함수의 극한과 부정형의 계산

[주제 1] 극한값은 근처에서의 함숫값이다

1. $x \to a$일 때 함수의 극한

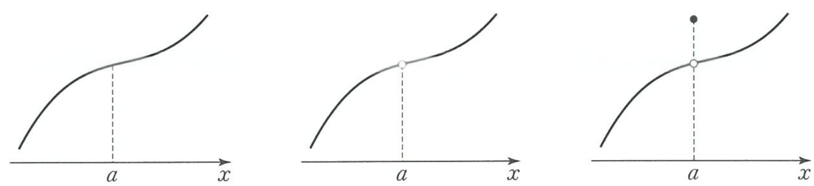
함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 α로 같으면 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하고 그 극한값은 α이다. 또 그 역도 성립한다.

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=\alpha \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$

한편 $x=a$에서의 좌극한 또는 우극한이 존재하지 않거나 좌극한과 우극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 다르면 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

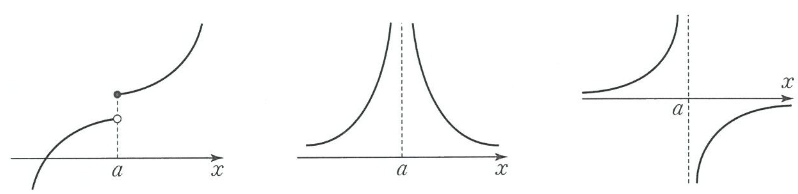
REMARK 1 극한값의 존재의 그래프의 의미

함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 1]과 같으면 $x \to a$일 때 $f(x)$의 극한값이 존재하고, $x=a$의 좌우에서 $y=f(x)$의 그래프가 어긋나지 않았음을 의미한다.



[그림 1]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 [그림 2]와 같으면 $x \to a$일 때 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않고, $x=a$의 좌우에서 $y=f(x)$의 그래프가 어긋나거나 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산한다.



[그림 2]

REMARK 2 함수의 극한 판단의 기본 태도

$x \to a$일 때 함수의 극한은 주어진 그래프 또는 식을 이용하여 다음의 방법으로 다룬다.

① 연속이면 극한값을 함숫값으로 구한다.

② 불연속이 의심되면 좌극한과 우극한의 일치 여부를 확인한다.

➡ 불연속이라고 해서 극한값이 존재하지 않는다고 단정하지 않도록 주의하자.

③ 부정형이 아닌 극한의 판단은 따로 익혀 두고, $\frac{0}{0}$꼴, $\frac{\infty}{\infty}$꼴, $\infty-\infty$꼴, $0\times\infty$꼴의 부정형의 극한은 정해진 계산법에 따른다.

[예1] ① $\lim_{x\to1}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2\times1-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

➡ 유리함수 $y=\frac{2x-1}{x+1}$은 $x\neq-1$인 모든 실수의 집합에서 연속이므로 -1을 제외한 모든 실수에서의 극한값은 함숫값과 같다.

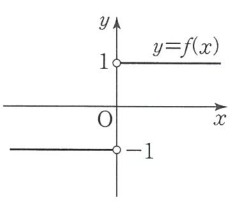
② $\lim_{x\to0}\sqrt{2x+9}=\sqrt{2\times0+9}=3$

➡ 무리함수 $y=\sqrt{2x+9}$는 $x\geq-\frac{9}{2}$인 모든 실수의 집합에서 연속이므로 $-\frac{9}{2}$보다 큰 모든 실수에서의 극한값은 함숫값과 같다.

③ $\lim_{x\to-1}(x^2+2x-3)=(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$

➡ 다항함수 $y=x^2+2x-3$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 모든 실수에서의 극한값은 함숫값과 같다.

[예2] ① 함수 $f(x)=\frac{x}{|x|}$는 $x=0$에서 불연속이고 다음과 같이 극한값이 존재하지 않는다.



$x<0$이면 $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1$, $x>0$이면 $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$, $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}1=1$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)\neq\lim_{x\to0+}f(x)$

② 함수 $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$은 $x=0$에서 불연속이고 다음과 같이 극한값이 존재한다.

$x<0$이면 $\frac{x^2}{|x|}=\frac{x^2}{-x}=-x$, $x>0$이면 $\frac{x^2}{|x|}=\frac{x^2}{x}=x$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x)=0$, $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x=0$

$\therefore \lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$

REMARK 3 극한값 vs 함숫값

$x \to a$일 때 함수의 극한에서는 x의 값이 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지기만 한다는 감각을 익히고 $x \to a$일 때의 극한값을 $x=a$에서의 함숫값과 구별하는 것이 매우 중요하다.

극한값은 '근처에서의 함숫값', 함숫값은 '그 지점에서의 함숫값'으로 구별하는 감각을 익히도록 하자.

일반적으로 극한값의 존재 여부는 함숫값의 존재 여부와 아무런 관계가 없고, 또한 극한값과 함숫값이 모두 존재할 때 극한값과 함숫값은 서로 같을 수도 있고 서로 다를 수도 있다.

REMARK 4 좌극한과 우극한의 기하적 관찰

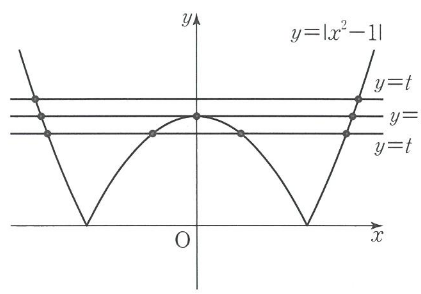
극한값은 근처에서의 함숫값이므로 k에서의 좌극한과 우극한의 관찰은 k일 때를 기준으로 k보다 값이 조금 작을 때와 값이 조금 클 때로 나누어 k 근처의 적당한 상태를 관찰하는 것으로 충분하다.

예를 들어 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하면 $\lim_{t\to k-} g(t)$, $\lim_{t\to k+} g(t)$는 직선 $y=k$를 경계로 조금 아래쪽의 직선 $y=t$, 조금 위쪽의 직선 $y=t$를 적당히 그려서 교점의 개수를 관찰하면 되고,

직선 $y=tx$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면 $\lim_{t\to k-} h(t)$, $\lim_{t\to k+} h(t)$는 직선 $y=kx$를 경계로 기울기가 조금 작은 직선 $y=tx$, 기울기가 조금 큰 직선 $y=tx$를 적당히 그려서 교점의 개수를 관찰하면 된다.

[예3] 2012학년도 6월 평가원

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은? [4점]



직선 $y=1$과의 교점의 개수는

$f(1)=3$

직선 $y=1$을 경계로

조금 아래쪽의 직선 $y=t$를 그려서 교점의 개수를 관찰하면

$\lim_{t\to 1-} f(t)=4$

조금 위쪽의 직선 $y=t$를 그려서 교점의 개수를 관찰하면

$\lim_{t\to 1+} f(t)=2$

[예4] 원 $x^2+(y-2)^2=1$과 직선 $y=tx$의 교점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\sqrt{3}-} f(t)$, $\lim_{t\to\sqrt{3}+} f(t)$의 값을 구해보자.

직선 $y=\sqrt{3}x$와의 교점의 개수는

$f(\sqrt{3})=1$

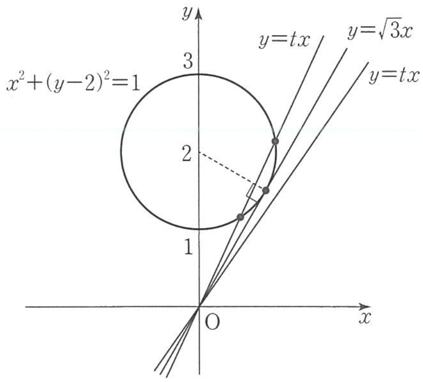
직선 $y=\sqrt{3}x$를 경계로

기울기가 조금 작은 직선 $y=tx$를 그려서 교점의 개수를 관찰하면

$\lim_{t\to\sqrt{3}-} f(t)=0$

기울기가 조금 큰 직선 $y=tx$를 그려서 교점의 개수를 관찰하면

$\lim_{t\to\sqrt{3}+} f(t)=2$



[예5] 2011학년도 6월 평가원

x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x\le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$이고 $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다.

$\lim_{x\to 8+} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 8-} g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

$x\to 8+$일 때, x보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $f(x)=4$

$x>8$, $2f(x)=8$ $\quad\therefore\ x>2f(x)$

$\therefore\ \alpha=\lim_{x\to 8+} g(x)=\lim_{x\to 8+} f(x)=4$

$x\to 8-$일 때, x보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $f(x)=4$

$x<8$, $2f(x)=8$ $\quad\therefore\ x<2f(x)$

$\therefore\ \beta=\lim_{x\to 8-} g(x)=\lim_{x\to 8-} \dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta}=16$

2. $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \alpha$ 또는 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \alpha$

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 β에 수렴한다고 하며, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$ 또는 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to \beta$

한편 함수 $f(x)$에서 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

REMARK 1 $x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때 함수 $f(x)$의 극한은 다음의 방법으로 판단한다.

① 잘 알려진 함수의 그래프의 오른쪽 끝, 왼쪽 끝의 관찰

② $f(x)$의 식의 극한의 계산 ➡ 부정형인 경우에는 계산법에 따르고 부정형이 아닌 경우에는 곧바로 판단한다.

극한에서 부정형인

$\frac{0}{0}$꼴, $\frac{\infty}{\infty}$꼴, $\infty - \infty$꼴, $0 \times \infty$꼴

의 극한은 정해진 계산법에 따라야 하지만 다음과 같이 곧바로 판단할 수 있는 부정형이 아닌 극한도 반드시 알아두어야 한다.

상수 k에 대하여

$\frac{0}{k}$꼴 $\to 0$ $(k \neq 0)$,

$\frac{k}{0+}$꼴 $\to \infty$ $(k > 0)$, $\frac{k}{0-}$꼴 $\to -\infty$ $(k > 0)$, $\frac{k}{0+}$꼴 $\to -\infty$ $(k < 0)$, $\frac{k}{0-}$꼴 $\to +\infty$ $(k < 0)$,

$\frac{\infty}{k}$꼴 $\to \infty$ $(k > 0)$, $\frac{\infty}{k}$꼴 $\to -\infty$ $(k < 0)$, $\frac{k}{\infty}$꼴 $\to 0$,

$\infty + k$꼴 $\to \infty$, $\infty + \infty$꼴 $\to \infty$,

$k \times \infty$꼴 $\to \infty$ $(k > 0)$, $k \times \infty$꼴 $\to -\infty$ $(k < 0)$

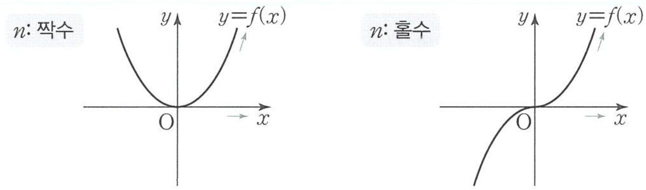
특히 $\frac{k}{0}$꼴, $\frac{k}{\infty}$꼴은 극한 판단의 매우 중요한 기초이다.

REMARK 2 $x \to \infty$일 때 다항함수의 극한

함수 $f(x)=kx^n\ (k>0)$의 그래프는 그림과 같으므로

$$\lim_{x\to\infty} kx^n=\infty$$

이다. $k<0$일 때는 부호가 반대이다.



다항함수의 $x\to\infty$일 때의 극한은 최고차항의 극한

REMARK 3 $x \to \infty$일 때 유리함수의 극한

유리함수 $f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$에 대하여 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\dfrac{c}{a}+$인지 $f(x)\to\dfrac{c}{a}-$인지 판단해야 할 때가 있다. 이때 다음의 방법을 이용한다.

[방법 1] $y=f(x)$의 그래프를 그려서 점근선 $y=\dfrac{c}{a}$에

위로부터 가까워지면 $f(x)\to\dfrac{c}{a}+$, 아래로부터 가까워지면 $f(x)\to\dfrac{c}{a}-$

[방법 2] $f(x)=\dfrac{c}{a}+\dfrac{k}{ax+b}$와 같이 $f(x)$의 식을 $(\text{상수})+\dfrac{(\text{상수})}{(\text{일차식})}$꼴로 변형하고

$\dfrac{k}{ax+b}\to0+$이면 $f(x)\to\dfrac{c}{a}+$, $\dfrac{k}{ax+b}\to0-$이면 $f(x)\to\dfrac{c}{a}-$

이때 분자 $cx+d$를 분모 $ax+b$로 나눈 몫이 $\dfrac{c}{a}$, 나머지가 k이고, 분자에 분모가 0이 되도록 하는 값인 $x=-\dfrac{b}{a}$를 대입하면 나머지 k를 간편하게 구할 수 있다. (나머지정리)

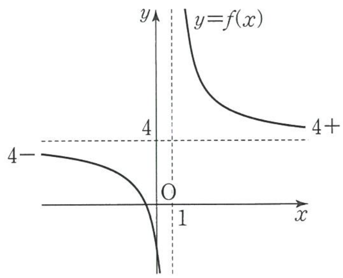
$$cx+d=\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a} \Rightarrow k=d-\frac{bc}{a}$$

[예] 함수 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-1}$에 대하여 $4x+3$을 $x-1$로 나눈 몫은 4, 나머지는 $4\times1+3=7$이므로

$f(x)=4+\dfrac{7}{x-1}$

이다. $x\to\infty$일 때 $\dfrac{7}{x-1}\to 0+$, $x\to-\infty$일 때 $\dfrac{7}{x-1}\to 0-$이므로

$x\to\infty$일 때 $f(x)\to 4+$, $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to 4-$



[주제 2] 합성함수의 극한과 연속은 대응 관계로 파악한다

합성함수 $g(f(x))$의 극한은 $y=g(f(x))$의 그래프를 그리지 않고 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 각각 이용하여 다음처럼 대응 관계를 그려서 파악하도록 한다.
이때 첫 대응의 결과인 $f(x)$의 값이 어떤 값보다 작은 값이면서 이 값에 한없이 가까워지는지, 어떤 값보다 큰 값이면서 이 값에 한없이 가까워지는지, 어떤 값으로 일정한지 구분해야 $g(x)$에 의한 최종 대응 결과로 $g(f(x))$의 극한을 바르게 구할 수 있다.

$a- \xrightarrow{f}$ $b\pm$ (근처의 값) / b (상수) $\xrightarrow{g}$ α (좌극한)

$a+ \xrightarrow{f}$ $c\pm$ (근처의 값) / c (상수) $\xrightarrow{g}$ β (우극한)

⇒ $\alpha=\beta$이면 극한값 존재

여기에 합성함수의 함숫값까지 마저 구해서 $\alpha=\beta=g(f(a))$이면 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속이고, α, β, $g(f(a))$ 중 어느 하나라도 다른 값이거나 존재하지 않으면 $g(f(x))$는 $x=a$에서 불연속이다.

$$a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{g} g(f(a))\ (\text{함숫값})$$

REMARK 합성함수 $g(f(x))$의 극한에서 속함수 $f(x)$의 그래프를 그리기 쉬울 때는 첫 대응의 상태를 그래프를 이용하여 관찰하는 것이 좋다.
특히 첫 대응의 결과인 $f(x)$의 값에서 겉함수 $g(x)$가 연속이거나 겉함수 $g(x)$가 다항함수 등의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수라면 첫 대응의 결과인 속함수 $f(x)$의 값이 작은 값 또는 큰 값이면서 가까워지는 것인지 상수인지 구분할 필요가 없다.

[주의] $f\left(\frac{1}{x}\right)$의 극한

$f\left(\frac{1}{x}\right)$은 $\frac{1}{x}=t$에서 $f(t)$로 다루고, t의 값의 변화에 따른다.

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로 $\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$은 $\lim_{t\to 0+} f(t)$,

즉 $t=0$에서의 $f(t)$의 우극한이다.

$\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to 0-$이므로 $\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$은 $\lim_{t\to 0-} f(t)$,

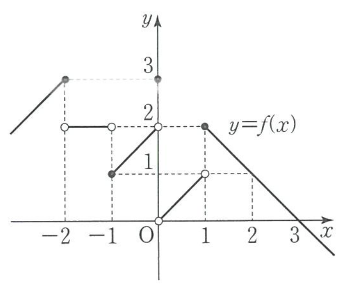
즉 $t=0$에서의 $f(t)$의 좌극한이다.

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$을 $f(0)$이라고 단정하지 않도록 주의하자.

참고로 $f\left(\frac{1}{x}\right)$은 두 함수 $y=\frac{1}{x}$, $y=f(x)$의 합성함수이므로 겉함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)$이다.

[예] 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때 다음 극한값을 구해보자.



① $\lim_{x\to 1+} f(f(x))$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$이고, 겉함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 첫 대응의 결과인 $f(x)$의 작은 값 또는 큰 값이면서 가까워지는 것인지 상수인지 구분할 필요 없이

$\lim_{x\to 1+} f(f(x))=f(2)=1$

② $\lim_{x \to 1-} f(2-x)$

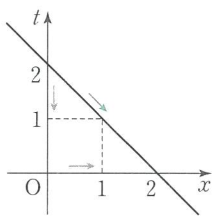
$t=2-x$라 하면 $x \to 1-$일 때 $t \to 1+$이므로 ([그림 1])

$\lim_{x \to 1-} f(2-x) = \lim_{t \to 1+} f(t) = 2$

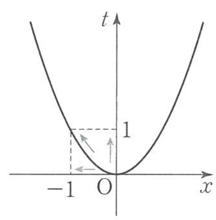
③ $\lim_{x \to -1+} f(x^2)$

$t=x^2$이라 하면 $x \to -1+$일 때 $t \to 1-$이므로 ([그림 2])

$\lim_{x \to -1+} f(x^2) = \lim_{t \to 1-} f(t) = 1$



[그림 1]



[그림 2]

④ $\lim_{x \to \infty} f\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{t \to 0+} f(t) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{3}{x-1}\right) = \lim_{t \to 0-} f(t) = 2$

⑤ $\lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{-2x-3}{x+1}\right)$

$-2x-3$을 $x+1$로 나눈 몫은 -2, 나머지는 $-2\times(-1)-3=-1$이므로

$\frac{-2x-3}{x+1} = -2 - \frac{1}{x+1}$이다.

$t = -2 - \frac{1}{x+1}$이라 하면 $x \to -\infty$일 때 $t \to -2+$이므로

$\lim_{x \to -\infty} f\left(\frac{-2x-3}{x+1}\right) = \lim_{t \to -2+} f(t) = 2$

[주제 3] 부정형의 계산

$\dfrac{0}{0}$꼴, $0\times\infty$꼴, $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴, $\infty-\infty$꼴

등과 같이 정해진 계산법에 따르지 않으면 극한을 판단할 수 없는 형태를 극한의 부정형(不定形)이라고 한다.
함수의 극한은 부정형인지 아닌지, 부정형이라면 어떤 꼴인지부터 파악하고 다루는 습관을 들여야 한다.

- 함수의 극한
  - 부정형
    - ① $\dfrac{0}{0}$꼴
    - ② $0\times\infty$꼴 ➡ $\dfrac{0}{0}$꼴
    - ③ $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴
    - ④ $\infty-\infty$꼴 ➡ $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴
    - ➡ 계산법에 따른다.
  - 부정형 아님
    - 함숫값으로 구한다.
    - 그래프를 이용한다.
    - 직관적으로 판단한다.

부정형은 정해진 계산법과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다룬다. 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 일일이 그래프를 그리지 않고 수렴하는 함수들의 합, 차, 곱, 몫으로 고쳐서 각 함수의 극한값의 합, 차, 곱, 몫으로 극한값을 계산할 수 있다.

1. 함수의 극한에 대한 성질과 함수의 극한의 대소 관계

함수의 극한에 대한 성질은 다음과 같다.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

① $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

② $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

③ $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

④ $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

⑤ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

함수의 극한의 대소 관계(샌드위치 정리)는 다음과 같다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x에 대하여

① $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.
   $f(x)<g(x)$이면 $\alpha\le\beta$이다.

② $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이다.
   $f(x)<h(x)<g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$이다.

REMARK 1 함수의 극한에 대한 성질과 함수의 극한의 대소 관계는 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 성립한다.

REMARK 2 함수의 극한에 대한 성질은 수렴하는 함수에 대해서만 적용하고, 분모의 극한값이 0이 아니어야 한다.

예를 들어 $\lim_{x\to 2+}\frac{3x}{x-2}$는 $x\to 2+$일 때 $\frac{3x}{x-2}$의 값이 $\frac{6}{0+}$꼴로 양의 무한대로 발산한다고 판단하는 것이지 $\frac{\lim_{x\to 2+} 3x}{\lim_{x\to 2+}(x-2)}$로 나타내고 계산하지는 않는다.

REMARK 3 **(수렴)±($\boxed{}$)=(수렴)**

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$일 때, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\beta$이면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)-f(x)\}=\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to a} f(x)=\beta-\alpha$이다. 즉

(수렴)±($\boxed{}$)=(수렴)이면 $\boxed{}$도 수렴

한다.

참고로 수렴하지 않는 모든 경우를 발산이라 하면 (수렴)±(발산)=(발산)이다. $x\to a$일 때, 수렴하는 $f(x)$와 발산하는 $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$가 수렴한다고 하면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 $\{f(x)+g(x)\}-f(x)$, 즉 $g(x)$가 수렴한다. 이는 $g(x)$가 발산한다는 가정에 모순이므로 $f(x)+g(x)$는 발산한다.

2. $x \to a$일 때 함수의 극한값의 계산

1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수 또는 무리함수이고 $\lim_{x \to a} f(x)=0$, $\lim_{x \to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$는

① $f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이면 $x-a$를 모두 약분한다.

② $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리함수이면 무리함수를 유리화하여 $x-a$를 모두 약분한다.

③ ①, ②의 결과에서 분모가 $x-a$를 인수로 갖지 않으면 극한값을 가지며 $x=a$를 대입하여 계산하고,
분모가 $x-a$를 인수로 가지면 절댓값이 양의 무한대로 발산한다.

[예1] ① $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$

➡ $x \neq 1$이므로 $x-1$을 약분해도 같은 함수이다.

② $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} (x-1)(\sqrt{x+3}+2) = 0 \times 4 = 0$

REMARK 1 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$은 대단히 중요한 조건이다.
$f(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다는 조건(인수정리)이므로 주로 인수분해를 이용하고 약분 처리를 하게 된다.

또한 $\frac{0}{0}$ 꼴은 분모와 분자를 인수분해한 후 분모와 분자에 극한값이 0인 일차식이 몇 개 곱해졌는가에 따라 달라지는 부정형이고 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값의 계산법은 다음과 같이 정리할 수 있다.

① 약분한 후 분모에 극한값이 0인 일차식이 없으면 극한값이 존재하고, 극한값은 함숫값과 같다.

② 약분한 후 분모에 극한값이 0인 일차식이 있으면 절댓값이 양의 무한대로 발산한다.

극한값이 0인 일차식이 곱해진 개수를 편의상 '0의 개수'라고 하면 $\frac{0}{0}$ 꼴은

(분모의 0의 개수) < (분자의 0의 개수)이면 극한값은 0
(분모의 0의 개수) = (분자의 0의 개수)이면 극한값은 0이 아닌 실수
(분모의 0의 개수) > (분자의 0의 개수)이면 절댓값이 양의 무한대로 발산

으로 구분하는 안목도 필요하다.

참고로 $\sqrt{(\text{일차식})}$의 극한값이 0인 경우는 0의 개수가 $\frac{1}{2}$인 것으로 생각하면 된다.

예를 들어 $\lim_{x \to 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = 0$, $\lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \infty$이다.

2) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a}=q$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a}=q \iff f(a)=p,\ f'(a)=q$$

[증명] $x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a}=q$일 때, $f(x)-p$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x \to a} \{f(x)-p\}=0$에서

$$f(a)-p=0 \qquad \therefore f(a)=p$$

따라서 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=q$이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=q$이다.

REMARK 2 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a}=q$는 함숫값과 미분계수에 대한 조건으로 매우 자주 등장하므로 잘 기억하고 활용할 수 있어야 한다. 다음과 같은 변형 형태도 확인해 두자.

① $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}=q \iff f(a)=0,\ f'(a)=q$

② $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-p}{x}=q \iff f(0)=p,\ f'(0)=q$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=q \iff f(0)=0,\ f'(0)=q$

REMARK 3 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-p}{x-a}=q$는 함수의 극한으로 다룰 것인지 미분계수로 다룰 것인지 선택할 수 있어야 한다.

$f(x)$가 다항함수일 때, 다음의 둘 중 유리한 것을 이용한다.

① $f(x)-p=(x-a)g(x),\ g(a)=q$

② $f(a)=p,\ f'(a)=q$

②에서

$$f(x)=k(x-a)^n+\cdots+q(x-a)+p$$

와 같이 식을 작성해 볼 수 있다.

REMARK 4 함수의 치환

$\lim_{x \to a} \frac{\boxed{}}{x-a}$에서 $\lim_{x \to a} \boxed{}=0$일 때, $\boxed{}$의 식을 인수분해하거나 변화율로 변형하기 복잡하다면

$\boxed{}=f(x)$로 놓고

$$\lim_{x \to a} \frac{\boxed{}}{x-a}=\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$$

로 계산할 수 있다.

[예 2] $\lim_{x \to 1} \frac{x^{19}+x-2}{x^2-1}$에서 $f(x)=x^{19}+x-2$라 하면 $f'(x)=19x^{18}+1$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{19}+x-2}{x^2-1}=\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}=f'(1) \times \frac{1}{2}=10$$

[참고] $0 \times \infty$꼴

다음의 예와 같이 $0 \times \infty$꼴은 그 극한이 상황에 따라 달라지는 부정형이고, $\frac{0}{0}$꼴의 극한으로 변형하여 다루면 된다.

$$\lim_{x \to 0} \left(x \times \frac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}=\lim_{x \to 0} 1=1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 \times \frac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}=\lim_{x \to 0} x=0$$

$$\lim_{x \to 0-} \left(x \times \frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x \to 0-} \frac{x}{x^2}=\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x}=-\infty$$

$$0 \times \infty\text{꼴}=0 \times \frac{1}{0}\text{꼴}=\frac{0}{0}\text{꼴}$$

REMARK 5 극한값이 0인 조건

극한값이 0인 조건은 특히 중요하므로 꼭 기억해 둬야 한다. 다음 두 가지도 함께 체크해 두자.

① 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)^n}{f(x)}=0$일 때 $f(x)$는 $(x-a)^{n-1}$까지만 인수로 가질 수 있다.

[증명] 다항함수 $g(x)$에 대하여 $g(a) \neq 0$일 때 $f(x)=(x-a)^n g(x)$이면

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{f(x)}=\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{(x-a)^n g(x)}=\frac{1}{g(a)} \neq 0$$

이므로 모순이다.

② 분모의 극한값에 관계없이 극한값이 0이라면 분자는 반드시 $x-a$를 인수로 갖게 된다.

즉 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$일 때

$f(x)=(x-a)(\cdots\cdots)$

[증명] $\lim\limits_{x \to a} g(x)=0$일 때 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$이므로 $f(a)=0$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$일 때 $\dfrac{f(a)}{g(a)}=0$이므로 $f(a)=0$

3. 부정형의 수렴 조건: $\dfrac{(\ \ )}{0}, \dfrac{0}{(\ \ )}, (\ \ ) \times \infty, 0 \times (\ \ )$

부정형에 관한 다음의 성질을 이용하여 함수의 결정 등 극한에 관한 문제를 해결할 수 있다.

① $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$

② $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ (\alpha \neq 0)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x \to a} g(x)=0$

③ $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x \to a} |g(x)|=\infty$이면 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$

④ $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\ (\alpha \neq 0)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x \to a} |g(x)|=\infty$

REMARK 1 앞의 성질은 부정형에 대한 이해를 바탕으로 다음과 같이 기억하는 것이 좋다.

① $\dfrac{(\ \ )}{0}$에서 ( )의 극한이 0이어야 수렴할 수 있다.

만약 ( )의 극한이 0이 아니면 $\dfrac{2}{0+} \to \infty$, $\dfrac{\infty}{0-} \to -\infty$ 등과 같이 발산하게 된다.

② $\dfrac{0}{(\ \ )}$에서 ( )의 극한이 0이어야 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있다.

만약 ( )의 극한이 0이 아니면 $\dfrac{0}{-2} \to 0$, $\dfrac{0}{\infty} \to 0$ 등과 같이 0으로 수렴하게 된다.

③ $(\ \ )\times\infty$에서 ( )의 극한이 0이어야 수렴할 수 있다.
만약 ( )의 극한이 0이 아니면 $(-2)\times\infty \to -\infty$, $\infty\times\infty \to \infty$ 등과 같이 발산하게 된다.

④ $0\times(\ \ )$에서 ( )의 절댓값이 양의 무한대로 발산해야 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있다.
만약 ( )의 절댓값이 양의 무한대로 발산하지 않으면 $0\times(-2) \to 0$과 같이 0으로 수렴하게 된다.

REMARK 2 $\dfrac{0}{(\ \ )} \to \alpha$에서 $\alpha\neq0$인 조건이 필요한 것은 다음과 같이 이해해 볼 수 있다.

$\dfrac{0}{(\ \ )} \to 0$이면 $(\ \ ) \to 2$, $(\ \ ) \to \infty$ 등이 모두 가능하므로 $(\ \ ) \to 0$이라고 단정할 수 없게 된다.

$0\times(\ \ ) \to \alpha$에서 $\alpha\neq0$인 조건이 필요한 것도 마찬가지이다.

$0\times(\ \ ) \to 0$이면 $(\ \ ) \to 2$, $(\ \ ) \to 0$ 등이 모두 가능하므로 $(\ \ ) \to \infty$라고 단정할 수 없게 된다.

4. $x \to \infty$일 때 함수의 극한값의 계산

1) $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}|g(x)|=\infty$일 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는

[방법 1] 분모 $g(x)$의 최고차항으로 분모와 분자를 동시에 나누어서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^n}=0$ (c는 상수)인 것과 함수의 극한에 대한 성질 등을 적용한다.

[방법 2] 분자 $f(x)$와 분모 $g(x)$ 각각에서 최고차항만을 남긴 후 약분한다.

REMARK 1 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 앞의 [방법 1]과 같이 다루는 것이 원리이지만, 이 현상을 종합하여 앞의 [방법 2]와 같이 다루는 것이 보다 효율적이다.

[예1] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-3x+1}$에서 분모와 분자를 모두 분모의 최고차항인 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x^2}}{1+\dfrac{-3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2+0+0}{1+0+0}=2$$

이고, 이는 분모의 최고차항인 x^2과 분자의 최고차항인 $2x^2$만 남기고 약분한

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}2=2$$

로 계산한 것과 같다.

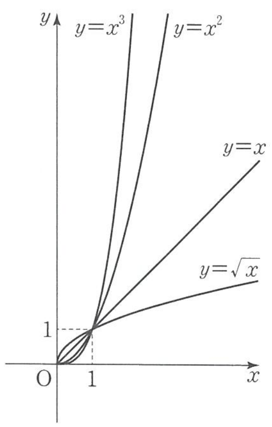
REMARK 2 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한은 다음과 같이 정리할 수 있다.

① (분모의 차수)$=$(분자의 차수)일 때 $\dfrac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})}$로 수렴한다.

② (분모의 차수)$>$(분자의 차수)일 때 0으로 수렴한다.

③ (분모의 차수)$<$(분자의 차수)일 때 절댓값이 양의 무한대로 발산한다.

REMARK 3 $x\geq 0$일 때 $y=x^3$, $y=x^2$, $y=x$, $y=\sqrt{x}$의 그래프는 그림과 같고 $x>1$일 때 $x^3>x^2>x>\sqrt{x}$이다.



이 그래프에서 $x\to\infty$일 때 $m>n$이면 x^m에 비해 x^n은 무시할 수 있는 정도로 작은 값이 된다. $x\to\infty$일 때 x^n에 비해 상수 c도 무시할 수 있는 정도로 작은 값이 되므로 $m>n$일 때 $\lim\limits_{x\to\infty}(ax^m+bx^n+c)$ $(a\neq 0)$는 $\lim\limits_{x\to\infty}ax^m$으로 고쳐도 상관없다고 생각하면 편리하다.

$\sqrt{x}$의 차수를 $\dfrac{1}{2}$, c의 차수를 0으로 본다면 차수가 가장 큰 항만, 즉 절댓값이 양의 무한대로 가장 빠르게 커지는 항만 남긴다는 것이다.

예를 들어 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-100\sqrt{x}}{x^3+100x^2+1000}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$이다.

[예1]도 이러한 관점으로 다시 생각해보자.

2) $\infty-\infty$꼴

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이며 최고차항이 서로 같을 때,

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})$는 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$로 변형하여 $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴의 극한으로 다룬다.

$$\infty-\infty\text{꼴} \xrightarrow{\text{변형}} \frac{\infty}{\infty}\text{꼴}$$

이때 다음의 예와 같이 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})$는 수렴하는 경우가 있고 극한값은 0이 될 수도 있다.

$f(x)$와 $g(x)$의 차수가 서로 다르거나 차수는 같지만 최고차항이 서로 다르면 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)})$는 수렴하지 않는다.

[예2] ① $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$

② $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$

[주의] $\infty-\infty$꼴의 극한값의 계산법의 제한 조건을 다시 한번 확실히 해두자.

$\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$ 꼴에서 제곱근호 안의 함수가 $x\to\infty$일 때 양의 무한대로 발산하는 다항함수이고, 두 다항함수의 최고차항이 서로 같을 때만 적용하는 것이다. 여기서 최고차항이 같다는 것은 차수와 계수가 모두 같은 것을 말한다.

[예3] ① $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$ ➡ $\infty-\infty$꼴이 아니다.

② $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=1$ ➡ 분자의 최고차항의 차수가 서로 다르다.

③ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\sqrt{9x^2+1}-x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{9x^2}-x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x}=1$ ➡ 분모의 최고차항의 계수가 서로 다르다.

01 2017학년도 수능
부정형의 판단

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

Comment

낯선 극한의 식은 우선 부정형인지 아닌지, 부정형이면 어떤 '꼴'인지부터 파악해야 한다. $f(a) \neq 0$이면 부정형이 아니고 극한값이 1이어서 모순이므로 $f(a)=0$임을 알 수 있고, $f(x)$의 식을 인수로 나타내서 마무리할 수 있다. 또는 극한의 식의 분모와 분자를 $x-a$로 나누어 미분계수를 이용할 수도 있다. 함수의 극한으로 출제되는 문제들 중 상당수가 변화율의 극한인 미분계수로 다룰 수 있다!!!

02

$f\left(\frac{1}{x}\right)$의 처리

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a,\quad \lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

Comment

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{x}\right)$이 등장하면 $\frac{1}{x}=t$로 치환해서 다항함수 $f(t)$로 다룬다. 이때 $x\to\infty$이면 $t\to 0+$, $x\to 0+$이면 $t\to\infty$, $x\to 0-$이면 $t\to -\infty$이다. 극한의 식의 형태가 단순할 때는 이러한 치환 과정을 생략하고 $x\to\infty$이면 $\frac{1}{x}\to 0+$, $x\to 0+$이면 $\frac{1}{x}\to\infty$, $x\to 0-$이면 $\frac{1}{x}\to -\infty$로 곧바로 전환해서 다룰 수 있도록 하자.

03 2015학년도 6월 평가원
극한값이 0인 조건

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$
(나) $\lim_{x \to n} \dfrac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

Comment

극한값이 0인 상황은 확실히 정리해 두고 신속하게 이용할 수 있도록 하자. 분모의 극한값이 존재한다면 분모의 극한값이 0이든 아니든 분자의 극한값은 무조건 0이라는 것! 그리고 분모의 극한값이 0이라면 분자의 상황은 좀 더 특별해진다는 것! $n=1$, 2일 때의 상황에서 삼차함수 $f(x)$의 모든 인수가 곧바로 잡혀버린다. 또한 $g(x)$의 식을 구할 때도 $g(x)=(x-1)h(x)$라 하면 $n=3$, 4일 때의 상황에서 $h(x)-1$의 식을 인수로 곧바로 나타내는 것이 낫겠다는 판단도 할 수 있어야 한다.

04 2025학년도 수능 21번
분수꼴 함수의 극한값 존재의 의미

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

Comment

분수꼴 함수의 극한값이 존재한다는 것은 분모의 극한값이 0인 지점이 존재한다면 이 지점에서 분자의 극한값도 함께 0이어야 한다는 전제에서 출발한다. 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만날 수밖에 없고, 이 점에서 $f(2x+1)$의 그래프도 x축과 만나야 한다고 생각을 정리하고 시작하면 된다. $f(x)$, $f(2x+1)$의 그래프가 x축과 동시에 만나는 점을 확인하고 이와 다른 점에서 $f(x)$의 그래프가 x축과 만난다면 어떻게 되는지만 슬쩍 확인하면 남은 풀이 방향을 정할 수 있다.

05
$\infty-\infty$꼴의 최고차항의 결정 조건

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재한다. (나) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-3x+1)$의 값이 존재한다.

$f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

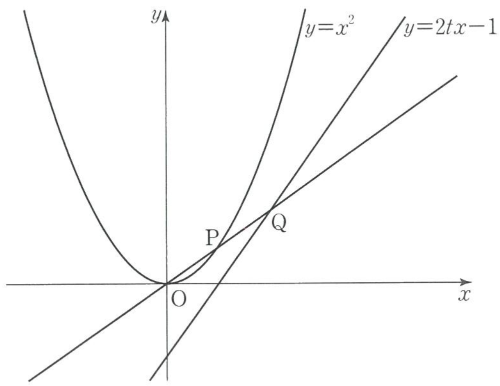
Comment

$\infty-\infty$꼴로도 최고차항의 결정 조건을 제시할 수 있다. $\infty-\infty$꼴은 분자 또는 분모의 유리화를 통해 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형하여 다룬다는 것을 생각해 보면 당연하다.

06 2024학년도 6월 평가원 11번
함수의 극한의 도형 활용

그림과 같이 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

Comment

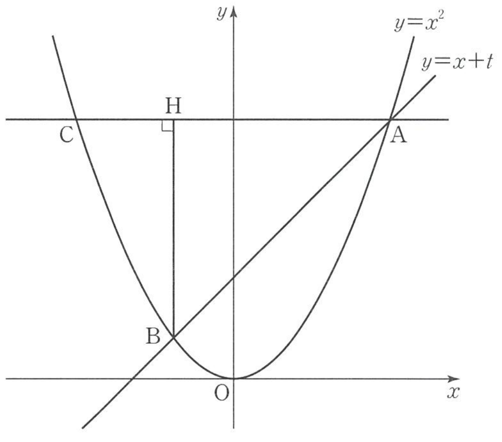
극한의 상황에 대한 기하적 직관이 도움이 될까 바라지도 말자. 함수의 극한의 도형 활용에서 극한값을 계산할 수 있는 식의 형태는 지극히 제한적이므로 이를 구별하여 식을 잘 정리해 갈 수 있어야 한다. 극한의 식의 분모에 극한값이 0인 $1-t$가 있으므로 분자의 식 조작으로 $1-t$를 묶어 내는 것에 관심을 가져야 하는 것은 당연하다. 직선과 곡선 위의 점 사이의 거리의 최대와 최소에 관한 미분의 상황이 첫 단계에 슬쩍 발을 들이밀고 있는데, 이를 이용해서 점 P의 좌표를 구하기만 하면 그다음은 순전히 함수의 극한의 상황이다.

07 2023학년도 9월 평가원 12번

함수의 극한의 도형 활용

실수 $t\ (t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5



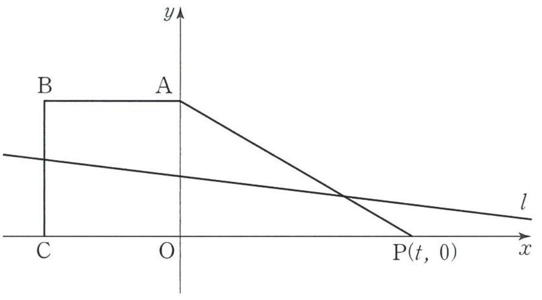
Comment

함수의 극한의 도형 활용 문제로 가장 흔하게 접할 수 있는 기본 유형이다. 주어진 대로 구할 것을 구하고 계산하는 것으로 끝! 아무런 고민의 여지가 없다.

08

새로운 변수의 도입

그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O$(0, 0)$, A$(0, 2)$, B$(-2, 2)$, C$(-2, 0)$과 점 P$(t, 0)$ $(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다.
양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} f(t)$의 값은? [4점]



① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　② $2-\sqrt{2}$　③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

Comment

주어진 변수 t만 이용하기에는 매우 힘든 상황이다. 우선 점 $(-1, 1)$을 지나는 직선 l의 기울기부터 새로운 변수로 잡아보자. 우선 이 변수로 직선 l의 y절편인 $f(t)$를 나타낸 후, 직각삼각형 AOP의 넓이를 이등분하는 것에서 새로운 변수를 최종적으로 t로 나타낼 수 있을 것이다. 이 새로운 변수를 좀 더 센스 있게 적극적으로 이용하고자 하면 계산의 번거로움을 많이 덜 수 있다. 그리고! 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지니까 넓이를 이등분하려면 직선 l의 y절편은 1에 가까워진다? 땡! 극한의 상황에 대한 어설픈 직관은 매우 위험하다는 것을 다시 한번 확인해 두자.