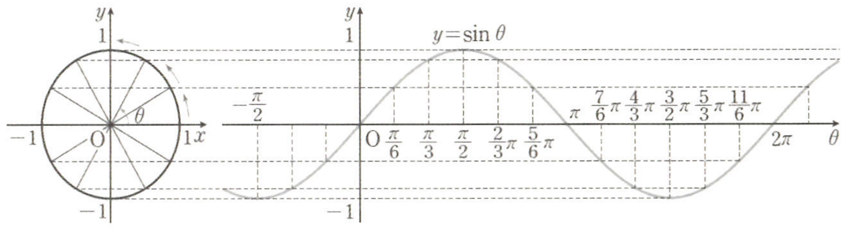
2-1 2. 삼각함수 - 1. 삼각함수

챕터 F 삼각함수의 그래프

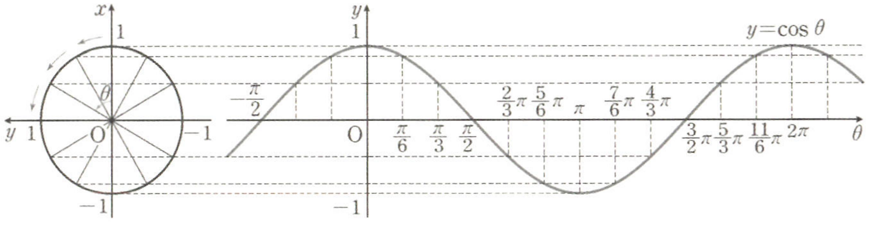
1. 삼각함수의 그래프

1-1. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프

먼저 함수 $y=\sin\theta$ 의 그래프를 스스로 그려보도록 하자. θ 의 값을 0부터 조금씩 키워가면서 특수각 위주로 대입해도 개략적인 그래프를 알 수 있을 것이다. 하지만 사인함수의 정의를 제대로 기억하고 있는 사람은 단위원 위의 점의 y 좌표로 사인함수를 정의했음을 떠올려 원과 비슷한 모양이 될 것이라고 추측할 수 있다. 다음 그림을 보자.



위 그림의 왼쪽에서 단위원을 보면 y 좌표가 곧 좌표평면에 찍히는 과정을 그대로 다 보여준 것이다. 굴곡이 원과는 약간 다르지만 반원과 유사한 모양이 반복되는 것을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로 코사인함수를 그려야 하는데 코사인함수는 단위원 위의 점의 x 좌표이므로 사인함수처럼 그리기는 힘들고, 좌표축을 회전해서 x 좌표가 곧 좌표평면의 y 좌표와 대응될 수 있도록 조작해서 그리면 다음과 같다.



위 그림의 왼쪽 좌표평면에서 x축/y축 위치가 바뀌어 있음을 주의 깊게 보고, 왜 바뀌어 있는지 스스로 이해할 수 있어야 코사인의 정의를 제대로 이해한 것이다.

당연한 것이지만 원을 돌면서 함숫값이 생성되므로 두 함수는 똑같은 함숫값이 반복된다. 이처럼 동일한 값이 반복되는 함수를 주기함수라고 부른다. 여기서 주기의 정의를 정확하게 알아두자.

교과서 개념 **주기함수, 주기의 정의** 교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

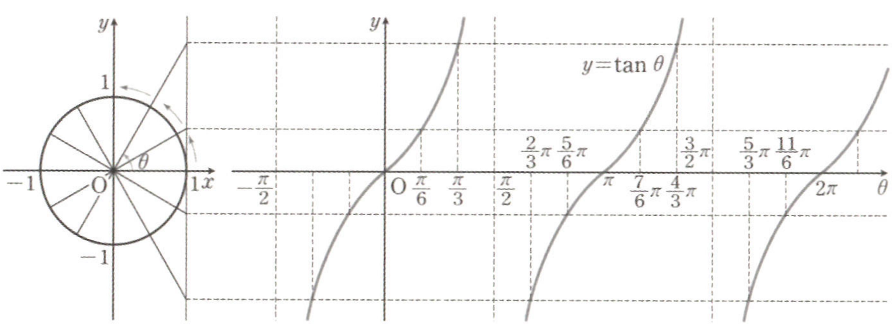
인 0이 아닌 상수 p가 존재하면 함수 $y=f(x)$를 주기함수라 한다. 이러한 상수 p의 값 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.[1)]

이를 생각해 보면 두 함수 $y=\sin\theta$와 $y=\cos\theta$의 주기는 2π임을 쉽게 알 수 있다. 이제 두 함수의 특징을 정리해 보면 다음과 같다.

교과서 개념 **사인함수, 코사인함수의 특징** 교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

① 정의역은 $(-\infty, \infty)$, 치역은 $[-1, 1]$이다.
② 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $f(x+2\pi)=f(x)$를 만족시킨다.
③ $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
④ $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이 외에 중요한 것은 사인함수와 코사인함수는 평행이동해서 겹칠 수 있다는 것이다. 원에서 정의되는 것을 생각해 보면 당연하다는 것을 알 수 있다. 이제 탄젠트 함수에 대하여 알아보자. 탄젠트함수도 마찬가지로 단위원을 이용해서 그리면 된다. 탄젠트는 동경 OP의 기울기가 곧 함숫값이 되는 함수인데, 단위원에서 밑변이 1인 직각삼각형을 만들어 그 삼각형의 높이를 곧 함숫값으로 생각하면 된다.[2)] 그림 이를 그림으로 나타내보면 다음과 같다.



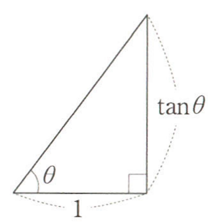
정의가 곧 기울기이기 때문에 동경이 나타내는 각이 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$일 때에는 그 값이 존재하지 않는 것을 알 수 있다. 즉, 정의역에서 $n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)가 제외된다.

1) 주기의 정의를 보면 알겠지만 $f(x+1)=f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$의 주기가 반드시 1이라고 단정 지을 수는 없다.

$f(x)=\sin x$라는 함수는 $f(x+2\pi)=f(x)$를 만족하지만 $f(x+4\pi)=f(x)$도 만족한다.

즉, $f(x+4\pi)=f(x)$를 보고 주기가 4π라고 대답하면 틀린 대답이다. $\sin x$의 주기는 4π가 아니라 2π이다.

2) 그림과 같이 직각삼각형을 생각하면 된다.



또한, 함수 $y = \tan\theta$는 원에 의해 정의되므로 $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$와 마찬가지로 $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$라는 식을 만족시키는 것은 맞다. 물론 이 식을 만족시킨다고 해서 반드시 주기가 2π라는 보장은 없다. 실제로 $y = \tan\theta$의 정의역이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$일 때와 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$일 때 같은 함숫값(=기울기)이 반복되는 것을 알 수 있다. 따라서 $f(\theta) = \tan\theta$는 $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$도 만족하지만 $f(\theta + \pi) = f(\theta)$도 만족하므로 주기의 정의에 따라 π가 주기이다. 탄젠트함수의 특징을 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 **탄젠트함수의 특징** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

① 정의역은 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$인 모든 실수이고, 치역은 $(-\infty, \infty)$이다.

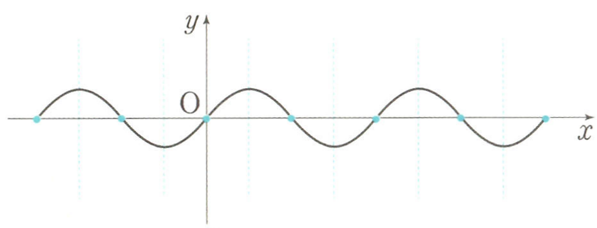
그래프에 점근선이 있고, 그 점근선은 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$이다. (단, n은 정수)

② 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $f(x + \pi) = f(x)$를 만족시킨다.

③ $y = \tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이 외에도 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수는 대칭성을 갖고 있다.

① $y = \sin x$의 그래프



$y=\sin x$

위 그림을 보면 $y = \sin x$는 원점 $(0, 0)$에 대하여 대칭이고, 그 외의 점인

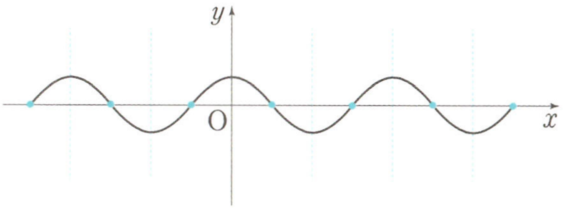
$$\cdots,\ (-2\pi, 0),\ (-\pi, 0),\ (0, 0),\ (\pi, 0),\ (2\pi, 0),\ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다. 마찬가지로 직선 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고, 그 외의 직선인

$$x = \cdots,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다.

② $y = \cos x$ 의 그래프



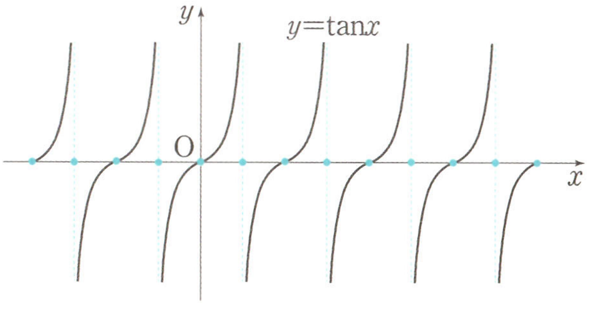
그래프에서 보듯이 $y = \cos x$ 는 다음 점들에 대하여 대칭인 그래프이다.

$$\cdots, \ \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \ \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \ \cdots$$

마찬가지로 $y = \cos x$ 는 다음 직선들에 대하여 대칭인 그래프이다.

$$x = \cdots, \ -2\pi, \ -\pi, \ 0, \ \pi, \ 2\pi, \ \cdots$$

③ $y = \tan x$ 의 그래프



위 그림을 보면 $y = \tan x$ 는 원점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 그 외의 점인

$$\cdots, \ (-\pi, 0), \ \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \ (0, 0), \ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \ (\pi, 0), \ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다.

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 대칭성을 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념
삼각함수의 대칭성

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

임의의 정수 n에 대하여 세 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프는 다음과 같은 대칭성을 갖는다.

함수	점 대칭성	선 대칭성
$y=\sin x$	$(n\pi,\ 0)$	$x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$
$y=\cos x$	$\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi,\ 0\right)$	$x=n\pi$
$y=\tan x$	$\left(\dfrac{n\pi}{2},\ 0\right)$	없음

이제 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 평행이동, 대칭이동한 그래프에 대하여 배워볼 것이다. 일단 평행·대칭이동은 당연히 완벽하게 암기하자.

교과서 개념
평행이동, 대칭이동

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형에 대하여

① x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동: $f(x-a,\ y-b)=0$

② x축에 대하여 대칭이동: $f(x,\ -y)=0$

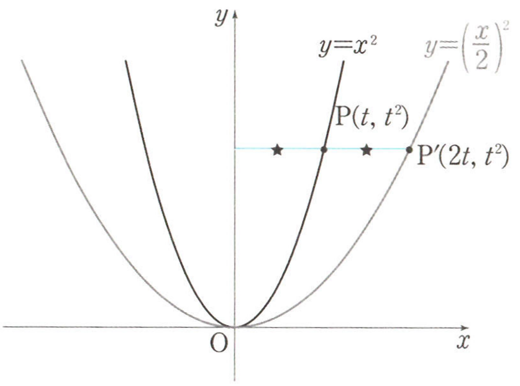
③ y축에 대하여 대칭이동: $f(-x,\ y)=0$

④ 원점에 대하여 대칭이동: $f(-x,\ -y)=0$

⑤ $y=x$에 대하여 대칭이동: $f(y,\ x)=0$

여기서 평행·대칭이동 외에 다른 그래프의 이동을 한 가지만 더 배워보자. 예를 들어, 두 함수 $y=x^2$과 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ 모두 $y=\bigstar^2$의 꼴인 것을 알 수 있고 $\bigstar=1$이면 $y=1$이므로 곡선 $y=x^2$이 $x=1$, $y=1$인 점 $(1,\ 1)$을 지난다는 말은 곧 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$이 $\dfrac{x}{2}=1$, $y=1$인 점 $(2,\ 1)$을 지난다는 말이다. 즉, 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 2배한 점의 집합[1]이라는 것을 알 수 있고, 이를 그래프로 표현해 보면 다음과 같다.

1) [교과서 간접 개념]-함수의 그래프
함수 $f: X\to Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합
$G=\{(x,\ f(x))\mid x\in X\}$
를 함수 f의 그래프라고 정의한다. 그 그래프는 순서쌍 $(x,\ f(x))$를 좌표평면에 점으로 나타내어 그릴 수 있다.



그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위에 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이 있으면 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ 위에는 반드시 점 $\mathrm{P}'(2t,\ t^2)$이 있다. 이 상황만 이해하면 양수 a에 대하여 $y=f(ax)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{a}$배한 그래프라는 것을 알 수 있다. a가 음수면 단순히 x좌표를 $\dfrac{1}{|a|}$배 한 후에 y축에 대하여 그래프를 대칭이동 했다고 생각하면 된다. **이러한 도형의 이동을 '확대, 축소'라고 반드시 기억하자.** 정리하면 다음과 같다.

수능 개념 **그래프의 확대, 축소** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

① 양수 a에 대하여 $y=f(ax)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{a}$배한 그래프이다.

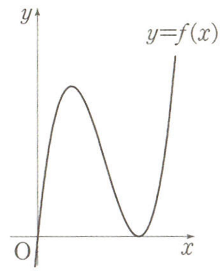
② a가 음수면 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{|a|}$배 한 후에 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 했다고 생각하면 된다.

위는 하나의 [수능 개념]으로 완벽하게 이해하고, 암기하고 있도록 하자. 이해하는 것은 '평행이동, 대칭이동'을 이해하는 과정과 같기 때문에 크게 어렵지 않을 것이다. 이 내용은 앞으로 지속적으로 도움이 되는 내용이므로 정확하게 알아두도록 하자.

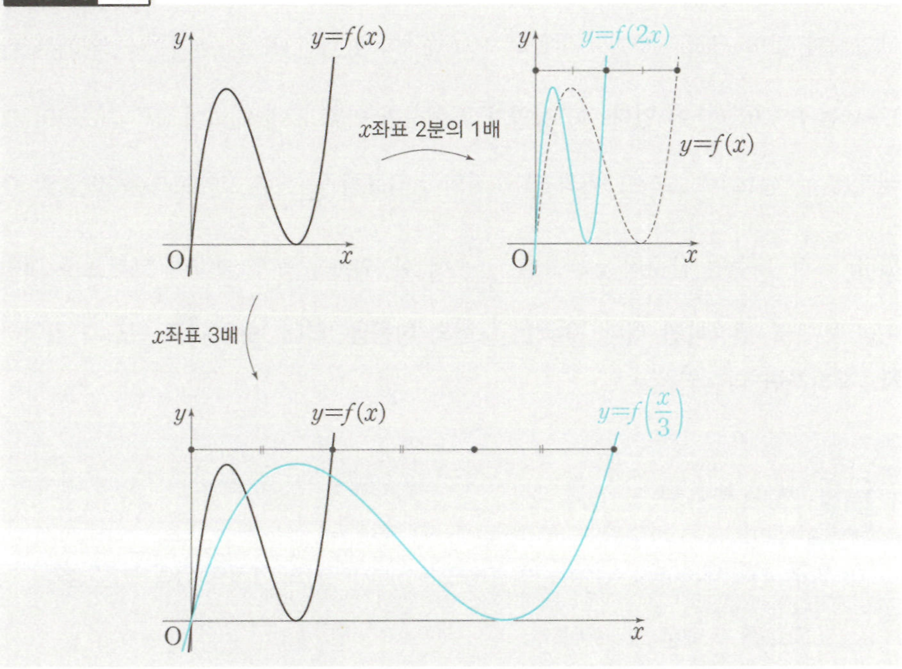
EX 01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 함수

$$y=f(2x),\quad y=f\left(\frac{x}{3}\right)$$

의 그래프의 개형을 그리시오.



교과서적 해법



여기까지 이해한 후에 주기가 2π인 함수 $y=\sin x$에 대하여 함수 $y=\sin 2x$의 주기를 묻는다면 $\frac{2\pi}{2}=\pi$라고 매우 쉽게 대답할 수 있을 것이다. 애초에 x의 자리에 $2x$를 대입하면 함수의 그래프의 모든 점의 x좌표를 $\frac{1}{2}$배한 것이기 때문이다. 마찬가지로 $y=\sin\frac{x}{2}$의 주기는 4π이다.

이제 [교과서 간접 개념]인 '평행이동, 대칭이동'[166p]과 [수능 개념]인 '그래프의 확대, 축소'[167p]를 종합하면 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$과 같은 그래프도 정확하게 파악할 수 있게 된다. $y=\cos x$에서 출발하여 다음 과정을 거치면 된다.

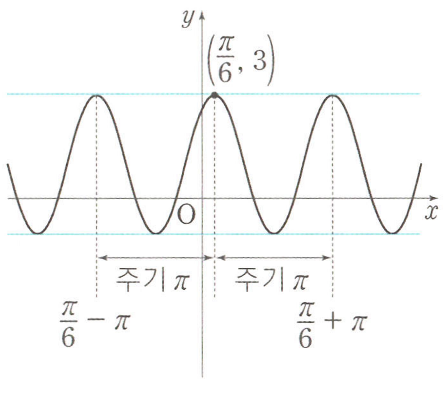
① 모든 함숫값을 2배 → $\cos x$에서 $2\cos x$
② y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동 → $2\cos x+1$
③ x축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동 → $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$
④ x 대신 $2x$를 대입하여 모든 점의 x좌표 $\frac{1}{2}$배 → $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

위 과정을 거치면 사인/코사인이 포함된 함수의 그래프가 어떻게 나오건 정확하게 해석할 수 있을 것이다.[1] 그런데, 사실 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프는 주기, 치역, 특별한 점(최대 혹은 최소가 되는 점, 대칭의 중심이 되는 점 등)만 찾으면 어렵지 않게 그릴 수 있다. 예를 들어 주기는 $2x$를 통해 π인 것을 알 수 있고, 치역은 $[-1, 3]$, 적당히 $2x-\frac{\pi}{3}=0$이 되도록 하는 점인 $x=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$을 지나는 것을 알 수 있다. 정보를 정리하면 다음과 같다.

1) 만약 확대, 축소부터 하게 되면 평행이동해야 하는 값이 달라지는 것을 알 수 있다. 어떤 이동부터 먼저 하든 간에 결과는 같아야 하기 때문이다.

① 주기: π ② 치역: $[-1, 3]$ ③ 특별한 점: $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$

이를 토대로 좌표평면에 두 직선 $y=-1$, $y=3$을 긋고, 한 점을 찍은 후 주기에 맞춰 그래프를 그리면 그림과 같다.



그림처럼 사인・코사인함수는 두 함수 모두 같은 모양의 그래프가 반복될 뿐이므로 주기/치역/특별한 점(최대・최소가 되는 점, 대칭의 중심이 되는 점)만 알면 모두 그래프를 그릴 수 있다는 것을 알아두자. 정리하면 다음과 같다.

수능 개념 **일반적인 삼각함수의 특징** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

$y=a\sin(bx+c)+d$ 와 $y=a\cos(bx+c)+d$ 의 특징 $(a\neq0,\ b\neq0)$

① 주기: $\dfrac{2\pi}{|b|}$ → 그래프의 확대, 축소로 이해해야 한다.

② 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

→ $-1\leq\sin(bx+c)\leq1$ 로부터 유도할 수 있어야 한다.

$y=a\tan(bx+c)+d$ 의 특징 $(a\neq0,\ b\neq0)$

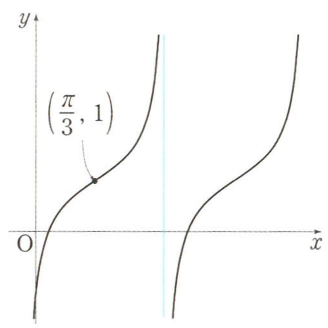
① 주기: $\dfrac{\pi}{|b|}$ ② 최댓값, 최솟값: 존재하지 않는다.

★ 일반적인 삼각함수의 그래프를 그리는 방법

① 대칭이동 + 평행이동 + 확대/축소로 해석하여 그래프를 그린다.

② 주기, 치역, 특별한 점(최대 · 최소가 되는 점, 대칭의 중심인 점)을 찾으면 그래프를 그릴 수 있다.

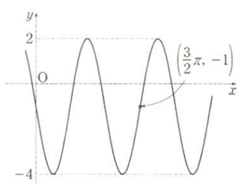
곡선 $y=2\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ 을 그려보자. 주기가 2π 이고, 대칭의 중심이 되는 점 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 1\right)$ 이 기준임을 생각하여 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있다.



$y=\tan x$ 의 점근선 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\dfrac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동하면 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 의 점근선이 $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$ 임을 알 수 있다. 그런데 x 의 자리에 $\dfrac{x}{2}$ 를 대입하면 모든 좌표가 2배가 되므로 점근선도 2배가 된다. 따라서 $y=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 의 점근선은 $x=\dfrac{2\pi}{3}\times2=\dfrac{4\pi}{3}$ 이다. 또한 주기가 2π 이므로 점근선은 $x=2n\pi+\dfrac{4\pi}{3}$ (단, n 은 정수)이다.

$y=3\sin(2x-3\pi)-1$ 의 그래프를 그릴 때에도 점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ -1\right)$ 을 중심으로 잡고, 주기 π, 치역 $[-4,\ 2]$ 로 그래프를 완성하면 된다. 스스로 해 보자.[1)]

1) 스스로 그린 그래프가 아래 그림과 일치하는지 확인하자.



EX 02 다음 함수들의 그래프를 그리고, 주기함수라면 주기를 구하시오.

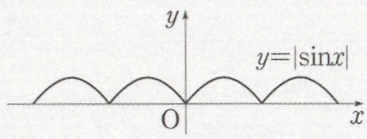
[2003.4·가 15번] [변형]

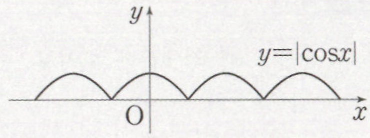
① $y=|\sin x|$ ② $y=|\cos x|$ ③ $y=|\tan x|$

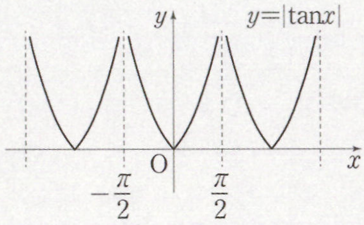
④ $y=\sin|x|$ ⑤ $y=\cos|x|$ ⑥ $y=\sin x+|\sin x|$

교과서적 해법

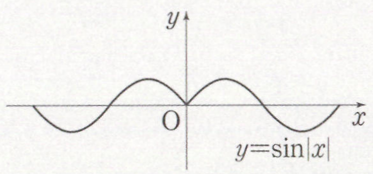
①, ②, ③은 그래프를 그려보면 다음과 같다. 즉, 모두 주기가 π 이다.

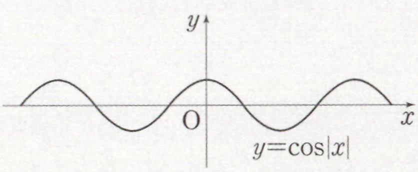




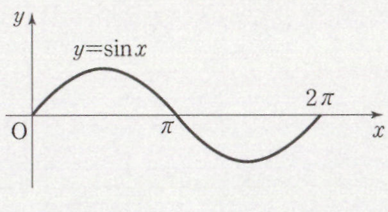


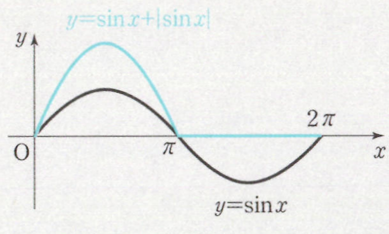
④, ⑤는 $x\geq 0$ 이면 $\sin|x|=\sin x$, $\cos|x|=\cos x$ 이고, $\sin|x|=\sin|-x|$, $\cos|x|=\cos|-x|$ 이므로 y축에 대칭인 함수이다. 즉, $x\geq 0$ 인 구간에서 각각 $\sin x$, $\cos x$ 의 그래프를 그린 후 y축에 대해 대칭이동해서 완성하면 된다. 이를 토대로 ④, ⑤의 그래프를 그리면 다음과 같고, ④는 주기함수가 아니고, ⑤는 $\cos x$ 와 완전히 같은 그래프임을 알 수 있다. 따라서 ⑤의 주기는 2π 이다.





⑥은 $\sin x+|\sin x|=\begin{cases}2\sin x & (\sin x\geq 0)\\ 0 & (\sin x<0)\end{cases}$ 이므로 $\sin x$가 양수일 때는 $2\sin x$를 그리고, $\sin x$가 음수일 때는 0을 그리면 된다. 따라서 $\sin x$가 양수인지 음수인지가 중요하므로 $y=\sin x$의 그래프를 먼저 그려서 부호를 판단하면서 $2\sin x$와 0을 그리면 된다.





왼쪽 그림에서 $\sin x\geq 0$인 구간은 오른쪽 그림처럼 2배해서 $y=2\sin x$를 그리면 되고, $\sin x<0$인 구간은 $y=0$을 그리면 된다. 또한 주기는 2π이므로 그래프를 반복해서 그리면 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프를 완성할 수 있다.

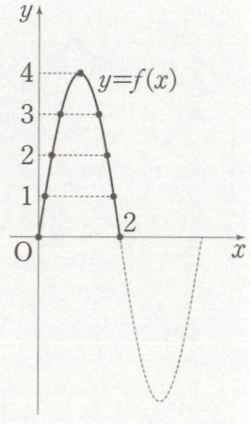
절댓값 그래프를 잘 모르겠다면 지수로그함수로 돌아가서 복습하자.

EX 03 [2018.4·가 24번]

좌표평면에서 곡선 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $(0 \leq x \leq 2)$ 위의 점 중 y좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오. [3점]

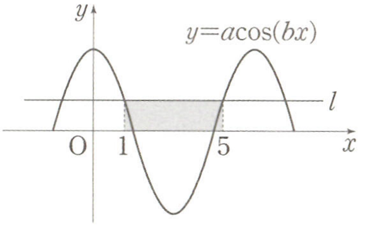
교과서적 해법

$y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 최댓값은 4이고, 주기가 $2\pi \div \frac{\pi}{2}=4$이다. 이를 토대로 함수 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다. 따라서 y좌표가 정수인 점의 개수는 9임을 알 수 있다.



EX 04 [2008.6·고2 자연] [26번]

그림과 같이 $y=a\cos(bx)$의 그래프의 일부분과 x축에 평행한 직선 l이 만나는 점의 x좌표가 1, 5이다. 직선 l과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 20일 때, a의 값을 구하시오. (단, $b>0$) [4점]



교과서적 해법

도형의 넓이가 20이므로 색칠된 직사각형의 높이는 5이다. 즉, $a\cos b=5$이다. $\frac{1+5}{2}=3$이고, 그림에서 3이 곧 주기의 절반임을 알 수 있다. 주어진 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로

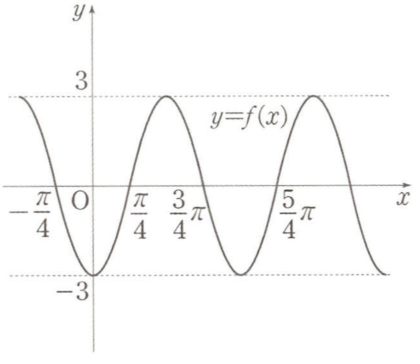
$$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{b}=3 \Leftrightarrow b=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ a\cos b=5 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{3}=5 \Leftrightarrow a=10$$

이 문제에서 $\frac{1+5}{2}=3$ 을 활용해서 주기를 찾는 과정은 사인함수, 코사인함수가 선대칭을 갖고 있기 때문에 가능한 것이다.

EX 05 그림은 함수 $f(x)=a\sin\left\{b\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ 의 그래프이다.

[2006.3·고2 25번]



a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

교과서적 해법

그래프에서 $2\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$ 가 주기임을 알 수 있다. 함수 $f(x)$ 에서 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$ 이므로 $|b|=2$ 이다. 그래프에서 최댓값이 3 이므로 $|a|=3$ 임을 바로 알 수 있다.

$\therefore\ a^2+b^2\ =\ |a|^2+|b|^2\ =\ 13$

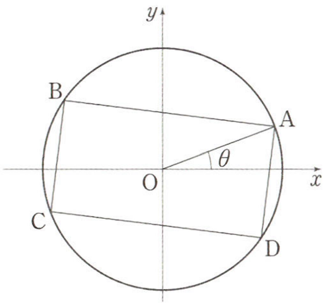
저자의 특강 TIP **삼각함수의 두 가지 접근법**

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.
② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.

하지만 나올 때마다 증명하면 시간 내에 모든 문제를 풀 수 없다. 모두 암기하도록 하자. 교과서에 없는 [수능 개념]이지만 반드시 암기해야하는 필수 개념이라고 생각하면 되고, 단위원(삼각함수의 정의)이나 삼각함수의 그래프로부터 모두 유도할 수 있다는 원리는 당연히 파악하고 있어야 한다. **암기가 중요한 개념은 '종종' 있지만 원리는 '항상' 중요하다.** 이제 몇 가지 기출문제를 풀면서 연습해 보자.

EX 05
[2001·인문 5번]

그림과 같이 직사각형 ABCD가 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접해 있다. x축과 선분 OA가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos(\pi-\theta)$와 같은 것은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [3점]



① A의 x좌표 ② B의 y좌표 ③ C의 x좌표
④ C의 y좌표 ⑤ D의 x좌표

교과서적 해법

$\cos(\pi-\theta)=\cos\left(\frac{2}{2}\pi-\theta\right)$에서 분자 2는 짝수이므로 cos함수 그대로 두면 된다. $\pi-\theta$는 θ를 예각이라 가정하면 제2사분면의 각이므로 $\cos(\pi-\theta)$의 부호는 음수이다. 따라서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이다. 그림에서 보면 $\cos\theta$는 점 A의 x좌표이므로 $-\cos\theta$는 점 A의 원점 대칭점인 점 C의 x좌표이다.

∴ 정답은 ③

EX 06 임의의 각 θ 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

[2004·예체능]
[10번 변형]

보기

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\pi+\theta)$

ㄴ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\pi+\theta)$

ㄷ. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}$

교과서적 해법

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{1\pi}{2}+\theta\right)$에서 1이 홀수이므로 cos으로 바꿔야하고 제2사분면의 각이므로 sin은 양수이다. 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이다.

$\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{2}{2}\pi+\theta\right)$에서 2가 짝수이므로 cos 함수 그대로이고 제3사분면의 각이므로 cos은 음수이다. 따라서 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ (거짓)

ㄴ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ (참)

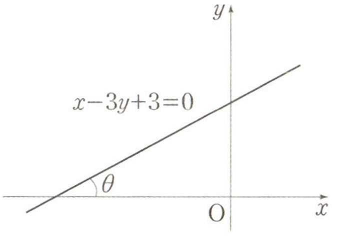
ㄷ. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ (거짓)

EX 07 직선 $x-3y+3=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

[2006.3·고2 5번]

$$\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$$

의 값은? [3점]



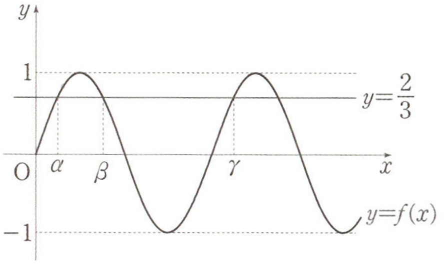
교과서적 해법

$x-3y+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{3}+1$이므로 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이다. 그런데 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ이므로 $\tan\theta=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore \cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta) = -\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta = -\frac{1}{3}$

EX 08 [2011.3·고2 17번]

함수 $f(x)=\sin\pi x\ (x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]



교과서적 해법

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 직접 구하기보단, 항상 대칭성을 고려해야 한다. 함수 $f(x)$의 주기는 2이므로 대칭성을 생각해서 $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right) &= f(\alpha+4)+f\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \sin\pi(\alpha+4)+\sin\frac{3}{2}\pi\\ &= \sin(\pi\alpha)-1\\ &= f(\alpha)-1\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

삼각함수의 그래프는 선대칭, 점대칭을 모두 갖고 있으므로 EX08과 같이 x좌표의 합을 구할 때 대칭축을 이용하면 좋다. 이를 하나의 [수능 개념]으로 정리하면 다음과 같다.

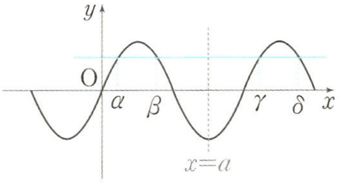
수능 개념 **대칭적인 숫자의 합** 교과서 개념 수능 개념 교과서 심화 개념

$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9$의 총합을 구하라고 할 때, 숫자가 5에 대하여 대칭적으로 존재하므로 6개의 숫자의 평균이 5임을 즉시 알 수 있다. 어떤 숫자들의 총합은 항상

(평균)×(항의 개수)

이므로 위 숫자의 총합은 $5\times6=30$이다. 이는 특히 삼각함수에서 대칭성이 있는 경우가 많아서 실근의 총합을 구할 때 다음과 같이 활용할 수 있다.

(평균)×(항의 개수) = (대칭축)×(실근의 개수)



예를 들어, 위의 그림에서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=$(대칭축)×(실근의 개수)$=4a$이다.
물론 실제 출제되는 문항은 주로 직접 실근을 찾을 수 있도록 값을 주기 때문에 직접 구해서 더해도 된다.

2. 삼각함수의 방정식과 부등식

EX 01 부등식 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ $(0 \leq x < 2\pi)$의 해를 구하시오.

일단 문제부터 같이 풀면서 생각하자. 반복해서 설명하지만 삼각함수 문제의 대표적인 접근법은 아래와 같다. 삼각함수를 학습할 때에는 항상 2가지 방법 모두 해보고 시험 칠 때에는 문제에 따라 유리하다고 판단되는 방법을 취하자.

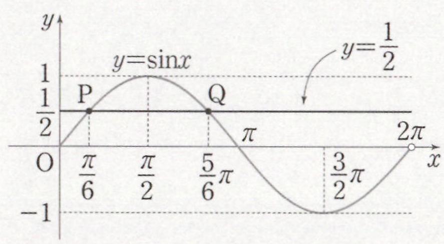
저자의 특강 TIP 삼각함수의 두 가지 접근법

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.

② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.

교과서적 해법1

삼각함수의 정의로부터 삼각함수의 그래프를 배웠기 때문에 좀 더 나중에 배운 그래프를 활용해서 풀어보자.



위 그래프에서 $\sin x = \frac{1}{2}$을 만족하는 점 중 가장 간단한 값인 $x = \frac{\pi}{6}$는 특수각의 삼각비를 통해 찾을 수 있을 것이다. 나머지 점인 Q의 x좌표는 대칭성을 활용하여 찾을 수 있다.[1] 그래프를 보면 점 P와 점 Q는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 점 Q의 x좌표는 $\pi - \frac{\pi}{6}$이다. 따라서 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 두 실근은 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이고 부등식 $\sin x \geq \frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$이다.

1) 사인함수는 원점에 대해서도 대칭이지만 $(n\pi,\ 0)$(n은 정수)인 모든 점에 대하여 대칭이기도 하고

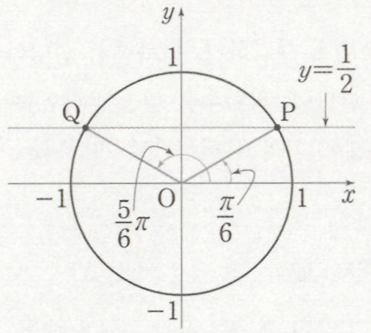
$$x = n\pi + \frac{\pi}{2}\ (n\text{은 정수})$$

인 모든 직선에 대하여 대칭이기도 하다.

언제든 삼각함수의 정의로 돌아가서 단위원으로 문제를 해결할 수 있어야 한다.

교과서적 해법2

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ 이란 말은 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점의 y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 같은 동경의 각을 찾으라는 것이므로 그림과 같이 그려서 접근할 수 있다.



그림에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 동경의 각을 구해 보면 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ 임을 알 수 있고, 따라서 부등식을 만족하는 구간은 짧은 호 PQ 이므로 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.

대부분의 교과서에서 2가지 방법으로 해설하고 있기 때문에 반드시 2가지 풀이 모두 이해하고 활용할 수 있도록 하자. 다음 문제로 더 연습해 보자.

EX 02

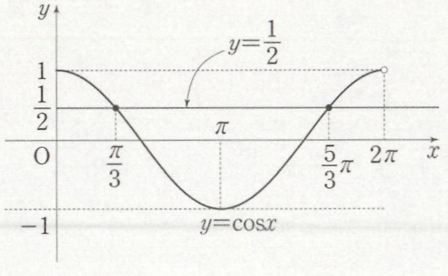
① 방정식 $2\cos x = 1\ (0 \leq x < 2\pi)$ 의 해를 구하시오.

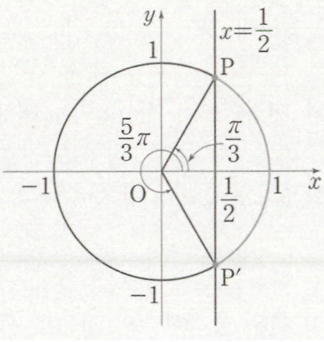
② 부등식 $\tan x \geq \sqrt{3}\ (0 \leq x < 2\pi)$ 의 해를 구하시오.

교과서적 해법

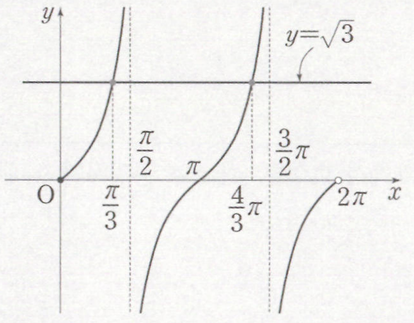
① 이 문제의 풀이는 다음 두 그림을 참고해서 스스로 풀이를 마무리하자.©

정답은 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ 이다.





②



그래프를 보면 부등식 $\tan x \geq \sqrt{3}$ 의 해는 $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 이다. 이처럼 탄젠트가 포함된 부등식에서는 점근선을 고려해줘야 한다. 단위원을 이용한다면 단위원 위의 점과 원점을 이은 직선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 보다 크거나 같은 구간을 찾아야 하므로 직선 $y=\sqrt{3}x$를 그려서 풀면 된다.

문제를 풀면서 알 수 있었지만 단위원에서 문제를 풀 때에는 $\sin x$ 의 경우 $y=\frac{1}{2}$ 이라는 x 축과 평행한 직선이, $\cos x$ 의 경우 $x=\frac{1}{2}$ 이라는 y 축에 평행한 직선이, $\tan x$ 의 경우 $y=\sqrt{3}x$ 라는 원점을 지나는 직선이 필요했다. 이를 정리해 보면 다음과 같다.

저자의 특강 **TIP** **삼각함수의 두 가지 접근법**

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.

② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y 좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.
따라서 코사인함수는 단위원과 $x=a$ 의 교점을 찾아야 하고, 사인함수는 단위원과 $y=a$ 의 교점을 찾아야 한다. 탄젠트함수는 기울기이므로 단위원과 $y=mx$ 의 교점을 찾아서 문제를 풀면 된다.

이처럼 단순히 삼각함수의 그래프를 통한 풀이가 아닌 정의로 돌아가서 단위원에서 푸는 방법도 정확하게 이해하도록 하자. 이제 몇 가지 기출문제를 스스로 풀어보고 해설을 보도록 하자.

EX 03 $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$, $\cos x < 0$ $(0 \le x < 2\pi)$일 때, x의 값은? [2점]

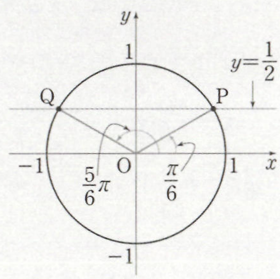
[2000·자연 3번] [변형]

교과서적 해법

$4\cos^2 x + 4\sin x = 5$에서 함수를 $\sin x$로 통일하기 위해 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 대입해서 정리하면

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0 \iff (2\sin x - 1)^2 = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$$

이를 단위원에 나타내보면 그림과 같다. 그런데 $\cos x < 0$이므로 x는 제 2, 3사분면의 각이어야 하고, $x = \frac{\pi}{6}$, $\pi - \frac{\pi}{6}$ 중 적합한 것은 $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$이다.



$\therefore\ x = \frac{5}{6}\pi$

EX 04 부등식 $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - a + 9 \ge 0$이 모든 θ에 대하여 성립하는 실수 a의 값의 범위는? [3점]

[2000·인문 19번] [변형]

교과서적 해법

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - a + 9 \ge 0 \ \rightarrow\ \cos^2\theta - 3\cos\theta - a + 9 \ge 0$$

$$\left(\because\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta\right)$$

$\cos\theta = C$로 치환하면 $-1 \le C \le 1$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 이차함수 $f(C) = C^2 - 3C - a + 9$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면 되는 것을 알 수 있다.

$$C^2 - 3C + \frac{9}{4} - a + \frac{27}{4} = \left(C - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{27}{4}$$

이차함수의 그래프를 생각해 보면 대칭축인 $C = \frac{3}{2}$에 가까운 값일수록 최소가 되므로 $C = 1$일 때 최솟값을 갖는다. 대입하면

$$f(1) = 1^2 - 3(1) - a + 9 = -a + 7 \ge 0 \ \rightarrow\ a \le 7$$