Comparação da série de Taylor e aproximante de Padé para a função seno

Bruno Fusieger[1]

[1]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Maringá – PR – Brasil

ra112646@uem.br

Resumo. *Este artigo tem por objetivo analisar e comparar, do ponto de vista computacional, o cálculo da função seno pelas aproximações por truncamento da série de Taylor e pelo aproximante de Padé. Foi observado que o aproximante de Padé teve a mesma precisão em casas decimais do que o truncamento da série de Taylor enquanto usava mais multiplicações.*

1. Introdução

A série de Taylor é um método de aproximação de funções em séries de potências que nos permite transformar funções irracionais em polinômios, e por meio do truncamento da série de Taylor pode-se obter uma aproximação razoável da função.

Uma série de Taylor pode ser obtida caso uma função qualquer f possa ser indefinidamente derivada em um ponto a. Caso essa condição seja satisfeita, pode-se dizer que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Há um caso especial quando a série de Taylor está centrada em 0, neste caso a série é chamada de série de Maclaurin e tem forma geral:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Já o aproximante de Padé consiste em aproximar uma função por meio de uma função racional de determinada ordem próximo a um ponto. O aproximante tem o seguinte formato:

$$R_{m,n}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k}$$

2. Método

Primeiro iremos usar a aproximação da função seno por truncamento da série de Taylor em seis elementos, o que nos garante uma precisão de pelo menos dez casas decimais no intervalo de -π/4 até π/4.

$$T_{11}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

Como iremos realizar varias manipulações envolvendo essa equação é conveniente usarmos algumas constantes:

$$k = -\frac{1}{3!}, m = \frac{1}{5!}, n = -\frac{1}{7!}, p = \frac{1}{9!}, q = -\frac{1}{11!}$$

Assim podemos reescrever T_{11} como

$$T_{11}(x) = x - kx^3 + mx^5 - nx^7 + px^9 - qx^{11}$$

A partir dessa soma parcial da série de Taylor iremos calcular o aproximante de Padé usando uma ordem compatível com o grau de Taylor escolhido (11), ou seja, usaremos m=7 e n=4.

$$\frac{P_0 + P_1x^2 + P_2x^3 + P_3x^4 + P_4x^5 + P_5x^6 + P_6x^7}{1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4} = T_{11}$$

Vamos tentar encontrar P_i escrevendo o numerador do aproximante de Padé em função da multiplicação de T_{11} pelo denominador de Padé, isto é:

$$P_0 + P_1x^2 + P_2x^3 + P_3x^4 + P_4x^5 + P_5x^6 + P_6x^7 = T_{11} \cdot (1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4)$$

Realizando essa multiplicação teremos:

$$\begin{aligned} P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + P_5x^5 + P_6x^6 + P_7x^7 = \\ x + kx^3 + mx^5 + x^7n + x^9p + x^{11}q + ax^2 + kax^4 + \\ max^6 + ax^8n + ax^{10}p + ax^{12}q + x^3b + kx^5b + mx^7b + \\ x^9nb + x^{11}bp + x^{13}bq + x^4c + kx^6c + mx^8c + x^{10}nc + \\ x^{12}cp + x^{14}cq + x^5d + kx^7d + mx^9d + x^{11}nd + x^{13}dp + x^{15}dq \end{aligned}$$

Ao agrupar os termos de mesmo grau é possível enxergar um sistema:

$$\begin{aligned} P_0 + P_1x + P_2x^2 + P_3x^3 + P_4x^4 + P_5x^5 + P_6x^6 + P_7x^7 = \\ 1(x) + ax^2 + (k+b)x^3 + (ka+c)x^4 + (m+kb+d)x^5 + (ma+kc)x^6 + \\ (n+mb+kd)x^7 + (an+mc)x^8 + (p+nb+md)x^9 + (ap+nc)x^{10} + \\ (q+bp+nd)x^{11} + (aq+cp)x^{12} + (bq+dp)x^{13} + (cq)x^{14} + (dq)x^{15} \end{aligned}$$

Com isso, podemos igualar as variáveis Pi ao seu termo de respectivo grau e obter um sistema de equações, note que é preciso encontrar apenas *a*,*b*,*c* e *d*. Também sabemos que termos com mais de sete graus são iguais a zero.

$$\begin{aligned} P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = a, P_3 = k + b \\ P_4 = ka + c, P_5 = m + kb + d \\ P_6 = ma + kc, P_7 = n + mb + kd \\ an + mc = 0 \\ p + nb + md = 0 \\ ap + nc = 0 \\ q + bp + nd = 0 \end{aligned}$$

É importante ressaltar que não usaremos as equações de grau 12, 13, 14 e 15 para o nosso sistema já que elas tornam ele incompatível, e como estamos usando a série de Taylor com grau 11 isso não traz prejuízos ao modelo.

As quatro últimas equações formam um sistema linear que nos permite encontrar *a,b,c* e *d*, e assim calcular todas as outras variáveis do sistema, ou seja, P_0 até P_7.

$$\begin{pmatrix} n & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & m & -p \\ p & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & n & -q \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{mq-np}{n^2-mp} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p^2-nq}{n^2-mp} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{825} \\ 0 \\ \frac{19}{118800} \end{pmatrix}$$

Aplicando os coeficientes calculados a forma padrão do aproximante de Padé obtemos a equação final de $R_{7,4}(x)$.

$$R_{7,4}(x) = \frac{x - \frac{241}{1650}x^3 + \frac{601}{118800}x^5 - \frac{121}{2268000}x^7}{1 + \frac{17}{825}x^2 + \frac{19}{118800}x^4}$$

2.1. Comparações

As comparações foram feitas usando as equações $R_{7,4}(x)$ e $T_{11}(x)$ para o intervalo de confiança abaixo. Para o gráfico o intervalo foi dividido em um espaço linear com 50 amostras. As implementações em C para $R_{7,4}(x)$ e $T_{11}(x)$ seguem no anexo I.

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

3. Resultados

Observou-se que o aproximante de Padé se mostrou mais preciso em relação ao truncamento da série de Taylor quando comparado a função de seno da biblioteca padrão do C, apresentando erros absolutos menores e sendo levemente mais precisa para valores mais próximos de zero.

Tabela 1. Erro absoluto da série de Taylor

x	sin(x)	T_{11}(X)	Erro absoluto
π/12	0.25881904510252074	0.2588190451025207	0.0
π/10	0.3090169943749474	0.3090169943749474	0.0
π/8	0.3826834323650898	0.3826834323650889	8.881784197001252e-16
π/6	0.49999999999999994	0.4999999999999643	3.563815909046752e-14
π/4	0.7071067811865475	0.7071067811796194	6.928013718265902e-12

As tabelas 1 e 2 apresentam os valores da função da biblioteca padrão do C, o valor calculado pela série de Taylor e aproximante de Padé e o erro absoluto para valores conhecidos de x.

Tabela 2. Erro absoluto do aproximante de Padé

x	sin(x)	$R_{7,4}(x)$	Erro absoluto
π/12	0.25881904510252074	0.25881904510252074	0.0
π/10	0.3090169943749474	0.3090169943749474	0.0
π/8	0.3826834323650898	0.38268343236508934	4.440892098500626e-16
π/6	0.49999999999999994	0.49999999999998124	1.870725796493389e-14
π/4	0.7071067811865475	0.7071067811829502	3.597122599785507e-12

Como podemos observar na figura 1, o erro absoluto do aproximante de Padé cresce mais lentamente do que o da série de Taylor, no entanto, ambos continuam erro a partir de 12 casas decimais. Sendo assim, em termos de precisão computacional, o aproximante de Padé não oferece uma grande vantagem em relação ao truncamento da série de Taylor equivalente.

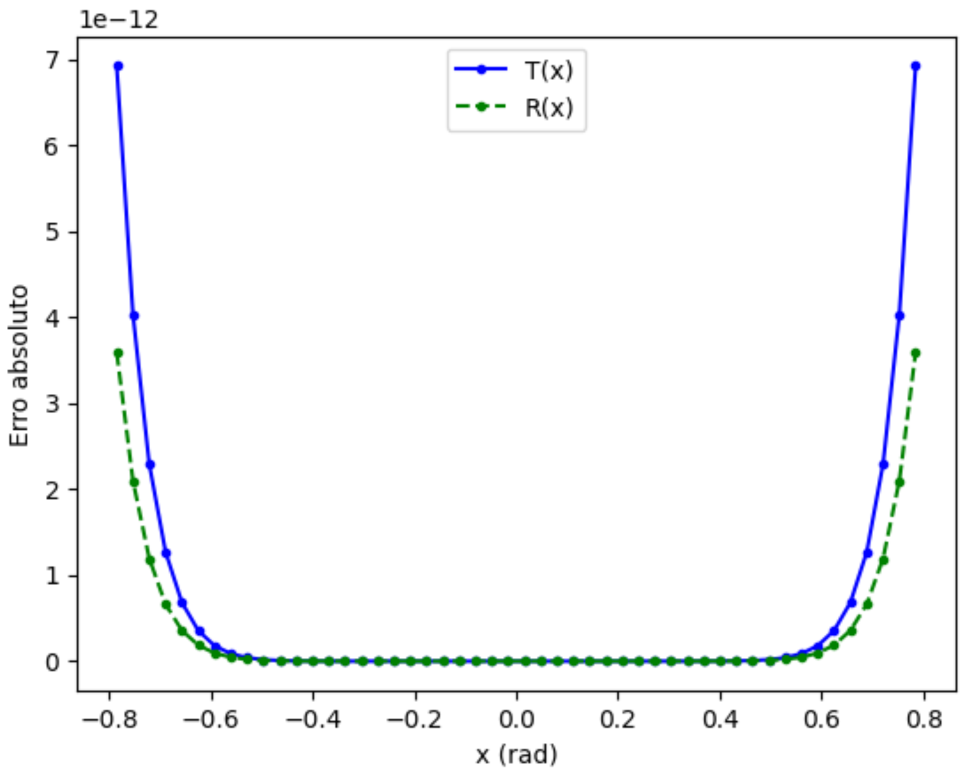

Figura 1. Comparação do erro absoluto da série de Taylor e aproximante de Padé

Quanto ao tempo de execução, o aproximante de Padé tem uma multiplicação a mais do que o truncamento da série de Taylor, são 8 multiplicações contra 7, respectivamente. Logo, o aproximante de Padé não traz vantagem em relação a implementação por série de Taylor, isso porque a precisão em casas decimais, permanece a mesma usando mais operações.

O cálculo do número de multiplicações pode ser feito reescrevendo x^2 como y e colocando x em evidência, seja $y=x^2$ teremos:

$$T_{11}(x) = x(1 + y(k + y(m + y(n + y(p + qy)))))$$

$$R_{7,4}(x) = \frac{x(1 + y(P_1 + y(P_2 + P_3 y)))}{1 + y(b + dy)}$$

Sendo as constantes:

$$k = -\frac{1}{3!}, m = \frac{1}{5!}, n = -\frac{1}{7!}, p = \frac{1}{9!}, q = -\frac{1}{11!}$$

$$P_1 = -\frac{241}{1650}, P_2 = \frac{601}{118800}, P_3 = -\frac{121}{2268000}$$

$$b = \frac{17}{825}, d = \frac{19}{118800}$$

Referências

Stewart, J. (2013). Cálculo, volume 2. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning.

The Matplotlib development team (2023). Matplotlib 3.7.1 documentation. https://matplotlib.org/stable/users/getting_started/index.html, [acessado em 5 de março].

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Escola de Ciências e Tecnologia/ Computação numérica. https://cn.ect.ufrn.br/index.php, [acessado em 6 de março].

Anexo I

Código em C das funções de aproximação de seno por truncamento da série de Taylor e aproximante de Padé.

```c
#include <stdio.h>

double taylor(double x){
    static const double K = -1.0/6.0;
    static const double M = 1.0/120.0;
    static const double N = -1.0/5040.0;
    static const double P = 1.0/362880.0;
    static const double Q = -1.0/39916800.0;

    double y = x*x;

    return x * (1+y*(K+y*(M+y*(N+y*(P+Q*y)))));
}

double pade(double x) {
    static const double P1 = -241.0/1650.0;
    static const double P2 = 601.0/118800.0;
    static const double P3 = -121.0/2268000.0;
    static const double B = 17.0/825.0;
    static const double D = 19.0/118800.0;

    double y = x*x;

    double p = x*(1+y*(P1+y*(P2+y*P3)));
    double q = 1+y*(B+D*y);

    return p/q;
}
```