température T de l'eau (en degrés Celsius) en fonction du temps t (en minutes) est $T = 19 + 9t$. Par la suite, la température demeure constante à 100 degrés.

a) Quelle était la température de l'eau au début de l'expérience ?

b) De combien de degrés par minute la température augmente-t-elle ?

c) Combien de temps doit-on attendre pour que l'eau bouille (sachant que l'eau bout à 100 °C) ?

d) Parmi les graphiques suivants, lequel ou lesquels représentent la température de l'eau en fonction du temps ? Justifiez votre réponse.



R2.12

Louise est vendeuse. Chaque semaine, son salaire représente un cinquième du montant de ses ventes.

a) Complétez le tableau.

Montant hebdomadaire des ventes de Louise ($)	Salaire hebdomadaire de Louise ($)
2500	
	620
	580
3000	
2750	

b) Si x représente le montant hebdomadaire des ventes de Louise, trouvez une formule qui représente la relation entre les ventes hebdomadaires de Louise et son salaire.

c) Représentez la relation trouvée en b) dans un plan cartésien ayant des échelles appropriées.

d) La semaine dernière, Louise a gagné plus de 420 $ et moins de 630 $. Que pouvez-vous dire au sujet de ses ventes de la semaine dernière ?

e) Étienne est vendeur lui aussi. Chaque semaine, il gagne un montant fixe de 220 $, plus le dixième de ses ventes. Complétez le tableau.

Montant hebdomadaire des ventes d'Étienne ($)	Salaire hebdomadaire d'Étienne ($)
2500	
	620
	580
3000	
2750	

f) La semaine dernière, Étienne a gagné plus de 430 $ et moins de 650 $. Que pouvez-vous dire au sujet de ses ventes de la semaine dernière ?

g) Comparez les structures de salaire de Louise et d'Étienne. Y en a-t-il une meilleure que l'autre ? Justifiez votre réponse.

R2.13

a) Trouvez un segment CD parallèle à AB et ayant la même longueur, pour les points $A(10\,;30)$, $B(80\,;50)$ et $C(80\,;20)$.

b) Soit $A(10\,;30)$, $B(80\,;50)$ et $C(150\,;30)$. Trouvez un segment CD parallèle à AB et ayant une longueur plus petite que le segment AB. Donnez-en trois autres. Combien de points D répondant à cette condition est-il possible de trouver ?

c) Soit $A(70\,;10)$, $B(100\,;30)$, $C(40\,;40)$ et $D(70\,;60)$. Dites, sans faire le graphique, si AB est parallèle à CD. Justifiez votre réponse.

d) Soit $A(70\,;10)$, $B(100\,;30)$, $C(40\,;40)$ et $D(100\,;80)$. Dites, sans faire le graphique, si AB est parallèle à CD. Justifiez votre réponse.

e) Soit $A(70\,;10)$, $B(100\,;30)$, $C(-50\,;-20)$ et $D(10\,;20)$. Dites, sans faire le graphique, si AB est parallèle à CD. Justifiez votre réponse.

f) Trouvez un segment CD parallèle à AB dont la longueur est plus petite que celle de AB pour les points $A(70\,;10)$, $B(100\,;30)$ et $C(-70\,;0)$. Quelles sont les coordonnées de D ? Est-ce que D est unique ?

g) Soit $A(30\,;10)$, $B(100\,;30)$, $C(40\,;20)$ et $D(70\,;y_D)$. Trouvez la coordonnée manquante du point D, sachant que AB est parallèle à CD. Justifiez votre réponse.

R2.14

Soit la droite D d'équation $y = -2x + 5$.

a) Déterminez si les points $A(1\,;4)$, $B\left(\frac{5}{2}\,;0\right)$ et $C\left(\frac{7}{4}\,;\frac{3}{2}\right)$ appartiennent à D. Justifiez votre réponse.

b) Trouvez les valeurs de a et de b telles que les points $E(3\,;a)$ et $F(b\,;1)$ appartiennent à D. Justifiez votre réponse.

R2.15

Pour chaque droite, déterminez les caractéristiques facilement remarquables (pente et ordonnée à l'origine ou intersection avec les axes), puis faites le graphique.

a) $6x - 2y + 4 = 0$ **b)** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

R2.16

Soit la droite D : $y = \frac{3}{2}x - 1$. Donnez l'équation de la droite parallèle à D qui passe par le point $(2\,;5)$.

R2.17

Trouvez la valeur de p sachant que la droite d'équation $3x - 4y = p$ traverse l'axe horizontal au point $(1\,;0)$.

R2.18

Une droite a une pente négative et une ordonnée à l'origine positive. Dans ce cas, dans quel quadrant n'a-t-elle pas de points (premier, deuxième, troisième, quatrième) ?

R2.19

Parmi les droites ci-dessous, indiquez celle qui est parallèle, mais non confondue, à la droite d'équation $4x + 3y = 12$.

a) $y = \frac{-4}{3}x + 4$ **b)** $\frac{4}{3}x + y = 12$

c) $4x - 3y = 12$ **d)** Aucune de ces réponses

R2.20

Vous êtes en vacances et vous voulez louer un vélo. L'entreprise A demande 4,50 $ par heure. L'entreprise B demande un montant fixe de 7 $, plus 1,75 $ par heure.

a) Déterminez, pour chaque entreprise, la règle de correspondance de la fonction qui décrit le coût en fonction de la durée de location.

b) Par analyse, déterminez pour quelles durées de location l'entreprise A est meilleur marché que l'entreprise B.

R2.21

Une compagnie débourse 900 $ pour produire 100 articles et 1125 $ pour en produire 250. Le coût en fonction du nombre d'articles produits est une fonction linéaire.

a) Déterminez l'équation qui représente le coût C en fonction du nombre q d'articles produits.

b) Calculez le coût pour une production de 150 articles.

c) Déterminez le nombre d'articles produits si le coût est de 1233 $.

d) Déterminez le coût fixe (coût qui ne dépend pas du nombre d'articles produits) de cette compagnie.

R2.22

Donnez l'équation d'une droite sachant que son ordonnée à l'origine est 3 et que son abscisse à l'origine est 4.

R2.23

Donnez l'équation de la droite parallèle à $\frac{1}{4}y - x + 8 = 0$ et passant par le point (1 ; 3).

CHAPITRE

3 LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET DE PROBLÈMES LINÉAIRES

Objectifs d'apprentissage

- Aborder les équations linéaires à partir des fonctions linéaires
- Comprendre les notions d'équation, de solution et d'ensemble solution
- Reconnaître les opérations que l'on peut effectuer sur une équation sans fausser l'ensemble solution
- Résoudre des problèmes (linéaires) en utilisant des équations
- Comprendre la notion de système d'équations
- Savoir résoudre un système d'équations linéaires grâce à différentes méthodes
- Comprendre et interpréter le fait qu'un système d'équations linéaires peut avoir une solution, une infinité de solutions, ou n'avoir aucune solution

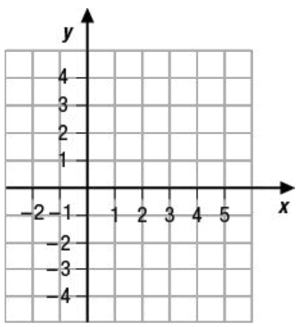
A. Les équations linéaires

Dans le chapitre précédent, vous avez travaillé avec des fonctions linéaires. Pour différentes valeurs d'abscisse, vous avez pu trouver, à l'aide de la règle de correspondance, la valeur d'ordonnée correspondante. On a parfois besoin de faire l'inverse, c'est-à-dire de trouver la valeur de l'abscisse (x), connaissant la valeur de l'ordonnée (y). Cette situation (que nous reprenons dans l'activité 3.1) est un exemple très simplifié de la **résolution d'équations linéaires.**

J'explore

ACTIVITÉ • 3.1

Considérez la fonction $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$ et donnez sa représentation graphique. Trouvez une valeur de x telle que $f(x) = \frac{5}{2}$. Trouvez une solution graphiquement et algébriquement. Y a-t-il d'autres valeurs de x qui vérifient cette condition ?



La notion d'équation

Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques. Cette égalité contient une ou plusieurs variables et, naturellement, le symbole =.

La variable ou les variables peuvent être élevées à la puissance un ou à d'autres puissances. Quand elles sont élevées à la puissance un, on les appelle des **équations linéaires.**

Dans ce chapitre, nous étudions la résolution d'**équations linéaires à une variable.** Résoudre une équation consiste à **trouver les valeurs de la variable qui rendent l'égalité vraie,** comme dans l'activité 3.1.

Une fois qu'on a résolu une équation, on dit que les valeurs de la variable qui satisfont l'équation constituent l'**ensemble solution** de l'équation.

Nous verrons qu'une équation peut avoir une solution unique, plus d'une solution, une infinité de solutions, ou même n'avoir aucune solution.

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.2

Choisissez la ou les bonnes réponses parmi les options suivantes.

L'équation $3x+2=4-5x$ ______________________.

a) n'a pas de solution

b) admet pour solution $x=1$

c) admet pour solutions $x=1$ et $x=0{,}25$

d) admet pour solution $x=0{,}25$

e) admet pour solution $x=\frac{1}{4}$

Comment fait-on pour trouver des solutions d'équations ? Voici des éléments de réponse.

Quelques règles de base de la résolution d'équations

Les opérations à effectuer dans la résolution d'équations ne sont pas capricieuses, elles sont le résultat de l'application de règles qui visent à **isoler la variable tout en s'assurant de ne pas fausser la solution** :

1. **Si on a une égalité, on peut additionner ou soustraire la même valeur des deux côtés.** Autrement dit, si $a=b$, alors $a \pm c = b \pm c$.

   Par exemple, pour isoler x dans l'équation $x-\frac{3}{2}=2$, on additionne $\frac{3}{2}$ des deux côtés, de sorte que :

   $x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=2+\frac{3}{2}$, d'où $x=2+\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $x=\frac{7}{2}$

2. **Si on a une égalité, on peut multiplier ou diviser les deux côtés par la même valeur non nulle.** Autrement dit, si $a=b$, alors $a \cdot c = b \cdot c$, et si $a=b$, alors $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, pour $c \neq 0$.

   Par exemple, pour isoler x dans l'équation $5x=4$, on divise chaque membre de l'équation par 5, de sorte que :

   $\frac{5x}{5}=\frac{4}{5}$, d'où $x=\frac{4}{5}$

3. **Deux applications successives de la règle 2 permettent de déduire la règle connue sous le nom « produit croisé ».** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $ad = cb$.

   Par exemple, si on a :

   $\frac{2}{5} = \frac{3}{x}$, donc $2x = 3 \cdot 5$

   puis, en divisant le tout par 2, on obtient :

   $x = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.3

Plusieurs équations se résolvent par l'application successive d'une ou de plusieurs des règles de l'encadré précédent. Dans les équations plus complexes, il est nécessaire d'effectuer d'autres opérations avant d'appliquer ces règles.

a) $\frac{x}{4} + 3 = -2$. On soustrait 3 des deux côtés d'abord afin d'isoler le terme contenant la variable. On multiplie ensuite les deux côtés par 4. Faites-le et validez votre solution dans l'équation initiale.

b) $2x - 4 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$. On soustrait $\frac{1}{3}x$ de chaque côté afin de regrouper les termes contenant la variable x du même côté. On additionne ensuite 4 des deux côtés. Finalement, on multiplie chaque côté par $\frac{3}{5}$. Faites-le et validez votre solution dans l'équation initiale.

c) $\frac{5}{4}\left(x + \frac{1}{5}\right) + 4 = \frac{1}{2}$. On soustrait 4 de chaque côté, on multiplie les deux côtés par $\frac{4}{5}$, puis on soustrait $\frac{1}{5}$ de chaque côté. Faites-le et validez votre solution dans l'équation initiale.

ACTIVITÉ • 3.4

Résolvez l'équation suivante et indiquez les règles que vous utilisez : $\frac{x+1}{4}=\frac{2x-1}{3}$. Vous pouvez valider vous-même vos résultats, faites-le !

L'ensemble solution

Une équation peut avoir une solution unique, plus d'une solution, une infinité de solutions, ou même n'avoir aucune solution.

Exemple d'équation n'ayant qu'une solution : $\frac{x+1}{4}=\frac{2x-1}{3}$

La solution est $x=\frac{7}{5}$.

Exemple d'équation n'ayant aucune solution : $x+1=x+2$

Jamais on ne trouvera une valeur de x telle que x additionné à 1 sera égal à x additionné à 2 !

Exemple d'équation ayant une infinité de solutions : $\frac{4x+4}{4}=x+1$

Les équations pour lesquelles toutes les valeurs de la variable sont une solution reçoivent le nom d'**identités.** Dans ce cas, on dit que les membres à gauche et à droite du signe d'égalité sont des **expressions équivalentes.**

Pour les équations linéaires, les possibilités sont : une solution, une infinité de solutions (équivalence d'expressions) ou aucune solution. À la fin du chapitre, vous serez en mesure de justifier cette affirmation.

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.5

Résolvez chacune des équations suivantes. Si vous obtenez une solution, vous serez en mesure de valider vous-même votre réponse dans l'équation de départ. N'hésitez pas, faites-le !

a) $-6(2x-7)=72x$

b) $9+3x=\dfrac{12x-23}{4}$

c) $14x+7=7$

d) $\dfrac{2x+3}{3}=x-\dfrac{3}{4}$

e) $8x+8=4(2x+2)$

ACTIVITÉ • 3.6

Pierre se dit : « J'aimerais acheter ces quatre bandes dessinées, au même prix chacune, mais il me manque 15 $. Mais si j'en achète seulement trois, il me restera 23 $. »

a) Si on désigne par x le prix d'une bande dessinée, trouvez, parmi les équations ci-dessous, celle qui représente le problème.

i) $4x-3x=23-15$ **ii)** $4x+15=3x-23$

iii) $4x+15=3x+23$ **iv)** $4x-15=3x+23$

b) Quel est le prix d'une bande dessinée ?

La résolution de problèmes à l'aide d'équations

L'activité 3.6 est une version (très simplifiée) d'un type de travail que l'on fait en mathématique. Un phénomène, qui n'est pas nécessairement un phénomène mathématique, peut être représenté par un modèle mathématique.

Voici une procédure souvent utilisée en mathématique pour résoudre des problèmes (notez qu'il en existe d'autres).

1. **Identifier la variable ou les variables en jeu dans le problème :** il s'agit de choisir la variable ou les variables du problème.
2. **Déduire la relation ou les relations et ensuite modéliser le problème :** il s'agit de relier la variable ou les variables en jeu par une ou plusieurs équations.
3. **Travailler le modèle :** à cette étape, il peut s'agir de différentes actions, telles que résoudre une ou plusieurs équations, trouver une ou des caractéristiques d'une fonction, faire des calculs avec une règle de correspondance, etc.
4. **Interpréter les résultats :** il faut analyser les résultats obtenus dans le contexte de la question posée. Il peut arriver que des résultats n'aient pas de sens dans le contexte. De plus, on peut devoir calculer d'autres résultats avec la valeur ou les valeurs déjà trouvées.

Dans ce chapitre, le modèle mathématique est une équation linéaire. Il existe des modèles mathématiques très complexes qui ne seront pas abordés dans ce cours.

Exemple : Répartissez 25 625 $ parmi quatre personnes de telle sorte que la première reçoive la moitié de ce que la deuxième reçoit, que la troisième reçoive le quart de ce que la première reçoit et que la quatrième reçoive les deux tiers de ce que la troisième reçoit.

Pour représenter un problème par une équation linéaire, il faut d'abord identifier la variable à utiliser. Il y a plusieurs façons de le faire. Ici, on peut choisir comme variable le montant que reçoit l'une des personnes. Prenons comme variable x le montant que la deuxième personne reçoit.

On déduit ensuite les relations afin de modéliser le problème. Ainsi, la première personne reçoit $\frac{1}{2}x$, la deuxième reçoit x, la troisième, $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x$, et la quatrième, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x$. De là, on peut représenter la situation par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x = 25\,625$$

On travaille ensuite le modèle mathématique.

On effectue les multiplications :

$$\frac{1}{2}x + x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x = 25\,625$$

puis les additions :

$$\frac{41}{24}x = 25\,625$$

On isole x :

$x = 15\,000$

Il reste à interpréter le résultat obtenu.

La première personne reçoit 7500 $, la deuxième, 15 000 $, la troisième, 1875 $, et la quatrième, 1250 $.

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.7

Résolvez les problèmes suivants.

a) Les deux cinquièmes d'un certain nombre, plus 5, sont égaux à la moitié de ce nombre. Trouvez ce nombre.

b) Les deux cinquièmes d'un certain nombre plus 5 sont égaux à la moitié de ce nombre. Trouvez ce nombre.

ACTIVITÉ • 3.8

Résolvez les problèmes suivants.

a) Une personne dépense un tiers de son argent de poche, puis $\frac{2}{5}$ de ce qui lui reste. Si elle a encore 60 $, combien d'argent avait-elle au départ ?

b) Pascal a résolu $2n+3$ équations, Jason en a résolu $4n-5$ et Guillaume, $3n+4$. Ensemble, ils ont résolu 47 équations. Combien d'équations chacun a-t-il résolues ?

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 3.9

Soit la fonction $f(x)=\frac{2}{3}(x+1)+3$.

a) Trouvez la valeur de x telle que $f(x)=1$.

b) Trouvez la valeur de x telle que $f(x)=\frac{-1}{3}$.

ACTIVITÉ • 3.10

Trouvez l'ensemble solution des équations suivantes. Si la solution est unique, vérifiez-la.

a) $8x-5=3x+2$

b) $3(2x-5)=-8(x+7)$

c) $\frac{3x}{5}+2=\frac{-4x}{7}$

d) $\frac{1}{2}x-4=3x+\frac{5}{4}$

e) $\frac{2x}{5}+5=-12$

f) $\frac{x+4}{2}=\frac{\frac{3}{2}x+6}{3}$

g) $\dfrac{3x+2}{5}=0$

h) $8(x-2)+8x+28=18(x+1)$

i) $\dfrac{x-4}{2}-3=x$

ACTIVITÉ • 3.11

Pour chaque situation, posez une équation représentant le problème, résolvez-la et interprétez la solution. Vérifiez d'abord si les réponses obtenues sont plausibles ou acceptables selon le contexte de la situation, puis validez vous-même la solution.

a) Un automobiliste parcourt 748 km en trois étapes. Dans la deuxième étape, il parcourt 124 km de plus que dans la première et, dans la troisième, il parcourt 100 km de moins que dans la deuxième. Combien de kilomètres parcourt-il à chacune des étapes ?

b) Une nouvelle avenue sera bientôt inaugurée. Un tiers de sa longueur est achevé, un quart est en train d'être asphalté et 1200 m seront asphaltés dans une étape subséquente. Quelle est la longueur totale de l'avenue ?

c) La somme de trois nombres pairs consécutifs est de 870. Quels sont ces nombres ?

d) La somme de quatre nombres consécutifs est 402. Donnez une équation représentant la situation. Est-ce la seule équation possible ? Quels sont ces nombres ?

e) La somme de deux nombres impairs consécutifs est 736. Quels sont ces nombres ?

ACTIVITÉ • 3.12

Inventez les équations suivantes :

a) une équation linéaire sans solution ;

b) une équation linéaire qui est une identité (c'est-à-dire pour laquelle toutes les valeurs de la variable sont une solution) ; elle ne doit pas être évidente.

B. Les systèmes d'équations

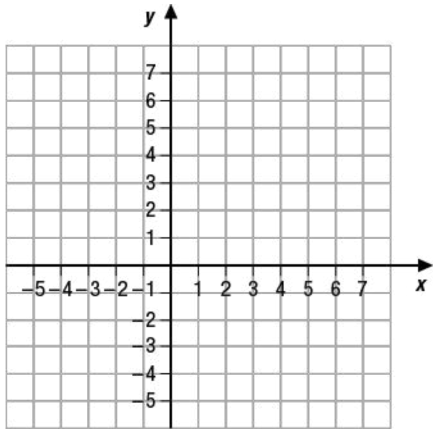
Dans ce qui suit, nous allons trouver des intersections de droites, graphiquement et algébriquement.

J'explore

ACTIVITÉ • 3.13

Déterminez, si possible, le point $(a\,;\,b)$ où la droite L_1 d'équation $y = x + 1$ coupe la droite L_2 d'équation $y = 2x + 2$ (on dit que $(a\,;\,b)$ est le **point d'intersection** des deux droites).

Faites une démarche algébrique et une démarche graphique.



Les systèmes linéaires

Un système est un ensemble d'équations que l'on résout de façon simultanée. Dans l'activité 3.13, on doit trouver des valeurs de x et de y qui satisfont simultanément les deux équations, c'est-à-dire des points $(a\,;\,b)$ qui appartiennent aux deux droites. Chaque équation d'une droite est une équation linéaire à deux variables.

Chaque fois qu'on cherche une intersection, on doit résoudre un système d'équations. Chaque fois qu'on doit satisfaire plusieurs conditions simultanément, on doit aussi résoudre un système d'équations. Résoudre un système de deux équations linéaires à deux variables correspond à la recherche d'un point d'intersection possible dans une représentation graphique.

Il existe différentes méthodes algébriques de résolution d'un système linéaire de deux équations à deux variables. Voici la principale stratégie :

1. Réduire le système à une équation à une variable.
2. Analyser cette équation : a-t-elle une solution, s'agit-il d'une équation sans solution, ou s'agit-il d'une identité ?
3. S'il s'agit d'une équation qui a une solution, on trouve cette solution puis on la substitue à une variable afin de trouver la valeur de l'autre variable.

Nous verrons plus loin les cas où l'équation obtenue au point 1 n'a pas de solution ou est une identité.

Nous allons travailler avec deux méthodes : la méthode de comparaison et la méthode de substitution.

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.14

La méthode de comparaison

Normalement, on choisit une variable que l'on isole dans les deux équations, puis on pose leur égalité, ce qui permet d'éliminer temporairement cette variable. Faites-le pour les équations du système suivant et validez la solution.

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + y = -3 \end{cases}$$

ACTIVITÉ • 3.15

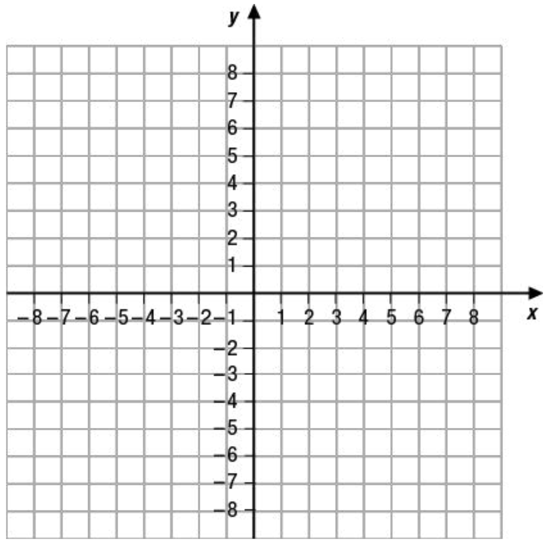
La méthode de substitution

Lorsqu'une des variables est déjà isolée (comme ci-dessous), on la remplace par son expression dans l'autre équation, ce qui permet de l'éliminer temporairement. Pour le système suivant, résolvez l'équation obtenue et validez la solution dans les équations du système.

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + y = -3 \end{cases}$$

ACTIVITÉ • 3.16

Représentez le système des activités 3.14 et 3.15 par un graphique.

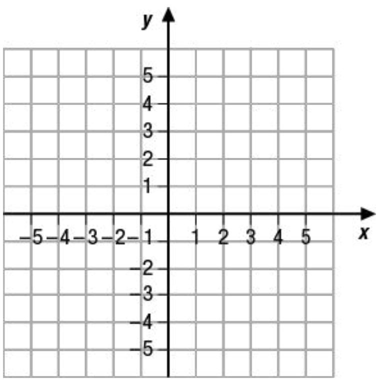


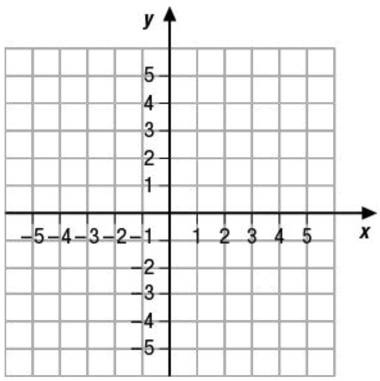
ACTIVITÉ • 3.17

Résolvez les systèmes d'équations avec la méthode de votre choix. Vérifiez votre réponse dans les équations et avec un graphique.

a) $\begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = \dfrac{1}{2}x - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$





ACTIVITÉ • 3.18

Résolvez la situation suivante à l'aide d'un système d'équations linéaires et interprétez la solution.

Dans un musée, un billet pour adulte coûte 16 $ et un billet pour enfant coûte 11 $. Dans la caisse du dimanche, on compte 5857 $ et on sait que 402 billets ont été vendus. Combien d'enfants ont visité le musée ?

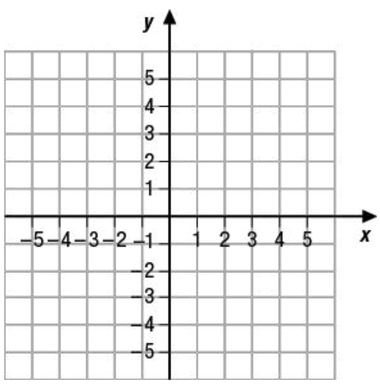
Je m'entraîne

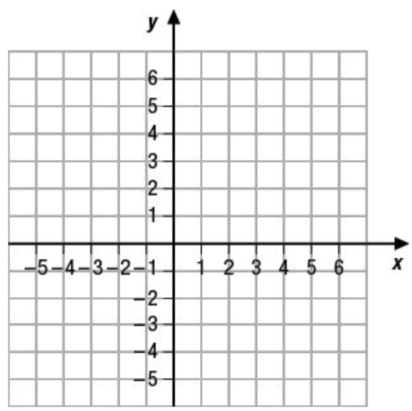
ACTIVITÉ • 3.19

Résolvez les systèmes d'équations ci-après à l'aide de la méthode de votre choix. Vérifiez votre réponse dans les équations et avec un graphique.

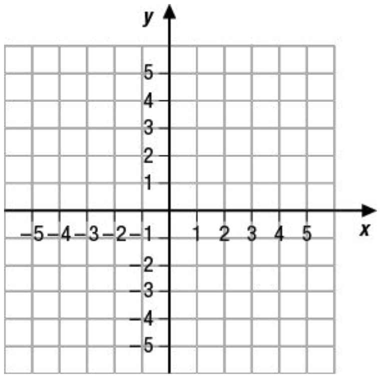
a) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 5 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$





c) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = -1 \end{cases}$



ACTIVITÉ • 3.20

Résolvez les situations suivantes à l'aide d'un système d'équations linéaires, puis interprétez la solution.

a) Les billets pour un opéra-bénéfice coûtent 20 $ pour les personnes à la retraite et 30 $ pour le reste des adultes. Les enfants ne sont pas admis. On a amassé 325 000 $. Sachant que les $\dfrac{7}{24}$ des billets vendus ont été achetés par des personnes à la retraite, combien de personnes à la retraite ont assisté à l'opéra-bénéfice ?

b) Une personne a payé 300 000 $ pour une maison et son terrain. Combien a-t-elle payé pour chacun si la valeur du terrain est égale aux deux tiers de la valeur de la maison ?

c) Un père a le double de l'âge de son fils. Le double de la somme de leurs âges est 120 ans. Quel âge ont le père et le fils ?

d) Dans un local où on range des tricycles et des bicyclettes, il y a 60 roues en tout. On sait qu'il y a cinq bicyclettes de plus que de tricycles. Combien de tricycles et de bicyclettes y a-t-il ?

C. Différentes situations concernant les systèmes linéaires de deux équations à deux variables

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'intersection de deux droites est donnée par un point de coordonnées $(a ; b)$. Selon vous, deux droites quelconques dans le plan ont-elles toujours un point commun $(a ; b)$, c'est-à-dire une intersection ? Sinon, quelles sont les autres possibilités ?

J'explore

ACTIVITÉ • 3.21

Faites une esquisse pour illustrer les réponses aux questions posées dans la situation ci-dessus.

ACTIVITÉ • 3.22

Soit un système d'équations linéaires dont une des équations est $y = 3x + 1$. Déterminez une autre équation qui permet d'avoir chacun des types de systèmes suivants.

a) Deux droites parallèles distinctes. Écrivez le système et résolvez-le. (Évidemment, vous ne trouverez pas de point d'intersection, mais une contradiction.)

b) Deux droites parallèles confondues (écrivez la deuxième équation sous la forme réduite ou générale). Écrivez le système et résolvez-le. (Vous trouverez une identité, aussi appelée « tautologie ».)

c) Deux droites sécantes. Écrivez le système et résolvez-le. (Évidemment, il y a une infinité de droites possibles.)

ACTIVITÉ • 3.23

Soit la droite $D_1 : y = a_1x + b_1$ et la droite $D_2 : y = a_2x + b_2$. Déterminez des conditions d'égalité et d'inégalité de a_1, b_1, a_2 et b_2, de sorte que :

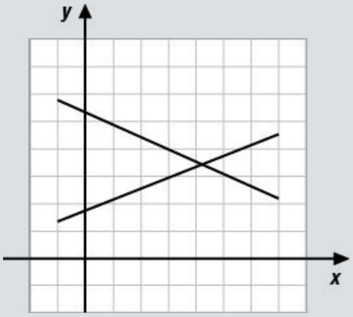
a) D_1 et D_2 soient des droites parallèles distinctes ;

b) D_1 et D_2 soient des droites sécantes ;

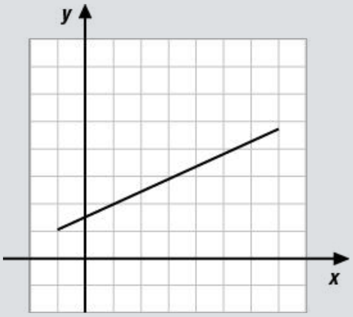
c) D_1 et D_2 soient des droites parallèles confondues.

Les conditions pour avoir une intersection, n'avoir aucune intersection ou avoir une infinité d'intersections

Pour que deux droites soient sécantes, il suffit qu'elles aient des pentes différentes. Ce cas correspond à un système linéaire ayant une seule solution (une valeur pour chaque variable).

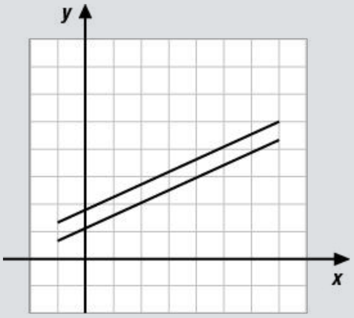


Pour que deux droites soient parallèles confondues, la pente et l'ordonnée à l'origine de chaque droite doivent être égales. Ce cas correspond à un système linéaire ayant une infinité de solutions.



Si, lors de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux variables, vous trouvez une tautologie, c'est attribuable au fait que ces équations représentent des droites parallèles confondues. Révisez vos calculs ou écrivez les deux équations sous la forme fonctionnelle. Vous pouvez aussi vérifier la réponse avec un graphique.

Pour que deux droites soient parallèles distinctes, elles doivent avoir la même pente, mais des ordonnées à l'origine différentes. Ce cas correspond à un système linéaire sans solution.



Si, lors de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux variables, vous trouvez une contradiction, c'est attribuable au fait que ces équations représentent des droites parallèles distinctes. Révisez vos calculs ou écrivez les deux équations sous la forme fonctionnelle. Vous pouvez aussi vérifier la réponse avec un graphique.

NOTES :

ACTIVITÉ • 3.24

Résolvez les systèmes linéaires suivants et déterminez le type de système (solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution). Vérifiez votre solution en remplaçant les variables par leurs valeurs dans les équations.

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=1+3y \\ 2x-6y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-6y=2 \\ -3x+\dfrac{18}{5}y=4 \end{cases}$

ACTIVITÉ • 3.25

La méthode de réduction

Soit le système linéaire $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x+4y=17 \end{cases}$. Considérez la méthode de résolution suivante :

1. On multiplie la première équation par 3 et la deuxième équation par 2, de sorte que le système devient : $\begin{cases} 6x-15y=-12 \\ 6x+8y=34 \end{cases}$

2. On soustrait la deuxième équation de la première, de sorte que l'on obtient l'équation $-23y=-46$ et, par conséquent $y=2$.

3. On remplace y par 2 dans l'une ou l'autre des deux équations du système (par exemple dans la première : $2x-10=-4$) et on obtient la valeur de x, soit $x=3$.

Cette méthode est-elle correcte ? Pourquoi ?

ACTIVITÉ • 3.26

En quelques phrases, décrivez les situations où il est préférable d'utiliser la méthode de comparaison, la méthode de substitution ou la méthode de réduction.

ACTIVITÉ • 3.27

Déterminez si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par des arguments mathématiques (un calcul ou une notion théorique).

Le système $\begin{cases} -2x+5y=3 \\ 4x-10y=2 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 3.28

Déterminez si les droites ci-dessous ont un point en commun. Si c'est le cas, trouvez-le. Pour vérifier votre réponse, remplacez les variables par leurs valeurs dans le système de départ. Utilisez la méthode de votre choix.

a) $\begin{cases} 4x-3y=-10 \\ 6x+2y=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=5 \\ -2x+6y+10=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

ACTIVITÉ • 3.29

Est-il vrai que le point de coordonnées $(1{,}5\,;\,2)$ est la seule solution du système

$\begin{cases} -2x + 5y = 7 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$?

ACTIVITÉ • 3.30

Soit le système $\begin{cases} y = \dfrac{-2}{3}x + 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) $\left(5;\, \dfrac{2}{3}\right)$ est une solution du système.

b) $x = 7$ et $y = \frac{-2}{3}$ est une solution du système.

c) $(3\,;\,1)$ est une solution du système.

d) Le système a deux solutions.

e) Le système a une infinité de solutions.

Mes activités de récapitulation

R3.1

Pour chacune des situations suivantes, posez une équation qui représente le problème et trouvez une solution à l'aide des règles de la résolution d'équations vues dans le cours.

a) Les deux cinquièmes d'un nombre, plus 5, sont égaux à la moitié de ce nombre. Quel est le nombre ?

b) On pense à un nombre. On y additionne 5, on multiplie le résultat par 3, puis on divise le nouveau résultat par 10. On obtient alors 6. Quel est le nombre ?

c) La somme de trois nombres consécutifs est 126. Quels sont ces nombres ?

d) La somme de trois nombres pairs consécutifs est 102. Quels sont ces nombres ?

e) Un terrain rectangulaire a un périmètre de 480 m. Un des côtés mesure 60 % de la longueur de l'autre. Trouvez les longueurs des côtés.

R3.2

Trouvez la valeur de p sachant que $x = 1$ est la solution de l'équation $3x + p = 5x$.

R3.3

Trouvez, si possible, la valeur du point d'intersection $(a\,;\,b)$ des droites ci-dessous. Vérifiez votre réponse graphiquement et classifiez le système (droites sécantes, droites parallèles distinctes ou droites parallèles confondues).

a) $\mathrm{L}_1\colon y = x + 1$ et $\mathrm{L}_2\colon \frac{1}{3}y - x + 6 = 0$

b) $\mathrm{L}_1\colon y = 4x + 1$ et $\mathrm{L}_2\colon \frac{1}{4}y - x + 8 = 0$

c) $\mathrm{L}_1\colon y = 3x + 1$ et $\mathrm{L}_2\colon \frac{1}{3}y - x - \frac{1}{3} = 0$

R3.4

Résolvez les systèmes d'équations ci-dessous. Dites s'il s'agit de droites sécantes, de droites parallèles distinctes ou de droites parallèles confondues.

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 3y \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 6y = 2 \\ -3x + \frac{18}{5}y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -6x + 9y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3y = -10 \\ 6x + 2y = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

R3.5

Soit les droites $\mathrm{L}_1\colon 2y - 6x + 5 = 0$ et $\mathrm{L}_2\colon y = mx + 3$.

Trouvez toutes les valeurs de m pour lesquelles :

a) L_1 et L_2 n'ont pas d'intersection ;

b) L_1 et L_2 ont un point d'intersection.

R3.6

Résolvez le système $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$. Vérifiez la solution.

R3.7

Inventez un système de deux équations linéaires de telle sorte que le point de coordonnées $(1\,;-1)$ soit l'unique solution.

R3.8

a) Donnez les équations de deux droites L_1 et L_2 telles qu'elles ont un point d'intersection.

b) Donnez les équations de deux droites L_1 et L_2 telles qu'elles n'ont aucun point d'intersection.

c) Donnez les équations de deux droites L_1 et L_2 telles qu'elles ont une infinité de points d'intersection. Attention : l'égalité des deux droites ne doit pas être évidente.

d) Trouvez deux droites L_1 et L_2 qui se coupent au point $(1; 3)$.

R3.9

Donnez les équations de deux droites différentes qui se coupent au point $(2; 3)$.

R3.10

a) Inventez une identité algébrique qui ne soit pas évidente.

b) Créez une équation qui n'a pas de solution.

R3.11

a) Trouvez les valeurs de c pour lesquelles les droites $L_1 : y = \frac{4}{3}x + 2$ et $L_2 : y - cx = 3$ n'ont pas d'intersection.

b) Remplacez c par 1 et trouvez le point d'intersection des droites L_1 et L_2.

R3.12

Inventez un système d'équations ayant une infinité de solutions et un autre qui n'en a aucune.

R3.13

Soit un système d'équations linéaires dont une des droites est définie par l'équation $\frac{1}{3}y - x - \frac{1}{3} = 0$. Déterminez une autre équation qui fait en sorte que le système soit du type :

a) deux droites parallèles distinctes ;

b) deux droites parallèles confondues ;

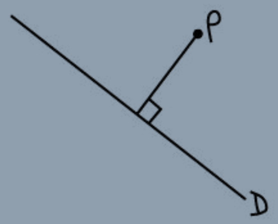
c) deux droites sécantes.

R3.14

Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles le système $\begin{cases} kx + y = 5 \\ 4x + ky = 10 \end{cases}$ admet une seule solution ?

CHAPITRE

4 LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE



Objectifs d'apprentissage

- Savoir déterminer l'équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée
- Savoir trouver la distance entre deux points et la distance d'un point à une droite
- Savoir modéliser des problèmes mettant en jeu les notions de position relative de deux droites, de perpendicularité, de parallélisme, de distance entre deux points et de distance d'un point à une droite
- Savoir trouver les coordonnées d'un point de partage d'un segment donné

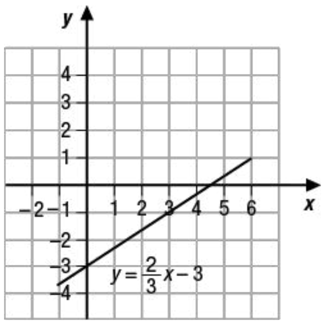
A. Les droites perpendiculaires

Au chapitre 2, vous avez appris à trouver l'équation d'une droite parallèle à une autre et passant par un point donné. Comment faire maintenant pour trouver l'équation d'une droite perpendiculaire à une droite donnée ?

J'explore

ACTIVITÉ • 4.1

Soit la droite $y = \frac{2}{3}x - 3$, dont le graphique est donné ci-dessous. À l'aide d'une équerre, tracez une droite perpendiculaire à cette droite et ayant 4 pour ordonnée à l'origine. À l'aide du quadrillage, déduisez la valeur de la pente de cette perpendiculaire.

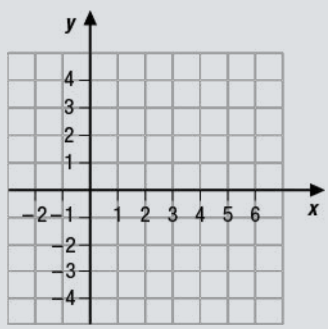


La pente de la droite perpendiculaire

Si on observe un des triangles rectangles représentant le taux de variation de la première droite, on peut déduire qu'en lui faisant subir une rotation de 90°, on obtient un triangle qui représente le taux de variation de la droite perpendiculaire.

On voit aussi que si la pente d'une droite est positive, alors une droite qui lui est perpendiculaire aura une pente négative (si l'une est croissante, alors l'autre est décroissante).

On trouve donc le nouveau taux de variation en changeant le signe et en considérant que ce qui était la variation des y devient la variation des x et vice-versa.



Si une droite a une pente égale au nombre a, alors la pente d'une droite perpendiculaire est égale au nombre $-\frac{1}{a}$. Autrement dit, il suffit de prendre «l'opposé de l'inverse multiplicatif».

NOTES :

ACTIVITÉ • 4.2

Remplissez le tableau. Pour chaque droite D dont on connaît la pente, déterminez la pente d'une droite perpendiculaire à D.

Pente d'une droite D	5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	a	$\frac{1}{a}$	$-\frac{p}{q}$
Pente d'une perpendiculaire à D						

ACTIVITÉ • 4.3

Déterminez l'équation de la droite perpendiculaire à $7x-5y+6=0$ et qui passe par $(1;\,3)$.

ACTIVITÉ • 4.4

Déterminez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite d'équation $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$ et qui passe par $(5;\,4)$.

Les droites horizontales et verticales

Une droite horizontale à « la hauteur » de -4 contient tous les points dont la coordonnée y est égale à -4. L'équation de cette droite est $y = -4$.

De façon générale, l'équation de la droite horizontale à la hauteur « k » est $y = k$.

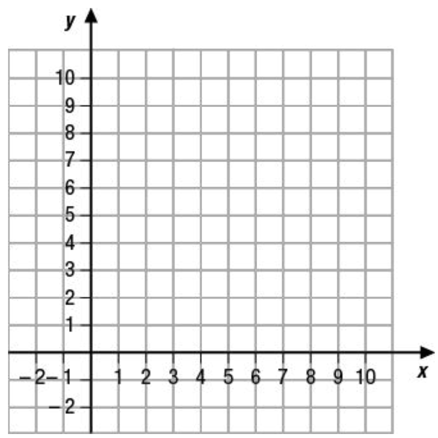
Une droite verticale n'est pas le graphique d'une fonction, mais on peut quand même la représenter de façon algébrique. Imaginez la droite verticale passant par tous les points dont la coordonnée x est égale à 3. L'équation qui la décrit est $x = 3$.

De façon générale, l'équation décrivant une droite verticale passant par $(h\ ;\ 0)$ est $x = h$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 4.5

Donnez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite d'équation $y = 4$ passant par le point $(7;\ 8)$. Faites le graphique des deux droites et du point.



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 4.6

Donnez l'équation de la droite perpendiculaire à la droite d'équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$ et passant par le point $(4;\ 3)$.

ACTIVITÉ • 4.7

Soit la droite D : $y = -3x + 4$. Trouvez les équations des droites demandées.

a) Deux droites distinctes, toutes les deux perpendiculaires à D

b) La droite qui contient le point (1 ; 3) et qui est perpendiculaire à D

ACTIVITÉ • 4.8

Soit la droite D : $4x + 5y - 15 = 0$. Trouvez les équations des droites demandées.

a) Deux droites distinctes, toutes les deux perpendiculaires à D

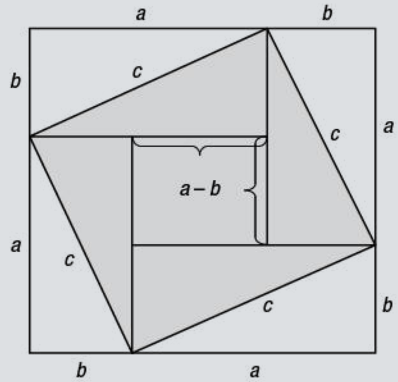
b) La droite qui contient le point $(1; 3)$ et qui est perpendiculaire à D

B. La distance entre deux points

Vous souvenez-vous du théorème de Pythagore ? Nous allons l'utiliser pour trouver la distance entre deux points.

Rappel : Le théorème de Pythagore

En utilisant les notions d'aire d'un carré et d'un triangle, nous allons justifier le théorème de Pythagore selon lequel, pour un triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés (appelés « cathètes ») a et b, on a la relation $c^2 = a^2 + b^2$.



Justification : L'aire du carré de côté c est, d'une part, égale à c^2 et, d'autre part, égale à la somme des aires de quatre triangles égaux d'aire $\frac{ab}{2}$ et de l'aire du carré de côté $(a - b)$ (voir la figure ci-contre).

Ainsi : $c^2 = (a - b)(a - b) + 4\frac{ab}{2}$, d'où

$c^2 = a^2 - ab - ba + b^2 + 2ab$, et alors $c^2 = a^2 + b^2$, ce que nous voulions démontrer.

Notez que, de la relation $c^2 = a^2 + b^2$, on déduit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ en prenant la racine carrée à l'égalité (on ne considère que la valeur positive pour c).

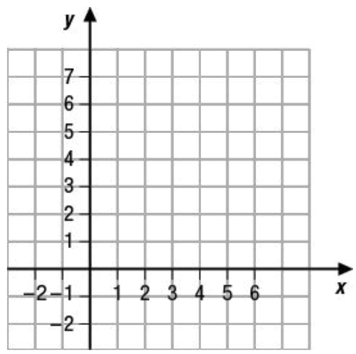
NOTES :

J'explore

ACTIVITÉ • 4.9

Application du théorème de Pythagore : la distance entre deux points

Dans le plan cartésien, placez les points $(2;\ 1)$ et $(6;\ 7)$, puis tracez un triangle rectangle convenable afin de calculer la distance entre ces points à l'aide du théorème de Pythagore.



La distance entre deux points

On peut calculer la distance entre les points $P(x_1\,;\ y_1)$ et $Q(x_2\,;\ y_2)$ en utilisant la formule :

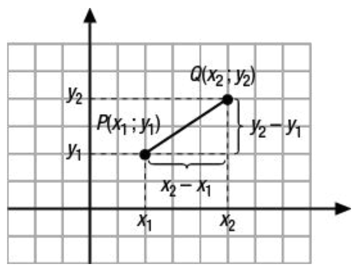
$$d(P;\ Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Il est important de noter que la permutation de x_1 et de x_2 ainsi que de y_1 et de y_2 donne la même valeur de distance (ce qui est absolument logique, la distance de P à Q devant nécessairement être égale à celle de Q à P).

NOTES :

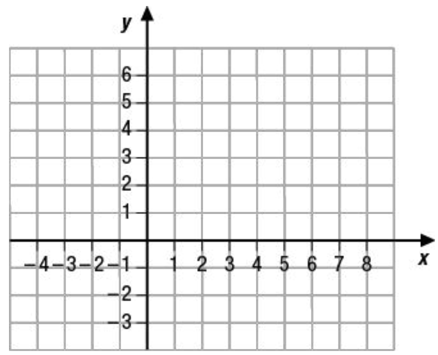
ACTIVITÉ • 4.10

Justifiez la formule de l'encadré précédent en vous servant du graphique ci-contre.

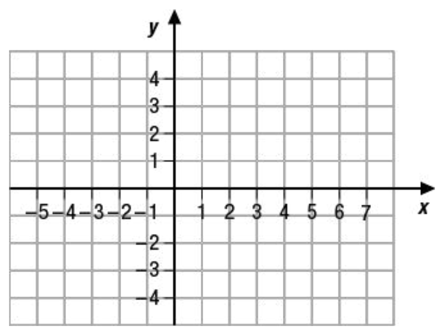


ACTIVITÉ • 4.11

a) Trouvez la distance entre les points $(1;\,3)$ et $(7;\,2)$.



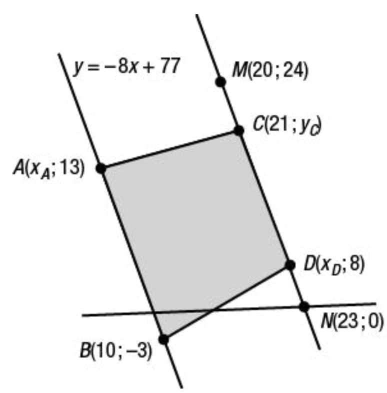
b) Trouvez la distance entre les points $(-3;\,2)$ et $(5;\,-1)$.



ACTIVITÉ • 4.12

Le schéma ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) représente un terrain qui semble avoir la forme d'un trapèze. Trouvez les données manquantes et répondez, sans vous fier aux mesures ou au « bon œil », aux deux questions suivantes.

Les données sont la droite d'équation $y=-8x+77$, le point $A(x_A\,;13)$, dont vous ne connaissez pas l'abscisse, le point $B(10;\,-3)$ (A et B appartenant tous les deux à la droite mentionnée), et les points $M(20;\,24)$, $N(23;\,0)$, $C(21;\,y_C)$ et $D(x_D\,;8)$, qui sont tous sur une même droite.



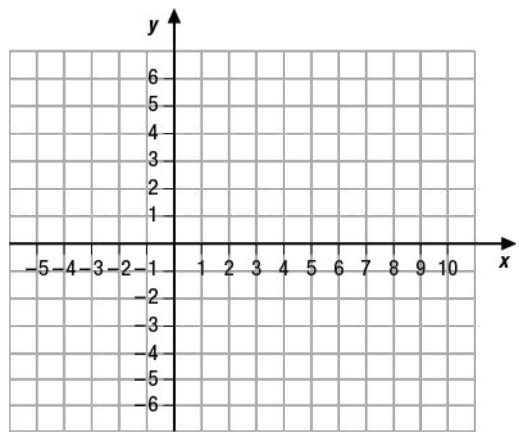
a) Le terrain de sommets *ACDB* est-il vraiment un trapèze ? (Un trapèze a une paire de côtés parallèles.)

b) Ce quadrilatère *ACDB* (qu'il soit un trapèze ou non) possède-t-il un angle droit ?

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 4.13

Représentez le quadrilatère ayant pour sommets $A(1,5;\ -3,5)$, $B(9,5\ ;\ 1)$, $C(-2;\ 4)$ et $D(-4;\ -2,25)$. Calculez son périmètre.



ACTIVITÉ • 4.14

Paula et Julian font un voyage ensemble. Ils visitent deux villes pour ensuite revenir à leur ville de départ. Sur une carte routière en coordonnées, ils voient que la première ville visitée se situe au point $A(-4;\ 1)$ et que la deuxième ville se situe au point $B(3;\ -2)$. La ville de départ se situe au point $C(7;\ 5)$. Déterminez la distance que Paula et Julian parcourent durant leur voyage (exprimez la réponse en unités-carte).

C. La distance d'un point à une droite

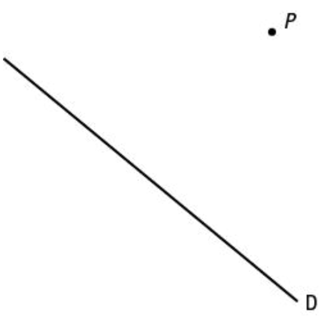
Imaginez que vous voulez calculer la distance entre votre pied droit et le mur qui se trouve devant vous. À quel endroit sur le mur placeriez-vous votre ruban à mesurer ?

Vous allez maintenant chercher une procédure pour calculer la distance d'un point à une droite quand on connaît l'équation de la droite et les coordonnées du point.

J'explore

ACTIVITÉ • 4.15

Sur une feuille, rédigez, étape par étape, une marche à suivre pour calculer la distance d'un point P à une droite D, si l'on connaît l'équation de la droite et les coordonnées du point.



La distance d'un point à une droite

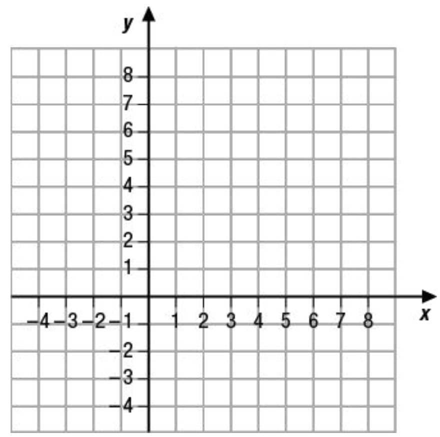
Pour trouver la distance entre un point P et une droite D, on cherche :

1. l'équation de la droite $D^{\perp}$, qui est perpendiculaire à D et qui passe par P (il faudra obtenir la pente de la droite $D^{\perp}$) ;
2. l'intersection des deux droites D et $D^{\perp}$, ce qui donne le point Q (il faudra résoudre un système linéaire) ;
3. la distance entre les points P et Q.

ACTIVITÉ • 4.16

Calculez la distance du point $(3;\, 4)$ à la droite $y = \dfrac{3}{4}x - 2$.

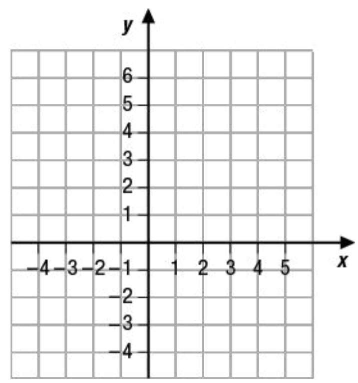
Tracez le graphique et vérifiez la cohérence de votre réponse.



Je m'entraîne

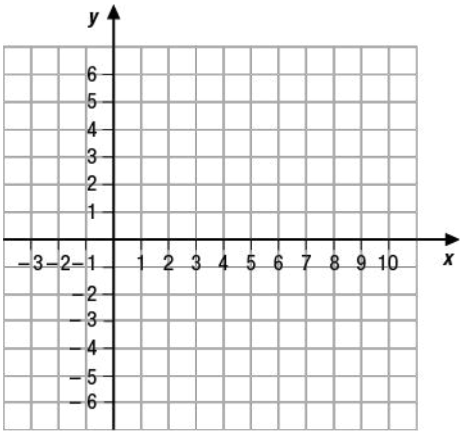
ACTIVITÉ • 4.17

Calculez la distance du point $(-4;\, 2)$ à la droite $y = -2x + 6$. Faites une représentation graphique et vérifiez la cohérence de votre réponse.



ACTIVITÉ • 4.18

Calculez la distance séparant le point $(2;\,5)$ et la droite $y = \dfrac{2}{3}x - 5$.



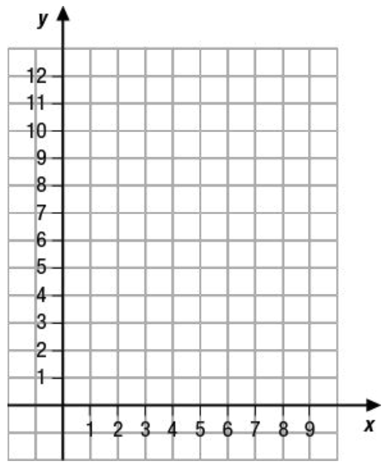
D. Les coordonnées d'un point de partage

Si on connaît deux points dans un plan (deux points représentant les extrémités d'un levier, par exemple), comment peut-on obtenir les coordonnées du point milieu du segment qui relie ces deux points ? C'est l'objet de la présente section.

J'explore

ACTIVITÉ • 4.19

Représentez les points $A(3;\ 2)$ et $B(9;\ 12)$ ainsi que le segment qu'ils déterminent dans le plan ci-contre. Repérez le point milieu du segment ; ici, cette étape est facilitée du fait qu'on a des coordonnées entières. Quels calculs faut-il faire pour trouver les coordonnées de ce point si l'on ne veut pas – ou si l'on ne peut pas – utiliser la méthode graphique ?



Les coordonnées du point milieu d'un segment

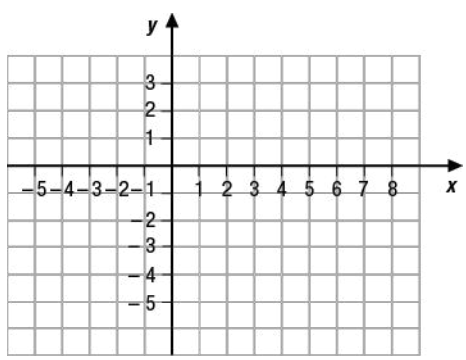
Le point milieu $M(x_M\,;\ y_M)$ du segment AB donné par les points $A(x_A\,;\ y_A)$ et $B(x_B\,;\ y_B)$ a comme coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Autrement dit, ce sont les moyennes des valeurs des abscisses et des ordonnées des extrémités du segment qui relie les deux points.

ACTIVITÉ • 4.20

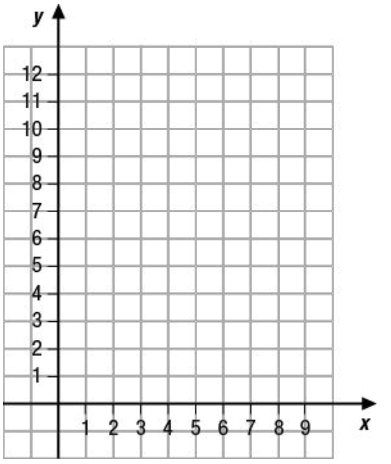
Trouvez le point milieu du segment qui relie les points $(-5\,;\ -3)$ et $(7;\ -1)$.



ACTIVITÉ • 4.21

Revenez sur l'activité 4.19.

a) On vous demande de trouver le point $C(x_C\,;\,y_C)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, avec C étant plus proche de $A(3\,;\,2)$ que de $B(9\,;\,12)$. Les points sont les mêmes que ceux de l'activité 4.19 : $A(3\,;\,2)$ et $B(9;\,12)$.



Faites-le graphiquement d'abord, puis élaborez une démarche pour trouver ce point par des calculs.

b) Trouvez le point $D(x_D\,;\,y_D)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$, avec D plus proche de A que de B.

c) Rédigez une marche à suivre pour trouver le point $D(x_D\,;\,y_D)$ qui partage le segment AB en une proportion de k et $1-k$, où $0<k<1$.

Les coordonnées du point de partage d'un segment

Le point $D(x_D\,;\,y_D)$ qui partage un segment AB donné par les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ dans une proportion de k et $1-k$, avec $k>0$, a les coordonnées $x_D = x_A + k(x_B - x_A)$ et $y_D = y_A + k(y_B - y_A)$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 4.22

Soit le segment AB, pour lequel vous connaissez les coordonnées du point $A(1;\,3)$. Vous connaissez aussi les coordonnées du point $D(6;\,4)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Trouvez les coordonnées du point B, sachant que D est plus proche de A.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 4.23

Trouvez le point milieu du segment formé par la paire de points (1 ; 8) et (6 ; 2).

ACTIVITÉ • 4.24

Soit $A(2;\ 7)$ et $B(15;\ 1)$. Trouvez le point $D(x_D\ ;\ y_D)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$:

a) avec D plus proche de A que de B ;

b) avec D plus proche de B que de A.

ACTIVITÉ • 4.25

Trouvez le point milieu du segment formé par les points $(2; 5)$ et $(-1; -1)$.

ACTIVITÉ • 4.26

Soit $A(-1; 3)$ et $B(1; -1)$. Trouvez le point $D(x_D ; y_D)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, avec D plus proche de B que de A.

ACTIVITÉ • 4.27

Soit le segment AB, pour lequel vous connaissez les coordonnées du point $A(2; 38)$. Vous connaissez aussi les coordonnées du point $D(6; 28)$ qui partage le segment AB dans une proportion de $\frac{2}{7}$ et $\frac{5}{7}$.

Trouvez les coordonnées du point B, sachant que D est plus proche de A que de B.

E. Les droites médianes et les médiatrices

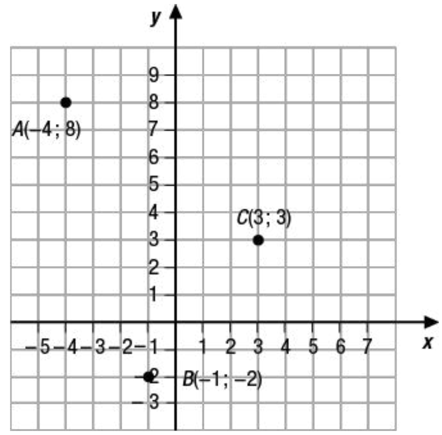
Nous allons maintenant appliquer ces nouvelles notions dans la résolution de problèmes de géométrie analytique.

J'explore

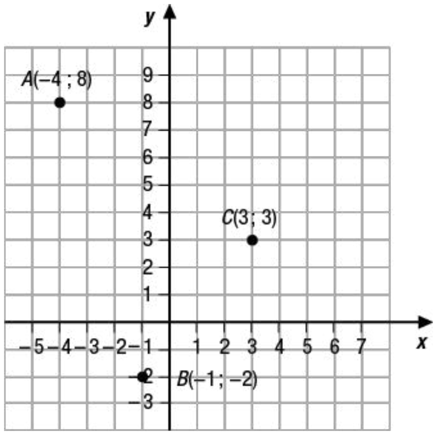
ACTIVITÉ • 4.28

Soit le triangle ayant pour sommets les points $A(-4\,;\,8)$, $B(-1\,;\,-2)$ et $C(3\,;\,3)$.

a) Représentez la hauteur passant par le sommet A et calculez sa longueur. (Rappel : La hauteur d'un triangle est la droite perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé à ce côté.)

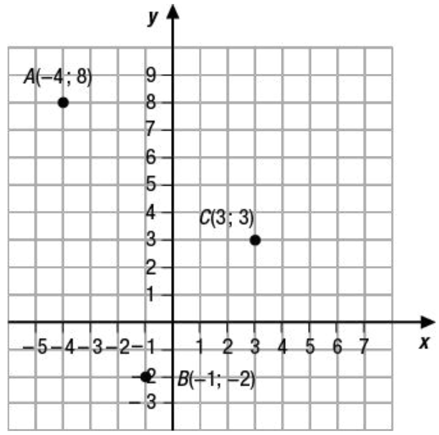


b) Représentez la médiatrice correspondant au côté *BC* et donnez-en l'équation. (Rappel : La médiatrice à un côté est la droite passant par le milieu du côté et perpendiculaire à ce côté.)

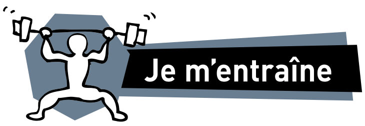


c) Calculez l'aire de ce triangle. (Rappel : L'aire d'un triangle est égale au produit de la longueur de sa base et de la longueur de sa hauteur, divisé par 2.)

d) Représentez la médiane qui correspond au sommet A et calculez sa longueur. (Rappel : Une médiane est une droite qui relie le sommet d'un triangle au milieu du côté opposé.) Nommez E le point milieu nécessaire pour trouver la médiane.

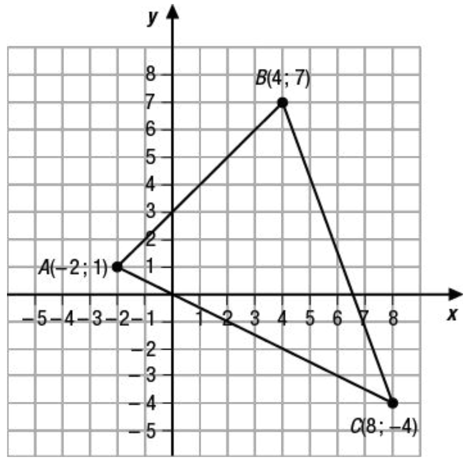


e) D'après vous, l'aire du triangle ABE est-elle supérieure, égale ou inférieure à l'aire du triangle AEC ? Justifiez votre réponse.



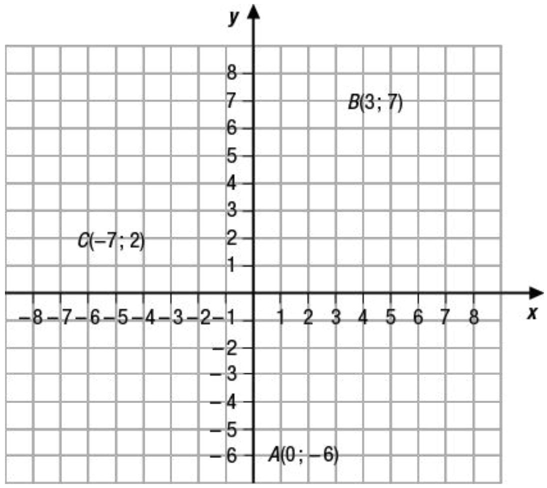
ACTIVITÉ • 4.29

Soit le triangle ayant pour sommets $A(-2;\,1)$, $B(4;\,7)$ et $C(8;\,-4)$. Trouvez la longueur et le point milieu de chacun des côtés.



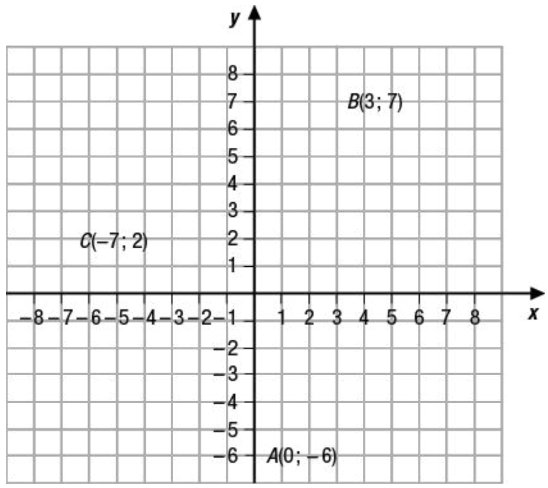
ACTIVITÉ • 4.30

Représentez le triangle ayant pour sommets les points $A(0; -6)$, $B(3; 7)$ et $C(-7; 2)$.



a) Représentez la hauteur issue du sommet B et calculez sa longueur.

b) Représentez la médiatrice correspondant au côté BC et donnez l'équation de cette droite.



c) Calculez l'aire de ce triangle.

d) Calculez le périmètre du triangle ABC.

Mes activités de récapitulation

R4.1

a) Calculez la distance entre les points $(-5\,;-12)$ et $(-1;\,0)$.

b) Trouvez la distance entre le point $A(12;\,75)$ et le milieu du segment reliant $B(103\,;\,21)$ et $C(57;\,48)$.

c) Le point $A(31;\,75)$ est-il plus proche du point $B(67;\,-6)$ ou du point $C(-36\,;\,11)$?

d) Sachant que la distance entre les points $A(-3;\,y)$ et $B(5;\,-2)$ est de 10, quelle est la valeur de y ?

R4.2

Soit le triangle de sommets $A(-3;\,4)$, $B(7;\,1)$ et $C(2;\,-5)$.

a) Trouvez le périmètre du triangle formé par les points milieux des trois côtés de ce triangle.

b) Calculez la longueur de la médiane issue du sommet A.

c) Calculez la longueur de la hauteur issue du sommet B.

d) Donnez l'équation de la médiatrice correspondant au côté BC.

e) Calculez l'aire du triangle ABC.

R4.3

Soit le triangle de sommets $A(-1;\,2)$, $B(-3;\,-1)$ et $C(5;\,-2)$. Calculez l'aire de ce triangle. Est-ce que le triangle est rectangle ?

R4.4

Calculez la distance du point $(7\,;\,2)$ à la droite passant par $(-2\,;\,4)$ et $(0\,;\,-2)$.

R4.5

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) Les droites $2x-3y+1=0$ et $3x-2y-1=0$ sont perpendiculaires.

b) Les droites $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{6}=1$ et $5x-3y+7=0$ sont perpendiculaires.

c) La droite passant par les points $A(1;\,1)$ et $B(5;\,-1)$ est perpendiculaire à la droite passant par les points $C(-1;\,1)$ et $D(-2;\,-1)$.

d) La distance entre les points $A(-1;\,3)$ et $B(4;\,7)$ est 5.

e) La distance entre la droite $2x-3y-5=0$ et le point $(2;\,4)$ est $\sqrt{13}$.

f) Soit le triangle formé par les trois points $A(2;\,5)$, $B(10;\,13)$ et $C(16;\,7)$. Le triangle ABC est rectangle.

g) Dans un triangle, une médiane peut aussi être une médiatrice.

R4.6

Donnez l'équation de la droite perpendiculaire à $\frac{x}{2}+y=1$ et passant par le point $(2\,;5)$.

R4.7

Donnez l'équation de la droite L_2 passant par le point $(-6;\,0)$ et perpendiculaire à $L_1:\ y=-4x+8$.

R4.8

Donnez l'équation de la droite L_3 passant par le point $(0;\,4)$ et perpendiculaire à la droite $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$.

R4.9

a) Sachant que le point milieu du segment reliant $A(x;\,-5)$ et $B(-2;\,y)$ est le point $C\left(\frac{1}{2};\,1\right)$, trouvez les valeurs de x et de y.

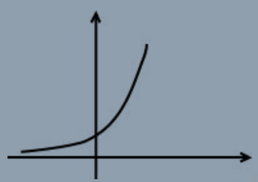
b) Sachant que le point $C(5;\,1)$ est au milieu du segment reliant $A(a;\,a)$ et $B(11;\,3)$, déterminez la valeur de a.

c) Sachant que le point $A(1;\,-2)$ se situe aux $\frac{3}{5}$ du segment reliant $B(-3;\,-2)$ et C, A étant plus proche du point B, trouvez les coordonnées du point C.

d) Soit les points $A(1;\,0)$ et $B(9;\,-20)$. En quelle proportion le point $C(7;\,-15)$ partage-t-il le segment reliant A et B ?

CHAPITRE

5 LA FONCTION EXPONENTIELLE, LES PUISSANCES ET LES RADICAUX



Objectifs d'apprentissage

- Connaître des situations fonctionnelles où la variable indépendante se trouve à l'exposant
- Connaître et comprendre les expressions ayant des exposants entiers (naturels et relatifs), et savoir les calculer et les simplifier
- Connaître les exposants fractionnaires et comprendre leur lien avec les radicaux
- Comprendre les propriétés des exposants et savoir les appliquer selon les tâches à réaliser
- Connaître les racines carrées et les racines cubiques ainsi que leurs propriétés
- Connaître les caractéristiques des fonctions exponentielles (signe, variation, coordonnées à l'origine) et savoir les obtenir

A. Le modèle exponentiel

Jusqu'à présent, vous avez travaillé avec des fonctions linéaires (ayant un taux de variation constant). Dans ce chapitre, vous allez utiliser des fonctions dont la variation n'est pas constante. Faites d'abord les activités 5.1 et 5.2 : elles ne demandent aucune explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 5.1

Supposez que certains escargots se reproduisent à une vitesse telle que, chaque mois, leur quantité double. Supposez aussi que l'on commence à les compter dès aujourd'hui et qu'on a deux escargots. Vous devez trouver la règle de correspondance de la fonction donnant la quantité d'escargots en fonction du temps, mesuré en mois.

a) Déterminez combien d'escargots il y aura dans un mois, dans trois mois et dans cinq mois. Au besoin, vous pouvez organiser l'information dans un tableau.

b) Trouvez une formule décrivant la quantité d'escargots q après n mois.

c) Après combien de temps y aura-t-il 256 escargots ?

ACTIVITÉ • 5.2

On place dans un compte bancaire un montant de 10 000 $ à un taux d'intérêt mensuel de 1,5 %.

a) Quel sera le capital, c'est-à-dire le montant accumulé, au bout d'un mois ? de deux mois ? de trois mois ?

b) Trouvez une formule décrivant la valeur du capital après t mois.

La fonction exponentielle

Dans les deux activités précédentes, la variable indépendante se trouve à l'exposant. Analysons la situation de l'activité 5.2.

Après un mois, le capital sera de 10 000 \$ + 0,015 · 10 000 \$ = 1,015 · 10 000 \$ = 10 150 \$ (c'est-à-dire que pour augmenter 10 000 \$ de 1,5 %, on multiplie 10 000 \$ par 1,015).

Ainsi, après deux mois, on aura :

10 000 \$ · 1,015 · 1,015 = 10 000 \$ · $1{,}015^2$

et ainsi de suite.

Examinons le tableau suivant.

	Temps (mois)	Montant (\$)	
	0	10 000	
+ 1	1	10 000(1,015)	× 1,015
+ 1	2	$10\,000(1{,}015)^2$	× 1,015
+ 1	3	$10\,000(1{,}015)^3$	× 1,015

On remarque qu'à chaque augmentation de 1 unité de la variable indépendante, les valeurs de la variable dépendante sont multipliées par 1,015. Cela marque une différence avec une fonction linéaire pour laquelle, à chaque augmentation de 1 unité de la variable indépendante, la variable dépendante augmente de la valeur du taux de variation.

Dans l'expression $C(t) = 10\,000 \cdot (1{,}015)^t$, la variable indépendante est à l'exposant. Ce type de fonction s'appelle une **fonction exponentielle.** En général, une telle fonction prend la forme $y = f(x) = a \cdot b^x$, où $x \in \,]-\infty; +\infty[$ et $b > 0$.

Dans notre exemple, $a = 10\,000$ (valeur initiale) et $b = 1{,}015$ (facteur multiplicatif ou base de l'exponentielle).

On utilise les fonctions exponentielles en économie, pour modéliser des capitalisations et des dépréciations ; en biologie, pour décrire partiellement l'évolution des populations ; en médecine, pour décrire des cicatrisations des blessures, et dans beaucoup d'autres domaines.

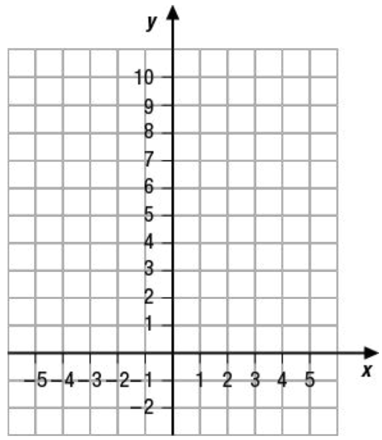
NOTES :

ACTIVITÉ • 5.3

Pour chacune des fonctions suivantes, remplissez le tableau et repérez les points dans les graphiques, en écrivant leurs coordonnées. Trouvez également l'ensemble image, les zéros et l'ordonnée à l'origine.

a) $f(x) = 2^x,\ x \in]-\infty; +\infty[$

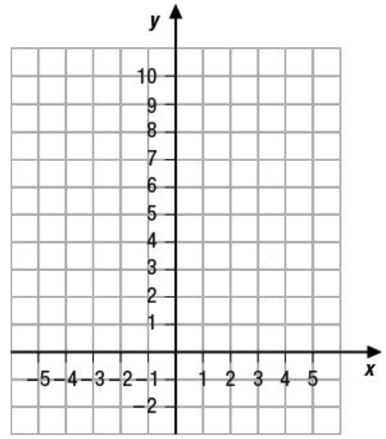
x	$y = f(x) = 2^x$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



Ensemble image :	
Zéros :	
Ordonnée à l'origine :	

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x \in \,]-\infty; +\infty[$

x	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

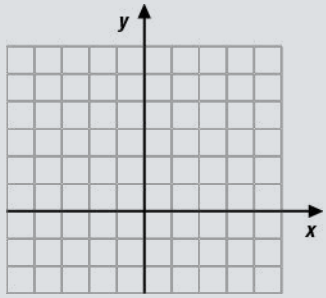


Ensemble image :	
Zéros :	
Ordonnée à l'origine :	

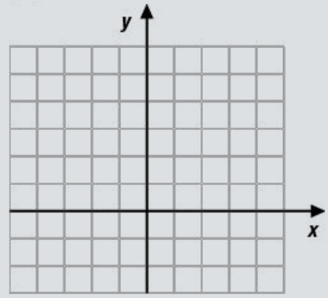
La fonction exponentielle

Pour la fonction $f(x) = b^x$:

- si $b > 1$, son graphique aura une forme semblable à celui de la fonction $f(x) = 2^x$;



- si $0 < b < 1$, son graphique aura une forme semblable à celui de la fonction $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



On ne définit pas la fonction $f(x) = b^x$ pour des valeurs négatives de b (vous serez en mesure de justifier cette affirmation à la fin du chapitre).

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 5.4

Vous placez dans un compte bancaire un montant de 8000 $, à un taux annuel de 6 %, pour une période de 10 ans.

a) Décrivez l'évolution de ce capital en fonction du temps. Votre description doit prendre la forme de la règle de correspondance d'une fonction.

b) Quel capital aurez-vous à l'échéance, c'est-à-dire à la fin de la période de 10 ans ?

ACTIVITÉ • 5.5

Au cours d'une panne d'électricité en hiver, vous relevez la température de la maison toutes les heures après le début de la panne. Le relevé des températures se trouve dans le tableau suivant.

Durée de la panne (h)	0	1	2	3	4	5	6
Température (°C)	22	19	16,4	14,1	12,1	10,4	9

a) La température décroît-elle plutôt de façon exponentielle ? Justifiez votre réponse.

b) Modélisez la situation en trouvant la règle de correspondance de la fonction donnant la température en fonction du temps.

c) Estimez la température après 10 heures de panne.

B. Les exposants entiers

Pour pouvoir bien travailler avec les fonctions exponentielles, il faut d'abord s'outiller pour ce qui est de la manipulation des exposants et de leurs propriétés. Nous nous apprêtons à le faire.

Les exposants entiers (rappel)

La puissance nième de *a*, où *n* est un nombre entier positif, est définie de la façon suivante : $a^n = a \cdot a \cdots a$ (le produit de *a* par lui-même *n* fois).

Exemples : $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

La puissance (–1) de *a* donne l'inverse multiplicatif de *a*, c'est-à-dire $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

On appelle a^{-1} l'**inverse multiplicatif** de *a*, car $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Exemples : $5^{-1} = \frac{1}{5}$, car $\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$, car $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$, car $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$

De cette façon, on a $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$.

Exemples : $4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27}$

NOTES :

J'explore

ACTIVITÉ • 5.6

a) Soit le produit $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Trouvez quatre façons différentes d'écrire ce produit en utilisant des produits de puissances de base 5.

b) Soit le produit $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$. Trouvez trois façons différentes d'écrire ce produit en utilisant des opérations de puissances de base $\frac{2}{3}$, 2 et 3.

Dans les activités précédentes, vous avez utilisé quelques propriétés que nous allons énoncer ici.

Les propriétés des exposants I

Propriété 1

Si a est un nombre réel, et n et m sont deux nombres entiers, alors $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Démonstration : $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ fois}} = a^{n+m}$

Exemples : $3^4 \cdot 3^5 = 3^9$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Propriété 2

Si a est un nombre réel, et n et m sont deux nombres entiers, alors $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Démonstration : $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \cdots \cdot a^n}_{m \text{ fois}} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m \text{ fois}}} = a^{n \cdot m}$

Exemples : $(3^4)^5 = 3^{20}$

$$(2^3)^{-4} = (2)^{-12}$$

Propriété 3

Si a et b sont deux nombres réels, et n est un nombre entier, alors $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Démonstration : $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots\cdots (a \cdot b)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{a \cdots\cdots a}_{n \text{ fois}} \cdot \underbrace{b \cdots\cdots b}_{n \text{ fois}} = a^n \cdot b'$

Exemples : $(4x)^3 = 64x^3$

$(2y^2)^4 = 16y^8$

Propriété 4

Si a et b sont deux nombres réels, et n est un nombre entier, alors $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Faites-en la démonstration (inspirez-vous de la démonstration précédente).

Démonstration :

Exemples : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$

$\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{(-1)^3}{4^3} = \dfrac{-1}{64} = -\dfrac{1}{64}$

ou aussi $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = (-1)^3 \cdot \dfrac{1^3}{4^3} = -\dfrac{1}{64}$

Avant de lire la propriété 5, regardez l'exemple suivant :

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Propriété 5

Si a est un nombre réel différent de zéro, et n et m sont deux nombres entiers, alors $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 5.7

Utilisez des propriétés des exposants afin de produire des expressions équivalentes à chacune des expressions suivantes.

a) $-\left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 =$

b) $\left(\dfrac{3x^2}{y}\right)^3 =$

c) $-(2x)^4 =$

d) $(-2x)^4 =$

ACTIVITÉ • 5.8

Vous avez probablement appris que $3^0 = 1,\ 5^0 = 1$, et qu'en général $a^0 = 1$ pour tout a différent de zéro. Utilisez la propriété 5 mentionnée précédemment pour expliquer pourquoi il en est ainsi.

ACTIVITÉ • 5.9

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse. Attention : Cette activité étant conçue pour renforcer votre capacité à faire des liens, **l'utilisation de la calculatrice est interdite.** Vous avez le droit de vous servir de la « règle des signes » pour la multiplication.

a) $(-3)^n$ donne toujours un résultat négatif, peu importe la valeur de n.

b) $(-3)^n$ donne un résultat positif seulement si n est pair.

c) $(-5)^4$ est positif.

d) $-(5^4)$ est positif.

Vous avez travaillé avec les puissances et les signes. Nous énonçons ici les propriétés qui concernent le signe de a^n, où a est un nombre réel et n, un nombre entier.

Les propriétés des exposants II

Propriété 1

Si a est positif, alors a^n est positif, peu importe si l'exposant n est pair ou impair.

Exemples : $2^4 = 16$ et $2^7 = 128$

Propriété 2

Si a est négatif, il faut considérer deux cas. Premier cas : si l'exposant n est pair, alors a^n sera positif. Deuxième cas : si l'exposant n est impair, alors a^n sera négatif.

Exemples : $(-2)^4 = 16$ et $(-2)^7 = -128$

Remarque : En général, $-a^n \neq (-a)^n$.

Exemples : $-4^6 = -4096$ et $(-4)^6 = 4096$

NOTES :

ACTIVITÉ • 5.10

Complétez chaque énoncé avec = ou ≠, selon le cas. **L'utilisation de la calculatrice est interdite.**

a) $(3a^4)$ ________ $3a^4$

b) $(3a)^4$ ________ $3a^4$

c) $7^5(-2)^5$ ________ $(-14)^5$

d) $(2b^4)^3$ ________ $8b^{12}$

e) $(-a)^2$ ________ $-a^2$

f) $(-a)^3$ ________ a^3

ACTIVITÉ • 5.11

Faites les opérations indiquées et cochez les bonnes réponses.

a) Le carré de 9^4

i) ☐ 81^4 **ii)** ☐ 81^{16} **iii)** ☐ 9^{16}

iv) ☐ 9^8 **v)** ☐ Aucune des réponses précédentes

b) Le quadruple de 16^3

i) ☐ 64^3 **ii)** ☐ 4^7 **iii)** ☐ 64^{12}

iv) ☐ 16^{12} **v)** ☐ Aucune des réponses précédentes

ACTIVITÉ • 5.12

Complétez chaque énoncé avec >, < ou =, selon le cas. **L'utilisation de la calculatrice est interdite.**

a) $1{,}5^3$ ________ $1{,}5^7$ **b)** $0{,}5^3$ ________ $0{,}5^7$

c) $(-2)^2$ ________ $(-2)^9$ **d)** $1{,}4^4$ ________ $1{,}5^4$

e) $(-1{,}2)^6$ ________ $(1{,}2)^6$

Les propriétés des exposants III

Soit a, un nombre réel positif, et soit n et m, des nombres entiers positifs tels que $n < m$. On peut faire les affirmations suivantes.

1. Si $a > 1$, alors $a^n < a^m$, car la multiplication par un nombre plus grand que 1 donne un résultat plus grand que le nombre de départ. Exemple : $3 < 6$ et $5^3 < 5^6$; dans ce cas, $a = 5$.
2. Si $0 < a < 1$, alors $a^n > a^m$; la condition précédente n'est plus vraie, car la multiplication par un nombre positif plus petit que 1 donne un résultat plus petit que le nombre de départ.

   Exemple : $3 < 6$, mais $\left(\frac{1}{5}\right)^3 > \left(\frac{1}{5}\right)^6$, car $a = \frac{1}{5}$. Notez également qu'on aurait pu écrire $5^{-3} > 5^{-6}$ ou $5^{-6} < 5^{-3}$ (écrit ainsi, $a = 5$ et l'affirmation 1 reste alors vraie).
3. Finalement, si $a = 1$, on a que $a^n = a^m = 1$, peu importe la valeur de m et de n.

NOTES :

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 5.13

Exprimez les expressions suivantes de façon plus simple en utilisant les propriétés des exposants. Mentionnez les valeurs des variables pour lesquelles l'expression n'est pas définie. La question a) est déjà résolue pour vous en guise d'exemple.

a) $\left(\dfrac{3}{2x}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2x^2} = \dfrac{9}{4x^2},\ x \neq 0$

b) $\left(\dfrac{2x^2}{3}\right)^{-1} =$

c) $(x^2x^3)^4 =$

d) $(-2x^3)(-3x) =$

e) $4x^3(6x^2) =$

f) $(2aa^2a^{-4}) =$

g) $\dfrac{6x^2y^3}{3xy^4} =$

h) $\dfrac{7(x+y)^4(x-y)^5}{21(x+y)^3(x-y)^3} =$

i) $\dfrac{15a^3b^4c^6}{3a^2b^5c^7} =$

j) $\dfrac{x^3(2x-1)^5}{x^2(1-2x)^3} =$

ACTIVITÉ • 5.14

Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) -5^4 est positif.

b) $(-5)^{-4}$ est positif.

c) Si a est un nombre réel positif et que n est impair, alors a^n est négatif.

d) Si a est un nombre réel positif ou négatif et que n est pair, alors a^{-n} est positif.

ACTIVITÉ • 5.15

Sans utiliser la calculatrice, complétez chaque énoncé avec = ou ≠, selon le cas. Justifiez votre réponse. Si vous répondez par ≠, réécrivez le membre de droite pour obtenir une égalité.

a) $0{,}3^5 \cdot 0{,}3^4$ __________ $0{,}3^{20}$

b) $1{,}21^3 + 1{,}21^2$ __________ $1{,}21^5$

c) $(-5{,}9)^4 \cdot (-5{,}9)^3$ __________ $(-5{,}9)^7$

d) $(7{,}2^8)^2$ __________ $7{,}2^{16}$

C. Les exposants non entiers

Les exposants non entiers

Jusqu'à présent, vous avez travaillé avec des exposants entiers. Selon vous, est-il possible d'avoir des exposants non entiers ? Quel sens doit-on donner à des expressions telles que $9^{\frac{1}{2}}$ ou $8^{\frac{1}{3}}$? Évidemment, nous ne pouvons pas nous représenter les puissances non entières comme des multiplications répétées, mais nous pouvons leur donner du sens en gardant la cohérence avec les propriétés des exposants entiers étudiées précédemment.

Dans le cadre de ce cours, les éléments théoriques qui justifient l'existence des nombres de la forme $a^{\frac{1}{2}}$ ne sont pas développés, mais nous supposons toutefois que ces nombres sont bien définis si $a > 0$.

Alors, qu'entend-on par « en gardant la cohérence avec les propriétés des exposants » ?

Par exemple, pour que la propriété $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ soit valide, $a^{\frac{1}{2}}$ doit satisfaire $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$.

On veut aussi maintenir la propriété $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Voyons ce que cela donnerait pour les valeurs $n = \dfrac{1}{3}$ et $m = 3$. On aurait $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3} \cdot 3} = a^1 = a$.

NOTES :

J'explore

ACTIVITÉ • 5.16

Utilisez l'égalité $\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 9$ pour déduire la valeur numérique de $9^{\frac{1}{2}}$. Attention : Il s'agit d'une valeur positive.

ACTIVITÉ • 5.17

Utilisez l'égalité $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8$ pour déduire la valeur de $8^{\frac{1}{3}}$.

ACTIVITÉ • 5.18

À la lumière des activités 5.16 et 5.17, trouvez les valeurs positives des puissances fractionnaires suivantes.

a) $4^{\frac{1}{2}} =$

b) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} =$

c) $64^{\frac{1}{3}} =$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 5.19

Trouvez les valeurs positives des puissances fractionnaires suivantes.

a) $36^{\frac{1}{2}} =$

b) $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{1}{2}} =$

c) $27^{\frac{1}{3}} =$

d) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$

À cette étape, vous soupçonnez probablement que ce que vous avez fait a un lien avec les racines. Allons-y !

D. Les radicaux

J'explore

ACTIVITÉ • 5.20

Trouvez un nombre qui, multiplié par lui-même, donne $\frac{16}{25}$. Existe-t-il une seule solution ? Expliquez pourquoi.

ACTIVITÉ • 5.21

Trouvez un nombre qui, élevé à la puissance 3, donne $-\frac{8}{27}$. Existe-t-il une seule solution ? Expliquez pourquoi.

ACTIVITÉ • 5.22

Trouvez, si possible, un nombre qui, élevé à la puissance 4, donne –81. Existe-t-il une seule solution ? Expliquez pourquoi.

La racine carrée, la racine cubique et la racine nième

La racine carrée d'un nombre non négatif a est le nombre non négatif b tel que $b^2 = a$.

Autrement écrit, on a : pour $a \geq 0$, $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$ et $b \geq 0$.

Dans le chapitre 1, nous avons vu qu'une fonction associe une seule image à chaque valeur x du domaine. C'est pour que $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, soit une fonction que l'on choisit, en mathématique, de ne garder qu'une réponse, en l'occurrence la réponse positive.

Exemples : 4 est la racine carrée de 16 (c'est-à-dire $\sqrt{16} = 4$) et $\frac{1}{2}$ est la racine carrée de $\frac{1}{4}$ (c'est-à-dire que $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$).

Il n'est pas exact de dire que $\sqrt{16}$ est égal à ± 4 ou que $\sqrt{\frac{1}{4}}$ est égal à $\pm\frac{1}{2}$.

On ne prend que les valeurs positives ; autrement, on aurait des inconsistances du point de vue mathématique. Mais on a $-\sqrt{16} = -4$ ainsi que $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ (on a pris les éléments opposés).

La racine cubique d'un nombre a quelconque est un nombre b tel que $b^3 = a$.

Autrement écrit, on a : $\sqrt[3]{a} = b$ si $b^3 = a$.

Remarque : À la différence de ce qui arrive aux racines carrées, avec la racine cubique, on ne se soucie pas du signe du nombre a. Si a est positif, alors b le sera aussi ; si a est négatif, b le sera aussi.

Si nous revenons sur les activités 5.11 à 5.13, alors nous constatons que $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ et $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

La racine carrée et la racine cubique sont des cas particuliers de ce que l'on peut appeler en général la « racine nième » (racine d'indice n, où n est un entier positif). Comment calcule-t-on la racine nième ? Analysons différents cas.

- Si n est pair et $a < 0$, alors on ne peut pas calculer $\sqrt[n]{a}$. Par exemple, aucun nombre réel x ne donne $\sqrt[4]{-16}$, car tout nombre réel élevé à une puissance paire donne un nombre positif.
- Si n est pair et $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ et $b \geq 0$. Quand $n = 2$, on n'écrit généralement pas l'indice, c'est-à-dire que $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.
- Si n est impair, peu importe si a est positif ou non, $\sqrt[n]{a} = b$, où b est le seul nombre qui vérifie $b^n = a$.

Propriétés (énoncées pour x, y, n et m, de sorte que les racines soient bien définies)

1. $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

Exemples : $\sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Exemple : $\sqrt[3]{\dfrac{6}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

Exemple : $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$

4. $\sqrt[n]{x^n} = x$ est la règle de simplification si n est impair.

Exemple : $\sqrt[5]{(-6)^5} = -6$

5. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est la règle de simplification si n est pair.

Exemple : $\sqrt{(-8)^2} = 8$

6. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Exemple : $\sqrt[6]{8^2} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

NOTES :

ACTIVITÉ • 5.23

Trouvez la valeur des expressions ci-dessous. **L'utilisation de la calculatrice est interdite.**

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} =$

b) $(\sqrt{3})^2 =$

c) $\sqrt{(-3)^2} =$

d) $(-\sqrt{3})^2 =$

e) $-\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} =$

f) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3} =$

g) $\sqrt{2}+4\sqrt{2} =$

h) $\sqrt{4z^2} =$

i) $\sqrt{9x^8} =$

j) $\sqrt[3]{y^{12}} =$

k) $\sqrt[4]{x^4} =$

l) $\sqrt[5]{\dfrac{x^{15}y^{10}}{100\,000}} =$

ACTIVITÉ • 5.24

Dans chaque cas, comparez les nombres et complétez l'énoncé avec = ou ≠, selon le cas. Si la réponse est ≠, réécrivez l'expression en modifiant le membre de droite pour obtenir une égalité. La question a) est déjà résolue pour vous en guise d'exemple. **L'utilisation de la calculatrice est interdite.**

a) $\sqrt{16+9}$ $\underline{\quad\neq\quad}$ $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ $\quad\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ ________ $\sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{(-5)^3}$ ________ -5

d) $\sqrt[4]{(-5)^4}$ ________ -5

e) $\sqrt{100\div 25}$ ________ $\sqrt{100}\div\sqrt{25}$

f) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{4}$ ________ $\sqrt{16\cdot 4}$

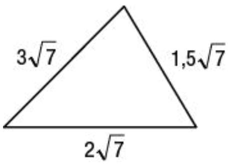
ACTIVITÉ • 5.25

La figure ci-contre est un rectangle formé de deux carrés ayant chacun une aire de 2 cm^2. Quel est le périmètre du carré ombré ? Quel est le périmètre du rectangle complet ? Exprimez la réponse en utilisant des racines. **L'utilisation de la calculatrice est interdite.**

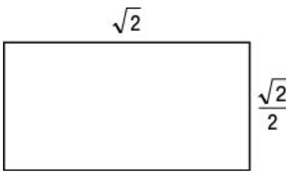
ACTIVITÉ • 5.26

Trouvez le périmètre de chacune des figures suivantes.

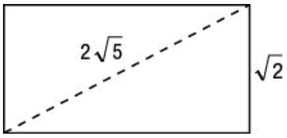
a)



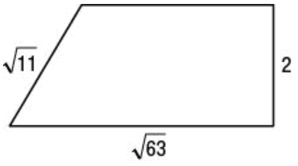
b)



c)



d)



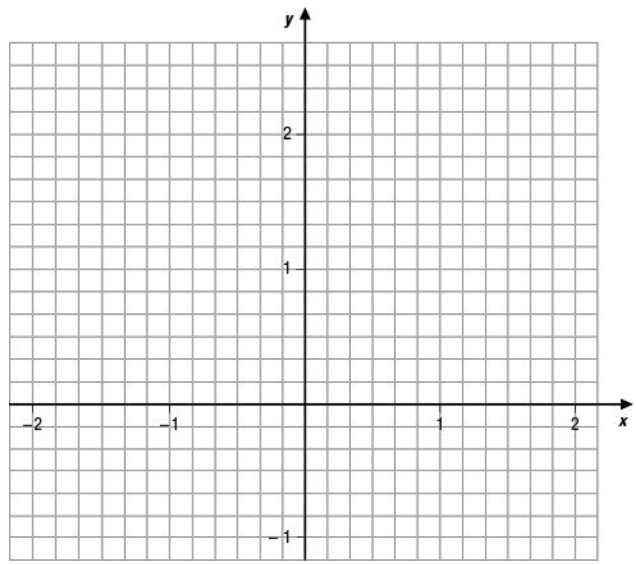
E. Retour sur la fonction exponentielle

J'explore

ACTIVITÉ • 5.27

Au début du chapitre, on vous a présenté le graphique de la fonction $f(x) = 2^x$ pour $x \in]-\infty; +\infty[$. On vous présente maintenant un « zoom » pour les valeurs $-1 < x < 1$.

Tracez sur l'axe vertical les valeurs approximatives de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[6]{2^5}$.



Les exposants appartenant à différents ensembles numériques

Au début de ce chapitre, nous avons défini la fonction exponentielle $f(x) = b^x$, pour $x \in]-\infty; +\infty[$ et $b > 0$. Maintenant, nous avons une idée plus claire de ce que cela veut dire.

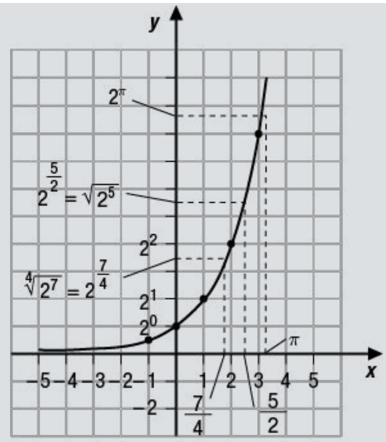
Par exemple, pour le cas $f(x) = 2^x$ (c'est-à-dire $b = 2$), nous prenons **toutes les valeurs réelles** de la variable x. Analysons divers cas.

- Si x est un nombre entier positif, par exemple $x = 1, 3, 7, \ldots$ (c'est le cas le plus simple et le plus connu), alors la fonction exponentielle prend les valeurs $2^1, 2^3, 2^7, \ldots$
- Si $x = 0$, alors $2^0 = 1$.
- Si x est un entier négatif, par exemple $x = -3, -5, -7, \ldots$, alors la fonction prend les valeurs $2^{-3}, 2^{-5}, 2^{-7}, \ldots$, soit $\left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \ldots$

Parmi les entiers, positifs et négatifs, il y a une infinité de nombres fractionnaires, par exemple $x = \frac{1}{5}, x = \frac{7}{4}, x = -\frac{3}{7}, \ldots$

La fonction prend alors les valeurs $2^{\frac{1}{5}}, 2^{\frac{7}{4}}, 2^{\frac{-3}{7}}$, ..., soit

$\sqrt[5]{2}, \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3}, \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$, ...



Il y a d'autres valeurs de x qui ne sont ni des nombres entiers ni des fractions, par exemple $x = \pi$, $x = \sqrt{3}$, etc.

Dans ce cas, la fonction prend les valeurs $2^{\pi}, 2^{\sqrt{3}}$, ... La façon dont on calcule ces valeurs dépasse les attentes de ce cours.

Remarquez que, pour des valeurs de la variable indépendante qui sont négatives et éloignées de l'origine, la distance entre l'axe horizontal et le graphique de la fonction $f(x) = 2^x$ devient aussi petite qu'on le veut, tout en gardant son signe positif, sans devenir égale à zéro. L'axe horizontal est une **asymptote** de la fonction.

NOTES :

ACTIVITÉ • 5.28

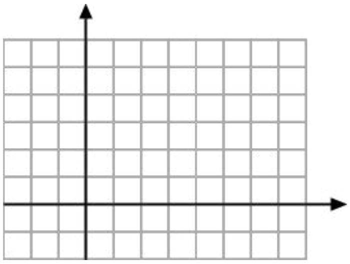
a) La fonction $f(x) = b^x$, $x \in [0; +\infty[$, est croissante si $b > 1$ et décroissante si $0 < b < 1$. Expliquez pourquoi.

b) On a $b^x > 0$, quel que soit x, avec $b > 0$. Expliquez pourquoi.

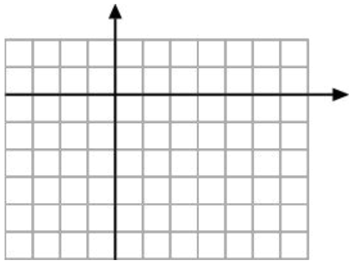
ACTIVITÉ • 5.29

Vous avez vu que le graphique de la fonction $f(x)=b^x$ change selon les valeurs de b (notamment si $b>1$ ou si $0<b<1$). Vous avez également vu des changements qui peuvent se produire quand on multiplie la règle de correspondance d'une fonction par un paramètre multiplicatif (positif ou négatif). Considérez la fonction $f(x)=ab^x$, $x\in\,]-\infty;+\infty[$ et, dans chaque cas, faites une esquisse du graphique de la fonction selon les valeurs de a et de b données. (Indice : Il y a quatre possibilités, soit $a>0$, $a<0$, $b>1$ et $0<b<1$.)

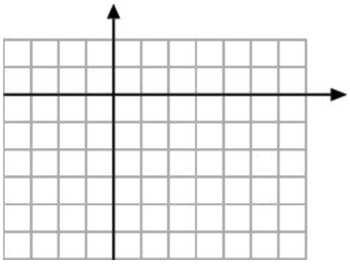
a) $a>0$ et $b>1$



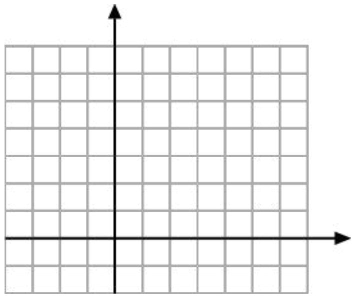
b) $a>0$ et $0<b<1$



c) $a<0$ et $b>1$

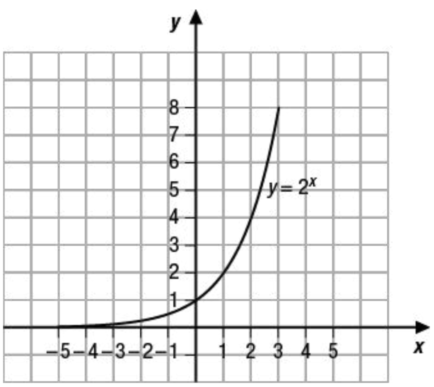


d) $a<0$ et $0<b<1$



ACTIVITÉ • 5.30

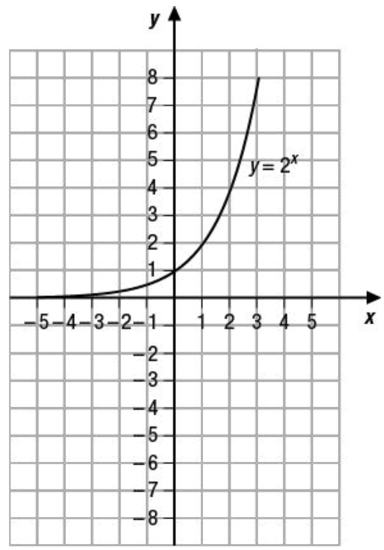
Dans le système d'axes ci-dessous, on a tracé le graphique de la fonction exponentielle $f(x)=2^x$, pour $x\in\,]-\infty;+\infty[$. Tracez les graphiques des fonctions $h(x)=2^x+1$ et $g(x)=2^{x+1}$, toutes les deux également définies pour $x\in\,]-\infty;+\infty[$. Pour chacune de ces deux fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, la variation et l'asymptote (le tableau se trouve à la page suivante).



	$y = h(x) = 2^x + 1$	$y = g(x) = 2^{x+1}$
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		
Asymptote		

ACTIVITÉ • 5.31

Dans le système d'axes ci-contre, on a tracé le graphique de la fonction $f(x) = 2^x$, $x \in]-\infty; +\infty[$. Tracez les graphiques des fonctions $t(x) = -2^x$, $g(x) = -2^x - 1$ et $s(x) = 2^{-x}$, toutes les trois également définies pour $x \in]-\infty; +\infty[$. Pour chacune de ces trois fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, la variation et l'asymptote.



	$y = t(x) = -2^x$	$y = g(x) = -2^x - 1$	$y = s(x) = 2^{-x}$
Ensemble image			
Zéros			
Ordonnée à l'origine			
Variation			
Asymptote			

ACTIVITÉ • 5.32

Croissance linéaire ou croissance exponentielle ?

La variable y varie en fonction de la variable x selon les tableaux ci-après. Pour chaque tableau, déterminez si la croissance est linéaire, exponentielle ou ni l'un ni l'autre. Justifiez votre réponse avec une méthode non graphique.

a)

x	$y = f(x)$
0	2
1	3
2	4,5
3	6,75
4	10,125

b)

x	$y = g(x)$
0	2
1	3,2
2	4,4
3	5,6
4	6,8

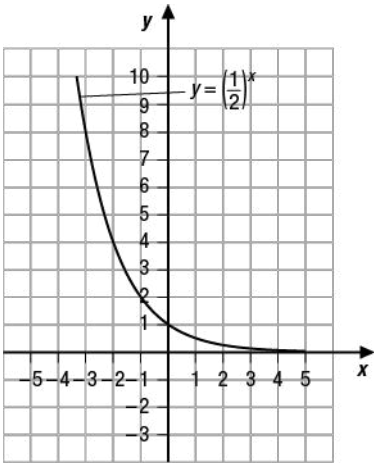
c)

x	$y = h(x)$
0	2
1	3
2	5
3	8
4	12

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 5.33

Dans le système d'axes ci-contre, on a tracé le graphique de la fonction $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in\,]-\infty\,; +\infty[$. Tracez les graphiques des fonctions $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ et $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, toutes les deux également définies pour $x \in\,]-\infty\,; +\infty[$. Pour chacune de ces deux fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine, la variation et l'asymptote.



	$y = h(x)$	$y = g(x)$
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		
Asymptote		

ACTIVITÉ • 5.34

La variable y augmente avec la variable x selon les tableaux ci-dessous. Pour chaque tableau, déterminez si la croissance est linéaire, exponentielle ou ni l'un ni l'autre. Justifiez votre réponse avec une méthode non graphique.

a)

x	$y = f(x)$
0	2
1	6
2	8
3	10
4	12

b)

x	$y = g(x)$
0	2
1	6
2	18
3	54
4	162

c)

x	$y = h(x)$
0	2
1	6
2	10
3	14
4	18

ACTIVITÉ • 5.35

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

a) La fonction $f(x) = 1^x$ est une fonction exponentielle.

b) La fonction $f(x) = (-2)^x$ est une fonction exponentielle.

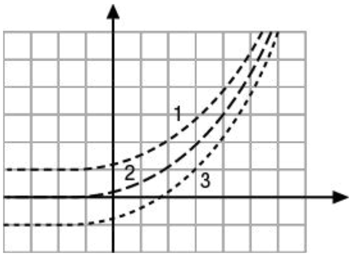
c) La fonction exponentielle $f(x) = b^x$ n'a pas de zéro.

d) La fonction exponentielle $f(x) = \left(\frac{7}{6}\right)^x$ est décroissante.

e) La fonction $f(x) = 3^x$ a un maximum.

Mes activités de récapitulation

R5.1



Observez les graphiques de ces trois fonctions :

$h(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x$, $g(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x-1$ et $f(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x+1$.

a) Associez un graphique à chaque règle de correspondance.

b) Complétez le tableau suivant.

	Image	Asymptote
$f(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x+1$		
$g(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x-1$		
$h(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x$		

R5.2

Soit *f*, la fonction donnée par la formule $f(x)=2\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$. Calculez $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$ et $f(-5)$.

R5.3

Soit les fonctions $f(x)=\frac{1}{2}(5)^x+1$, $g(x)=2^x-3$, $h(x)=-3\left(\frac{1}{4}\right)^x+5$, $t(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x-2$ et $l(x)=3^x+2$.

Complétez le tableau suivant.

Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$t(x)$	$l(x)$
Ordonnée à l'origine					
Image					
Variation					

R5.4

Montrez que la fonction dont la règle de correspondance est $f(x)=-3(2)^x-7$ est négative pour toutes les valeurs réelles de x.

R5.5

Donnez trois fonctions exponentielles différentes où l'ordonnée à l'origine est le point $(0;4)$.

R5.6

Soit la fonction exponentielle $f(x)=-3\cdot 5^x+k$.

a) Trouvez une valeur de k telle que la fonction ait un seul zéro.

b) Trouvez une valeur de k telle que la fonction n'ait aucun zéro.

R5.7

Donnez les zéros, la variation et le signe de la fonction $f(x) = -4^x - 2$.

R5.8

Trouvez une ou des valeurs de a telles que le graphique de $f(x) = a\left(\frac{1}{2}\right)^x - a$ passe par le point $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$.

R5.9

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(3)^x + k$. Déterminez une valeur de k telle que $f(3) = 0$.

R5.10

Déterminez si chacune des égalités suivantes est vraie ou non.

a) $2x^2 + 2x^2 = 4x^4$

b) $\sqrt{16a^2} = 4a$

c) $2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 1)$

R5.11

Trouvez la valeur de a dans chacune des égalités suivantes.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[a]{5}} = \sqrt[18]{5}$

b) $\sqrt[a]{\sqrt[a]{\sqrt[a]{27}}} = \sqrt[8]{27}$

c) $\sqrt[a+2]{16} = \sqrt{\sqrt[a]{16}}$

R5.12

D'un rectangle, on sait que la base mesure $4\sqrt{3}$ cm et la hauteur, $\sqrt{12}$ cm. Calculez son périmètre et son aire, et exprimez les résultats en utilisant des racines.

CHAPITRE

6 LA RÉCIPROQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET DE PROBLÈMES EXPONENTIELS

Objectifs d'apprentissage

- Savoir résoudre des équations exponentielles, à l'aide de logarithmes ou non
- Savoir utiliser les logarithmes et le changement de base
- Connaître la fonction logarithme et la reconnaître comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle
- Comprendre la notion de fonction réciproque en général (du point de vue graphique)

A. La réciproque de la fonction exponentielle

J'explore

ACTIVITÉ • 6.1

Reprenons l'exemple de l'activité 5.1, où des escargots se reproduisent de telle sorte que leur quantité double chaque mois. Si l'on commence au moment $x = 1$ avec deux escargots, on peut modéliser la situation par la fonction $y = f(x) = 2^x$, où x est mesuré en mois.

a) Obtenez les valeurs $f(5)$ et $f(8)$. Autrement dit, déterminez la quantité d'escargots au cinquième mois et au huitième mois.

b) À quel mois la quantité d'escargots est-elle :

i) de 64 ?

ii) de 128 ?

iii) de 512 ?

c) À quel moment précis la quantité d'escargots est-elle de 100 ?

La réciproque d'une fonction exponentielle

La question a) de l'activité 6.1 n'est pas difficile, car il suffit de calculer des puissances de 2 :

$f(5) = 2^5 = 32$

$f(8) = 2^8 = 256$

Autrement dit, au cinquième mois, on a 32 escargots, et au huitième mois, on en a 256. Pour la question b), on peut écrire les questions sous la forme d'équations :

i) $2^x = 64$ **ii)** $2^x = 128$ **iii)** $2^x = 512$

dont la variable est à l'exposant. On remarque que 32, 64, 128 et 512 sont des puissances de 2, ce qui permet de déduire facilement les réponses. Ces informations sont présentées dans le tableau suivant.

x (mois)	$y = f(x) = 2^x$ (quantité d'escargots)
1	2
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$
7	$2^7 = 128$
8	$2^8 = 256$
9	$2^9 = 512$
$\vdots$	$\vdots$

Lorsqu'on assigne des valeurs à la variable x, la formule $y = f(x) = 2^x$ permet d'obtenir les valeurs de y. En regardant les puissances de 2 dans la colonne de la variable dépendante, on repère la valeur de x correspondante.

Autrement dit, pour l'équation $2^x = 64$, on peut écrire $2^x = 2^6$ et, grâce à l'unicité de l'exponentielle, on peut déduire que $x = 6$.

Si la valeur de y n'est pas une puissance de 2, comme lorsque $y = 100$, la résolution de l'équation $2^x = 100$ ne peut plus se faire comme dans l'exemple précédent.

On peut déduire du tableau ci-dessus qu'une quantité de 100 escargots a été atteinte entre les moments où il y a eu 64 et 128 escargots, ce qui correspond à un moment entre les sixième et septième mois.

Pour déterminer le moment précis, entre les sixième et septième mois, où il y a eu 100 escargots, il faut connaître une façon d'exprimer la situation en fonction de y plutôt qu'en fonction de x. Autrement dit, on a besoin de connaître la **fonction réciproque de la fonction f**. Cette fonction réciproque s'appelle la **fonction logarithme.** Nous y reviendrons plus loin. Résolvons d'abord des équations simples dont la variable est dans l'exposant et pour lesquelles nous n'avons pas besoin du logarithme.

Nous retenons la propriété suivante : si $b^a = b^c$, alors $a = c$. De même, sachant que $a = c$, on peut déduire que $b^a = b^c$. Les arguments qui montrent la validité de cette propriété dépassent le niveau de ce cours.

NOTES :

B. La résolution d'équations exponentielles

En retenant la propriété « si $b^a = b^c$, alors $a = c$ », nous vous proposons de résoudre les équations exponentielles suivantes.

J'explore

ACTIVITÉ • 6.2

Résolvez les équations exponentielles suivantes et vérifiez les réponses.

a) $3^{x+1} = 243$

b) $5^{2x+4} = 5^{x-3}$

ACTIVITÉ • 6.3

Résolvez les équations suivantes et vérifiez les réponses obtenues.

a) $3^x = \dfrac{1}{3}$

b) $4^x = 2$

Au chapitre 5, vous avez étudié certaines des propriétés des exposants. Dans les exemples de l'encadré ci-dessous, voyez comment les utiliser afin de résoudre des équations exponentielles.

La résolution d'équations exponentielles

Exemple 1

$4^{x+2}+4^{x}=\frac{17}{4}$ Telle qu'elle est écrite, on ne peut pas isoler la variable *x*.

$4^{x}\cdot 4^{2}+4^{x}=\frac{17}{4}$ On met 4^x en évidence. Quelle propriété des exposants a-t-on utilisée ici ?

$4^{x}(4^{2}+1)=\frac{17}{4}$

$4^{x}\cdot 17=\frac{17}{4}$

$4^{x}=\frac{1}{4}$

On réécrit $\frac{1}{4}$ pour pouvoir utiliser plus clairement l'unicité de l'exponentielle et isoler la variable x :

$4^{x}=4^{-1}$, d'où $x=-1$

Vérification (on part du membre de gauche de l'équation initiale) :

$4^{-1+2}+4^{-1}=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

Exemple 2

$64=4\cdot 2^{x}$ On essaie, si possible, de tout mettre en termes de puissances de 2.

$2^{6}=2^{2}\cdot 2^{x}$

$2^{6}=2^{2+x}$ Quelle propriété des exposants a-t-on utilisée ici ?

$6=2+x$

$x=4$

Vérification (on part du membre de droite de l'équation initiale) :

$4\cdot 2^{4}=4\cdot 16=64$

NOTES :

ACTIVITÉ • 6.4

Indiquez la ou les propriétés des exposants que l'on a utilisées dans l'encadré précédent.

ACTIVITÉ • 6.5

Réécrivez les expressions suivantes sous forme d'expressions équivalentes de sorte qu'il y ait un seul exposant.

a) $81 \cdot 3^{-x} =$

b) $25^{x-2} \cdot 5^{2x+1} =$

ACTIVITÉ • 6.6

Résolvez les équations suivantes et vérifiez vos réponses.

a) $6^x + 6^{x+1} - \frac{7}{36} = 0$

b) $3^x + 3^x = 6$

c) $27 \cdot 3^{2x+3} = 9^{3x}$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 6.7

Réécrivez les expressions suivantes de sorte qu'il n'y ait qu'un seul exposant.

a) $4^x \cdot 2^{x+1} =$

b) $3^{2x+2} \cdot 9^{3-x} \cdot 81^x =$

ACTIVITÉ • 6.8

Résolvez les équations suivantes et vérifiez les réponses.

a) $4^x \cdot 2^{x+1} = 1$

b) $27 \cdot 3^{x+2} - \frac{1}{3} = 0$

c) $2^{x-1} = \frac{1}{16}$

d) $3^{2x} = 81$

e) $2^{x+1} = 4^{2x}$

C. Les logarithmes et la résolution d'équations exponentielles

Vous avez résolu jusqu'à présent des équations exponentielles « simples » en vous servant de la propriété « si $b^a = b^c$, alors $a = c$ ». Mais que faire si l'on ne peut pas utiliser la même base ? Concrètement, $2^x = 16$ est facile à résoudre, car $16 = 2^4$; mais que faire si l'on a à résoudre $2^x = 19$ ou $2^x = 100$?

J'explore

ACTIVITÉ • 6.9

Avec une calculatrice, estimez par essais et erreurs une solution approximative de l'équation $2^x = 100$, puis inscrivez les valeurs dans le tableau ci-dessous. Remarquez que la valeur de x que vous cherchez se trouve entre 6 et 7. Donnez une valeur de x avec trois chiffres après la virgule.

x	2^x
$\vdots$	$\vdots$

Les logarithmes

Comme nous l'avons mentionné plus haut, pour résoudre l'équation $2^x = 100$, on ne peut pas employer la même stratégie que dans les activités 6.2 à 6.6, car 100 n'est pas une puissance de base 2.

L'exposant que l'on cherche s'appelle le **logarithme** de 100 en base 2 et il s'écrit $\log_2 100$. On l'obtient facilement avec une calculatrice (nous verrons comment ci-après). L'utilisation de la calculatrice évite de devoir chercher des valeurs par essais et erreurs.

Voici une définition générale : le logarithme d'un nombre a dans la base b est le nombre, en exposant, auquel il faut élever la base b afin d'obtenir le nombre a.

Autrement écrit : $b^x = a$ est équivalent à $x = \log_b a$. Cette équivalence implique que si $b^x = a$, alors $x = \log_b a$, et que si $x = \log_b a$, alors $b^x = a$.

Exemples :

a) Étant donné que $2^5 = 32$, alors $\log_2 32 = 5$.

b) $\log_4 64 = 3$, car $4^3 = 64$.

Habituellement, on n'écrit pas la base lorsqu'elle est égale à 10.

La calculatrice ne permet de calculer que les logarithmes en base 10 et en base $e = 2{,}718\ 281\ldots$ (un nombre irrationnel très important pour ses applications en biologie et en économie). Elle utilise la notation $\log x$ pour $\log_{10} x$ et $\ln x$ pour $\log_e x$.

Il faut utiliser une formule de changement de base pour pouvoir calculer tous les logarithmes, quelle que soit leur base. Nous ne pourrons pas démontrer ici la validité de cette formule, car la démonstration dépasse le niveau de ce cours.

Formule de changement de base : $\log_b a = \dfrac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = \dfrac{\log a}{\log b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

Alors, pour l'équation $2^x = 100$, on cherche la valeur de $x = \log_2 100$. En utilisant la formule de changement de base, on obtient :

$$x = \log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2} \approx 6{,}6439$$

c'est-à-dire $2^{6{,}6438} \approx 100$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 6.10

Dans les équations suivantes, la variable est à l'exposant. Au besoin, utilisez la formule de changement de base pour trouver les solutions et vérifiez les réponses à l'aide de la calculatrice (touche puissance $\boxed{y^x}$ ou touche $\boxed{\wedge}$).

a) $6^x = 3$

b) $5^x = 89$

c) $(1{,}4)^n = 7$

ACTIVITÉ • 6.11

Dans les équations suivantes, la variable est affectée par un logarithme. Servez-vous de la définition du logarithme pour trouver les solutions. Vous pouvez vous inspirer de la première équation déjà résolue.

a) $\log_3 x = 2$

> $\log_3 x = 2$, alors $x = 3^2$, d'où $x = 9$
>
> Vérification : $\log_3 9 = \dfrac{\log 9}{\log 3} = 2$

b) $\log_5(x+1) = -1$

c) $\log_b 27 = 3$

ACTIVITÉ • 6.12

Vous placez à la banque un montant de 8000 \$ à un taux annuel de 5,6 % pour 10 ans. Le capital accumulé en fonction du temps peut se représenter par la fonction $C(t) = 8000(1{,}056)^t$, où t est le nombre d'années écoulées.

a) Quel montant aurez-vous accumulé à l'échéance ?

b) À quel moment aurez-vous accumulé 10 000 \$?

c) À quel moment aurez-vous accumulé 12 000 $?

ACTIVITÉ • 6.13

Trouvez les zéros des fonctions suivantes. (Rappel : Un zéro d'une fonction $y = f(x)$ est une valeur de x qui fait en sorte que la fonction prenne la valeur 0. On trouve les zéros en posant l'équation $f(x) = 0$ et en isolant la variable x.)

a) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{3}{2}$

b) $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{9}{4}$

c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{8}{27}$

d) $j(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 5$

e) $f(x) = \log_3 x - 5$

f) $g(x) = \log_7 x + 3$

g) $h(x) = \log x + 7$

h) $j(x) = \log_2(x-1) - 2$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 6.14

En utilisant la formule de changement de base, trouvez les logarithmes suivants.

a) Trouvez le logarithme en base 2 du nombre 1024.

b) Trouvez le logarithme en base 3 du nombre 243.

c) Trouvez le logarithme en base 4 du nombre 1000.

ACTIVITÉ • 6.15

Résolvez les équations suivantes.

a) $6^x = 216$

b) $6^x = 300$

c) $4^x = 256$

d) $4^x = 200$

e) $1{,}3^t = 22$

f) $5^x = 7{,}4$

ACTIVITÉ • 6.16

Trouvez les solutions des équations suivantes.

a) $\log_7 x = 3$ **b)** $\log_2(x-1) = 5$ **c)** $\log_a 9 = 2$

ACTIVITÉ • 6.17

Un capital de 6500 $ est placé à 4,9 % d'intérêt annuel, de sorte que la fonction qui représente l'évolution de ce capital est $C(x) = 6500(1,049)^x$.

a) Dans combien de temps le capital sera-t-il de 10 000 $?

b) Dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ?

ACTIVITÉ • 6.18

La population d'une ville est représentée par la fonction $P(x) = 32\ 000(2,7)^{0,06x}$, où x représente le temps écoulé, en années. Dans combien de temps aura-t-elle doublé ?

ACTIVITÉ • 6.19

La machinerie toute neuve d'une usine coûte 250 000 $. On a estimé que cette machinerie se déprécie au taux de 18 % par année, de sorte que la fonction $f(x) = 250\ 000(0,82)^x$ donne sa valeur x années après l'achat.

a) Expliquez pourquoi la fonction f représente bien cette situation.

b) Déterminez dans combien de temps la machinerie vaudra la moitié de sa valeur à neuf.

c) Déterminez dans combien de temps la machinerie aura une valeur de 100 000 $.

ACTIVITÉ • 6.20

Trouvez les zéros des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^x-\frac{25}{16}$

b) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-4$

c) $h(x)=\left(\frac{49}{4}\right)^x-\frac{7}{2}$

d) $j(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-4$

e) $f(x)=\log_5 x+2$

f) $g(x)=\log_3 x-2$

g) $h(x) = \log_2(x+3)+4$

h) $j(x) = \log_{16}(x+4) - \frac{1}{2}$

D. La réciproque de l'exponentielle

Nous avons étudié sommairement la notion de fonction réciproque au chapitre 1. Nous l'abordons de nouveau ici en lien avec la fonction exponentielle.

La fonction logarithme, réciproque de la fonction exponentielle

Reprenons la fonction $y = f(x) = 2^x$, $x \in]-\infty; +\infty[$, soit la fonction exponentielle de base 2 qui, pour chaque valeur de x, attribue une valeur à y. La notion de logarithme permet d'affirmer que $x = \log_2 y$, ce qui donne, pour chaque valeur de y, la valeur correspondante de x.

Cette règle correspond à une fonction, soit la fonction logarithme en base 2, $g(x) = \log_2 x$, qui est la **réciproque** de la fonction exponentielle de base 2. Les activités suivantes permettent d'analyser cette situation un peu plus en détail.

NOTES :

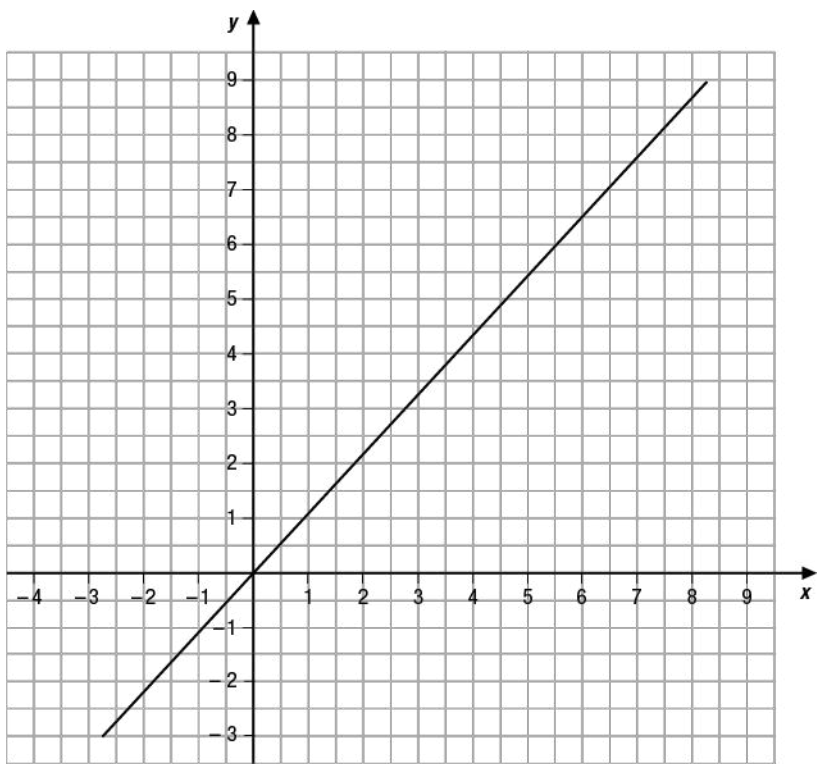
J'explore

ACTIVITÉ • 6.21

a) Complétez les tableaux ci-dessous et tracez les graphiques approximatifs des fonctions $y = f(x) = 2^x,\ x \in]-\infty;\ +\infty[$, et $y = f^{-1}(x) = \log_2 x,\ x \in]0;\ +\infty[$.

x	$y = f(x) = 2^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = f^{-1}(x) = \log_2 x$
$0{,}125 = \frac{1}{8}$	
$0{,}25 = \frac{1}{4}$	
$0{,}5 = \frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	



b) Pour chacune des fonctions données en a), déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la variation dans le tableau suivant.

	$y = f(x) = 2^x$	$y = f^{-1}(x) = \log_2 x$
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		

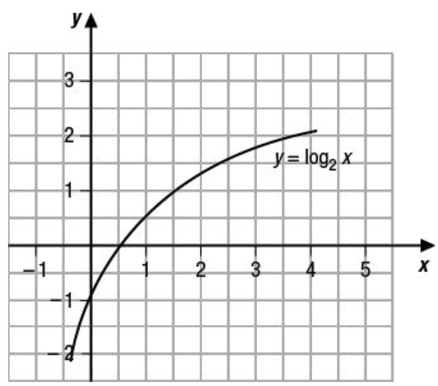
c) Observez dans les graphiques précédents que pour chaque point $(a\,;b)$ du premier graphique, le point $(b\,;a)$ appartient au deuxième graphique. Tracez l'axe de symétrie qui fait que ces deux graphiques correspondent à deux fonctions réciproques l'une de l'autre.

La fonction logarithme, réciproque de l'exponentielle (suite)

Soit la fonction exponentielle de base b, $y = f(x) = b^x$, dont le domaine est $x \in\,]-\infty;+\infty[$ et dont l'ensemble image est $y \in\,]0;+\infty[$. **La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction logarithme de base b :** $y = f^{-1}(x) = \log_b x$, dont le domaine est $x \in\,]0;+\infty[$ et dont l'image est $y \in\,]-\infty;+\infty[$ (ici, les variables ont été interverties pour faciliter la lecture).

ACTIVITÉ • 6.22

Dans le système d'axes ci-contre, on a tracé le graphique de la fonction $f(x) = \log_2 x$, $x \in\,]0;+\infty[$. Tracez les graphiques des fonctions $h(x) = \log_2 x + 1$ et $g(x) = -\log_2 x$, définies toutes les deux pour $x \in\,]0;+\infty[$. Pour chacune de ces deux fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la variation.

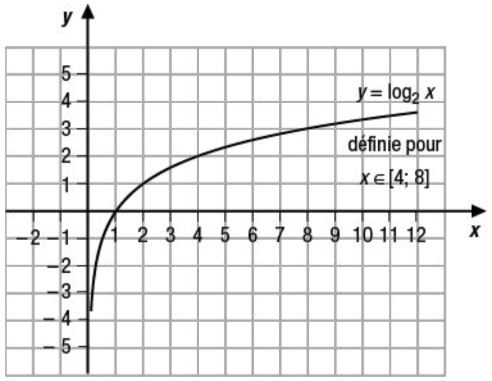


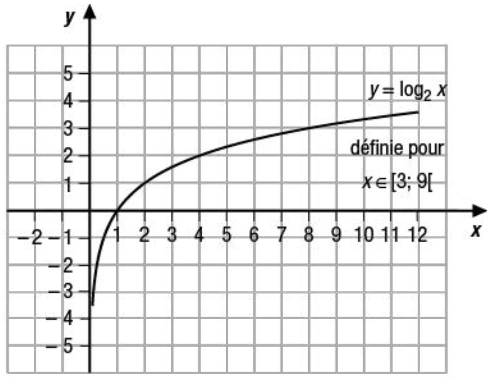
	$y = h(x) = \log_2 x + 1$	$y = g(x) = -\log_2 x$
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		

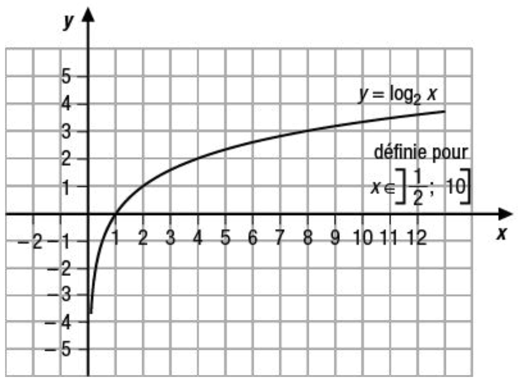
ACTIVITÉ • 6.23

Soit la fonction $f(x) = \log_2 x$ définie sur différents intervalles, comme on le voit dans le tableau suivant. Déterminez l'image et les zéros dans chaque cas. Servez-vous des graphiques ci-dessous.

	$f(x) = \log_2 x$, $x \in [4 ; 8]$	$f(x) = \log_2 x$, $x \in [3 ; 9[$	$f(x) = \log_2 x$, $x \in \left]\frac{1}{2} ; 10\right]$
Ensemble image			
Zéros			







La fonction réciproque du point de vue graphique

Comme nous l'avons illustré dans l'activité 6.21 c), il y a une symétrie axiale entre les graphiques de deux fonctions qui sont la réciproque l'une de l'autre.

L'axe de symétrie est donné par la droite d'équation $y = x$. En effet, pour chaque point $(a ; b)$ du premier graphique, le point $(b ; a)$ appartient au deuxième graphique.

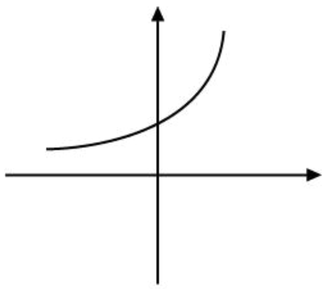
Cette symétrie permet de trouver le graphique de la réciproque de toute fonction en traçant un graphique symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le graphique obtenu ne correspondra pas toujours à une fonction. Pour ce faire, le graphique doit respecter la condition d'une fonction, qui est d'avoir au plus une seule valeur de la variable dépendante y pour chaque valeur de la variable indépendante x.

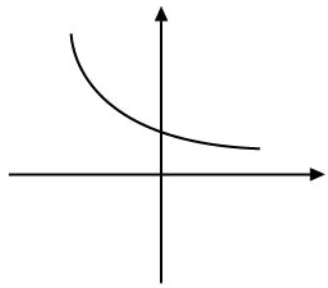
ACTIVITÉ • 6.24

Pour chacune des fonctions illustrées ci-après, tracez le graphique de sa réciproque et déterminez si cette réciproque est une fonction.

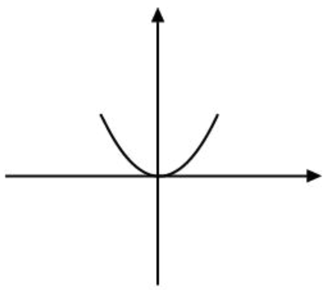
a)



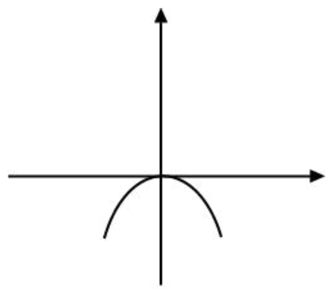
b)



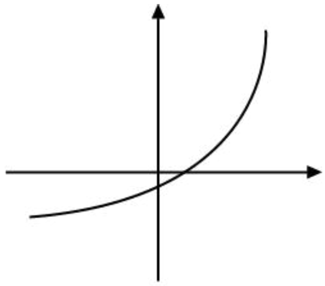
c)



d)



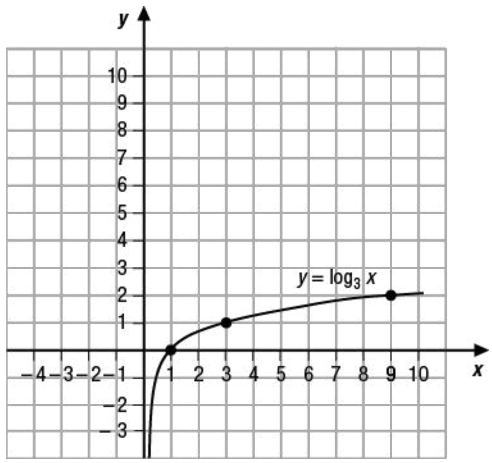
e)



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 6.25

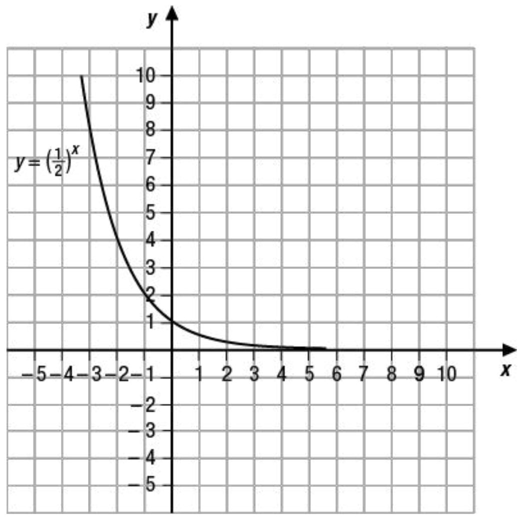
Dans le système d'axes ci-dessous, on a tracé le graphique de la fonction $f(x) = \log_3 x$, $x \in \,]0\,;\,+\infty[$. Tracez le graphique de sa réciproque et déduisez sa règle de correspondance. Marquez au moins trois points sur le graphique. Pour chacune de ces deux fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la variation dans le tableau suivant.



	$f(x) = \log_3 x$	Réciproque de f
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		

ACTIVITÉ • 6.26

Dans le système d'axes ci-dessous, observez le graphique de la fonction $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in]-\infty; +\infty[$. Tracez le graphique de la fonction réciproque et déduisez sa règle de correspondance. Marquez au moins trois points sur le graphique. Pour chacune de ces deux fonctions, déterminez l'ensemble image, les zéros et l'ordonnée à l'origine dans le tableau.



	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	Réciproque de *f*
Ensemble image		
Zéros		
Ordonnée à l'origine		
Variation		

Mes activités de récapitulation

R6.1

Résolvez les équations exponentielles suivantes.

a) $3^x = 729$ **b)** $3^x = 800$ **c)** $2{,}5^x = 25$ **d)** $4{,}2^x = 26{,}8$

R6.2

Un capital de 25 000 $ est placé à 0,5 % d'intérêt mensuel, de sorte que la fonction qui représente l'évolution de ce capital est $C(x) = 25\,000(1{,}005)^x$, où x représente le nombre de mois après le début du placement.

a) Donnez le capital accumulé un an après le placement.

b) Dans combien de temps le capital sera-t-il de 26 278,50 $?

c) Si l'on continue longtemps à renouveler le placement, dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ?

R6.3

On a estimé qu'un certain type de bactérie croît selon la fonction $N(t) = 1600 \cdot 6^{0{,}02t}$, où N est le nombre de bactéries et t est le temps, en heures.

a) Combien de bactéries aura-t-on après 4 heures ?

b) Combien de temps se sera écoulé lorsque la population sera de 30 000 bactéries ?

R6.4

On a estimé que le taux de dépréciation annuel d'une voiture est de l'ordre de 18 %. Si vous achetez une voiture neuve à 22 000 $, dans combien de temps sa valeur sera-t-elle réduite de moitié ?

R6.5

a) Considérez la fonction $y = f(x) = (1{,}3)^x$. Complétez le tableau suivant et faites une esquisse du graphique de cette fonction.

x	$y = f(x) = (1{,}3)^x$
0	
1	
–1	
2	
–2	
3	
–3	
4	
–4	
⋮	⋮

b) Dans le même système d'axes, tracez le graphique de la réciproque de cette fonction.

c) Trouvez l'équation de cette réciproque.

R6.6

Soit les fonctions $f(x)=\frac{1}{2}(5)^x+1$, $g(x)=2^x-3$, $h(x)=-3\left(\frac{1}{4}\right)^x+5$, $t(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x-2$ et $l(x)=3^x+2$.

Tracez le graphique de chacune des fonctions. Remplissez ensuite le tableau ci-dessous.

Fonctions	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$t(x)$	$l(x)$
Ordonnée à l'origine					
Zéro					
Image					
Variation					
Signe					

R6.7

Déterminez le domaine, l'image, les zéros et le signe de la fonction $f(x)=3\cdot 4^x-48$.

R6.8

Pour chacune des fonctions exponentielles suivantes, trouvez le zéro et l'ordonnée à l'origine, puis esquissez le graphique.

a) $y=3^x-4$ **b)** $y=-2\cdot 4^x+8$ **c)** $y=4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

R6.9

Considérez la fonction exponentielle $f(x)=-3\cdot 5^x+k-1$. Donnez une valeur à k afin que la fonction :

a) ait un seul zéro ; **b)** n'ait aucun zéro.

R6.10

Donnez les zéros, la variation et le signe de la fonction $f(x)=-4^x-2$.

CHAPITRE

7 LA FONCTION QUADRATIQUE SOUS LA FORME CANONIQUE

Objectifs d'apprentissage

- Connaître la fonction quadratique $f(x) = ax^2$, son graphique, son axe de symétrie et son sommet
- Savoir effectuer des translations verticales et horizontales d'une parabole et les reconnaître dans une règle de correspondance
- Connaître la forme canonique $f(x) = a(x - h)^2 + k$ et savoir interpréter les paramètres h et k
- Savoir trouver les zéros d'une fonction quadratique sous la forme canonique

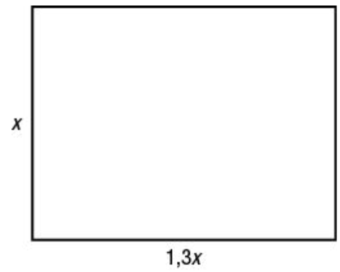
A. Les fonctions quadratiques de règle $y = f(x) = ax^2$

Commencez ce chapitre en effectuant l'activité 7.1, pour laquelle vous n'avez pas besoin d'explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 7.1

Une compagnie fabrique des tuiles rectangulaires dont la base est 30 % plus longue que la hauteur.



a) Trouvez l'aire d'une tuile si sa hauteur est :

i) de 2,3 cm ;

ii) de 3,8 cm.

b) Trouvez la règle de correspondance d'une fonction qui sert à obtenir l'**aire** A des tuiles en fonction de la **hauteur** x. Quelle restriction devrait-on imposer à la variable x du contexte du problème ?

c) Quelle est la hauteur d'une tuile, si on sait que son aire est de 20,8 cm^2 ?

La fonction quadratique

Dans l'activité 7.1, la formule qui décrit l'aire du rectangle en fonction de la base est $y = A(x) = 1,3x^2$, pour $x \in \,]0; +\infty[$. Comme la variable indépendante est au carré, ce n'est plus une fonction linéaire. Il s'agit d'une fonction quadratique.

L'expression générale d'une fonction quadratique est $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour les valeurs de x appartenant au domaine de la fonction. Si aucune restriction n'est donnée, son domaine est l'ensemble des nombres réels, soit $x \in \,]-\infty; +\infty[$.

Si b ou c prennent la valeur 0, la fonction prend la forme $y = f(x) = ax^2 + bx$, $f(x) = ax^2 + c$ ou $f(x) = ax^2$, donc reste quadratique. Si $a = 0$, la fonction n'est pas quadratique, mais au plus linéaire.

Exemples :

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, où $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$

2. $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 8$, où $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -8$

3. $h(x) = (x-2)^2 + 5$, qu'il faut développer pour connaître les valeurs de a, de b et de c. En développant, on obtient $h(x) = x^2 - 4x + 9$, où $a = 1$, $b = -4$, $c = 9$.

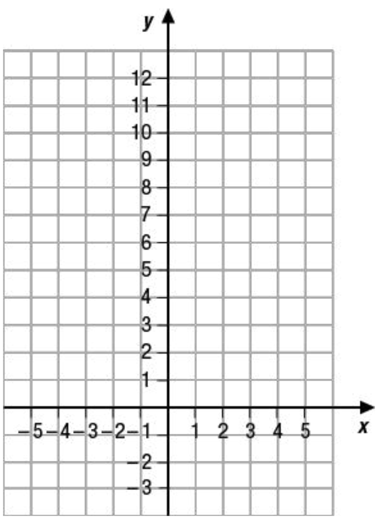
Le cas le plus simple est celui où $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x^2$.

NOTES :

Vous allez commencer l'étude de la fonction quadratique par la fonction $f(x) = x^2$.

ACTIVITÉ • 7.2

a) Pour la fonction $f(x) = x^2$, où $x \in]-\infty\,;+\infty[$, complétez le tableau et tracez le graphique.



x	$y = f(x) = x^2$
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

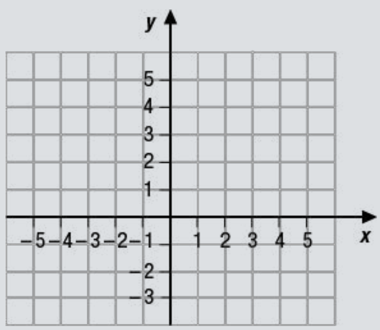
b) Donnez les caractéristiques demandées ci-dessous en vous aidant du graphique en a).

Caractéristiques	$f(x)$
Image	$x \in [0\,;+\infty[$
Signe	
Variation	
Sommet	
Axe de symétrie	

La parabole, l'axe de symétrie et le sommet

Le graphique d'une fonction quadratique reçoit le nom de **parabole.**

La fonction $f(x)=x^2$, $x \in]-\infty; +\infty[$, vérifie pour chaque valeur de variable indépendante $x=a$ l'égalité $f(a)=f(-a)$. L'axe vertical (la droite d'équation $x=0$) fonctionne comme un miroir. On dit alors que la parabole a un **axe de symétrie verticale.**



Toute parabole coupe l'axe de symétrie. Ce point d'intersection s'appelle **sommet.**

L'axe de symétrie de la parabole $y=x^2$ est la droite verticale $x=0$. Son sommet est le point $S(x_s\,;\,y_s)=(0\,;0)$.

ACTIVITÉ • 7.3

a) Au lieu de considérer la fonction $f(x)=x^2$ pour $x \in]-\infty\,; +\infty[$, considérez-la pour $x \in [-2; 2]$. Donnez l'ensemble image et décrivez la façon dont le graphique change.

b) Refaites la question a), mais pour $x \in [-2; 4[$.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.4

Donnez les caractéristiques demandées ci-dessous pour la fonction $f(x) = x^2$, où $x \in]-2,5; 4]$. Vous pouvez vous aider du graphique que vous avez fait à l'activité 7.2.

a) Image :

b) Signe :

c) Variation :

d) Sommet :

e) Axe de symétrie :

B. Le paramètre multiplicatif *a* dans la règle $y = f(x) = ax^2$

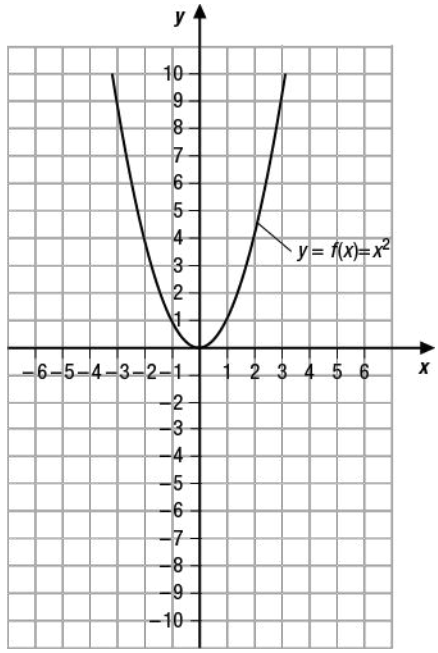
Nous allons voir de quelle manière le paramètre a a une incidence sur le graphique de la fonction $y = f(x) = ax^2$.

J'explore

ACTIVITÉ • 7.5

Complétez le tableau à la page suivante pour les fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ [le « double » de $f(x)$] et $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ [la « moitié » de $f(x)$], et représentez les fonctions g et h par des graphiques.

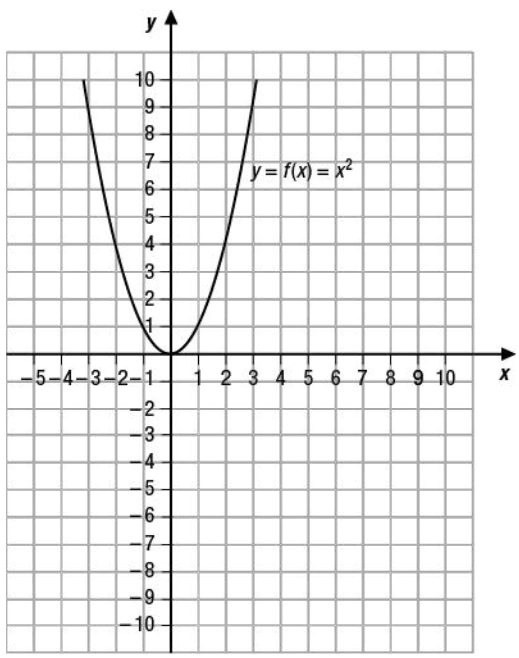
x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$
–3			
–2			
–1			
0			
1			
2			
3			



ACTIVITÉ • 7.6

Complétez le tableau ci-dessous pour les fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$ et $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, puis tracez leur graphique respectif.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = -x^2$	$h(x) = -\frac{1}{2}x^2$
–3			
–2			
–1			
0			
1			
2			
3			



Le graphique de la fonction quadratique

Si l'on considère le graphique de la fonction quadratique $g(x) = ax^2$, on arrive aux conclusions suivantes.

- Si $a > 0$, la parabole est concave vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est concave vers le bas.
- Si $a > 1$ ou $a < -1$, la parabole est plus fermée que $f(x) = x^2$ ou $f(x) = -x^2$.
  Exemple : $g(x) = 2x^2$
- Si $-1 < a < 1$, la parabole est plus ouverte que $f(x) = x^2$ ou $f(x) = -x^2$.
  Exemple : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Attention : Le sommet d'une parabole $S(x_s ; y_s)$ donne la valeur maximale de la fonction lorsque le coefficient a est négatif et sa valeur minimale lorsque a est négatif.

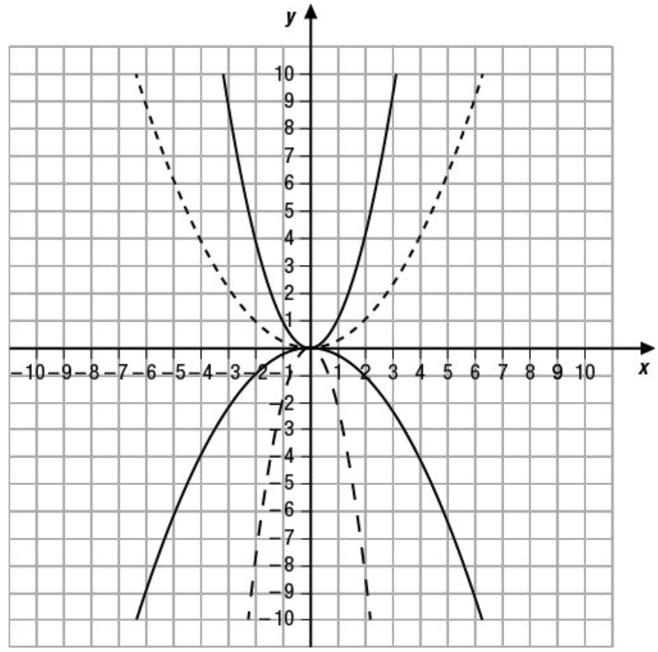
- Si $a > 0$, alors f décroît à gauche de la coordonnée x_s du sommet et croît à droite.
- Si $a < 0$, alors f croît à gauche de la coordonnée x_s du sommet et décroît à droite.

NOTES :

ACTIVITÉ • 7.7

À chacun des graphiques suivants est associée une règle de correspondance. Associez la règle de correspondance qui convient à chaque graphique. Justifiez votre réponse.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = -2x^2$
- $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2$
- $i(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$



ACTIVITÉ • 7.8

Trouvez la règle de correspondance d'une fonction quadratique sachant qu'elle est du type $f(x) = ax^2$ et qu'elle passe par le point (–5 ; 50), c'est-à-dire que quand $x = -5$, y prend la valeur 50.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.9

Déterminez si les affirmations ci-après sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, expliquez pourquoi ; si elles sont fausses, reformulez-les de telle sorte qu'elles deviennent vraies.

a) La fonction $g(x) = ax^2$ est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

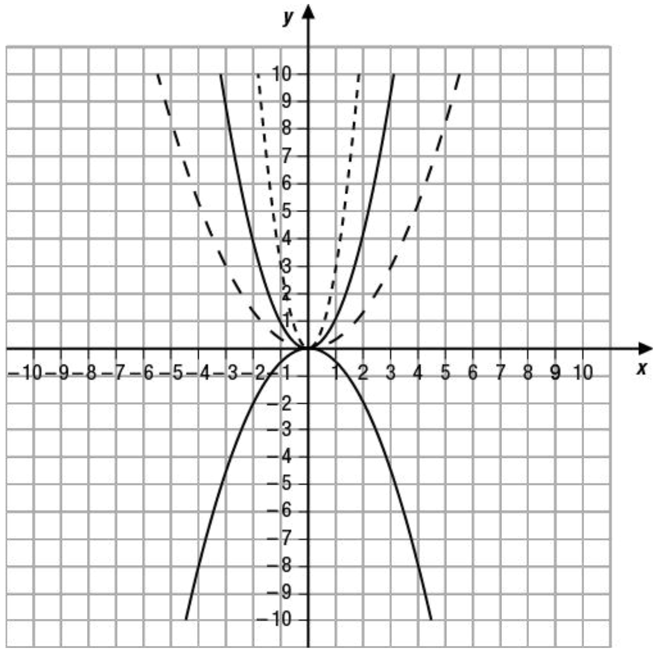
b) Si $f(x)=3x^2$, alors $f(-1)=-3$.

c) Si $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, alors $h(-2)>h(1)$.

ACTIVITÉ • 7.10

Associez la règle de correspondance qui convient à chacun des graphiques ci-dessous.

- $f(x)=x^2$
- $g(x)=3x^2$
- $h(x)=\dfrac{1}{3}x^2$
- $i(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$



C. Les translations verticales du graphique de $f(x)=x^2$

Il est intéressant de pouvoir utiliser les fonctions quadratiques pour modéliser des phénomènes réels. Ainsi, en physique, on se sert de fonctions quadratiques pour décrire des équations de mouvement, en économie, on les utilise pour exprimer les profits en fonction des prix de vente, etc. Il est donc utile de pouvoir généraliser le plus possible ces fonctions, qui peuvent avoir leur sommet ailleurs qu'au point de coordonnées (0 ; 0). Nous allons voir comment y arriver dans les prochaines sections.

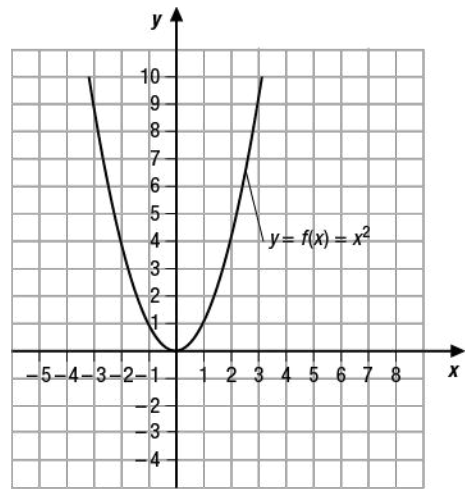
J'explore

ACTIVITÉ • 7.11

a) Quelles modifications faut-il apporter à la formule $f(x) = x^2$ pour obtenir une autre fonction quadratique (notée g) ayant la même forme et dont le graphique aurait comme sommet le point $(0\,;\,2)$? Quelle serait l'image de cette fonction ?

b) Quelles modifications faut-il apporter à la formule $f(x) = x^2$ afin d'avoir une autre fonction quadratique (notée h) ayant la même forme et dont le graphique aurait comme sommet le point $(0\,;\,-2)$? Quelle serait l'image de cette fonction ?

c) Tracez les graphiques des fonctions g et h dont vous avez trouvé les formules en a) et en b).

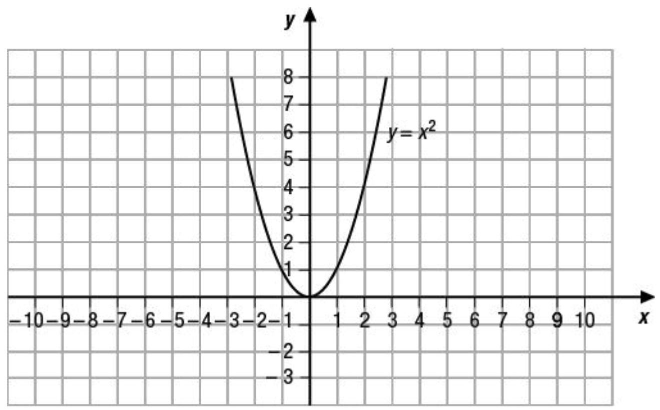


d) Les fonctions $h(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = x^2 + 2$ déterminées en a) et en b) ont-elles des zéros ? Si oui, estimez-les et justifiez-les avec la règle de correspondance. Si non, expliquez pourquoi.

ACTIVITÉ • 7.12

a) Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$, où $x \in]-\infty; +\infty[$. Tracez son graphique et complétez le tableau ci-dessous en donnant l'image, l'axe de symétrie, le sommet, la variation et le signe. Il y a deux possibilités :

1. on peut construire un tableau de valeurs ;
2. on peut considérer d'abord $\frac{1}{9}$ de x^2, puis tracer le graphique après la translation verticale de 1 unité vers le bas.



Caractéristiques	$f(x)$
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	
Zéros (justifiez vos valeurs en vérifiant avec la règle de correspondance de la fonction)	
Variation	

b) Pourquoi fait-on d'abord la multiplication par $\frac{1}{9}$ et ensuite le déplacement de 1 unité vers le bas ?

c) Si, au lieu de considérer la fonction $f(x)=\frac{1}{9}x^2-1$, où $x \in\ ]-\infty;\ +\infty[$, on considérait $f(x)=\frac{1}{9}x^2-1$, où $x \in\ ]-6;\ 6[$, quel serait l'ensemble image ? Comment le graphique changerait-il ?

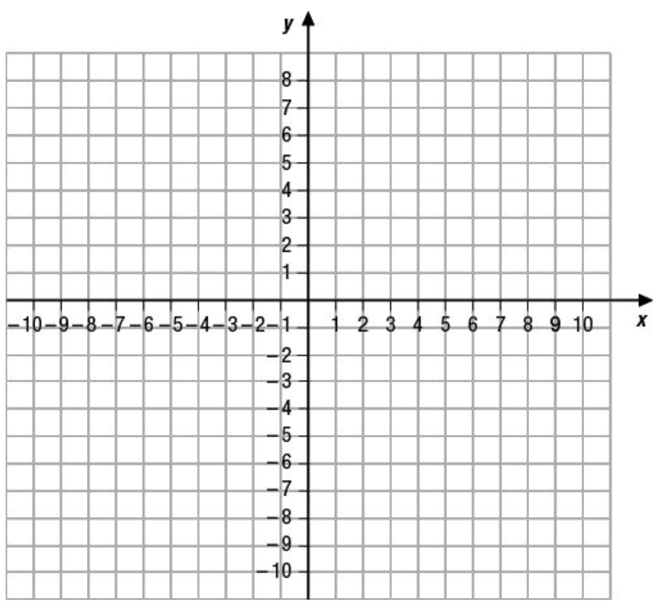
ACTIVITÉ • 7.13

Le graphique de $f(x)=x^2+c$ passe par (1 ; 5). Quelle est la valeur de c ?

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.14

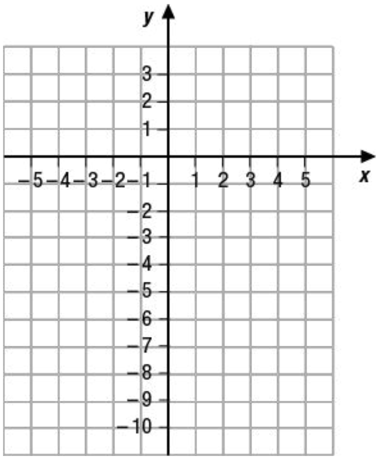
Soit la fonction $f(x)=x^2-9$, où $x \in\ ]-\infty;\ +\infty[$. Tracez le graphique et complétez le tableau à la page suivante en donnant l'image, l'axe de symétrie, le sommet, la variation et le signe. Au besoin, vous pouvez vous guider en confectionnant un tableau de valeurs.



Caractéristiques	$f(x)$
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la règle de correspondance)	
Variation	
Signe	

ACTIVITÉ • 7.15

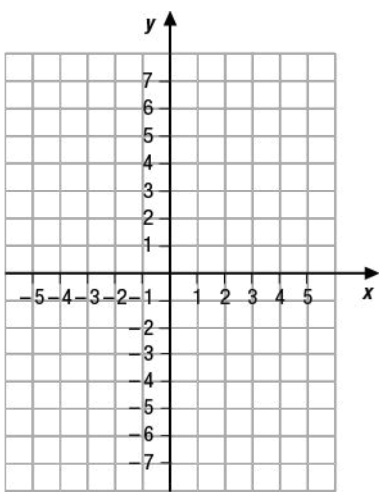
Soit la fonction $f(x) = -x^2 + 1$, définie pour $x \in \,]-3;\, 3]$. Tracez le graphique et complétez le tableau à la page suivante en donnant l'image, l'axe de symétrie, le sommet, la variation et le signe. Assurez-vous de bien déterminer les extrémités du graphique. Au besoin, vous pouvez vous guider en confectionnant un tableau de valeurs.



Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	$x \in]-3;\ 3]$
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la formule $f(x) = -x^2 + 1$)	
Variation	
Signe	

ACTIVITÉ • 7.16

Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, définie pour $x \in [-3;\ +\infty[$. Complétez le tableau à la page suivante en donnant l'image, le sommet, la variation et le signe. Tracez le graphique. Assurez-vous de bien déterminer les extrémités du graphique. Au besoin, vous pouvez vous guider en confectionnant un tableau de valeurs.



Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	$x \in [-3; +\infty[$
Image	
Sommet	
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la règle de correspondance)	
Variation	
Signe	

ACTIVITÉ • 7.17

Donnez la ou les valeurs de a pour lesquelles le graphique de $f(x) = ax^2 - a$ passe par le point $(2; -1)$.

ACTIVITÉ • 7.18

Donnez le sommet de la parabole dont l'équation est $y = x^2 - 5$.

ACTIVITÉ • 7.19

Une parabole de type $y = x^2 + c$ passe par les points $(6;\ 5)$ et $(-6;\ 5)$. Écrivez l'équation de son axe de symétrie, déterminez la valeur de c et donnez son sommet.

D. Les translations horizontales du graphique de $f(x) = x^2$

Nous avons fait des translations verticales d'une parabole vers le haut et vers le bas, et nous avons vu comment cela se manifeste dans la règle de correspondance. Voyons maintenant de quelle façon nous pouvons faire des translations horizontales, et ce qui se produit et comment cela se manifeste dans la règle de correspondance de la fonction associée à ce graphique.

J'explore

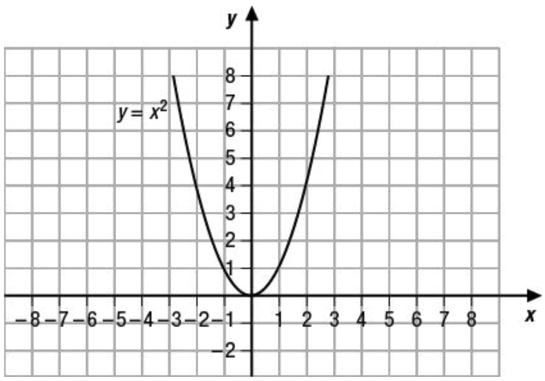
ACTIVITÉ • 7.20

a) Complétez le tableau de valeurs pour la fonction quadratique $g(x) = (x-3)^2$.
Suggestion : Pour chaque valeur de x, calculez d'abord $x - 3$.

x	$x - 3$	$g(x) = (x - 3)^2$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

b) Compte tenu des valeurs trouvées en a), quel est, selon vous, l'axe de symétrie de la fonction quadratique g ?

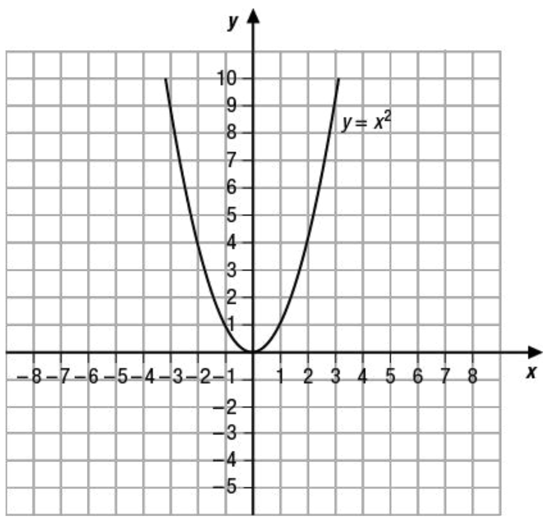
c) Tracez le graphique de $g(x) = (x-3)^2$ et comparez-le à celui de $f(x) = x^2$ que vous avez déjà dessiné.



ACTIVITÉ • 7.21

a) Construisez un tableau de valeurs pour la fonction quadratique $f(x) = (x+2)^2$ et tracez son graphique dans le même plan cartésien que le graphique de $f(x) = x^2$.

x	$x + 2$	$h(x) = (x + 2)^2$
–5		
–4		
–3		
–2		
–1		
0		
1		



b) Complétez l'énoncé :

L'axe de symétrie de la parabole h est la droite verticale d'équation ____________________.

La translation horizontale d'une parabole

Soit le cas d'une fonction du type $m(x)=(x-h)^2$, où $h>0$. On trouve l'axe de symétrie en posant $(x-h)=0$. L'équation de l'axe de symétrie est alors $x=h$. C'est le cas de l'exemple $g(x)=(x-3)^2$, dont l'axe de symétrie est $x=3$.

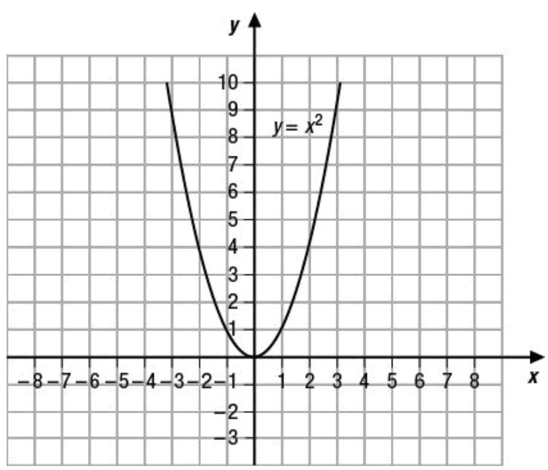
Soit le cas d'une fonction du type $r(x)=(x+h)^2$, où $h>0$. On trouve l'axe de symétrie en posant $(x+h)=0$, c'est-à-dire $x=-h$. C'est le cas de l'exemple $h(x)=(x+2)^2$, dont l'axe de symétrie est $x=-2$.

NOTES :

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.22

Pour la fonction $h(x)=(x-1)^2$, $x \in\ ]-\infty;+\infty[$, tracez le graphique et complétez le tableau à la page suivante en donnant l'image, l'axe de symétrie, le sommet, la variation et le signe. Indiquez s'il s'agit d'un déplacement vertical, d'un déplacement horizontal ou d'une combinaison des deux déplacements par rapport à la fonction $f(x)=x^2$.



Caractéristiques	$f(x)$
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	
Variation	
Signe	
Zéros	
Déplacement	

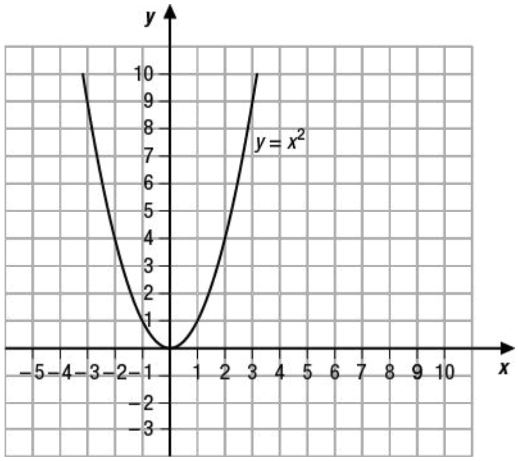
ACTIVITÉ • 7.23

Donnez l'axe de symétrie d'une parabole sachant qu'elle passe par les points $\left(-\frac{2}{9}; 8\right)$ et $\left(\frac{7}{3}; 8\right)$.

ACTIVITÉ • 7.24

Pour la fonction $g(x) = (x-5)^2$, donnez le domaine et l'image ainsi que l'axe de symétrie et le sommet des paraboles correspondantes. Tracez le graphique.

Caractéristiques	$g(x)$
Domaine	
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	



E. La forme canonique d'une fonction quadratique

Nous allons maintenant combiner les deux types de translations (verticales et horizontales) vues jusqu'ici. Ces deux translations, avec le coefficient qui détermine la concavité et l'ouverture de la parabole, nous permettront de compléter la généralisation des graphiques des fonctions quadratiques.

J'explore

ACTIVITÉ • 7.25

Vous savez maintenant comment faire subir des translations verticales et horizontales à la fonction quadratique d'équation $y = x^2$.

a) Quels seraient, selon vous :

i) l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole dont l'équation est $y=(x+2)^2+1$?

Axe de symétrie :

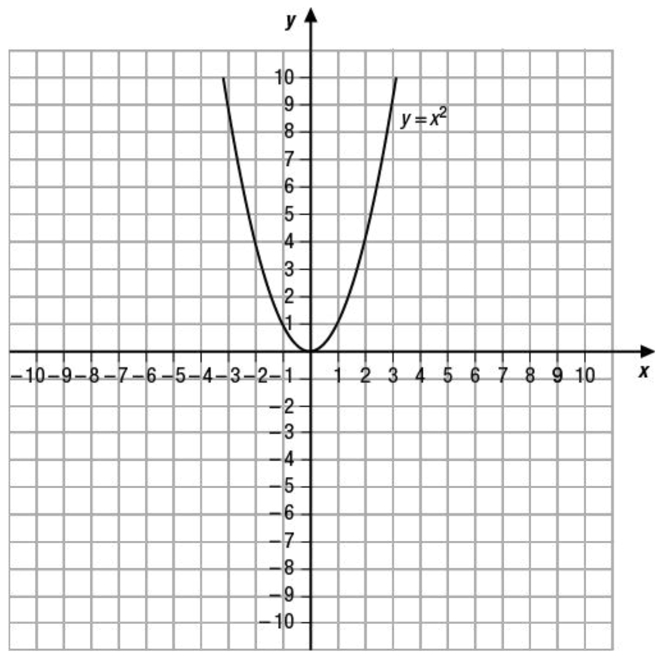
Sommet :

ii) l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole dont l'équation est $y=-(x-3)^2+4$?

Axe de symétrie :

Sommet :

b) En partant du graphique de $y = x^2$, tracez les graphiques représentant les paraboles de la question a).



c) Considérez les fonctions données en a) et en b), avec $f(x) = (x+2)^2 + 1$ définie maintenant pour $x \in [-3;\, 1]$ et $g(x) = -(x-3)^2 + 4$ définie pour $x \in\,]-\infty;\, +\infty[$. Donnez leurs caractéristiques à partir des graphiques tracés en b) en prêtant attention aux domaines de définition de chacune.

Caractéristiques	$f(x) = (x+2)^2 + 1,\ x \in [-3;\, 1]$	$g(x) = -(x-3)^2 + 4,\ x \in\,]-\infty;\, +\infty[$
Image		
Variation		
Signe		
Zéros		

La forme canonique $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$ d'une fonction quadratique

On peut faire la combinaison de deux déplacements, soit un déplacement horizontal et un déplacement vertical. Dans la règle de correspondance $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$, le sommet est au point $(h;\, k)$ et l'axe de symétrie est la droite $x = h$. Quand une fonction quadratique est écrite sous la forme $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$, on dit qu'elle est écrite sous la **forme canonique.** Sous cette forme, on reconnaît immédiatement son sommet, son axe de symétrie, si elle est plus ouverte ou plus fermée que $y = \pm x^2$ et si elle est concave vers le bas ou vers le haut en fonction de la valeur de a.

NOTES :

ACTIVITÉ • 7.26

Donnez l'équation d'une parabole sachant que son sommet est le point (2 ; –3). Est-ce la seule parabole possible ? Essayez d'exprimer de façon générale toutes les paraboles ayant leur sommet au point (2 ; –3).

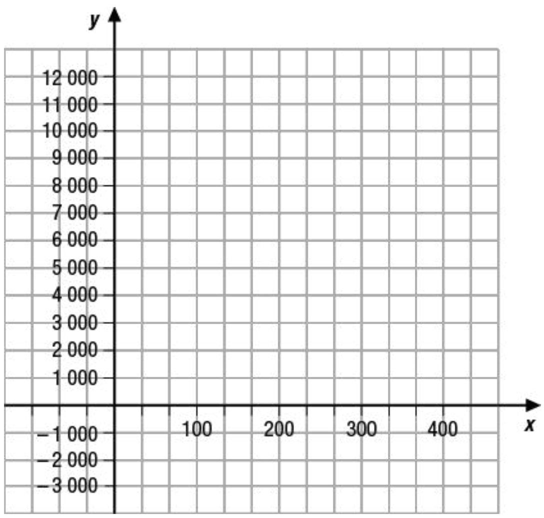
ACTIVITÉ • 7.27

Donnez l'axe de symétrie d'une parabole sachant qu'elle passe par les points (2 ; 4) et (5 ; 4).

ACTIVITÉ • 7.28

Une compagnie veut lancer un nouveau produit. Une étude de marché détermine que le profit mensuel, en dollars, pour ce nouveau produit dépend du prix de vente *x,* en dollars, selon la règle de correspondance $f(x) = -4(x-250)^2 + 10\,000$.

a) Tracez un graphique approximatif de cette fonction.



b) Quel prix devrait-on fixer pour obtenir le profit maximal ? Pourquoi ?

c) Une personne affirme que plus le prix est élevé, plus le profit sera grand. Cette personne a-t-elle raison ?

d) Déterminez les prix pour lesquels le profit est nul.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.29

Donnez la formule d'une fonction quadratique dont le sommet est $(-3; 1)$. Est-ce la seule fonction quadratique ayant $(-3; 1)$ pour sommet ? S'il y en a d'autres, donnez leurs formules.

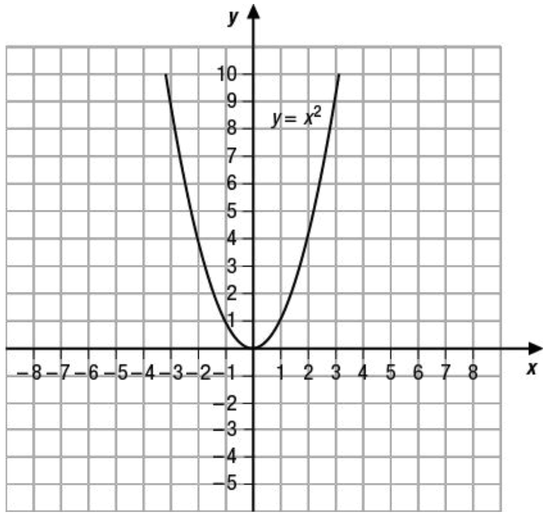
ACTIVITÉ • 7.30

Une parabole passe par les points $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$ et $\left(\frac{7}{4}\,;\,\frac{5}{3}\right)$. Quelle est l'équation de son axe de symétrie ?

ACTIVITÉ • 7.31

Pour la fonction $g(x) = (x-2)^2 + 1$, $x \in [0; 5]$, tracez le graphique et complétez le tableau en donnant l'image, le sommet, la variation et le signe. Indiquez s'il s'agit d'un déplacement vertical, d'un déplacement horizontal ou d'une combinaison des deux déplacements par rapport à la fonction $f(x) = x^2$.

Caractéristiques	$g(x)$
Image	
Sommet	
Variation	
Zéros	
Déplacement	



ACTIVITÉ • 7.32

Soit les fonctions $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ et $g(x) = -(x-2)^2 - 1$, toutes deux définies pour $x \in]-\infty; +\infty[$. Donnez les caractéristiques demandées de ces fonctions dans le tableau suivant.

Caractéristiques	$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$	$g(x) = -(x-2)^2 - 1$
Image		
Variation		
Axe de symétrie		

ACTIVITÉ • 7.33

Encerclez la bonne réponse.

a) Si le graphique d'une fonction quadratique passe par les points $A(3;\ 7)$ et $B(-5;\ 7)$, alors l'axe de symétrie est :

i) $x = -1$

ii) $x = 1$

iii) $y = -1$

iv) $x = 0$

b) Si une parabole passe par le point $A(1;\ 6)$ et son sommet est $B(3;\ 2)$, alors le point symétrique de A est :

i) $B(5;\ 6)$

ii) $B(0;\ 6)$

iii) $B(-1;\ 6)$

iv) $B(-1;\ -6)$

c) Le sommet du graphique de la fonction $f(x) = (x+5)^2 - 9$ est :

i) $S(-9;\ 5)$

ii) $S(5;\ -9)$

iii) $S(-5;\ -9)$

iv) $S(9;\ -5)$

d) On déplace le graphique de la fonction $f(x) = x^2$ afin que son sommet soit au point $S(-4;\ 9)$. La nouvelle règle de correspondance est alors :

i) $h(x) = (x-4)^2 + 9$

ii) $h(x) = (x+4)^2 - 9$

iii) $h(x) = (x+4)^2 + 9$

iv) $h(x) = (x-4)^2 - 9$

ACTIVITÉ • 7.34

Pour la fonction $f(x)=(x+3)^2-5$, donnez le domaine et l'image ainsi que l'axe de symétrie et le sommet des paraboles correspondantes. Au besoin, faites une esquisse du graphique.

Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	
Image	
Axe de symétrie	
Sommet	

F. Les zéros d'une fonction quadratique de forme canonique $y=f(x)=a(x-h)^2+k$

Comme nous l'avons vu dans l'activité 7.28, il est parfois important de connaître avec précision les zéros d'une fonction quadratique. Voyons comment le faire du point de vue algébrique.

J'explore

ACTIVITÉ • 7.35

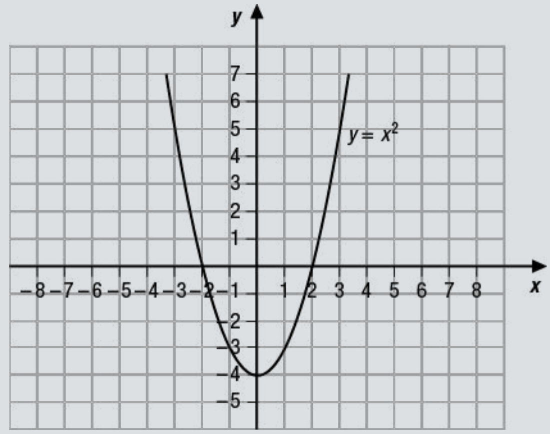
Examinez les fonctions et les valeurs de variable indépendante suivantes. Déterminez, en le vérifiant avec la formule, si ces valeurs sont des zéros des fonctions. Prenez bien soin de montrer votre démarche en écrivant correctement les expressions mathématiques.

a) $f(x)=5x^2-125$, $x=-5$, $x=4$, $x=\dfrac{12}{5}$ et $x=5$

b) $g(x)=x^2+9$, $x=3$ et $x=-3$

Trois façons de trouver les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 4$

Voici trois méthodes pour trouver les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 4$.



Estimation et vérification : On trace le graphique de la fonction, on estime les zéros et on les vérifie avec la règle de correspondance. En effet, le graphique de $f(x) = x^2 - 4$ est celui de $g(x) = x^2$ déplacé de 4 unités vers le bas, ce qui permet d'estimer que $x = 2$ ou $x = -2$ sont les zéros. On vérifie les zéros en substituant les valeurs dans la règle : $f(2) = 2^2 - 4 = 0$ et $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$. Bien sûr, cette méthode sert seulement pour quelques cas isolés (ceux de valeurs entières, plutôt évidents).

Variable isolée à l'aide d'une racine carrée : Comme on veut obtenir les valeurs de x pour lesquelles la fonction est égale à zéro, on pose la condition :

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$

soit $x = 2$ ou $x = -2$

Factorisation : On part de la condition $x^2 - 4 = 0$, mais on écrit l'expression $x^2 - 4 = 0$ différemment :

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0$$

Les expressions algébriques $x^2 - 4$ et $(x-2)(x+2)$ sont équivalentes (vous pouvez le constater en développant le produit par une multiplication), mais l'écriture sous la forme de produit a l'avantage de permettre de déduire les zéros.

En effet, pour que le produit des deux expressions $x - 2$ et $x + 2$ soit égal à 0, il faut qu'une ou l'autre des expressions soit égale à 0. Alors, soit $x - 2 = 0$, d'où l'on déduit que $x = 2$, soit $x + 2 = 0$, d'où l'on déduit que $x = -2$. Nous étudierons des techniques de factorisation plus poussées au chapitre 9.

NOTES :

ACTIVITÉ • 7.36

Afin de tracer un graphique précis, on veut connaître les zéros des fonctions $f(x) = x^2 - 6$ et $g(x) = 3x^2 - \frac{4}{3}$. Isolez la variable pour trouver les zéros de *f* et de *g*. Si vous êtes bloqués, consultez l'encadré ci-dessous. Vérifiez vos réponses avec la règle de correspondance.

Isoler une variable en utilisant des racines

Pour trouver les zéros d'une fonction *f*, on doit résoudre des équations du type $f(x) = 0$. Dans le cas d'une fonction quadratique de la forme $f(x) = x^2 - k$, on pose alors $x^2 - k = 0$, qui s'écrit, de façon équivalente, sous la forme $x^2 = k$. Il y a trois possibilités, comme l'indique la règle suivante.

Règle :

1. L'équation $x^2 = k$ a deux solutions si $k > 0$, soit $x = \pm\sqrt{k}$.

Exemples :

a) $2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25}$, soit $x = 5$ ou $x = -5$

b) $(x-3)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 16 \Rightarrow$, soit $x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$, d'où $x = 7$ ou $x = -1$

c) $3x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$, soit $x = \sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{6}$

d) $2x^2 - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow 2x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow$, soit $x = \frac{1}{4}$ ou $x = -\frac{1}{4}$

2. L'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution si $k < 0$.

Exemples :

a) $-2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = -4$ n'a pas de solution, car aucun nombre au carré ne donne -4.

b) $(x-3)^2 = -1$ n'a pas de solution ; le membre de gauche est positif, celui de droite est négatif, donc l'égalité est impossible.

3. L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution, soit $x = 0$.

Exemple :

$(x-2)^2+3=3 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

NOTES :

ACTIVITÉ • 7.37

Trouvez les zéros des fonctions suivantes et vérifiez vos réponses en remplaçant x par les valeurs trouvées dans la règle de correspondance.

a) $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

b) $g(x)=-(x-3)^2+9$

c) $h(x)=-(x-3)^2+5$

ACTIVITÉ • 7.38

Pour les fonctions quadratiques suivantes, sans faire d'abord des calculs, déterminez si elles ont un zéro, deux zéros, ou si elles n'en ont aucun. Justifiez vos réponses. S'il y a un zéro ou deux zéros, trouvez-les.

$f(x)$	f a-t-elle des zéros ?	Justification
a) $f_1(x)=(x-4)^2+7$		
b) $f_2(x)=-2\left(x+\frac{1}{5}\right)^2$		
c) $f_3(x)=-4(x+3)^2-1$		
d) $f_4(x)=4(x+3)^2-1$		
e) $f_5(x)=2(x-5)^2$		

Calcul des zéros :

ACTIVITÉ • 7.39

Proposez des règles de correspondance pour trois fonctions quadratiques : une qui n'a pas de zéros, une qui a un zéro et une qui en a deux. Justifiez vos réponses.

a) $f_0(x) =$

b) $f_1(x) =$

c) $f_2(x) =$

ACTIVITÉ • 7.40

Votre entreprise fabrique un produit dont le profit réalisé chaque jour peut se modéliser par la fonction $f(x) = -5(x-42)^2 + 1620$, où x est le prix du produit, en dollars.

a) Déterminez les variables en jeu et faites une esquisse d'un graphique permettant de modéliser cette situation. Quels sont le prix le plus élevé et le prix le plus bas que vous pouvez fixer tout en continuant de réaliser un profit ?

b) Quel prix rapporte le profit maximal chaque jour et quel est ce profit ?

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 7.41

Trouvez les zéros des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$

b) $g(x)=(x+5)^2-4$

c) $h(x)=(x-6)^2-3$

d) $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

e) $g(x)=-(x+3)^2+15$

f) $h(x)=-(x+2)^2-6$

ACTIVITÉ • 7.42

Trouvez les zéros et donnez le signe de la fonction quadratique $f(x) = -4(x-3)^2 + 1$.

ACTIVITÉ • 7.43

Le nombre de fleurs dans un jardin peut se modéliser par la fonction $f(x) = -60(x-13)^2 + 10\,140$, où x est le nombre de semaines écoulées depuis le 1er avril.

a) Pendant combien de semaines le jardin est-il en fleur ?

b) Combien de semaines après le 1er avril la floraison est-elle maximale, et quel est alors le nombre de fleurs ?

ACTIVITÉ • 7.44

Pour les deux fonctions quadratiques ci-dessous, donnez le sommet, la concavité, les zéros et l'axe de symétrie, écrivez-les sous la forme générale, puis donnez les valeurs de x pour lesquelles elles croissent.

a) $f(x)=3(x-4)^2-5$

Caractéristiques	$f(x)$
Sommet	
Concavité	
Zéros	
Axe de symétrie	
Forme générale	
Croissance	

b) $f(x)=-2(x+2)^2+3$

Caractéristiques	$f(x)$
Sommet	
Concavité	
Zéros	
Axe de symétrie	
Forme générale	
Croissance	

Mes activités de récapitulation

R7.1

Donnez les règles de correspondance de deux fonctions quadratiques différentes dont le sommet est le point $\left(-3; \frac{5}{7}\right)$.

R7.2

Partant du graphique de la fonction $f(x) = x^2$, faites une esquisse des graphiques des fonctions $g(x) = (x-2)^2 - 3$ et $h(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$.

R7.3

Lequel ou lesquels des points suivants appartiennent au graphique de $f(x) = 5(x+1)^2 - 3$?

a) $(-1; 0)$ **b)** $(-1; -3)$ **c)** $(2; 42)$ **d)** $(42; 2)$

R7.4

a) Soit la fonction $f(x) = 5(x+1)^2 - 3$. Trouvez:

i) $f(0)$ **ii)** $f(-3)$ **iii)** $f(1)$

b) Si vous avez bien fait vos calculs en a), vous avez obtenu $f(-3) = f(1)$. Expliquez pourquoi.

R7.5

Déterminez les sommets et la concavité (vers le haut, vers le bas, plus ouverte ou plus fermée que $f(x) = \pm x^2$) des paraboles suivantes.

a) $y = x^2 - 9$ **b)** $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 2$ **c)** $y = -(x+3)^2 - 4$

R7.6

Pour les énoncés qui suivent, choisissez la bonne réponse.

a) La fonction $f(x) = -x^2 + 16$ est positive pour:

i) $x \in]-4; 4[$ **ii)** $x \in [-4; 4]$

b) Le déplacement de $h(x) = (x+1)^2 - 2$ par rapport à $f(x) = x^2$ est:

i) de 1 unité vers la gauche et 2 unités vers le haut.

ii) de 1 unité vers la droite et 2 unités vers le bas.

iii) de 1 unité vers la gauche et 2 unités vers le bas.

iv) de 1 unité vers la droite et 2 unités vers le haut.

c) Pour la fonction quadratique $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$, on sait que le coefficient a est négatif. Alors, l'intervalle de décroissance est:

i) $[x_s; +\infty[$ **ii)** $]-\infty; x_s]$ **iii)** $[y_s; +\infty[$ **iv)** $]-\infty; y_s]$

R7.7

Pour la fonction $f(x) = 3(x-4)^2 + k$, déterminez la valeur de k pour laquelle $x = 5$ est un zéro de la fonction, c'est-à-dire $f(5) = 0$. Vérifiez votre réponse.

R7.8

Soit f, la fonction donnée par la formule $f(x) = x^2 + 1$. Calculez $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$.

R7.9

a) Une parabole passe par le point $A\left(4;\, \frac{5}{2}\right)$. Son sommet est le point $S\left(\frac{1}{2};\, 1\right)$. Donnez le point symétrique à A.

b) Trouvez l'axe de symétrie d'une parabole, sachant qu'elle passe par les points $(-1;\, 4)$ et $(3;\, 4)$.

R7.10

Est-il vrai que la parabole $y = 3(x-1)^2 + 5$ traverse l'axe des ordonnées au point $(0;\, 5)$?

R7.11

Soit la fonction quadratique $g(x) = -3\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{2}{5}$.

a) Donnez l'ensemble image de g.

b) Trouvez deux valeurs du domaine ayant la même image.

R7.12

Sans faire de calculs, montrez que la fonction dont la formule est $h(x) = -5(x-3)^2 - 1$ est négative pour toutes les valeurs réelles de x.

R7.13

Donnez trois fonctions quadratiques différentes dont le sommet est au point $(4;\, 5)$.

R7.14

Soit une fonction quadratique définie par l'expression $f(x) = a(x-1)^2 + k$ et dont on sait que son graphique contient les points $(1;\, 1)$ et $(2;\, 3)$. Avec ces données, déterminez les valeurs de a et de k.

R7.15

Soit les fonctions $f(x) = (x-1)^2 + 2$ et $g(x) = x + k$. Donnez une valeur à k telle que :

a) le graphique de g coupe le graphique de f une fois ;

b) le graphique de g coupe le graphique de f deux fois ;

c) le graphique de g ne coupe le graphique de f aucune fois.

CHAPITRE

8 LES EXPRESSIONS NUMÉRIQUES ET ALGÉBRIQUES ET LA FACTORISATION

Objectifs d'apprentissage

- Donner du sens aux expressions algébriques
- Apprendre les rudiments du calcul algébrique en s'appuyant sur les règles du calcul arithmétique
- Reconnaître l'équivalence d'expressions algébriques
- Comprendre le sens de la factorisation
- Savoir effectuer des mises en évidence simples et doubles
- Savoir factoriser des trinômes carrés parfaits et des différences de carrés
- Comprendre le lien entre les mises en évidence et la distributivité

A. Donner du sens aux expressions algébriques

Vous avez sûrement déjà fait des apprentissages en algèbre. À quoi sert l'algèbre ? Pourquoi y accorde-t-on autant d'importance ? À la fin de ce chapitre, vous serez en mesure de répondre à ces questions, du moins en partie. Pour commencer, réalisez l'activité 8.1, qui ne requiert pas d'explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 8.1

Est-il vrai qu'un nombre entier plus son double, plus son triple, plus son quadruple donne toujours un nombre qui finit par 0 ? Essayez avec plusieurs nombres entiers et donnez une justification mathématique de votre réponse.

ACTIVITÉ • 8.2

Est-il vrai que, pour n'importe quel nombre naturel *n*, l'expression $3(n+5)+5(n-3)$ donne un multiple de 8 ? Donnez une justification mathématique de votre réponse.

ACTIVITÉ • 8.3

Parmi les réponses suivantes, laquelle est correcte ? La somme de $2x+3x^2$ est :

a) $5x^2$

b) $5x^3$

c) $5x$

d) Aucune de ces réponses

Peut-on réduire l'expression $2x + 3x^2$?

La réponse est non. On entend souvent dire que l'on ne peut pas additionner des pommes et des oranges ; il est bon d'explorer cette affirmation. En fait, x et x^2 sont des expressions de nature différente. Imaginons que x représente une longueur ; alors, $2x$ représente le double de cette longueur. De plus, si x représente une longueur, alors x^2 représente une aire (celle du carré de côté x) et $3x^2$ aussi (le triple de l'aire x^2). Il est évident que l'on ne peut pas additionner des longueurs et des aires ! Également, si x représente une longueur, alors x^3 représente un volume… ainsi, on ne peut pas associer des x, des x^2 et des x^3.

NOTES :

ACTIVITÉ • 8.4

Effectuez les opérations suivantes et réduisez les expressions obtenues.

a) $(3n+4)+(5n-2)=$

b) $(6a^3+4a^2+a)-(2a^3+a^2-5)=$

c) $2x^2y-\frac{1}{2}xy+\frac{4}{9}x^2y-xy^2+\frac{5}{2}xy=$

ACTIVITÉ • 8.5

Parmi les réponses suivantes, laquelle est correcte, peu importe la valeur de a ou de b ?
Le résultat de l'opération $(-a)\cdot(-b)$ est :

a) $-a-b$

b) ab

c) $-(ab)$

d) Aucune de ces réponses

La règle des signes

Vous vous souvenez probablement de la règle des signes que l'on énonce en disant « négatif fois négatif donne positif » ou « négatif fois positif donne négatif ». D'où provient cette règle, et quelle est sa raison d'être ? Nous ne donnerons pas ici d'explication formelle, mais présenterons plutôt des arguments qui montreront que cette règle n'est ni capricieuse ni énoncée au hasard. Bien au contraire, elle est nécessaire à la cohérence interne des mathématiques.

Prenons comme exemple la multiplication $3 \cdot 4$ et les trois autres multiplications que l'on obtient en changeant les signes de 3 et de 4, soit $3 \cdot (-4)$, $(-3) \cdot 4$ et $(-3) \cdot (-4)$.

- $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$: la somme de trois fois le nombre 4 ne peut qu'être positive, c'est 12.
- $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$: on additionne trois fois le nombre négatif (-4) ; le résultat ne peut évidemment qu'être négatif, c'est (-12).
- $(-3) \cdot 4$ peut aussi s'interpréter comme une addition répétée, si on permute l'ordre des facteurs, car $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3)$, ce qui donne également (-12).
- $(-3) \cdot (-4)$ ne peut pas s'interpréter comme une addition répétée. On suppose que le résultat de cette opération est soit 12, soit (-12). Nous allons écarter (-12). Voyons comment : si $(-3) \cdot (-4)$ était égal à (-12), alors, puisque $(-3) \cdot 4$ est aussi égal à (-12), on aurait l'égalité (fausse) $(-3) \cdot (-4) = (-3) \cdot 4$, de laquelle on pourrait déduire l'égalité [également fausse] $(-4) = 4$ tout simplement en la divisant par (-3). Comme on ne peut pas se permettre ce type de contradiction, on rejette le résultat (-12). Ce raisonnement est une version très simplifiée et modestement adaptée pour ce cours d'un type de raisonnement (la preuve par contradiction) souvent utilisé en mathématique.

En résumé :

- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b = ab$
- $\dfrac{(-a)}{b} = \dfrac{a}{(-b)} = -\dfrac{a}{b}$
- $(-a) \cdot b = a(-b) = -ab$
- $\dfrac{(-a)}{(-b)} = \dfrac{a}{b}$

NOTES :

ACTIVITÉ • 8.6

Sans effectuer de calculs, donnez les signes des résultats des opérations suivantes.

a) $\left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot (-7)^2$ **b)** $-(-12)^5$

ACTIVITÉ • 8.7

Parmi les réponses suivantes, laquelle est correcte ? Le produit $-a(-b)(-a)(-1)a$ est égal à :

a) $-a^2b$

b) a^3b

c) a^2b^2

d) Aucune de ces réponses

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 8.8

Gilles est sûr de lui lorsqu'il réalise le tour suivant. Il dit à son amie : « Pense à un nombre, additionnes-y 8, multiplie le résultat par 3, soustrais 4, additionne le nombre de départ au résultat, divise le tout par 4, additionne 2 puis soustrais ton nombre : le résultat est 7. » Gilles a-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

ACTIVITÉ • 8.9

Effectuez les opérations suivantes et réduisez les expressions obtenues.

a) $a-(b-a)=$

b) $b-a-2(-a+b)=$

c) $(x+y)-2(y+z)-3(z-y)=$

d) $x-4(y-z)+x+2(y-z)+y-3(x+z)=$

e) $8n^2-4-(-2n^2+4n+6)=$

B. Les opérations de base et les fractions algébriques

J'explore

ACTIVITÉ • 8.10

Effectuez les calculs suivants sans calculatrice et donnez le résultat le plus simple possible. Si la réponse n'est pas un nombre entier, exprimez-la sous forme de fraction.

a) $(-3)\times\dfrac{5}{6}=$

b) $-8\times\left(-\dfrac{3}{20}\right)=$

c) $-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{15}{8}=$

d) $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}=$

e) $\dfrac{2}{5}\div\dfrac{(-7)}{5}=$

f) $\dfrac{2}{\frac{3}{4}}=$

g) $\dfrac{a}{(-x)}\cdot\dfrac{(-y)}{x}=$

h) $\dfrac{x}{y}\div\dfrac{x}{(-z)}=$

i) $\dfrac{x}{\frac{2y}{z}}=$

ACTIVITÉ • 8.11

Faites les calculs suivants sans calculatrice et donnez les résultats sous forme de fractions irréductibles. Faites attention à la priorité des opérations.

a) $\dfrac{4}{15}-\dfrac{2}{9}\times\dfrac{45}{6}=$

b) $\left(\dfrac{4}{15}-\dfrac{2}{9}\right)\times\dfrac{45}{6}=$

c) $\dfrac{10}{a}-\dfrac{15}{ab}\times\dfrac{b}{5}=$

d) $\left(\dfrac{10}{a}-\dfrac{15}{ab}\right)\times\dfrac{b}{5}=$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 8.12

Faites les calculs suivants sans calculatrice et donnez les résultats sous forme de fractions irréductibles. Faites attention à la priorité des opérations.

a) $\dfrac{8}{7}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{35}{8}=$

b) $\left(\dfrac{8}{7}-\dfrac{4}{5}\right)\times\dfrac{35}{8}=$

c) $\left(\dfrac{5}{8}-\dfrac{7}{16}\right)\div\dfrac{21}{4}=$

d) $\dfrac{5}{8}-\dfrac{7}{16}\div\dfrac{21}{4}=$

ACTIVITÉ • 8.13

Effectuez les calculs suivants sans calculatrice et donnez le résultat le plus simple possible. Si la réponse n'est pas un nombre entier, exprimez-la sous forme de fraction.

a) $-6\times\frac{7}{18}=$

b) $9\times\left(-\frac{5}{12}\right)=$

c) $4\times\frac{3}{4}=$

d) $\frac{8}{11}\times\left(-\frac{33}{4}\right)=$

e) $\frac{\frac{6}{7}}{8}=$

f) $-\frac{1}{10}\div\frac{3}{10}=$

g) $\frac{6}{\frac{7}{8}}=$

h) $\frac{-1}{\frac{4}{3}}=$

i) $\frac{-\frac{1}{4}}{3}=$

j) $\frac{5t}{ay}\cdot\frac{zy^3}{2t}=$

k) $\frac{t}{3x}\div\frac{t}{2y}=$

l) $\frac{\frac{a}{10b}}{c}=$

m) $\frac{-z^2x}{\frac{5}{z}}=$

C. La factorisation et les expressions équivalentes

Souvent, en mathématique, on doit simplifier des expressions algébriques. Pour ce faire, il est nécessaire de pouvoir les écrire sous la forme de produits. Pour mieux comprendre, revenons aux nombres : afin de simplifier la fraction $\frac{12}{16}$, on l'écrit sous la forme $\frac{4\cdot 3}{4\cdot 4}$, puis on divise le numérateur et le dénominateur par 4. On peut le faire, car $12 = 3\cdot 4$, $16 = 4\cdot 4$ et $4 \neq 0$. Finalement, on obtient $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$. Il en est de même pour les fractions algébriques : afin de simplifier la fraction $\frac{x^2-36}{2x-12}$, on se sert du fait que $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$ et que $2x - 12 = 2(x-6)$ pour finalement simplifier la fraction et obtenir $\frac{x^2-36}{2x-12} = \frac{x+6}{2}$, pour tout $x \neq 6$.

Remarquez qu'on ne pourrait pas faire cette simplification sans écrire les expressions $x^2 - 36$ et $2x - 12$ sous la forme de produits. Dans ce qui suit, vous allez justement apprendre à transformer des expressions algébriques sous la forme d'un produit. Le mot « factoriser » est un synonyme de l'expression « transformer en produit ».

Remarquez aussi que les expressions que l'on obtient sont des **expressions équivalentes** aux expressions données au départ. Précisons ce que le mot « équivalent » veut dire dans ce contexte. Les expressions $2x - 12$ et $2(x-6)$ sont équivalentes, car peu importe la valeur de x choisie, les deux expressions auront la même valeur numérique. On peut dire la même chose des expressions $x^2 - 36$ et $(x-6)(x+6)$. Quand on écrit un signe « = » qui sépare deux expressions équivalentes, on dit que l'égalité est une **identité.**

J'explore

ACTIVITÉ • 8.14

Vous connaissez la distributivité $a(b+c) = ab + ac$, car vous l'avez utilisée à plusieurs reprises de gauche à droite. De droite à gauche, elle montre comment transformer la somme $ab + ac$ en produit, en mettant a en évidence. Transformez en produits les expressions suivantes en faisant une mise en évidence adéquate. Vérifiez vos réponses en effectuant les produits.

a) $am - bm =$

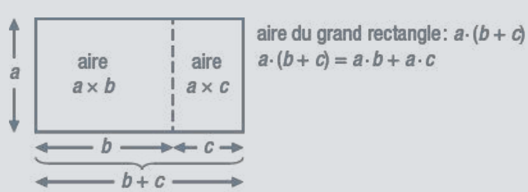
b) $cd - cd^2 =$

c) $5ab - 15ac =$

d) $3x^2 + 6x =$

La mise en évidence simple

Le travail que vous venez de réaliser dans l'activité 8.14 porte le nom de **mise en évidence simple.** Il consiste justement à utiliser la distributivité pour transformer une expression en produit. Le schéma ci-contre permet de visualiser la distributivité et la mise en évidence.



Lorsqu'on la lit de droite à gauche, l'égalité $a(b+c)=ab+ac$ montre comment transformer la somme $ab+ac$ en produit, en mettant a en évidence. Exemples :

1. $am-bm=(a-b)m$
2. $4c^2d-cd^2=cd(4c-d)$
3. $x^2+6x=x(x+6)$

Il pourrait aussi y avoir plus que deux termes. Exemple :

$6ax^2y+4xy^2-12xy^3+4x^2y^2=2xy(3ax+2y-6y^2+2xy)$

ACTIVITÉ • 8.15

Transformez en produits les expressions suivantes au moyen d'une mise en évidence.

a) $3a^2xy-6axy^2+9ax^2y^2=$

b) $100xy+75x^2y-25y=$

ACTIVITÉ • 8.16

Vous connaissez la distributivité $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$, car vous l'avez utilisée à plusieurs reprises de gauche à droite. Lorsqu'on la lit de droite à gauche, elle montre comment transformer la somme $ac+ad+bc+bd$ en produit, en faisant une double mise en évidence.

En effet, $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$; autrement dit, on fait une mise en évidence simple deux fois. Transformez en produits les expressions suivantes en faisant une double mise en évidence. Vérifiez vos réponses en effectuant les produits.

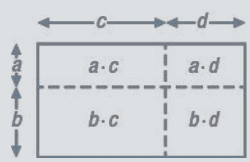
a) $am+bm+an+bn=$

b) $a^2+ab+ac+bc=$

c) $5x-25+ax-5a=$

La mise en évidence double

Le travail que vous venez de réaliser dans l'activité 8.16 porte le nom de **mise en évidence double.** Comme pour la mise en évidence simple, l'objectif est de transformer une expression en une autre, équivalente à la première, sous la forme d'un produit, à l'aide de la distributivité. Le schéma suivant permet de visualiser la distributivité et la double mise en évidence.



aire du grand rectangle : $(a+b)\cdot(c+d)$

$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Remarquez qu'on fait une mise en évidence double en effectuant deux fois une mise en évidence simple par étapes (de là son nom « mise en évidence double ») :

- dans un premier temps, on sépare les termes en groupes, dans ce cas deux à deux, puis on effectue une mise en évidence en groupes :

  $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)$
- le nombre de termes a diminué, et les termes sont tels que l'on peut par la suite effectuer une deuxième mise en évidence (remarquez que l'on obtient l'expression $(c+d)$ dans les deux termes) ;
- enfin, on met en évidence l'expression $(c+d)$ afin d'obtenir la factorisation complète :

  $(a+b)(c+d)$

Exemple (les deux étapes sont données sur la même ligne) :

$5a^2+5ab+3ac+3bc=5a(a+b)+3c(a+b)=(5a+3c)(a+b)$

On doit faire attention aux signes. Exemples :

1. $4x-12+atx-3at=4(x-3)+at(x-3)=(4+at)(x-3)$

2. $2x-10-3x^2+15x=2(x-5)+(-3x)(x-5)=(2-3x)(x-5)$

ACTIVITÉ • 8.17

Transformez en produits les expressions suivantes au moyen d'une mise en évidence double.

a) $7x^2y+7xy+ax+a=$

b) $3a^2by+5y+3a^2b+5=$

ACTIVITÉ • 8.18

Vérifiez les identités suivantes (autrement dit, montrez qu'il s'agit de deux expressions équivalentes).

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

b) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Les identités remarquables et la factorisation

Vous venez de démontrer deux identités (dites « remarquables ») :

a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (**trinôme carré parfait**) ;

b) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (**différence de carrés**).

On peut utiliser ces identités pour transformer en produits des expressions algébriques données sous forme d'additions ou de soustractions de termes. Dans les exemples qui suivent, les expressions de gauche sont transformées en produits à l'aide des identités remarquables ci-dessus.

Exemples :

1. $x^2+6x+9=x^2+2\cdot 3x+3^2=(x+3)^2$ (trinôme carré parfait)

2. $4x^2-12x+9=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2=(2x-3)^2$ (trinôme carré parfait)

3. $4-x^2=2^2-x^2=(2-x)(2+x)$ (différence de carrés)

4. $\frac{x^2}{9}-25=\left(\frac{x}{3}\right)^2-5^2=\left(\frac{x}{3}-5\right)\left(\frac{x}{3}+5\right)$ (différence de carrés)

ACTIVITÉ • 8.19

Développez les produits des exemples 1 à 4 de l'encadré précédent pour vérifier l'exactitude de la factorisation.

a) $(x+3)^2=$

b) $(2x-3)^2=$

c) $(2-x)(2+x)=$

d) $\left(\frac{x}{3}-5\right)\left(\frac{x}{3}+5\right)=$

ACTIVITÉ • 8.20

Transformez en produits les expressions algébriques suivantes et nommez la procédure utilisée (mise en évidence simple ou double, différence de carrés, trinôme carré parfait). Remarquez que vous pouvez développer les expressions obtenues afin de vérifier vos réponses.

a) $x^2-16=$

b) $x^2-6x+9=$

c) $5xy-35x+2y-14$

d) $16x^2-25=$

e) $3x^2-6x=$

f) $x^2+20x+100=$

g) $x^2-1=$

ACTIVITÉ • 8.21

Reprenons la question b) de l'activité 8.19. D'un côté, il s'agit d'un trinôme carré parfait et on a l'identité $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$. D'un autre côté, l'égalité $2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ est aussi une identité, d'où l'on tire l'égalité $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Cette dernière égalité est-elle une identité ? Comment expliquez-vous cette « double » factorisation de l'expression $4x^2 - 12x + 9$? Est-ce que l'égalité $(2x - 3)^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ est une identité ?

ACTIVITÉ • 8.22

Trouvez des expressions équivalentes aux expressions suivantes, en les développant ou en les transformant en produits, selon le cas.

a) $(3 + x)^2 =$

b) $a^2 + 2ab + b^2 =$

c) $(a - x)^2 =$

d) $49 - a^2 =$

ACTIVITÉ • 8.23

Sachant que $a^2 + b^2 = 3$, effectuez les opérations et déterminez la valeur de l'expression suivante.

$(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 6ab =$

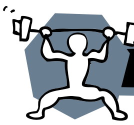
ACTIVITÉ • 8.24

Effectuez les opérations suivantes et simplifiez les expressions obtenues. Au besoin, excluez les valeurs des variables pour lesquelles les expressions ne sont pas définies.

a) $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} =$

b) $\dfrac{ab+ac+3b+3c}{b+c}=$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+4x}=$



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 8.25

Transformez les expressions suivantes en produits et nommez la procédure utilisée.

a) $2m+4=$

b) $3b+9b^2+27b^3-6b^4=$

c) $100x^2-81=$

d) $ax+ay+bx+by=$

e) $\dfrac{16}{25}x^2-9=$

f) $a(x+y)+b(x+y)=$

g) $9x^2-1=$

h) $5ab-15ac=$

i) $c^2d^2+5cd^2-c^3d-5c^2d=$

j) $81x^2-18x+1=$

k) $a^2b^2-x^2=$

l) $x^2-5=$

m) $9-(x+y)^2=$

n) $acx-bcx+2acy-2bcy=$

o) $3za^2-30az+75z=$

ACTIVITÉ • 8.26

Factorisez l'expression quadratique $4x^2-25$ de deux façons différentes.

ACTIVITÉ • 8.27

Trouvez le terme manquant dans les identités suivantes.

a) $(x+4)^2=x^2+\boxed{}+16$

b) $(x-5)^2=x^2+\boxed{}+25$

c) $(2a-4)^2=4a^2+\boxed{}+16$

d) $(3x+4y)^2=9x^2+\boxed{}+16y^2$

ACTIVITÉ • 8.28

Sachant que $a^2+b^2=6$, calculez la valeur numérique de l'expression suivante.

$(b^0)^3-2(a+1)-2(b^5\div b^3-a)-2a^2=$

ACTIVITÉ • 8.29

Développez chacune des expressions suivantes ou transformez-la en produit, selon le cas, pour obtenir des expressions équivalentes.

a) $(4+3x)^2=$

b) $(2-5x)^2=$

c) $a^2+2ay+y^2=$

d) $(a-4)^2=$

e) $b^2-36=$

Mes activités de récapitulation

R8.1

Déterminez dans chaque cas s'il s'agit d'expressions équivalentes.

a) $(a+b)^3$ et $a^3+3ab^2+3a^2b+b^3$

b) x^5-1 et $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

c) y^4-16 et $(y-2)^4$

R8.2

Transformez en produits les expressions suivantes.

a) $7ba^2-14ba+7b$

b) $32xyz^2-2xy$

c) $100x^2y-81y+100x^2-81$

R8.3

Dans chaque cas, effectuez les opérations afin de trouver des expressions équivalentes plus simples. S'il y a lieu, déterminez les valeurs pour lesquelles les expressions ne sont pas définies.

a) $2(3x-1)(x^2+x+2)-4x(x-3)(2x+5)$

b) $5x^3y[2x(x-y^2)-4(x^2-4xy^2)]$

c) $\dfrac{a}{5}-\dfrac{a+b}{10}+\dfrac{b}{20}$

d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}$

e) $\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}$

f) $\dfrac{3}{x^2+x}+\dfrac{x}{x+1}$

g) $x\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{y}{2}\right)$

h) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a+b}{8}-\dfrac{b}{16}$

i) $\dfrac{9}{x}-\dfrac{7}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}$

j) $\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{2}{x+5}$

R8.4

Effectuez les opérations suivantes et simplifiez les expressions obtenues.

a) $\dfrac{y^2-dy+6y-6d}{y+6}$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}$

R8.5

Déterminez si les égalités suivantes sont des identités. Si elles en sont, montrez-le par des opérations mathématiques ; si elles n'en sont pas, montrez une valeur de la variable pour laquelle l'égalité n'est pas vraie.

a) $(x+4)^2=x^2+16$

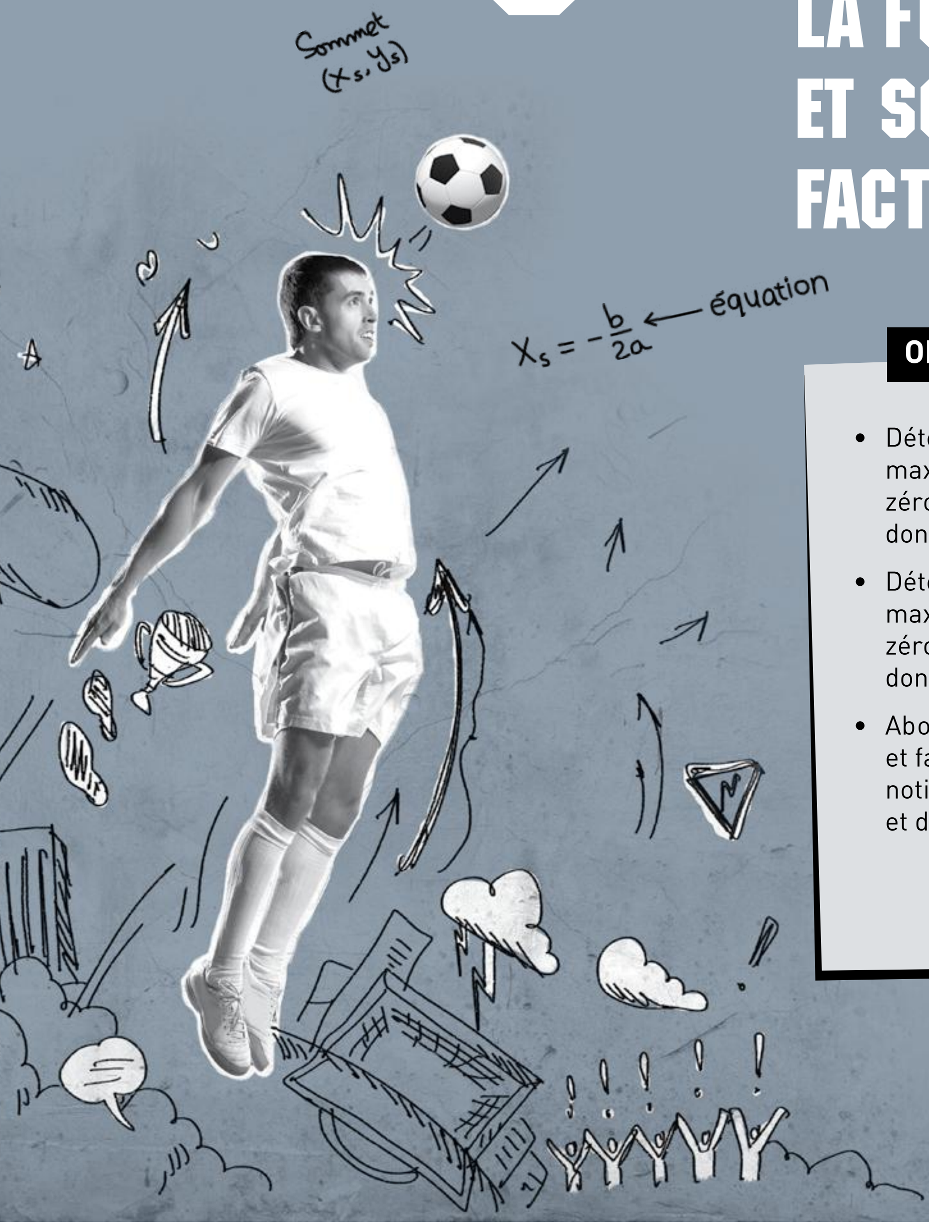
b) $\dfrac{4x+8}{4}=x+2$

c) $\dfrac{x+3}{x}=3$

CHAPITRE

9

LA FONCTION QUADRATIQUE SOUS LA FORME GÉNÉRALE ET SOUS LA FORME FACTORISÉE



Objectifs d'apprentissage

- Déterminer l'axe de symétrie, le maximum ou le minimum et les zéros d'une fonction quadratique donnée sous la forme générale
- Déterminer l'axe de symétrie, le maximum ou le minimum et les zéros d'une fonction quadratique donnée sous la forme factorisée
- Aborder les équations quadratiques et faire la distinction entre les notions d'équation quadratique et de fonction quadratique

A. Les zéros et le sommet d'une fonction quadratique donnée sous la forme générale

Au chapitre 7, vous avez appris à déterminer le sommet, l'axe de symétrie et les zéros d'une fonction quadratique donnée sous la forme canonique. En effet, si la fonction est donnée sous la forme canonique $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$, alors le sommet est le point $(h\,;\,k)$ et l'axe de symétrie est donné par la droite verticale d'équation $x = h$ (obtenue après avoir posé l'équation $(x-h) = 0$). Il faut d'ailleurs faire une déduction pour trouver les zéros en les isolant dans l'équation $a(x-h)^2 + k = 0$. Vous allez maintenant apprendre comment déterminer les éléments précédents lorsque la fonction quadratique est sous la forme générale $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

J'explore

ACTIVITÉ • 9.1

Démontrez l'identité $2x^2 + 12x + 7 = 2(x+3)^2 - 11$ et utilisez-la pour déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 12x + 7$. Indice : Développez le membre de droite.

La forme générale d'une fonction quadratique

Une fonction quadratique peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Cette façon d'exprimer la règle de correspondance reçoit le nom de **forme générale.**

Dans la forme générale, le coefficient a indique la concavité et le coefficient c donne l'ordonnée à l'origine de la parabole associée.

NOTES :

ACTIVITÉ • 9.2

Vous connaissez maintenant la forme canonique et la forme générale d'une fonction quadratique. Selon vous, quel avantage y a-t-il à écrire l'équation d'une fonction quadratique sous la forme canonique ? Quel avantage y a-t-il à écrire l'équation sous la forme générale ?

L'avantage de la forme générale :

L'avantage de la forme canonique :

Trouver le sommet et l'axe de symétrie d'une parabole quand la fonction quadratique est donnée sous la forme canonique est immédiat. Mais comment fait-on pour les trouver quand la fonction quadratique est donnée sous la forme générale ? C'est ce que vous allez apprendre grâce aux activités suivantes. Pour l'instant, en utilisant des techniques semblables à celles de l'activité 9.1, vous allez démontrer une identité qui vous sera très utile.

ACTIVITÉ • 9.3

Démontrez l'identité $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b^2}{4a}-c\right)$ et déduisez le sommet et l'axe de symétrie de la parabole $y=ax^2+bx+c$. Indice : Développez le membre de droite.

L'axe de symétrie et le sommet de la fonction quadratique d'équation $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

En utilisant l'identité de l'activité 9.3, on déduit que la représentation graphique de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a comme axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$. Par conséquent, la coordonnée x_s du sommet est $x_s = -\dfrac{b}{2a}$.

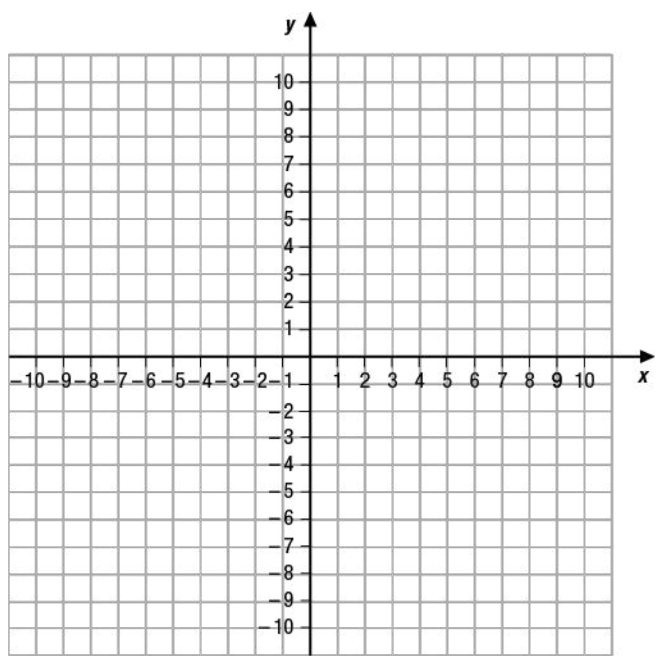
Pour trouver la coordonnée y_s du sommet, on remplace x_s par sa valeur dans la règle de correspondance de la fonction $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

NOTES :

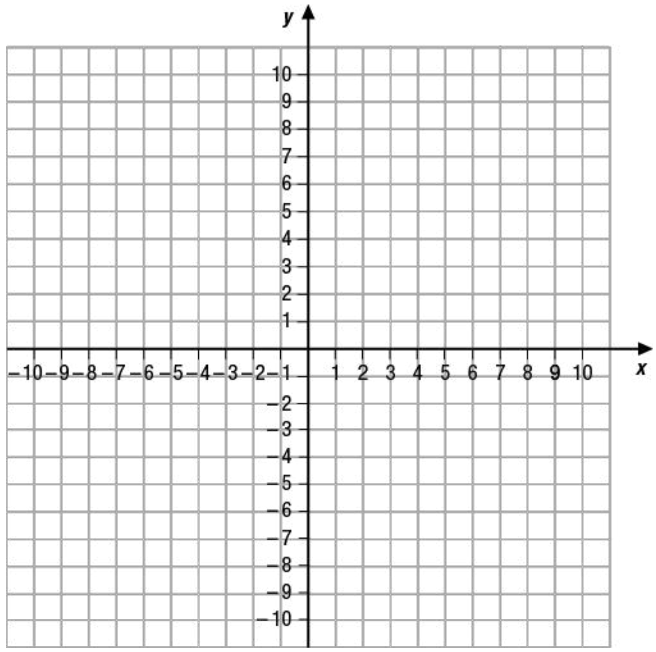
ACTIVITÉ • 9.4

Pour chaque fonction quadratique, trouvez l'axe de symétrie, le sommet, deux points qui appartiennent au graphique et leurs points symétriques. Faites ensuite une esquisse du graphique.

a) $h(x) = x^2 - 2x + 4$



b) $g(x)=x^2+6x+1$



La question des zéros d'une fonction quadratique donnée sous la forme générale se pose maintenant. Voyons comment les trouver.

Les zéros de la fonction quadratique d'équation $y=f(x)=ax^2+bx+c$

Voici une formule très utile pour trouver les zéros d'une fonction quadratique donnée sous la forme générale $f(x)=ax^2+bx+c$.

Reprenons l'identité $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)$ de l'activité 9.3. On peut voir que trouver les zéros de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ équivaut à trouver les zéros de $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)$. Autrement dit, on veut trouver les valeurs de x pour lesquelles $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)=0$.

On veut isoler x. Alors :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$$

On divise les deux membres par a :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

et, en utilisant les techniques apprises au chapitre 7, on obtient :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ce qui correspond à deux valeurs de x.

Résumé :

Les zéros x_1 et x_2 de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$, c'est-à-dire **les solutions de l'équation** $ax^2+bx+c=0$, sont donnés par les formules :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ces deux formules ou la version abrégée $x_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sont à mémoriser.

NOTES :

ACTIVITÉ • 9.5

Au chapitre 7, nous avons vu qu'une fonction quadratique $f(x)=ax^2+bx+c$ peut avoir deux zéros, avoir un zéro ou n'avoir aucun zéro. Analysez les formules du résumé de l'encadré ci-dessus et déterminez les conditions que doivent satisfaire les coefficients a, b et c pour que la fonction quadratique ait deux zéros, ait un zéro ou n'ait aucun zéro.

Le discriminant

Dans l'encadré précédent, il est dit que les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observons l'expression $b^2 - 4ac$ (qui se répète dans la formule des deux zéros) et suivons l'analyse de cette expression. On distingue trois cas :

1. $b^2 - 4ac < 0$;
2. $b^2 - 4ac > 0$;
3. $b^2 - 4ac = 0$.

Remarquez bien que si $b^2 - 4ac < 0$, alors la racine carrée ne peut pas se calculer et ces formules ne se tiennent donc pas. L'équation quadratique n'a pas de solution dans ce cas ; par conséquent, la fonction quadratique n'a pas de zéro.

Si $b^2 - 4ac > 0$, on peut calculer la racine carrée, ce qui donne deux solutions différentes : pour x_1, on ajoute le résultat de la racine, et pour x_2, on le soustrait.

Finalement, si $b^2 - 4ac = 0$, le résultat de la racine carrée est zéro également, ce qui ne donne qu'une seule solution.

On constate que l'expression $b^2 - 4ac$ permet de décider (de discriminer) au préalable si une équation quadratique a une solution, a deux solutions ou n'a aucune solution. C'est pour cette raison que cette expression reçoit le nom de **discriminant.**

NOTES :

ACTIVITÉ • 9.6

a) Trouvez les zéros de la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

b) Trouvez le signe de la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Au besoin, aidez-vous d'une esquisse du graphique de la fonction.

ACTIVITÉ • 9.7

Pour les fonctions quadratiques suivantes, déterminez :

i) si elles ont deux zéros, si elles ont un zéro ou si elles n'ont aucun zéro, et les valeurs de ces zéros (s'ils existent) ;

ii) leur signe ;

iii) leur maximum ou leur minimum.

a) $g(x) = 2x^2 + 2x - 4$

b) $f(x) = -5x^2 + 12x - 14$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $t(x) = x^2 + 6x + 1$

ACTIVITÉ • 9.8

Donnez deux fonctions quadratiques sous la forme générale : une qui a un seul zéro et une autre qui n'en a aucun.

Vous savez maintenant comment trouver les zéros ainsi que le maximum ou le minimum (sommet) d'une fonction quadratique. Nous allons nous servir de ces notions pour résoudre un problème en contexte réel.

ACTIVITÉ • 9.9

On a introduit des cerfs sur une île. Au début, le nombre de cerfs composant le troupeau a augmenté rapidement, mais après un certain temps, il a diminué à cause du manque de nourriture. Le nombre de cerfs, V, est donné par la règle $V(t) = -t^2 + 21t + 100$, où t représente le temps en année, les cerfs étant introduits à $t = 0$. Utilisez ces informations pour répondre aux questions suivantes.

a) Combien de cerfs a-t-on introduits au départ ?

b) Combien de cerfs y avait-il cinq ans après leur introduction sur l'île ?

c) Après combien d'années la population de cerfs a-t-elle atteint son maximum ? Quel était le nombre maximal de cerfs ?

d) Après combien d'années la population s'est-elle éteinte ?

e) Y a-t-il une année où le nombre de cerfs a été de 208 ?

Une introduction aux équations quadratiques

Dans l'activité 9.9, nous avons résolu deux équations quadratiques :

- d'abord $-t^2 + 21t + 100 = 0$, pour trouver les zéros et savoir à quel moment la population s'est éteinte ;
- ensuite, $-t^2 + 21t + 100 = 208$, pour savoir si à un moment donné la population a été de 208 cerfs.

Au chapitre 3, nous avons travaillé avec des équations linéaires, dans lesquelles les variables apparaissent toujours à la puissance 1. Dans les équations que nous venons de résoudre, les variables sont encore à la puissance 1, mais aussi à la puissance 2. On appelle ces équations des **équations quadratiques.** Nous étudierons ces équations au chapitre 11, mais il en sera aussi question ici, car elles sont étroitement liées aux fonctions quadratiques.

Pour résoudre une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$, comme nous l'avons déjà mentionné, on utilise la formule $x_{1,2} = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Remarquez que si on veut utiliser cette formule afin de résoudre l'équation $-t^2 + 21t + 100$ $= 208$, il faut tout d'abord soustraire 208 des deux membres de l'équation pour obtenir 0 dans le membre de droite.

NOTES :

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 9.10

Pour les fonctions quadratiques suivantes, trouvez l'image, les zéros (s'il y en a), le signe (ensembles de positivité et de négativité), la variation (croissance et décroissance), et le maximum ou le minimum (les deux coordonnées). Complétez le tableau à la page suivante.

a) $g(x) = -x^2 + 5x - 6$

b) $h(x) = x^2 + 2x + 7$

c) $f(x) = 3x^2 + 4$

	$g(x) = -x^2 + 5x - 6$	$h(x) = x^2 + 2x + 7$	$f(x) = 3x^2 + 4$
Image			
Zéros			
Ensemble pour lequel la fonction est positive			
Ensemble pour lequel la fonction est négative			
Croissance			
Décroissance			
Max ou min			

ACTIVITÉ • 9.11

Lorsqu'on lance un objet vers le haut, la hauteur parcourue par cet objet, en fonction du temps, est donnée par l'équation $d(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 20$, où t est exprimé en secondes et $d(t)$, en mètres (t et d sont positifs ou nuls).

a) Calculez $d(0)$, $d(2)$ et $d(3)$. Que représentent ces valeurs dans le contexte du problème ?

b) À quel moment l'objet atteindra-t-il sa hauteur maximale ? Quelle sera cette hauteur ?

c) À quel moment l'objet touchera-t-il le sol ?

ACTIVITÉ • 9.12

Un projectile lancé vers le ciel atteint, t secondes après avoir été lancé, une altitude h (en mètres) donnée par $h(t) = -4t^2 + 120t + 61$.

a) À partir de quelle hauteur le projectile a-t-il été lancé ?

b) À quel moment le projectile atteindra-t-il une altitude de 800 m ?

c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par ce projectile ?

d) Après combien de temps le projectile retombera-t-il au sol ?

ACTIVITÉ • 9.13

Une balle frappée par un golfeur suit une trajectoire parabolique. Elle retombe 120 m plus loin, après avoir atteint une hauteur maximale de 10 m. Donnez la fonction qui décrit cette trajectoire.

ACTIVITÉ • 9.14

Dites si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

Toute fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$.

ACTIVITÉ • 9.15

Pour les affirmations suivantes, choisissez la bonne réponse.

a) Soit une fonction quadratique $f(x) = -3x^2 + 6x + 2$ dont on sait que le sommet est le point (1; 5). La fonction décroît pour les valeurs de x sur l'intervalle :

i) $[1; +\infty[$ **ii)** $]-\infty; 1]$

iii) $[5; +\infty[$ **iv)** $]-\infty; 5]$

b) Soit une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont on sait que le sommet est au point $S(x_s\,;\,y_s)$. Si le coefficient a est positif, alors la fonction décroît pour les valeurs de x sur l'intervalle :

i) $[x_s\,; +\infty[$ **ii)** $]-\infty; x_s]$

iii) $[y_s\,; +\infty[$ **iv)** $]-\infty; y_s]$

ACTIVITÉ • 9.16

Pour la fonction quadratique $h(x) = x^2 - 2x + 4$, trouvez l'axe de symétrie, le sommet, deux points qui appartiennent au graphique et leurs points symétriques.

B. Les zéros et le sommet d'une fonction quadratique donnée sous la forme factorisée

Vous savez maintenant calculer les zéros et la valeur maximale ou minimale (sommet) d'une fonction quadratique donnée soit sous la forme canonique, soit sous la forme générale. Nous verrons comment déterminer ces mêmes éléments quand la fonction quadratique est donnée sous la forme factorisée. Commencez par résoudre l'activité 9.17, pour laquelle vous n'avez pas besoin d'explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 9.17

a) Démontrez l'identité $(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$, c'est-à-dire montrez qu'il s'agit de deux expressions équivalentes.

b) À partir du travail fait en a), on peut déduire que résoudre l'équation $(x-1)(x-7)=0$ équivaut à résoudre l'équation $x^2-8x+7=0$. Trouvez les zéros de cette dernière équation. Que remarquez-vous ? Comment l'expliquez-vous ?

Les zéros d'une expression quadratique et la factorisation

Dans l'exemple $(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$ de l'activité 9.17 b), le membre de gauche est **factorisé** (autrement dit, exprimé comme un produit de facteurs). Il y a des situations où il est avantageux de compter sur une expression algébrique factorisée. En effet, quand une expression quadratique à une variable est factorisée, il est très simple de trouver les zéros de la fonction associée. Ici, il s'agit de $x=1$ et de $x=7$, car pour que le produit $(x-1)(x-7)$ soit égal à zéro, il suffit que l'un ou l'autre des facteurs $(x-1)$ et $(x-7)$ soit égal à zéro.

Les seules expressions quadratiques à une variable que l'on peut factoriser sont celles qui ont des zéros.

L'identité $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les zéros de $f(x)=ax^2+bx+c$, permet de factoriser toute expression quadratique de la forme ax^2+bx+c dont on connaît les zéros x_1 et x_2.

Nous justifierons cette identité un peu plus loin dans ce chapitre.

Exemple : Pour factoriser l'expression $2x^2 - 2x - 12$, on trouve d'abord ses zéros.

Calcul des zéros :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm 10}{4}$$

Les zéros sont 3 et –2. La factorisation de l'expression est alors :

$2x^2 - 2x - 12 = 2(x-3)(x+2)$

NOTES :

ACTIVITÉ • 9.18

Développez le produit $2(x-3)(x+2)$ pour vérifier l'identité $2x^2 - 2x - 12 = 2(x-3)(x+2)$.

ACTIVITÉ • 9.19

Factorisez les expressions quadratiques suivantes. Vérifiez vos réponses.

a) $3x^2 - 3x - 18 =$

b) $2x^2 + 4x - 6 =$

Démonstration de l'identité $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les zéros de $f(x) = ax^2 + bx + c$

On développe le membre de droite en utilisant les expressions des zéros :

$$\begin{aligned}
a(x-x_1)(x-x_2) &= a\left[\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right] \\
&= a\left[\frac{\left(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}\right] \\
&= \frac{4a^2x^2+4axb+b^2-b^2+4ac}{4a} \\
&= \frac{4a(ax^2+bx+c)}{4a} \\
&= ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)
\end{aligned}$$

NOTES :

ACTIVITÉ • 9.20

Soit les fonctions quadratiques suivantes :

$f(x) = 2x^2 + 6x + 4$ (forme générale)

$h(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ (forme canonique)

$g(x) = 2(x+1)(x+2)$ (forme factorisée)

a) Démontrez qu'il s'agit de la même fonction. Suggestion : Développez la forme canonique pour arriver à la forme générale, et faites de même à partir de la forme factorisée.

b) Complétez le tableau. Indiquez la façon de trouver les zéros, l'axe de symétrie et le sommet de la fonction quadratique selon qu'elle est sous la forme générale, sous la forme canonique ou sous la forme factorisée.

	Forme générale $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$	Forme canonique $h(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$	Forme factorisée $g(x) = 2(x + 1)(x + 2)$
Détermination des zéros			
Détermination de l'axe de symétrie			
Détermination du sommet			

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 9.21

Pour les fonctions quadratiques suivantes, trouvez l'image, les zéros (s'il y en a), le signe (ensembles de positivité et de négativité), la variation (croissance et décroissance) et le maximum ou le minimum (les deux coordonnées). Complétez ensuite le tableau ci-dessous.

a) $k(x) = -3(x+1)(x-3)$

b) $f(x) = (x+4)^2$

	$k(x) = -3(x+1)(x-3)$	$f(x) = (x+4)^2$
Image		
Zéros		
Ensemble pour lequel la fonction est positive		
Ensemble pour lequel la fonction est négative		
Croissance		
Décroissance		
Maximum ou minimum		

ACTIVITÉ • 9.22

Utilisez la méthode de votre choix pour déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

a) L'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 4(120 - x)x$ est la droite verticale $x = 40$.

b) Les zéros de la fonction quadratique $f(x) = (2x-5)(3x+8)$ sont $x = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{8}{3}$.

Mes exercices de récapitulation

R9.1

Pour la fonction $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, définie pour $[-3; +\infty[$, complétez le tableau. Donnez le domaine, l'image, le sommet, les zéros, la variation et le signe.

Caractéristiques	$f(x) = -x^2 - 4x + 5$
Domaine	
Image	
Sommet	
Zéros (validez vos valeurs à l'aide de la règle de correspondance $f(x) = -x^2 - 4x + 5$)	Il y a un zéro à $x = 1$. Il y a un autre zéro à $x = -5$, mais il ne fait pas partie du domaine. $f(1) = -1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 0$
Variation	
Signe	

R9.2

Rédigez une méthode qui permet d'obtenir l'ensemble pour lequel une fonction quadratique quelconque est positive.

R9.3

Est-il vrai que la fonction quadratique $f(x) = x^2 + bx - 4$ a toujours deux zéros, peu importe la valeur de b ?

R9.4

Pour les fonctions quadratiques suivantes, trouvez les éléments demandés : l'image, le ou les zéros, le signe (ensembles de positivité et de négativité), l'intervalle de croissance, l'intervalle de décroissance et le maximum ou le minimum (les deux coordonnées).
Suggestion : Au besoin, faites une esquisse du graphique.

a) $f(x) = -5x^2 + 10x - 7$

b) $f(x) = 3(x-2)(x+6)$

c) $f(x) = 2x^2 + 5x$

d) $f(x) = 5(x-6)^2 - 11$

R9.5

a) Donnez une valeur de a telle que la fonction quadratique $f(x) = ax^2 - 2x + 1$, où $a \neq 0$, n'ait aucun zéro.

b) Donnez **toutes** les valeurs de a qui satisfont la même condition qu'en a).

R9.6

Écrivez les fonctions quadratiques suivantes sous la forme factorisée, chaque fois que c'est possible.

a) $f(x) = x^2 - 20x + 99$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$

R9.7

Trouvez les zéros des fonctions suivantes à l'aide de la méthode de votre choix.

a) $f_1(x) = 2x^2 - 32$

b) $f_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $f_3(x) = (x+1)(x-2)$

d) $f_4(x) = 3(x+1)(x+2)$

e) $f_5(x) = (2x-1)(x+3)$

f) $f_6(x) = 20x^2 - 5$

g) $h(x) = 3x^2 + 6$

R9.8

Factorisez les expressions quadratiques suivantes, chaque fois que c'est possible.

a) $x^2 + 6x + 5$

b) $x^2 - x - 12$

c) $4x^2 + 8 - 12x$

d) $x^2 + x + \frac{25}{2}$

e) $x^2 - 4x + 4$

CHAPITRE

10 LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE PREMIER ET SECOND DEGRÉ ET LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES QUADRATIQUES

Objectifs d'apprentissage

- Comprendre que les équations à une variable peuvent avoir (selon le cas) une solution, plusieurs solutions, ou n'en avoir aucune, et qu'il peut arriver que toutes les valeurs de la variable concernée soient une solution de l'équation (dans ce cas, l'équation porte le nom d'« identité »)
- Maîtriser des techniques de résolution d'équations qui se ramènent à des équations de degré 1 ou 2
- Savoir représenter une situation en contexte par une équation (modélisation) et savoir interpréter la solution

A. Les équations

Vous avez eu l'occasion, dans les chapitres précédents, de travailler avec des équations. Vous savez donc qu'une équation à une variable est une égalité entre des expressions algébriques dont l'objectif est de trouver la ou les valeurs qui rendent cette égalité vraie. Ces valeurs, si elles existent, reçoivent le nom de solutions. Il existe une grande variété d'équations ; vous en verrez une petite partie dans ce chapitre. Vous approfondirez l'étude des équations quadratiques entreprise au chapitre 9, puis vous résoudrez des équations qui, de prime abord, ne semblent pas être linéaires ou quadratiques, mais qui peuvent se ramener à des équations de l'un de ces deux types. Cette résolution se fera en effectuant des opérations qui ne modifient pas les solutions.

Vous pouvez commencer en résolvant l'activité 10.1, qui ne requiert aucune explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 10.1

La superficie d'un terrain rectangulaire est de 699,3 m^2. Un de ses côtés mesure 9,3 m de plus que la longueur de l'autre. On veut déterminer les dimensions du terrain ; pour ce faire, on peut dire : « Si le côté le plus court mesure x, alors les côtés mesurent x et $x+9,3$; leur produit est égal à 699,3 » et on écrit :

$x \cdot (x+9,3) = 699,3$

$x^2 + 9,3x = 699,3$

Vérifiez qu'il est impossible d'isoler x dans l'équation $x^2 + 9,3x = 699,3$ et trouvez une façon de résoudre cette équation.

Rappel – La solution d'équations quadratiques

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par les formules :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a pas de solution ; si $b^2 - 4ac > 0$, il y a deux solutions différentes ; finalement, si $b^2 - 4ac = 0$, il y en a seulement une. L'expression $b^2 - 4ac$ porte le nom de « discriminant ».

Souvent, on appelle « zéros » ces solutions d'une équation, car il s'agit en effet des zéros de la fonction quadratique associée, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

ACTIVITÉ • 10.2

Écrivez une équation représentant le problème ci-dessous, résolvez-la et interprétez la solution.

Des personnes qui ont assisté à la même rencontre se sont serré la main. Quelqu'un a remarqué qu'il y a eu 66 poignées de main en tout. Combien de personnes ont assisté à cette rencontre ?

ACTIVITÉ • 10.3

Les équations quadratiques qui suivent ont-elles une solution, deux solutions, ou n'ont-elles aucune solution ? Trouvez les solutions lorsqu'il y en a.

a) $-5x^2 + 12x = 14$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

c) $4x^2 = -5x - 1$

ACTIVITÉ • 10.4

a) Inventez une équation quadratique n'ayant qu'une solution. Justifiez votre réponse.

b) Inventez une équation quadratique n'ayant aucune solution. Justifiez votre réponse.

ACTIVITÉ • 10.5

Résolvez les équations suivantes.

a) $(x-3)(x+6) = 0$

b) $3(x-2)(x+5) = 0$

c) $4x(x-3) = 0$

d) $(2x-1)(x-5)=6$

e) À la question d), pourquoi ne pouviez-vous pas tout simplement poser les facteurs $(2x-1)$ et $(x-5)$ égaux à 3 et à 2 en alternance ?

f) $\dfrac{(x-2)(2x-5)}{x^2+3}=0$

g) $3(x-1)(x+2)(3x-5)=0$

Le lien existant entre les coefficients et les zéros d'une équation quadratique de la forme $x^2+bx+c=0$

Il y a un lien entre les coefficients b et c de l'équation quadratique $x^2+bx+c=0$ et ses zéros x_1 et x_2, quand il y en a. Soit x_1 et x_2 les zéros de l'équation $x^2+bx+c=0$. On a alors l'identité $x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$.

En développant le produit $(x-x_1)(x-x_2)$, on obtient une deuxième identité :

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= x^2 - x\cdot x_2 - x_1\cdot x - x_1\cdot x_2\\ &= x^2 - x\cdot x_1 - x\cdot x_2 - x_1\cdot x_2\\ &= x^2 - x\cdot\left(x_1+x_2\right) - x_1\cdot x_2\\ &= x^2 - \underbrace{(x_1+x_2)}_{b}x + \underbrace{x_1\cdot x_2}_{c}\end{aligned}$$

qui permet de déduire que **si x_1 et x_2 sont les zéros de l'expression quadratique x^2+bx+c, alors la somme des zéros x_1 et x_2 est égale à $(-b)$ et leur produit est égal à c** (c'est-à-dire que $x_1+x_2=-b$ et $x_1\cdot x_2=c$).

Par exemple, on cherche les zéros de l'équation $x^2-8x+7=0$. On sait qu'il y a deux zéros, car le discriminant est positif. Les zéros x_1 et x_2 doivent vérifier $x_1+\ x_2=-(-8)=8$ et $x_1\cdot x_2=7$. On cherche alors deux nombres dont le produit est égal à 7 et la somme, égale à 8. Le fait que 7 soit un nombre premier facilite la tâche ; on constate que $x_1=1$ et $x_2=7$ vérifient ces conditions, ce qui permet de factoriser rapidement l'expression pour obtenir $x^2-8x+7=(x-7)(x-1)$, puis de résoudre l'équation.

On peut résumer cette méthode comme suit : Si l'équation quadratique $x^2+bx+c=0$ a des solutions, alors leur somme est égale à $(-b)$ et leur produit est égal à c (c'est-à-dire que si x_1 et x_2 sont les zéros de l'expression x^2+bx+c, alors $x_1+x_2=-b$ et $x_1\cdot x_2=c$).

Remarque : Cette méthode est partiellement utile et facile à appliquer quand les coefficients b et c sont de petits nombres entiers, mais elle est inefficace dans d'autres cas. Par exemple, on ne peut pas appliquer cette méthode à la recherche des solutions de $x^2+9{,}3x-699{,}3=0$.

NOTES :

ACTIVITÉ • 10.6

Utilisez la méthode suggérée dans l'encadré ci-dessus pour trouver les solutions des équations quadratiques suivantes. Vous pouvez vérifier vous-même vos résultats… Faites-le !

a) $x^2+8x+7=0$

b) x^2-6x-7

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 10.7

Trouvez, si possible, les solutions de chacune des équations suivantes à l'aide de la méthode de votre choix et vérifiez vos réponses.

a) $x^2 - 12x + 11 = 0$

b) $x^2 + x + \frac{25}{2} = 0$

c) $x^2 - 4x = -4$

d) $x(x-3) = 4$

e) $4x(x+5) = 10x + \frac{11}{4}$

f) $(2x-7)(3x-5) = 0$

ACTIVITÉ • 10.8

Dans les problèmes qui suivent, posez une équation représentant le problème, résolvez-la et interprétez la solution.

Le produit de deux nombres entiers consécutifs est 272. Quels sont ces nombres ?

ACTIVITÉ • 10.9

Selon le site Internet Guinness World Records, jusqu'en 2010, le plus grand drapeau jamais créé était un drapeau libanais, un rectangle ayant une aire de 65 975 m^2. Si la longueur du drapeau mesure 122 m de plus que sa largeur, déterminez les dimensions du drapeau.

Tentez de résoudre ce problème avec une seule équation quadratique, en utilisant une seule variable pour représenter la situation.

ACTIVITÉ • 10.10

a) Donnez, si c'est possible, une valeur de b telle que l'équation $3x^2 - bx + 2 = 0$ n'ait pas de solution. Justifiez votre réponse.

b) Donnez, si c'est possible, une valeur de b telle que l'équation $3x^2 - bx - 2 = 0$ n'ait pas de solution. Justifiez votre réponse.

c) Donnez, si c'est possible, une valeur de b telle que l'équation $2x^2 - bx + 2 = 0$ ait exactement une solution. Justifiez votre réponse.

ACTIVITÉ • 10.11

Soit l'équation $3x(3+x) - 2x = 6x^2 - 3x(5+x) + 1$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

a) L'équation a une seule solution. **b)** L'équation a deux solutions.

c) L'équation n'a pas de solution. **d)** Aucune de ces réponses

B. Les équations se ramenant à des équations linéaires ou quadratiques

Il y a des équations qui, de prime abord, ne semblent pas être des équations linéaires ou quadratiques, mais qui se ramènent à des équations de ces deux types grâce à des opérations ne modifiant pas l'ensemble solution. Vous allez les étudier dans cette section. Pour commencer, vous trouverez un rappel des notions vues au chapitre 3 concernant la résolution d'équations linéaires (qui s'appliquent aussi à d'autres équations, pas seulement à celles qui sont linéaires).

Rappel – Les opérations à effectuer lors de la résolution d'équations

Pour résoudre une équation, on peut effectuer des opérations visant à isoler la variable en question en s'assurant de ne pas fausser la ou les solutions. Voici de quelles opérations il s'agit :

1. Si l'on a une égalité, on peut additionner ou soustraire la même valeur des deux côtés du signe d'égalité. Ainsi, si $a = b$, alors $a \pm c = b \pm c$.

2. Si l'on a une égalité, on peut multiplier ou diviser chaque membre de l'égalité par la même valeur non nulle. Ainsi, si $a = b$, alors $a \cdot c = b \cdot c$, et si $a = b$, alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, pour $c \neq 0$.

3. Deux applications successives de la règle 2 permettent de déduire la règle connue comme « le produit croisé ». Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $ad = cb$.

On peut effectuer ces trois opérations en ayant la certitude de conserver l'ensemble solution.

Gardez ces opérations en tête pendant l'étude du reste du chapitre.

J'explore

ACTIVITÉ • 10.12

Soit l'équation $\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x+3}$. Remarquez d'abord que x ne peut pas prendre les valeurs 3 et –3.

Quelle opération effectueriez-vous pour ramener cette équation sous une forme plus proche de celle avec laquelle vous avez l'habitude de travailler ? Faites cette opération et résolvez l'équation.

ACTIVITÉ • 10.13

Trouvez l'ensemble solution de l'équation $\frac{x^2+11x}{x+1}=12$. Indiquez s'il y a des valeurs que la variable ne peut pas prendre.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 10.14

Trouvez l'ensemble solution des équations suivantes.

a) $\frac{x^2-5x+6}{x-2}=3$

b) $\frac{x+2}{x+3}=\frac{3x-1}{3x}$

Les équations sans solution et les identités

Il ne faut pas oublier qu'il existe des équations n'ayant aucune solution ou encore ayant toutes les valeurs de la variable comme solution. Dans ce dernier cas, on les appelle des **identités.**

Exemple 1 : Trouvez l'ensemble solution de l'équation $\frac{5}{x-2}=0$.

Cette équation n'a pas de solution, car il n'y a aucun nombre tel que 5 divisé par ce nombre donne 0. Si on voulait isoler la variable, on obtiendrait :

$$\frac{5}{x-2}=0$$
$$5=0(x-2)$$
$$5=0$$

ce qui montre la contradiction. Il n'y a donc aucune solution possible. On peut aussi dire que l'ensemble solution est vide.

Exemple 2 : Trouvez l'ensemble solution de l'équation $\frac{3x+6}{x+2}=3,\ x \neq -2$.

Si l'on factorise le numérateur, on obtient :

$$\frac{3(x+2)}{x+2}=3$$

ce qui est vrai pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x=-2$ (le quotient n'est pas défini, car la division par zéro n'est pas définie).

Si l'on voulait isoler la variable, on obtiendrait :

$$3x+6=3(x+2),\ \text{pour } x \neq -2$$
$$3x+6=3x+6$$
$$0=0$$

Cette tautologie montre l'identité pour toutes les valeurs de la variable x, sauf pour $x=-2$. Autrement dit, l'ensemble solution est $x \in\ ]-\infty; -2[\ \cup\ ]-2; +\infty[$.

ACTIVITÉ • 10.15

Trouvez l'ensemble solution des équations suivantes.

a) $\frac{2x+7}{x+3,5}=2$

b) $\frac{2}{3x-4}=0$

Les équations contenant des radicaux

Pour résoudre des équations contenant des racines carrées, on peut élever au carré chaque membre de l'équation, mais il faut savoir que cette opération peut ajouter des solutions qui ne sont pas celles de l'équation initiale.

Exemple : Trouvez les solutions de l'équation :

$\sqrt{2x+3} = x$

On élève au carré chaque membre de l'équation, de sorte que :

$(\sqrt{2x+3})^2 = x^2$

d'où

$2x+3 = x^2$

ou bien

$-x^2+2x+3=0$

Cette équation admet comme solutions les valeurs $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$. En substituant chacune de ces valeurs dans l'équation initiale, on remarque que seul $x_1 = 3$ est une solution de l'équation de départ, et non $x_2 = -1$.

ACTIVITÉ • 10.16

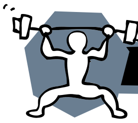
Analysez la résolution de l'exemple de l'encadré précédent. Pourquoi, selon vous, obtient-on une solution et une autre valeur qui n'est pas une solution de l'équation initiale ?

ACTIVITÉ • 10.17

Résolvez l'équation $\sqrt{6x+3} = 3x$.

ACTIVITÉ • 10.18

Est-il vrai que $x = \sqrt{3}$ est une solution de l'équation $-x^2 + 2(1-x)^2 = 5-4x$?



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 10.19

Trouvez les solutions des équations suivantes. Établissez à l'avance s'il y a des valeurs que la variable ne peut pas prendre. Notez que si vous obtenez une solution, vous serez en mesure de valider vos réponses dans l'équation de départ... N'hésitez pas, faites-le !

a) $\dfrac{x-3}{9} = \dfrac{x-\frac{7}{9}}{2x}$

b) $\dfrac{3x+1}{3x} = \dfrac{x-\frac{1}{3}}{x-1}$

c) $13 + \dfrac{8}{2x-4} = 17$

d) $\dfrac{x-5}{x^2+1} = 0$

e) $\dfrac{x+1}{3x+2}=1$

f) $\dfrac{2x+8}{x+4}=2$

g) $\dfrac{8}{x-3}=0$

h) $x=\sqrt{5x-6}$

i) $x=\sqrt{35+2x}$

j) $\sqrt[5]{32x^5}=-2$

k) $\sqrt{x-5}=2$

l) $\sqrt{2x+5}=x+1$

L'utilisation de la valeur absolue dans la résolution d'équations

La valeur absolue d'un nombre a est la valeur de sa distance par rapport à zéro. On la note $|a|$.

Par exemple, $|4| = 4$, tout comme $|-4| = 4$, car les distances de 4 à 0 et de -4 à 0 sont toutes deux de 4.

Si $|x| = 5$, alors il y a deux valeurs possibles pour x, soit $x = 5$ et $x = -5$. La valeur absolue est un outil important pour résoudre des équations et des inéquations contenant des exposants pairs, car, en fait, on peut définir que si n est pair, alors $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Il s'ensuit que $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ et ainsi de suite.

Par exemple, résolvons l'équation :

$x^2 = 36$

En appliquant la racine carrée dans les deux membres de l'équation, on obtient :

$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$|x| = 6$

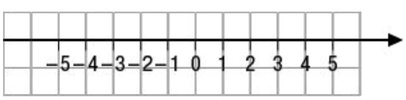
car $\sqrt{36} = 6$. Ainsi, les solutions de cette équation sont $x_1 = 6$ ou $x_2 = -6$. Nous avons résolu ce type d'équation au chapitre 7 en utilisant la règle suivante : si $x^2 = k$ et $k > 0$, alors $x = \pm\sqrt{k}$. Vous connaissez maintenant l'origine de cette règle.

NOTES :

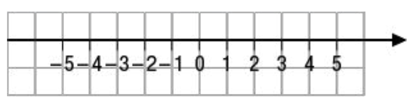
ACTIVITÉ • 10.20

Représentez, sur la droite, tous les nombres réels x qui satisfont les équations ou les inéquations suivantes.

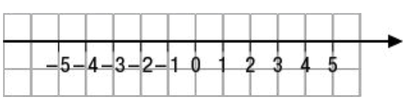
a) $|x| = 3$



b) $|x| \leq 3$



c) $|x| > 3$



ACTIVITÉ • 10.21

Trouvez la ou les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie dans les équations suivantes.

a) $|x-2|=1$ **b)** $|1-x|=2$

ACTIVITÉ • 10.22

Analysez la résolution de l'équation ci-dessous en expliquant pas à pas les propriétés utilisées.

$-3(x+1)^2+27=0$

$-3(x+1)^2=-27$

$(x+1)^2=\frac{-27}{-3}$

$(x+1)^2=9$

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{9}$

$|x+1|=3$

De là, on a :

$x+1=3$ ou $x+1=-3$

Alors :

$x=2$ ou $x=-4$

ACTIVITÉ • 10.23

Résolvez les équations suivantes.

a) $2x^2=32$ **b)** $3(x+1)^2-27=0$

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 10.24

Résolvez les équations suivantes en utilisant la valeur absolue.

a) $(x+3)^2 = 81$

b) $(x-5)^2 = 4$

c) $|x-2| = 7$

d) $(4x+2)^2 = 25$

e) $9-|x| = 6$

f) $(2x-1)^2 = 9$

Mes activités de récapitulation

R10.1

Trouvez les solutions des équations suivantes.

a) $x^2 - 2x = 3x - 6$

b) $3x = \dfrac{3x-6}{x}$

c) $\dfrac{5x+6}{2x} = \dfrac{1}{2}x$

d) $x(2x+3) = -1$

e) $1 = \dfrac{10x}{3x^2+3}$

f) $\sqrt{12x^2 - 17x - 3} = 2$

R10.2

De quelle équation $x = 5$ est-il une solution ? Choisissez la bonne réponse.

a) $\dfrac{5-x}{25-x^2} = 0$ **b)** $\dfrac{25-x^2}{x+5} = 0$ **c)** $\dfrac{1}{x-5} = 0$

R10.3

L'aire d'un rectangle est de 72 m^2 et son périmètre est de 34 m. Trouvez la longueur et la largeur de ce rectangle.

R10.4

Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = 11x - 30$? Choisissez la bonne réponse.

a) –5 et 6 **b)** 5 et –6 **c)** 5 et 6 **d)** Aucune de ces réponses

R10.5

Les égalités suivantes sont-elles des identités ? Si oui, démontrez-le ; sinon, trouvez au moins une valeur de la variable pour laquelle l'égalité des deux membres ne se tient pas.

a) $2(x+4) - (x+3) = x + 5$

b) $(x+4)^2 = x^2 + 16$

c) $\dfrac{5x-3}{5} = x - 3$

d) $\dfrac{2x+3}{2x+4} = \dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{15x}{3} = \dfrac{10x}{2}$

CHAPITRE

11 LES RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

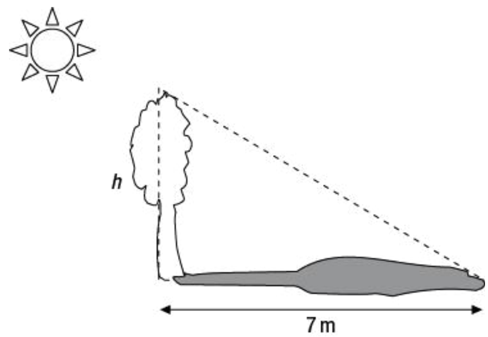
Objectifs d’apprentissage

- Trouver des mesures manquantes dans un triangle rectangle à l’aide du théorème de Pythagore
- Utiliser les relations trigonométriques afin de trouver des mesures manquantes dans un triangle rectangle

Les notions que vous étudierez dans ce chapitre vous permettront de résoudre des problèmes comme le suivant :

« Quand le soleil forme un angle de 30° avec l'horizontale, l'ombre projetée par un arbre mesure 7 m. Trouvez la hauteur de cet arbre. »

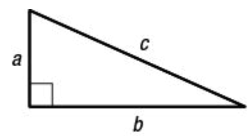
Nous reviendrons plus loin sur ce problème.



A. La détermination de mesures manquantes dans le triangle rectangle à l'aide du théorème de Pythagore

Faisons d'abord un retour sur le théorème de Pythagore (chapitre 4) :

« Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse. »



$c^2 = a^2 + b^2$

J'explore

ACTIVITÉ • 11.1

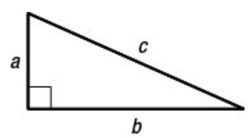
Déterminez si les triangles suivants, dont les longueurs des côtés sont données, sont des triangles rectangles.

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm

b) 9 cm, 10 cm, 7 cm

ACTIVITÉ • 11.2

Sachant que chaque triangle ci-contre est un triangle rectangle, donnez la longueur manquante et justifiez la réponse. Notez que la figure n'est pas proportionnelle aux longueurs proposées.



a) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c =$

b) $a =$ $b = 12$ cm, $c = 15$ cm,

c) $a = 7{,}5$ cm, $b =$ $c = 12{,}5$ cm,

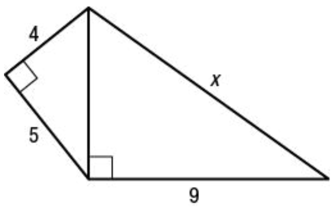
ACTIVITÉ • 11.3

Afin de connaître la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, Paula fait le calcul suivant : $L = \sqrt{6^2 - 5^2}$. Le côté L est-il une des cathètes ou l'hypoténuse ? Donnez les longueurs des autres côtés.

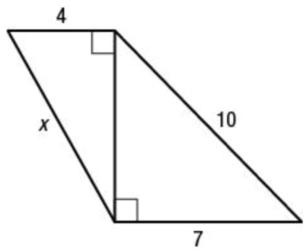
ACTIVITÉ • 11.4

Calculez la longueur du côté x de chacun des triangles suivants. Les longueurs sont toutes exprimées en centimètres. Les quatre triangles sont des triangles rectangles.

a)



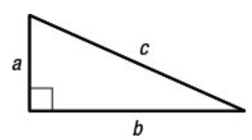
b)



Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 11.5

Sachant que chacun des triangles suivants est un triangle rectangle, donnez la longueur manquante dans chaque cas.



a) $a = ?$, $b = 9$ cm, $c = 20$ cm

b) $a = 6$ cm, $b = 6$ cm, $c = ?$

ACTIVITÉ • 11.6

Pour connaître la longueur d'un côté d'un triangle rectangle, Julian a effectué le calcul suivant : $L = \sqrt{9^2 + 144}$.

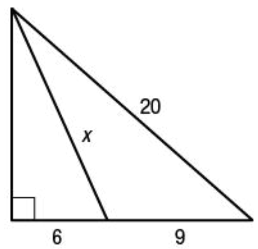
a) Le côté L est-il une cathète ou l'hypoténuse ?

b) Donnez les longueurs des deux autres côtés.

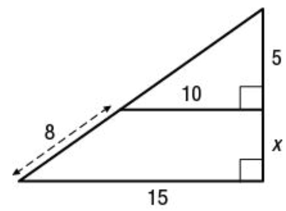
ACTIVITÉ • 11.7

Calculez la longueur du côté x dans chaque cas. Les longueurs sont exprimées en centimètres.

a)

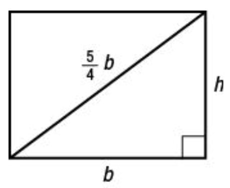


b)



ACTIVITÉ • 11.8

La longueur de la diagonale d'un rectangle correspond à $\frac{5}{4}$ de la longueur de sa base. L'aire de ce rectangle est de 108 cm^2. Calculez son périmètre.



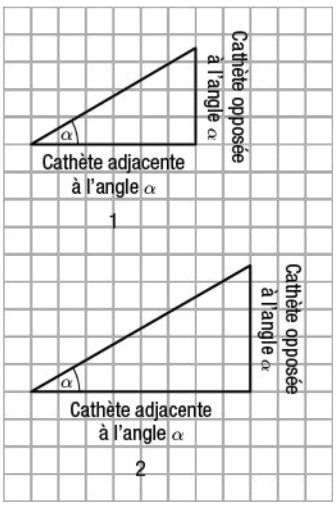
B. Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle

J'explore

ACTIVITÉ • 11.9

Observez les deux triangles rectangles ci-dessous : les deux ont en commun le fait qu'ils ont un angle α de 30°. Nous nous intéressons aux rapports entre leurs côtés.

Mesurez, à l'aide d'une règle, les côtés du triangle, puis complétez le tableau par rapport à l'angle α.



	Triangle 1	Triangle 2
Cathète opposée		
Cathète adjacente		
Hypoténuse		
$\dfrac{\textbf{Cathète opposée}}{\textbf{Hypoténuse}}$		
$\dfrac{\textbf{Cathète adjacente}}{\textbf{Hypoténuse}}$		
$\dfrac{\textbf{Cathète opposée}}{\textbf{Cathète adjacente}}$		

Les rapports trigonométriques

Dans l'activité 11.9, si vous avez mesuré les côtés avec soin et que vous avez bien fait les calculs, vous constaterez que, malgré le fait que les dimensions des triangles sont différentes, les rapports sont identiques (il s'agit, en effet, de triangles semblables).

On définit, pour un des angles aigus α d'un triangle rectangle, les rapports suivants :

$$\sin\alpha = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

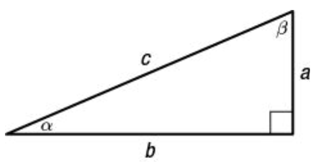
$$\cos\alpha = \frac{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } \alpha}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } \alpha}{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } \alpha}$$

NOTES :

ACTIVITÉ • 11.10

Pour le triangle rectangle ci-contre, déterminez les quotients donnant les rapports trigonométriques demandés pour les angles α et β en utilisant les grandeurs a, b et c.



a) $\sin\alpha =$ **b)** $\cos\alpha =$ **c)** $\tan\alpha =$

d) $\sin\beta =$ **e)** $\cos\beta =$ **f)** $\tan\beta =$

Les rapports trigonométriques d'angles complémentaires

Observez les quotients obtenus dans l'activité 11.10. Comme α et β sont des angles complémentaires (c'est-à-dire que α et $\beta = 90°$), il y a des valeurs qui se répètent, ce qui permet d'écrire les égalités suivantes :

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta \text{ et } \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}.$$

Ces égalités sont valides pour toutes les paires d'angles complémentaires.

Exemples :

$\sin 30° = \cos 60°$ $\sin 45° = \cos 45°$ $\tan 30° = \dfrac{1}{\tan 60°}$

ACTIVITÉ • 11.11

Complétez le tableau suivant à l'aide de la calculatrice. Vérifiez si les égalités de l'encadré précédent sont satisfaites. L'angle α est mesuré en degrés.

α	$90° - \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin (90° - \alpha)$	$\cos \alpha$	$\cos (90° - \alpha)$
75°					
18°					

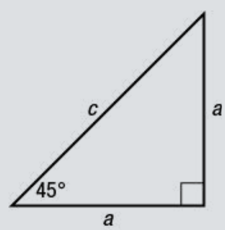
ACTIVITÉ • 11.12

Expliquez pourquoi le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont toujours des nombres plus petits que 1.

La valeur du sinus et du cosinus de 45°

Comment détermine-t-on le sinus et le cosinus de 45° ?

Observez le triangle ci-contre.



On exprime d'abord sin 45° et cos 45° en utilisant les grandeurs a et c :

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{a}{c}$$

On n'a pas besoin de connaître a et c, mais leur quotient. On le déduira.

Selon le théorème de Pythagore, $a^2 + a^2 = c^2$, d'où $2a^2 = c^2$.

Alors, on a :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

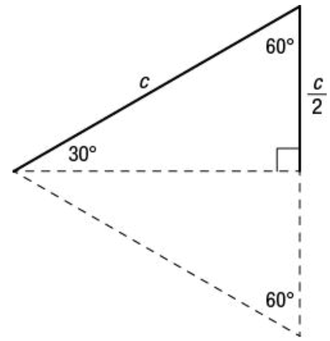
et, en prenant uniquement la valeur positive pour le quotient $\frac{a}{c}$:

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

Ainsi, $\sin 45° \approx 0,707$ et $\cos 45° \approx 0,707$.

ACTIVITÉ • 11.13

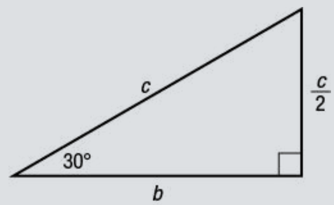
Observez la figure ci-contre et déduisez la valeur de sin 30° à l'aide du théorème de Pythagore. Déduisez la valeur de cos 60°.



La valeur du cosinus de 30°

Comment détermine-t-on le cosinus de 30° ?

Observez le triangle ci-dessous.



On sait que $\cos 30° = \dfrac{b}{c}$. On peut déduire la valeur de ce quotient à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\frac{c^2}{2^2} + b^2 = c^2$$

On soustrait $\dfrac{c^2}{2^2}$ des deux membres de l'équation :

$$b^2 = c^2 - \frac{c^2}{4}$$

$$b^2 = \frac{3}{4}c^2$$

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

d'où on tire, en ne prenant que la solution positive :

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$$

Ainsi, cos 30° ≈ 0,866 (et aussi sin 60° ≈ 0,866).

NOTES :

ACTIVITÉ • 11.14

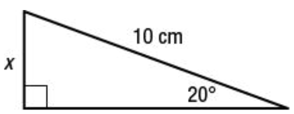
Complétez le tableau suivant avec les valeurs des rapports trigonométriques.

Angle α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0°			
30°			
45°			
60°			
90°			

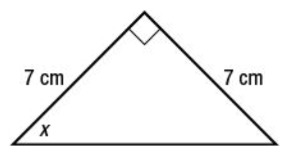
ACTIVITÉ • 11.15

Trouvez la valeur de x pour chacun des triangles suivants.

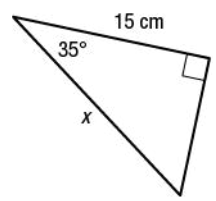
a)



b)



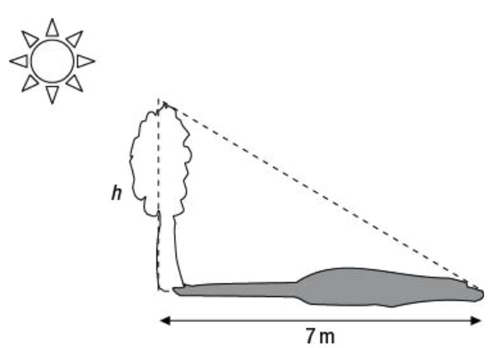
c)



ACTIVITÉ • 11.16

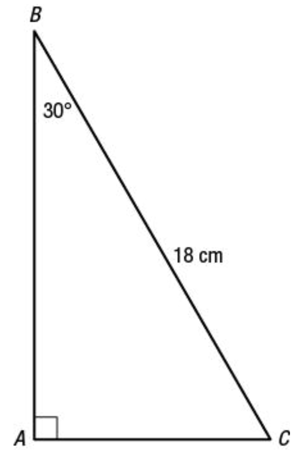
Revenons au problème présenté au début du chapitre :

« Quand le soleil forme un angle de 30° avec l'horizontale, l'ombre projetée par un arbre mesure 7 m. Trouvez la hauteur de cet arbre. »



ACTIVITÉ • 11.17

Trouvez le périmètre et l'aire du triangle *ABC* ci-contre.

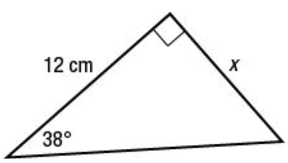


Je m'entraîne

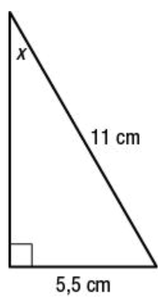
ACTIVITÉ • 11.18

Trouvez la valeur de x pour chacun des triangles suivants.

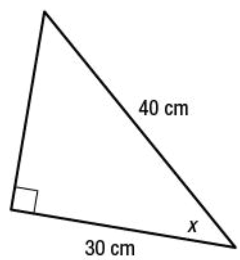
a)



b)

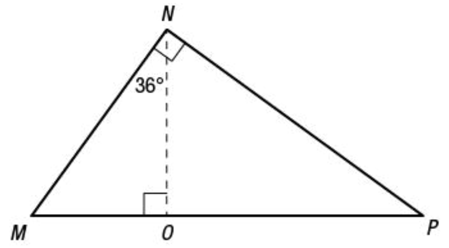


c)



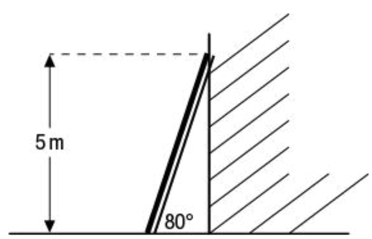
ACTIVITÉ • 11.19

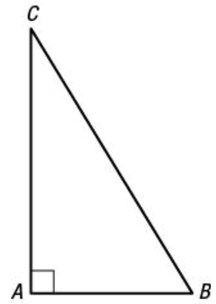
Trouvez le périmètre et l'aire du triangle rectangle MNP ci-contre sachant que $\overline{MO} = 4$ cm et que $m\angle ONM = 36°$.



ACTIVITÉ • 11.20

Une échelle est appuyée sur un mur à un point situé à 5 m au-dessus du plancher. L'angle qu'elle fait avec le plancher est de 80°. Quelle est la longueur de l'échelle ?





ACTIVITÉ • 11.21

Le triangle ci-contre est rectangle en A. Complétez les affirmations suivantes pour les rendre vraies.

a) Le quotient $\dfrac{\mathrm{m}\overline{AB}}{\mathrm{m}\overline{CB}}$ donne la valeur du sinus de l'angle ____ .

b) Le quotient $\dfrac{\mathrm{m}\overline{CA}}{\mathrm{m}\overline{AB}}$ donne la valeur de ____ de l'angle B.

c) $\cos B$ est donné par le quotient $\dfrac{\quad}{\mathrm{m}\overline{CB}}$.

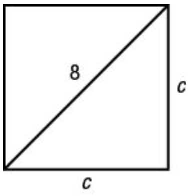
d) $\cos B = \sin$ ____

e) $\sin B = \cos$ ____

Mes activités de récapitulation

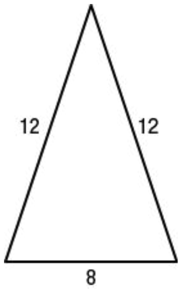
R11.1

La diagonale d'un carré mesure 8 m. Trouvez le périmètre du carré.



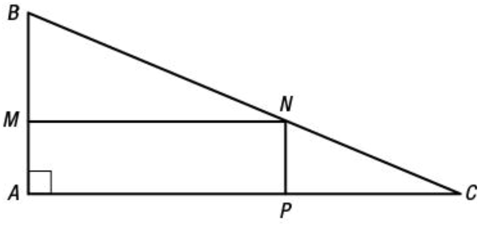
R11.2

Trouvez l'aire d'un triangle isocèle sachant qu'un côté mesure 8 cm et que les côtés égaux mesurent 12 cm.



R11.3

Trouvez le périmètre du triangle ABC ci-contre sachant que $AMNP$ est un rectangle et que $\overline{MN} = 12$ cm, $\overline{PC} = 8$ cm, $\overline{NC} = 10$ cm et $\overline{BM} = 9$ cm.



R11.4

Sachant que la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, déterminez si les triangles ABC, dont les mesures des angles sont données ci-dessous, sont des triangles rectangles en trouvant d'abord la valeur de x.

a) $m\angle A = 2x$, $m\angle B = x$, $m\angle C = 3x$

b) $A = x + 1°$, $B = 2x + 4°$, $C = 55°$

c) $A = \frac{x}{2}, B = \frac{x}{2}, C = x - 4°$

R11.5

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifiez votre réponse.

a) Le théorème de Pythagore est valide pour n'importe quel triangle.

b) Le théorème de Pythagore est valide pour n'importe quel triangle rectangle.

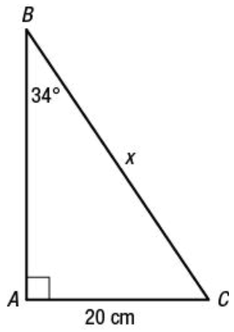
c) L'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés mesurent 6 cm et 8 cm mesure 14 cm.

d) Dans un triangle rectangle où un côté mesure 7 cm et l'hypoténuse, 9 cm, l'autre côté mesure $4\sqrt{2}$ cm.

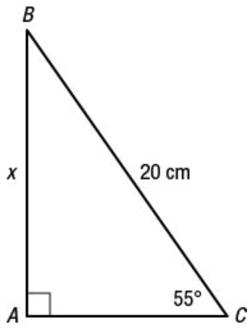
R11.6

Trouvez la valeur de x dans chacune des figures suivantes.

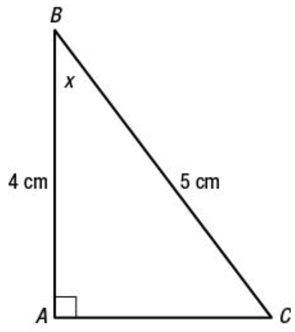
a)



b)

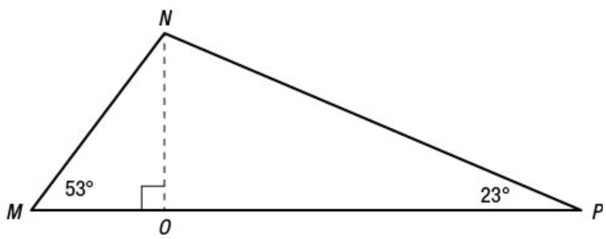


c)



R11.7

Trouvez le périmètre du triangle MNP ci-dessous sachant que $m\overline{NO} = 22$ cm.



CHAPITRE

12 LES FONCTIONS PAR PARTIES, LA FONCTION RÉCIPROQUE DE LA FONCTION QUADRATIQUE ET LES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Objectifs d'apprentissage

- Comprendre que les fonctions peuvent être définies par parties
- Reprendre la notion de réciproque d'une fonction et étudier la réciproque d'une fonction polynomiale de second degré
- Maîtriser l'interprétation et la représentation graphique d'une fonction périodique

A. Les fonctions définies par parties

On a souvent besoin de plus d'une fonction pour modéliser des phénomènes. Vous en trouverez un exemple dans l'activité 12.1, que vous pouvez réaliser sans explication préalable.

J'explore

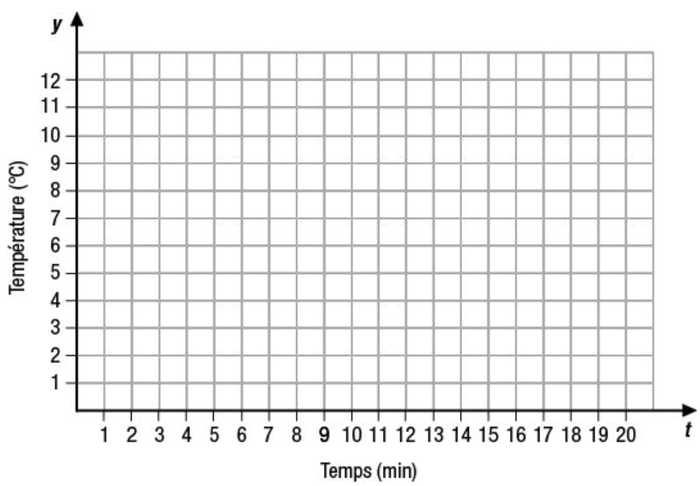
ACTIVITÉ • 12.1

Dans un laboratoire, on contrôle la température d'un liquide. Au début de l'expérience, où on met le chronomètre à zéro, le liquide est à 12 °C. Il perd de la chaleur de façon linéaire, de sorte que, toutes les deux minutes, la température diminue de 3 °C. Le processus se poursuit jusqu'au point de congélation, moment où un dispositif fait en sorte que la température remonte, plus doucement au début, suivant la loi quadratique $y = \frac{1}{2}(t-8)^2$, jusqu'à la minute $t = 12$. À partir de ce moment, la température reste constante jusqu'à la minute $t = 20$, où l'expérience prend fin.

On peut décrire (ou modéliser) cette situation par une fonction définie par parties comme la suivante, où la variable indépendante est le temps t mesuré en minutes et la variable dépendante y ($y = f(t)$) est la température :

$$f(t) = \begin{cases} 12 - \frac{3}{2}t & \text{si} \quad 0 \leq t < 8 \\ \frac{1}{2}(t-8)^2 & \text{si} \quad 8 \leq t < 12 \\ 8 & \text{si} \quad 12 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

a) Mettez en relation la description de la situation et la règle de correspondance par parties ci-dessus ; autrement dit, vérifiez que la règle de correspondance par parties représente bien la situation décrite et tracez un graphique de $y = f(t)$ pour $t \in [0; 20]$.



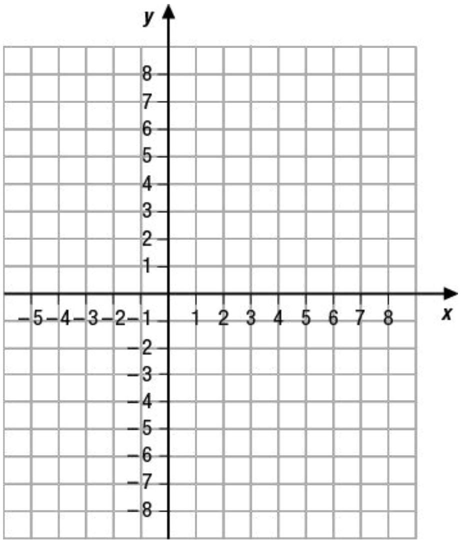
b) Déterminez le signe, la variation, les extremums et les zéros de cette fonction. Donnez ensuite l'image de $t = 4{,}5$, de $t = 7$ et de $t = 11$.

ACTIVITÉ • 12.2

a) Tracez le graphique de la fonction suivante :

$$g(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<-1 \\ -2x^2 & \text{si} \quad -1\leq x<2 \\ 2x-10 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

b) Déterminez le signe, la variation, les extremums et les zéros de cette fonction. Donnez ensuite l'image de $x = -2$ et de $x = 2$.

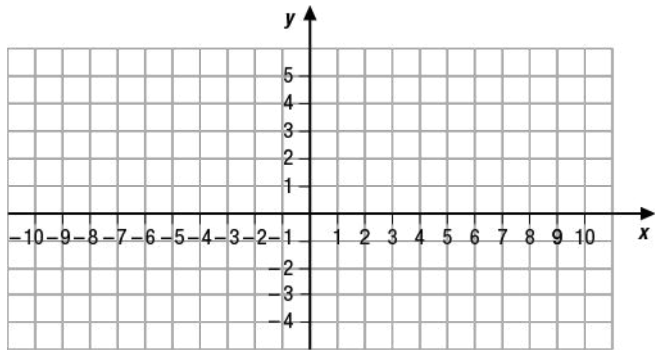


Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 12.3

a) Tracez le graphique de la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}x+9 & \text{si} \quad x<-2\\ x^2 & \text{si} \quad -2\leq x<2\\ -\frac{x}{4}+\frac{5}{4} & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$$



b) Déterminez le signe, la variation, les extremums et les zéros de cette fonction.

ACTIVITÉ • 12.4

Dans une certaine région de l'Arctique, les scientifiques ont étudié les fluctuations de la population de phoques. De 1950 à 1970, la surchasse a fait en sorte que la population a diminué presque de moitié. On a alors imposé des quotas de chasse plus bas, ce qui a fait que la population a remonté à partir de 1970. En 1992, la population a dépassé quatre millions de phoques. Les études réalisées montrent que, par la suite, l'augmentation de cette population s'est stabilisée suivant un accroissement linéaire. Il y a plusieurs hypothèses qui expliqueraient cette situation, et des discussions à ce sujet sont en cours actuellement. Voici une fonction définie par parties permettant de modéliser l'évolution de la population de phoques, où la variable indépendante t est le nombre d'années écoulées depuis 1950 et où la variable dépendante N est le nombre de phoques, en millions.

$$N(t)=\begin{cases}-0{,}05t+4{,}45 & \text{si} \quad 0\leq t<20\\ 3(1{,}15)^{\frac{t}{20}} & \text{si} \quad 20\leq t<42\\ 0{,}05t+1{,}9233 & \text{si} \quad t\geq 42\end{cases}$$

a) À l'aide du modèle (la règle de correspondance de la fonction), donnez approximativement le nombre de phoques en 1950, en 1960, en 1970 et en 1980.

b) Estimez la population de phoques en 2010.

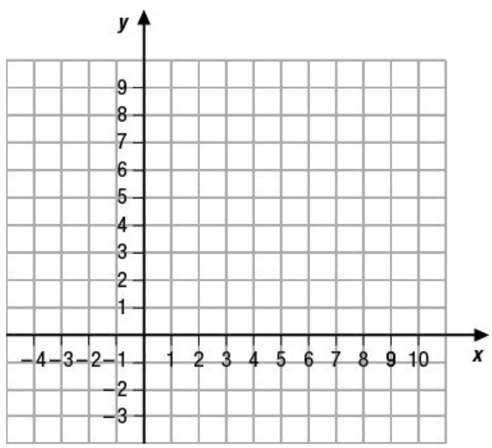
B. Les réciproques

Vous connaissez déjà la notion de réciproque d'une fonction. Cette notion a été vue au chapitre 1 et reprise au chapitre 6. Pour commencer, nous vous proposons de réaliser l'activité 12.5, que vous pouvez faire sans explication préalable.

J'explore

ACTIVITÉ • 12.5

Complétez les tableaux suivants et tracez les graphiques approximatifs des fonctions $y = f(x) = x^2$ et $y = g(x) = \sqrt{x}$, toutes deux pour $x \in \left]0;\, +\infty\right[$, dans le système d'axes ci-dessous. Les valeurs demandées sont des valeurs que vous connaissez ; laissez donc votre calculatrice de côté !



x	$y = f(x) = x^2$
0	
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{3}{2}$	
2	
$\frac{5}{2}$	
3	

x	$y = g(x) = \sqrt{x}$
0	
$\frac{1}{4}$	
1	
$\frac{9}{4}$	
4	
$\frac{25}{4}$	
9	

ACTIVITÉ • 12.6

Dans le graphique de l'activité 12.5, vous pouvez voir que, pour chaque point $(a\,;\,b)$ du premier graphique, le point $(b\,;\,a)$ appartient au deuxième graphique. Cela indique une symétrie dans le graphique. Cette symétrie a un axe ; tracez-le dans le même graphique.

La réciproque de la fonction quadratique

Les fonctions de l'activité 12.5, $y = f(x) = x^2$ et $y = g(x) = \sqrt{x}$, toutes deux définies pour $x \in [0; +\infty[$, sont des fonctions mutuellement réciproques.

La notion de réciproque a été introduite dans le chapitre 6 ; nous vous invitons à relire la partie correspondante.

Si on veut obtenir algébriquement la règle de correspondance de la réciproque de $y = g(x) = \sqrt{x}$, on pose, afin d'isoler x : $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Alors, on élève à la puissance 2 pour obtenir $y^2 = x$, ce qui permet de voir que x dépend quadratiquement de y. Suivant la convention selon laquelle les mathématiciens préfèrent décrire y en fonction de x, on obtient que la réciproque est $y = g^{-1}(x) = x^2$, $x \geq 0$.

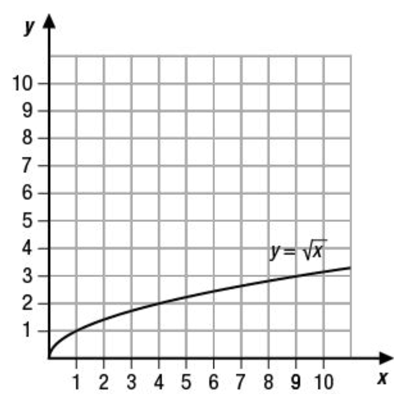
On peut obtenir le graphique de la réciproque en traçant un graphique symétrique à celui de la fonction par rapport à l'axe de symétrie $y = x$.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le graphique obtenu ne correspondra pas toujours à une fonction. Pour que ce soit le cas, le graphique doit respecter la condition d'une fonction, qui est d'avoir au plus une valeur de y pour chaque valeur de x (au besoin, relisez la définition de la fonction au chapitre 1).

ACTIVITÉ • 12.7

a) Soit la fonction $y = f(x) = 2\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$. Complétez le tableau et esquissez le graphique de cette fonction. Rappelez-vous que vous pouvez envisager le graphique de $y = f(x) = 2\sqrt{x}$ comme « le double » du graphique de la fonction $y = g(x) = \sqrt{x}$ qui est reproduit ci-après.

x	$y = f(x) = 2\sqrt{x}$
0	
1	
4	
6	
9	
…	…



b) Sur le même graphique qu'en a), tracez le graphique de la réciproque de cette fonction et indiquez son domaine.

c) Choisissez la fonction réciproque de $y = f(x) = 2\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$, parmi les suivantes. Donnez les raisons pour lesquelles vous écartez les autres.

i) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{2}, x \in [0; +\infty[$

ii) $f_2(x) = \dfrac{x^2}{4}, x \in [0; +\infty[$

iii) $f_3(x) = 2x^2, x \in [0; +\infty[$

iv) $f_4(x) = \dfrac{x}{2}, x \in [0; +\infty[$

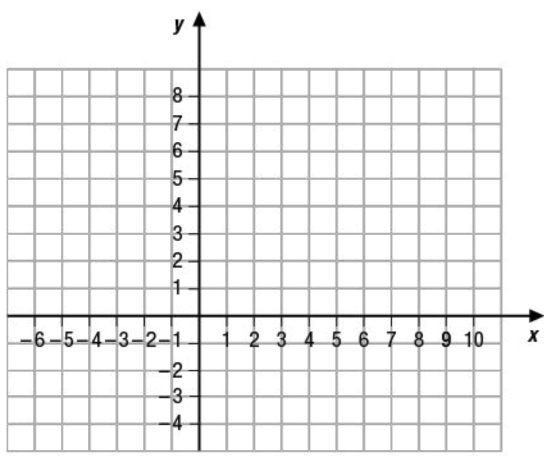
d) Montrez que la règle de correspondance que vous avez choisie est la bonne en la déduisant algébriquement.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 12.8

a) Soit la fonction $y = f(x) = -\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$. Complétez le tableau et esquissez le graphique de cette fonction.

x	$y = f(x) = -\sqrt{x}$
0	
1	
4	
6	
9	
…	…



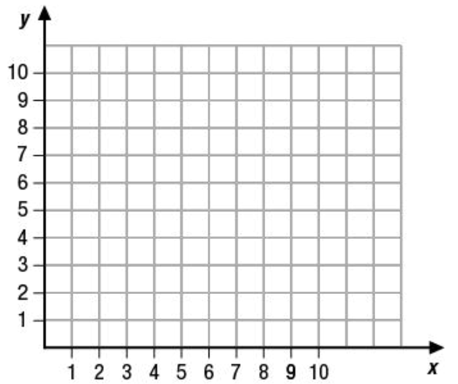
b) Sur le même graphique qu'en a), tracez le graphique de la réciproque de cette fonction.

c) Trouvez la règle de correspondance de cette réciproque.

ACTIVITÉ • 12.9

a) Soit la fonction $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$, définie pour $x \geq 0$. Complétez le tableau et esquissez le graphique de la fonction.

x	$y = f(x) = \frac{x^2}{2}$
0	
1	
2	
3	
4	
…	…



b) Sur le même graphique qu'en a), tracez le graphique de la réciproque de cette fonction.

c) Trouvez la règle de correspondance de cette réciproque.

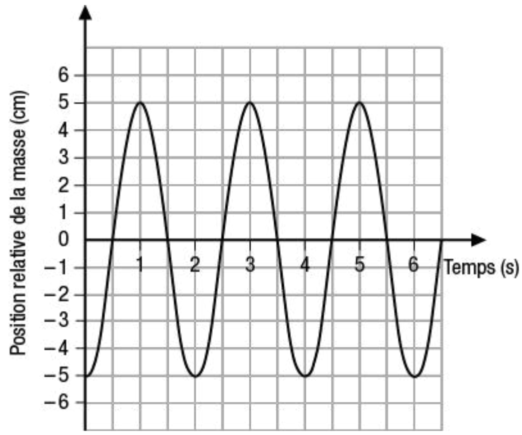
C. Les fonctions périodiques

Il se produit autour de nous des phénomènes pour lesquels la variable dépendante prend les mêmes valeurs à répétition, et ce, avec une certaine régularité. Par exemple, dans un mouvement circulaire uniforme, une particule passe par le même endroit à répétition à des intervalles réguliers ; dans le registre écrit d'un électrocardiogramme, on voit des valeurs qui se répètent aussi à des intervalles réguliers. Les deux activités qui suivent réfèrent à ce type de phénomènes, qui reçoivent le nom de « phénomènes périodiques ».

J'explore

ACTIVITÉ • 12.10

Le graphique ci-contre donne la position d'une masse suspendue à un ressort qui oscille verticalement sans frottement. Observez-le et répondez aux questions suivantes.



a) Quelle valeur prendra la fonction à la seconde $t = 8$?

b) Après combien de temps la masse revient-elle à sa position initiale ?

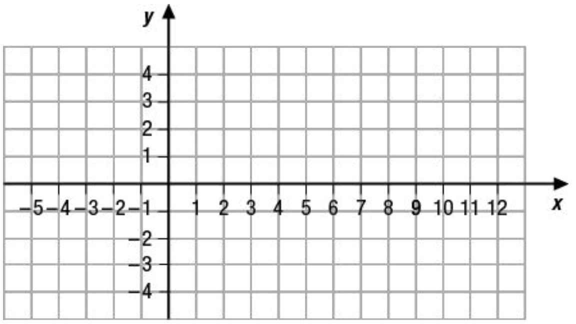
Les fonctions périodiques

L'activité 12.10 comporte un phénomène qui se répète à des intervalles de deux secondes. Si on nomme $y = f(t)$ la fonction qui modélise ce phénomène, on a pour toute valeur de t que $f(t+2) = f(t)$. Les fonctions modélisant des phénomènes qui se répètent à des intervalles réguliers de la variable indépendante s'appellent des **fonctions périodiques.** La plus petite valeur de a telle que $f(t+a) = f(t)$ s'appelle la **période** de la fonction. Dans l'activité 12.10, la période est 2.

NOTES :

ACTIVITÉ • 12.11

a) Tracez le graphique d'une fonction périodique qui satisfait simultanément les conditions suivantes : sa valeur maximale est 3, sa valeur minimale est –1, sa période est 8 et on a $f(0) = 1$ ainsi que $f(4) = 1$. De plus, on sait qu'en $x = 0$, la fonction est croissante, qu'en $x = 2$, la fonction atteint un maximum et qu'en $x = -2$, la fonction atteint un minimum.



b) Déduisez la valeur de $f(20)$.

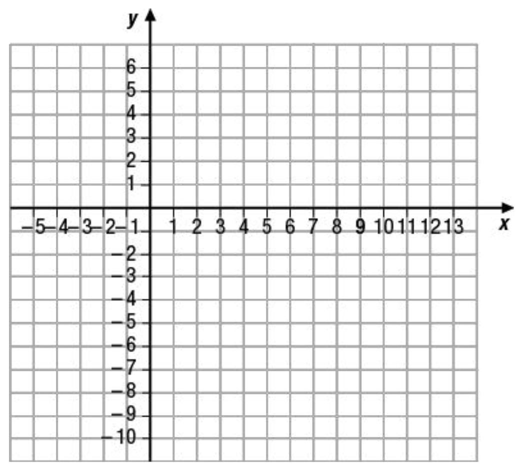
c) Dites si $f(-34)$ est un maximum ou un minimum de la fonction, puis justifiez votre réponse.

d) Dites si $f(30)$ est positif, négatif ou nul, puis justifiez votre réponse.

Je m'entraîne

ACTIVITÉ • 12.12

a) Tracez le graphique d'une fonction périodique qui satisfait simultanément les conditions suivantes : son maximum est 4, son minimum est –10, sa période est 4 et on a $f(0) = -3$ et $f(2) = -3$.



b) Déduisez la valeur de $f(28)$.

ACTIVITÉ • 12.13

Soit une fonction périodique f pour laquelle $f(3) = f(9) = 2$, $f(6) = f(18) = f(30) = 6$ et $f(5) = 4$. De plus, $f(3)$ et $f(9)$ sont deux minimums consécutifs.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifiez votre réponse.

a) La période est 2.

b) On a l'identité $f(x) = f(x+6)$.

c) On a $f(29) = 4$.

d) On a $f(36) = 2$.

Mes activités de récapitulation

R12.1

Pour les fonctions suivantes, trouvez la fonction réciproque. Au besoin, esquissez le graphique de cette fonction. Si le domaine de la fonction n'est pas indiqué, tenez pour acquis qu'il s'agit de son domaine naturel.

a) $f(x) = 4x - 1$

b) $i(x) = \sqrt{2x},\ x \geq 0$

c) $h(x) = \dfrac{x}{2}$

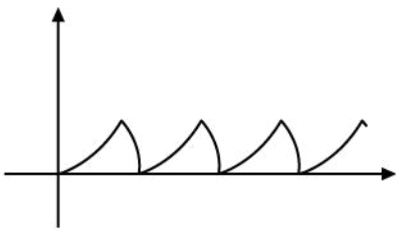
d) $g(x) = \dfrac{2x - 5}{2}$

e) $s(x) = 3x^2,\ x \geq 0$

R12.2

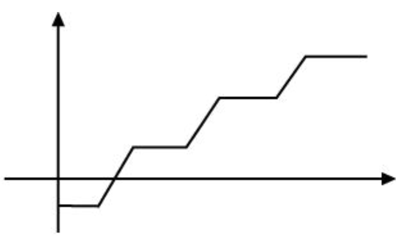
Parmi les graphiques suivants, lequel ou lesquels représentent une fonction périodique ?

a)



b)

c)



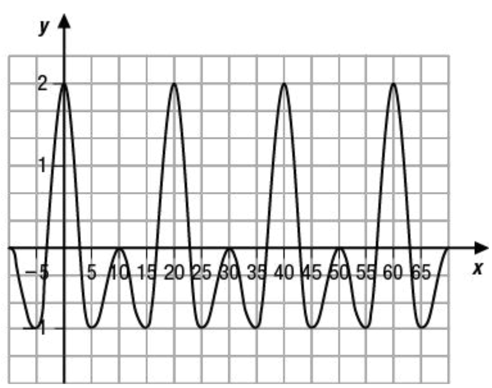
d)

R12.3

La variation du niveau de l'eau attribuable à la montée ou à la descente de la marée suit une fonction périodique dont la période est de 12 h 25. Sachant que le niveau de l'eau est à son maximum à 21 h 37, déterminez à quelle heure le niveau de l'eau sera à son point le plus haut la prochaine fois.

R12.4

Le graphique ci-contre représente une fonction *f*. En tenant pour acquis que son domaine est l'ensemble des valeurs réelles, et en utilisant des intervalles pour exprimer vos réponses en a), en b) et en c), répondez aux questions suivantes.



a) Quel est l'ensemble de valeurs que prend la variable y (l'ensemble image) ?

b) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction croît ?

c) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction décroît ?

d) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction prend la valeur 2 ?

e) Quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction prend la valeur -1 ?

f) Quels sont les maximums de la fonction ?

g) Quels sont les minimums de la fonction ?

h) La fonction est-elle périodique ? Si non, pourquoi ? Si oui, quelle est la période ?

i) Quel est le graphique de $y = f(x)$ pour les valeurs du domaine $x \in [-10; 10]$? Tracez-le et, dans le même plan cartésien, tracez les graphiques de $y = \frac{1}{2} f(x)$ et de $y = -f(x)$.

R12.5

Soit la fonction $y = f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$. Trouvez la règle de correspondance de sa réciproque.

R12.6

Une entreprise privée de messagerie offre, pour des lettres ou des colis de moins de 500 g, les tarifs suivants pour le service national :

- lettre ou petit colis de moins de 30 g : 5 $;
- lettre ou petit colis de 30 à 50 g inclusivement : 8,50 $;
- colis de plus de 50 g, tarif précédent auquel on ajoute 0,15 $ par gramme supplémentaire.

On tient pour acquis que le tarif est calculé de façon proportionnelle pour les fractions de gramme. Déterminez des variables appropriées et trouvez une règle de correspondance qui représente la situation.

Corrigé

CHAPITRE 1

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 1.5 (page 10)

a) $[1;\,11]$

b) $[-3;\,4]$

c) $x = 3;\ x \approx 4{,}6;\ x = 10$

d) $[1;\,3[\,\cup\,]4{,}6;\,10[$

e) $]3;\,4{,}6[\,\cup\,]10;\,11]$

f) $[4;\,5{,}3]\cup[6{,}5;\,8]$

g) $[1;\,4]\cup[5{,}3;\,6{,}5]\cup[8;\,11]$

h) $x = 2;\ x = 7{,}5;\ x = 8{,}5$

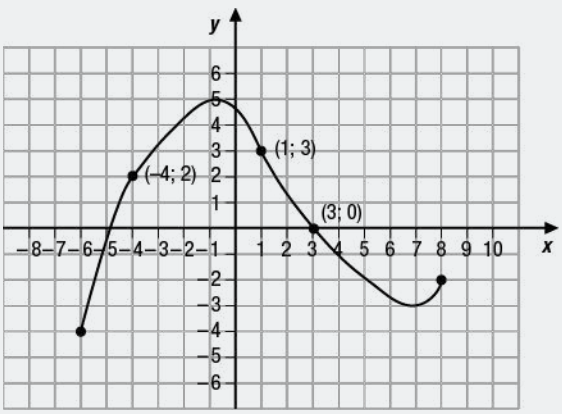
i) $f(6) = 1;\ f(8) = 3;\ f(11) = -1$

j)

x	y
3	0
6	1
10	0
2	2
7,5	2
8,5	2
11	–1
1	4
1,5	3
8	3

ACTIVITÉ 1.6 (page 12)

Il y a une infinité de graphiques-réponses possibles. En voici un exemple.



ACTIVITÉ 1.7 (page 12)

a) Faux. b) Faux. c) Faux.

d) Faux. e) Faux.

ACTIVITÉ 1.9 (page 15)

$s(2) = 4000$

$s(5) = 4750$

$s(7) = 2750$

$s(8) = 1000$

ACTIVITÉ 1.10 (page 15)

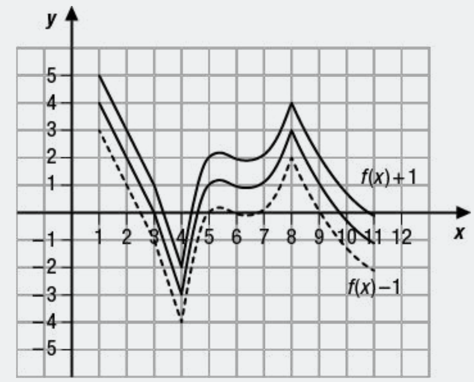
a) $l(x) = 250 - x$ et $l(10) = 240$.

b) $x \in\ ]0\,;\,250[$.

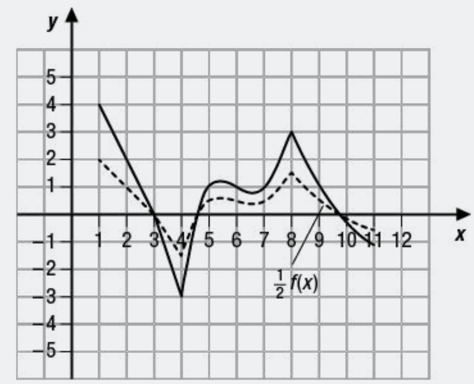
c) $A(x) = x(250 - x)\,;\, A(10) = 2400$.

ACTIVITÉ 1.13 (page 19)

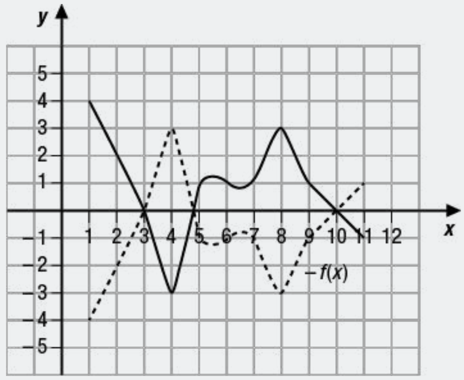
a)



b)



c)



ACTIVITÉ 1.14 (page 20)

a) $[-4\,;6[$

b) $[-2\,;6[$

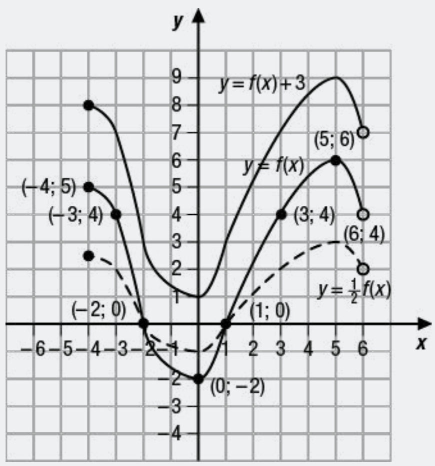
c) La fonction est croissante pour $x \in [0\,;5]$; elle est décroissante pour $x \in [-4\,;0] \cup [5\,;6[$.

d) La fonction est positive pour $x \in\,]-4\,;-2[\, \cup\,]1\,;6[$; elle est négative pour $x \in\,]-2\,;1[$; elle est nulle pour $x = -2$ et $x = 1$.

e) $f(-2) = 0, f(0) = -2$ et $f(3) = 4$

f) $f^{-1}(4) = -3$ et 3

g)



ACTIVITÉ 1.16 (page 22)

a) ii) b) iii) c) i)

ACTIVITÉ 1.17 (page 22)

a) $\dfrac{5x}{2}$ b) $\dfrac{ab}{36}$

c) $\dfrac{st+15}{5t}$ d) $-\dfrac{ab+2a}{32}$

Mes activités de récapitulation

R1.1 (page 23)

La fonction

Une fonction est une relation entre deux variables, l'une indépendante et l'autre dépendante. Pour chaque valeur de la variable indépendante, la variable dépendante ne peut pas prendre plus d'une valeur. On peut décrire une fonction par une règle de correspondance, un graphique, un tableau de valeurs ou des mots.

Les zéros d'une fonction

Valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la variable dépendante vaut 0.

Le signe positif d'une fonction

Valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la variable dépendante prend une valeur positive.

Le signe négatif d'une fonction

Valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la variable dépendante prend une valeur négative.

L'ensemble de croissance d'une fonction

Un ensemble d'intervalles au sein desquels une augmentation des valeurs de la variable indépendante entraîne une augmentation des valeurs de la variable dépendante.

L'ensemble de décroissance d'une fonction

Un ensemble d'intervalles au sein desquels une augmentation des valeurs de la variable indépendante entraîne une diminution de la variable dépendante.

R1.2 (page 23)

$\dfrac{1}{2}f(2)-1=\dfrac{1}{2}\cdot 6-1=2$. Le graphique subit une contraction verticale de moitié suivie d'une translation vers le bas de 1 unité.

R1.3 (page 23)

$-2f(5)+3=-1$. Le graphique subit un étirement vertical du double et une réflexion horizontale par rapport à l'axe des abscisses suivie d'une translation vers le haut de 3 unités.

R1.4 (page 23)

a) Croissance : $[5\,;13] \cup [18\,;21]$

b) $[2\,;5]$

CHAPITRE 2

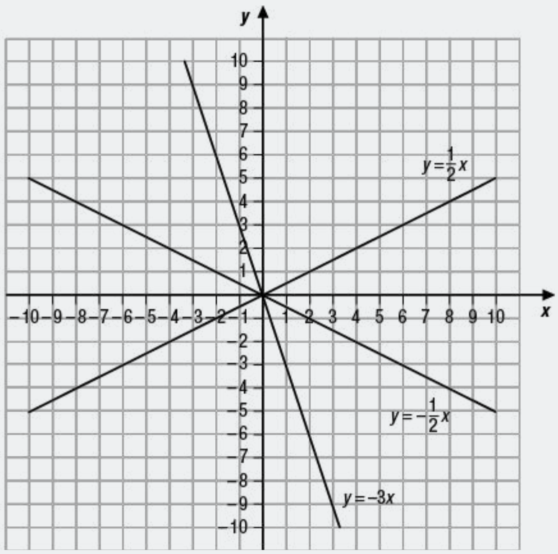
Je m'entraîne

ACTIVITÉ 2.3 (page 27)

La règle de correspondance d'une fonction de proportionnalité directe est de la forme $y = ax$, où $a \neq 0$, c'est-à-dire que l'on obtient chaque valeur de y en multipliant la valeur de x par a.

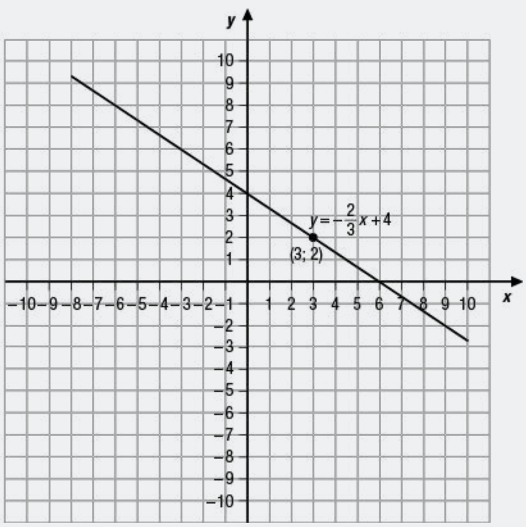
La représentation graphique de la fonction est une droite passant par le point $(0\,;0)$. Le taux de variation de la fonction est a, ce qui veut dire que si l'on augmente la variable indépendante de 1 unité, la variable dépendante varie de a unités.

ACTIVITÉ 2.4 (page 28)



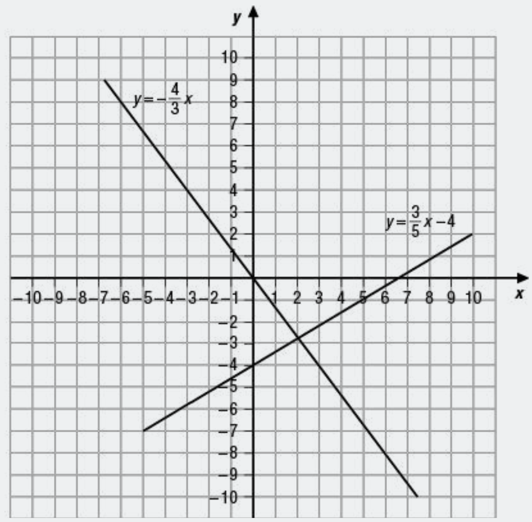
ACTIVITÉ 2.11 (page 35)

a)



b) La valeur 4 est l'ordonnée à l'origine. La valeur $-\frac{2}{3}$ est la pente.

ACTIVITÉ 2.12 (page 35)



a) Zéro : $x = \frac{20}{3}$; positive pour $x > \frac{20}{3}$, négative pour $x < \frac{20}{3}$.

b) Zéro : $x = 0$; positive pour $x < 0$, négative pour $x > 0$.

ACTIVITÉ 2.13 (page 36)

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$. Le zéro est $x = \frac{25}{2}$.

ACTIVITÉ 2.14 (page 37)

a) Soit t, le temps écoulé depuis le départ, en heures, et q, la quantité d'essence dans le réservoir, en litres.

Des données du problème, on déduit que lorsque $t = 0$, on a $q = 45$ et que lorsque $t = 1$, on a $q = 30$; Taux de variation : $a = \frac{30-45}{1-0} = -15$; L'ordonnée à l'origine est 45 ; La règle de correspondance est $q = -15t + 45$.

b) 3 heures

ACTIVITÉ 2.15 (page 37)

$y = 3x - \frac{11}{4}$

ACTIVITÉ 2.16 (page 38)

La pente est $a = \frac{9}{7}$.

ACTIVITÉ 2.17 (page 38)

a) Zéro : $x = \frac{-2}{3}$

La fonction est positive sur $\left]\frac{-2}{3};+\infty\right[$ et négative sur $\left]-\infty;\frac{-2}{3}\right[$.

b) Zéro : $x=\frac{3}{2}$

La fonction est donc positive sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ et négative sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

ACTIVITÉ 2.18 (page 39)

a) Oui, elle décroît de façon linéaire, deux à deux, le taux de variation est constant.

Par exemple, si on prend les couples (30 ; 42) et (60 ; 34,5), le taux de variation est :

$a=\frac{34{,}5-42}{60-30}=\frac{-7{,}5}{30}=-\frac{1}{4}$

Pour deux autres données, le taux est aussi $-\frac{1}{4}$.

Le taux de variation est $a=-\frac{1}{4}$.

b) Le taux de variation est $-\frac{1}{4}$. En remplaçant un couple de valeurs dans l'équation $y=-\frac{1}{4}x+b$, on trouve que l'équation est $y=-\frac{1}{4}x+49{,}5$, où x est le temps, en minutes, et y est la concentration d'alcool dans le sang, en milligrammes par 100 millilitres de sang.

ACTIVITÉ 2.22 (page 42)

On isole le terme constant dans l'autre membre de l'équation. On divise ensuite les deux membres de l'équation par le terme constant pour obtenir 1. On réécrit les coefficients de x et de y.

ACTIVITÉ 2.23 (page 42)

a) Équation fonctionnelle : $y=\frac{5}{2}x+\frac{15}{2}$; Équation générale : $5x-2y+15=0$; Équation réduite : $\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{15}{2}}=1$

b) Équation fonctionnelle : $y=\frac{4}{3}x-4$; Équation générale : $4x-3y-12=0$; Équation réduite : $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$

c) Équation fonctionnelle : $y=2x-4$; Équation générale : $2x-y-4=0$; Équation réduite : $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$

ACTIVITÉ 2.27 (page 45)

a) Toute droite de la forme $y=-3x+b$ convient.

b) L'équation est $y=-3x+7$.

ACTIVITÉ 2.28 (page 45)

a) Toute droite de la forme $4x+5y+C=0$. Toute droite de la forme $y=-\frac{4}{5}x+b$.

b) L'équation est $4x+5y-13=0$.

ACTIVITÉ 2.29 (page 46)

a) Toute droite de pente $-\frac{7}{2}$ convient, c'est-à-dire toute droite de la forme $y=-\frac{7}{2}x+b$, par exemple $y=-\frac{7}{2}x+1$ ou $y=-\frac{7}{2}x-2$. En forme réduite, il s'agit de toute droite de la forme $\frac{x}{2k}+\frac{y}{7k}=1$.

b) La droite a une pente de $-\frac{7}{2}$ et passe par (2 ; 1) ; alors, avec les coordonnées du point, on obtient $1=-\frac{7}{2x}+8$.

En forme réduite, cette droite est $\frac{x}{\frac{16}{7}}+\frac{y}{8}=1$.

Mes activités de récapitulation

R2.1 (page 47)

a) Faux. Elle passe par le point (5 ; –7).

b) Vrai. En isolant y, on obtient que la pente est $-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}>0$. Puisque la pente est positive, la fonction est croissante.

c) Vrai.

R2.2 (page 47)

a) $y=3x+1$

b) $y=\frac{1}{2}x+2$

c) La fonction n'est pas linéaire.

R2.3 (page 47)

a) Linéaire

b) Linéaire

c) Linéaire

d) Non linéaire

e) Non linéaire (elle n'est pas définie pour la valeur $x=0$)

f) Non linéaire

g) Linéaire

h) Linéaire

R2.4 (page 47)

C a la forme $\left(k;\frac{3}{2}k+\frac{11}{2}\right)$, k étant un nombre réel.

R2.5 (page 47)

a) L'équation de la droite est $y=-\frac{1}{10}x+\frac{17}{10}$.

b) L'équation de la droite est $y=-\frac{8}{7}x+\frac{27}{7}$.

R2.6 (page 48)

a) L'équation de la droite est $y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$.

b) L'équation de la droite est $y=4x-13$.

R2.7 (page 48)

$a = -\frac{8}{5}$ et $b = 9$

R2.8 (page 48)

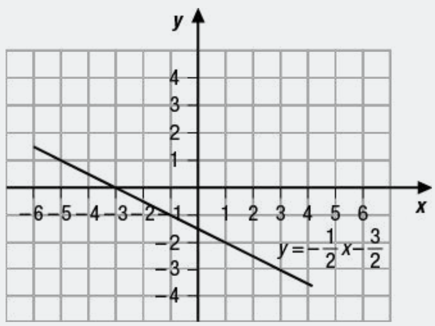
a) f est positive pour $x \in \,]2;\, +\infty[$, négative pour $x \in \,]-\infty\,;2[$.

b) h est positive pour $x \in \left]\frac{4}{3};\, +\infty\right[$, négative pour $x \in \left]-\infty;\, \frac{4}{3}\right[$.

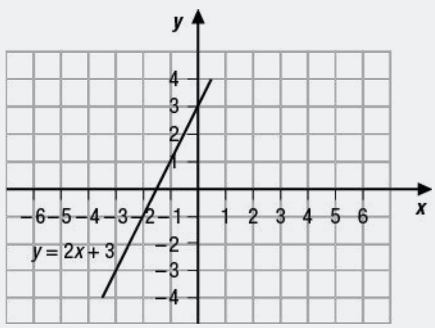
c) g est positive pour $x \in \left]-\infty;\, \frac{5}{4}\right[$, négative pour $x \in \left]\frac{5}{4};\, +\infty\right[$.

R2.9 (page 48)

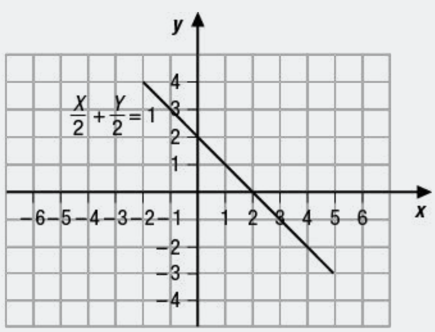
a) Pente : $a = -\frac{1}{2}$; ordonnée à l'origine : $-\frac{3}{2}$.



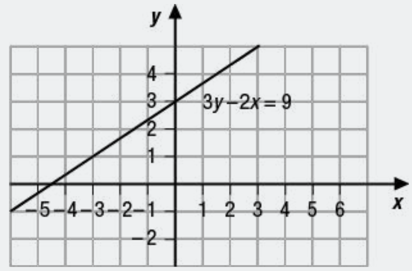
b) Pente : $a = 2$; ordonnée à l'origine : $b = 3$.



c) Abscisse à l'origine : 2 ; ordonnée à l'origine : 2.



d) Pente : $a = \frac{2}{3}$; ordonnée à l'origine : $b = 3$.



R2.10 (page 48)

a)

Temps de fonctionnement de la pompe (en heures)	7	8	11
Volume d'eau qui reste (en mètres cubes)	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{5}{2}$

b) 8 m^3

c) $V = -\frac{1}{2}x + 8$

R2.11 (page 48)

a) 19 °C

b) 9 °C/min

c) 9 min

d) Le troisième graphique

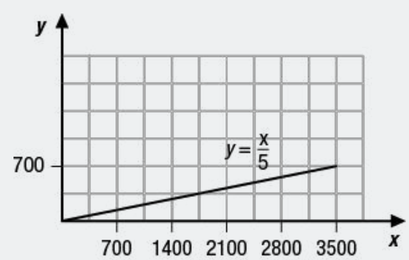
R2.12 (page 49)

a)

Montant hebdomadaire des ventes de Louise ($)	Salaire hebdomadaire de Louise ($)
2500	500
3100	620
2900	580
3000	600
2750	550

b) L'équation est $y = \frac{x}{5}$, où x est le montant hebdomadaire des ventes de Louise et y est son salaire.

c)



d) Elle a vendu pour plus de 2100 $ et moins de 3150 $.

e)

Montant hebdomadaire des ventes d'Étienne ($)	Salaire hebdomadaire d'Étienne ($)
2500	470
4000	620
3600	580
3000	520
2750	495

f) Il a vendu pour plus de 2100 $ et moins de 4300 $.

g) Si le montant hebdomadaire des ventes est supérieur à 2200 $, alors la structure de salaire de Louise est plus avantageuse.

R2.13 (page 50)

a) $D(150\,;40)$

b) $D(185\,;40)$. Il y a une infinité de solutions.

c) Oui, $AB\,//\,CD$ (même taux de variation).

d) Oui, $AB\,//\,CD$ (même taux de variation).

e) Oui, $AB\,//\,CD$ (même taux de variation).

f) $D(-55\,;10)$. Non, D n'est pas unique. Il y a une infinité de solutions.

g) La coordonnée manquante est $\frac{200}{7}$.

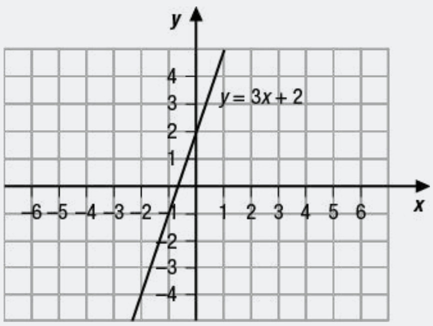
R2.14 (page 50)

a) A : non, B : oui, C : oui. Si les points vérifient l'équation, ils appartiennent à la droite.

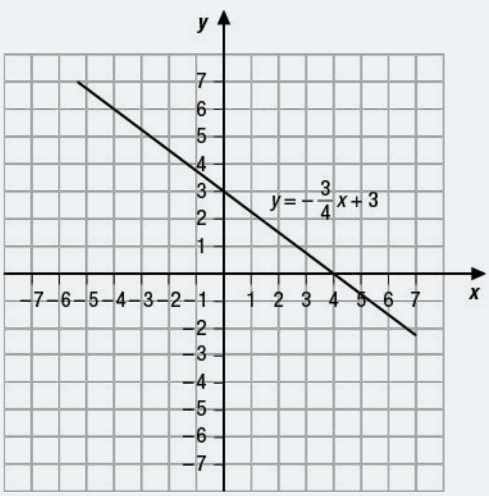
b) $a = -1$ et $b = 2$.

R2.15 (page 50)

a) Pente : $a = 3$; ordonnée à l'origine : $b = 2$.



b) Ordonnée à l'origine : 3 ; abscisse à l'origine : 4.



R2.16 (page 50)

$y = \frac{3}{2}x + 2$

R2.17 (page 50)

$p = 3$

R2.18 (page 50)

Dans le troisième quadrant.

R2.19 (page 51)

b)

R2.20 (page 51)

a) $y_A = 4{,}50x\,;\ y_B = 1{,}75x + 7$

b) L'entreprise A est meilleur marché si on loue un vélo pour moins de 2,545... heures, c'est-à-dire environ moins de 2 heures 32 minutes.

R2.21 (page 51)

a) $C = \frac{3}{2}q + 750$

b) 975 $

c) 322 articles

d) 750 $

R2.22 (page 51)

$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$

R2.23 (page 51)

$y = 4x - 1$

CHAPITRE 3

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 3.9 (page 60)

a) $x = -4$ b) $x = -6$

ACTIVITÉ 3.10 (page 60)

a) $x = \frac{7}{5} = 1{,}4$

b) $x = \frac{-41}{14}$

c) $x = \frac{-70}{41}$

d) $x = \frac{-21}{10} = -2{,}1$

e) $x = \frac{-85}{2} = -42{,}5$

f) $x \in]-\infty; +\infty[$

g) $x = \frac{-2}{3}$

h) $x = -3$

i) $x = -10$

ACTIVITÉ 3.11 (page 61)

a) L'automobiliste parcourt 200 km dans la première étape, 324 km dans la deuxième étape et 224 km dans la troisième étape.

b) L'avenue mesure 2880 m de longueur.

c) Les trois nombres sont 288, 290 et 292. On pourrait poser une équation différente si on prenait les nombres pairs comme étant $2n$, $2n + 2$ et $2n + 4$. Bien entendu les nombres trouvés seraient les mêmes.

d) Les quatre nombres sont 99, 100, 101 et 102.

e) Les deux nombres sont 367 et 369. On pourrait poser une équation différente si on prenait les nombres impairs comme étant $2n + 1$ et $2n + 3$. Bien entendu, les nombres trouvés seraient les mêmes.

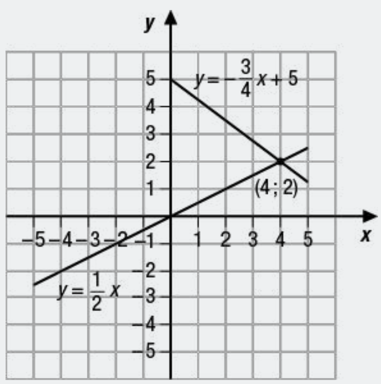
ACTIVITÉ 3.12 (page 62)

a) Exemple de réponse : $x + 2 = x + 4$

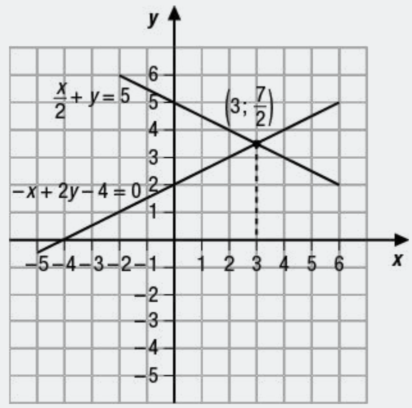
b) Exemple de réponse : $\frac{3x+9}{3} = x + 3$

ACTIVITÉ 3.19 (page 66)

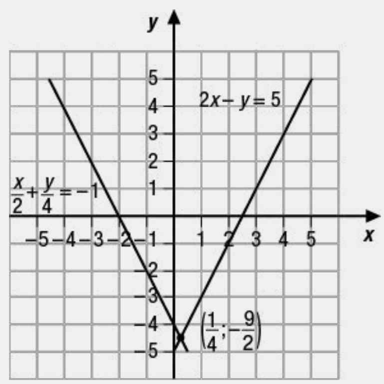
a) $x = 4$ et $y = 2$.



b) $x = 3$ et $y = \frac{7}{2}$.



c) $x = \frac{1}{4}$ et $y = -\frac{9}{2}$.



ACTIVITÉ 3.20 (page 67)

a) Il y a 3500 personnes à la retraite qui ont assisté à l'opéra-bénéfice.

b) La maison vaut 180 000 \$ et le terrain vaut 120 000 \$.

c) Le père a 40 ans et le fils a 20 ans.

d) Il y a 10 tricycles et 15 bicyclettes.

ACTIVITÉ 3.28 (page 73)

a) $x = \frac{1}{2}$ et $y = 4$.

b) Infinité de points communs.

c) $x = \frac{60}{7}$ et $y = \frac{-5}{14}$.

ACTIVITÉ 3.29 (page 74)

Vrai

ACTIVITÉ 3.30 (page 74)

a) Vrai b) Vrai c) Faux
d) Faux e) Vrai

Mes activités de récapitulation

R3.1 (page 76)

a) Le nombre est 50.

b) Le nombre est 15.

c) Les trois nombres sont 41, 42 et 43.

d) Les trois nombres pairs sont 32, 34 et 36.

e) Les côtés mesurent 150 m et 90 m de longueur.

R3.2 (page 76)

$p = 2$

R3.3 (page 76)

a) $\left(\frac{19}{2}; \frac{21}{2}\right)$. Les droites sont sécantes.

b) Les droites sont parallèles distinctes.

c) Les droites sont parallèles confondues.

R3.4 (page 76)

a) $(1\,;1)$. Les droites sont sécantes.

b) $(7\,;2)$. Les droites sont sécantes.

c) Il n'y a pas de solution. Les droites sont parallèles distinctes.

d) Il y a une infinité de solutions. Les droites sont parallèles confondues.

e) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. Les droites sont sécantes.

f) $\left(\frac{60}{13}; \frac{25}{26}\right)$. Les droites sont sécantes.

R3.5 (page 76)

a) $m = 3$ b) $m \neq 3$

R3.6 (page 77)

$\left(4\,; \frac{1}{2}\right)$; $3(4) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 2 = 10$ et

$(4) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 1 = 5.$

R3.7 (page 77)

Il y a une infinité de systèmes possibles. Exemple :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

R3.8 (page 77)

Il y a une infinité de systèmes possibles.

a) Les droites $L_1: 5x + 6y = 9$ et $L_2: 2x - y = -10$ ont un seul point d'intersection, qui est $(-3;\, 4)$.

b) Les droites $L_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ et $L_2: x - 2y = 6$ n'ont aucun point d'intersection, car elles sont parallèles distinctes.

c) Les droites $L_1: 3x - 4y = 8$ et $L_2: y = \frac{3}{4}x - 2$ ont une infinité de points d'intersection, car elles sont parallèles confondues.

d) $\begin{cases} 7x + 3y = 16 \\ 11x - 5y = -4 \end{cases}$

R3.9 (page 77)

Il y a une infinité de systèmes possibles.

Exemple : $\begin{cases} 27x + 13y = 93 \\ 9x + 20y = 78 \end{cases}$

R3.10 (page 77)

a) Il y a une infinité d'équations possibles.

Exemple : $\frac{3x-2}{6} = \frac{-3x+2}{6} + \frac{3x-2}{3}$

b) Il y a une infinité d'équations possibles.

Exemple : $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{x+6}{2}$

R3.11 (page 77)

a) $c = \frac{4}{3}$ b) $c = 1$

R3.12 (page 77)

Il y a une infinité de systèmes possibles dans les deux cas.

R3.13 (page 77)

a) Il y a une infinité d'équations possibles.

b) $y = 3x + 1$

c) Il y a une infinité d'équations possibles.

R3.14 (page 77)

$k \neq \pm 2$

CHAPITRE 4

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 4.6 (page 81)

Pente : $-\dfrac{6}{2}=-3$ (Remarque : On le « voit », car la droite est sous la forme réduite.) La pente de la perpendiculaire est donc $\dfrac{1}{3}$. L'équation de la droite recherchée est alors de la forme $y=\dfrac{1}{3}x+b$. En remplaçant les coordonnées du point dans l'équation, on obtient $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$.

ACTIVITÉ 4.7 (page 82)

a) Toute droite de la forme $y=\dfrac{1}{3}x+b$

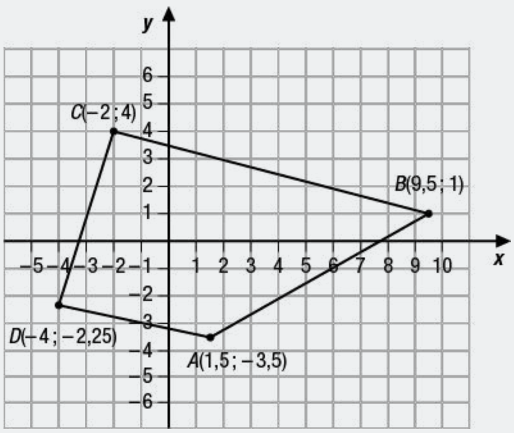
b) L'équation est $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$.

ACTIVITÉ 4.8 (page 82)

a) Toute droite de la forme $5x-4y+C=0$

b) L'équation est $5x-4y+7=0$.

ACTIVITÉ 4.13 (page 85)



La longueur du côté AB est la distance entre les deux points :

$$d(A;\ B)=\sqrt{(9{,}5-1{,}5)^2+(1-(-3{,}5))^2}$$
$$=\sqrt{8^2+(4{,}5)^2}=\sqrt{84{,}25}$$

La longueur du côté BC est la distance entre les deux points :

$$d(B;\ C)=\sqrt{(-2-9{,}5)^2+(4-1)^2}$$
$$=\sqrt{(-11{,}5)^2+3^2}=\sqrt{141{,}25}$$

La longueur du côté CD est la distance entre les deux points :

$$d(C;\ D)=\sqrt{(-4-(-2))^2+(-2{,}25-4)^2}$$
$$=\sqrt{(-2)^2+(-6{,}25)^2}$$
$$=\sqrt{43{,}0625}$$

La longueur du côté DA est la distance entre les deux points :

$$d(D;\ A)=\sqrt{(1{,}5-(-4))^2+(-3{,}5-(-2{,}25))^2}$$
$$=\sqrt{(5{,}5)^2+(-1{,}25)^2}$$
$$=\sqrt{31{,}8125}$$

Le périmètre est :

$$P=\sqrt{84{,}25}+\sqrt{141{,}25}+\sqrt{43{,}0625}+\sqrt{31{,}8125}\approx 33{,}26$$

ACTIVITÉ 4.14 (page 86)

$\sqrt{137}+\sqrt{58}+\sqrt{65}\approx 27{,}38$ unités-carte

ACTIVITÉ 4.17 (page 87)

Soit $P(-4;\ 2)$ et D, la droite $y=-2x+6$. On cherche la droite $D^{\perp}$ qui est perpendiculaire à la droite D et qui passe par le point $(-4;\ 2)$.

Pente de D : -2 ; pente de $D^{\perp}$: $\dfrac{1}{2}$

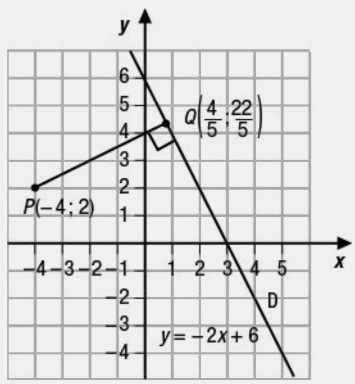
L'équation de $D^{\perp}$ est $y=\dfrac{1}{2}x+4$. Le point Q est l'intersection de D et de $D^{\perp}$:

$$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=\dfrac{1}{2}x+4 \end{cases}$$

Le point d'intersection est $Q\left(\dfrac{4}{5};\ \dfrac{22}{5}\right)$. La distance entre P et Q est :

$$d=\sqrt{\left(\frac{4}{5}-(-4)\right)^2+\left(\frac{22}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{144}{5}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\approx 5{,}37$$

La distance est donc d'environ 5,37 unités.



ACTIVITÉ 4.18 (page 88)

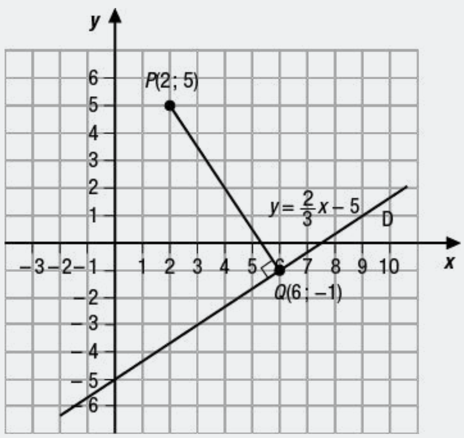
Soit $P(2;\,5)$ et D, la droite $y = \frac{2}{3}x - 5$. On cherche la droite $D^{\perp}$ qui est perpendiculaire à la droite D et qui passe par le point $(2;\,5)$. L'équation de $D^{\perp}$ est $y = -\frac{3}{2}x + 8$. Le point Q est l'intersection de D et de $D^{\perp}$:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 5 \\ y = -\frac{3}{2}x + 8 \end{cases}$$

Le point d'intersection est $Q(6;\,-1)$. La distance entre P et Q est :

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$$

La distance est d'environ 7,21 unités.



ACTIVITÉ 4.23 (page 92)

$$x_M = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y_M = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Le point milieu est donc $\left(\frac{7}{2};\,5\right)$.

ACTIVITÉ 4.24 (page 92)

a) On a $k = \frac{1}{5}$.

$$x_D = x_A + k(x_B - x_A) = 2 + \frac{1}{5}(15-2) = 2 + \frac{13}{5} = \frac{23}{5}$$

$$y_D = y_A + k(y_B - y_A) = 7 + \frac{1}{5}(1-7) = 7 + \frac{-6}{5} = \frac{29}{5}$$

Le point est $D\left(\frac{23}{5};\,\frac{29}{5}\right)$.

b) On a $k = \frac{4}{5}$.

$$x_D = x_A + k(x_B - x_A) = 2 + \frac{4}{5}(15-2) = 2 + \frac{52}{5} = \frac{62}{5}$$

$$y_D = y_A + k(y_B - y_A) = 7 + \frac{4}{5}(1-7) = 7 + \frac{-24}{5} = \frac{11}{5}$$

Le point est $D\left(\frac{62}{5};\,\frac{11}{5}\right)$.

ACTIVITÉ 4.25 (page 93)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Le point milieu est donc $\left(\frac{1}{2};\,2\right)$.

ACTIVITÉ 4.26 (page 93)

Pour trouver x_D, il faut trouver les trois quarts de la longueur de la base du triangle et ajouter cette valeur à 3 :

$$x_D = -1 + \frac{3}{4}(1-(-1)) = \frac{1}{2}$$

De la même manière, on trouve $y_D = 3 + \frac{3}{4}(-1-3) = 0$.

Le point est donc $D\left(\frac{1}{2};\,0\right)$.

ACTIVITÉ 4.27 (page 93)

$$x_D = x_A + k(x_B - x_A)$$
$$6 = 2 + \frac{2}{7}(x_B - 2)$$
$$x_B = 16$$
$$y_D = y_A + k(y_B - y_A)$$
$$28 = 38 + \frac{2}{7}(y_B - 38)$$
$$y_B = 3$$

On trouve donc les coordonnées (16 ; 3) pour le point B.

ACTIVITÉ 4.29 (page 97)

La longueur du côté AB est la distance entre les deux points :

$$d(A;\,B) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (7-1)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$$

Le point milieu est :

$$\left(\frac{-2+4}{2};\,\frac{1+7}{2}\right) = \left(\frac{2}{2};\,\frac{8}{2}\right) = (1;\,4)$$

La longueur du côté BC est la distance entre les deux points :

$$d(B;\,C) = \sqrt{(8-4)^2 + (-4-7)^2} = \sqrt{4^2 + (-11)^2}$$
$$= \sqrt{137} \approx 11{,}70$$

Le point milieu est :

$$\left(\frac{4+8}{2};\,\frac{7+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{12}{2};\,\frac{3}{2}\right) = \left(6;\,\frac{3}{2}\right)$$

La longueur du côté CA est la distance entre les deux points :

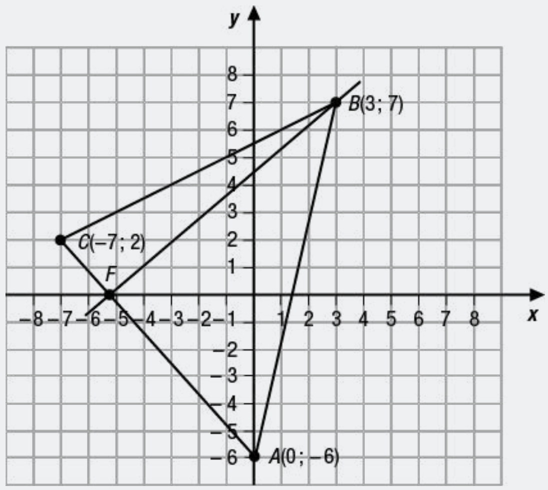
$$d(C;\ A) = \sqrt{(8-(-2))^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{10^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{125} \approx 11{,}18$$

Le point milieu est :

$$\left(\frac{-2+8}{2}; \frac{1+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}; -\frac{3}{2}\right) = \left(3; -\frac{3}{2}\right)$$

ACTIVITÉ 4.30 (page 98)

a)



Soit D_1, la droite portante du côté AC. La pente de D_1 est $\frac{-6-2}{0-(-7)} = -\frac{8}{7}$. Son équation est $y = -\frac{8}{7}x - 6$.

Soit D_2, la droite portante de la hauteur issue du sommet B. Elle est perpendiculaire à D_1 et passe par le point $B(3;\ 7)$. Sa pente est $\frac{7}{8}$. Son équation est $y = \frac{7}{8}x + \frac{35}{8}$.

Soit F, le point d'intersection des droites D_1 et D_2.

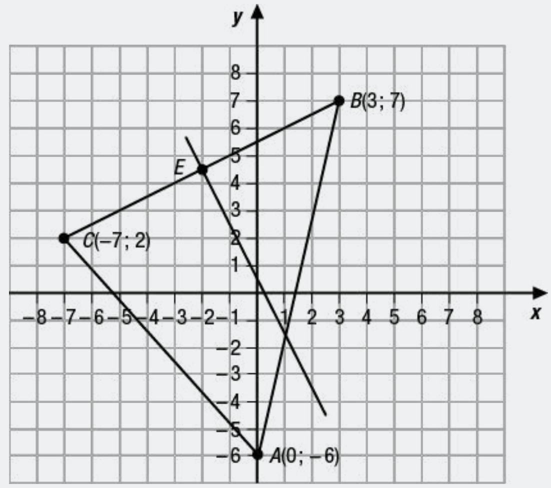
$$\begin{cases} y = -\frac{8}{7}x - 6 \\ y = \frac{7}{8}x + \frac{35}{8} \end{cases}$$

Le point d'intersection est $F\left(-\frac{581}{113}; -\frac{14}{113}\right)$.

La longueur de la hauteur est la distance entre les points B et F :

$$d = \sqrt{\left(-\frac{581}{113} - 3\right)^2 + \left(-\frac{14}{113} - 7\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{920}{113}\right)^2 + \left(-\frac{805}{113}\right)^2} = \sqrt{\frac{13\,225}{113}} \approx 10{,}82$$

b)



Le point milieu du côté BC est le point $E\left(-2; \frac{9}{2}\right)$.

La pente de la droite portante du côté BC est $\frac{1}{2}$.

L'équation de la droite médiatrice a comme pente -2.
L'équation de la droite perpendiculaire au côté BC et passant par le point $E\left(-2; \frac{9}{2}\right)$ est $y = -2x + \frac{1}{2}$.

c) $\text{aire} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

$$= \frac{\text{longueur de } AC \times \text{longueur de } BF}{2}$$

La longueur de AC est la distance entre ces deux points :

$$d = \sqrt{(-7-0)^2 + (2-(-6))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{113}$$

Donc, l'aire est :

$$\frac{\sqrt{113} \times \sqrt{\frac{13\,225}{113}}}{2} = \frac{115}{2} \text{ unités carrées}$$

d) Le périmètre est la somme des longueurs des trois côtés :

$$P = m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA}$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (7-(-6))^2} + \sqrt{(-7-3)^2 + (2-7)^2}$$
$$+ \sqrt{(0-(-7))^2 + (-6-2)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 13^2} + \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} + \sqrt{7^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{178} + \sqrt{125} + \sqrt{113}$$
$$\approx 35{,}15$$

Le périmètre est de 35,152 149 76... unités.

Mes activités de récapitulation

R4.1 (page 100)

a) $\sqrt{160} \approx 12,65$

b) Point milieu : (80 ; 34,5). Distance entre A et le point milieu : $\sqrt{6264,25} \approx 79,15$.

c) $d(A;\ B) = \sqrt{7857} \approx 88,64$, $d(A\ ;\ C) = \sqrt{8585} \approx 92,66$. Le point A est donc plus proche du point B.

d) 4

R4.2 (page 100)

a) Les trois points milieux formant les sommets du triangle sont $\left(2;\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2};\ -2\right)$ et $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$. Le périmètre est $\sqrt{26,50} + \sqrt{27,25} + \sqrt{15,25} \approx 14,27$ unités.

b) La longueur de la médiane est la distance entre les points (–3 ; 4) et $\left(\frac{9}{2};\ -2\right)$, qui est de $\sqrt{92,25}$ $\approx 9,60$ unités.

c) La longueur de la hauteur est la distance entre le point B et la droite passant par les points A et C. Cette distance est d'environ 7,284 unités.

d) La droite médiatrice est perpendiculaire à la droite passant par les points B et C et passe par le point milieu $\left(\frac{9}{2};\ -2\right)$. L'équation de la médiatrice est $10x + 12y - 21 = 0$.

e) L'aire du triangle est de 37,5 unités carrées.

R4.3 (page 100)

L'aire du triangle est de 13 unités carrées.

Oui, le triangle est rectangle en A.

R4.4 (page 100)

La distance est d'environ 7,91 unités.

R4.5 (page 100)

a) Faux. Les pentes des deux droites sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$. Leur produit est 1 et non –1.

b) Vrai. Les pentes des deux droites sont respectivement $\frac{-3}{5}$ et $\frac{5}{3}$. Leur produit est –1.

c) Vrai. La droite passant par les points A et B a comme pente $-\frac{1}{2}$ et la droite passant par les points C et D a comme pente 2.

d) Faux. La distance est $\sqrt{41}$.

e) Vrai. La droite qui est perpendiculaire à $2x - 3y - 5 = 0$ et passant par le point (2; 4) a comme équation $y = -\frac{3}{2}x + 7$. Le point d'intersection des deux droites est (4; 1). La distance entre ces deux points est bien $\sqrt{13}$.

f) Vrai. L'équation de la droite passant par les points A et B est $y = x + 3$. L'équation de la droite passant par les points B et C est $y = -x + 23$. Ces deux droites sont perpendiculaires et forment donc un angle droit.

g) Vrai. Si la médiatrice passe par le sommet opposé, elle sera aussi une médiane. De même, elle correspondra aussi à la hauteur.

R4.6 (page 101)

$y = 2x + 1$

R4.7 (page 101)

$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

R4.8 (page 101)

$y = \frac{2}{3}x + 4$

R4.9 (page 101)

a) $x = 3$ et $y = 7$

b) $a = -1$

c) $C(7;\ -2)$

d) Une proportion de $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, avec C plus proche de B

CHAPITRE 5

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 5.4 (page 107)

a) $C(t) = 8000(1{,}06)^t$

b) $C(10) = 8000(1{,}06)^{10} = 14\,326{,}78$ \$

ACTIVITÉ 5.5 (page 107)

a) Oui, car $T(t+1) \div T(t)$ est presque constant.

b) $T(t) = 22(0{,}86)^t$, avec une approximation de la base

c) $T(10) = 22(0{,}86)^{10} \approx 4{,}9$ °C

ACTIVITÉ 5.13 (page 114)

a) $\frac{9}{4x^2}$, $x \neq 0$ b) $\frac{3}{2x^2}$, $x \neq 0$

c) x^{20} d) $6x^4$

e) $24x^5$ f) $\frac{2}{a}$, $a \neq 0$

g) $\frac{2x}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ h) $\frac{1}{3}(x+y)(x-y)^2$, $x \neq y$, $x \neq -y$

i) $\frac{5a}{bc}$, a, b et $c \neq 0$ j) $-x(2x-1)^2$, $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}$

ACTIVITÉ 5.14 (page 114)

a) Faux, car il s'agit de l'opposé d'un nombre positif (5^4 est positif).

b) Vrai, car l'exposant est pair.

c) Faux, car si la base est positive, alors la puissance est positive aussi, peu importe l'exposant.

d) Vrai, car l'exposant est pair.

ACTIVITÉ 5.15 (page 115)

a) $\neq$; $0{,}3^5 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}3^{5+4} = 0{,}3^9$

b) $\neq$; $1{,}21^3 + 1{,}21^2 = 1{,}21^2(1{,}21+1) = 1{,}21^2 \cdot 2{,}21$

c) =

d) =

ACTIVITÉ 5.19 (page 117)

a) = 6. On cherche une valeur positive qui, élevée au carré, donnera 36. La valeur recherchée est donc 6, puisque $6^2 = 36$.

b) $= \frac{7}{4}$. On cherche une valeur positive qui, élevée au carré, donnera $\frac{49}{16}$. La valeur recherchée est donc $\frac{7}{4}$, puisque $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

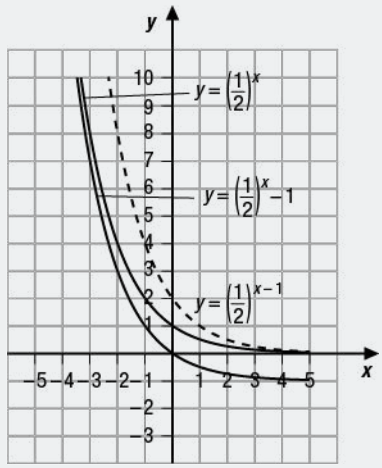
c) = 3. On cherche une valeur qui, élevée au cube, donnera 27. La valeur recherchée est donc 3, puisque $3^3 = 27$.

d) $= \frac{1}{2}$. On cherche une valeur qui, élevée au cube, donnera $\frac{1}{8}$. La valeur recherchée est donc $\frac{1}{2}$, puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

ACTIVITÉ 5.26 (page 121)

a) $6{,}5\sqrt{7}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{7} + \sqrt{11} + 2$

ACTIVITÉ 5.33 (page 126)



	$y = h(x)$	$y = g(x)$
Ensemble image	$]-1; +\infty[$	$]0; +\infty[$
Zéros	0	Aucun
Ordonnée à l'origine	0	2
Variation	Toujours décroissante	Toujours décroissante
Asymptote	$y = -1$	$y = 0$

ACTIVITÉ 5.34 (page 127)

a) $y = f(x)$: Ni l'un ni l'autre

b) $y = g(x)$: Exponentielle, car $g(x+1) \div g(x)$ est constant pour les valeurs de x données dans le tableau.

c) $y = h(x)$: Linéaire, car $h(x+1) - h(x)$ est constant pour les valeurs de x données dans le tableau.

ACTIVITÉ 5.35 (page 127)

a) Faux. Pour avoir une fonction exponentielle, la base doit être plus grande que 1 ou comprise dans l'intervalle]0, 1[.

b) Faux. Pour avoir une fonction exponentielle, la base doit être plus grande que 1 ou comprise dans l'intervalle]0, 1[.

c) Vrai. Étant donné qu'elle n'a pas subi de translation verticale, qu'elle soit croissante ou décroissante, la fonction exponentielle s'approche de l'axe horizontal, mais ne le touche jamais.

d) Faux. Puisque $\frac{7}{6} > 1$, la fonction est croissante.

e) Faux. La fonction $f(x) = 3^x$ est croissante. Elle n'a donc pas de maximum.

Mes activités de récapitulation

R5.1 (page 128)

a) Le graphique de $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x + 1$ correspond à 1.

Le graphique de $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 1$ correspond à 3.

Le graphique de $h(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ correspond à 2.

b)

	Image	Asymptote
$f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x + 1$	$]1 ; +\infty[$	$y = 1$
$g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 1$	$]-1 ; +\infty[$	$y = -1$
$h(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$	$]0 ; +\infty[$	$y = 0$

R5.2 (page 128)

$f(0) = 1$, $f(-1) = 5$, $f(1) = -\frac{1}{3}$ et $f(-5) = 485$

R5.3 (page 128)

Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$t(x)$	$l(x)$
Ordonnée à l'origine	$\frac{3}{2}$	-2	2	$-\frac{5}{2}$	3
Image	$]1 ; +\infty[$	$]-3 ; +\infty[$	$]-\infty ; 5[$	$]-\infty ; -2[$	$]2 ; +\infty[$
Variation	Toujours croissante	Toujours croissante	Toujours croissante	Toujours croissante	Toujours croissante

R5.4 (page 128)

L'ordonnée à l'origine de la fonction est -10 et la fonction n'a pas de zéro. Le graphique de la fonction est donc situé sous l'axe des abscisses. Par conséquent, la fonction est toujours négative.

R5.5 (page 128)

Il y a une infinité de fonctions. En voici trois possibles :

$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, $g(x) = 7 \cdot (2)^x - 3$, $h(x) = -5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 9$

R5.6 (page 128)

a) $k > 0$

b) $k \leq 0$

R5.7 (page 129)

Zéro : Aucun

Variation : Toujours décroissante

Signe : Toujours négative

R5.8 (page 129)

$a = 5$

R5.9 (page 129)

$k = -\frac{27}{2}$

R5.10 (page 129)

a) Fausse

b) Fausse

c) Vraie

R5.11 (page 129)

a) $a = 6$

b) $a = 2$

c) $a = 2$

R5.12 (page 129)

Périmètre : $12\sqrt{3}$ cm ; aire : 24 cm^2.

CHAPITRE 6

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 6.7 (page 136)

a) $(2^2)^x \cdot 2^{x+1} = 2^{2x+x+1} = 2^{3x+1}$

b) $3^{2x+2} \cdot 3^{2(3-x)} \cdot 3^{4x} = 3^{2x+2+6-2x+4x} = 3^{8+4x}$

ACTIVITÉ 6.8 (page 136)

a) $2^{2x+x+1} = 1$

$2^{3x+1} = 2^0$

$3x+1=0$

$x = -\frac{1}{3}$

Vérification : $4^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}+1} = 1$

b) $3^{3+x+2} = 3^{-1}$

$5+x=-1$

$x=-6$

Vérification : $27 \cdot 3^{-6+2} - \frac{1}{3} = 27 \cdot 3^{-4} - \frac{1}{3} = 0$

c) $2^{x-1} = 2^{-4}$

$x-1=-4$

$x=-3$

Vérification : $2^{-3-1} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

d) $3^{2x} = 3^4$

$2x = 4$

$x = 2$

Vérification : $3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$

e) $2^{x+1} = 2^{4x}$

$x+1 = 4x$

$1 = 3x$

$x = \frac{1}{3}$

Vérification : $2^{\frac{1}{3}+1} = 2^{\frac{4}{3}} = 4^{2 \cdot \frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

ACTIVITÉ 6.14 (page 141)

a) $\log_2 1024 = \frac{\log 1024}{\log 2} = 10$

b) $\log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 2} = 5$

c) $\log_4 1000 = \frac{\log 1000}{\log 4} = 4,982\,892\,142...$

ACTIVITÉ 6.15 (page 141)

a) $6^x = 6^3$

$x = 3$

b) $x = \log_6 300 = \frac{\log 300}{\log 6} \approx 3,183\,334\,161...$

c) $4^x = 4^4$

$x = 4$

d) $x = \log_4 200 = \frac{\log 200}{\log 4} \approx 3,821\,928\,094...$

e) $t = \log_{1,3} 22 \approx 11,781\,491\,88...$

f) $x = \log_5 7,4 = \frac{\log 7,4}{\log 5} \approx 1,243\,589\,444...$

ACTIVITÉ 6.16 (page 142)

a) $\log_7 x = 3$

$x = 7^3$

$x = 343$

b) $\log_2(x-1) = 5$

$x-1 = 2^5 = 32$

$x = 32+1 = 33$

c) $\log_a 9 = 2$

$a^2 = 9$

$a = \sqrt{9} = 3$

$a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

ACTIVITÉ 6.17 (page 142)

a) $6500(1,049)^x = 10\,000$

$(1,049)^x = \frac{10\,000}{6500}$

$(1,049)^x = \frac{20}{13}$

$x = \log_{1,049} \frac{20}{13}$

$x = 9,005\,162\,315$

Dans un peu plus de neuf ans

b) Le double du capital correspond à 13 000 $.

$6500(1,049)^x = 13\,000$

$(1,049)^x = \frac{13\,000}{6500}$

$(1,049)^x = 2$

$x = \log_{1,049} 2$

$x = 14,489\,671\,33...$

Dans un peu moins de quatorze ans et demi

ACTIVITÉ 6.18 (page 143)

La population initiale est de $P(0) = 32\,000(2,7)^{0,06 \cdot 0} =$ 32 000 personnes. Le double de la population correspond à 64 000 personnes.

$32\,000(2,7)^{0,06x} = 64\,000$

$(2,7)^{0,06x} = \frac{64\,000}{32\,000}$

$(2,7)^{0,06x} = 2$

$0,06x = \log_{2,7} 2$

$0,06x = 0,697\,856\,474...$

$x = 11,630\,941\,24...$

Dans un peu plus de onze ans et demi.

ACTIVITÉ 6.19 (page 143)

a) Puisqu'il s'agit d'une dépréciation, après une année la valeur sera de : $250\,000 - 250\,000 \cdot 0{,}18 =$
$250\,000 \cdot (1 - 0{,}18) = 250\,000 \cdot 0{,}82 = 205\,000$ et ainsi de suite pour les années suivantes, ce qui donne bien comme fonction $f(x) = 250\,000(0{,}82)^x$.

b) La moitié de la valeur est 250 000 $/2 = 125 000 $.

$$250\,000(0{,}82)^x = 125\,000$$
$$(0{,}82)^x = \frac{125\,000}{250\,000}$$
$$(0{,}82)^x = \frac{1}{2}$$
$$x = \log_{0{,}82}\frac{1}{2} = 3{,}492\,788\,620...$$

Dans un peu moins de trois ans et demi

c) $$250\,000(0{,}82)^x = 100\,000$$
$$(0{,}82)^x = \frac{100\,000}{250\,000}$$
$$(0{,}82)^x = 0{,}4$$
$$x = \log_{0{,}82} 0{,}4 = 4{,}617\,215\,407...$$

Dans un peu plus de quatre ans et demi

ACTIVITÉ 6.20 (page 144)

a) $f(x) = 0$
$$\left(\frac{5}{4}\right)^x - \frac{25}{16} = 0$$
$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{25}{16}$$
$$x = \log_{\frac{5}{4}}\frac{25}{16} = 2$$

b) $g(x) = 0$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$$
$$x = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$$

c) $h(x) = 0$
$$\left(\frac{49}{4}\right)^x - \frac{7}{2} = 0$$
$$\left(\frac{49}{4}\right)^x = \frac{7}{2}$$
$$x = \log_{\frac{49}{4}}\frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

d) $j(x) = 0$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 4$$
$$x = \log_{\frac{2}{3}} 4$$
$$\approx -3{,}419\,022\,582\ldots$$

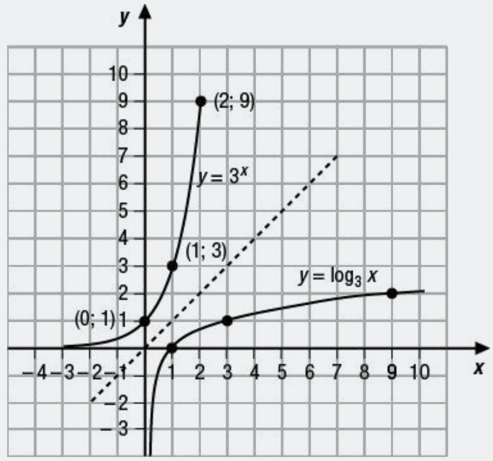
e) $f(x) = 0$
$$\log_5 x + 2 = 0$$
$$\log_5 x = -2$$
$$x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

f) $g(x) = 0$
$$\log_3 x - 2 = 0$$
$$\log_3 x = 2$$
$$x = 3^2 = 9$$

g) $$f(5) = 4$$

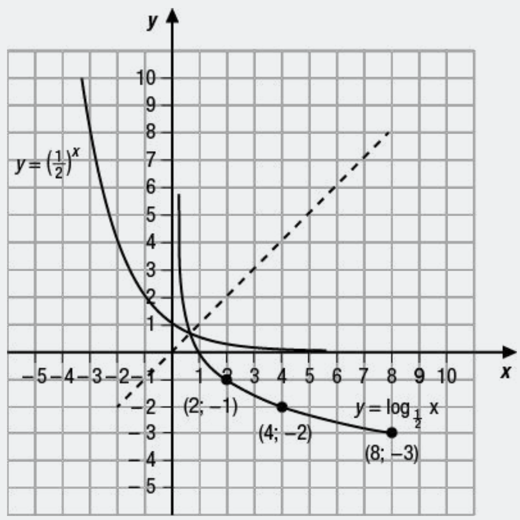
h) $j(x) = 0$
$$\log_{16}(x+4) - \frac{1}{2} = 0$$
$$\log_{16}(x+4) = \frac{1}{2}$$
$$x + 4 = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$
$$x = 0$$

ACTIVITÉ 6.25 (page 150)



	$f(x) = \log_3 x$	Réciproque de f
Ensemble image	$]-\infty; +\infty[$	$]0; +\infty[$
Zéros	$x = 1$	Aucun
Ordonnée à l'origine	Aucune	$x = 1$
Variation	Toujours croissante	Toujours croissante

ACTIVITÉ 6.26 (page 151)



	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Réciproque de f
Ensemble image	$]0; +\infty[$	$]-\infty; +\infty[$
Zéros	Aucun	$x = 1$
Ordonnée à l'origine	$y = 1$	Aucune
Variation	Toujours décroissante	Toujours décroissante

Mes activités de récapitulation

R6.1 (page 152)

a) $x = 6$

b) $x = 6{,}084\ 595\ 809...$

c) $x = 3{,}512\ 941\ 594...$

d) $x = 2{,}291\ 434\ 288...$

R6.2 (page 152)

a) Après un an, $x = 12$. On a alors $C(12) = 26\,541{,}95$ $.

b) On doit résoudre l'équation $25\,000(1{,}005)^x =$ 26 278,50. On trouve $x = 9{,}999\ 974\ 813...$ On peut donc dire dans 10 mois.

c) On doit résoudre l'équation $25\,000(1{,}005)^x = 50\,000$. On trouve $x = 138{,}975\ 7...$ On peut donc dire dans 11 ans et 7 mois.

R6.3 (page 152)

a) $N(4) = 1846{,}596\ 817...$ Il y aura donc 1846 bactéries.

b) On doit résoudre l'équation $1600 \cdot 6^{0{,}02t} = 30\,000$. On trouve $t = 81{,}796\,519\,08...$ On peut donc dire dans un peu moins de 82 heures (environ 3 jours et 10 heures).

R6.4 (page 152)

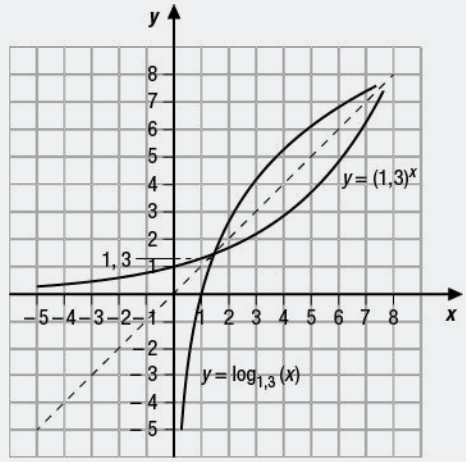
L'équation donnant la valeur de la voiture est $V(t) = 22\,000(0{,}82)^t$. La valeur de la voiture sera égale à la moitié de sa valeur initiale lorsqu'elle aura une valeur de 11 000 $. On doit résoudre l'équation $11\,000 = 22\,000(0{,}82)^t$. On trouve $t = 3{,}499\,27...$, soit presque trois ans et demi.

R6.5 (page 152)

a)

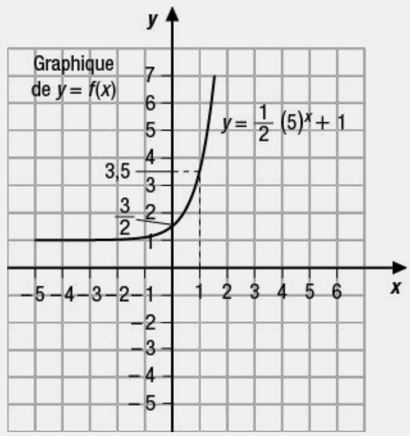
x	$y = f(x) = (1{,}3)^x$
0	$1{,}3^0 = 1$
1	$1{,}3^1 = 1{,}3$
–1	$1{,}3^{-1} = 0{,}769\ 230\ 769...$
2	$1{,}3^2 = 1{,}69$
–2	$1{,}3^{-2} = 0{,}591\ 715\ 976...$
3	$1{,}3^3 = 2{,}197$
–3	$1{,}3^{-3} = 0{,}455\ 166\ 135...$
4	$1{,}3^4 = 2{,}8561$
–4	$1{,}3^{-4} = 0{,}350\ 127\ 796...$
⋮	⋮

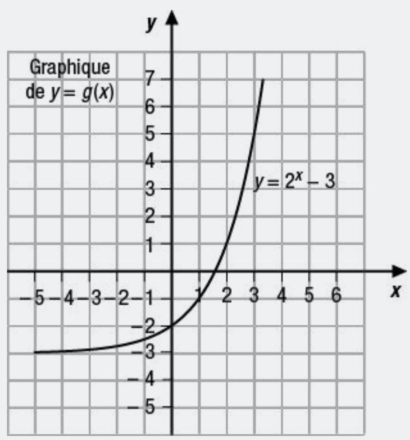
b)

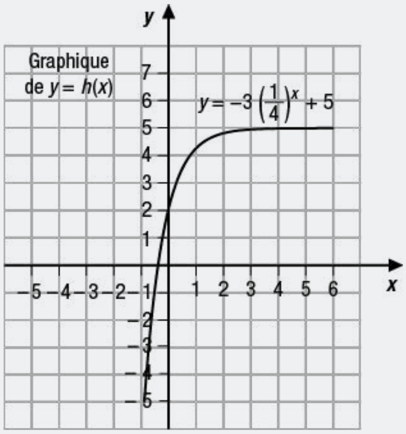


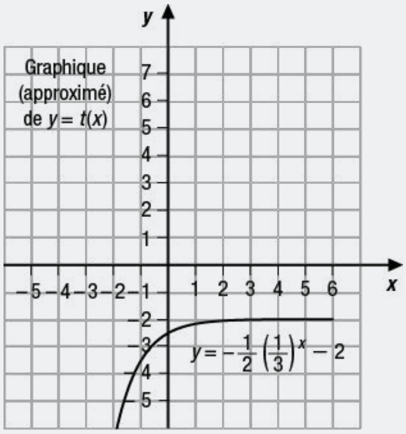
c) L'équation de la réciproque est $y = \log_{1{,}3} x$.

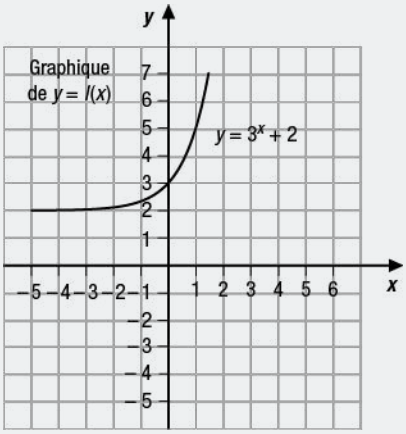
R6.6 (page 153)











Fonctions	$f(x)$	$g(x)$
Ordonnée à l'origine	$\frac{3}{2}$	-2
Zéro	Aucun	$\approx 1{,}584\ 962\ 501...$
Image	$]1; +\infty[$	$]-3; +\infty[$
Variation	Toujours croissante	Toujours croissante
Signe	Toujours positive	Négative pour $x \in\ ]-\infty; 1{,}58...]$ Positive pour $x \in [1{,}58...; +\infty[$

Fonctions	$h(x)$
Ordonnée à l'origine	2
Zéro	$\approx -0{,}368\ 482\ 797...$
Image	$]-\infty; 5[$
Variation	Toujours croissante
Signe	Négative pour $x \in\ ]-\infty; -0{,}37...]$ Positive pour $x \in [-0{,}36...; +\infty[$

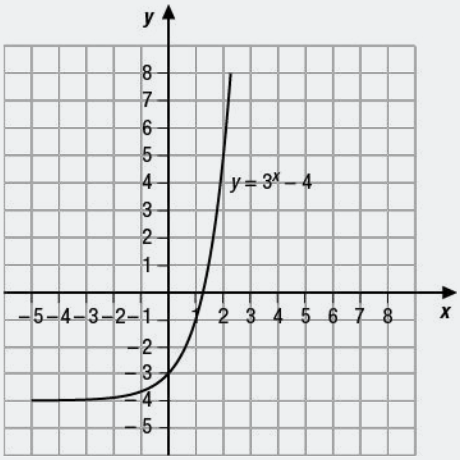
Fonctions	$t(x)$	$l(x)$
Ordonnée à l'origine	$-\frac{5}{2}$	3
Zéro	Aucun	Aucun
Image	$]-\infty; -2[$	$]2; +\infty[$
Variation	Toujours croissante	Toujours croissante
Signe	Toujours négative	Toujours positive

R6.7 (page 153)

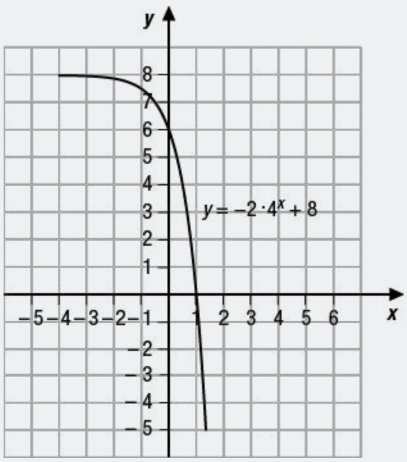
Domaine : $x \in\ ]-\infty; +\infty[$, image : $y \in\ ]-48; +\infty[$, zéros : $x = 2$, ensemble où la fonction est positive : $x \in\ ]2; +\infty[$, ensemble où la fonction est négative : $x \in\ ]-\infty; 2[$.

R6.8 (page 153)

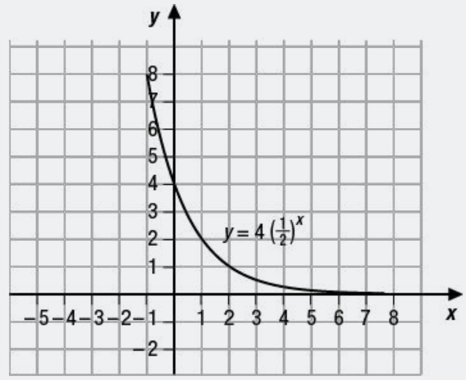
a) Zéro : $\approx 1{,}261\ 859\ 507...$; ordonnée à l'origine : –3.



b) Zéro : 1 ; ordonnée à l'origine : 6.



c) Zéro : aucun ; ordonnée à l'origine : 4.



R6.9 (page xx)

a) $k > 1$ b) $k \leq 1$

R6.10 (page xx)

Zéro : Aucun

Variation : Toujours décroissante

Signe : Toujours négative

CHAPITRE 7

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 7.4 (page 158)

a) $x \in [0; 16]$

b) La fonction est positive pour $x \in]-2,5; 0[\cup]0; 4]$, est nulle pour $x = 0$ et n'est jamais négative.

c) La fonction est croissante pour $x \in [0; 4]$ et décroissante pour $x \in [-2,5; 0]$.

d) $(0; 0)$

e) Donné par la droite verticale $x = 0$

ACTIVITÉ 7.9 (page 161)

a) L'affirmation est fausse. Une reformulation possible est : « Si $a > 0$, alors la fonction $g(x) = ax^2$ est croissante pour $x \in [0; +\infty[$ et décroissante pour $x \in]-\infty; 0]$, et si $a < 0$, alors la fonction $g(x) = ax^2$ est croissante pour $x \in]-\infty; 0]$ et décroissante pour $x \in [0; +\infty[$. »

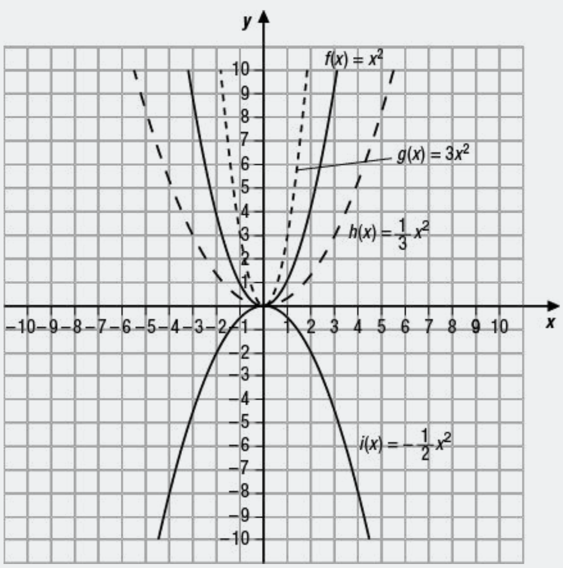
b) L'affirmation est fausse. Si $f(x) = 3x^2$, alors $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$.

c) L'affirmation est vraie. Si $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, alors

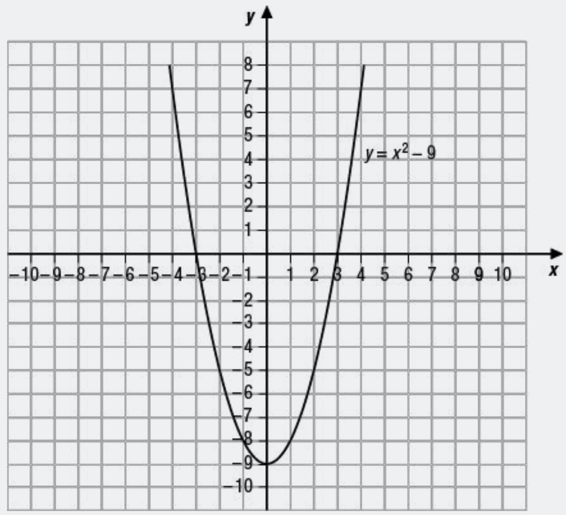
$h(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ et $h(1) = \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{2}$.

Donc, $h(-2) > h(1)$.

ACTIVITÉ 7.10 (page 162)

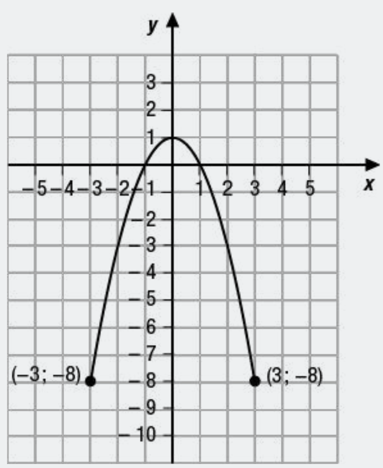


ACTIVITÉ 7.14 (page 165)



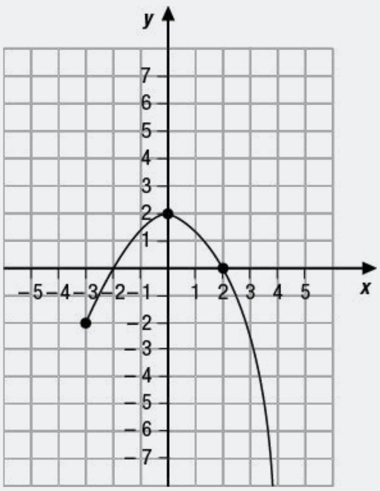
Caractéristiques	$f(x)$
Image	$[-9; +\infty[$
Axe de symétrie	$x = 0$
Sommet	$(0; -9)$
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la règle de correspondance)	$x = -3$ et $x = 3$, car $f(-3) = -3^2 - 9 = 0$ et $f(3) = 3^2 - 9 = 0$
Variation	Décroissante pour $x \in]-\infty; 0]$ Croissante pour $x \in [0; +\infty[$
Signe	Négative pour $x \in]-3; 3[$ Positive pour $x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

ACTIVITÉ 7.15 (page 166)



Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	$x \in]-3;\ 3]$
Image	$y \in [-8;\ 1]$
Axe de symétrie	$x = 0$
Sommet	$(0;\ 1)$
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la formule $f(x) = -x^2 + 1$)	$x = -1$ et $x = 1$, car $f(-1) = -(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ et $f(1) = -(1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
Variation	Décroissante pour $x \in [0;\ 3]$ Croissante pour $x \in]-3;\ 0]$
Signe	Négative pour $x \in]-3;\ -1] \cup]1;\ 3]$ Positive pour $x \in]-1;\ 1[$

ACTIVITÉ 7.16 (page 167)



Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	$x \in [-3;\ +\infty[$
Image	$[-\infty;\ 2]$
Sommet	$(0;\ 2)$
Zéros (justifiez vos valeurs en utilisant la règle de correspondance)	$x = -2$ et $x = 2$, car $f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 0$ et $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot (2)^2 + 2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 0$
Variation	Décroissante pour $x \in [0;\ +\infty[$ Croissante pour $x \in [-3;\ 0]$
Signe	Négative pour $x \in [-3;\ -2[\cup]2;\ +\infty[$ Positive pour $x \in]-2;\ 2[$

ACTIVITÉ 7.17 (page 168)

$a = -\frac{1}{3}$

ACTIVITÉ 7.18 (page 168)

Sommet : $(0;\ -5)$, car il s'agit d'un déplacement vertical vers le bas.

ACTIVITÉ 7.19 (page 169)

L'axe de symétrie est $x = 0$.

Valeur de c :

$f(6) = 5$

$5 = 6^2 + c$

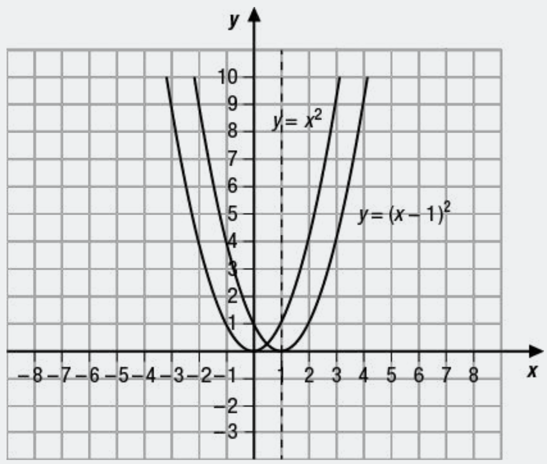
$5 = 36 + c$

$c = 5 - 36$

$c = -31$

On obtient le même résultat quand on substitue les valeurs $x = -6$ et $y = 5$ dans l'équation. Le sommet est $(0;\ -31)$.

ACTIVITÉ 7.22 (page 171)

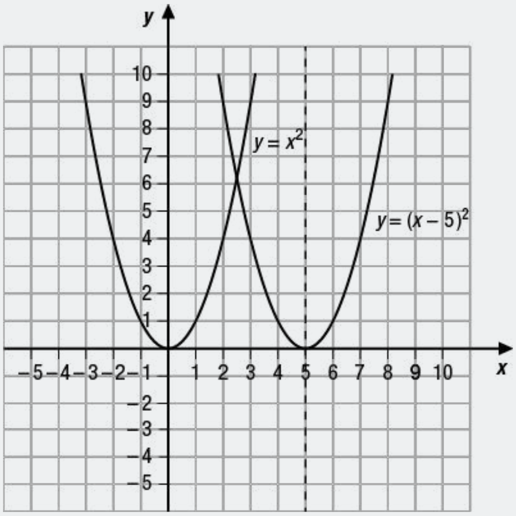


Caractéristiques	$f(x)$
Image	$x \in [0;\ +\infty[$
Axe de symétrie	$x = 1$
Sommet	$(1;\ 0)$
Variation	Croissante pour $x \in [1;\ +\infty[$ Décroissante pour $x \in]-\infty;\ 1]$
Signe	Positive pour $x \in]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$
Zéros	$x = 1$
Déplacement	Horizontal

ACTIVITÉ 7.23 (page 172)

L'axe de symétrie a comme équation $x = \frac{19}{18}$.

ACTIVITÉ 7.24 (page 172)



Caractéristiques	$g(x)$
Domaine	$]-\infty; +\infty[$
Image	$[0; +\infty[$
Axe de symétrie	$x = 5$
Sommet	$(5; 0)$

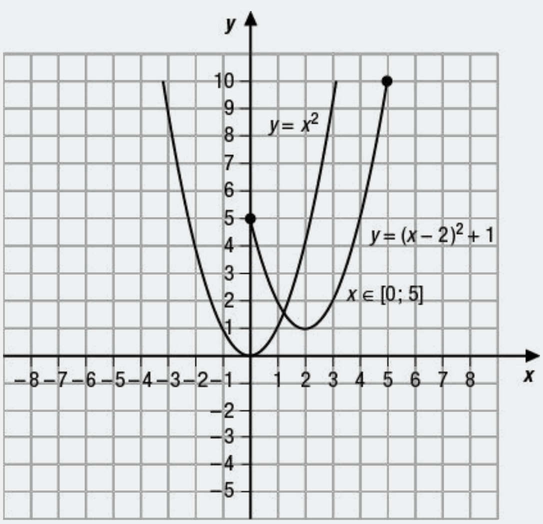
ACTIVITÉ 7.29 (page 176)

Une fonction possible est $f(x) = (x+3)^2 + 1$. Ce n'est pas la seule fonction possible. Toute fonction de la forme $f(x) = a(x+3)^2 + 1$ aura $(-3; 1)$ pour sommet.

ACTIVITÉ 7.30 (page 176)

$x = \dfrac{17}{24}$

ACTIVITÉ 7.31 (page 177)



Caractéristiques	$g(x)$
Image	$[1; 10]$
Sommet	$(2; 1)$
Variation	Croissante pour $[2; 5]$ Décroissante pour $[0; 2]$
Zéros	Aucun
Déplacement	Horizontal et vertical

ACTIVITÉ 7.32 (page 177)

Caractéristiques	$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$	$g(x) = -(x-2)^2 - 1$
Image	$y \in [2; +\infty[$	$y \in]-\infty; -1]$
Variation	Croissante pour $x \in [3; +\infty[$ Décroissante pour $x \in]-\infty; 3]$	Croissante pour $x \in]-\infty; 2]$ Décroissante pour $x \in [2; +\infty[$
Axe de symétrie	$x = 3$	$x = 2$

ACTIVITÉ 7.33 (page 178)

a) i) b) i) c) iii) d) iii)

ACTIVITÉ 7.34 (page 179)

Caractéristiques	$f(x)$
Domaine	$]-\infty; +\infty[$
Image	$[-5; +\infty[$
Axe de symétrie	$x = -3$
Sommet	$(-3; -5)$

ACTIVITÉ 7.41 (page 185)

a) $f(x) = 0$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$x + \frac{2}{3} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1$$

b) $g(x) = 0$

$$(x+5)^2 - 4 = 0$$

$$(x+5)^2 = 4$$

$$x + 5 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x = 2 - 5 = -3 \text{ ou } x = -2 - 5 = -7$$

c) $h(x)=0$

$(x-6)^2-3=0$

$(x-6)^2=3$

$x-6=\pm\sqrt{3}$

$x=6+\sqrt{3}$ ou $x=6-\sqrt{3}$

d) $f(x)=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ ou $x=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$

e) $g(x)=0$

$-(x+3)^2+15=0$

$-(x+3)^2=-15$

$(x+3)^2=15$

$x+3=\pm\sqrt{15}$

$x=-3+\sqrt{15}$ ou $x=-3-\sqrt{15}$

f) $h(x)=0$

$-(x+2)^2-6=0$

$-(x+2)^2=6$

$(x-3)^2=-6$

Il n'y a aucun zéro.

ACTIVITÉ 7.42 (page 186)

On doit résoudre l'équation $f(x)=0$.

$4(x-3)^2=1$

$(x-3)^2=\frac{1}{4}$

$x-3=\frac{1}{2}$ ou $x-3=-\frac{1}{2}$

Les zéros sont $x=\frac{5}{2}$ et $x=\frac{7}{2}$. Étant donné que la parabole est concave vers le bas, la fonction est positive pour $x\in\left]\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$.

ACTIVITÉ 7.43 (page 186)

a) Le début et la fin de la période de floraison correspondent au moment où $f(x)=0$. Il faut donc trouver les zéros de la fonction.

$f(x)=0$

$-60(x-13)^2+10\ 140=0$

$-60(x-13)^2=-10\ 140$

$(x-13)^2=\frac{-10\ 140}{-60}=169$

$x-13=\pm\sqrt{169}=\pm13$

Les deux zéros sont $x=13+13=26$ et $x=-13+13=0$. La période de floraison dure donc 26 semaines.

b) On cherche le sommet. Le sommet est $(13;\ 10\ 140)$. La floraison est maximale 13 semaines après le 1er avril. Le nombre de fleurs est alors de 10 140.

ACTIVITÉ 7.44 (page 187)

a)

Caractéristiques	$f(x)$
Sommet	$(4;-5)$
Concavité	Vers le haut, plus fermée que x^2
Zéros	$x=4+\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $x=4-\sqrt{\frac{5}{3}}$
Axe de symétrie	$x=4$
Forme générale	$f(x)=3x^2-24x+43$
Croissance	$[4;+\infty[$

b)

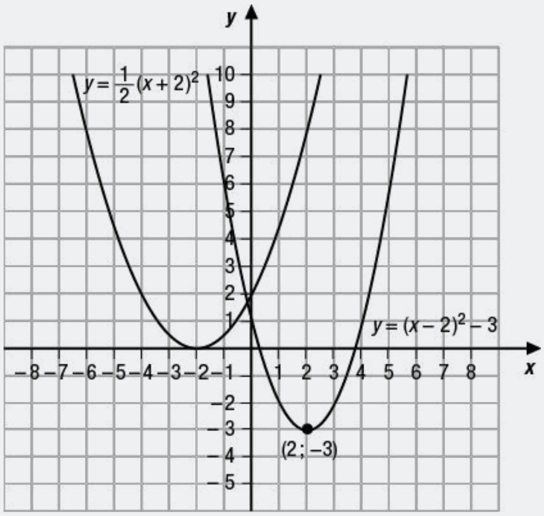
Caractéristiques	$f(x)$
Sommet	$(-2;3)$
Concavité	Vers le bas, plus fermée que x^2
Zéros	$x=-2+\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x=-2-\sqrt{\frac{3}{2}}$
Axe de symétrie	$x=-2$
Forme générale	$f(x)=-2x^2-8x-5$
Croissance	$]-\infty;-2]$

Mes activités de récapitulation

R7.1 (page 188)

Toute règle de correspondance de la forme $f(x)=a(x+3)^2+\frac{5}{7}$ si $a\neq0$.

R7.2 (page 188)



R7.3 (page 188)

b) et c)

R7.4 (page 188)

a) i) $f(0)=5(0+1)^2-3=5(1)^2-3=5-3=2$

ii) $f(-3)=5(-3+1)^2-3=5(-2)^2-3=5\cdot 4-3$
$=20-3=17$

iii) $f(1)=5(1+1)^2-3=5(1)^2-3=5\cdot 4-3$
$=20-3=17$

b) L'axe de symétrie est $x=-1$. Les valeurs $x=-3$ et $x=1$ se trouvent à 2 unités de la valeur $x=-1$, qui est l'axe de symétrie. Ce sont donc des points symétriques.

R7.5 (page 188)

a) Sommet : $(0; -9)$; concavité : puisque $a=1$, elle est concave vers le haut et a la même ouverture que $f(x)=\pm x^2$.

b) Sommet : $(1; 2)$; concavité : puisque $a=\frac{1}{3}$, elle est concave vers le haut et plus ouverte que $f(x)=\pm x^2$.

c) Sommet : $(-3; -4)$; concavité : puisque $a=-1$, elle est concave vers le bas et ouverte comme $f(x)=\pm x^2$.

R7.6 (page 188)

a) i) b) iii) c) i)

R7.7 (page 189)

$f(5)=0=3(5-4)^2+k$
$0=3+k$
$k=-3$

R7.8 (page 189)

$f(0)=1$; $f(-1)=2$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$; $f(\sqrt{2})=3$

R7.9 (page 189)

a) $\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ b) $x=1$

R7.10 (page 189)

Non, c'est faux, elle le traverse au point $(0; 8)$.

R7.11 (page 189)

a) $\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right]$

b) Les x de deux points symétriques, par exemple $x=0$ et $x=-\frac{6}{4}$

R7.12 (page 189)

La fonction est concave vers le bas et le sommet, $(3; -1)$, est sous l'axe des abscisses. L'image est donc $]-\infty; -1]$.

R7.13 (page 189)

Trois valeurs différentes du paramètre a dans la règle de correspondance $f(x)=a(x-4)^2+5, a\neq 0$, donnent les fonctions demandées.

R7.14 (page 189)

$a=2$ et $k=1$

R7.15 (page 189)

a) $k=\frac{3}{4}$ b) $k>\frac{3}{4}$ c) $k<\frac{3}{4}$

CHAPITRE 8

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 8.8 (page 194)

Soit x le nombre recherché.

$(3(x+8)-4+x)\div 4+2-x$

$=(3x+24-4+x)\div 4+2-x$

$=(4x+20)\div 4+2-x$

$=x+5+2-x$

$=7$

Gilles a raison.

ACTIVITÉ 8.9 (page 194)

a) $a-b+a=2a-b$

b) $b-a+2a-2b=a-b$

c) $x+y-2y-2z-3z+3y=x+2y-5z$

d) $x-4y+4z+x+2y-2z+y-3x-3z=-x-y-z$

e) $10n^2-4n-10$

ACTIVITÉ 8.12 (page 196)

a) $\frac{8}{7}-\frac{7}{2}=\frac{8\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{7\cdot 7}{2\cdot 7}$

$=\frac{16}{14}-\frac{49}{14}=-\frac{33}{14}$

b) $\left(\frac{8\cdot 5}{7\cdot 5}-\frac{4\cdot 7}{5\cdot 7}\right)\times\frac{35}{8}$

$=\left(\frac{40}{35}-\frac{28}{35}\right)\times\frac{35}{8}$

$=\frac{12}{35}\times\frac{35}{8}$

$=\frac{3\cdot 4}{35}\times\frac{35}{2\cdot 4}=\frac{3}{2}$

c) $\left(\frac{5\cdot 2}{8\cdot 2}-\frac{7}{2\cdot 8}\right)\div\frac{21}{4}$

$=\left(\frac{10}{16}-\frac{7}{16}\right)\div\frac{21}{4}=\frac{3}{16}\div\frac{21}{4}$

$=\frac{3}{16}\times\frac{4}{21}=\frac{3}{4\cdot 4}\times\frac{4}{3\cdot 7}$

$=\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{1}{28}$

d) $\frac{5}{8}-\frac{7}{4\cdot 4}\times\frac{4}{3\cdot 7}$

$=\frac{5}{8}-\frac{1}{12}=\frac{5}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4}$

$=\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 2}$

$=\frac{15}{24}-\frac{2}{24}=\frac{13}{24}$

ACTIVITÉ 8.13 (page 197)

a) $-6\times\frac{7}{3\cdot 6}=-\frac{7}{3}$

b) $3\cdot 3\times\left(-\frac{5}{4\cdot 3}\right)=3\times-\frac{5}{4}=-\frac{15}{4}$

c) 3

d) $\frac{2\cdot 4}{11}\times\left(-\frac{3\cdot 11}{4}\right)=2\times-3=-6$

e) $\frac{6}{7}\div 8=\frac{6}{7}\times\frac{1}{8}=\frac{2\cdot 3}{7}\times\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{28}$

f) $-\frac{1}{10}\times\frac{10}{3}=-\frac{1}{3}$

g) $6\times\frac{8}{7}=\frac{48}{7}$

h) $-1\div\frac{4}{3}=-1\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$

i) $-\frac{1}{4}\div 3=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=-\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}=-\frac{1}{12}$

j) $\frac{5zy^2}{2a}$

k) $\frac{t}{3x}\cdot\frac{2y}{t}=\frac{2y}{3x}$

l) $a\div\frac{10b}{c}=a\times\frac{c}{10b}=\frac{ac}{10b}$

m) $-z^2x\div\frac{5}{z}=-z^2x\times\frac{z}{5}=-\frac{z^3x}{5}$

ACTIVITÉ 8.25 (page 203)

a) $2(m+2)$; mise en évidence simple

b) $3b(1+3b+9b^2-2b^3)$; mise en évidence simple

c) $(10x)^2-9^2=(10x-9)(10x+9)$; différence de carrés

d) $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$; mise en évidence double

e) $\left(\frac{4}{5}x\right)^2-3^2=\left(\frac{4}{5}x+3\right)\left(\frac{4}{5}x-3\right)$; différence de carrés

f) $(x+y)(a+b)$; mise en évidence simple

g) $(3x)^2-1^2=(3x+1)(3x-1)$; différence de carrés

h) $5a(b-3c)$; mise en évidence simple

i) $cd(d-c)(c+5)$; mise en évidence simple suivie d'une mise en évidence double

j) $81x^2-18x+1=(9x-1)(9x-1)=(9x-1)^2$; trinôme carré parfait

k) $(ab)^2-x^2=(ab-x)(ab+x)$; différence de carrés

l) $x^2-(\sqrt{5})^2=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$; différence de carrés

m) $3^2-(x+y)^2=(3+(x+y))(3-(x+y))$
$=(3+x+y)(3-x-y)$; différence de carrés

n) $c(a-b)(x+2y)$; mise en évidence simple suivie d'une mise en évidence double

o) $3z(a^2-10a+25)=3z(a-5)^2$; mise en évidence simple suivie d'un trinôme carré parfait

ACTIVITÉ 8.26 (page 204)

$$4x^2-25=(2x-5)(2x+5)=4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

ACTIVITÉ 8.27 (page 204)

a) $8x$

b) $(-10x)$

c) $(-16a)$

d) $24xy$

ACTIVITÉ 8.28 (page 204)

$b^{0\cdot3}-2(a+1)-2(b^{5-3}-a)-2a^2$

$=b^0-2(a+1)-2\left(b^2-a\right)-2a^2$

$=1-2a-2-2b^2+2a-2a^2$

$=-1-2b^2-2a^2=-1-2(b^2+a^2)$

$=-1-2\cdot6=-13$

ACTIVITÉ 8.29 (page 204)

a) $4^2+2\cdot4\cdot3x+(3x)^2=16+24x+9x^2$

b) $2^2-2\cdot2\cdot5x+(5x)^2=4-20x+25x^2$

c) $(a+y)^2$

d) $a^2-2\cdot a\cdot4+4^2=a^2-8a+16$

e) $(b-6)(b+6)$

Mes activités de récapitulation

R8.1 (page 205)

a) Oui b) Oui c) Non

On trouve facilement les réponses en effectuant les produits.

R8.2 (page 205)

a) $7b(a^2-2a+1)=7b(a-1)^2$

b) $2xy(16z^2-1)=2xy(4z-1)(4z+1)$

c) $100x^2(y+1)-81(y+1)=(y+1)(100x^2-81)$
$=(y+1)(10x-9)(10x+9)$

R8.3 (page 205)

a) $-2x^3+8x^2+70x-4$

b) $-10x^5y+70x^4y^3$

c) $\dfrac{4a}{20}-\dfrac{2(a+b)}{20}+\dfrac{b}{20}=\dfrac{4a-2(a+b)+b}{20}=\dfrac{2a-b}{20}$

d) $\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}=\dfrac{x^2+4x-5}{x^3},\ x\neq0$

e) $\dfrac{5(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{4(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{5x+10-4x+8}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{x+18}{x^2-4}$. Pour que l'expression soit définie, on doit avoir $x\neq2$ et $x\neq-2$.

f) $\dfrac{3}{x(x+1)}+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3}{x(x+1)}+\dfrac{x^2}{x(x+1)}=\dfrac{3+x^2}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+3}{x^2+x}$.
Pour que l'expression soit définie, on doit avoir $x\neq0$ et $x\neq-1$.

g) $\dfrac{3x}{x}+\dfrac{xy}{2}=3+\dfrac{xy}{2}$. Pour que l'expression soit définie, on doit avoir $x\neq0$.

h) $\dfrac{8a}{16}+\dfrac{2(a+b)}{16}-\dfrac{b}{16}=\dfrac{8a+2(a+b)-b}{16}=\dfrac{10a+b}{16}$

i) $\dfrac{9x^2}{x^3}-\dfrac{7x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}=\dfrac{9x^2-7x+3}{x^3},\ x\neq0$

j) $\dfrac{x+25}{x^2-25}$. Pour que l'expression soit définie, on doit avoir $x\neq5$ et $x\neq-5$.

R8.4 (page 205)

a) $\dfrac{y(y-d)+6(y-d)}{y+6}=\dfrac{(y-d)(y+6)}{y+6}=y-d,\ y\neq-6$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x+1-1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}}=\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x},\ x\neq0,\ x\neq-1$

R8.5 (page 205)

a) Pas une identité ; exemple : $x = 1$

b) Identité, car $\dfrac{4x+8}{4}=\dfrac{4x}{4}+\dfrac{8}{4}=x+2$.

c) Pas une identité ; exemple : $x = 1$

Une autre façon de voir qu'il s'agit d'une identité est par la factorisation, car $(4x + 8)/4 = 4(x + 2)/4 = x + 2$.

CHAPITRE 9

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 9.10 (page 215)

a)

	$g(x) = -x^2 + 5x - 6$
Image	$]-\infty; 0{,}25]$
Zéros	$x = 2$ et $x = 3$
Ensemble pour lequel la fonction est positive	$]2; 3[$
Ensemble pour lequel la fonction est négative	$]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$
Croissance	$]-\infty; 2{,}5]$
Décroissance	$[2{,}5; +\infty[$
Max ou min	Max. : $(2{,}5; 0{,}25)$

b)

	$h(x) = x^2 + 2x + 7$
Image	$[6; +\infty[$
Zéros	Aucun
Ensemble pour lequel la fonction est positive	$]-\infty; +\infty[$
Ensemble pour lequel la fonction est négative	Vide
Croissance	$[-1; +\infty[$
Décroissance	$]-\infty; -1]$
Max ou min	Min : $(-1; 6)$

c)

	$f(x) = 3x^2 + 4$
Image	$[4; +\infty[$
Zéros	Aucun
Ensemble pour lequel la fonction est positive	$]-\infty; +\infty[$
Ensemble pour lequel la fonction est négative	Vide
Croissance	$[0; +\infty[$
Décroissance	$]-\infty; 0]$
Max ou min	Min : $(0; 4)$

ACTIVITÉ 9.11 (page 216)

a) $d(0) = 20$; $d(2) = -4{,}9(2)^2 + 12 \cdot 2 + 20 = 24{,}4$;

$d(3) = -4{,}9(3)^2 + 12 \cdot 3 + 20 = 11{,}9$.

Ces valeurs représentent la hauteur, en mètres, aux secondes indiquées.

b) Hauteur maximale pour $t = -\frac{12}{2(-4{,}9)} = \frac{60}{49} \approx 1{,}22$

La hauteur sera alors de $d\left(\frac{60}{49}\right) = \frac{1340}{49} \approx 27{,}35$.

c) On cherche le temps auquel $d(t) = 0$.

$-4{,}9t^2 + 12t + 20 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-4{,}9)(20)}}{2(-4{,}9)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 392}}{-9{,}8}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{536}}{-9{,}8}$$

On trouve $t_1 = \frac{-12 + \sqrt{536}}{-9{,}8} \approx -1{,}14$ et

$t_2 = \frac{-12 - \sqrt{536}}{-9{,}8} \approx 3{,}59$. On rejette la première valeur puisque le temps doit être positif. L'objet touche le sol à environ 3,59 secondes.

ACTIVITÉ 9.12 (page 217)

a) $h(0) = 61$ mètres

b) On cherche les valeurs de t de sorte que $h(t) = 800$.

$-4t^2 + 120t + 61 = 800$

$-4t^2 + 120t - 739 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-4)(-739)}}{2(-4)} = \frac{-120 \pm \sqrt{14\,400 - 11824}}{-8}$$

$$= \frac{-120 \pm \sqrt{2576}}{-8} = 15 \pm \frac{1}{8}\sqrt{2576}$$

La hauteur sera de 800 m à $t_1 = 21{,}3$ secondes et à $t_2 = 8{,}7$ secondes.

c) Le temps pris pour atteindre le maximum est

$t = -\frac{120}{2(-4)} = 15$.

Après 15 secondes, la hauteur est de $h(15) = -4(15^2) + 120 \cdot 15 + 61 = 961\,\text{m}$.

d) La balle touchera le sol lorsque la hauteur sera 0.

$-4t^2 + 120t + 61 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4(-4)(61)}}{2(-4)} = \frac{-120 \pm \sqrt{14\,400 + 976}}{-8}$$

$$= \frac{-120 \pm \sqrt{15\,376}}{-8} = \frac{-120 \pm 124}{-8}$$

Les solutions de cette équation sont $t_1 = -\frac{1}{2}$ et $t^2 = \frac{61}{2} = 30{,}5$.

On rejette la valeur $t_1 = -\frac{1}{2}$ puisque t ne peut pas être négatif. La balle touchera le sol à 30,5 secondes.

ACTIVITÉ 9.13 (page 217)

Lorsque la balle retombe au sol, on a $(120; 0)$. Lorsque la balle atteint sa hauteur maximale, on a $(60; 10)$.

Ces deux couples permettent de trouver l'équation de la fonction, $f(x) = -\frac{1}{360}(x-60)^2 + 10$ sous la forme canonique, ou $f(x) = -\frac{1}{360}x(x-120)$ sous la forme factorisée.

ACTIVITÉ 9.14 (page 218)

Vrai. Les valeurs de h et de k représentent les coordonnées du sommet et toute fonction quadratique possède un sommet.

ACTIVITÉ 9.15 (page 218)

a) i) b) ii)

ACTIVITÉ 9.16 (page 218)

L'axe de symétrie est donné par $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.

Le sommet est $(1; 3)$.

Il y a une infinité de points. Par exemple, deux points possibles sont $(0; 4)$ et $(-1; 7)$. Leurs points symétriques sont $(2; 4)$ et $(3; 7)$.

ACTIVITÉ 9.21 (page 223)

a)

	$k(x) = -3(x+1)(x-3)$
Image	$]-\infty; 12]$
Zéros	$x = -1$ et $x = 3$
Ensemble pour lequel la fonction est positive	$]-1; 3[$
Ensemble pour lequel la fonction est négative	$]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$
Croissance	$]-\infty; 1]$
Décroissance	$[1; +\infty[$
Maximum ou minimum	Maximum : $(1; 12)$

b)

	$f(x) = (x+4)^2$
Image	$[0; +\infty[$
Zéros	$x = -4$
Ensemble pour lequel la fonction est positive	$]-\infty; -4[\cup]-4; +\infty[$
Ensemble pour lequel la fonction est négative	Vide
Croissance	$[-4; +\infty[$
Décroissance	$]-\infty; -4]$
Maximum ou minimum	Minimum : $(-4; 0)$

ACTIVITÉ 9.22 (page 223)

a) Faux. Les zéros de la fonction sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 120$. L'axe de symétrie se trouve au milieu, son équation est donc $x = 60$.

b) Vrai. On doit trouver les valeurs de x pour lesquelles $2x - 5$ ou $3x + 8 = 0$, ce qui se produit bien lorsque $x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = -\frac{8}{3}$.

Mes activités de récapitulation

R9.1 (page 224)

Caractéristiques	$f(x) = -x^2 - 4x + 5$
Domaine	$x \in [-3; +\infty[$
Image	$y \in]-\infty; 9]$
Sommet	$x \in (-2; 9)$
Zéros (validez vos valeurs à l'aide de la règle de correspondance $f(x) = -x^2 - 4x + 5$)	Il y a un zéro à $x = 1$. Il y a un autre zéro à $x = -5$, mais il ne fait pas partie du domaine. $f(1) = -1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 0$
Variation	Croissante pour $x \in [-3; -2]$ Décroissante pour $[-2; +\infty[$
Signe	Positive pour $x \in [-3; 1[$ Négative pour $x \in]1; +\infty[$

R9.2 (page 224)

On trouve d'abord les zéros.

Si la fonction quadratique n'a pas de zéro, cela veut dire qu'elle est toujours positive ou toujours négative. Il faut alors regarder sa concavité : si elle est concave vers le haut, alors elle est positive pour toutes les valeurs de x ; si elle est concave vers le bas, alors elle est négative pour toutes les valeurs de la variable et, par conséquent, l'ensemble pour lequel la fonction est positive ne contient aucun élément.

Si la fonction quadratique a deux zéros, disons x_1 et x_2, $x_1 < x_2$, alors on regarde sa concavité. Si elle est concave vers le haut, la fonction sera alors positive en $]-\infty; x_1[$ et en $]x_2; +\infty[$. Si elle est concave vers le bas, alors elle sera positive en $]x_1; x_2[$.

Si la fonction a un seul zéro, disons x_1, et qu'elle est concave vers le haut, la fonction sera positive en $]-\infty; x_1[$ et en $]x_1; +\infty[$; si elle a un seul zéro et qu'elle est concave vers le bas, l'ensemble pour lequel la fonction est positive ne contient aucun élément.

R9.3 (page 224)

Une fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ a deux zéros distincts lorsque $b^2 - 4ac > 0$.

Pour la fonction quadratique $f(x)=x^2+bx-4$, cela se produit lorsque:

$b^2-4(1)(-4)>0$

$b^2+16>0$

ce qui est bien le cas, peu importe la valeur de b.

R9.4 (page 224)

a) Image: $y\in\,]-\infty;\,-2]$

Zéros: Aucun

Ensemble pour lequel la fonction est positive: Vide

Ensemble pour lequel la fonction est négative: $x\in\,]-\infty;\,+\infty[$

Croissance: $x\in\,]-\infty;\,1]$

Décroissance: $[1;\,+\infty[$

Minimum ou maximum: Maximum en (1 ; –2)

b) Image: $y\in[-48;\,+\infty[$

Zéros: $x=-6$ et $x=2$

Ensemble pour lequel la fonction est positive: $x\in\,]-\infty;\,-6[\,\cup\,]2;\,+\infty[$

Ensemble pour lequel la fonction est négative: $x\in\,]-6;\,2[$

Croissance: $x\in[-2;\,+\infty[$

Décroissance: $x\in\,]-\infty;\,-2]$

Minimum ou maximum: Minimum en (–2 ; –48)

c) Image: $y\in\left[-\dfrac{25}{8};\,+\infty\right[$

Zéros: $x_1=-\dfrac{5}{2}$ et $x_2=0$

Ensemble pour lequel la fonction est positive:

$x\in\left]-\infty;\,-\dfrac{5}{2}\right[\,\cup\,]0;\,+\infty[$

Ensemble pour lequel la fonction est négative:

$x\in\left]-\dfrac{5}{2};\,0\right[$

Croissance: $x\in\left[-\dfrac{5}{4};\,+\infty\right[$

Décroissance: $x\in\left]-\infty;\,-\dfrac{5}{4}\right]$

Minimum ou maximum: Minimum en $\left(-\dfrac{5}{4};\,-\dfrac{25}{8}\right)$

d) Image: $y\in[-11;\,+\infty[$

Zéros: $x_1=6-\sqrt{\dfrac{11}{5}}$ et $x_2=6+\sqrt{\dfrac{11}{5}}$

Ensemble pour lequel la fonction est positive:

$x\in\left]-\infty\,;\,6-\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right[\,\cup\,\left]6+\sqrt{\dfrac{11}{5}};\,+\infty\right[$

Ensemble pour lequel la fonction est négative:

$x\in\left]6-\sqrt{\dfrac{11}{5}};\,6+\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right[$

Croissance: $x\in[6;\,+\infty[$

Décroissance: $x\in\,]-\infty;\,6]$

Minimum ou maximum: Minimum en (6 ; –11)

R9.5 (page 224)

a) Il y a une infinité de réponses possibles.

Exemples de réponses: $2x^2-2x+1$ et $4x^2-2x+1$.

b) Il n'y aura aucun zéro lorsque $b^2-4ac<0$.

$(-2)^2-4(a)(1)<0$

$4-4a<0$

$4<4a$

$1<a$

Toutes les valeurs de a supérieures à 1.

R9.6 (page 224)

a) Calcul des zéros:

$$x_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot(1)\cdot(99)}}{2\cdot 2}=\frac{20\pm 2}{4}$$

Les zéros sont $x_1=11$ et $x_2=9$.

$f(x)=x^2-20x+99=(x-11)(x-9)$

b) Calcul des zéros:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(1)\cdot(6)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{2}$$

Le discriminant est négatif, il n'y a pas de zéro, donc l'expression ne se factorise pas.

R9.7 (page 225)

a) $2x^2-32=0$

$2x^2=32$

$x^2=16$

Deux zéros: $x_1=-4$ et $x_2=4$

b) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

$x-\dfrac{1}{2}=0$

Un seul zéro: $x=\dfrac{1}{2}$

c) $(x+1)(x-2)=0$

Soit $x+1=0$, d'où $x=-1$, soit $x-2=0$, d'où $x=2$.

d) $3(x+1)(x+2)=0$

Soit $x+1=0$, d'où $x=-1$, soit $x+2=0$, d'où $x=-2$.

e) $(2x-1)(x+3)=0$

Soit $2x-1=0$, d'où $x=\dfrac{1}{2}$, soit $x+3=0$, d'où $x=-3$.

f) $20x^2-5=0$

$20x^2=5$

$x^2=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

Alors les zéros sont $x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}$, soit $x_1=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

g) $3x^2+6=0$

$3x^2=-6$

$x^2=-2$

Il n'y a pas de zéro.

R9.8 (page 225)

a) Les solutions de $x^2+6x+5=0$ sont $x=-1$ et $x=-5$, alors on obtient $x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$.

b) Les solutions de $x^2-x-12=0$ sont 4 et –3, alors on obtient $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$.

c) Les solutions de $4x^2-12x+8=0$ sont $x_1=2$ et $x_2=1$, alors on obtient $4x^2-12x+8=4(x-2)(x-1)$.

d) L'équation $x^2+x+\frac{25}{2}=0$ n'a pas de solution (le discriminant est négatif), alors l'expression $x^2+x+\frac{25}{2}$ ne se factorise pas.

e) L'équation $x^2-4x+4=0$ a une seule solution, qui est $x=2$, alors on obtient $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

CHAPITRE 10

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 10.7 (page 232)

a) $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1}$

Les solutions sont $x_1 = 11$ et $x_2 = 1$.

b) $2x^2 + 2x + 25 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-196}}{4}$

Il n'y a pas de solution.

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\dfrac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

La solution est $x = 2$.

d) $x^2 - 3x - 4 = 0$

Les zéros sont $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$.

e) $4x^2 + 10x - \dfrac{11}{4} = 0$

Les solutions sont $x_1 = \dfrac{1}{4}$ et $x_2 = -\dfrac{11}{4}$.

f) $(2x - 7)(3x - 5) = 0$ si $2x - 7 = 0$ ou $3x - 5 = 0$,

c'est-à-dire quand $x_1 = \dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5}{3}$.

ACTIVITÉ 10.8 (page 232)

16 et 17, et aussi -17 et -16.

ACTIVITÉ 10.9 (page 232)

Soit x la largeur recherchée.

L'équation qui décrit la situation est $x \cdot (x + 122) = 65\,975$.

Il faut résoudre l'équation :

$x \cdot (x + 122) = 65\,975$

$x^2 + 122x - 65\,975 = 0$

$x = \dfrac{-122 \pm \sqrt{278\,784}}{2}$

Les solutions sont $x_1 = 203$ et $x_2 = -325$. La largeur d'un drapeau ne pouvant être négative, la réponse est donc 203 m. L'autre côté mesure 203 + 122 = 325 m.

ACTIVITÉ 10.10 (page 233)

a) En examinant le discriminant, on voit que pour ne pas avoir de solution, on doit avoir $b^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0$, soit $b^2 < 24$, par exemple [illegible].

b) En examinant le discriminant, on voit que pour ne pas avoir de solution, on doit avoir $b^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) < 0$, ce qui est impossible, car l'expression $b^2 + 24$ est toujours positive. Alors, l'équation a deux solutions pour toute valeur de b.

c) En examinant le discriminant, on voit que pour avoir une seule solution, on doit avoir $b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$, soit $b^2 = 16$; alors on trouve $b = 4$ ou $b = -4$.

ACTIVITÉ 10.11 (page 233)

$3x(3 + x) - 2x = 6x^2 - 3x(5 + x) + 1$

$9x + 3x^2 - 2x = 6x^2 - 15x - 3x^2 + 1$

$3x^2 + 7x = 3x^2 - 15x + 1$

$22x - 1 = 0$

a) L'équation a une seule solution.

ACTIVITÉ 10.14 (page 235)

a) On doit avoir $x \neq 2$.

On écrit $x^2 - 5x + 6 = 3(x - 2)$,
soit $x^2 - 8x + 12 = 0$, dont les solutions sont $x_1 = 6$ et $x_2 = 2$. On doit rejeter la deuxième solution, car il y aurait une division par zéro dans l'équation de départ.

b) On doit avoir $x \neq -3$ et $x \neq 0$.

$(x + 2)(3x) = (x + 3)(3x - 1)$

$3x^2 + 6x = 3x^2 - x + 9x - 3$

$6x = 8x - 3$

$x = \dfrac{3}{2}$

La solution est $x = \dfrac{3}{2}$.

ACTIVITÉ 10.19 (page 238)

a) On doit avoir $x \neq 0$.

$(x - 3)(2x) = 9\left(x - \dfrac{7}{9}\right)$

$2x^2 - 6x = 9x - 7$

$2x^2 - 15x + 7 = 0$

$x = \dfrac{15 \pm 13}{4}$

Les solutions sont $x_1 = 7$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

b) On doit avoir $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

$(3x + 1)(x - 1) = (3x)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

$3x^2 - 3x + x - 1 = 3x^2 - x$

$-2x - 1 = -x$

$-x = 1$

La solution est $x = -1$.

c) x doit être différent de 2.

$$\frac{8}{2x-4} = 17-13$$
$$8 = 4(2x-4)$$
$$6 = 2x$$
$$x = 3$$

d) $x-5 = 0\cdot(x^2+1)$

$$x-5 = 0$$
$$x = 5$$

e) x doit être différent de $-\frac{2}{3}$.

$$x+1 = 1\cdot(3x+2)$$
$$x+1 = 3x+2$$
$$-2x = 1$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

f) $\frac{2x+8}{x+4} = 2$

$$2x+8 = 2(x+4)$$
$$2x+8 = 2x+8$$
$$0 = 0$$

Identité pour tous les x, sauf pour $x = -4$. Autrement dit, identité pour $x \in \,]-\infty; -4[\, \cup \,]-4; +\infty[$.

g) $\frac{8}{x-3} = 0$

$$8 = 0(x-3)$$
$$8 = 0$$

Aucune solution. Autrement dit, l'ensemble solution est vide.

h) $x^2 = 5x-6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2}$$

Les zéros de la quadratique sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. Les deux valeurs sont des solutions de l'équation initiale.

i) $x^2 = 35 + 2x$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$
$$x = \frac{2\pm\sqrt{144}}{2}$$

Les zéros de la quadratique sont $x = -5$ et $x = 7$. Seul $x = 7$ est une solution de l'équation initiale.

j) $\sqrt[5]{32}\sqrt[5]{x^5} = -2$

$$2x = -2$$
$$x = -1$$

k) $(\sqrt{x-5})^2 = 2^2$

$$x-5 = 4$$
$$x = 9$$

l) $(\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2$

$$2x+5 = x^2+2x+1$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

On trouve $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$, mais cette deuxième valeur n'est pas une solution de l'équation initiale.

ACTIVITÉ 10.24 (page 242)

a) $\sqrt{(x+3)^2} = \sqrt{81}$

$$|x+3| = 9$$

On trouve $x+3 = 9$ et $x+3 = -9$, que l'on résout pour obtenir comme solutions $x_1 = 6$ et $x_2 = -12$.

b) $\sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{4}$

$$|x-5| = 2$$

On trouve $x-5 = 2$ et $x-5 = -2$, que l'on résout pour obtenir comme solutions $x_1 = 7$ et $x_2 = 3$.

c) On trouve $x-2 = 7$ et $x-2 = -7$, que l'on résout pour obtenir comme solutions $x_1 = 9$ et $x_2 = -5$.

d) $\sqrt{(4x+2)^2} = \sqrt{25}$

$$|4x+2| = 5$$

On doit résoudre les équations $4x+2 = 5$ et $4x+2 = -5$, ce qui donne $x_1 = \frac{3}{4}$ et $x_2 = -\frac{7}{4}$.

e) $-|x| = -3$

$$|x| = 3$$

On trouve les deux solutions $x_1 = 3$ et $x_2 = -3$.

f) $\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{9}$

$$|2x-1| = 3$$

On doit résoudre les équations $2x-1 = 3$ et $2x-1 = -3$, ce qui donne $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.

Mes activités de récapitulation

R10.1 (page 243)

a) $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

b) Discriminant négatif, aucune solution.

c) Les solutions sont -1 et 6.

d) Les solutions sont $-\frac{1}{2}$ et -1.

e) Les solutions sont $\frac{1}{3}$ et 3.

f) Les solutions sont $\frac{7}{4}$ et $-\frac{1}{3}$.

R10.2 (page 243)

b)

R10.3 (page 243)

Longueur : 8 m, largeur : 9 m ; ou longueur : 9 m, largeur : 8 m.

R10.4 (page 243)

c)

R10.5 (page 243)

a) C'est une identité. En développant le membre de gauche, on obtient $2x+8-x-3$, qui est égal à $x+5$, et on constate l'identité.

b) Ce n'est pas une identité. Par exemple, il n'y a pas d'égalité lorsque $x = 1$.

c) Ce n'est pas une identité. Par exemple, il n'y a pas d'égalité lorsque $x = 0$.

d) Ce n'est pas une identité. Par exemple, il n'y a pas d'égalité lorsque $x = 1$.

e) C'est une identité. Si on opère les deux membres, on obtient $5x$ dans les deux et on constate l'identité.

CHAPITRE 11

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 11.5 (page 246)

a) $a=\sqrt{20^2-9^2}=\sqrt{319}$ cm

b) $c=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ cm

ACTIVITÉ 11.6 (page 246)

a) Le côté L est l'hypoténuse.

b) Les longueurs des deux autres côtés sont 9 et 12.

ACTIVITÉ 11.7 (page 247)

a) Soit a la hauteur du grand triangle rectangle.

$a=\sqrt{20^2-15^2}=\sqrt{175}$

$x=\sqrt{6^2+(\sqrt{175})^2}=\sqrt{211}$ cm

b) Soit b l'hypoténuse du petit triangle supérieur.

$b=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}$

La mesure de l'hypoténuse du grand triangle rectangle est $8+\sqrt{125}$.

$x+5=\sqrt{(8+\sqrt{125})^2-15^2}$

$x=\sqrt{(8+\sqrt{125})^2-15^2}-5\approx 6{,}953$ cm

ACTIVITÉ 11.8 (page 247)

Grâce au théorème de Pythagore, on peut trouver la hauteur :

$$h=\sqrt{\left(\frac{5}{4}b\right)^2-b^2}=\sqrt{\frac{25}{16}b^2-b^2}=\sqrt{\frac{9}{16}b^2}=\frac{3}{4}b$$

Puisque l'aire est de 108 cm^2, on peut trouver la mesure de la base :

$b\cdot\frac{3}{4}b=108$

$\frac{3}{4}b^2=108$

$b^2=144$

$b=\pm 12$

La base mesure donc 12 cm. On peut ensuite trouver la hauteur :

$h=\frac{3}{4}b=\frac{3}{4}\cdot 12=9$

Les mesures des côtés du rectangle sont 12 cm et 9 cm.

Finalement, on trouve le périmètre :

$2b+2h=2\cdot 12+2\cdot 9=42$ cm

ACTIVITÉ 11.18 (page 253)

a) $\tan 38°=\frac{x}{12}$

$x=12\tan 38°$

$x\approx 9{,}375$ cm

b) $\sin x=\frac{5{,}5}{11}=0{,}5$

$x=30°$

c) $\cos x=\frac{30}{40}=0{,}75$

$x=\cos^{-1}0{,}75$

$x\approx 41{,}4096°$

ACTIVITÉ 11.19 (page 254)

Dans le triangle rectangle MNO :

$\sin 36°=\frac{4}{\mathrm{m}\overline{MN}}$

$\mathrm{m}\overline{MN}=\frac{4}{\sin 36°}\approx 6{,}8052$ cm

$\tan 36°=\frac{4}{\mathrm{m}\overline{ON}}$

$\mathrm{m}\overline{ON}=\frac{4}{\tan 36°}\approx 5{,}5055$ cm

ou bien :

$\mathrm{m}\overline{ON}=\sqrt{6{,}8052^2-4^2}\approx 5{,}5055$ cm

La mesure de $\angle NMO$ est $180°-90°-36°=54°$.

$\tan 54°=\frac{\mathrm{m}\overline{NP}}{6{,}8052}$

$\mathrm{m}\overline{NP}=6{,}8052\tan 54°\approx 9{,}3666$ cm

$\mathrm{m}\overline{OP}=\sqrt{9{,}3665^2-5{,}5055^2}\approx 7{,}5777$ cm

Périmètre : $6{,}8052+9{,}3666+7{,}5777+4=27{,}7494$ cm

Aire : $\frac{(7{,}5777+4)\times 5{,}5055}{2}=31{,}8707$ cm^2

ACTIVITÉ 11.20 (page 254)

Soit L la longueur de l'échelle.

$\sin 80°=\frac{5}{L}$

$L=\frac{5}{\sin 80°}$

$L\approx 5{,}0771$ m

ACTIVITÉ 11.21 (page 255)

a) Le quotient $\frac{\mathrm{m}\overline{AB}}{\mathrm{m}\overline{CB}}$ donne la valeur du sinus de l'angle C.

b) Le quotient $\frac{\mathrm{m}\overline{CA}}{\mathrm{m}\overline{AB}}$ donne la valeur de la tangente de l'angle B.

c) $\cos B$ est donné par le quotient $\frac{\mathrm{m}\overline{AB}}{\mathrm{m}\overline{CB}}$.

d) $\cos B=\sin C$

e) $\sin B=\cos C$

Mes activités de récapitulation

R11.1 (page 256)

$\sqrt{c^2+c^2}=8$

$\sqrt{2c^2}=8$

$2c^2=64$

$c^2=32$

$c=\pm\sqrt{32}$

Le périmètre est $4c=4\sqrt{32}=16\sqrt{2}$ m.

R11.2 (page 256)

Soit h la hauteur du triangle.

$h=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

Aire : $\dfrac{b\times h}{2}=\dfrac{8\times 8\sqrt{2}}{2}=32\sqrt{2}$ cm^2

R11.3 (page 256)

Dans le petit triangle rectangle CPN :

$\mathrm{m}\overline{NP}=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}=6$ cm

Puisque $AMNP$ est un rectangle, $\mathrm{m}\overline{AM}=\mathrm{m}\overline{NP}=6$ cm.

Dans le grand triangle ABC :

$\mathrm{m}\overline{AB}=\mathrm{m}\overline{AM}+\mathrm{m}\overline{MB}=6+9=15$

$\mathrm{m}\overline{AC}=\mathrm{m}\overline{AP}+\mathrm{m}\overline{PC}=12+8=20$

$\mathrm{m}\overline{BC}=\sqrt{\mathrm{m}\overline{AB}^2+\mathrm{m}\overline{AC}^2}=\sqrt{15^2+20^2}=\sqrt{625}=25$

Périmètre :

$\mathrm{m}\overline{AB}+\mathrm{m}\overline{BC}+\mathrm{m}\overline{CA}=15+25+20=60\,\mathrm{cm}$

R11.4 (page 256)

a) Oui, c'est un triangle rectangle, car :

$2x+x+3x=180°$

$6x=180°$

$x=30°$

Donc $\mathrm{m}\angle C=3x=90°$.

b) Non, ce n'est pas un triangle rectangle, car :

$x+1°+2x+4°+55°=180°$

$3x+60°=180°$

$3x=120°$

$x=40°$

Donc $\mathrm{m}\angle A=31°$, $\mathrm{m}\angle B=84°$, $\mathrm{m}\angle C=55°$.

c) Non, ce n'est pas un triangle rectangle, car :

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+x-4°=180°$

$2x-4°=180°$

$2x=184°$

$x=92°$

Donc $\mathrm{m}\angle A=46°$, $\mathrm{m}\angle B=46°$, $\mathrm{m}\angle C=88°$.

R11.5 (page 256)

a) Faux, il vaut seulement pour les triangles rectangles.

b) Vrai.

c) Faux, l'hypoténuse mesure 10 cm.

d) Vrai, car $4\sqrt{2}=\sqrt{32}=\sqrt{9^2-7^2}$.

R11.6 (page 257)

a) $\sin 34°=\dfrac{20}{x}$

$x=\dfrac{20}{\sin 34°}$

$x\approx 35{,}766$ cm

b) $\sin 55°=\dfrac{x}{20}$

$x=20\sin 55°$

$x\approx 16{,}383$ cm

c) $\cos x=\dfrac{4}{5}=0{,}8$

$x=\cos^{-1}0{,}8$

$x\approx 36{,}87°$

R11.7 (page 257)

Dans le triangle MNO :

$\sin 53°=\dfrac{22}{\mathrm{m}\overline{MN}}$

$\mathrm{m}\overline{MN}=\dfrac{2}{\sin 53°}\approx 27{,}5470$ cm

$\tan 53°=\dfrac{22}{\mathrm{m}\overline{OM}}$

$\mathrm{m}\overline{OM}=\dfrac{22}{\tan 53°}\approx 16{,}5782$ cm

ou bien $\mathrm{m}\overline{ON}=\sqrt{27{,}546\,98^2-22^2}\approx 16{,}5781$ cm

Dans le triangle NOP :

$\sin 23°=\dfrac{22}{\mathrm{m}\overline{NP}}$

$\mathrm{m}\overline{NP}=\dfrac{22}{\sin 23°}\approx 56{,}3047$ cm

$\tan 23°=\dfrac{22}{\mathrm{m}\overline{OP}}$

$\mathrm{m}\overline{OP}=\dfrac{22}{\tan 23°}\approx 51{,}8287$ cm

ou bien $\mathrm{m}\overline{OP}=\sqrt{56{,}3047^2-22^2}\approx 51{,}8288$ cm

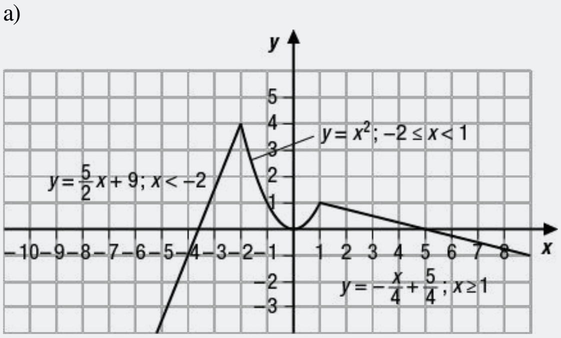
Le périmètre est $27{,}5470+56{,}3047+51{,}8288+16{,}5782$ $\approx 152{,}2586$ cm.

CHAPITRE 12

Je m'entraîne

ACTIVITÉ 12.3 (page 261)

a)



b) Signe : La fonction est positive pour $x \in\,]-3{,}6;\, 0[\, \cup\,]0;\, 5[$, elle est négative pour $x \in\,]-\infty;\, -3{,}6[\, \cup\,]5;\, +\infty[$ et elle prend ses zéros en $x = -3{,}6$, $x = 0$ et $x = 5$.

Variation : La fonction est croissante pour $x \in\,]-\infty;\, -2] \cup [0;\, 1]$ et décroissante pour $x \in [-2;\, 0] \cup [1;\, +\infty[$.

Extremums : La fonction atteint son maximum global en $x = -2$ et elle n'a pas de minimum global.

Zéros : $x = -3{,}6$, $x = 0$ et $x = 5$.

ACTIVITÉ 12.4 (page 261)

a) En 1950, cela correspond à $t = 0$: $N(0) = 4{,}45$ millions

En 1960, cela correspond à $t = 10$: $N(10) = 3{,}95$ millions

En 1970, cela correspond à $t = 20$: $N(20) = 3{,}45$ millions

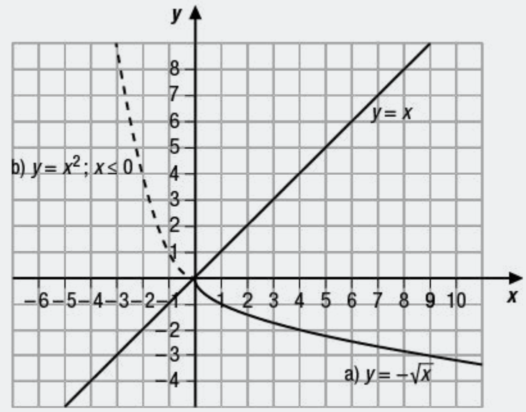
En 1980, cela correspond à $t = 30$: $N(30) = 3{,}70$ millions

b) En 2010, cela correspond à $t = 60$: $N(60) = 0{,}05 \cdot 60 + 1{,}9233 + 4{,}9233$. On estime alors la population de phoques en 2010 à 4,92 millions de bêtes.

ACTIVITÉ 12.8 (page 265)

a)

x	$y = f(x) = -\sqrt{x}$
0	$f(0) = -\sqrt{0} = 0$
1	$f(1) = -\sqrt{1} = -1$
4	$f(4) = -\sqrt{4} = -2$
6	$f(6) = -\sqrt{6}$
9	$f(9) = -\sqrt{9} = -3$
…	…



c) Il faut d'abord isoler x :

$y = -\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = -y$

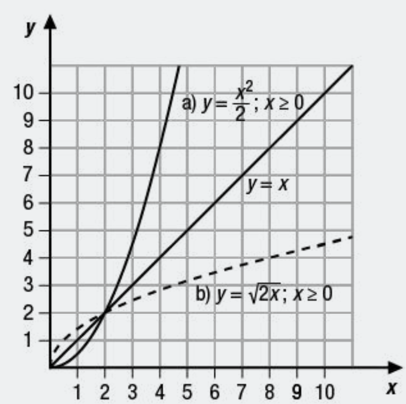
$x = (-y)^2 = y^2$

La fonction réciproque est $y = f^{-1}(x) = x^2$, pour $x \le 0$.

ACTIVITÉ 12.9 (page 266)

a)

x	$y = f(x) = \frac{x^2}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	$\frac{9}{2}$
4	8
…	…



c) $y = \dfrac{x^2}{2}$

$2y = x^2$

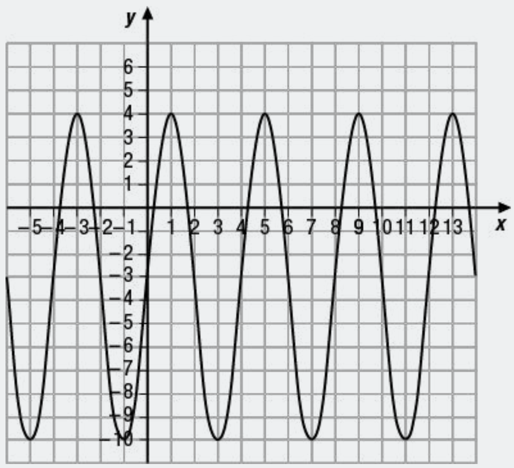
$\sqrt{2y} = \sqrt{x^2}$, $x \geq 0, y \geq 0$

$x = \sqrt{2y}$; $y \geq 0$

La fonction réciproque est $y = f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$, pour $x \geq 0$.

ACTIVITÉ 12.12 (page 269)

a) Il y a plusieurs graphiques-réponses possibles.



b) $f(28) = -3$

ACTIVITÉ 12.13 (page 269)

a) Faux. Puisque $f(3) = 2$ et que $^{2} = \frac{61}{2} = 30{,}5$, la période ne peut pas être 2.

b) Vrai. Puisqu'il y a deux minimums consécutifs en $(3;\ 2)$ et en $(9;\ 2)$, la période est 6.

c) Vrai. Puisque 29 = 5 + 4 × 6, alors $f(29) = f(5 + 4 \times 6)$ $= f(5) = 4$, selon les données du problème.

d) Faux. Puisque 36 = 30 + 6, alors $f(36) = f(30 + 6) =$ $f(30) = 6$, selon les données du problème.

Mes activités de récapitulation

R12.1 (page 270)

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{4}$

b) $i^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{2}, x \geq 0$

c) $h^{-1}(x) = 2x$

d) $g^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{2}$

e) $s^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$, $x \geq 0$

R12.2 (page 270)

a), b) et d)

R12.3 (page 270)

Le niveau de l'eau sera de nouveau à son point le plus haut à 10 h 2.

R12.4 (page 270)

a) $y \in [-1;\ 2]$

b) $x \in \cdots [-5;\ 0] \cup [5;\ 10] \cup [15;\ 20] \cup [25;\ 30] \cup$ $[35;\ 40] \cup [45;\ 50] \cup [55;\ 60] \cup [65;\ 70] \cdots$

c) $x \in \cdots [-10;\ -5] \cup [0;\ 5] \cup [10;\ 15] \cup [20;\ 25] \cup$ $[30;\ 35] \cup [40;\ 45] \cup [50;\ 55] \cup [60;\ 65] \cdots$

d) $x \in \{\ldots, 0, 20, 40, 60, \ldots\}$

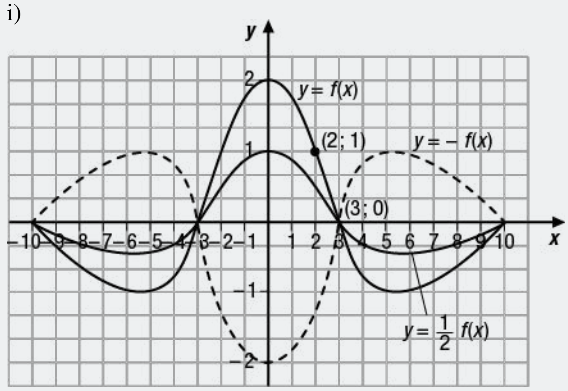
e) $x \in \{\ldots, -5, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, \ldots\}$

f) Le maximum est 2 et est atteint en $x \in \{\ldots, 0, 20, 40, 60, \ldots\}$.

g) Le minimum est –1 et est atteint en $x \in \{\ldots, -5, 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, \ldots\}$.

h) Oui, elle est périodique, la période est 20.

i)



R12.5 (page 271)

$y = f^{-1}(x) = 4x^2$, pour $x \geq 0$

R12.6 (page 271)

Soit m la masse et t le tarif en fonction de la masse. Il s'agit nécessairement d'une fonction définie par parties :

$$t(m) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad 0 \leq m < 30 \\ 8{,}50 & \text{si} \quad 30 \leq m \leq 50 \\ 8{,}50 + 0{,}15(m - 50) & \text{si} \quad 50 < m \leq 500 \end{cases}$$

Index

V

Z

Notes et calculs

Mathématique mise à niveau TS4

Conçu pour la résolution de problèmes en petite équipe ou de façon individuelle, *Mathématique mise à niveau TS4* invite les étudiants à se plonger dans les notions mathématiques et à aborder spontanément, de façon intuitive et autonome, les problèmes qui leur sont proposés sous forme d'activités. Ce manuel vise à accompagner les étudiants dans le cadre du cours Mise à niveau pour mathématique de la 4e secondaire. Ainsi, il les soutient dans la révision et la maîtrise des notions mathématiques de la 4e secondaire grâce à de nombreuses activités qui étayent les notions théoriques parcourues.

Analia Bergé est professeure de didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Rimouski. Elle a enseigné la mathématique pendant cinq ans au Cégep de Rimouski, où elle a régulièrement donné le cours Mise à niveau pour mathématique de la 4e secondaire. Elle compte plus de 25 ans d'expérience en enseignement de la mathématique et plus de 15 ans en recherche et enseignement en didactique des mathématiques.

ISBN 978-2-89650-549-4

9 782896 505494

MODULO

www.groupemodulo.com/TS4