Estimativa de localização baseada em potência de emissores fixos

Bruno Fusieger[1]

[1]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
87.020-900 – Maringá – PR – Brasil

ra112646@uem.br

Resumo. *A estimativa de localização de um ponto no espaço a partir da potência do sinal de emissores fixos é uma técnica barata de localização quando comparada a técnicas como GPS. Neste artigo é apresentado um estudo de caso da técnica com objetivo de discutir suas vantagens e desvantagens.*

1. Introdução

A estimativa de localização é um campo de estudo que possui uma grande e variada aplicabilidade, como por exemplo, sistemas de navegação, rastreamento de movimento, análise de mobilidade urbana, entre outros.

Diferentemente de técnicas como GPS, que se baseiam em localização por satélites, a estimativa de localização aqui trabalhada funciona com um conjunto de emissores de localização conhecida e fixa que emitem um sinal ao longo da área que se deseja mapear.

Os receptores usam a potência do sinal para estimar a distância do emissor e a própria localização. Também é necessário que haja redundância de emissores para que o erro seja minimizado e que o receptor possa ter dados suficientes para estimar sua localização.

2. Materiais e métodos

No modelo adotado, cada um dos emissores está disposto no espaço tridimensional onde suas posições são denotadas por pelas coordenadas (x_k, y_k, z_k), onde cada coordenada representa a distância em metros do emissor *k* até a origem do eixo.

Como cada emissor pode apresentar variações quanto a potência e atenuação do seu sinal, foram medidas as potências de referência e fator de atenuação de cada emissor a fim de normalizar o modelo.

Desta forma os emissores estão dispostos da seguinte forma:

Tabela 1. Sistema de emissores e suas características

Receptor k	Coordenadas			ρ_0^k - potência de referência (dBm)	$\mathcal{L}^k$ - Fator de atenuação
	x	y	z		
1	1.55	17.63	1.35	-26	2.1
2	-4.02	0	1.35	-33.8	1.8
3	-4.4	9.6	1.35	-29.8	1.3
4	9.27	4.64	1.35	-31.2	1.4
5	9.15	12	1.35	-33	1.5

Para estimar a distância do receptor a um emissor k foi adotado um modelo onde a distância, em metros, é dez à potência da diferença entre a potência de referência (ρ_0^k) e a potência medida (ρ^k), sobre dez vezes o fator de atenuação do sinal ($\mathcal{L}^k$) para o emissor k. Esse modelo é descrito pela equação:

$$d_k = 10^{\frac{\rho_0^k - \rho^k}{10\mathcal{L}^k}}$$

Figura 1. Modelo matemático adotado

Em seguida, para interpretar geometricamente as estimativas de distâncias medidas, o espaço foi reduzido a um plano, isso porque todos os emissores encontram-se no mesmo eixo z. Vale ressaltar que essa modelagem é análoga para a estimativa de localização no espaço tridimensional, contanto é necessária variação no eixo z.

Ademais, como o sinal de um emissor viaja no plano de maneira radial, foi interpretado uma possível localização do receptor estará na circunferência do círculo com origem no receptor k e raio d_k.

Desta forma, a distância de um emissor até um receptor pode ser interpretada geometricamente por:

$$(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = d_k^2$$

Figura 2. Interpretação geométrica da distância medida

Onde x, y são as coordenadas do receptor que se deseja estimar, x_k e y_k são as coordenadas do receptor k e d_k a distância estimada pelo modelo anterior. Assim para configuração de emissores apresentados anteriormente, é possível formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = d_1^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = d_2^2 \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 = d_3^2 \\ (x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 = d_4^2 \\ (x-x_5)^2 + (y-y_5)^2 = d_5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 = d_1^2 \\ x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = d_2^2 \\ x^2 - 2x_3x + x_3^2 + y^2 - 2y_3y + y_3^2 = d_3^2 \\ x^2 - 2x_4x + x_4^2 + y^2 - 2y_4y + y_4^2 = d_4^2 \\ x^2 - 2x_5x + x_5^2 + y^2 - 2y_5y + y_5^2 = d_5^2 \end{cases}$$

Figura 2. Sistema derivado da interpretação geométrica das distâncias

Em seguida, foi possível agrupar todos os termos conhecidos do sistema em uma constante *w* definida por:

$$w_k = d_k^2 - \left(x_k^2 + y_k^2\right)$$

Figura 3. Definição do termo *w*

A partir disso, o sistema pode ser reescrito usando *w* e colocando alguns termos em evidência.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x_1x - y_1y) = w_1 \\ x^2 + y^2 - 2(x_2x - y_2y) = w_2 \\ x^2 + y^2 - 2(x_3x - y_3y) = w_3 \\ x^2 + y^2 - 2(x_4x - y_4y) = w_4 \\ x^2 + y^2 - 2(x_5x - y_5y) = w_5 \end{cases}$$

Figura 4. Sistema simplificado usando *w*

Note que este é um sistema redundante não-linear, ou seja, é possível encontrar as incógnitas x e y, mas para isso é necessário linearizar o sistema. Isso foi feito subtraindo a quinta equação do sistema de todas as outras, assim o sistema passará a ter quatro equações lineares.

$$\begin{cases} 2x(x_5 - x_1) + 2y(y_5 - y_1) = w_1 - w_5 \\ 2x(x_5 - x_2) + 2y(y_5 - y_2) = w_2 - w_5 \\ 2x(x_5 - x_3) + 2y(y_5 - y_3) = w_3 - w_5 \\ 2x(x_5 - x_4) + 2y(y_5 - y_4) = w_4 - w_5 \end{cases}$$

Figura 5. Sistema linearizado

Aqui é importante ressaltar que quando esse sistema for preenchido com as medições de potência do sinal do emissor haverá erro nestes dados, isso porque o sinal emitido sobre interferência externa de diversos fatores como paredes, chuva, vento, entre outros. A fim de mitigar os efeitos de interferência são utilizados vários emissores, o que causa a redundância do sistema de equações, isso tem por objetivo minimizar o erro nos dados.

Então para calcular x e y é utilizado o método dos mínimos quadrados, que minimiza o erro pela diferença dos quadrados entre a estimativa e os dados observados, esse método permite que o sistema apresentado seja resolvido com uma solução que melhor atenda as distâncias medidas pelo receptor.

Primeiro, tem-se que o sistema acima pode ser representado pela notação matricial como:

$$A * X = C$$

Onde A é a matriz dos coeficientes das equações do sistema, X a matriz de incógnitas e C a matriz com o resultante. Assim a solução do sistema anterior pode ser calculada por:

$$X = A^{-1} * C$$

Note que só é possível calcular essa equação se o sistema não tiver redundâncias e as equações forem independentes. Isso porque só é possível inverter matrizes quadradas com determinante diferente de zero.

O método dos mínimos quadrados consiste em transformar A em uma matriz quadrada, multiplicando a mesma pela sua transposta. Partindo da notação matricial inicial pode-se desenvolver a equação de forma que seja possível calcular X.

$$\begin{gathered} A \times X = C \\ \Leftrightarrow \\ A^t \times A \times X = A^t \times C \\ \Leftrightarrow \\ \left(A^t \times A\right)^{-1} \times \left(A^t \times A\right) \times X = \left(A^t \times A\right)^{-1} \times A^t \times C \\ \Leftrightarrow \\ X = \left(A^t \times A\right)^{-1} \times A^t \times C \end{gathered}$$

Figura 6. Método dos mínimos quadrados

2.1. Experimentos

A partir do método matemático desenvolvido anteriormente, realizou-se dois experimentos para medir a acurácia do método, no primeiro a posição real do receptor era (x,y,z) = (0.00, 9.00, 1.24), no entanto a coordenada z pode ser descartada uma vez que a configuração de emissores não é capaz de prover dados suficientes para o cálculo desta. Assim os valores medidos foram:

Tabela 2. Medições do experimento 1

Receptor *k*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
ρ^k (dBm)	-48.4	-50.6	-32.2	-47.4	-46.3

Da mesma forma, no segundo experimento a posição real do receptor era (x,y,z) = (3.00, 3.00, 1.24), e foram observados os seguintes valores:

Tabela 3. Medições do experimento 2

Receptor *k*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
ρ^k (dBm)	-46.9	-46.4	-41.2	-45.8	-48.7

3. Resultados

No experimento 1, usando o método matemático descrito tem-se como estimativa as seguintes distâncias:

Tabela 3. Distâncias estimadas no experimento 1

Receptor *k*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Distância (metros)	11.66	8.58	1.53	14.36	7.7

Com isso tem-se o seguinte sistema em notação matricial:

$$\begin{cases} 15.2x \; - 11.26 = & -8.83 \\ 26.34x \; + 24y = & 225.89 \\ 27.1x \; + 4.8y = & 59.25 \\ -0.24x \; + 14.72y = & 267.18 \end{cases}$$

Figura 6. Sistema encontrado pelo experimento 1

Após aplicar o método do mínimos quadrados tem-se como solução $x = 0.990828176$ e $y = 9.712288912$. Com isso, calculando a distância entre o ponto real e o ponto estimado, tem-se que o erro foi de aproximadamente 1.22 metros. No gráfico abaixo tem-se o ponto real representado por *Pr* em verde, e o ponto estimado representado por *Es* em vermelho. Também estão representados as distâncias estimadas até os emissores pelos círculos.

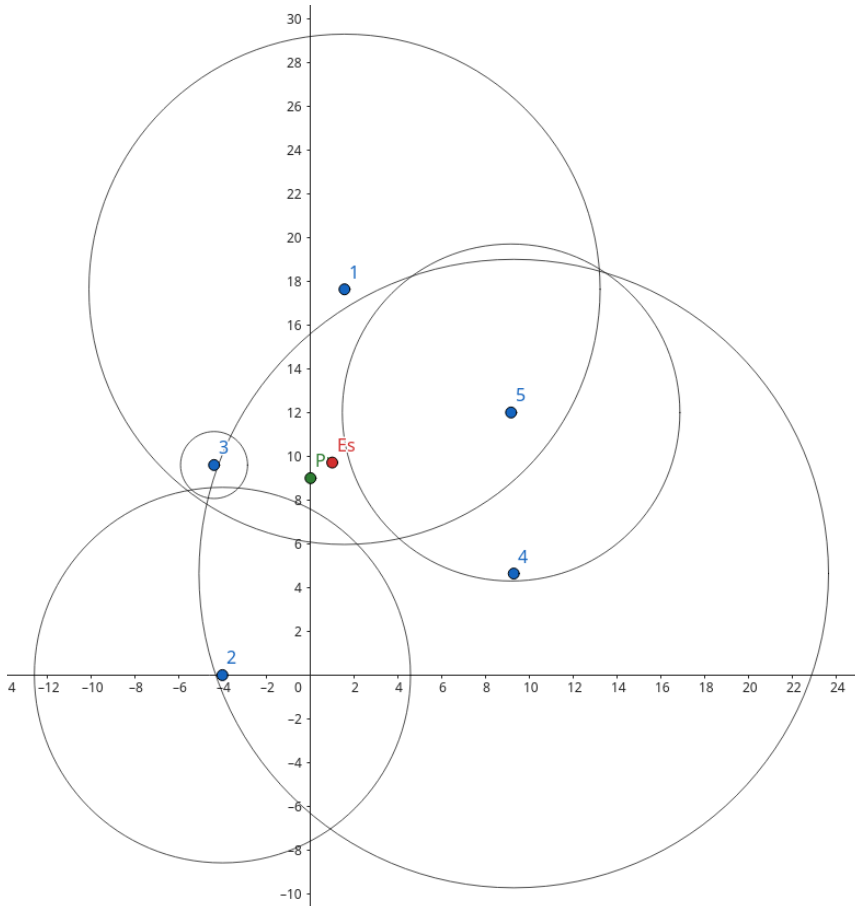

Figura 7. Resultado do experimento 1

Já no experimento 2 tem-se as seguintes distâncias:

Tabela 3. Distâncias estimadas no experimento 2

Receptor *k*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Distância (metros)	9.89	5.01	7.53	11.04	11.13

Com isso tem-se o seguinte sistema em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 15.2 & -11.26 \\ 26.34 & 24 \\ 27.1 & 4.8 \\ -0.24 & 14.72 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -111.56 \\ 112.79 \\ 49.03 \\ 118.27 \end{bmatrix}$$

Figura 8. Sistema encontrado pelo experimento 2

Após aplicar o método do mínimos quadrados tem-se como solução $x = -0.867775224$ e $y = 6.841347136$. Com isso, calculando a distância entre o ponto real e o ponto estimado, tem-se que o erro foi de aproximadamente 5.45 metros.

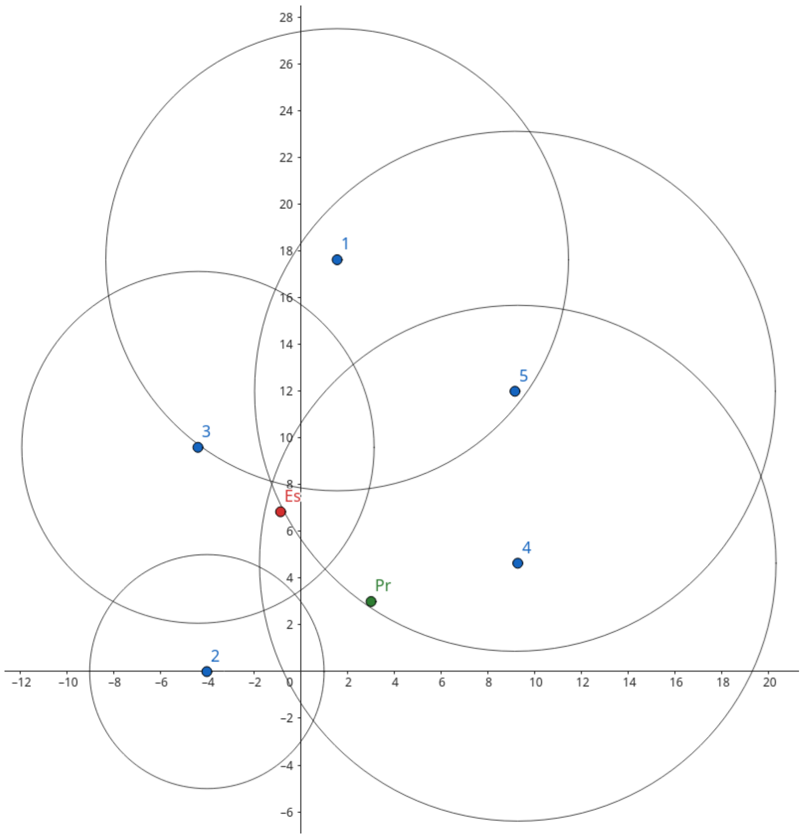

Figura 9. Resultado do experimento 2

4. Discussão

Dentre os erros possíveis nesse tipo de experimento estão o erro no modelo, o erro nos dados e erro de precisão dos cálculos. O erro no modelo pode ser notado por simplificações como o fator de atenuação e a potência de referência, valores que podem variar de acordo com diversos fatores do meio, além da própria modelagem da equação em si.

Já os erros de precisão são erros que podem acontecer em qualquer passo na hora de calcular as estimativas. Por fim, o erro nos dados está presente na variação em si das medições realizadas, isso porque os dados observados podem mudar por fatores ambientais como chuva, vento, umidade do ar, etc. Esse tipo de erro é comum quando se trata de ondas eletromagnéticas, uma vez que essas sofrem muitas interferências.

Note que no experimento, pode-se deduzir que a principal fonte de erro foram os dados, isso porque os experimentos apresentaram acurácias muito discrepantes, sendo o primeiro bem próximo da localização real, enquanto o segundo caso apresentou um erro de mais de cinco metros. Também pode-se inferir que a maior parte dos erros estão nos dados pela natureza física do instrumento de medição.

Referências

Airton Marco, P. Triangulação de sinais.