한완수

한권으로
완성하는
수학

확률과통계
×
교과 · 실전개념

ㅎㅇㅅ

이해원 지음

시대인재Books

차례

PART 1

PART 2

확률과 통계 수능 개념의 완성 : Part 1 정리 및 수능에 꼭 필요한 [수능 개념]을 기본부터 심화까지 완성하는 단계

PART

1

교과 개념의 완성

Part 1은 교과서 개념을 완벽하게 공부하고 자칫 잘못 생각할 수 있는 오개념을 확실하게 잡아나가는 단계입니다. 교과서 없이 기본 개념을 완벽하게 공부할 수 있도록 [교과서 개념]을 빠짐없이 다루며 수학 공부에 도움이 되는 교과서 지도서의 일부 개념을 다룹니다. 나아가 기출에 개념을 적용하는 과정까지 설명합니다.

한 권으로
완성하는
수학

PART 1

확률과 통계 교과 개념의 완성 : 모든 [교과서 개념]의 올바른 학습, Part 2로 가기 위한 필수 단계

Part 1

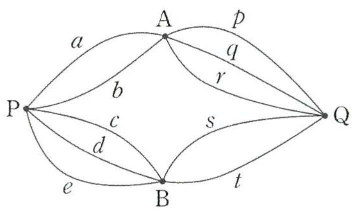
Method Ⅰ　'Part 1' 가이드라인

1. 어떤 학생이 공부해야 하는가?

한완수 확률과 통계는 중학교에서 경우의 수를 한 번이라도 제대로 배운 적 있다면 바로 봐도 되는 교재이다. 모의고사 등급을 기준으로 2등급부터는 바로 책을 봐도 되고, 그 이하라면 교과서를 병행하면서 해당 단원의 내용을 먼저 공부한 후에 한완수 Part 1의 해당 단원을 공부하도록 하자. 다음 표를 보면서 스스로를 진단해 보자.

CHECK 솔직 자가 진단 표 ○ ×　　한완수 확률과 통계 Part 1 공부하기 전 자가 진단

- 한완수 [공통(상)(중)(하)의 Part 1·2·3]을 모두 공부하였는가?
- 고등수학의 경우의 수에서 합의 법칙, 곱의 법칙을 들어본 적 있는가?
- 1~5까지의 숫자가 적힌 5개의 카드가 있을 때, 2개의 카드를 뽑아 2자리 자연수를 만드는 방법의 수를 구할 수 있는가?
- 아래의 그림에서 점 P에서 두 점 A와 B 중 하나를 거쳐 점 Q까지 가는 방법의 수를 논리적으로 구할 수 있는가?



- 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 합이 4 또는 5가 되는 경우의 수를 구할 수 있는가?

모든 질문에 ○가 되어야 한완수 확률과 통계의 Part 1을 공부하는데 지장이 없을 것이다. 또한 위의 솔직 자가 진단 표는 앞으로 한완수를 공부하면서 종종 보게 될 텐데 표의 내용에 대해 솔직하게 답을 해야 공부에 큰 도움이 될 것이다.

2. Part 1의 목표

기본적으로 교과서의 개념을 완벽하게 증명하고 이해한 후, 어디까지가 [교과서 개념]인지 명확하게 구분하고 수능 기출문제의 [2점], [3점]부터 고난도의 [4점]까지 모든 문항에 대하여 **'출제의도에 맞는 [교과서적 해법]'**을 익히는 것이다.

3. 교과서적 해법은 무엇인가?

모든 교과서 본문에서 배우는 '정의 및 정리'까지만을 이용하여 완성한 논리적인 풀이. Part 1에서 연습하고, 공부하고자 하는 핵심적인 풀이 방법에 해당한다. [교과서적 해법] 중에서도 출제의도에 맞는 풀이는 적용 가능한 [교과서 개념] 중 가장 뒷부분에 있는 고급이론을 활용한 풀이이다.

예를 들어 $f(x)=x^2$의 도함수를 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$로 계산하는 것도 방법이지만, 함수 $f(x)=x^n$에 대하여 $f'(x)=nx^{n-1}$인 [교과서 개념]을 유도하고 공부한 상태라고 가정하면, 더 좋은 풀이는 $f'(x)=nx^{n-1}$에 $n=2$를 대입하는 것이다.

4. 교과서적 해법에서 더 나아가면 안 되는가?

[교과서적 해법]을 넘어 [수능적 해법]까지 공부하고 익숙해지는 것을 목표로 하는 것이 수능 100점을 위해서 반드시 필요하지만, Part 1에서는 [교과서 개념]을 완성하고 [교과서적 해법]을 완벽하게 하는 것을 목표로 한다.

① [교과서적 해법]이 익숙하고 유도과정이 자연스러워서
[수능적 해법]으로 문제를 푸는 사람 (그 풀이가 곧 문제의 출제의도이다.)
② [교과서적 해법]으로 차근히 근간부터 유도하면서 푼 사람
③ [수능적 해법]으로 문제를 풀었으나, [교과서적 해법]이
[수능적 해법]에서 사용한 정리의 근간이라는 것을 전혀 모르는 사람

①을 최종 목표로 삼아야 하지만 Part 1에서는 [교과서적 해법]을 완벽하게 하는 것이 목표이므로 ②가 되려고 노력하자.

5. 수학 개념에는 흐름이 있다.

수학 개념, 특히 교과서에는 크고 작은 흐름들이 있다. 예를 들어, 미분을 배우기 위해 함수의 극한을 먼저 앞 단원에서 배우는 것이다. 이런 흐름을 캐치하고 있는 것은 수학 공부를 하는 데 있어서 전반적으로 도움이 된다.

Part 1

1-1 **1. 경우의 수** - 1. 순열과 조합

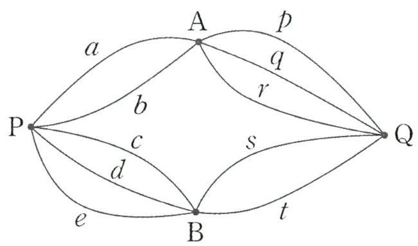
챕터 A 여러 가지 순열

1. 순열과 중복순열

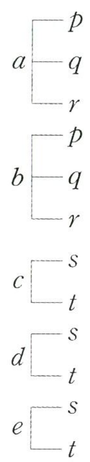
1-1. 경우의 수[1)]

경우의 수를 세는 기초적인 방법은 수형도를 그리는 것이고, 그것은 결국 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하는 것이다. 그런데 두 법칙은 고등학교 1학년 때 배움에도 불구하고 제대로 알고 있는 사람은 거의 없으니 여기서 제대로 배우고 넘어가자. 아래의 길 찾기 문제 예시를 통해 배워보자.

EX 01 점 P에서 두 점 A와 B 중 하나를 거쳐 점 Q까지 가는 방법의 수를 논리적으로 구하시오.



별 고민 없이 $2\times3+3\times2=12$로 계산하는 학생들이 많을 것이다. 하지만 대부분의 학생들은 이 계산의 근본적인 원리를 모르는 경우가 많기 때문에 이 상황을 수형도로 꼼꼼하게 분석하면서 곱의 법칙과 합의 법칙을 제대로 이해해 보자.



위 수형도에서 보듯이 a일 때와 b일 때 뒤에 나오는 모양이 p, q, r 세 가지로 완전히 같음을 알 수 있다. 그러므로 a일 때의 수형도를 구한 후, 그 경우의 수에 2배를 하는 것이다. 이렇게 2배를 하는 이유를 정확하게 이해하고 남들에게 설명할 수 있을 정도가 되어야 곱의 법칙을 완벽하게 이해한 것이다.

1) 경우의 수, 순열, 조합은 1학년 때 배운 내용이지만 확률과 통계의 기초가 되는 중요한 내용이므로 다시 한번 공부하고 넘어가도록 하자.

즉, $2\times$ 라고 쓰는 순간,

① a와 b의 수형도의 뒤가 같음을 인정하는 것[1,2]

② a인 경우만 센다는 것[3]

이다. 여기서 ②를 "a로 고정"한다고 해서 "고정"이라는 용어로 약속을 하자. 즉,

"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

이렇게 세 가지는 모두 동치라고 할 수 있다. 계산해 보면 다음과 같다.

$2\times$(a로 고정했을 때의 경우의 수) $= 2\times 3$ ⋯ (i)

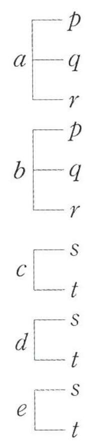
그런데 수형도에서 보면 a, b는 뒤가 p, q, r로 같지만, a와 c는 뒤가 다른 것을 알 수 있다. 여기서 수형도의 뒤가 다르면 합의 법칙을 적용해야 한다. 하지만 c, d, e는 수형도의 뒤가 s, t로 같으므로 위와 마찬가지 방법으로

$3\times$(c로 고정했을 때의 경우의 수) $= 3\times 2$ ⋯ (ii)

이고, (i)과 (ii)는 뒤가 다르므로 합의 법칙을 적용해야 한다. 즉,

(i)+(ii) $= 2\times 3+3\times 2$

가 우리가 구하는 경우의 수이다. 그리고 이렇게 식을 쓰면서도 동시에 머릿속에서 다음과 같은 수형도가 그려져야 한다.



그런 사람만 합의 법칙, 곱의 법칙을 쓸 자격이 있다. 원리도 모르고 공식만 쓰는 공부는 실력 향상에 도움이 되지 않는다.

1) 수형도의 뒤가 같다는 것은 이후에 나오는 모든 경우가 완벽히 일치하다는 것을 의미하진 않는다. 다만 하나를 고정하게 되면, 같은 원리에 의해 **이후에 나올 수형도의 가짓수가 정확히 일치**한다고 할 때 수형도의 뒤가 같다고 할 것이다. 즉, 하나로 고정해서 세면 나머지는 세지 않아도 된다는 것을 의미한다.

2) 여기서 만약 수형도의 뒤가 같다고 생각했는데 실제로 다르다면 문제를 잘못 풀어서 답이 틀리게 된다.

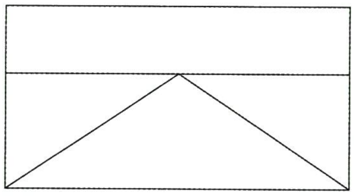
3) a인 경우와 b인 경우에 경우의 수가 같으므로 a인 경우만 세서 2배를 하는 것이다.

"합의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 다르다."
"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

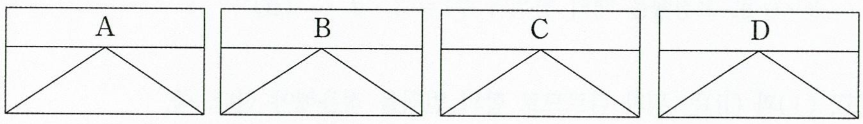
이를 통해 **수형도와 곱의 법칙, 합의 법칙이 완전히 같다는 것을 알아야 한다.**

문제집에서 흔히 볼 수 있는 아래의 문제를 풀면서 다시 한번 연습해 보자. 안 풀리면 수형도를 모두 그려서라도 스스로 풀어보도록 하자.

EX 02 그림의 각각의 영역에 이웃한 영역은 색이 다르도록 네 가지 색을 칠하는 방법의 경우의 수는? (단, 색을 모두 사용할 필요는 없고, 점으로 맞닿는 부분은 이웃하지 않는 것으로 한다.)



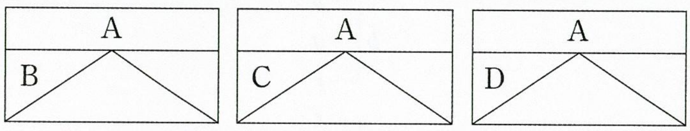
교과서적 해법



네 가지의 색을 A, B, C, D라 하자. 그림과 같이 가장 위에 있는 영역에 A를 칠하든, B를 칠하든, C를 칠하든, D를 칠하든 뒤에 나올 수형도의 경우의 수가 같음을 예측할 수 있다. 따라서

$4\times$(A로 고정했을 때의 경우의 수) $\cdots$ ①

라 생각할 수 있으므로, 가장 위에 있는 영역은 A로 고정시키자.

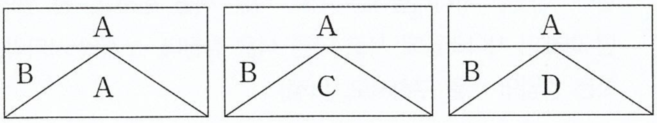


또한 그림과 같이 왼쪽 아래 영역이 B, C, D일 때 수형도의 뒤가 같으므로 B로 고정시키면서 곱의 법칙을 활용할 수 있다. 따라서 ①에서

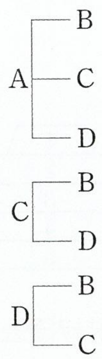
$4\times3\times$(B로 고정했을 때의 경우의 수)

가 된다.

이제 첫 번째 영역과 두 번째 영역은 각각 A 와 B 로 고정되었으므로



다음과 같이 세 가지 경우가 가능한데, 여기서 A , C , D 일 때 뒤가 같다고 생각해서 $4\times3\times3\times$ 로 풀어나가는 순간 풀이가 꼬이기 시작한다. 따라서 '합의 법칙을 활용'과 '수형도 그리기'라는 두 가지 방법으로 나뉜다. 수형도를 그려보면 아래와 같다.[1)]



따라서 구하는 경우의 수는 $4\times3\times(1\times3+2\times2)=84$이다.[2)]

이처럼 **모든 경우의 수는 "수형도"가 기본이며 수형도를 빠르게 세는 수단으로 "곱의 법칙"과 "합의 법칙"을 배우는 것이다.** 교과서의 설명과 조금 다르지만 합의 법칙과 곱의 법칙을 수형도를 통해 이해하고 개념을 정립하자. 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

교과서 개념 합의 법칙과 곱의 법칙

경우의 수에서 수형도를 통해 합의 법칙과 곱의 법칙을 정확하게 이해해야 경우의 수를 계산할 때 더하기, 곱하기를 할 자격이 있는 것이다. 정리하면 다음과 같다.

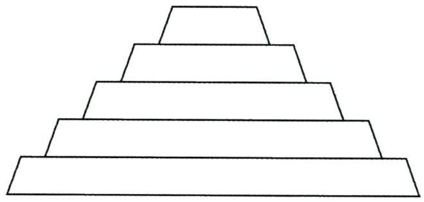
"합의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 다르다."
"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

이를 잘 생각하면서 다음 기출문제를 같이 풀어볼 텐데 어렵다면 해설을 보면서라도 이해하고 넘어가도록 하자. 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해할 때 매우 중요한 문제이다.

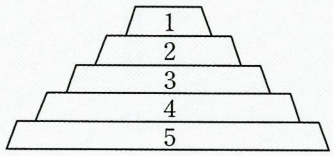
1) 이를 합의 법칙으로 완벽하게 써내면 아래와 같다.
$1\times3+2\times2$
보통 합의 법칙은 헷갈리기 쉬우므로 수형도로 대체하는 것이 편할 때도 많다.

2) 이 문제는 처음부터 수형도로 풀려면 84 개가 표현되는 수형도를 그려야 하지만, 이미 곱의 법칙으로 4×3까지 계산을 했으므로 나머지 7 개만 더 세면 된다.

EX 03 [2009.6·가 25번] 그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]



교과서적 해법



칠하는 색을 A, B, C 라 하고, 사다리꼴을 위에서부터 각각 1, 2, 3, 4, 5 라 하자. 또한 '사다리꼴 1에 A를 칠한다'를 1－A로 표현하기로 하자.

이때, 1－A든, 1－B이든, 1－C이든 이후에 나올 경우의 수가 같음을 추측할 수 있다. 따라서 1－A로 고정하고 곱의 법칙을 쓰면 다음과 같다.

3×(1－A일 때, 사다리꼴 2, 3, 4, 5에 칠하는 경우의 수)

조건에 의해 사다리꼴 1, 5의 색이 달라야 한다. 그런 의미에서 5부터 칠하자. 1－A이므로 5－B 또는 5－C이어야 하는데, 이 두 경우 모두 5에 칠하는 색이 다를 뿐, 앞으로 나올 경우의 수가 같음을 추측할 수 있다. 즉, 5－B로 고정하고 2를 곱하면서 곱의 법칙을 쓰면 된다.

3×2×(1－A, 5－B일 때 사다리꼴 2, 3, 4에 칠하는 경우의 수)

이제부터가 중요하다. 이번엔 사다리꼴 2를 칠해보자. 가능한 경우가 2－B와 2－C인데, 여기서 두 경우 모두 이후에 나올 경우의 수가 같다고 생각해서

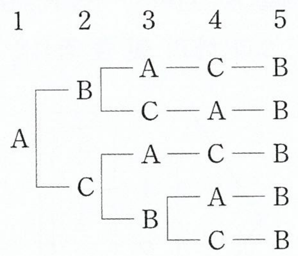
3×2×2×(1－A, 5－B, 2－B일 때 사다리꼴 3, 4에 칠하는 경우의 수)

으로 접근하는 순간 풀이가 완전히 어긋나게 된다. 왜냐하면 사다리꼴 2와 5에 칠해지는 색의 동일 여부에 따라 그려질 수형도의 모양이 달라지기 때문이다.

그러니

$$3\times2\times(\underbrace{1\times\qquad}_{2-\mathrm{B}\text{ 고정}}+\underbrace{1\times\qquad}_{2-\mathrm{C}\text{ 고정}})$$

와 같이 쓴 후 계속 해나가야 하는데, 확인해 보면 합의 법칙을 또 활용해야 하는 것을 알 수 있다. 따라서 **합의 법칙이 너무 자주 쓰여 복잡해질 것으로 추측되면 단순히 합의 법칙, 곱의 법칙 대신 수형도를 그려버리는 것이 좋을 수 있다.** $1-\mathrm{A}$, $5-\mathrm{B}$로 고정한 상태에서 나머지는 수형도로 해결해 보자.



위와 같이 총 $1\times2+1\times3=5$가지의 경우의 수가 가능하므로 계산해 보면

$$3\times2\times(1\times2+1\times3)=30$$

EX03은 곱의 법칙을 쓰는 중간에 수형도를 그려야 하기 때문에 상당히 어렵다. **뒤가 다른 것이 너무 많아 합의 법칙이 많이 복잡할 때에는 수형도로 풀이를 바꾸는 것이 유리하다.** 합의 법칙, 곱의 법칙에 대하여 배운 것을 더해 교과서 개념을 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

교과서 개념 합의 법칙과 곱의 법칙

경우의 수에서 수형도를 통해 합의 법칙과 곱의 법칙을 정확하게 이해해야 경우의 수를 계산할 때 더하기, 곱하기를 할 자격이 있는 것이다. 정리하면 다음과 같다.

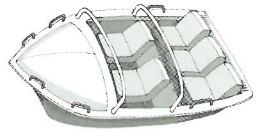
"합의 법칙을 쓴다." = **"수형도의 뒤가 다르다."**
"곱의 법칙을 쓴다." = **"수형도의 뒤가 같다."** = **"고정한다."**

합의 법칙의 경우 복잡해지면 중간에 수형도로 바꿔서 문제를 풀 수 있어야 한다.

이제 앞으로 경우의 수 문제를 풀 때 ×, + 라는 기호를 활용할 때마다 곱하는 이유, 더하는 이유에 대해 설명할 수 있어야 하고, 그렇게 공부해야 경우의 수 실력이 향상될 수 있다. 연습 문제를 또 하나 풀어보자.

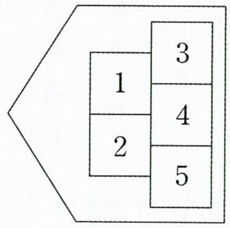
EX 04 [2007·나 23번] [변형]

어머니, 아버지를 포함한 5명의 가족이 어느 놀이 기구를 타려고 한다. 앞줄에는 반드시 어머니, 아버지가 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오.



교과서적 해법

편의상 어머니를 A, 아버지를 B, 나머지 가족구성원을 각각 a, b, c라 하자. 또한 앞 줄 좌석을 각각 1, 2라 하고, 뒷 줄 좌석을 각각 3, 4, 5라 하자.



1번 자리에 A가 앉는 것을 1−A라 하자. A, B가 앞 두 자리에 앉아야 하며, 이 때 이 두 사람은 서로 자리를 바꿀 수 있다. 그런데 위의 그림에서 1−A, 2−B이든 1−B, 2−A이든 결국 좌석 3, 4, 5에 a, b, c를 앉히는 경우의 수는 같을 것이라 추측할 수 있다. 확신이 들지 않는다면 다음 수형도를 보자.

1	2	3	4	5
A	B	a	b	c
			c	b
		b	a	c
			c	a
		c	a	b
			b	a

1	2	3	4	5
B	A	a	b	c
			c	b
		b	a	c
			c	a
		c	a	b
			b	a

위의 두 수형도에서 보듯이 A와 B가 어디에 앉든 좌석 3, 4, 5에 오는 배열 방법의 수는 동등하다. 따라서 2를 곱하면서 1−A, 2−B로 고정해 주자.

$2\times$(1−A, 2−B일 때 좌석 3, 4, 5에 배열하는 방법의 수)

좌석 3, 4, 5에 배열하는 방법의 수는 수형도에서 볼 수 있듯이 6가지이다. 따라서 $2\times6=12$가 정답이 된다.

이처럼 EX04는 수형도의 뒷부분이 1－A, 2－B 일 때와 1－B, 2－A 일 때가 완전히 같았으므로 곱의 법칙만 활용하면 풀 수 있는 문제이다. 보다시피 곱의 법칙을 활용할 때 수형도의 뒤가 같음을 인지하면서 푸는 것과 그렇지 않은 것에는 큰 차이가 있다. 경우의 수를 풀 때 ×, ＋를 적용하면서 왜 곱해야 하는지, 왜 더해야 하는지 모른다면 경우의 수를 모르는 것이나 다름없다.

정리하면 다음과 같다.

저자의 특강 TIP **경우의 수를 제대로 공부하는 법**

경우의 수에서 수형도를 통해 합의 법칙과 곱의 법칙을 정확하게 이해해야 경우의 수를 계산할 때 더하기, 곱하기를 할 자격이 있는 것이다. 정리하면 다음과 같다.

"합의 법칙을 쓴다." = **"수형도의 뒤가 다르다."**
"곱의 법칙을 쓴다." = **"수형도의 뒤가 같다."** = **"고정한다."**

합의 법칙의 경우 복잡해지면 중간에 수형도로 바꿔서 문제를 풀 수 있어야 한다.

1-2. 순열과 중복순열

먼저 새로운 기호의 약속을 보고 넘어가자.

$$n\text{의 계승} = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

계승이라는 단어를 모르는 사람도 꽤 있는데, 이 기호를 보통 '팩토리얼'로 읽기 때문이다. 하지만 교과서에서는 '계승'이라고 부른다는 것을 알아두고 넘어가자.

다음 문제를 합의 법칙, 곱의 법칙으로 완벽하게 논리적으로 풀어보자.

EX 01 1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 3개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 합의 법칙, 곱의 법칙을 활용하여 논리적으로 구하시오.

교과서적 해법

항상 처음에는 수형도를 그린다는 생각으로 시작해야 한다. 3개의 숫자를 나열하므로 네모 칸은 3개 그리자. 그러면 첫 칸에 1, 2, 3, 4, 5가 모두 올 수 있다.

$\boxed{1}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{2}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{3}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{4}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{5}\boxed{}\boxed{}$

그런데 첫 칸에 어떤 숫자가 오든 뒤에 나올 경우의 수가 같기 때문에 하나로 고정해서 곱의 법칙을 적용하면 된다. 뒤에 나올 경우의 수가 같다는 것을 추측하지 못했다면 수형도를 모두 그려보면 된다. 반드시 모든 것을 이해하면서 곱하기와 더하기를 적용하도록 하자.

$$5\times(\text{첫 번째 칸을 } 1\text{로 고정한 후의 경우의 수})$$

이제 $\boxed{1}\boxed{}\boxed{}$ 에서 남은 2개의 칸을 채우는데 두 번째 칸에는 2, 3, 4, 5가 올 수 있으므로 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{}$ 로 고정하면서

$$5\times 4\times(\text{첫 번째 칸을 } 1,\ \text{두 번째 칸을 } 2\text{로 고정한 후의 경우의 수})$$

라 할 수 있다. 마지막으로 $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{}$ 의 세 번째 칸에 올 수 있는 숫자는 3개이므로 정답은 $5\times 4\times 3=60$이다.

방금 EX01에서 풀었듯이

5 개의 숫자에서 서로 다른 3 개를 뽑아 순서대로 나열하는 것

을

5 개에서 3 개를 택하는 순열

이라고 하며, 이 순열의 수를 기호로

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\times4\times3$$

과 같이 나타낸다. P는 순열을 나타내는 Permutation에서 따왔으며, 이를 일반화하여 약속하면 다음과 같다.

서로 다른 n 개에서 r $(0<r\le n)$ 개를 택하여 순서대로 일렬로 나열하는 것

$$\begin{aligned}
&= \text{서로 다른 } n \text{ 개에서 } r\ (0<r\le n) \text{ 개를 택하는 순열의 수} \\
&= {}_n\mathrm{P}_r \\
&= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots \text{ 1)}
\end{aligned}$$

순열의 정의에서 보듯이 결국 곱의 법칙에 불과하다. 기호 자체를 외울 때에는 ${}_n\mathrm{P}_r$를 보고

'n부터 차례대로 r개 곱한다.'

라고 기억하길 바란다. 다만 문제를 풀 때는 순열의 기호를 활용하는 것보다, 방금 배운 곱의 법칙, 합의 법칙을 완벽하게 구사하는 것이 더 중요하다. 예를 들어, 앞의 EX01을 풀 때에도 ${}_5\mathrm{P}_3$으로 생각하면서 푸는 사람보다 곱의 법칙을 생각하면서 $5\times4\times3$으로 푸는 사람이 더 많다. 반드시 곱의 법칙과 합의 법칙을 완벽하게 이해해야 한다는 것을 명심하고 문제를 하나 더 풀어보자.

1) 교과서에서는 $0<r<n$일 때만 ${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$이 성립한다고 하고 다음 설명을 시작하는 경우가 많다.

① $0!=1$이라 약속하여 $r=n$일 때도

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

이 성립함을 설명한다.

② $r=0$일 때도

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

이 성립한다고 가정한 후 양변에 $r=0$을 대입해 보면 ${}_n\mathrm{P}_0=1$이 된다.

이것을 ${}_n\mathrm{P}_0$의 값으로 약속하면

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

은 $0\le r\le n$에서 성립한다. 즉, ${}_n\mathrm{P}_0=1$을 하나의 약속으로 기억하고 있자.

EX 02 1, 2, 3, 4, 5 중 3개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 합의 법칙, 곱의 법칙을 활용하여 논리적으로 구하시오.
(단, 각 자리의 숫자는 서로 같아도 된다.)

교과서적 해법

곱의 법칙을 생각하면 어렵지 않게 $5\times5\times5=125$임을 알 수 있다.

여기서도 마찬가지로

서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수

$$= {}_n\Pi_r$$

$$= \underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}$$

$$= n^r$$

이라 약속한다. 따라서 EX02 문제를 기호를 활용해서 다시 풀어보면 ${}_5\Pi_3=5^3$이긴 하다. **중복순열 역시 곱의 법칙, 합의 법칙만 잘 구사하면 딱히 문제를 풀 때 기호가 필요하지 않지만,** 기호의 의미를 묻는 문제가 출제될 수 있으므로 기호는 외워두도록 하자.

순열과 중복순열을 교과서 개념으로 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 순열과 중복순열 — 교과서 개념 / 수능 개념 / 교과서 간접 개념

① 서로 다른 n 개에서 r $(0\le r\le n)$ 개를 택하는 순열의 수[1]

$$= {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

② 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 중복순열의 수

$$= {}_n\Pi_r = \underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}} = n^r$$

실제 대부분의 문제를 풀 때 중요한 것은 기호를 쓰는 것이 아니라 **곱의 법칙과 합의 법칙을 완벽하게 이해**하는 것이다.

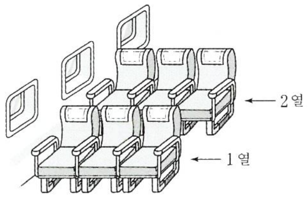
1) 다음 약속은 알아두자.
① ${}_nP_n=n!$
② ${}_nP_0=1$
③ $0!=1$

기호의 약속일뿐이니 가볍게 암기하고 넘어가면 되고 **결국 중요한 것은 곱의 법칙, 합의 법칙임을 명심하자.** 다음 페이지에서 기출문제를 풀어보자.

경우의 수 문제는 하나씩 수형도를 그리면 어떻게든 풀 수 있기 때문에 최대한 스스로 풀어본 후에 해설을 보도록 하자. 또한 **풀이에서 곱하기나 더하기를 활용했으면 '왜 곱하거나 더해야 하는지' 까지 해설을 보고서라도 정확하게 모두 파악하고 넘어가야 한다. 그것이 진정한 '논리적 경우의 수 공부' 이다.**

EX 03 [2009.9·가 23번]

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6 명이 그림과 같은 6 개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



교과서적 해법

할아버지, 할머니는 같은 열에 이웃해야 하며 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃해야 하는 것이 특별한 조건임을 문제를 읽으면서 파악할 수 있다. **경우의 수 문제를 풀 때는 특별한 조건부터 해결하는 것이 중요하다. 이처럼 기출을 하나씩 풀면서 정리해 주는 팁을 주의 깊게 보도록 하자.**

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니를 각각 A, B, a, b라 한 후 수형도를 그리듯이 의자에 배치해 보면 다음과 같다.

1열 →	A	B		A	B		a	b		⋯
2열 →	a	b			a	b	A	B		

이처럼 나열하다 보면 일단 A, B를 1열과 2열 중에 어느 열에 앉힐지를 선택해야 한다. 그 방법의 수가 2 이므로

$2\times$(A, B가 1열에 앉는 경우의 수)

처럼 $2\times$를 하면서 A, B를 1열에 고정을 하고, 이제 1열에서 A, B를 이웃하게 앉히는 방법의 수를 찾아보면 다음과 같이 4가지이다.

A	B		B	A			A	B		B	A

여기서 마찬가지로 A, B가 어떻게 앉든 나머지 가족구성원들이 앉는 경우의 수가 같음을 생각할 수 있다. 따라서

$$2\times4\times(\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}\text{ 로 고정한 뒤의 경우의 수})$$

a, b는 2열에 배열할 수밖에 없고, 이 두 사람이 이웃하도록 배열하는 경우의 수가 똑같이 4임을 알 수 있다. 따라서

$$2\times4\times4\times(\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & \\ \hline a & b & \\ \hline\end{array}\text{ 로 고정한 뒤의 경우의 수})$$

A, B, a, b를 제외한 2명을 배열하는 방법은 2이므로 곱의 법칙을 활용하면 되는 것을 알 수 있다. 즉, 구하는 경우의 수는

$$2\times4\times4\times2=64$$

이 문제를 굳이 순열을 활용해서 풀면 각주 1)과 같은데 크게 중요하지는 않다. 한 번쯤 읽어보자. EX03은 곱의 법칙만 활용되기 때문에 난도가 낮은 편에 속한다. 다음 문제를 다시 보자.

1) 먼저 할아버지, 할머니를 몇 열에 앉힐지 선택하는 방법의 수는 2이다. $2\times$ 라고 적자.

할아버지, 할머니를 1열에 나열한다고 고정하고, 1열에 있는 3개의 칸 중 2개의 칸을 뽑아 나열해야 하므로 ${}_3\mathrm{P}_2$인데, 여기서 할아버지와 할머니가 떨어져 있는 2개의 경우를 배제해야 한다. 따라서 가능한 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2-2$이다.

아버지, 어머니를 앉히는 경우의 수도 마찬가지 ${}_3\mathrm{P}_2-2$이고, 마지막에 아들과 딸 2명을 배열해야 하므로 ${}_2\mathrm{P}_2$이다.

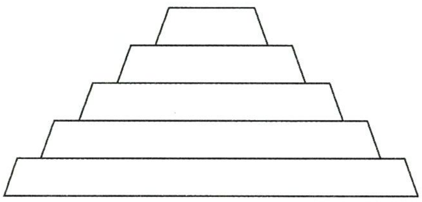
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times({}_3\mathrm{P}_2-2)^2\times{}_2\mathrm{P}_2$이다.

이처럼 순열 기호를 활용하든 말든 결국 곱의 법칙, 합의 법칙만 잘 활용하면 답을 구할 수 있다.

공부법 시리즈

EX 04
[2009.6·가 25번]

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

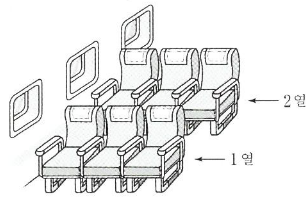


이 문제에서는 곱의 법칙을 3×2까지 쓰고 고정한 후, 수형도의 뒤가 다른 경우가 나타나서 합의 법칙으로 갈아타야 하는 문제이다. 이때 합의 법칙을 쓰든 수형도를 그려서 나머지 경우를 찾든 그것은 자유인데, 합의 법칙 구사 능력이 완벽하다면 $3\times2\times(1\times2+1\times3)$이라고 한 번에 합과 곱으로 끝낼 수 있어야 한다. 여기서 3×2를 순열의 수로 쓰면 ${}_3\mathrm{P}_2$가 되는 것인데, 굳이 기호를 활용할 필요는 없다. **결국 합과 곱은 수형도와 다를 바가 없고, 그것만 잘 활용하면 된다.**

이제 EX03과 EX04 문제를 다 푼 후 논리적 사고과정을 정리해 보자. **이때 더하기와 곱하기를 정확하게 분석할 텐데 앞으로 경우의 수 문제를 풀 때 조금이라도 애매했다면 반드시 이런 분석과정을 거치도록 하자.**

EX 03
[2009.9·가 23번]

할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



논리적 사고과정

① 발문을 읽어보면 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니가 특별하므로 이 조건부터 해결할 생각을 해야 한다.

② 할아버지, 할머니를 먼저 6개의 칸에 조건에 맞게 배치하려고 보니 1열에 배치할지, 2열에 배치할지 선택해야 하고 어딜 선택하든 뒤에 나올 경우의 수가 같은 것을 예측할 수 있다. 따라서 곱의 법칙에 의하여

$2\times$(할아버지, 할머니를 1열에 배치하는 경우의 수)

라 쓰자. 그 후 할아버지, 할머니는 1열로 고정하여 생각하자.

③ 1열에 할아버지, 할머니를 이웃하게 앉히는 방법의 수는 4가지이고, 어떻게 앉든 뒤에 나올 경우의 수가 같은 것을 예측할 수 있다. 따라서 곱의 법칙에 의하여

$2\times4\times$(할아버지, 할머니가 1열에 이웃하게 앉은 후 경우의 수)

이고 각주 1)처럼 상황을 고정해서 여러 수형도 중 1개의 수형도의 뒤만 세야 한다.

④ 아버지, 어머니는 자동으로 2열이며, 2열에 이웃하게 앉는 경우의 수는 4가지이다. 따라서 마찬가지로 다음과 같이 곱의 법칙을 활용할 수 있다.

$2\times4\times4\times$(할아버지·할머니/아버지·어머니 이웃하게 앉은 후 경우의 수)

마찬가지로 각주 2)처럼 고정한 후 남은 경우를 세야 한다.

⑤ 남은 2개의 자리에 사람 2명을 배열하는 방법의 수는 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $2\times4\times4\times2$이다.

1)

A	B	

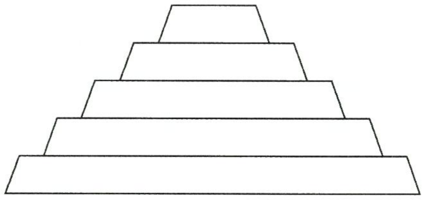
2)

A	B	
a	b	

EX 04

[2009.6·가 25번]

그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]



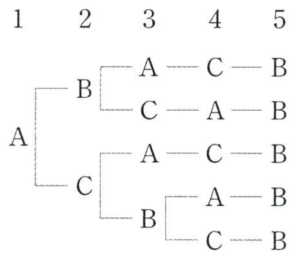
논리적 사고과정

① 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠해야 하는 특별한 조건이 있으므로 그 2가지에 먼저 색칠을 하자. 맨 위, 맨 아래에 어떤 색을 칠하든 뒤에 나올 경우의 수가 같을 것으로 예측되므로 곱의 법칙을 활용하자.

$3\times 2\times$(맨 위 A, 맨 아래 B로 고정 후 경우의 수)

② 두 번째 사다리꼴에 B 혹은 C를 칠했을 때, 뒤에 나올 경우의 수가 같다고 느껴지면 잘못 추측한 것이다. 같은지 다른지 잘 모르겠다면 수형도를 그리면서 파악하는 수밖에 없다.

③ 수형도를 그려보면 다음과 같다.



④ 즉, $3\times 2\times 5=30$이다. 그런데 여기서 합의 법칙과 곱의 법칙 구사가 완벽한 사람이라면 당황하지 않고 다음과 같이 풀어나갈 수 있어야 한다.

⑤ 뒤가 다를 것이라고 예측되면 다음과 같이 괄호를 열면서 덧셈을 해야 한다.

$3\times 2\times(1\times \quad +1\times \quad)$

⑥ 즉, B로 고정했을 때에는 2가지, C로 고정했을 때에는 3가지이므로 결국

$3\times 2\times(1\times 2+1\times 3)=30$

이 된다.

이처럼 덧셈과 곱셈에는 모두 이유가 있고, 그 이유를 논리적으로 분석할 수 있어야 경우의 수를 논리적으로 구할 수 있다. 이런 논리적 사고과정이 이해가 안 된다면 수형도를 처음부터 하나씩 다 그려서라도 반드시 이해한 후에 넘어가야 한다. 결국 합의 법칙, 곱의 법칙만으로 끝내는 풀이와 수형도를 그려서 푸는 풀이가 완전히 같음을 인지해야 경우의 수를 제대로 이해하고 있는 것이다.

앞으로 경우의 수를 공부할 때 반드시 다음 과정을 거치도록 하자.

저자의 특강 TIP **경우의 수를 제대로 공부하는 법**

경우의 수에서 수형도를 통해 합의 법칙과 곱의 법칙을 정확하게 이해해야 경우의 수를 계산할 때 더하기, 곱하기를 할 자격이 있는 것이다. 정리하면 다음과 같다.

"합의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 다르다."
"곱의 법칙을 쓴다." = "수형도의 뒤가 같다." = "고정한다."

합의 법칙의 경우 복잡해지면 중간에 수형도로 바꿔서 문제를 풀 수 있어야 한다.

${}_{n}\mathrm{P}_{r}$, ${}_{n}\Pi_{r}$ 와 같은 기호들도 곱의 법칙에 의하여 탄생하기 때문에 굳이 기호를 활용하지 않아도 곱의 법칙만 잘 쓰면 경우의 수 문제를 논리적으로 풀어나갈 수 있다.

또 앞에서 문제를 풀면서 얻은 팁은 다음과 같다.

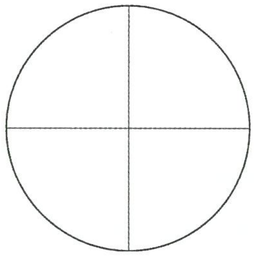
저자의 특강 TIP **경우의 수 문제를 푸는 Tip**

경우의 수 문제의 발문을 읽다보면 대부분 특별한 조건이 들어가 있다. 이때, 항상 그 조건부터 해결하려고 노력하는 것이 좋다. 수학이 원래 그렇듯이 모든 문제에 적용되는 절대 규칙은 아니지만 일반적으로 그렇다는 것이다.

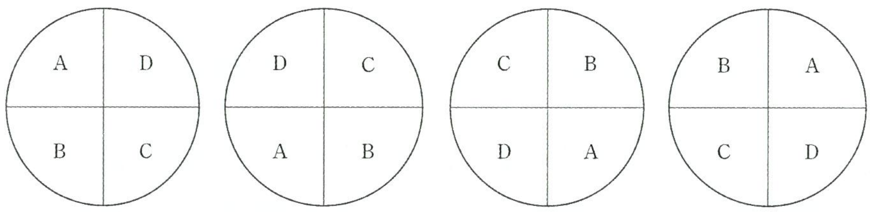
이제 다음 페이지에서 나눗셈과 관련 있는 순열을 배워보자.

2. 원순열

그림과 같이 4개의 영역으로 구분되고 회전이 가능한 원에 서로 다른 4개의 색 A, B, C, D를 칠할 때, 서로 다른 원이 되는 경우의 수를 생각해 보자.



주목할 것은 다음과 같이 서로 달라 보이는 네 경우가 사실 $90°$ 만큼 회전하면 서로 같은 원이 된다는 것이고, 이 4개의 원을 같은 것으로 생각해야 한다는 것이다.



ABCD　　DABC　　CDAB　　BCDA

이것을 보고 4개를 나열하는 방법인 $4!$에서 4개를 1개로 생각해야 하기 때문에 구하는 경우의 수는 $4!-3$이라고 생각할 수도 있다. 하지만 다음 표와 같이 회전해서 같아지는 것을 모두 묶어서 표현해 보자.

ABCD	ABDC	ADCB
DABC	CABD	BADC
CDAB	DCAB	CBAD
BCDA	BDCA	DCBA
[묶음 1]	[묶음 2]	[묶음 3]

⋮

위와 같이 4개를 1개로 생각해야 하는 경우는 여러 묶음이 있으며 **$4!=24$가지의 경우를 모두 나열해 보면 4개씩 총 6묶음으로 묶인다.** 따라서 4개의 영역으로 구분된 원에 4개의 색을 칠하는 방법의 수는 $4!-3$이 아니라 $\frac{4!}{4}=3!$인 것이다. 즉, -3을 하는 것이 아니라 $\div 4$를 하는 것이 맞고, **요약하면 '4개를 1개로' 취급해야 한다는 것이다.**

이처럼 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 원순열이라고 한다. 그리고 원순열에서 가장 중요한 것은 나눠야 하는 이유를 이해하는 것이다. 즉,

몇 개를 몇 개로

보는지가 원순열의 핵심이고 앞에서 푼 4개의 색을 칠하는 문제에서는 4개를 1개(한 묶음)로 봐야만 했다. 이제 일반화 해보자.

일반적으로 서로 다른 n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $n!$이지만 이를 원형으로 배열하면

n개를 1개로

보아야 하므로 원순열의 수는 다음과 같다.

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

교과서 개념 **원순열**

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

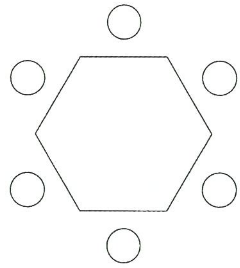
원순열의 수에서 중요한 것은 곱의 법칙으로 배열을 먼저 한 후 마지막에 나누기를 하는 순간이다. 왜 나눠야 하는지를 이해하지 못하면 원순열을 모르는 것과 다름없다.

결국 원순열에서 가장 중요한

몇 개를 몇 개로

의 원리와 함께, 앞으로 경우의 수를 셀 때 덧셈, 곱셈뿐만 아니라 나눗셈도 활용할 수 있어야 함을 명심하자. 원순열 관련 문제를 다음 페이지에서 몇 개 풀어보도록 하자.

EX 01 그림과 같이 정육각형 모양의 탁자가 있다.



① 남학생 6 명이 탁자에 둘러앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

② 남학생 4 명과 여학생 2 명이 탁자에 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 방법의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

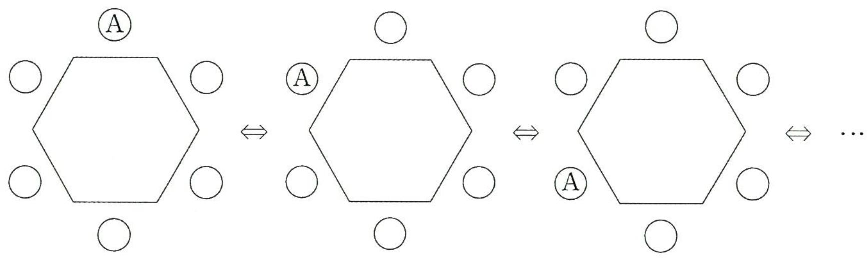
교과서적 해법

① 6 명이 둘러앉는 방법의 수는 6 명을 먼저 $6!$로 나열하자. 이때, **6 개를 1 개로** 보아야 하기 때문에 6 으로 나누어 주어야 한다. 즉, $\frac{6!}{6}=120$ 이다.

② 남학생 4 명을 각각 A, B, C, D, 여학생 2 명을 a, b라 하자. 발문을 읽어보면 여학생 2 명이 이웃하는 것이 특별한 조건이므로 먼저 여학생 2 명을 묶음으로 생각해서 배열을 하자. $X=\{a, b\}$로 치환하면 A, B, C, D, X를 원탁에 배열하는 방법의 수이므로 $\frac{5!}{5}=24$ 이다.

그런데 배열된 24 가지 모두에서 각각 a, b가 자리를 서로 바꾸면 또 다른 배열이 등장하므로 $24\times 2=48$ 이다.

여기서 원순열의 수를 구하는 또 다른 방법을 이해해 보자. ①에서 먼저 6 명을 각각 A, B, C, D, E, F라 하자. 이 6 명 중 A를 다음과 같이 앉히고 나서, 회전하는 상황을 생각하면 A가 어디에 앉든 회전해서 모두 같은 위치로 옮길 수 있다는 것을 알겠는가?



즉, 그림과 같이 A를 고정시키면서

$$1\times(\text{A가 앉은 후 경우의 수})$$

라 쓸 수 있다. A가 자리에 앉고 나면, 나머지 5명은 어디에 앉든 A를 기준으로 명확하게 구분이 된다. 예를 들어, B를 앉힌다고 생각하면 B가 A의 오른쪽 바로 옆자리에 앉는 것과 왼쪽 바로 옆자리에 앉는 것은 명백히 다르다. 따라서 나머지 5명은 순열로 생각해서 나열하면 된다. 즉,

$$1\times5!=120$$

②도 마찬가지이다. 사실은 묶음 이후 24를 쓰면서 뒤에 나올 경우의 수가 같으므로 곱의 법칙에 의하여

$$24\times(\text{A, B, C, D, X가 배열된 이후 경우의 수})$$

가 된다. A, B, C, D, X가 어떻게 배열되든 X에서 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 같으므로

수형도의 뒤가 같다 = 곱의 법칙

에 해당한다. 이 문제도 ①에서 배운 방법을 활용해서 풀어보자.

수능적 해법

여학생 2명에게 특별한 조건이 붙어 있으므로 여학생 a, b 중 a를 먼저 원탁에 나열한다고 생각하면 어디 앉히든 경우가 같으므로, a를 앉히면서 고정한 후

$$1\times(\text{a가 앉은 후 경우의 수})$$

이다. 그 이후 b를 배치하는데 b의 자리는 a의 오른쪽과 왼쪽 두 자리밖에 없다. 따라서 곱의 법칙에 의하여

$$1\times2\times(\text{a, b가 앉은 후 경우의 수})$$

이다. 나머지 4명은 나열하기만 하면 되므로 $1\times2\times4!=48$이다.

정리하면 다음과 같다.

저자의 특강 TIP 경우의 수 문제를 푸는 Tip - '경우의 수 1'

실제로 무엇인가 배치할 때, 어디에 배치되든 똑같은 경우일 수도 있다. 이럴 때에는 $1\times$ 를 하면서 고정하면 된다. 이 방법을 활용해서 원순열도 이해할 수 있는데, 원순열뿐만 아니라 다양한 상황에서 자유롭게 활용할 수 있어야 한다.

이것을 이해하면서 푼 사람과 그렇지 않은 사람 사이의 경우의 수를 구하는 실력 차이는 상당하다. 이처럼 앞으로 원순열의 문제는 항상 두 가지 관점으로 풀어보려고 노력하자. **'경우의 수 1'**을 잘 활용하는 것은 공부에 큰 도움이 된다.

3. 같은 것이 있는 순열

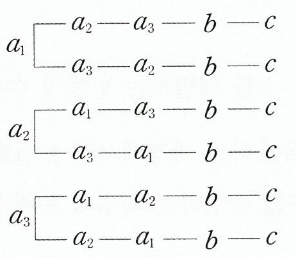
EX 01 a, a, a, b, c가 각각 하나씩 적힌 카드를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하시오.

교과서적 해법

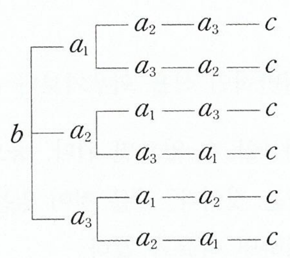
먼저 기존에 계산하던 순열과 다른 점은 같은 문자인 a가 3개나 있다는 것이다. 서로 다른 문자였으면 $5!$이 정답이 되겠지만 같은 문자가 포함되어 있으므로 그렇게 풀면 안 된다는 느낌이 올 것이다. 일단은 a, a, a를 서로 다른 문자인 a_1, a_2, a_3이라 가정하고, $5!$을 구한 후 원순열에서 활용한 스킬인

몇 개를 몇 개로

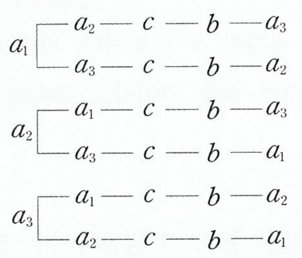
를 생각해 보자. 구한 $5!$을 직접 나열해서 표현해 보면 다음과 같이 b, c의 위치에 따라 분류해서 묶어볼 수 있다.



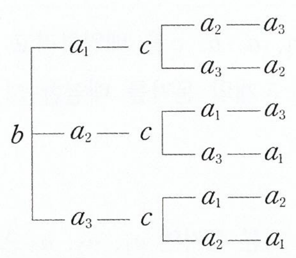
[묶음 1]



[묶음 2]



[묶음 3]



[묶음 4]

⋮ ⋮

위와 같이 b, c의 위치에 따라 묶음을 나누어 보면 a_1, a_2, a_3을 배열하는 방법인 총 $3!$개를 1개로 보아야 하는 것을 알 수 있다. 즉,

$3!$개를 1개로

에 해당하는 것이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!}=20$이 된다.

이처럼

① 서로 같은 것을 서로 다르다고 가정한 후 미리 배열
② 몇 개를 몇 개로

를 유도하는 과정 자체가 매우 중요하므로 완벽하게 이해하고, 모르겠다면 직접 모든 경우를 나열해서라도 이해하고 넘어가도록 하자. 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 | 같은 것이 있는 순열의 수 | 교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

n개 중에서 서로 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개 있을 때, n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\,q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

위의 일반적인 식을 외우기보다 a, a, a, b, b를 배열하는 방법의 수는 $\frac{5!}{3!\,2!}$이라고 계산할 수 있으면 된다. 중요한 것은 유도하는 과정에서의 포인트를 반드시 기억하는 것이다. 같은 것이 있는 순열의 수를 증명하는 과정의 논리적 사고과정을 정리하면 다음과 같다.

논리적 사고과정

① a, a, a, b, c를 배열하려고 보니 같은 문자인 a가 보인다. 따라서 서로 다른 5개의 문자를 배열한 $5!$보다는 개수가 적을 것이라고 추측해 볼 수 있다.

② 일단 다른 문자인 a_1, a_2, a_3으로 보고 배열을 한다. 그 방법의 수는 $5!$이다.

③ 이제 a_1, a_2, a_3일 때와 a, a, a일 때의 차이점을 파악하기 위해 하나씩 나열하면서 묶음으로 분석해야 한다. b, c의 위치에 따라 묶음을 분류해 보면 a_1, a_2, a_3을 배열하는 방법인 $3!$개를 1개로 봐주면 a, a, a일 때와 정확히 경우의 수가 같아지는 것을 알 수 있다. 결국, 우리가 아는 경우의 수와 모르는 경우의 수의 관련성을 찾는 것이 새로운 경우의 수를 구하는 핵심이다.

④ 따라서 미리 배열해서 구한 $5!$에서 $3!$을 나눠주면 정답이 나온다.

이처럼 어떤 공식의 증명을 공부할 때, 하나씩 다 외우는 것이 아니라 논리적 사고과정을 정리하고 포인트가 되는 지점만 기억하는 것이 좋다. 우리는 원순열을 증명할 때도 바로 구하기 힘드니 일단 미리 배운 순열처럼 배열부터 한 후에

몇 개를 몇 개로

를 활용했다. 같은 것이 있는 순열도 결국 증명 방법이 동일하다. 같은 것이 있는 순열과 원순열의 증명에서 기억해야 하는 포인트는 다음과 같다.

① 일단 순열이라 생각한다.
② 실제 상황과 비교하여 '몇 개를 몇 개로'를 활용한다.

이를 요약하면 다음과 같다.

직순열로 보기 + 몇 개를 몇 개로 … [1] 읽기

이와 같이 직순열로 돌아가자는 생각이 포함되어야 비로소 증명이 필연적인 것을 깨달을 수 있고, 그에 따라 증명이 가능한 것을 알 수 있다. 이처럼 증명을 공부할 때는 외우는 것이 아니라 **스스로 직관적인 필연성과 논리적 사고과정을 완성해본 후, 핵심을 짚어보면 그것으로 충분하다.** 증명을 제대로 공부할 생각이 있다면 반드시 모든 증명을 다음과 같이 공부하도록 하자.

저자의 특강 **TIP** 증명을 공부하는 방법

문제를 풀기 전에 직관적으로 결과를 예측해 보는 것은 논리적인 사고과정의 일부이며, 풀이에 도움이 될 수 있다. 증명을 공부할 때에는 다음 2가지가 중요하다.

① 증명과정에서 핵심이 되는 포인트를 기억하는 것

② 증명과정의 필연성과 사고과정을 스스로 정리해 보는 것

필연성을 부여해서 풀이를 완성해 보는 것 자체가 수학 공부에 큰 도움이 된다.

증명마다 문제 풀이에 크게 도움이 되는 포인트를 가지고 있기도 하는데, 방금 배운 포인트는

직순열로 보기 + 몇 개를 몇 개로

였다. 이 증명 과정에서 '직순열로 보기'가 발상적으로 느껴질 수 있다. 그러나 이 과정을 필연적이고 자연스럽다고 받아들여야 한다. 다음 문제를 풀어보자.

1) 직순열은 교과서에서는 쓰지 않는 말인데, 일반적으로 서로 다른 어떤 것들을 일렬로 나열하는 것이라고 생각하면 된다. 예를 들어

5 명을 일렬로 배열하는 방법의 수

가 직순열이고 그 경우의 수는 5! 이다.

원순열, 같은 것이 있는 순열과 비교하기 위해 용어를 만들었다. 앞으로 한완수에서 직순열이라고 하면 일반적인 순열로 생각하면 된다.

EX 02 덕영, 해원, 강욱이를 포함한 5명의 학생이 시험을 쳐서 1등부터 5등까지 등수를 매긴다고 할 때, 덕영이가 셋 중에서 가장 시험을 잘 치는 경우의 수는? (단, 동점을 맞는 경우는 없다.)

교과서적 해법1

첫 번째 풀이는 같은 것이 있는 순열을 배웠으므로 그것을 이용하기 위해 덕영, 해원, 강욱이를 일단 a, a, a로 놓고 푸는 것이다. 즉, 아이디어는

일단 같은 것으로 보기

이다. 그러면 다섯 명의 사람은 a, a, a, b, c라 할 수 있고 배열하는 방법은 같은 것이 있는 순열에 의하여 $\frac{5!}{3!}$이다. 그 이후 a, a, a 자리에 덕영, 해원, 강욱이를 배열한다고 생각하면 되는데, 배열 방법은 (덕영, 해원, 강욱) 혹은 (덕영, 강욱, 해원) 두 가지가 있으므로 정답은 $\frac{5!}{3!}\times 2=40$이다.

여기서 핵심은 **"세 사람을 모두 똑같은 a로 본다."** 라는 아이디어이다. 다른 사람을 갈게 봐서 배열한 경우의 수를 구한 후, 실제로는 한 가지 배열이 두 가지 배열이 되어야 하므로 2를 곱해주어야 한다.[1] 이제는 같은 것이 있는 순열을 배웠으므로 위와 같이 모두 같은 것으로 본다는 아이디어도 활용할 수 있게 되었다. 같은 것이 있는 순열을 모른다면 다음 방법으로 풀어야 한다.

1) a, a, a, b, c라는 배열은

(덕영, 해원, 강욱, b, c)
(덕영, 강욱, 해원, b, c)

이 두 가지 배열을 대표하는 것이고, 마찬가지로 a, b, c, a, a라는 배열은

(덕영, b, c, 해원, 강욱)
(덕영, b, c, 강욱, 해원)

이 두 가지 배열을 대표하는 것이다. 따라서 a, a, a, b, c를 배열한 모든 배열은 각각 두 가지 배열로 생각하면 되므로 2를 곱한다.

교과서적 해법2

일단 직순열로 배열하기를 사용해 보자. 다섯 명을 배열하는 방법은 $5!$인데, 그것은 다음과 같은 여섯 가지 배열을 따로 센 것이 모두 포함되어 있다.

덕영 ― 해원 ― 강욱 ― b ― c
덕영 ― 강욱 ― 해원 ― b ― c
해원 ― 덕영 ― 강욱 ― b ― c
해원 ― 강욱 ― 덕영 ― b ― c
강욱 ― 해원 ― 덕영 ― b ― c
강욱 ― 덕영 ― 해원 ― b ― c

덕영 ― 해원 ― b ― c ― 강욱
덕영 ― 강욱 ― b ― c ― 해원
해원 ― 덕영 ― b ― c ― 강욱
해원 ― 강욱 ― b ― c ― 덕영
강욱 ― 해원 ― b ― c ― 덕영
강욱 ― 덕영 ― b ― c ― 해원

덕영 ― c ― b ― 해원 ― 강욱
덕영 ― c ― b ― 강욱 ― 해원
해원 ― c ― b ― 덕영 ― 강욱
해원 ― c ― b ― 강욱 ― 덕영
강욱 ― c ― b ― 해원 ― 덕영
강욱 ― c ― b ― 덕영 ― 해원

…

이러한 모든 경우의 수가 $5!$에 포함되어 있는데, 실제로 각각의 표에 있는 여섯 가지의 경우 중 원하는 경우는 두 가지씩밖에 없다. 즉, "6개를 2개로"에 해당한다. 따라서 $5!$에 $\frac{2}{6}$를 곱해주어야 한다. 결국 앞서 구한 방법과 같은 답이 나온다.

같은 것이 있는 순열의 경우의 수를 증명하는 과정도 이와 유사하다. a, a, a, b, c를 배열하는 방법을 구할 때 a_1, a_2, a_3, b, c라 두고 먼저 배열하면 $5!$인데, 6가지를 1가지로 보아야 하므로 $\frac{1}{6}$을 곱해서 $5! \div 3! = 20$이 되는 것이다. 여기서는 첫 번째 풀이와는 다르게 "세 개의 a를 모두 다른 a로 본다."라는 아이디어가 활용되었다고 생각하면 된다.

[교과서적 해법1]과 [교과서적 해법2] 모두 좋은 풀이이니 반드시 이해해야 하며, 그 과정에서 경우의 수를 다루는 실력이 늘 것이다. 모르겠다면 하나씩 전부 나열해서라도 이해하고 넘어가도록 하자. 두 풀이에 모두 활용된 아이디어는 역시

알고 있는 순열로 바꾸기 + 몇 개를 몇 개로

이다. 이는 매우 중요하고 자주 활용되므로 반드시 알아두자. 정리하면 다음과 같다.

저자의 특강 TIP

경우의 수 문제를 푸는 Tip - '몇 개를 몇 개로'

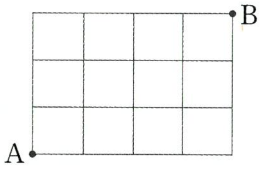
① 어떻게든 이미 배운 순열로 바꾸어서 생각하면 된다. **모두 같은 것으로 봐서 같은 것이 있는 순열로 바꾸든 일단 직순열로 배열하든 다 좋다.**

② 그 이후 항상 '몇 개를 몇 개로'를 활용해야 한다. 이는 직접 나열하면서 몇 개를 몇 개로 봐야 할지 파악할 수 있어야 한다.

같은 것이 있는 순열 기본 문제를 몇 개 풀어보자.

EX 03 ① 단어 $eleven$을 구성하고 있는 문자를 일렬로 배열하는 순열의 수를 구하시오.

② 그림과 같은 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



교과서적 해법

① e, l, e, v, e, n 중 e만 3번 들어가 있고, 나머지는 모두 다르다. 같은 것이 있는 순열 공식을 유도하듯이 풀어보자. 일단 3개의 e를 직순열로 보기 위해 e_1, e_2, e_3이라고 치환한 후 전체 문자를 모두 배열하면 $6!$이다. 그런데 e_1, e_2, e_3을 배열하는 방법의 수만큼을 1개로 봐야 하기 때문에

$3!$ 개를 1 개로

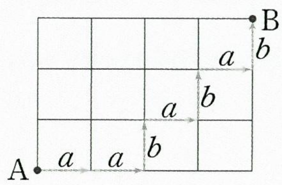
봐야 한다. 즉, $\dfrac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$이다.

이것은 유도과정으로 푼 것이고 같은 것이 있는 순열은 반드시 공식을 외워야 한다. 따라서 보자마자 $\dfrac{6!}{3!}=120$으로 계산할 수 있어야 한다.

교과서적 해법

② 그림과 같이 오른쪽으로의 이동과 위쪽으로 이동을 각각 a, b로 생각해 보면 결국 a, a, a, a, b, b, b를 배열하는 경우의 수와 같다.

따라서 $\dfrac{7!}{4!\,3!}=35$

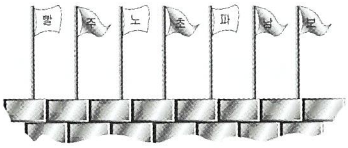


길 찾기 유형은 경우의 수의 매우 대표적인 문항인데, 어려워지면 단순히 같은 것이 있는 순열로 풀리는 것이 아니라 합의 법칙, 곱의 법칙 등이 다양하게 활용된다.

이제 순열에 관련된 문제를 몇 개 풀면서 경우의 수 문제를 푸는 팁을 정리해 볼 것이다. 최대한 스스로 풀어보도록 하고, 모르겠으면 해법을 보면서 이해하면 된다.

EX 04 [2004.4·가 30번] [변형]

그림과 같이 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라 색깔의 깃발이 각각 하나씩 있다. 7 개의 깃발을 모두 일렬로 배열하자. 빨강이 노랑과 파랑보다 왼쪽에 위치하도록 배열할 때, 다음 질문을 해결하시오. [4점]



① 빨강, 노랑, 파랑 깃발을 같은 깃발이라 생각해서 경우의 수를 구하시오.

② 직순열로 배열한 후 적당한 값을 곱하거나 나눠서 경우의 수를 구하시오.

③ 7 개의 네모 칸을 그린 후 깃발을 배열하면서 경우의 수를 구하시오.[1)]

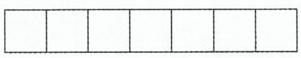
1) 조합에 대해 알고 있다면 ③도 풀어보도록 하자.

교과서적 해법

① 3 개의 깃발을 같은 깃발이라 가정하면 배열 방법의 수는 $\frac{7!}{3!}$이다. 그런데 같은 3 개의 깃발에 빨강, 노랑, 파랑을 배열하는데 (빨강 → 노랑 → 파랑)이나 (빨강 → 파랑 → 노랑)이 되어야 하므로 1 개로 센 것을 2 개로 봐야 한다. 즉 "1 개를 2 개로"에 해당한다. 따라서 $\frac{7!}{3!}\times 2=1680$

② 먼저 직순열로 배열하는 방법의 수는 $7!$이다. 이렇게 배열하면 빨강, 파랑, 노랑이 배열되는 $3!$가지의 모든 경우의 수를 센 것이 되는데, 그 $3!$개 중에서 2 가지 경우의 수인 (빨강 → 노랑 → 파랑)이나 (빨강 → 파랑 → 노랑)만 원하는 경우의 수다. 즉 "$3!$개를 2 개로"에 해당한다. 따라서 $7!\times\frac{2}{3!}=1680$

③ 다음과 같이 그림을 그린 후 빨강, 노랑, 파랑을 칠할 3 칸을 먼저 고르자.



어떤 3 칸을 고르든 뒤에 나올 경우의 수가 같으므로 곱의 법칙을 활용하면서 가장 앞의 3 칸을 뽑고 고정하자.

$${}_7C_3\times$$(가장 앞의 3 칸에 빨강, 노랑, 파랑을 배열하는 경우의 수)

그런데 3 칸에 배열하는 방법의 수는 (빨강 → 노랑 → 파랑)이나 (빨강 → 파랑 → 노랑)으로 $2!$가지이고, 남은 4 칸에는 무작위로 배열해야 하므로 $4!$가지이다. 따라서 ${}_7C_3\times 2!\times 4!=1680$

이처럼 **(1)서로 같은 것으로 봐서 푸는 방법, (2)서로 다른 것으로 봐서 일단 배열한 후 푸는 방법, (3)네모 칸을 그려서 배열한다는 발상으로 푸는 방법** 총 3 가지를 공부해 봤다. 각각의 장단점이 있으니 모든 발상을 공부하도록 하자.

이것은 결국 앞서 배운 다음 저자의 특강을 활용한 것이다.

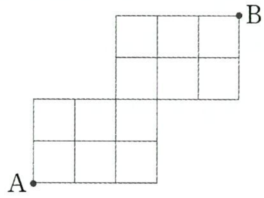
저자의 특강 TIP 경우의 수 문제를 푸는 Tip - '몇 개를 몇 개로'

① 어떻게든 이미 배운 순열로 바꾸어서 생각하면 된다. **모두 같은 것으로 봐서 같은 것이 있는 순열로 바꾸든 일단 직순열로 배열하든 다 좋다.**

② 그 이후 항상 '몇 개를 몇 개로'를 활용해야 한다. 이는 직접 나열하면서 몇 개를 몇 개로 봐야 할지 파악할 수 있어야 한다.

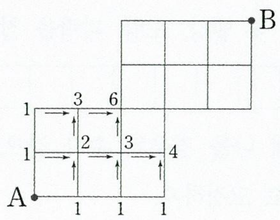
이번에는 조금 더 어려운 길 찾기 문제를 풀어보자.

EX 05 그림과 같은 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수를 구하시오.

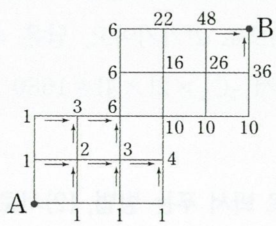


교과서적 해법1

일반적인 같은 것이 있는 순열로 찾기에는 무리가 있으므로 다음과 같이 합의 법칙을 이용하는 것이 좋다. 각 교차로까지 갈 수 있는 방법의 수를 쓰면서 숫자를 더하면 된다. 먼저 아래 그림과 같이 1을 다 표시하자. 그리고 각 지점으로 올 수 있는 화살표를 그리며 방법의 수를 다 더하면서 합해 나가자.



위 그림과 같이 각 지점에 올 수 있는 방향을 그린 다음 숫자를 더하면 합의 법칙에 의하여 그 지점에 올 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다. 이렇게 합의 법칙을 지속적으로 적용하면 다음과 같이 그릴 수 있다.



따라서 지점 B에 오는 두 방향의 경우의 수를 더하면 $48+36=84$이다.

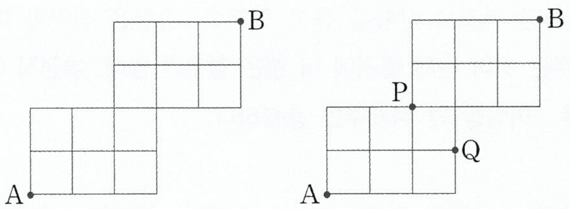
공부법 시리즈

Part 1

A

이처럼 길 찾기 문제를 같은 것이 있는 순열이 아닌 합의 법칙으로 푸는 방법도 꼭 익혀두길 바란다. 복잡한 길 찾기 문제일수록 큰 힘을 발휘한다. 이제 이를 같은 것이 있는 순열을 활용해서 풀어보자.

교과서적 해법2



왼쪽 그림의 A에서 B로 가는 최단 경로의 수를 찾을 때

$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$$

를 활용해서 구해보자. 여기서 만약 $n(S \cap T) = 0$이 되도록 집합 S, T를 설정한다면 단순 덧셈으로 경우의 수를 구할 수 있는데,[1] 위의 오른쪽 그림과 같이

점 P를 지나는 경로들의 집합 S, 점 Q를 지나는 경로들의 집합 T

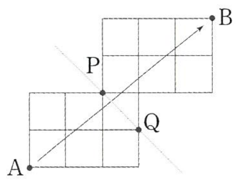
라 하면 점 P와 Q는 최단경로에서는 절대 동시에 지날 수 없으므로 교집합이 공집합이다.[2] 읽기 따라서 $n(S \cap T) = 0$이 되어 $n(S) + n(T)$만 구하면 된다.
즉,

$$n(S) + n(T) = \left(\frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!}\right) + \left(\frac{4!}{3!1!} \times \frac{4!}{2!2!}\right) = 84$$

앞서 배운 내용에서 '집합을 설정할 때, 교집합이 최소일수록 좋다.'라는 사실을 배웠다. 이번에는 다음 문제를 풀면서 집합을 설정하는 요령에 대하여 배워보자.

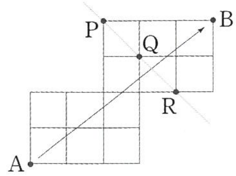
1) 만약 그렇지 못하면 교집합이 가장 작아지도록 잡는 것이 중요하다.

2) 길 찾기 문제에서 교집합이 없도록 집합 설정하는 방법은 다음 그림과 같다.



전체적인 경로의 방향 $A \to B$를 가로지르도록 직선을 그려서 직선과 만나는 점을 모두 기준으로 삼으면 된다. 단, 이동방향이 ↗이므로 기울기의 부호가 반대가 되도록 ↘방향으로 직선을 그어주어야 한다.

즉, 다음과 같이 집합을 3개로 나눠도 된다.



공부법 시리즈

EX 06 7개의 문자 a, a, b, b, c, d, e를 일렬로 나열할 때, a끼리 이웃하지 않고, b끼리 이웃하지 않는 모든 경우의 수를 구하시오.

기출문제를 조금 변형한 문제인데, 이러한 문제는 하나씩 모든 경우를 세기에는 조금 어렵다. 따라서 집합을 설정해 주는 것이 유리하다. 문제에서 "이웃하지 않는"이라는 부정적인 어조로 상황을 묻고 있지만, 집합을 설정할 때에는 **긍정적인 집합을 설정해 주는 것이 문제 풀기에 더 좋은 경우가 많다. 부정적 어조는 긍정적으로 집합 설정 후 "여집합"만 취해주면 충분하다.**

a끼리 이웃하는 나열의 집합$=A$　　b끼리 이웃하는 나열의 집합$=B$

라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A^C \cap B^C)$임을 알 수 있다.[1] 그런데 $n(A^C \cap B^C)$은 모양만 봐도 구하기가 곤란해 보인다. 따라서 드모르간의 법칙을 활용해서 여집합의 원소의 개수인 $n(A \cup B)$를 구하는 것이 편하다.[2] 전체 집합을 S라 하면

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!} - 5! = 600$$

이므로

$$n(A^C \cap B^C) = n(S) - n(A \cup B) = \frac{7!}{2!2!} - 600 = 660$$

이처럼 경우의 수에서 집합 설정이 상당히 유용하게 쓰이므로 다음과 같이 정리해 두자.

저자의 특강 TIP 경우의 수 문제를 푸는 Tip - '집합 설정'

① 교집합이 최대한 없을수록 합의 법칙을 활용하기에 유리하다.
② 집합은 부정적인 어조보다는 긍정적인 어조로 설정하는 것이 유리하다.
③ 집합을 설정한 후 필요에 따라 포제의 원리, 드모르간의 법칙을 활용한다.[3]

포제의 원리 : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

드모르간의 법칙(여집합) : $n(A^C \cap B^C) = n(S) - n(A \cup B)$

1) 일반적으로
"그리고"면 교집합
"또는"이면 합집합
이라 생각하면 된다.

2) 식으로 나타내면 다음과 같다.
$n(A^C \cap B^C)$
$= n(S) - n(A \cup B)$

3) 드모르간의 법칙을 활용한다는 것은 사실 여집합을 활용한다는 것이다. 문제를 풀다가 여집합을 세는 것이 편하다는 생각이 들면 여집합을 세어주는 것이 좋다.

EX 07 1부터 7까지의 자연수 중 서로 다른 2개의 숫자를 뽑아 일렬로 나열할 때, 소수를 적어도 1개 포함하는 경우의 수를 구하시오.

교과서적 해법

경우의 수를 세기 위해 경우를 나누려고 보면 소수인 2, 3, 5, 7 중 1개를 포함한 경우, 2개를 포함한 경우를 세야 한다. 그런데 2개를 포함한 경우를 일일이 구분하여 나누려고 보면 나눠야 하는 경우가 너무 많다고 느껴질 수 있다. 즉, 경우를 나누면서 합의 법칙으로 셀 것이 너무 많다는 생각이 들면 "여집합"을 생각해 보는 발상이 중요하다.

이 문제에서의 여집합은 뽑은 숫자 2개가 모두 소수가 아닌 것이므로, 전체 경우의 수인 ${}_7P_2$에서 1, 4, 6 중 2개를 뽑아 나열한 경우의 수를 빼면 된다. 따라서 ${}_7P_2 - {}_3P_2 = 36$.

이 문제에서처럼 경우의 수를 세는 중 수형도의 뒤가 다른 경우가 너무 많이 나와 합의 법칙을 매우 많이 적용해야 하면 여집합이 편한 경우가 많다. 그렇게 판단하는 것이 가장 일반적인데, 기초적인 문제에서는 EX07처럼 문제에 [적어도]라는 글자로 힌트를 준다. 정리하면 다음과 같다.

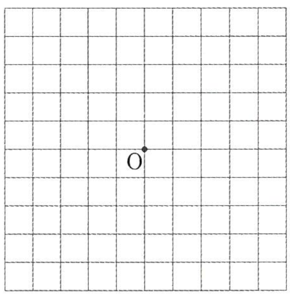
저자의 특강 TIP **경우의 수 문제를 푸는 Tip - '여집합'**

① 경우를 나누다 셀 것이 많다 싶으면 여집합을 생각해야 한다.
합의 법칙이 너무 많이 적용되면 주로 여집합을 생각해야 하는 문제이다.

② 특히 집합 설정을 해서 드모르간의 법칙을 활용하는 것 자체가 여집합 활용이다.

③ 쉬운 문제의 경우 발문에 '적어도'라는 글자로 힌트를 준다.

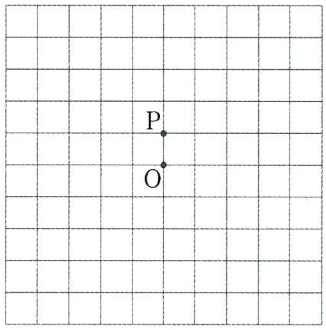
EX 08 [2009.9·나 11번] 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는? (단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.) [4점]



로봇이 가장 먼저 출발할 때, ← → ↑ ↓ 중 어디로 가도 수형도의 개수가 똑같이 나오는 것을 알 수 있다. 따라서 곱의 법칙을 활용하자.

4×(↑으로 갔을 때의 경우의 수)

이처럼 곱의 법칙을 활용하면서 ↑으로 간 것으로 고정하자.



다음과 같이 위 그림의 P의 위치에서 ← →으로 갈 때는 수형도의 개수가 같고 ↑으로 갈 때는 수형도의 개수가 다르다. 따라서 합의 법칙을 적용해야 한다.

4×{2×(→으로 갔을 때의 경우의 수) + 1×(↑으로 갔을 때의 경우의 수)}

이제부터는 곱의 법칙, 합의 법칙이 아닌 순수 수형도로 해결하자. →으로 갔을 때에는 총 8가지의 경우의 수가 나오고 ↑으로 갔을 때에는 총 9가지의 경우의 수가 나온다. 따라서

$$4\times(2\times8+1\times9)=100$$

이 문제도 역시 합의 법칙, 곱의 법칙, 수형도만 잘 구사하면 완벽하게 풀어낼 수 있으며 순열의 기호나 중복순열의 기호 자체가 중요한 문항이 아니다.

여기까지 순열에 대한 Tip 정리를 마치고 다음 페이지부터 예제를 풀며 공부해 보자.