# 정답 및 풀이

# Chapter 1. 함수의 극한과 연속

## Theme 1 함수의 극한과 부정형의 계산

006p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | ⑤ | 3 | ② | 4 | ① | 5 | ⑤ |
| 6 | ⑤ | 7 | ⑤ | 8 | ③ | 9 | ③ | 10 | ② |
| 11 | ③ | 12 | ② | 13 | 3 | 14 | ⑤ | 15 | ⑤ |
| 16 | ② | 17 | ⑤ | 18 | 7 | 19 | ② | 20 | ④ |
| 21 | 3 | | | | | | | | |

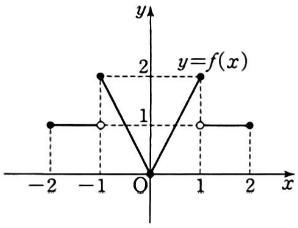
**1** $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$에서

$k\times 2-5=(2-k)^2$, $(k-3)^2=0$ $\quad\therefore k=3$

답 3

**2** 정의역에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

그러므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$\therefore \lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to -1-} f(x)=2+1=3$

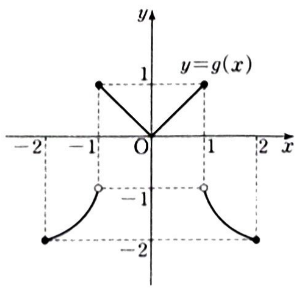
답 ⑤

**3** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{f(x)-f(1)\}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x+1}=\frac{1-3}{2}=-1$

답 ②

**4** 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 구간 $(0, 2]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그림과 같다.




따라서 $\lim_{x\to 1+} g(x)=-1$, $\lim_{x\to -1-} g(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 1+} g(x)+\lim_{x\to -1-} g(x)=(-1)+(-1)=-2$

답 ①

**5** $\lim_{x\to 0} f(x)=3$

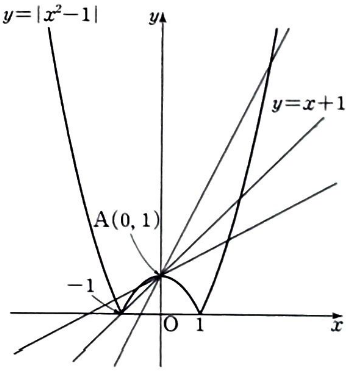
$x\to -1+$일 때 $x^2\to 1-$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x^2)=\lim_{x\to 1-} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)+\lim_{x\to -1+} f(x^2)=5$

답 ⑤

**6** $y=|x^2-1|$의 그래프와 점 $\mathrm{A}(0, 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선 $y=x+1$은 그림과 같다.




이때 직선 $y=x+1$은 그림과 같이 점 $(-1, 0)$을 지난다.

따라서 $a\to 1-$일 때 교점의 개수는 4, $a\to 1+$일 때 교점의 개수는 2이므로

$\lim_{a\to 1-} f(a)-\lim_{a\to 1+} f(a)=4-2=2$

답 ⑤

**7** ㄱ. $\lim_{x\to -1-}\{f(x)\}^2=(-1)^2=1$

$\lim_{x\to -1+}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\therefore \lim_{x\to -1}\{f(x)\}^2=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 0-} f(x-1)f(x)=(-1)\times 0=0$

$\lim_{x\to 0+} f(x-1)f(x)=1\times 0=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x-1)f(x)=0$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x^2+1)}=\frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 1+} f(x)}=\frac{0}{1}=0$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**8** 조건 (가)에서 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=2$이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. …… ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to 0-} g(f(x))=1$

이때 $f(x)=t$로 놓으면

$x \to 0-$일 때 $t \to 1-$이므로

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=\lim_{t\to 1-} g(t)=g(1)=1$ ...... ㉡

또 $\lim_{x\to 0+} g(f(x))=1$에서

$x \to 0+$일 때 $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(-1)=1$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$g(x)=2(x+1)(x-1)+1$

$\therefore g(2)=2\times 3\times 1+1=7$

답 ③

**9** $\lim_{x\to 2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2-4}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x}\times\frac{1}{(x+2)(x-2)}$

$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+2)}$

$=-\frac{1}{16}$

답 ③

**10** $\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+h}}\right)\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\frac{\sqrt{1+h}-1}{\sqrt{1+h}}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)-1}{h\sqrt{1+h}(\sqrt{1+h}+1)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2}$

답 ②

**11** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=3$에서 $x \to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)-2\}\{f(x)+1\}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}\times\lim_{x\to 0}\{f(x)+1\}$

$=3\times(2+1)$

$=9$

답 ③

**12** $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x \to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=2$

한편 $\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x+1)\}^2-4}{x}$에서 $x+1=t$로 놓으면

$x \to 0$일 때 $t \to 1$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x+1)\}^2-4}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{\{f(t)\}^2-4}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-2}{t-1}\times\lim_{t\to 1}\{f(t)+2\}$

$=3\times(2+2)=12$

답 ②

**13** $2x-1<xf(x)<2x+3$에서

$\frac{2x-1}{x}<f(x)<\frac{2x+3}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{(x+3)f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{x+3}\times\frac{1}{f(x)}=6\times\frac{1}{2}=3$

답 3

**14** $2x-1\le f(x)\le x^2$에서 $2x-2\le f(x)-1\le x^2-1$

$x>1$일 때

$\frac{2(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)-1}{x-1}\le\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$2\le\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-1}{x-1}\le 2$

$\therefore \lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$ ...... ㉠

$x<1$일 때

$\frac{2(x-1)}{x-1}\ge\frac{f(x)-1}{x-1}\ge\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$2\ge\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-1}{x-1}\ge 2$

$\therefore \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2$

답 ⑤

**15** 조건 (나)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값에 관계없이

$\lim_{x\to 1} g(x)=0$

$\therefore g(1)=0$

조건 (가)에서 $f(1)=f(2)=g(1)$이므로

$f(1)=0$, $f(2)=0$

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)$

조건 (나)에서 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가지고, 조건 (다)에서 $g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{k(x-1)^2(x-2)}=\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$

$\therefore k=2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)$, $g(x)=2(x-1)^2(x-2)$이므로

$f(3)+g(3)=2+8=10$

답 ⑤

**16** 조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ······ ㉠

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$ ······ ㉡

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ······ ㉢

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$ ······ ㉣

㉠에서 $\lim\limits_{x\to1}g(x)$의 값에 관계없이

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$

조건 (가)에서 $g(2)=0$, 즉 $\lim\limits_{x\to2}g(x)=0$이므로 ㉡에서

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$ $\quad\therefore f(2)=0$

㉢에서 $\lim\limits_{x\to3}g(x)$의 값에 관계없이

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=0$ $\quad\therefore f(3)=0$

이때 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이고,

$g(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$ ($a$, $b$는 상수)로 놓을 수 있다.

이를 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+ax+b)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+ax+b}\\&=\frac{-1}{2a+b+4}=2\end{aligned}$$

$\therefore 4a+2b+9=0$ ······ ㉤

㉣에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+ax+b)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-1)(x-3)}{x^2+ax+b}\\&=\frac{3}{4a+b+16}=2\end{aligned}$$

$\therefore 8a+2b+29=0$ ······ ㉥

㉤, ㉥에서 $a=-5$, $b=\dfrac{11}{2}$

따라서 $g(x)=(x-2)\left(x^2-5x+\dfrac{11}{2}\right)$이므로

$g(1)=-\dfrac{3}{2}$

답 ②

**17** ㄱ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$에서 $\lim\limits_{x\to1}g(x)$의 값에 관계없이

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ $\quad\therefore f(1)=0$ (참)

ㄴ. $f(x)=(x-1)h(x)$, $g(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a\neq0)$이라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)h(x)}{a(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{h(x)}{a(x+1)}=\frac{h(1)}{2a}=0\end{aligned}$$

이므로 $h(1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}h(x)=h(1)=0$ (참)

ㄷ. $g(x)=(x+1)(ax+b)$ $(a\neq0)$라 하면 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$이므로

$f(x)=k(x-1)(x+1)^2$ $(k\neq0)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{k(x-1)(x+1)^2}{(x+1)(ax+b)}=-2k\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{ax+b}=0$

이므로 $-a+b\neq0$

$\therefore \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(ax+b)}{x+1}=-a+b\neq0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**18** 조건 (나)에서 $a=2$, $a=4$일 때 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로 $f(2)=2$, $f(4)=4$이다.

조건 (가)에서 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 세 실근이 존재한다.

두 실근은 2, 4이고 나머지 한 실근을 $c$라 하면 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{x-f(x)}$의 값이 존재하고 $c-f(c)=0$이므로 $f(c)=0$이다.

$\therefore c=f(c)=0$

$f(x)=kx(x-2)(x-4)+x$로 놓으면

$f(3)=-3k+3=-3$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $f(x)=2x(x-2)(x-4)+x$이므로

$f(1)=7$

답 7

**19** 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x$가 만나는 점 A의 $x$좌표는 $x^2=2x$에서

$x(x-2)=0$, $x=2$ $(x>0)$

$\therefore \mathrm{A}(2, 4)$

한편 점 $\mathrm{P}(a, 4)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2-a$ $(0<a<2)$

또 $\mathrm{Q}(a, 2a)$, $\mathrm{R}(a, a^2)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=2a-a^2$ $(0<a<2)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a\to2-}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{AP}}}&=\lim_{a\to2-}\frac{2a-a^2}{2-a}\\&=\lim_{a\to2-}\frac{a(2-a)}{2-a}\\&=\lim_{a\to2-}a=2\end{aligned}$$

답 ②

**20** $\mathrm{P}(t, -2t^2+1)$, $\mathrm{Q}(0, 1)$이므로

$\{f(t)\}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2=(t-0)^2+(-2t^2+1-1)^2=t^2+4t^4$

$\overline{\mathrm{QH}}=1-(-2t^2+1)=2t^2$

이고, $\mathrm{R}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$이므로

$g(t)=\dfrac{1}{2}\times2t^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\{f(t)\}^2}{g(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^2+4t^4}{\frac{\sqrt{2}}{2}t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1+4t^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

답 ④

**21** 원점 O에서 직선 $x+y-t=0\ (t>0)$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|-t|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{t}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{x+1}-1=-x+t$에서 이차방정식 $x^2-tx-t=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t,\ \alpha\beta=-t$

이므로

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=t^2+4t$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{2}\,|\beta-\alpha|=\sqrt{2t^2+8t}$

$S(t)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2t^2+8t}\times\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{t\sqrt{t^2+4t}}{2}$

이므로

$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\sqrt{t^2+4t}}{2t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2}}{2t}=\frac{1}{2}$

따라서 $p=2,\ q=1$이므로

$p+q=3$

답 3

## Theme 2 다항함수의 결정

013p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | 2 | ③ | 3 | 4 | 4 | ⑤ | 5 | ② |
| 6 | 36 | 7 | 15 | 8 | 12 | 9 | ① | 10 | ④ |
| 11 | 22 | | | | | | | | |

**1** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=6$에서 $f(1)=0,\ f'(1)=6$이므로

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ ($a$는 상수)

라 하면

$f'(x)=2(x+a)+2(x-1)$

$f'(1)=2(a+1)=6\qquad\therefore\ a=2$

따라서 $f'(x)=2(x+2)+2(x-1)$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=10$

답 ①

**다른 풀이**

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이고,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=6$이므로

$f(x)=2(x-1)^2+6(x-1)$

따라서 $f'(x)=4(x-1)+6$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=10$

**2** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2-x}=2$에서

$f(x)-3x^3=2x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 상수)

라 하면

$f(x)=3x^3+2x^2+ax+b$ ······ ㉠

$f'(x)=9x^2+4x+a$ ······ ㉡

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=4$에서 $f(0)=3,\ f'(0)=4$이므로 ㉠, ㉡에서

$a=4,\ b=3$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+4x+3$이므로

$f(1)=12$

답 ③

**다른 풀이**

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2-x}=2,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=4$에서

$f(x)-3=3x^3+2x^2+4x$

$\therefore\ f(x)=3x^3+2x^2+4x+3,\ f(1)=12$

**3** $\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\times(-1)=-\frac{1}{8}$

에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$이므로

$f(0)=0,\ f'(0)=8$

$f(x)$는 $x$를 인수로 가지고, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=a$에서 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=kx(x-2)^2$ ($k$는 상수)

이라 하면

$f'(x)=k(x-2)^2+2kx(x-2)$

$f'(0)=4k=8\qquad\therefore\ k=2,\ f(x)=2x(x-2)^2$

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)^2}{(x-2)^2}=4=a$

답 4

**다른 풀이**

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=a$에서

$f(x)=p(x-2)^3+a(x-2)^2$ ($p$는 상수)

이라 하면

$f'(x)=3p(x-2)^2+2a(x-2)$

$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}\times(-1)=-\frac{1}{8}$

에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=8$이므로

$f(0)=-8p+4a=0,\ f'(0)=12p-4a=8$

$\therefore\ p=2,\ a=4$

**4** $f(x)$의 차수가 1이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x^2}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)+x}=\frac{1}{2}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$f(x)$의 차수가 3이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x^2}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)+x}=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$f(x)$의 차수가 4 이상이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x^2}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)+x}=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)$의 차수는 2이다.

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x+2)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}\times\frac{1}{5}=2$$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=10$이므로 $f(3)=0$, $f'(3)=10$이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-3)(x+a)$ ($a$는 상수)

라 하면

$f'(x)=(x+a)+(x-3)$

$f'(3)=a+3=10$, $a=7$

따라서 $f(x)=(x-3)(x+7)$이므로

$f(2)=-9$

답 ⑤

**참고**

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=10$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-3)^2+10(x-3)$

에서 $f(2)=-9$를 구할 수도 있다.

**5** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 삼차함수 $f(x)$는 기함수이고

$f(x)=ax^3+bx$ ($a$, $b$는 상수)

라 하면

$f'(x)=3ax^2+b$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{3}=4$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=12$이므로 $f(1)=0$, $f'(1)=12$이다.

$a+b=0$, $3a+b=12$에서 $b=-6$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=b=-6$

답 ②

**6** $f(1)=0$에서 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지고, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$에서 $f(0)=f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x^2$을 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=8$에서 $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

$f(x)=ax^2(x-1)(x-2)$ ($a$는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax^2(x-1)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}ax^2(x-1)=4a=8 \qquad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=2x^2(x-1)(x-2)$이므로

$f(3)=36$

답 36

**7** $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(t)}{t^3}-2}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-2t^3}{t^2}=1$$

$f(x)-2x^3=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)

라 하면

$f(x)=2x^3+x^2+ax+b$ …… ㉠

$f'(x)=6x^2+2x+a$ …… ㉡

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$에서 $f(1)=0$, $f'(1)=6$이므로 ㉠, ㉡에서

$a=-2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2-2x-1$이므로

$f(2)=15$

답 15

**8** $\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=x^2(x+a)$라 하면 모든 실수 $x$에 대하여 $(x+1)f(x)\geq0$이므로 $x^2(x+a)(x+1)\geq0$에서 $a=1$이어야 한다.

따라서 $f(x)=x^2(x+1)$이므로

$f(2)=12$

답 12

**9** $f(x)$의 최고차항을 $ax^n$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 $nax^{n-1}$이다.

조건 (나)에서 최고차항은

$2ax^n=x\times nax^{n-1}=nax^n$

이므로 $2a=na$에서 $n=2$

$f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

조건 (나)에서

$$2ax^2+2bx=(x+1)(2ax+b)+1$$
$$=2ax^2+(2a+b)x+b+1$$

$2b=2a+b$, $0=b+1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$이므로

$f(2)=-4$

답 ①

**10** $a=0$이면 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=0$에서 $f(x)+g(x)$는 $x^2$을 인수로 가져야 하고, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^2}=0$에서 $f(x)+g(x)$의 차수는 1 이하이므로 모순이다.

즉 $a\neq0$이고,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=a$$

에서 $f(x)+g(x)=ax(x+1)$ …… ㉠이고,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x}=a$이므로 $f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 $a$인 일차함수이다.

즉 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항은 각각 $x^2$이어야 하므로 ㉠에서

$a=2$, $f(x)+g(x)=2x^2+2x$

$f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이고, $f(1)-g(1)=0$이므로

$f(x)-g(x)=2(x-1)$

따라서 $f(x)=\frac{2x^2+2x+2(x-1)}{2}=x^2+2x-1$이므로

$f(2)=7$

답 ④

**11** 조건 (가)에서

$f(x)=f(0)x^3+f(-1)x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)

라 하면 $f(0)=b$이므로

$f(x)=f(0)x^3+f(-1)x^2+ax+f(0)$

이고,

$f(-1)=-f(0)+f(-1)-a+f(0)$

이므로 $a=0$이다.

$\therefore f(x)=f(0)x^3+f(-1)x^2+f(0)$ …… ㉠

조건 (나)에서 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) → 0이어야 한다.

$\therefore f(0)=f(1)$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=2f(0)+f(-1)$이므로

$f(-1)=-f(0)$

$\therefore f(x)=f(0)x^3-f(0)x^2+f(0)$

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(0)(x^3-x^2)}{x^n}=2$$

이고, $f(0)=0$이면 모순이므로 $f(0)\neq0$이다.

$n=1$이면 $\lim_{x\to0}\frac{f(0)(x^3-x^2)}{x}=0$이므로 모순이고,

$n\geq3$이면 $\lim_{x\to0}\frac{f(0)(x^3-x^2)}{x^n}$의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $n=2$이고, $\lim_{x\to0}\frac{f(0)(x^3-x^2)}{x^2}=-f(0)=2$에서

$f(0)=-2$이므로

$f(x)=-2x^3+2x^2-2$

$\therefore f(n-4)=f(-2)=22$

답 22

## Theme 3 여러 가지 함수의 연속

016p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 2 | ③ | 3 | ④ | 4 | ① | 5 | ① |
| 6 | ② | 7 | 8 | 8 | ④ | 9 | 155 | 10 | ⑤ |
| 11 | ① | 12 | ③ | 13 | ⑤ | 14 | ② | 15 | ④ |
| 16 | ③ | 17 | 32 | 18 | ① | 19 | ③ | 20 | ⑤ |
| 21 | ① | 22 | ② | | | | | | |

**1** ㄱ. $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=\frac{x(x+1)}{x^2-x}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $p(x)=x+1$, $q(x)=(x-1)^2$이라 하면 $p(0)=q(0)=1$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

**2** $g_1(x)=x+a$, $g_2(x)=x(x+1)^2$이라 하면 $g_1(1)=g_2(1)=b$이어야 하므로

$a+1=4=b$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로

$a+b=7$

답 ③

**3** $g_1(x)=x^2-ax$, $g_2(x)=b-x$라 하면

$g_1(-1)=g_2(-1)$, $g_1(1)=g_2(1)$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-ax=b-x$, 즉 $x^2-(a-1)x-b=0$의 두 근이 $-1$, 1이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)+1=a-1$ $\quad\therefore a=1$

$(-1)\times1=-b$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore ab=1$

답 ④

**4** $g_1(x)=x^2$, $g_2(x)=6x+k$라 하면 $g_1(a)=g_2(a)$, 즉 $a^2=6a+k$를 만족시키는 실수 $a$의 개수가 1이어야 하므로 $a$에 대한 이차방정식 $a^2-6a-k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(-k)=0$ $\quad\therefore k=-9$

답 ①

**5** $\{f(1)\}^2=\{f(3)\}^2$이어야 하므로

$(1-a)^2=(9+a)^2$

$a^2-2a+1=a^2+18a+81$, $20a=-80$

$\therefore a=-4$

답 ①

**6** $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x+b)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+b)$$
$$=1+b=c$$

$x^3+ax+b=(x-1)^2(x+b)$에서

$x^3+ax+b=x^3+(b-2)x^2+(-2b+1)x+b$

$0=b-2$, $a=-2b+1$이므로

$a=-3$, $b=2$, $c=3$

$\therefore a+b+c=2$

답 ②

**다른 풀이**

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}=c$에서

$x^3+ax+b=(x-1)^2(x-1+c)$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$

㉠의 우변을 전개하면

$x^3+ax+b=x^3+(c-3)x^2+(3-2c)x+c-1$

에서 $c-3=0$

$\therefore c=3$

$\therefore a+b+c=(-1)+3=2$

**7** $f(x)g(x)=(x-1)^2$에서 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 연속이고 $g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{f(x)}=1$$

$x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 극한값이 0이 아닌 상수이므로

$f(x)=(x-1)^2(x^2+px+q)$ ($p$, $q$는 상수)

라 하면

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+px+q}=1$$

$1+p+q=1$ $\quad\therefore p+q=0$ ...... ㉠

$g(2)=2$이므로

$\frac{1}{2^2+2p+q}=2$, $4+2p+q=\frac{1}{2}$

$\therefore 2p+q=-\frac{7}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $p=-\frac{7}{2}$, $q=\frac{7}{2}$이므로

$$f(x)=(x-1)^2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}\right)$$

$\therefore f(3)=8$

답 8

**8** 조건 (가)에 의하여

$f(0)=-f(0)$, $f(0)=0$

$\therefore a=0$

$g_1(x)=x^2-2x$, $g_2(x)=2x+b$라 하면 $g_1(2)=g_2(2)$이어야 하므로

$0=b+4$ $\quad\therefore b=-4$

$\therefore f(-3)=-f(3)=-(2\times3-4)=-2$

답 ④

**9** $g_1(x)=3x$, $g_2(x)=a(x-3)^2+b$라 하면 $g_1(3)=g_2(3)$이어야 하므로

$b=9$

$f(x+6)=f(x)$에서 $f(6)=f(0)$이어야 하므로 $g_2(6)=g_1(0)$에서

$9a+9=0$ $\quad\therefore a=-1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}3x & (0\le x<3)\\-(x-3)^2+9 & (3\le x<6)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}f(k)=5\sum_{k=1}^{6}f(k)=5(3+6+9+8+5+0)=155$$

답 155

**10** $g_1(x)=-x+1$, $g_2(x)=2x^2+ax+b$라 하면 $g_1(1)=g_2(1)$이어야 하므로

$0=a+b+2$ $\quad\therefore a+b=-2$ ...... ㉠

$f(x+2)=f(x)+1$에서 $f(2)=f(0)+1$이어야 하므로

$g_2(2)=g_1(0)+1$에서

$2a+b+8=2$ $\quad\therefore 2a+b=-6$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4$, $b=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\le x<1)\\2(x-1)^2 & (1\le x<2)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{11}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)+1=f\left(\frac{3}{2}\right)+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

**11** $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$1+a=-1+2a$

$\therefore a=2$

$g(1)=0$일 때

$1+a+3=0$

$\therefore a=-4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-4$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은 $-2$이다.

답 ①

**12** ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=1$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(f(x))=f(1)=2\neq\lim_{x\to1-}f(f(x))$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

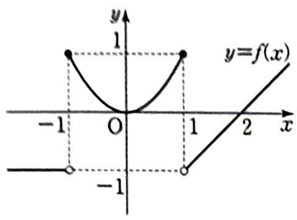
답 ③

**참고**

ㄷ.

| $x$ | $\xrightarrow{f}$ | $f(x)$ | $\xrightarrow{f}$ | $f(f(x))$ |
|---|---|---|---|---|
| $1-$ | $\to$ | $0+$ | $\to$ | $1$ |
| $1$ | $\to$ | $2$ | $\to$ | $1$ |
| $1+$ | $\to$ | $1$ | $\to$ | $2$ |

**13** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




ㄱ. $t=-x$로 놓으면 $x \to 1-$일 때 $t \to -1+$, $x \to 1+$일 때 $t \to -1-$이므로

$$\lim_{x \to 1-} f(x)f(-x) = \lim_{x \to 1-} f(x) \times \lim_{t \to -1+} f(t)$$
$$= 1 \times 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x)f(-x) = \lim_{x \to 1+} f(x) \times \lim_{t \to -1-} f(t)$$
$$= (-1) \times (-1) = 1$$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)f(-x) = 1$ (참)

ㄴ. $|f(x)| = \begin{cases} 1 & (x<-1) \\ x^2 & (-1 \le x \le 1) \\ |x-2| & (x>1) \end{cases}$

이고, $g(x)=x^2$, $h(x)=|x-2|$라 하면 $g(1)=h(1)=1$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $t=f(x)$라 하면 $x \to -1-$일 때 $t=-1$, $x \to -1+$일 때 $t \to 1-$이므로

$$\lim_{x \to -1-} (f \circ f)(x) = f(-1) = 1$$
$$\lim_{x \to -1+} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 1-} f(t) = 1$$
$$(f \circ f)(-1) = f(1) = 1$$

따라서 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**14** $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}$에서 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$x \ne 1$이면 $f(x)=x^2+x-1$

한편 $(f \circ f)(x) = \dfrac{\{f(x)\}^3-2f(x)+1}{f(x)-1}$이므로

$f(x)-1=0$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2 \ (x \ne 1)$

즉 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

따라서 $a=1$ 또는 $a=-2$이므로 모든 실수 $a$의 값의 합은

$1+(-2)=-1$

답 ②

**15** $x^2+ax+2a=0$ …… ㉠인 실수 $x$가 존재하지 않아야 한다.

㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2-8a=a(a-8)<0 \qquad \therefore 0<a<8$

따라서 정수 $a$는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ④

**16** (i) $f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$1^2+a=1+2 \qquad \therefore a=2$

(ii) $f(x)$가 $x=1$에서 불연속일 때, 즉 $a \ne 2$일 때

$g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=0$이어야 한다.

$g(1)=1-a=0 \qquad \therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) \ne 0$이므로 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$2+1=3$

답 ③

**17** $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 연속, $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이고, $\lim_{x \to -1-} f(x)$의 값과 $\lim_{x \to -1+} f(x)$의 값이 존재하므로

$g(-1)=0$

$f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)g(x) = f(1)g(1)$에서

$$\lim_{x \to 1-} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1+} 2xg(x) = 2g(1)$$

$\lim_{x \to 1-} \dfrac{g(x)}{x-1} = 2g(1)$에서 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로

$g(1)=0$이고, $\lim_{x \to 1-} \dfrac{g(x)}{x-1}=0$이므로 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

따라서

$g(x)=a(x+1)(x-1)^2$

이라 하면 $g(0)=2$이므로

$a=2$

$\therefore g(x)=2(x+1)(x-1)^2$, $g(3)=32$

답 32

**18** $h(x)=f(x-1)$이라 하면

$x=-1$에서 $f(x)$는 불연속이고 $h(x)$는 연속이지만 $h(-1)=1 \ne 0$이므로 $f(x)h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

$x=1$에서 $f(x)$는 함숫값과 극한값을 갖지만 불연속이고 $h(x)$는 연속, $h(1)=0$이므로 $f(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$x=0$에서 $h(x)$는 함숫값과 좌극한값, 우극한값을 갖지만 불연속이고 $f(x)$는 연속, $f(0)=0$이므로 $f(x)h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$x=2$에서 $h(x)$는 함숫값과 극한값을 갖지만 불연속이고 $f(x)$는 연속, $f(2)=0$이므로 $f(x)h(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$\therefore a=-1$

답 ①

**19** 원 $x^2+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x \pm \sqrt{2}$

$\therefore f(t) = \begin{cases} 0 \ (t<-\sqrt{2} \text{ 또는 } t>\sqrt{2}) \\ 1 \ (t=-\sqrt{2} \text{ 또는 } t=\sqrt{2}) \\ 2 \ (-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}) \end{cases}$

그러므로 함수 $f(t)$는 $t=-\sqrt{2}$, $t=\sqrt{2}$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이고, 이차함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $g(-\sqrt{2})=0$, $g(\sqrt{2})=0$ 이어야 한다.
따라서 $g(t)=2(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=2(t^2-2)$이므로
$g(3)=2\times7=14$

답 ③

**20** $x\le0$일 때, $f(x)=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.
$x>0$일 때, $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -4)$이다.

$$\therefore g(t)=\begin{cases}1 & (t<-4 \text{ 또는 } t>1)\\ 2 & (t=-4 \text{ 또는 } t=1)\\ 3 & (-4<t<1)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=-4$, $t=1$을 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이고, 이차함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(t)h(t)$가 모든 실수 $t$에서 연속이려면 $h(-4)=h(1)=0$이어야 한다.
따라서 $h(t)=(t+4)(t-1)$이므로
$h(3)=14$

답 ⑤

**21** 함수 $f(x)$는 $x=1$을 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때 함수 $y=f(x-a)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x-a)$는 $x=a+1$을 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이다.
$a\ne0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a+1$에서 연속이려면
$f(a+1)=0$
이때 $f(x)=0$인 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로
$a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$
$x=-1$, $x=2$에서는 함수 $f(x)$가 연속이고 함숫값이 0이므로 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=-1$, $x=2$에서 연속이다.
$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$
한편 $a=0$, 즉 $x=1$일 때를 살펴보면 다음과 같다.
(i) $\lim_{x\to1-}f(x)f(x)=0$
(ii) $\lim_{x\to1+}f(x)f(x)=1$
(iii) $x=1$일 때, $f(1)\times f(1)=0$
(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
따라서 구하는 모든 실수 $a$의 값은 $-2$, $1$이므로 그 곱은
$(-2)\times1=-2$

답 ①

**22** $g_1(x)=x^2-5x+3a$, $g_2(x)=ax^2-bx-4$라 하면
$g_1(1)=g_2(1)$이어야 하므로
$3a-4=a-b-4$ $\quad\therefore b=-2a$
즉 $g_2(x)=ax^2+2ax-4$이고, 곡선 $y=g_2(x)$의 대칭축은 직선 $x=-1$이므로 구간 $(1, 2)$에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하려면
$g_2(1)g_2(2)=(3a-4)(8a-4)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{2}<a<\frac{4}{3}$
따라서 $a=1$, $b=-2$이므로
$a+b=-1$

답 ②

# Chapter 2. 미분

## Theme 4 미분계수는 평균변화율의 극한값이다

024p

| 1 | ⑤ | 2 | ⑤ | 3 | ③ | 4 | ① | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**1** ㄱ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기보다 작고, $b-a>0$이므로
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ $\quad\therefore f(b)-f(a)<b-a$ (거짓)
ㄴ. 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기가 원점과 점 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 크고, $a>0$, $b>0$이므로
$\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$ $\quad\therefore bf(a)>af(b)$ (참)
ㄷ. 두 점 $(a, 0)$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기가 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크고, $b-a>0$이므로
$f'(b)<\frac{f(b)}{b-a}$ $\quad\therefore (b-a)f'(b)<f(b)$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**2** $f(x)=-x^2+2x$에 대하여 닫힌구간 $[a_n, 2]$에서의 평균변화율은
$\frac{f(a_n)-f(2)}{a_n-2}=\frac{(-a_n^2+2a_n)-0}{a_n-2}=-a_n$ ······ ㉠
한편 $f'(x)=-2x+2$이므로 $x=a_{n+1}$에서의 순간변화율은
$f'(a_{n+1})=-2a_{n+1}+2$ ······ ㉡
㉠과 ㉡이 서로 같아야 하므로 $-a_n=-2a_{n+1}+2$
$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ ······ ㉢
ㄱ. $a_1=1$이므로 ㉢에서 $a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ (참)
ㄴ. $a_1=1$, $a_2=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$
$a_3=\frac{1}{2}a_2+1=1-\frac{1}{4}+1=2-\frac{1}{4}$
$a_4=\frac{1}{2}a_3+1=1-\frac{1}{8}+1=2-\frac{1}{8}$
$a_5=\frac{1}{2}a_4+1=1-\frac{1}{16}+1=2-\frac{1}{16}$
⋮
$\therefore a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$ (참)
ㄷ. $f'(x)=-2x+2$이므로 $f'(a_n)=-2a_n+2=\frac{1}{2^{n-2}}-2$
$\therefore f'(a_5)=\frac{1}{2^3}-2=-\frac{15}{8}$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**참고**
닫힌구간 $[a_n, 2]$에서의 이차함수 $f(x)$의 평균변화율은 $f'\left(\frac{a_n+2}{2}\right)$와 같으므로 $a_{n+1}=\frac{a_n+2}{2}$

**3** $0<a<b<1$인 임의의 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(a)$이므로 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하다.

$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$이므로 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기보다 항상 작다.

따라서 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

답 ③

**4** 점 $(-a, f(-a))$와 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 $2a^2+6a$이므로

$\sqrt{\{a-(-a)\}^2+\{f(a)-f(-a)\}^2}=2a^2+6a$

$4a^2+\{f(a)-f(-a)\}^2=4a^2(a+3)^2$

양변을 $4a^2$으로 나누면

$1+\left\{\dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}\right\}^2=(a+3)^2$

$\left\{\dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}\right\}^2=(a+3)^2-1$

$\displaystyle\lim_{a\to 0+}\left\{\dfrac{f(a)-f(-a)}{2a}\right\}^2=\lim_{a\to 0+}\{(a+3)^2-1\}$

$\{f'(0)\}^2=8$

이때 $f(x)$는 감소하는 함수이므로 $f'(0)=-2\sqrt{2}$

답 ①

**5** $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha-h)|}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha)|-|g(\alpha-h)|+|g(\alpha)|}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha)|}{h}+\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha-h)|-|g(\alpha)|}{-h}$

에서

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha)|}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha-h)|-|g(\alpha)|}{-h}$

는 각각 함수 $|g(x)|$의 $x=\alpha$에서의 우미분계수와 좌미분계수이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\dfrac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha-h)|}{h}=0$

을 만족시키는 $\alpha$에 대하여 $g'(\alpha)=0$ 또는 $g(\alpha)=0$ 또는 $f(\alpha)=0$이다.

이를 만족시키는 $\alpha$의 값의 개수가 5이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 꼭짓점과 $x$축 사이의 거리가 3 이하이다.

$\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, $\alpha_5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 $x$좌표를 $a$, 공차를 $d$ $(d>0)$라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 $a-d$, $a+d$이고, 방정식 $g(x)=0$의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근이 각각 $a-2d$, $a+2d$이다.

$f(x)=(x-a+d)(x-a-d)$

이고, $f(a-2d)=f(a+2d)=3$이므로

$3d^2=3 \qquad \therefore d=1$

따라서 함수

$f(x)=(x-a+1)(x-a-1)$

의 최솟값 $m$은 $m=f(a)=-1$이므로

$m^2=1$

답 1

## Theme 5 도함수는 원래의 함수에서 유도된 함수다

026p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ① | 3 | ③ | 4 | 12 | 5 | ① |
| 6 | ② | 7 | 36 | 8 | ⑤ | 9 | ④ | 10 | ① |
| 11 | ① | 12 | 12 | 13 | 3 | | | | |

**1** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+ah)-f(2)}{h}=a\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+ah)-f(2)}{ah}$

$=a\times f'(2)$

$f'(x)=2x+a$이므로

$a(4+a)=-4$, $(a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

$\therefore f(a)=f(-2)=11$

답 ②

**2** $\displaystyle\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x^2)-f(x+6)}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x^2)-f(4)}{(x+2)(x-2)}\times(x-2)-\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x+6)-f(4)}{x+2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\times\lim_{x\to -2}(x-2)-\lim_{t\to 4}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$

$=-4f'(4)-f'(4)$

$=-5f'(4)=-5\times 2=-10$

답 ①

**3** $\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이고 $x=\dfrac{1}{t}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(\dfrac{3}{x}\right)-1\right\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(\dfrac{3}{x}\right)-f(0)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0+}\dfrac{f(3t)-f(0)}{t}$

$\displaystyle=3\lim_{t\to 0+}\dfrac{f(3t)-f(0)}{3t}=3f'(0)=3$

답 ③

**4** $\dfrac{1}{x}=h$라 하면 $x\to\infty$일 때 $h\to 0+$이고 $x=\dfrac{1}{h}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-g\left(2+\dfrac{3}{x}\right)\right\}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(2+h)-g(2+3h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\left\{\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}-3\times\dfrac{g(2+3h)-g(2)}{3h}\right\}$

$=f'(2)-3g'(2)=3-3\times(-3)=12$

답 12

**5** $\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-1}{h}=3$에서 $h\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\{f(2+h)-1\}=0$, $f(2)=1$

$\displaystyle\therefore \lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=3$

또 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-2}{x^2-4}=1$에서 $x\to 2$일 때, (분모) $\to 0$이므로

$\lim_{x \to 2}\{g(x)-2\}=0$

따라서 $g(2)=2$이므로

$$\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-2}{x^2-4}=\lim_{x \to 2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{1}{4}\times g'(2)=1$$

$\therefore g'(2)=4$

한편 $\lim_{x \to 2}\frac{f(x)g(x)-2}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$는

$y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수이고,

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=3\times2+1\times4=10$

답 ①

**6** $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}=15$에서

$\lim_{x \to 0}f(x)g(x)=f(0)g(0)=3f(0)=0 \qquad \therefore f(0)=0$

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x \to 0}g(x)$$
$$=f'(0)\times3=15$$

$\therefore f'(0)=5$

답 ②

**7** 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{3-(-3)}{2-(-1)}=2=f'(2)$

$g(x)=(x+1)^2f(x)$에 대하여

$g'(x)=2(x+1)f(x)+(x+1)^2f'(x)$

$f(2)=3$이므로

$g'(2)=2\times3\times f(2)+3^2\times f'(2)=2\times3\times3+3^2\times2=36$

답 36

**8** $g(x)=x^2f(x)+4$라 하면 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g(2)=4f(2)+4=-4+4=0$

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)=-4+8=4$

$\therefore \lim_{x \to 2}\frac{x^2f(x)+4}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=4$

답 ⑤

**9** $f(x)=x^{2n}-x-2$라 하면 $f(-1)=0$이므로

$$\lim_{x \to -1}\frac{x^{2n}-x-2}{x^2-1}=\lim_{x \to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}$$
$$=f'(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$$

$f'(-1)=-9 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(x)=2nx^{2n-1}-1$이므로 ㉠에서

$2n\times(-1)-1=-9 \qquad \therefore n=4$

답 ④

**10** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이므로

$f(-2x)=f(2x)$

$$\therefore \lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{f(-2x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{f(2x)-f(2)}$$
$$=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x \to 1}\frac{1}{\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}}\times\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{2x-2}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{\lim_{x \to 1}\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}}\times\frac{1}{2}$$

$2x=t$로 놓으면 $x \to 1$일 때 $t \to 2$이므로

$$f'(1)\times\frac{1}{\lim_{x \to 1}\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{\lim_{t \to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{f'(2)}\times\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

답 ①

**11** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=-f(x)$

즉 $f(-2)=-f(2)$, $f(-4)=-f(4)$

$$\therefore \lim_{x \to 2}\frac{f(x)+f(-2)}{f(x^2)+f(-4)}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{f(x^2)-f(4)}$$
$$=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x \to 2}\frac{1}{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}\times\lim_{x \to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$$
$$=f'(2)\times\lim_{x \to 2}\frac{1}{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}\times\frac{1}{4}$$

$x^2=t$로 놓으면 $x \to 2$일 때 $t \to 4$이므로

$$f'(2)\times\lim_{x \to 2}\frac{1}{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}\times\frac{1}{4}$$
$$=f'(2)\times\lim_{t \to 4}\frac{1}{\frac{f(t)-f(4)}{t-4}}\times\frac{1}{4}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{f'(4)}\times\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}=1$$

답 ①

**12** $f(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)$ ($a$는 상수, $a>0$)이라 하면

$f'(x)=a\{(x+1)(x-1)+(x+2)(x-1)+(x+2)(x+1)\}$

$f'(0)=-a=-2$이므로 $a=2$

$\therefore k=f'(1)=2\times3\times2=12$

답 12

**13** (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

$f(a)=f(1)$, $f'(a)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-a)^2+k$ ($k$는 실수)

라 하면

$f'(1)=(1-a)^2=4 \qquad \therefore a=3\ (a>0)$

답 3

## Theme 6 접선의 방정식과 활용

030p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 27 | 2 | ④ | 3 | 7 | 4 | 29 | 5 | ② |
| 6 | ⑤ | 7 | ② | 8 | ④ | 9 | ① | 10 | ⑤ |

**1** $f(x)=x^3$이라 하면 $f'(x)=3x^2$이고, 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=t^3$, $f'(t)=3t^2$이므로

$\frac{t^3-0}{t-2}=3t^2$, $t^3=3t^3-6t^2$, $2t^2(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

$B(0, 0)$, $C(3, 27)$이라 하면 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 27=27$

답 27

**2** 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 직선 AB와 $x$축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 60°이다.

즉 직선 AB의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.

한편 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$에서 $y'=-x$

직선 AB와 곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$가 접하는 접점을 $\left(a, -\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}\right)$라 하면 접선의 기울기는 $-a$이므로

$-a=\sqrt{3}$ $\quad\therefore a=-\sqrt{3}$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{3}, 1)$이므로 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}(x+\sqrt{3})+1$, 즉 $y=\sqrt{3}x+4$

이때 $B\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$이므로 정삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$3\overline{BC}=6\overline{OB}=6\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$

답 ④

**3** $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$

한편 $g(x)=xf(x)+1$이므로 $g(1)=f(1)+1=2+1=3$

또 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)=2+3=5$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=5(x-1)+3$, 즉 $y=5x-2$

이때 $a=5$, $b=-2$이므로

$a-b=7$

답 7

**4** $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x^2-1}=1$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to$ 0이므로 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉 $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(1)=g(1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)+g(1)-g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}\times\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$

$=\frac{1}{2}\{f'(1)-g'(1)\}=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

한편 $g(x)=2xf(x)+3$이므로 $g(1)=2f(1)+3$

㉠에서 $g(1)=2g(1)+3$ $\quad\therefore g(1)=-3$, $f(1)=-3$

또 $g'(x)=2f(x)+2xf'(x)$이므로

$g'(1)=2f(1)+2f'(1)=2f'(1)-6$

㉡에서 $f'(1)=g'(1)+2$이므로

$g'(1)=2\{g'(1)+2\}-6$ $\quad\therefore g'(1)=2$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=2(x-1)-3$, 즉 $y=2x-5$

이때 $a=2$, $b=-5$이므로 $a^2+b^2=2^2+(-5)^2=29$

답 29

**5** 점 $P(a, b)$가 곡선 $y=x^3$ 위의 점이므로 $b=a^3$

$\overline{OQ}:\overline{OR}=2:1$이고, $\overline{OR}=a$이므로 $\overline{OQ}=2a$

점 Q의 좌표가 $(0, -2a)$이고, 점 $P(a, a^3)$에서의 접선의 기울기가 $3a^2$이므로

$\frac{a^3-(-2a)}{a-0}=3a^2$, $a^3+2a=3a^3$,

$2a^3-2a=0$, $a(a+1)(a-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$ $\quad\therefore b=a^3=1$

$\therefore a+b=2$

답 ②

**6** $y=x^2-2x+2$에서 $y'=2x-2$

기울기가 2인 접선과 곡선 $y=x^2-2x+2$의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$2t-2=2$ $\quad\therefore t=2$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 접점 $(2, 2)$와 직선 $y=2x-7$,

즉 $2x-y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\frac{|2\times2-1\times2-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

답 ⑤

**다른 풀이**

$f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=2x-7$이라 하면

$f(x)-g(x)=x^2-4x+9$

의 최솟값은

$f(2)-g(2)=5$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(2, f(2))$에서 직선 $y=g(x)$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

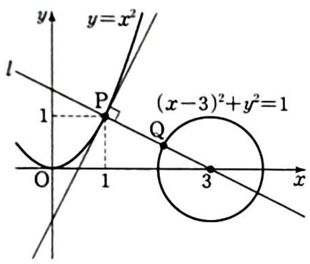
$B(2, g(2))$에 대하여 $\overline{AB}=5$이고, 직선 $y=g(x)$의 기울기가 2이므로

$\overline{AH}=k$, $\overline{BH}=2k$라 하면 직각삼각형 ABH에서

$k^2+(2k)^2=5^2$ $\quad\therefore k=\sqrt{5}$

따라서 곡선 $y=x^3-2x+2$ 위의 점과 직선 $y=2x-7$ 위의 점 사이의 거리의 최솟값은
$\overline{AH}=\sqrt{5}$

**7** $f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$이고, 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면
$f(t)=t^2$, $f'(t)=2t$
원의 중심이 $(3, 0)$이므로
$\frac{t^2-0}{t-3}\times 2t=-1$, $2t^3=-t+3$, $2t^3+t-3=0$
$(t-1)(2t^2+2t+3)=0$ $\quad\therefore t=1$




점 $(1, 1)$과 점 $(3, 0)$사이의 거리는 $\sqrt{5}$이고 원의 반지름의 길이는 1이므로 $\overline{PQ}\geq\sqrt{5}-1$
따라서 구하는 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}-1$이다.

답 ②

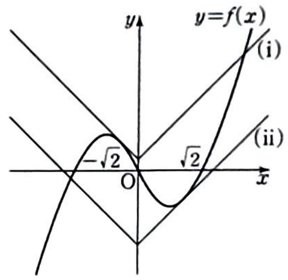
**8** $y=x^3-2x$에서 $y'=3x^2-2$
곡선 $y=x^3-2x$와 직선 $y=mx+2$의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면
$t^3-2t=mt+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$3t^2-2=m$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$t^3-2t=(3t^2-2)t+2$, $t^3=-1$ $\quad\therefore t=-1$
㉡에 대입하면 $m=1$
$m>1$일 때 교점의 개수는 3이므로 $f(m)=3$
$m=1$일 때 교점의 개수는 2이므로 $f(1)=2$
$m<1$일 때 교점의 개수는 1이므로 $f(m)=1$
이때 함수 $f(m)$은 $m=1$에서 불연속이므로 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이려면 $a\leq 1$이어야 한다.
따라서 실수 $a$의 최댓값은 1이다.

답 ④

**9** $y=x^3-2x^2+ax-4$에서 $y'=3x^2-4x+a$
곡선 $y=x^3-2x^2+ax-4$와 $x$축의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면
$t^3-2t^2+at-4=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
$3t^2-4t+a=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$t^3-2t^2+(-3t^2+4t)t-4=0$, $2t^3-2t^2+4=0$
$t^3-t^2+2=0$, $(t+1)(t^2-2t+2)=0$
$\therefore t=-1$
㉡에 대입하면 $3+4+a=0$
$\therefore a=-7$

답 ①

**10** $f(x)=x^3-2x$, $g(x)=|x|+a$ $\cdots\cdots$ ㉠라 하고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림의 (i) 또는 (ii)와 같아야 한다.




$f(x)=x^3-2x$에서 $f'(x)=3x^2-2$
(i) 곡선에 접하는 직선의 기울기는 $-1$이므로 접점의 $x$좌표를 $t_1$이라 하면
$3t_1^2-2=-1$, $3t_1^2=1$
$\therefore t_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$t_1<0$이므로 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$이고, ㉠에 대입하면
$a=\frac{2\sqrt{3}}{9}$
(ii) 곡선에 접하는 직선의 기울기는 1이므로 접점의 $x$좌표를 $t_2$라 하면
$3t_2^2-2=1$, $t_2^2=1$ $\quad\therefore t_2=-1$ 또는 $t_2=1$
$t_2>0$이므로 접점의 좌표는 $(1, -1)$이고, ㉠에 대입하면
$a=-2$
(i), (ii)에서 모든 실수 $a$의 값의 곱은
$\frac{2\sqrt{3}}{9}\times(-2)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

답 ⑤

## Theme 7 함수에 대한 부등식의 조건과 두 함수의 차

033p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ③ | 3 | 39 | 4 | 8 | 5 | 2 |
| 6 | 13 | | | | | | | | |

**1** $f(x)=g(x)$에서
$x^4-3x^3+x=-x^3-x^2+x$
$x^4-2x^3+x^2=0$, $x^2(x-1)^2=0$
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=0$, $x=1$일 때 서로 접하므로 $g(x)\leq h(x)\leq f(x)$를 만족시키는 함수 $h(x)$에 대하여 곡선 $y=h(x)$도 $x=0$, $x=1$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 접해야 한다.
$f'(x)=4x^3-9x^2+1$, $g'(x)=-3x^2-2x+1$이므로
$h'(0)=f'(0)=g'(0)=1$, $h'(1)=f'(1)=g'(1)=-4$
$\therefore h'(0)+h'(1)=-3$

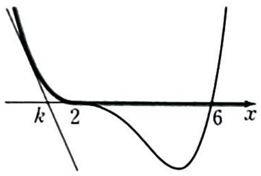
답 ②

**2** $|f(x)-1-x^2+4x|\leq x^2$에서
$-x^2\leq f(x)-1-x^2+4x\leq x^2$
$\therefore -4x+1\leq f(x)\leq 2x^2-4x+1$

$g(x)=-4x+1$, $h(x)=2x^2-4x+1$이라 하면
$g'(x)=-4$, $h'(x)=4x-4$
$g(0)=h(0)=1$이므로 $f(0)=1$
$g'(0)=h'(0)=-4$이므로 $f'(0)=-4$
$\therefore f(0)+f'(0)=1+(-4)=-3$

답 ③

**3** 곡선 $y=(x-2)^3(x-6)$은 그림과 같으므로 조건 (가)를 만족시키려면 $a=2$이어야 한다.




조건 (나)를 만족시키는 $k$는 곡선 $y=(x-2)^3(x-6)$과 직선 $y=-16(x-k)$가 $x<2$에서 접할 때 최댓값을 갖는다.
$f'(x)=3(x-2)^2(x-6)+(x-2)^3=-16$
$(x-1)(x-4)^2=0 \quad \therefore x=1$
$f(1)=5$이므로 $k$의 최댓값은
$-16(1-k)=5 \quad \therefore k=\frac{21}{16}$
따라서 $a=2$, $p=16$, $q=21$이므로
$a+p+q=39$

답 39

**4** $f(-1)=-1+a-b=-2 \quad \therefore b=a+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
다항함수 $f(x)$는 구간 $[x_1, x_2]$에서 연속이고 구간 $(x_1, x_2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$
를 만족시키는 상수 $c$가 구간 $(x_1, x_2)$에 적어도 하나 존재한다.
조건 (나)에서 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 1$이므로 임의의 실수 $c$에 대하여
$f'(c)\geq 1$이다. 즉 모든 실수 $x$에 대하여
$f'(x)=3x^2+2ax+b\geq 1 \quad \therefore 3x^2+2ax+b-1\geq 0$
이차방정식 $3x^2+2ax+b-1=0$의 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3b+3=a^2-3a=a(a-3)\leq 0$ (㉠)
$\therefore 0\leq a\leq 3$
따라서 $f(1)=2a+2$의 최댓값은 $a=3$일 때 8이다.

답 8

**5** $f(x)$가 미분가능하므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 $c\ (0<c<2)$가 존재한다. 즉
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$
조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로
$\frac{f(2)-1}{2}=f'(c) \quad \cdots\cdots$ ㉠
조건 (가)에서 $|f'(c)|\leq 3$이므로 $-3\leq f'(c)\leq 3$
㉠을 대입하면 $-3\leq\frac{f(2)-1}{2}\leq 3$, $-5\leq f(2)\leq 7$
따라서 $f(2)$의 최댓값은 7, 최솟값은 $-5$이므로 그 합은
$7+(-5)=2$

답 2

**다른 풀이**
$0\leq x\leq 2$에서 $f'(x)=3$일 때 $f(2)$가 최댓값을 가지므로
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-1}{2}=3 \quad \therefore f(2)=7$
$0\leq x\leq 2$에서 $f'(x)=-3$일 때 $f(2)$가 최솟값을 가지므로
$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{f(2)-1}{2}=-3 \quad \therefore f(2)=-5$

**6** 조건 (가)에서 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)로 놓으면
$f'(x)=2x+a$
조건 (나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $a=b \quad \therefore f(x)=x^2+ax+a$
$f(x)\leq f'(x)$, 즉 $f(x)-f'(x)\leq 0$에서
$x^2+ax+a-(2x+a)\leq 0$, $x\{x-(-a+2)\}\leq 0$
조건 (다)에서 $-1\leq x\leq 0$인 모든 실수 $x$에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로
$-a+2\leq -1 \quad \therefore a\geq 3$
따라서 $f(2)=4+2a+a=3a+4$이므로 $f(2)$의 최솟값은 $a=3$일 때 13이다.

답 13

## Theme 8 함수의 해석 도구

035p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ② | 3 | ② | 4 | ② | 5 | ③ |
| 6 | ② | 7 | ⑤ | 8 | ③ | 9 | 40 | 10 | ⑤ |
| 11 | 318 | 12 | 21 | 13 | 54 | | | | |

**1** $g(x)=x^3(x+4)$라 하면 $g'(x)=3x^2(x+4)+x^3=4x^2(x+3)$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-3$
따라서 함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 극솟값 $-27$을 가지므로 함수 $f(x)=|g(x)|$는 $x=-3$에서 극댓값 27을 갖는다.

답 ③

**참고**
$g(x)=x^3(x+4)$는 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.

**2** $f(x)=x^3-3ax^2+b$에서
$f(2)=8-12a+b=22 \quad \therefore 12a-b=-14 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서
$x=0, 2a$
$a>0$이면 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $f(0)=b=6$이고, ㉠에서
$a=-\frac{2}{3}<0$이므로 모순이다.
따라서 $a<0$이고, $f(x)$가 $x=2a$에서 극댓값을 가지므로

$f(2a)=-4a^3+b=6$

㉠에서 $b=12a+14$이므로

$-4a^3+12a+8=0,\ (a+1)^2(a-2)=0$

$a=-1,\ b=2$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+2$

$\therefore f(1)=6$

답 ②

**참고**

$f(x)=x^2(x-3a)+b$이므로 $f(0)=f(3a)$이고 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

$a<0$이면 $x=2a$에서 극대, $x=0$에서 극소이고, $a>0$이면 $x=0$에서 극대, $x=2a$에서 극소이다.

**3** $n^3f(n)<(n^3+n^2)f(n+1)$에서 $n=0$이면 부등식이 성립하지 않는다.

$n\neq0$일 때 $n^2>0$이므로

$nf(n)<(n+1)f(n+1)$

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2$

$g'(x)=-x^2+8x=-x(x-8)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=8$이고, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=8$에서 극대이다.

따라서 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ 8)$에서 증가하고, $n\neq0$이므로 구하는 정수 $n$은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$의 7개이다.

답 ②

**참고**

$g(x)=-\frac{1}{3}x^2(x-12)$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $g(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=8$에서 극대이다.

**4** $f(x)=x^3+ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 증가하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3a=a(a-3)\leq0$

$\therefore 0\leq a\leq3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=-x^3+(a+1)x^2-(a+1)x$에서

$g'(x)=-3x^2+2(a+1)x-(a+1)$

구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$가 감소하려면 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(x)\leq0$이어야 한다.

이때 이차방정식 $g'(x)=0$, 즉 $-3x^2+2(a+1)x-(a+1)=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-3(a+1)=(a+1)(a-2)\leq0$

$\therefore -1\leq a\leq2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0\leq a\leq2$

따라서 $a$의 최댓값은 2, 최솟값은 0이므로 합은

$2+0=2$

답 ②

**5** $f(x)=x^3+ax^2+5x$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+5$

함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2ax+5=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-15>0$ $\quad\therefore a^2>15$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 원점에서만 만나므로

$f(x)=x(x^2+ax+5)$에서 방정식 $x^2+ax+5=0$이 실근을 갖지 않는다. 이때 이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=a^2-20<0$ $\quad\therefore a^2<20$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $15<a^2<20$이므로 자연수 $a$의 값은 4이다.

답 ③

**6** $g(x)=f(x)-ax^2$에서 $g'(x)=f'(x)-2ax=x^2-2ax+1$

함수 $g(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $g'(x)=0$, 즉 $x^2-2ax+1=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-1>0,\ (a+1)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>1$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 2이다.

답 ②

**7** 직선 $l$의 방정식을 $y=4x+a$ ($a$는 상수)라 하면

$f(x)-(4x+a)=(x+1)(x-3)^2$이므로

$f(x)=(x+1)(x-3)^2+4x+a$

$f'(x)=(x-3)^2+2(x+1)(x-3)+4$

$\quad\quad=3x^2-10x+7=(x-1)(3x-7)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

이때 $x=\frac{7}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{7}{3}$에서 극소이다.

$\therefore p=\frac{7}{3}$

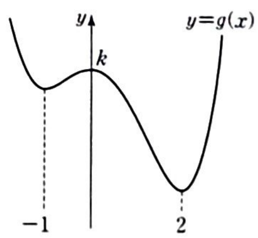
답 ⑤

**8** $g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+k$

라 하면

$g'(x)=x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




함수 $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+k\right|$가 극솟값을 갖는 서로 다른 $x$의 값의 개수가 3이려면 $k\leq0$ 또는

$g(2)<0\le g(-1)$에서 $-\frac{8}{3}+k<0\le -\frac{5}{12}+k$, 즉 $\frac{5}{12}\le k<\frac{8}{3}$이어야 하므로 정수 $k$의 최댓값은 2이다.

답 ③

**9** 구간 $(-\infty, 1)$에서 감소하고 구간 $(1, \infty)$에서 증가하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(x)=x^3-x^2-ax+a^2$

이므로 $f'(1)=0$에서

$a^2-a=0$, $a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

(i) $a=0$일 때

$f'(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$

이고, $x<1$에서 $f'(x)\le 0$, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=1$일 때

$f'(x)=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$

이고, $-1<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i)에서 $a=0$이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$

$\therefore 6f(a-2)=6f(-2)=6\left(4+\frac{8}{3}\right)=40$

답 40

**10** ㄱ. $x=1$의 근방에서 $f(x)<0$, $g(x)<0$이므로 $f(x)g(x)>0$이고, $f(1)g(1)=0$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극소이다. (참)

ㄴ. $x=1$의 근방에서 $f(x)<0$, $g(x)>0$이므로 $f(x)g(x)<0$이고, $f(1)g(1)=0$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 극대이다. (참)

ㄷ. $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로, $g'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f'(x)-g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 극소이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**11** $f(|x|)$는 우함수이므로 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=-3x(x-6)-15\\&=-3x^2+18x-15\\&=-3(x-1)(x-5)\end{aligned}$$

이고, 조건 (가)에서

$f(x)=-x^3+9x^2-15x+1$

이므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=-6$, 극댓값은 $f(5)=26$이다.

$k=1$이면 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 5이므로 $k\ne 1$

따라서 방정식 $f(|x|)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 $k=-6$ 또는 $1<k<26$이어야 하므로 모든 정수 $k$의 값의 합은

$-6+\sum_{k=2}^{25}k=-6+24\times\frac{2+25}{2}=318$

답 318

**12** $g(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+5$, $h(x)=x^3+3x^2+\frac{1}{3}$이라 하면

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{g(x)} & (-6\le x<-1)\\ \dfrac{1}{h(x)} & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

이다.

$g(x)=\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{1}{2}$이므로 $-6\le x<-1$에서 $g(x)$의 최댓값은 $g(-6)=5$, 최솟값은 $g(-3)=\frac{1}{2}$이다.

$h'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0$에서 $h(x)$는 $x=0$일 때 극솟값을 갖고, $h(-1)=\frac{7}{3}$, $h(1)=\frac{13}{3}$이므로 $-1\le x\le 1$에서 $h(x)$의 최댓값은 $h(1)=\frac{13}{3}$, 최솟값은 $h(0)=\frac{1}{3}$이다.

$g(-6)>h(1)$이고, $g(-3)>h(0)$이므로 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각

$\frac{1}{h(0)}=3$, $\frac{1}{g(-6)}=\frac{1}{5}$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$

이므로 $p=5$, $q=16$

$\therefore p+q=21$

답 21

**참고**

$h(x)=x^2(x+3)+\frac{1}{3}$에서 $h(0)=h(-3)$이고 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $h(x)$는 $x=-2$에서 극대이다.

**13** 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 $\alpha$ $(\alpha>0)$이고, 조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 접선의 기울기의 최솟값이 $-3$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 최솟값이 $-3$이다.

$f'(x)=3(x-p)^2-3$

이라 하면 $f'(x)=0$에서 $x=p-1$ 또는 $x=p+1$이고

$f(p-1)=\alpha$, $f(p+1)=0$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$f(x)=(x-p+2)(x-p-1)^2$

$f(2)=0$이므로

$(4-p)(1-p)^2=0$ $\quad\therefore p=1$ 또는 $p=4$

즉 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$ 또는 $f(x)=(x-2)(x-5)^2$이고, $f(0)<0$이므로

$f(x)=(x-2)(x-5)^2$

$\therefore f(8)=6\times 3^2=54$

답 54

# Chapter 3. 그래프 해석의 도구

## Theme 9 도함수의 정보

040p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | 2 | ⑤ | 3 | ⑤ | 4 | ④ | 5 | ③ |
| 6 | ④ | | | | | | | | |

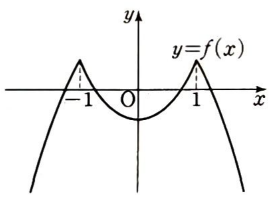
**1** $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 상수함수이므로 ②, ③은 알맞지 않고, $x=-1$에서 미분가능하므로 ④, ⑤는 알맞지 않다.

답 ①

**2** ㄱ. $f'(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (참)

ㄴ. $|x|\neq1$일 때 $f'(-x)=-f'(x)$에서 $f(-x)=f(x)$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(-1)=f(1)$이다. 따라서 $f(-x)=f(x)$이다. (참)

ㄷ. $-1<x<0$일 때 $f'(x)<0$이고, $0<x<1$일 때 $f'(x)>0$이다. 또 $x<-1$일 때 $f'(x)>0$이고, $x>1$일 때 $f'(x)<0$이므로 $f(0)f(1)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축은 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**3** $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$이므로 $h(x)$는 감소하는 함수이다.

ㄱ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 $h(-1)=f(-1)-g(-1)>0$

$\therefore f(-1)>g(-1)$ (참)

ㄴ. $h(x)$는 감소하므로 함수 $f(x)-g(x)$는 극값을 갖지 않는다. (참)

ㄷ. $h(1)>h(2)$이므로 $f(1)-g(1)>f(2)-g(2)$

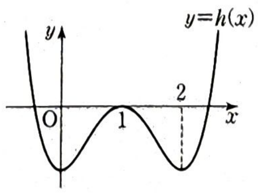
$\therefore f(1)-f(2)>g(1)-g(2)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**4** $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이고, $h(1)=f(1)-g(1)=0$이므로

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




ㄱ. 그림에서 함수 $h(x)$는 $0<x<1$에서 증가한다. (거짓)

ㄴ. 그림에서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x$축이 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

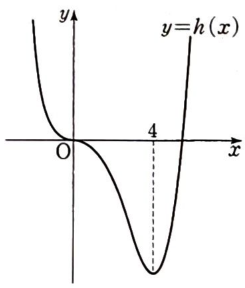
답 ④

**5** ㄱ. $1<x<4$에서 $f'(x)<g'(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$

따라서 함수 $h(x)$는 $1<x<4$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $h'(x)=ax^2(x-4)$ $(a>0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로 ㄴ의 식을 이용하여 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형을 나타내면 그림과 같다.



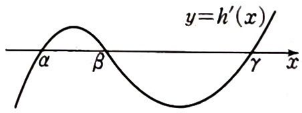

함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x$축이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

**6** $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

이때 함수 $y=h'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=\alpha, \gamma$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이므로 $h(\alpha)<h(\beta)$, $h(\gamma)<h(\beta)$

한편 $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}>\beta$이므로 $h(\alpha)\neq h(\gamma)$ (거짓)

ㄴ. $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$, $\dfrac{h(\gamma)-h(\beta)}{\gamma-\beta}<0$이므로

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}>\dfrac{h(\gamma)-h(\beta)}{\gamma-\beta}$

$\therefore (\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\}<(\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$ (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$의 최솟값이 음수이므로 $h(\alpha)$, $h(\gamma)$ 중 적어도 하나는 음수이다.

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $x$축과 2개 이상의 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

## Theme 10 이차함수의 모든 것

043p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | ④ | 3 | ③ | 4 | ⑤ | 5 | ③ |
| 6 | ④ | 7 | ⑤ | 8 | ③ | 9 | 8 | | |

**1** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $f'(a)=-f'(b)$이므로

$\frac{a+b}{2}=m \quad \therefore m=4$

$\therefore m+f'(m)=4+f'(4)=4+0=4$

답 4

**2** 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+4$가 만나는 점에서의 $x$좌표가 $\alpha$일 때 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 최소이자 극소이므로

$x^2-2x=x+4$, $(x+1)(x-4)=0$, $x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

또한 $f'(\alpha)=1$일 때 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 극대이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+4$가 만나는 두 점의 $x$좌표가 $-1$과 4이므로

$\alpha=\frac{(-1)+4}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 모든 $\alpha$의 값의 합은

$(-1)+4+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ④

**3** 곡선 $y=bx^2-2x+3$과 직선 $y=ax+1$이 $x$좌표가 $-1$인 점에서 접해야 하므로

$bx^2-2x+3-(ax+1)=b(x+1)^2$

$bx^2-(a+2)x+2=bx^2+2bx+b$

$\therefore b=2,\ a=-6,\ ab=-12$

답 ③

**4** 곡선 $y=f(x)$의 $x$절편은 0, 2이고, $x\geq 0$일 때 $f(|x|)=f(x)$, $x<0$일 때 $f(|x|)=f(-x)$이므로 곡선 $y=f(|x|)$는 $y$축에 대하여 대칭이고, $x$절편은 $-2$, 0, 2이다.

따라서 곡선 $y=f(|x|)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은

$-2\int_0^2 (x^2-2x)dx=2\times\frac{1}{6}\times(2-0)^3=\frac{8}{3}$

답 ⑤

**5** 곡선 $y=-x(x-3)$과 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}\times(3-0)^3=\frac{9}{2}$ …… ㉠

이차방정식 $-x^2+3x=mx$, 즉 $x(x-3+m)=0$의 두 실근이 0, $3-m$이므로 곡선 $y=-x^2+3x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{6}(3-m)^3$ …… ㉡

이때 ㉡$=\frac{1}{2}\times$㉠이므로

$\frac{1}{6}(3-m)^3=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}$

$\therefore (3-m)^3=\frac{27}{2}$

답 ③

**6** $x^2-4x=x-4$에서

$(x-1)(x-4)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

$\therefore \int_1^4 |(x^2-4x)-(x-4)|dx$

$=\int_1^4 |(x-1)(x-4)|dx$

$=\frac{1}{6}\times(4-1)^3=\frac{9}{2}$

답 ④

**7** $x^2-3x=-x^2-x+4$에서

$2x^2-2x-4=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=x^2-3x$와 $y=-x^2-x+4$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=2x^2-2x-4$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{2}{6}\times\{2-(-1)\}^3=9$

답 ⑤

**다른 풀이**

$f(x)=x^2-3x$, $g(x)=-x^2-x+4$라 하면 $f(x)$의 최고차항의 계수와 $g(x)$의 최고차항의 계수가 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 서로 다른 두 교점을 지나는 직선을 $l$이라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $l$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

$\therefore 2\times\frac{1}{6}\times\{2-(-1)\}^3=9$

**8** $-x^2+13x-36=-(x-4)(x-9)$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 $x$절편은 4, 9이다.

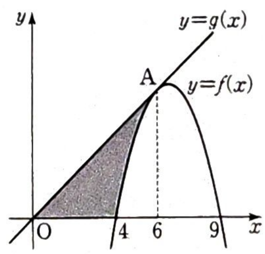
$f'(x)=-2x+13$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접하는 점을 A라 하고 점 A의 $x$좌표를 $a$라 하면

$\frac{f(a)-0}{a-0}=f'(a)$

$\frac{-a^2+13a-36}{a}=-2a+13$

$-a^2+13a-36=-2a^2+13a$

$a^2=36 \quad \therefore a=6\ (a>0)$, $\mathrm{A}(6, 6)$



B(4, 0)이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$ 및 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 원점 O에 대하여 삼각형 AOB의 넓이에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{6}\times(6-4)^3=\frac{32}{3}$

답 ③

**9** $-x^2+5x=x$에서 $x(x-4)=0$이므로 점 P의 $x$좌표는 4이다.
삼각형 AOP의 밑변을 선분 OP라 하면 곡선 $y=-x^2+5x$ 위의 $x$좌표가 $a$인 점 A에서의 접선의 기울기가 직선 OP의 기울기와 같을 때 삼각형 AOP의 높이가 최대이므로 넓이도 최대이고, 이때

$a=\frac{0+4}{2}=2$

이다.
따라서 삼각형 AOP의 넓이의 최댓값은 $a=2$일 때 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이에서 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 OA로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 AP로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{6}\times(4-0)^3-\frac{1}{6}\times(2-0)^3-\frac{1}{6}\times(4-2)^3=8$

답 8

## Theme 11 삼차함수의 모든 것

046p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 11 | 3 | 500 | 4 | 8 | 5 | 24 |
| 6 | 50 | 7 | ④ | 8 | 23 | 9 | ③ | 10 | 2 |
| 11 | 4 | 12 | 59 | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | 55 |
| 16 | ④ | 17 | ④ | 18 | 8 | 19 | ② | 20 | ① |
| 21 | ③ | 22 | ② | 23 | 16 | 24 | 11 | 25 | ② |

**1** 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고 조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 $-2$를 가지므로 $x=-2$에서 극댓값 2를 갖는다.
따라서 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 $x$좌표는 $-2$, 4이므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$(-2)+4=2$

답 2

**다른 풀이**
곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 변곡점의 $x$좌표는 0이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 $x$좌표가 $-2$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)=2$의 세 실근 $-2$, $-2$, $a$ $(a\neq-2)$에 대하여

$3\times0=(-2)+(-2)+a \qquad \therefore a=4$

**2** 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고 조건 (나), (다)에서 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 곡선 $y=f(x)$가 $x$축과 만나는 세 점의 $x$좌표가 $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$이므로

$f(x)=ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=ax^3-3ax$

$f(1)-f(-1)=-4a=4 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^3+3x$, $f'(x)=-3x^2+3$이므로

$f(1)-f'(2)=2-(-9)=11$

답 11

**3** $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$에서 $f(2)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f(x)=(x-2)^2(x+a)$ ($a$는 상수)

라 하면

$f(0)=4a=12 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(x+3)$

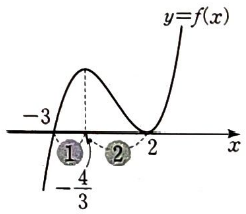
삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$k=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{500}{27}$

$\therefore 27k=500$

답 500

**참고**
함수 $f(x)=(x-2)^2(x+3)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




**4** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 점 (2, 0)에서 접하므로

$f(x)=2(x+1)(x-2)^2$

$f(x)$는 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $x=0$에서 극댓값 8을 갖는다.
따라서 $a=0$, $b=8$이므로

$a+b=8$

답 8

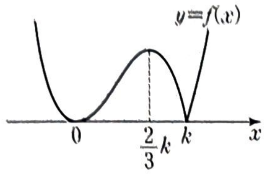
**5** $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$에서 $f(2)=0$, $f'(2)=0$이고
$x<2$일 때 $f(x)<0$, $x>2$일 때 $f(x)>0$이므로
$f(x)=a(x-2)^3$이라 하면

$f(1)=-a=-3 \qquad \therefore a=3$

따라서 $f(x)=3(x-2)^3$이므로 $f(4)=24$

답 24

**6** $f(x)=|x^2(x-k)|$이고 $g(x)=x^2(x-k)$라 하면 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $g(x)$는 $x=\frac{2}{3}k$에서 극솟값을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 세 점에서 만나므로

$f\left(\frac{2}{3}k\right)=-\frac{4}{9}k^2\left(\frac{2}{3}k-k\right)=\frac{4}{27}k^3=4$, $k=3$

$\therefore f(x)=x^2|x-3|$, $f(5)=50$

답 50

**7** $f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-a)$ ($a$는 상수)

라 하면 $f(x)-g(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $a=4$이다.

$\therefore f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-4)$

$f'(3)-g'(3)=0$이고 $f'(3)=1$이므로

$g'(3)=1$

$\therefore g(x)=(x-1)+2=x+1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+(x+1)$이므로

$f(5)=22$

답 ④

**8** 조건 (가)에서 $f'(0)=f(0)=0$이고, 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=f(2)$가 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$는 서로 다른 두 점에서 만나고, $f(2)<0$이다.

따라서 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 극솟값이 음수인 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0, $x=2$에서 극솟값을 갖고, $f(3)=0$이다.

(i) $n=1, 2, 3$일 때

$\frac{10}{n}>3$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f\left(\frac{10}{n}\right)$은 한 점에서 만난다. $\therefore a_n=1$

(ii) $n=4, 6, 7, 8, 9, 10$일 때

$0<\frac{10}{n}<2$ 또는 $2<\frac{10}{n}<3$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f\left(\frac{10}{n}\right)$은 서로 다른 세 점에서 만난다. $\therefore a_n=3$

(iii) $n=5$일 때

$\frac{10}{n}=2$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f\left(\frac{10}{n}\right)$은 서로 다른 두 점에서 만난다. $\therefore a_5=2$

(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{n=1}^{10} a_n=3\times1+6\times3+2=23$

답 23

**9** 조건 (가)에서 $f'(5)=0$이고 조건 (나)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $f'(1)=0$이다.

$f(x)$는 $x=5$에서 극솟값 $-1$을 갖고, 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(-1)=-1$이다.

$f(x)=a(x+1)(x-5)^2-1$ $(a>0)$

이라 하면

$f(x)+1=a(x+1)(x-5)^2$

이므로

$\frac{f(8)+1}{f(2)+1}=\frac{81a}{27a}=3$

답 ③

**10** 두 조건 (나), (다)에서

$f(x)=(x+1)(x-a)^2$ $(a\neq-1)$

조건 (가)에서 $1=\frac{0+2}{2}$, $f(1)=\frac{f(0)+f(2)}{2}$이므로 두 점 $(0, f(0))$, $(2, f(2))$를 이은 선분의 중점이 $(1, f(1))$이고, 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이다.

따라서 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $a=2$이다.

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)^2$, $f(1)=2$

답 2

**다른 풀이**

곡선 $y=f(x)$는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$의 세 실근 $-1, a, a$에 대하여 $3\times1=(-1)+a+a$ $\quad\therefore a=2$

**11** $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $x=-2, 2$에서 극값을 갖는다.

두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기를 $a$라 하면

$f(-2)f(2)=-16$에서

$f(-2)=-4$, $f(2)=4$일 때 $a=2$,

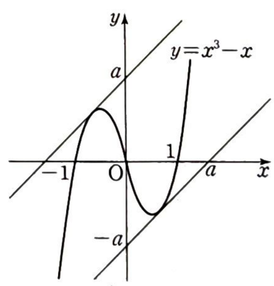
$f(-2)=4$, $f(2)=-4$일 때 $a=-2$이므로

$M=2$, $m=-2$

$\therefore M-m=4$

답 4

**12** 곡선 $y=x^3-x$가 원점에 대하여 대칭이므로 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그은 접선 중 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그은 접선과 평행한 접선은 그림과 같이 점 $(0, -a)$를 지난다.




평행한 두 접선의 기울기는 $\frac{0-(-a)}{a-0}=1$

$y=x^3-x$에서 $y'=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(\alpha, \alpha^3-\alpha)$ $(\alpha>0)$라 하면

$3\alpha^2-1=1$ $\quad\therefore \alpha^2=\frac{2}{3}$

$\frac{(\alpha^3-\alpha)-0}{\alpha-a}=1$, $\alpha^3-\alpha=\alpha-a$, $a=2\alpha-\alpha^3=\alpha(2-\alpha^2)$

$\therefore a^2=\alpha^2(2-\alpha^2)^2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}$

따라서 $p=27$, $q=32$이므로

$p+q=59$

답 59

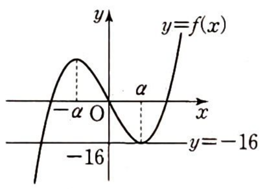
**13** $f(x)=x^3-3x^2+2=x^2(x-3)+2$에서 $f(0)=f(3)$이고 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

따라서 $a=0$이고, 실수 $b$의 최솟값은 3이다.

답 ③

**14** $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소이면 $x=-\alpha$에서 극대이고, 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=x(x+\sqrt{3}\alpha)(x-\sqrt{3}\alpha)=x^3-3\alpha^2x$




방정식 $f(x)=-16$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

$f(\alpha)=-16$, $\alpha^3-3\alpha^3=-16$, $\alpha^3=8$

$\therefore\ \alpha=2$

따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로

$f(-1)=-1-(-12)=11$

답 ①

**다른 풀이**

이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로

$16-(-16)=\dfrac{3}{6}\{\alpha-(-\alpha)\}^3$

$32=4\alpha^3\qquad\therefore\ \alpha=2$

**15** $f(x)=x^3+3x^2-5x$에서

$f'(x)=3x^2+6x-5=3(x+1)^2-8$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(-1,\ 7)$에 대하여 대칭이고,

두 점 A, B의 중점은 $\mathrm{M}(-1,\ 7)$이다.

$f'(-1)=-8$이므로 $f'(a)=f'(b)=\dfrac{1}{8}$에서 $a$, $b$는 이차방정식

$3x^2+6x-5=\dfrac{1}{8}$, 즉 $24x^2+48x-41=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=-2$, $ab=-\dfrac{41}{24}$

$$\begin{aligned}\therefore\ (a-1)(b-1)&=ab-(a+b)+1\\&=-\frac{41}{24}+2+1\\&=\frac{31}{24}\end{aligned}$$

따라서 $p=24$, $q=31$이므로

$p+q=55$

답 55

**16** $f(x)=x^3+x$라 하면 $f'(x)=3x^2+1=4$에서

$x^2=1$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

점 A의 $x$좌표가 양수이므로 점 A의 $x$좌표는 1이다.

점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라 하고 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $h(x)$의 이차항의 계수는 0이고, 점 B의 $x$좌표를 $a$라 하면 방정식 $h(x)=0$의 세 근이 1, 1, $a$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+a=0$

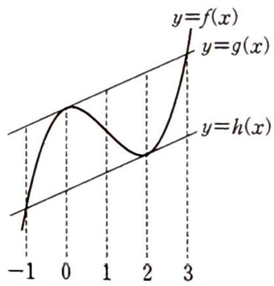
$\therefore\ a=-2$

따라서 점 B의 $x$좌표는 $-2$이다.

답 ④

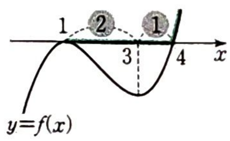
**17** 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 그림에서 직선 $y=h(x)$가 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 두 교점의 $x$좌표의 합은

$(-1)+2=1$




답 ④

**18** $f(1)=f'(1)=0$에서 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖고, $g(t)$가 $t=4$에서 미분가능하지 않으므로 곡선 $y=f(x)$의 개형을 이용하여 구한 닫힌구간 $[1,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 나타내는 점들의 집합은 그림에서 색선으로 나타내어진 부분과 같다.




삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f(x)=0$에서 $x=1,\ 4$

$f'(x)=0$에서 $x=1,\ 3$

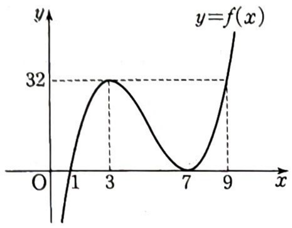
따라서 방정식 $f(x)f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 1, 3, 4이므로 그 합은

$1+3+4=8$

답 8

**19** $f(x)=(x-1)(x-7)^2$에서 $f(x)$는 $x=7$에서 극솟값 0을 갖고, $f(1)=f(7)$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$f(3)=f(9)=32$




$a<1$일 때 $M\le 32$, $m<0$이므로

$M+m<32$

$1\le a\le 3$일 때 $M=32$, $m=0$이므로

$M+m=32$

$a>3$일 때 $M>32$, $m\ge 0$이므로

$M+m>32$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

$\beta-\alpha=2$

답 ②

**20** 곡선 위의 점 P의 좌표를 $(t,\ 3-t^2)$ $(0<t<\sqrt{3})$이라 하면 점 Q의 $x$좌표는 $t$이므로 삼각형 POQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

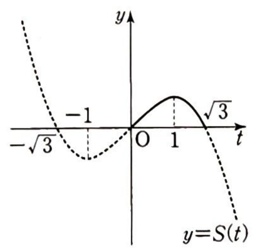
$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times(3-t^2)=-\frac{t}{2}(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$

삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 함수 $S(t)$ $(0<t<\sqrt{3})$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 POQ의 넓이의 최댓값은

$S(1)=1$

답 ①

참고




**21** $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-x^2+4)dx$

$=-\frac{1}{3}x^3+4x+C$ (단, $C$는 적분상수)

이고 $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x$

한편 곡선 $y=f(x)$와 $x$축이 만나는 점의 $x$좌표는

$-\frac{1}{3}x^3+4x=0$, $x^3-12x=0$

$x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0$

$\therefore x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

따라서 곡선 $y=-\frac{1}{3}x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$과 $x$축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은

$2\times\frac{\left|-\frac{1}{3}\right|}{4}\times(2\sqrt{3}-0)^4=24$

답 ③

**22** $y=x^3-nx^2=x^2(x-n)$이므로 삼차함수 $y=x^2(x-n)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S_n$은

$S_n=\frac{1}{12}(n-0)^4=\frac{1}{12}n^4$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{5}n^3=\frac{1}{12}\times\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$

답 ②

**23** $-1<\alpha<\beta$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 세 실근은 $-1$, $\alpha$, $\alpha$이고, 방정식 $f(x)=h(x)$의 세 실근은 $-1$, $-1$, $\beta$이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1)+\alpha+\alpha=(-1)+(-1)+\beta$

$\therefore \beta=2\alpha+1$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a$ $(a>0)$라 하면

$A=\frac{a}{12}\{\alpha-(-1)\}^4$,

$B=\frac{a}{12}\{\beta-(-1)\}^4$

이므로

$\frac{B}{A}=\frac{(\beta+1)^4}{(\alpha+1)^4}=\frac{(2\alpha+2)^4}{(\alpha+1)^4}=2^4=16$

답 16

**24** $\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{2}^{0}f(x)dx$에서

$\int_{-1}^{0}f(x)dx-\int_{2}^{0}f(x)dx=0$

$\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx=0$

이고, $f(-1)=0$이므로 이차함수의 넓이와 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(1)=0$이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\frac{2}{6}\times\{1-(-1)\}^3=\frac{8}{3}$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=11$

답 11

**25** 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x-6$이 점 $(3,\ 0)$에서 접하므로

$f(x)-(2x-6)=a(x-3)^2$ $(a>0)$ ······ ㉠

이라 하자.

직선 $y=2x-6$과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$

이므로 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=2x-6$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $\int_0^3 f(x)dx=0$이고, $f(3)=0$이므로 이차함수의 넓이와 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(1)=0$이다.
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)-(-4)=4a \qquad \therefore a=1$
따라서 $f(x)=(x-3)^2+2x-6$이므로
$f(4)=3$

답 ②

## Theme 12 사차함수의 모든 것

053p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | 2 | 82 | 3 | ① | 4 | 9 | 5 | 3 |
| 6 | 56 | 7 | 4 | 8 | ③ | 9 | ⑤ | 10 | ④ |
| 11 | 1 | 12 | 16 | 13 | ① | 14 | ③ | 15 | ② |
| 16 | 216 | 17 | ① | 18 | ① | 19 | 35 | | |

**1** 두 점 $(a, 0)$, $(-a, 0)$이 $y$축에 대하여 대칭이고 위로 볼록한 곡선 $y=-2x^4+1$이 $y$축에 대하여 대칭이므로 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=-2x^4+1$에 그은 접선의 기울기가 $-1$이다.
접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$$\frac{(-2t^4+1)-0}{t-a}=-8t^3=-1$$

$t^3=\frac{1}{8} \qquad \therefore t=\frac{1}{2}$

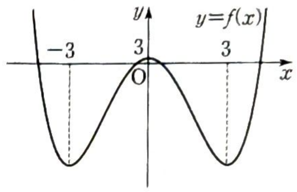
따라서 $\dfrac{-\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{2}-a}=-1$에서 $a=\frac{11}{8}$

답 ①

**2** $f(-x)=f(x)$이고 $f'(-1)=0$이므로
$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$
사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여
$f(-\sqrt{2})=f(0)=f(\sqrt{2})$
이므로 $f(0)=k$라 하면
$f(x)=x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+k$
$f(-2)=0$이므로
$(-2)^2(-2+\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})+k=0$
$8+k=0 \qquad \therefore k=-8$
따라서 $f(x)=x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})-8$이고, $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극솟값 $-9$를 가지므로
$p=-1$ 또는 $p=1$, $q=-9$
$\therefore p^2+q^2=82$

답 82

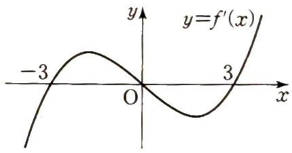
**3** $f(x)=x^2(x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})+30$이므로 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=-3$, $x=3$에서 극소이고 $x=0$에서 극대이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




이때 $f'(k)f'(k+3)<0$을 만족시키는 정수 $k$의 값은
$-5, -4, -2, -1, 1, 2$
이므로 모든 정수 $k$의 값의 합은 $-9$이다.

답 ①

**다른 풀이**
$f'(x)=4x(x+3)(x-3)$에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

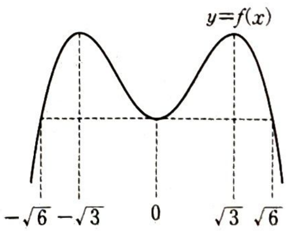



이때 $f'(k)f'(k+3)<0$을 만족시키는 정수 $k$의 값은
$-5, -4, -2, -1, 1, 2$
이므로 모든 정수 $k$의 값의 합은 $-9$이다.

**4** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로
$f(0)=f'(0)=0$에서 $f(2)=f'(2)=0$이다.
$f(x)=ax^2(x-2)^2$이라 하면
$f(1)=a=1$
따라서 $f(x)=x^2(x-2)^2$이므로
$f(3)=9$

답 9

**5** 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 도함수인 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.
이때 조건 (나)에서 $f'(\sqrt{3})=0$이므로 $f'(-\sqrt{3})=0$이고 조건 (다)에서 닫힌구간 $[0, \sqrt{3}]$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$f(x)=ax^2(x^2-6)+f(0)$ ($a$는 음의 정수)
이라 하면
$f(\sqrt{3})=-9a+f(0)$
이고 사차함수 $f(x)$의 계수가 모두 정수이므로
$f(0)$, $f(\sqrt{3})$은 정수이다.

방정식 $f(x)=n$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 정수 $n$의 개수가 8이므로 $n$의 값은

$f(0)+1,\ f(0)+2,\ f(0)+3,\ \cdots,\ f(0)+8$

이어야 하고

$f(0)+8+1=-9a+f(0)$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2(x^2-6)+f(0)$이므로

$f(2)=8+f(0),\ f(1)=5+f(0)$

$\therefore f(2)-f(1)=3$

답 3

**6** 조건 (가), (다)에 의하여 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-2)^3(x+a)$로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x)=3(x-2)^2(x+a)+(x-2)^3$이고 조건 (나)에 의하여

$f'(0)=12a-8=4$

$\therefore a=1$

따라서 $f(x)=(x-2)^3(x+1)$이므로

$-7\times f(0)=-7\times(-8)=56$

답 56

**7** 조건 (다)에서 $f'(2)=f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이고,

조건 (나)에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}=2$이므로 양수 $a$에 대하여 $\alpha=2-a,\ \beta=2+a$라 하면

$f'(x)=4(x-2+a)(x-2)(x-2-a)$

조건 (다)에서

$f'(4)=4\times(2+a)\times2\times(2-a)=24$

$4-a^2=3,\ a^2=1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=3$

따라서 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 방정식 $f(x)=f(2)$의 해는

$x=2-\sqrt{2}$ 또는 $x=2$ 또는 $x=2+\sqrt{2}$

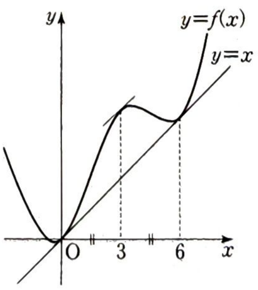
이므로 모든 실근의 곱은

$(2-\sqrt{2})\times2\times(2+\sqrt{2})=4$

답 4

**8** 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$a=\frac{0+6}{2}=3$




답 ③

**9** 방정식 $f(x)=(x^4-x^3)-(ax+b)=0$의 두 중근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta=1 \qquad \therefore \alpha+\beta=\frac{1}{2}$

$f'(x)=4x^3-3x^2-a$이므로 $f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{4}\right)=0$에서

$\frac{1}{16}-\frac{3}{16}-a=0$

$\therefore a=-\frac{1}{8}$

답 ⑤

**10** 두 조건 (가), (나)에 의하여 $f(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=(x-1)^3(x-a)$로 놓으면 조건 (나)에서 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $x=\frac{3a+1}{4}$에서 극소이므로

$\frac{3a+1}{4}\geq2 \qquad \therefore a\geq\frac{7}{3}$

$\therefore f(2)=2-a\leq-\frac{1}{3}$

답 ④

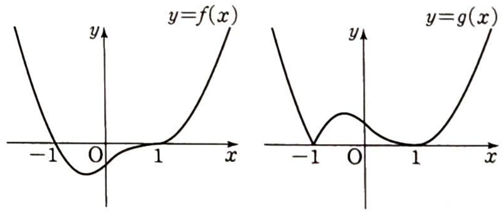
**11** 조건 (나)에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(-1,\ 0)$을 지나고 $f'(-1)\neq0$이다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=-1,\ x=1$에서만 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x$축과 $x=-1,\ x=1$ 이외의 점에서 만나지 않는다.

또 조건 (다)에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f(x)=(x-1)^3(x+1)$이다.

따라서 두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$\therefore g(0)=|f(0)|=1$

답 1

**12** $g(x)=(x-2)f(x)$라 하면 $g(2)=0$이고, 조건 (가)에서 $g(-1)=0$이다.

조건 (나)에서 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\geq0$이므로

$g(x)=(x+1)^2(x-2)^2$

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-2)$이므로

$f(3)=4^2\times1=16$

답 16

**다른 풀이**

조건 (나)에서 $x<2$일 때

$f(x)\le 0$이어야 한다.

이때 조건 (가)에서

$f(-1)=0$이므로

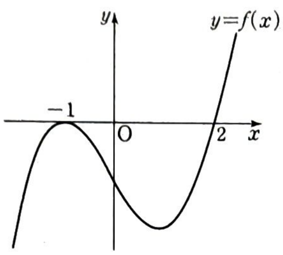
$f(x)=(x+1)^2(x-a)$

$(a\ge 2)$

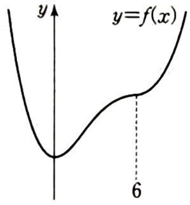
또 조건 (나)에서 $x>2$일 때

$f(x)\ge 0$이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-2)$




**13** 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$f'(x)=4x(x-6)^2$이고, 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$f(-2)=f(6)$이므로

$f(x)=(x+2)(x-6)^3+k$ ($k$는 상수)

라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

가 원점을 지날 때

$0=-tf'(t)+f(t)$

$(t-6)^2(3t^2+4t+12)=k$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $g(t)=(t-6)^2(3t^2+4t+12)$라 하면

$g'(t)=12t(t-2)(t-6)=0$

에서 $t=0, 2, 6$이고 $2-0<6-2$이므로 함수 $g(t)$는 $t=6$일 때 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $k=0$일 때 방정식 ㉠이 오직 하나의 실근 $t=6$을 가지므로

$f(x)=(x+2)(x-6)^3$ $\quad\therefore f(5)=-7$

답 ①

**14** $f(0)=f'(0)=0$에서 $f(x)$는 $x^2$을 인수로 가지고, 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 평행한 어떤 한 직선에 대하여 대칭이어야 하고, $f'(2)=0$과 조건 (다)에서 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 10을 가지므로

$f(x)=10x^2(x-2)^2$

이때 $f(x)=xh(x)+10$에서

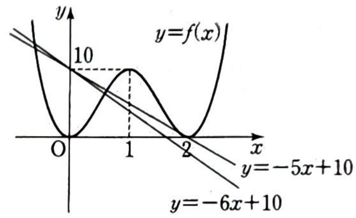
$\dfrac{f(x)-10}{x-0}=h(x)$

이므로 $h(x)$의 값은 두 점 $(0, 10)$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f(2)=0$에서

$h(2)=\dfrac{0-10}{2-0}=-5$

즉, $k$의 값이 $-1, -2, -3, -4, -5$이면 방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

점 $(0, 10)$을 지나는 기울기가 $-6$인 직선 $y=-6x+10$과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수는 2이다.




따라서 구하는 정수 $k$의 값 $-1, -2, -3, -4, -5$의 곱은

$(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)=-120$

답 ③

**15** 조건 (가)에서 $\dfrac{f(2)-f(-2)}{4}=f'(x)$이므로 두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기와 $f'(\alpha)$, $f'(0)$, $f'(\beta)$가 같고, 조건 (나)에서 $f'(0)=0$이므로

$f(-2)=f(2)$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

즉 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=-3x(x+\alpha)(x-\alpha)=-3x^3+3\alpha^2x$

라 하면 $f(0)=3$에서

$f(x)=-\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{3}{2}\alpha^2x^2+3$

이고, $f(\alpha)=6$이므로

$\dfrac{3}{4}\alpha^4=3$ $\quad\therefore \alpha=-\sqrt{2}$ $(\alpha<0)$

따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^4+3x^2+3$이므로

$f(\sqrt{3})=\dfrac{21}{4}$

답 ②

**16** $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $F'(x)=f(x)$이므로 $F(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{4}$인 사차함수이다.

$F(x)$가 $x=a$에서 최솟값을 가지므로 $F'(a)=f(a)=0$이다.

$g(x)=\left|\int_{2a}^{x} f(t)dt\right|=|F(x)-F(2a)|$가 미분가능하지 않은 $x$의 값의 개수가 1이려면 사차함수 $y=F(x)-F(2a)$의 그래프는 $x$축과 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접해야 한다.

$h(x)=F(x)-F(2a)$라 하면 $h(2a)=0$, $h'(x)=F'(x)=f(x)$이다.

$h'(2a)=f(2a)=0$이면 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $h\left(\dfrac{2}{3}a\right)=0$이므로 $g(x)=|h(x)|$는 $x=\dfrac{2}{3}a$에서 미분가능하지 않다.

이때 $f(x)=(x-a)(x-2a)^2$이므로

$f(3a)=(3a-a)(3a-2a)^2=2a^3=100$

이고 $0<a<3$에 모순이다.

따라서 $h'(2a)=f(2a)\ne 0$이므로 $g(x)=|h(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하지 않고, 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $h(-2a)=0$, $h'(-2a)=f(-2a)=0$이다.

이때 $f(x)=(x-a)(x+2a)^2$이므로

$f(3a)=(3a-a)(3a+2a)^2=50a^3=100$ $\quad\therefore a^3=2$

$\therefore f(4a)=(4a-a)(4a+2a)^2=108a^3=216$

답 216

**17** $f(x)=x^4-4x^3+x^2+x$, $g(x)=-x^3-2x^2+2x$라 하면

$f(x)-g(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$

이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{20}\times(1-0)^5=\frac{1}{20}$

답 ①

**18** $g(x)=x^n+\cdots$ ($n$은 자연수)

라 하면

$g'(x)=nx^{n-1}+\cdots$

이다. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g'(x)}{x^3}=3$에서

$f(x)g'(x)=3x^3+\cdots$

이므로 $n=3$이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수이다.

$f(x)g(x)=x^4+\cdots$

이고

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3+\cdots$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x^2}=3$에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=4x^3+3x^2$

$\therefore f(x)g(x)=x^4+x^3+C$ (단, $n$는 적분상수)

$f(0)=1$에서 $f(x)=x+1$이므로

$(x+1)g(x)=x^4+x^3+C$

위 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $C=0$

따라서 $f(x)g(x)=x^4+x^3$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{0}x^3(x+1)dx=\frac{1}{20}\times(-1)^5=-\frac{1}{20}$

답 ①

**19** 도함수가 $g'(x)=x^2(x-3)$인 사차함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극소이고, 삼차함수의 넓이와 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$g(0)-g(3)=g(4)-g(3)$

이므로 도함수가 $f'(x)=|x^2(x-3)|$인 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$에 대하여 $2f(a)=f(0)+f(4)$,

즉 $f(4)-f(a)=f(a)-f(0)$을 만족시키는 상수 $a$의 값은 3이다.

$f(4)-f(0)=2\times\int_0^3|x^2(x-3)|dx$

$=2\times\frac{1}{12}\times(3-0)^4$

$=\frac{27}{2}$

$\therefore a+f(4)-f(0)=\frac{33}{2}$

따라서 $p=2$, $q=33$이므로

$p+q=35$

답 35

## Theme 13 방정식과 부등식의 그래프 관점

059p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ④ | 3 | ④ | 4 | ④ | 5 | ④ |
| 6 | ④ | 7 | 41 | 8 | 5 | 9 | ⑤ | 10 | ① |
| 11 | ② | 12 | 22 | 13 | ⑤ | 14 | ⑤ | 15 | 3 |
| 16 | ② | | | | | | | | |

**1** 곡선 $y=x^3-2x+3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 방정식 $x^3-2x+3=x+k$, 즉 $x^3-3x=k-3$이 서로 다른 두 실근을 가진다.

$f(x)=x^3-3x=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k-3$이 서로 다른 두 점에서만 만나고, 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=0$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 2, $x=1$에서 극솟값 $-2$를 갖는다.

방정식 $x^3-3x=k-3$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$k-3=2$ 또는 $k-3=-2$

따라서 $k=5$ 또는 $k=1$이므로 모든 $k$의 값의 합은

$5+1=6$

답 ②

**2** $y=x^3-3x$에서 $y'=3x^2-3$

접선의 방정식을 $y=m(x+1)+a$라 하면 접점의 $x$좌표를 $t$라 할 때,

$t^3-3t=m(t+1)+a$, $3t^2-3=m$

$m$을 소거하면

$t^3-3t=3t^3-3t+3t^2-3+a$

$\therefore 2t^3+3t^2=3-a$ ...... ㉠

접선이 두 개만 존재하려면 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3+3t^2=t^2(2t+3)$이라 하면 $f(t)$는 $t=0$에서 극솟값 0을 갖고 $f(0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$f(t)$는 $t=-1$에서 극댓값 1을 갖는다.

방정식 $f(t)=3-a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면

$3-a=0$ 또는 $3-a=1$

$\therefore a=3$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$3+2=5$

답 ④

**다른 풀이**

$f(x)=x^3-3x$라 하자.

점 $(-1, a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선이 두 개만 존재하려면 점 $(-1, a)$가 $y=f(x)$의 그래프 위에 있거나 점 $(-1, a)$가 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점에서의 접선 위에 있어야 한다.

(i) 점 $(-1, a)$가 $y=f(x)$의 그래프 위에 있을 때

$a=f(-1)=2$

(ii) 점 $(-1, a)$가 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점에서의 접선 위에 있을 때

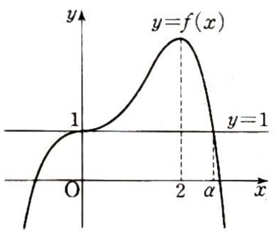
$y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$

$\frac{a}{-1}=f'(0)=-3$ $\therefore a=3$

**3** 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않아야 한다.
$f'(x)=4x^3-12x+2a=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+2a$
$4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=-2a$
에서 $g(x)=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$이라 하면 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-8$을 가지므로
방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않으려면
$-2a\le-8 \quad \therefore a\ge4\ (a>0)$
따라서 $a$의 최솟값은 4이다.

답 ④

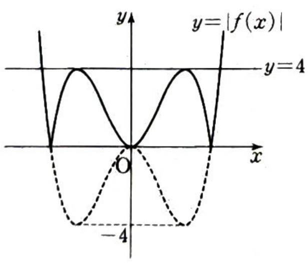
**4** $f(0)=1$이므로 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같고, 이때 사차방정식 $f(x)=1$은 삼중근 0과 다른 한 실근 $\alpha$를 갖는다.
$\therefore k=1$




답 ④

**참고**
$2-0:\alpha-2=3:1 \qquad \therefore \alpha=\frac{8}{3}$

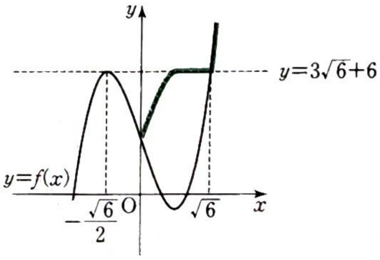
**5** $f(x)=x^4-2a^2x^2\ (a>0)$이라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수가 4이므로 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.




$f(x)=x^2(x+\sqrt{2}a)(x-\sqrt{2}a)$이므로 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
$f(a)=-a^4=-4 \qquad \therefore a^2=2$
따라서 $f(x)=x^4-4x^2$이므로
$f(3)=81-36=45$

답 ④

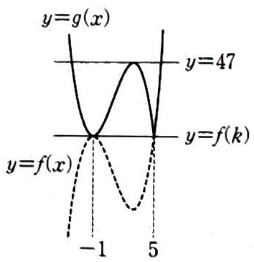
**6** 조건 (가)에서 $f(2)=4$, $f'(2)=15$이고, 조건 (나)에서
$f(0)=6$, $f'(-2)=15$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 6)$에 대하여 대칭이다.
$f(x)=ax^3+bx+6$이라 하면 $f'(x)=3ax^2+b$이고
$f(2)=8a+2b+6=4 \quad \cdots\cdots ㉠$
$f'(2)=12a+b=15 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=-9$이므로
$f'(x)=6x^2-9=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$
따라서 양의 실수 $t$에 대하여 닫힌구간 $[-t,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 나타내는 점 $(t,\ g(t))$의 집합은 그림에서 색선으로 나타내어진 부분과 같다.



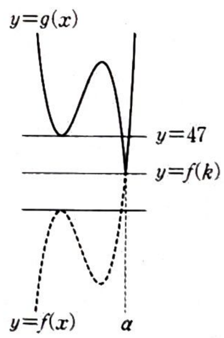

방정식 $g(t)=kt$가 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 두 함수 $y=g(t)$, $y=kt$의 그래프가 오직 한 점에서만 만나야 한다.
원점과 점 $(\sqrt{6},\ 3\sqrt{6}+6)$을 지나는 직선의 기울기는 $3+\sqrt{6}$이고,
$f'(\sqrt{6})=27$에서 $3+\sqrt{6}<27$이므로
$k=3+\sqrt{6}$

답 ④

**7** 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $y$축의 방향으로 $-f(k)$만큼 평행이동시킨 후 $x$축의 아랫부분을 $x$축에 대하여 대칭이동시키고 $y$축의 방향으로 $f(k)$만큼 평행이동시킨 그래프이다.
즉 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=f(k)$에 대하여
$f(x)\ge f(k)$에 해당하는 부분은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고
$f(x)<f(k)$에 해당하는 부분은 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=f(k)$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.
조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 극댓값은 47보다 작아야 한다.




[그림 1]




[그림 2]

함수 $f(x)$의 극댓값을 $M$, 극솟값을 $m$이라 하자.
[그림 1]과 같이
$f(k)=M=\frac{47+m}{2}$
일 때, 방정식 $g(x)=47$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.
이때 $k$의 값의 개수는 2이고, 그 값은 $-1$, 5이다.
또한 [그림 2]와 같이

$f(k)=\dfrac{47+M}{2}$

일 때, 방정식 $g(x)=47$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다.
이때 $k$의 값의 개수는 1이고, 그 값은 $\alpha$이다.

$f(x)=(x+1)^2(x-5)+M$

이고, 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$m=f(3)=M-32$

$\therefore M-m=32$

[그림 1]에서 $M+32=47$이므로

$M=15$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-5)+15$

[그림 2]에서 $f(\alpha)=\dfrac{47+15}{2}=31$이므로

$f(0)+f(\alpha)=10+31=41$

답 41

**8** 조건 (나)에서 $x>0$일 때

$f(x)\ge\dfrac{f(0)+f(3)}{2}$ …… ㉠

이고, $f(0)>f(3)$이면

$\dfrac{f(0)+f(3)}{2}>f(x)>f(3)$

인 양수 $x$가 존재하므로 모순이고, $f(0)<f(3)$일 때도 마찬가지이다.

$\therefore f(0)=f(3)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=x(x-3)^2+a$ ($a$는 실수)

라 하면 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고, $f(1)=f(4)$이다.

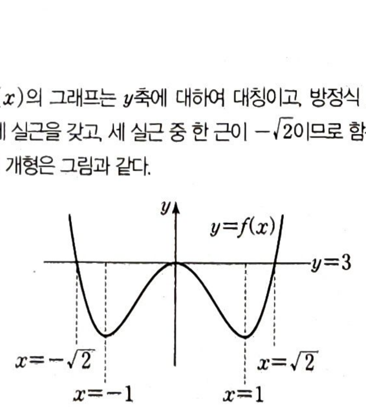
조건 (가)에서 $-k-1\le x\le k-1$일 때 $f(x)\le f(1)$이므로

$k-1\le4$ $\therefore k\le5$

따라서 $k$의 최댓값은 5이다.

답 5

**9** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이고, 방정식 $f(x)=3$이 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근 중 한 근이 $-\sqrt{2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$f(x)=x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+3$이므로 사차함수의 그래프의 대칭과 비율 관계에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(-1)=f(1)=2$

답 ⑤

**10** $y=x^3+ax-2$에서 $y'=3x^2+a$

접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$\dfrac{(t^3+at-2)}{t-(-2)}=3t^2+a$

$t^3+at-2=(3t^2+a)(t+2)$

$\therefore 2t^3+6t^2+2a+2=0$

$f(t)=2t^3+6t^2+2a+2=2t^2(t+3)+2a+2$라 하면 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $f(t)$는 $t=-2$에서 극대, $t=0$에서 극소이므로 $f(t)=0$인 양수 $t$가 존재하려면

$f(0)=2a+2<0$

$\therefore a<-1$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 $-2$이다.

답 ①

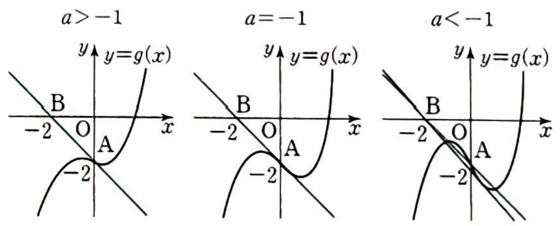
**다른 풀이**

$g(x)=x^3+ax-2$라 하고 곡선 $y=g(x)$의 변곡점을 A라 하면 $\mathrm{A}(0, -2)$이고, 점 $\mathrm{B}(-2, 0)$에 대하여 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{0-(-2)}{-2-0}=-1$이다.

따라서 점 B에서 곡선 $y=g(x)$에 접선을 그을 때 접점의 $x$좌표가 양수인 접선이 존재하려면 [그림 3]과 같이 곡선 $y=g(x)$의 변곡점에서의 접선의 기울기가 $-1$보다 작아야 한다.

$g'(x)=3x^2+a$, $g'(0)=a$이므로 $a<-1$




[그림 1] [그림 2] [그림 3]

**11** 조건 (가)에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2, 2)$에 대하여 대칭이고, 조건 (나)에서 삼차함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로 극댓값은 4이다.

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & (0<t<4)\\ 2 & (t=4)\\ 1 & (t>4)\end{cases}$$

삼차함수 $h(x)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 $t=0$, $t=4$일 때 연속이어야 하므로 $h(1)=h(2)=h(3)$이어야 한다. 따라서

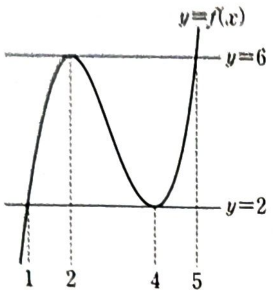
$h(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+b$ ($a$, $b$는 상수)

라 하면

$\dfrac{h'(2)}{h'(1)}=\dfrac{-a}{2a}=-\dfrac{1}{2}$

답 ②

**12** $f'(x)=3(x-2)(x-4)$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=6$, 극솟값은 $f(4)=2$이고, 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

$k<2$ 또는 $k>6$일 때 1개

$k=2$ 또는 $k=6$일 때 2개

$2<k<6$일 때 3개

방정식 $f(f(x))=a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(x)=t$로 놓았을 때

(ⅰ) 방정식 $f(t)=a$가 서로 다른 두 실근 $t_1$, $t_2$를 갖고, 두 방정식 $f(x)=t_1$, $f(x)=t_2$가 각각 실근을 하나씩 가질 때
$a=2$일 때 $t_1=1$, $t_2=4$라 하면 방정식 $f(x)=4$가 서로 다른 세 실근을 갖고, $a=6$일 때 $t_1=2$, $t_2=5$라 하면 방정식 $f(x)=2$는 서로 다른 두 실근을 갖고 방정식 $f(x)=5$는 서로 다른 세 실근을 가지므로 가능하지 않다.

(ⅱ) 방정식 $f(t)=a$가 오직 하나의 실근 $t_3$을 갖고, 방정식 $f(x)=t_3$이 서로 다른 두 실근을 가질 때
$t_3=2$이면 $a=f(2)=6$에서 방정식 $f(t)=6$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 모순이고, $t_3=6$이면 $a=f(6)=22$에서 방정식 $f(t)=22$의 실근이 하나이므로 방정식 $f(f(x))=22$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 (ⅱ)에서 $a=22$

답 22

**13** $x^4+4x^3+a\ge 2x^2+12x$에서 $x^4+4x^3-2x^2-12x+a\ge 0$

$f(x)=x^4+4x^3-2x^2-12x+a$라 하면

$f'(x)=4x^3+12x^2-4x-12=4(x+1)(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

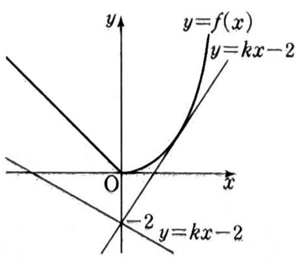
이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-3)=f(1)=a-9$이므로

부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면 $a-9\ge 0$ $\quad\therefore a\ge 9$

따라서 $a$의 최솟값은 9이다.

답 ⑤

**14** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)\ge kx-2$가 성립하려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=kx-2$와 접하거나 위쪽에 있어야 한다.




(ⅰ) $x>0$일 때, $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$
곡선 $y=x^3$과 직선 $y=kx-2$의 접점의 $x$좌표를 $a$라 하면
$a^3=ka-2$, $3a^2=k$
$k$를 소거하면 $a^3=3a^3-2$, $a^3=1$
$\therefore a=1$
이때 접선의 기울기는 3이므로 부등식이 성립하려면 $k$의 값의 범위는
$k\le 3$

(ⅱ) $x<0$일 때, 부등식이 성립하려면 직선 $y=kx-2$가 직선 $y=-x$에 평행하거나 직선 $y=kx-2$의 기울기가 직선 $y=-x$의 기울기보다 커야 하므로 $k$의 값의 범위는
$k\ge -1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1\le k\le 3$이므로 $k$의 최댓값과 최솟값의 합은
$3+(-1)=2$

답 ⑤

**15** $f'(0)=3$이므로 직선 $y=kx$가 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 $k=3$이다.

곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 증가하고 구간 $(2, \infty)$에서 감소하므로 $k\ge 3$일 때 모든 양의 실수 $x$에 대하여 부등식 $f(x)<kx$가 성립한다.

답 3

**16** $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+2$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $a-2$를 갖는다.

모든 실수 $t$에 대하여 $|f(t)|\ge 0$이므로 $f(-1)=a+2\ge 0$이면 $|f(t)|=a+2$를 만족시키는 실수 $t$에서 함수 $g(t)$가 불연속이다.

따라서 $a+2<0$에서 $a<-2$이므로 정수 $a$의 최댓값은 $-3$이다.

답 ②

## Theme 14 미분가능을 확인하는 여러 가지 방법

063p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ④ | 2 | ④ | 3 | 2 | 4 | 17 | 5 | 2 |
| 6 | ② | 7 | ⑤ | 8 | ③ | 9 | ④ | 10 | ① |
| 11 | ④ | 12 | ① | 13 | ① | 14 | ③ | | |

**1** $g(x)=|x-1|$, $h(x)=x^2+ax$라 하면 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고 미분가능하지 않으므로

$h(1)=1+a=0$ $\quad\therefore a=-1$

답 ④

**2** $g(0)=-4\times 0+1=1$, $g(1)=-1$, $g'(0)=-4$, $g'(1)=0$이어야 하므로 ④ $g(x)=2x^2-4x+1$이다.

답 ④

**3** 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$이고, $f(x)$가 $x=-p$, $x=p\ (p>0)$에서 각각 극댓값과 극솟값을 갖는다고 하면 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$f(x)=x(x+\sqrt{3}p)(x-\sqrt{3}p)=x^3-3p^2x$

이고, $f(-p)=f(2p)$, $f(p)=f(-2p)$이므로 $-2p\le t\le 2p$일 때, $x$에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 1보다 크다.

$\therefore\ \alpha=-2p,\ \beta=2p$

$g(x)$는 $x=2p$에서 미분가능하므로

$f(2p)=2pa+b$에서 $2p^3=2pa+b$

$a=f'(2p)=9p^2\quad \therefore\ b=-16p^3$

$g(x)$는 $x=-2p$에서 미분가능하므로

$f(-2p)+k=9p^2\times(-2p)-16p^3$에서

$-2p^3+k=-34p^3\quad \therefore\ k=-32p^3$

$\therefore\ \dfrac{k}{b}=\dfrac{-32p^3}{-16p^3}=2$

답 2

**다른 풀이**

$\dfrac{2p^3-b}{2p}=\dfrac{(2p^3)-(-2p^3)-k}{4p}=a$에서

$4p^3-2b=4p^3-k,\ k=2b\quad \therefore\ \dfrac{k}{b}=2$

**4** 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 연속이므로 $2a-f(b)=a+f(b)$

$\therefore\ a=2f(b)=4b^3-6b^2+18\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이고,

$g'(x)=\begin{cases}-f'(x) & (x<b)\\ f'(x) & (x>b)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로 $-f'(b)=f'(b)$

즉 $f'(b)=0$이므로 $6b(b-1)=0\quad \therefore\ b=1\ (b\neq 0)$

㉠에서 $a=16\quad \therefore\ a+b=17$

답 17

**5** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=2$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$, $f(1)=k-f(1)$

$\therefore\ f(1)=\dfrac{k}{2}$

$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<1)\\ k-f'(x) & (x>1)\end{cases}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g'(x)=\lim_{x\to 1+}g'(x)$, $f'(1)=k-f'(1)$

$\therefore\ f'(1)=\dfrac{k}{2}$

$g'(1)=2$이므로

$f'(1)=\dfrac{k}{2}=2\quad \therefore\ k=4,\ f(1)=2$

$f(0)=0$이므로 원점을 지나는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$는 원점에서 만나고 점 $(1, 2)$에서 접한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2x=x(x-1)^2$

$\therefore\ f(x)=x(x-1)^2+2x$

$\therefore\ g(2)=4\times 2-f(2)=8-6=2$

답 2

**6** $f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b\ (-1<x<2)$

$f(-1)=f(2)$이므로 $-1+a-b=8+4a+2b$

$\therefore\ a+b=-3\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=f'(2)$이므로 $3-2a+b=12+4a+b\quad \therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$

㉠에서 $b=-\dfrac{3}{2}$

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x$이므로

$f(1001)=f(3\times 333+2)=f(2)=8-6-3=-1$

답 ②

**7** ㄱ. $f(1)=0$, $f'(1)=1\neq 0$이므로 $g_1(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $|f(x)|$는 $x=1$에서 미분가능하지 않지만 연속이고, $h(x)=x-1$이라 하면 $h(1)=0$이므로 $g_2(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. $p(x)=-f(x-1)$이라 하면 $p'(x)=-f'(x-1)$

$f(1)=0$, $p(1)=-f(0)=0$이므로 $f(1)=p(1)$

$f'(1)=1$, $p'(1)=-f'(0)=-(-1)=1$이므로 $f'(1)=p'(1)$

따라서 $g_3(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=1$에서 미분가능한 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**8** $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\qquad =12x(x+1)(x-2)$

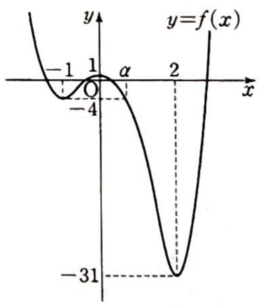
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$f(-1)=-4$, $f(0)=1$,

$f(2)=-31$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



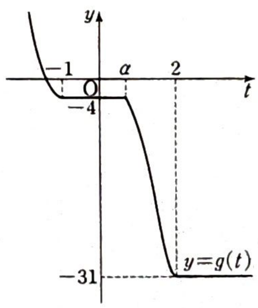

[그림 1]

$x\le t$에서 $f(x)$의 최솟값 $g(t)$는

$g(t)=\begin{cases}f(t) & (t<-1)\\ -4 & (-1\le t\le \alpha)\\ f(t) & (\alpha<t<2)\\ -31 & (t\ge 2)\end{cases}$

(단, $\alpha$는 $f(-1)=f(\alpha)$, $0<\alpha<2$를 만족시키는 상수이다.)

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.




[그림 2]

ㄱ. $t<-1$일 때 함수 $g(t)$는 감소한다. (참)

ㄴ. 함수 $g(t)$의 최솟값은 $-31$이다. (참)

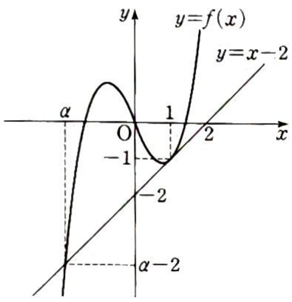
ㄷ. $\displaystyle\lim_{t\to\alpha-}g'(t)=0$이지만 $\displaystyle\lim_{t\to\alpha+}g'(t)=\lim_{t\to\alpha+}f'(t)\neq 0$이므로

함수 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

**9** 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 $x$좌표가 $-2$인 점 $(-2,\ -4)$에서 직선 $y=x-2$와 만나므로 함수 $g(t)$는 $t=-2$에서 미분가능하지 않다.
따라서 $a=-2$이므로
$f(a)=f(-2)=-4$




답 ④

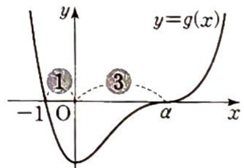
**10** 조건 (가)에서
$f(1)=1+a+b=3$
$\therefore\ a+b=2$ ...... ㉠
또 함수 $h(t)$는
$h(t)=|f(t)-g(t)|=|t^3+(a-3)t^2|$
$i(t)=t^3+(a-3)t^2$이라 하면 $i(t)=0$에서
$t=0$ 또는 $t=-a+3$
이때 $i(t)=0$이 중근 0을 가지므로 함수 $h(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $a=3$이어야 한다.
㉠에서 $b=-1$
따라서 $f(x)=x^3+3x^2-1$이므로
$f(2)=8+12-1=19$

답 ①

**11** 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=f'(0)=0$이므로
$f(x)=x^2(x^2+ax+b)$
로 놓을 수 있다.
이때 $f(1)=3$이므로
$1+a+b=3,\ b=-a+2$
$\therefore\ f(x)=x^2(x^2+ax-a+2)$
$f(x)-4x+1$은 사차함수이므로 조건 (나)에서
함수 $|f(x)-4x+1|$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$f(x)-4x+1\ge 0$이어야 한다.
한편 $f(1)=3$이므로 $g(x)=f(x)-4x+1$이라 하면
$g(1)=0$
이고, $g(x)$는 $g(x)\ge 0$인 사차함수이므로
$g'(1)=0$
$g'(x)=f'(x)-4$에서 $g'(1)=f'(1)-4$이므로
$f'(1)=4$
$f'(x)=4x^3+3ax^2-2(a-2)x$이므로
$f'(1)=4+3a-2a+4=4$
$\therefore\ a=-4$
따라서 $f(x)=x^2(x^2-4x+6)$이므로
$f(2)=4\times(4-8+6)=8$

답 ④

**12** $g(x)=f(x)-27$이라 하면 $g'(x)=f'(x)$이므로
$g(0)=f(0)-27=-27$
$g'(0)=f'(0)=0$
조건 (나)에서 $a$의 최솟값은 함수 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 $x$의 값들 중 최댓값을 의미한다.
즉 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 $x$의 값들 중 최댓값이 $-1$이므로
$g(x)=k(x+1)(x-\alpha)^3$ ($k>0,\ \alpha>0$인 상수)
로 놓을 수 있다.




$g'(0)=0$이므로 사차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여
$\alpha=3$
$g(x)=k(x+1)(x-3)^3$이고, $g(0)=-27$이므로
$g(0)=-27k=-27$ $\quad\therefore\ k=1$
따라서 $g(x)=(x+1)(x-3)^3=f(x)-27$이므로
$f(5)-27=6\times 8=48$
$\therefore\ f(5)=75$

답 ①

**13** (i) $a<0$일 때

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ 2x(x-a)(x-3) & (a\le x<0)\\ 0 & (0\le x<3)\\ 2x(x-a)(x-3) & (x\ge 3)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$는 $x=a,\ 0,\ 3$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $a=0$일 때

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<3)\\ 2x^2(x-3) & (x\ge 3)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않지만 $g(x)<0$인 구간이 존재하지 않는다.

(iii) $0<a<3$일 때

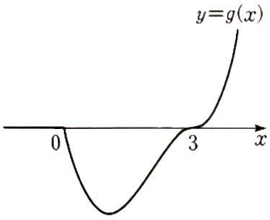
$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -2x(x-a)(x-3) & (0\le x<a)\\ 0 & (a\le x<3)\\ 2x(x-a)(x-3) & (x\ge 3)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$는 $x=0,\ a,\ 3$에서 미분가능하지 않다.

(iv) $a=3$일 때

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -2x(x-3)^2 & (0\le x<3)\\ 2x(x-3)^2 & (x\ge 3)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다.




$0\le x<3$에서 $g(x)=-2x(x-3)^2$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $g(x)$의 최솟값은

$g(1)=-8$

(v) $a>3$일 때

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ -2x(x-3)(x-a) & (0\le x<3)\\ 0 & (3\le x<a)\\ 2x(x-3)(x-a) & (x\ge a)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$는 $x=0,\ 3,\ a$에서 미분가능하지 않다.

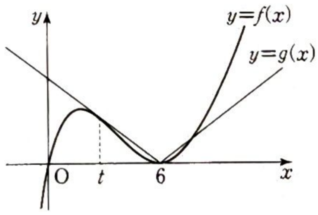
따라서 (iv)에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $-8$이다.

답 ①

**14** 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 연속이지만 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $f(b)=0$이어야 한다.

방정식 $f(x)=0$의 근은 $x=0$ 또는 $x=6$이므로 $b=0$ 또는 $b=6$이어야 하는데 $a\le 0$이면 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

$a>0$이고, $b=0$일 때 $g(0)=0$, $b=6$일 때 $g(0)>0$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같이 $0<x<6$에서 서로 접할 때 $g(0)$이 최댓값을 갖는다.




접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f'(t)=\dfrac{f(t)}{t-6}$, $(t-6)^2+2t(t-6)=t(t-6)$

$(t-3)(t-6)=0 \qquad \therefore t=3\ (t\ne 6)$

$f(3)=27$이므로 접점의 좌표는 $(3,\ 27)$이고 직선 $y=a|x-6|$이 이 점을 지나므로

$27=3a \qquad \therefore a=9$

따라서 $g(x)=9|x-6|$일 때 $g(0)$의 최댓값은 54이다.

답 ③

## Chapter 4. 적분

### Theme 15 부정적분과 정적분 그리고 넓이

068p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ① | 4 | ③ | 5 | ⑤ |
| 6 | ① | 7 | ② | 8 | ④ | 9 | ② | 10 | 6 |
| 11 | ④ | 12 | ⑤ | | | | | | |

**1** $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-a)dx=x^2-ax+C$ (단, $C$는 적분상수)

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=a-4$에서 $f(1)=0$, $f'(1)=a-4$이므로

$1-a+C=0,\ 2-a=a-4 \qquad \therefore a=3,\ C=2$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2$이므로 $f(2)=4-6+2=0$

답 ③

**2** $xf'(x)+f(x)=x+1$의 양변을 적분하면

$xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+C$ (단, $C$는 적분상수)

$f(x)$가 다항함수이므로

$C=0$

따라서 $xf(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$

$\therefore f(1)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

답 ③

**3** $\int_{-1}^{2}\{1-f(x)\}dx=\int_{-1}^{2}dx-\int_{-1}^{2}f(x)dx$

$=3-(32-5)=-24$

답 ①

**4** $\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx=12$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$\int_{1}^{2}f(x)dx=2$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(x)dx=10$

따라서

$\int_{-1}^{3}f(x)dx=2\int_{-1}^{1}f(x)dx=20$

답 ③

**5** $\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{-2}g(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx-\int_{-2}^{2}g(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x$좌표가 $-2,\ 2$인 점에서 만나므로

$f(x)-g(x)=a(x+2)(x-2)\ (a<0)$ …… ㉡

로 놓을 수 있다.

한편 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나고 직선 $y=g(x)$의 $y$절편이 $-1$이므로 $f(0)-g(0)=1-(-1)=2$

㉡에 대입하면 $a\times2\times(-2)=2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-2)$이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx&=\int_{-2}^{2}\left\{-\frac{1}{2}(x+2)(x-2)\right\}dx\\&=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx\\&=2\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx\\&=2\left[-\frac{1}{6}x^3+2x\right]_0^2=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

**참고**

$\int_{\alpha}^{\beta}|a(x-\alpha)(x-\beta)|dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$이므로

$\int_{-2}^{2}\left\{-\frac{1}{2}(x+2)(x-2)\right\}dx=\frac{1}{6}\times\left|-\frac{1}{2}\right|\times\{2-(-2)\}^3=\frac{16}{3}$

**6** $\int_0^1 tf'(t)dt=k$라 하면

$f(x)=x^2-x+k$이므로 $f'(x)=2x-1$

$\therefore k=\int_0^1 t(2t-1)dt=\int_0^1(2t^2-t)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$이므로

$f(1)=1-1+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

답 ①

**7** $\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1 g(t)dt=b$라 하면

$f(x)=3x^2+2bx+1$, $g(x)=2x+4a$이므로

$a=\int_0^1(3t^2+2bt+1)dt=\left[t^3+bt^2+t\right]_0^1=b+2$

$\therefore a-b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$b=\int_0^1(2t+4a)dt=\left[t^2+4at\right]_0^1=4a+1$

$\therefore 4a-b=-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=-3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+1$, $g(x)=2x-4$이므로

$f(1)+g(1)=-2+(-2)=-4$

답 ②

**8** $f'(x)=\int_{-1}^{1}\{tf(t)+1\}dt$에서 $\int_{-1}^{1}\{tf(t)+1\}dt$는 상수이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $f(x)=ax+2$ ($a$는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x)=a$이므로

$$\begin{aligned}a&=\int_{-1}^{1}(at^2+2t+1)dt\\&=2\int_0^1(at^2+1)dt\\&=2\left[\frac{a}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{2}{3}a+2\end{aligned}$$

$\therefore a=6$

따라서 $f(x)=6x+2$이므로

$f(1)=6+2=8$

답 ④

**9** A, B의 넓이를 각각 $a$, $b$라 하고 열린구간 $(0, 3)$에서 곡선 $y=f'(x)$가 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 $k$라 하면

$$\begin{aligned}|a-b|&=\left|\int_0^k f'(x)dx-\int_k^3\{-f'(x)\}dx\right|\\&=\left|\int_0^3 f'(x)dx\right|\\&=\left|\left[f(x)\right]_0^3\right|\\&=|f(3)-f(0)|\\&=|20-8|=12\end{aligned}$$

답 ②

**10** $\int_0^2\{f'(x)-6x|x-1|\}dx=0$에서

$\int_0^2 f'(x)dx=\int_0^2 6x|x-1|dx$

$f(2)-f(0)=\int_0^1(6x-6x^2)dx+\int_1^2(6x^2-6x)dx$

$\therefore f(2)=\left[3x^2-2x^3\right]_0^1+\left[2x^3-3x^2\right]_1^2$ $(f(0)=0)$

$=1+5=6$

답 6

**11** $\alpha<x<0$일 때 $f'(x)>0$, $0<x<2$일 때 $f'(x)<0$, $2<x<\beta$일 때 $f'(x)>0$이므로

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta|f'(x)|dx\\&=\int_\alpha^0|f'(x)|dx+\int_0^2|f'(x)|dx+\int_2^\beta|f'(x)|dx\\&=\int_\alpha^0 f'(x)dx-\int_0^2 f'(x)dx+\int_2^\beta f'(x)dx\\&=\left[f(x)\right]_\alpha^0-\left[f(x)\right]_0^2+\left[f(x)\right]_2^\beta\\&=\{f(0)-f(\alpha)\}-\{f(2)-f(0)\}+\{f(\beta)-f(2)\}\\&=(3-0)-\{(-1)-3\}+\{0-(-1)\}\\&=8\end{aligned}$$

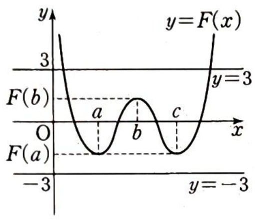
답 ④

**12** ㄱ. $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=3$ $\quad\therefore F(b)=F(a)+3$ (참)

ㄴ. $\int_a^c f(x)dx=0$이므로 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(b, 0)$에 대하여 대칭이다.

이때 $\int_{2b-x}^{x} f(x)dx=F(x)-F(2b-x)=0$이므로
$F(x)=F(2b-x)$ (참)

ㄷ. $\int_{a}^{c} f(x)dx=F(c)-F(a)=0$
$\therefore F(c)=F(a)$
$F(a)=F(b)-3$이므로
$-3<F(a)<0$이면
$-3<F(b)-3<0$
$\therefore 0<F(b)<3$
또한 $-3<F(c)<0$이므로 사차함수 $y=F(x)$의 그래프는 그림과 같다.




따라서 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

## Theme 16 그래프의 특징을 이용한 정적분

072p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ① | 2 | 12 | 3 | ② | 4 | 12 | 5 | ③ |
| 6 | 23 | 7 | ② | 8 | 15 | 9 | ③ | 10 | ④ |
| 11 | 770 | | | | | | | | |

**1** $\int_{1}^{3} x(x-2)^5 dx=\int_{-1}^{1}(x+2)x^5 dx=\int_{-1}^{1}(x^6+2x^5)dx$
$=2\int_{0}^{1} x^6 dx=2\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^1=\frac{2}{7}$

답 ①

**참고**
함수 $y=f(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동하면 $y=f(x-k)$이고, 적분 구간 $[a, b]$는 $[a+k, b+k]$로 바뀌므로
$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx$

**2** $\int_{1}^{9} f(x-1)dx=\int_{0}^{8} f(x)dx=\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{8} f(x)dx$
$=\int_{0}^{4} f(x)dx+\int_{0}^{4} f(x)dx=2\int_{0}^{4} f(x)dx$
$=2\left\{\int_{0}^{1} 3x\,dx+\int_{1}^{4}(-x+4)dx\right\}$
$=2\left\{\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_1^4\right\}$
$=2\left\{\frac{3}{2}+\left(8-\frac{7}{2}\right)\right\}=12$

답 12

**3** $\int_{2}^{6} g(x)dx=\int_{0}^{4} g(x+2)dx$
$g(x)=f(x-2)+3$에서 $g(x+2)=f(x)+3$이므로
$\int_{2}^{6} g(x)dx=\int_{0}^{4} g(x+2)dx=\int_{0}^{4}\{f(x)+3\}dx$
$\therefore \int_{0}^{4} f(x)dx-\int_{2}^{6} g(x)dx=\int_{0}^{4} f(x)dx-\int_{0}^{4}\{f(x)+3\}dx$
$=-\int_{0}^{4} 3dx=-12$

답 ②

**4** 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
$\therefore \int_{-1}^{1}(x-2)f(x)dx=\int_{-1}^{1} xf(x)dx-2\int_{-1}^{1} f(x)dx$
$=-4\int_{0}^{1} f(x)dx=-4\times(-3)=12$

답 12

**5** ㄱ. [반례] $f(x)=x+1$이라 하면
$\int_{-a}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-a}^{a} 2dx=4a$
$4\int_{0}^{a} f(x)dx=4\int_{0}^{a}(x+1)dx=4\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a=2a^2+4a$
$\therefore \int_{-a}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx\neq 4\int_{0}^{a} f(x)dx$ (거짓)
ㄴ. [반례] $f(x)=x+1$이라 하면
$\int_{-a}^{a}|f(x)-f(-x)|dx=\int_{-a}^{a}|2x|dx=2\int_{0}^{a} 2x\,dx=2\left[x^2\right]_0^a$
$=2a^2\neq 0$ (거짓)
ㄷ. $f(|x|)$는 우함수이고, $x\geq 0$일 때 $f(|x|)=f(x)$이므로
$\int_{-a}^{a} f(|x|)dx=2\int_{0}^{a} f(|x|)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

**6** 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$이다.
조건 (다)에서
$\int_{0}^{4} f(t)dt=\int_{0}^{-2} f(t)dt \quad \therefore \int_{-2}^{4} f(t)dt=0$
$\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$이므로 $\int_{2}^{4} f(t)dt=0$이다.
조건 (나)에서 $x>0$일 때
$f(x)=x^2+ax$ ($a$는 상수)
라 하면
$\int_{2}^{4} f(x)dx=\int_{2}^{4}(x^2+ax)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_2^4$
$=\frac{56}{3}+6a=0$
$\therefore a=-\frac{28}{9}$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-\frac{28}{9}x & (x<0) \\ x^2-\frac{28}{9}x & (x\geq 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{14}{9}$에서 극소이므로

$p=9$, $q=14$

$\therefore p+q=23$

답 23

**7** $f(x^2)$은 우함수이므로 $xf(x^2)$은 기함수이다.

$$\int_{-1}^{2} xf(x^2)dx=\int_{-1}^{1} xf(x^2)dx+\int_{1}^{2} xf(x^2)dx$$
$$=\int_{1}^{2} xf(x^2)dx=-2$$
$$\int_{-6}^{1} xf(x^2)dx=\int_{-6}^{-1} xf(x^2)dx+\int_{-1}^{1} xf(x^2)dx$$
$$=\int_{-6}^{-1} xf(x^2)dx=6$$
$$\therefore \int_{1}^{6} xf(x^2)dx=-6$$
$$\therefore \int_{-2}^{6} xf(x^2)dx=\int_{-2}^{2} xf(x^2)dx+\int_{2}^{6} xf(x^2)dx$$
$$=\int_{2}^{6} xf(x^2)dx$$
$$=\int_{1}^{6} xf(x^2)dx-\int_{1}^{2} xf(x^2)dx$$
$$=-6-(-2)=-4$$

답 ②

**8** 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이고, 조건 (나)에서 $\int_{-3}^{-1} f(x)dx=-5$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=-5$$
$$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{1} f(x)dx-\int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$=10-(-5)$$
$$=15$$

답 15

**9** 조건 (나)에서 $f(x+1)=f(x-2)$이므로 $x-2=k$로 놓으면

$f(k+3)=f(k)$

즉 함수 $f(x)$는 주기가 3인 주기함수이다.

조건 (가)와 주어진 그림에서

$$\int_{0}^{3} f(x)dx=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times2=3$$
$$\therefore g(a+6)-g(a)=\int_{0}^{a+6} f(t)dt-\int_{0}^{a} f(t)dt$$
$$=\int_{a}^{a+6} f(t)dt$$
$$=\int_{0}^{6} f(t)dt$$
$$=2\int_{0}^{3} f(t)dt=6$$

답 ③

**10** $0\le x\le 2$일 때, $f(x)=4x(2-x)$이므로

$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{2} 4x(2-x)dx=\frac{4}{6}\times2^3=\frac{16}{3}$$

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=\frac{1}{2}f(x)$, 즉 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$이므로

$$\int_{2}^{4} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x-2)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx=\frac{8}{3}$$
$$\int_{4}^{5} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{4}^{5} f(x-2)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{3} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{2}^{3} f(x-2)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\int_{0}^{2} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\therefore \int_{0}^{5} f(x)dx=\frac{16}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$$

답 ④

**11** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)+f(k-x)=k$가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서

$$\int_{0}^{k} f(x)dx=k\times\frac{k}{2}=\frac{k^2}{2}$$

이므로

$$\int_{0}^{k} 4f(x)dx=4\int_{0}^{k} f(x)dx=2k^2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\int_{0}^{k} 4f(x)dx=\sum_{k=1}^{10} 2k^2=2\times\frac{10\times11\times21}{6}=770$$

답 770

# Chapter 5. 정적분의 활용

## Theme 17 부정적분은 미분하고 대입하고 관찰한다

076p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | 23 | 3 | ① | 4 | ① | 5 | 6 |
| 6 | ⑤ | 7 | 5 | 8 | ④ | 9 | 22 | 10 | 4 |
| 11 | 5 | 12 | ① | 13 | 3 | 14 | 8 | 15 | ⑤ |
| 16 | ③ | 17 | ③ | 18 | ④ | 19 | ① | 20 | 27 |
| 21 | ② | 22 | 4 | | | | | | |

**1** $f(x)$의 역함수가 존재하므로 모든 실수 $x$에 대하여

$f'(x)=x^2-2ax+2a-1\geq 0$이다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2a+1=(a-1)^2\leq 0 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(2)=\int_1^2 (t^2-2t+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+t\right]_1^2=\frac{1}{3}$

답 ③

**2** $3\int_0^x tf'(t)dt=(2x+1)f(x)+x^2-3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)-3 \qquad \therefore f(0)=3$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$3xf'(x)=2f(x)+(2x+1)f'(x)+2x$

$\therefore (x-1)f'(x)=2f(x)+2x \quad \cdots\cdots$ ㉡

(i) $f(x)$가 상수함수일 때

$f(x)=3$, $f'(x)=0$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$가 일차함수일 때

$f(x)=mx+3$이라 하면 $f'(x)=m$이므로

㉡에서 $(x-1)\times m=2(mx+3)+2x$

$\therefore mx-m=(2m+2)x+6$

이때 $m=2m+2$, $-m=6$을 동시에 만족시키는 실수 $m$의 값이 존재하지 않는다.

(iii) 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $f(x)$가 $n$차함수일 때

$f(x)$의 최고차항을 $ax^n$이라 하면

$f'(x)$의 최고차항은 $anx^{n-1}$이므로

㉡에서 좌변의 최고차항은 $anx^n$,

우변의 최고차항은 $2ax^n$이므로

$anx^n=2ax^n$에서 $n=2$

(i), (ii), (iii)에서

$f(x)=ax^2+bx+3\ (a\neq 0)$이라 하면

$f'(x)=2ax+b$이므로

㉡에서 $(x-1)(2ax+b)=2(ax^2+bx+3)+2x$

$\therefore 2ax^2+(-2a+b)x-b=2ax^2+(2b+2)x+6$

이때 $-2a+b=2b+2$, $-b=6$에서 $a=2$, $b=-6$이므로

$f(x)=2x^2-6x+3$

$\therefore f(-2)=2\times 4-6\times(-2)+3=23$

답 23

**3** $\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt=x^3+3x^2+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$(x-1)f(x)=3x^2+6x+a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=9+a \qquad \therefore a=-9$

㉡에서 $(x-1)f(x)=3(x+3)(x-1)$이므로

$f(x)=3(x+3) \qquad \therefore f(1)=12$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=11+b \qquad \therefore b=-11$

$\therefore f(1)+b=1$

답 ①

**4** $xf(x)=2x^3-3x^2+2+\int_1^x f(t)dt \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-6x+f(x)$

$xf'(x)=x(6x-6)$

$f'(x)=6x-6$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=3x^2-6x+C$ (단, $C$는 적분상수) $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=1+\int_1^1 f(t)dt \qquad \therefore f(1)=1$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-3+C=1 \qquad \therefore C=4$

따라서 $f(x)=3x^2-6x+4$이므로 $f(2)=4$

답 ①

**5** $x^2f(x)=3x^4-7x^3-4+x\int_2^x f'(t)dt-\int_2^x tf'(t)dt \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=12x^3-21x^2+\int_2^x f'(t)dt \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4f(2)=-12 \qquad \therefore f(2)=-3$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-12+4f'(2)=12 \qquad \therefore f'(2)=6$

답 6

**6** $g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$

ㄱ. $g'(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $f(x)$가 우함수이고 $g'(0)=0$이므로 $g'(x)$는 기함수이다.

$\therefore g'(5)=-g'(-5)$ (참)

ㄷ. $g'(x)$의 도함수는 $f(x)$이고 $f(0)>0$이므로 $g'(x)$는 $x=0$을 포함한 충분히 작은 구간에서 증가한다.

$g'(0)=0$이므로 충분히 작은 양수 $h$에 대하여
$g'(-h)<0,\ g'(h)>0$
따라서 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**7** $g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times(t-3)dt$에서

$$g(x)=f(x)\int_a^x (t-3)dt-\int_a^x (t-3)f(t)dt$$

의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x (t-3)dt+(x-3)f(x)-(x-3)f(x)$$

$$\therefore g'(x)=f'(x)\int_a^x (t-3)dt$$

$h(x)=\int_a^x (t-3)dt$라 하자.

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$이므로 $g(x)$의 극값이 존재하지 않으려면 방정식 $h(x)=0$이 두 실근 1, 5를 가져야 한다.
즉 $h(1)=0,\ h(5)=0$을 만족시키는 실수 $a$의 값은 1 또는 5이므로 $g(x)$의 극값이 존재하지 않을 때, 모든 실수 $a$의 값의 곱은
$1\times5=5$

답 5

**8** $\int_1^x f(t)dt=x^2\int_0^1 f(t)dt+ax-1$ …… ㉠

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=2x\int_0^1 f(t)dt+a$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=\int_0^1 f(t)dt+a-1$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_1^0 f(t)dt=-1 \quad \therefore \int_0^1 f(t)dt=1$

㉢에서 $a=0$
㉡에서 $f(x)=2x \quad \therefore f(2)=4$

답 ④

**9** 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 9이므로
$f(0)=0,\ f(2)=4,\ f'(2)=9$
$g(x)=x\int_0^x f'(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)\\&=f(x)-f(0)+xf'(x)\\&=f(x)+xf'(x)\end{aligned}$$

$\therefore g'(2)=f(2)+2f'(2)=22$

답 22

**10** $\int_1^x f(t)dt=xg(x)+ax-1$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_1^0 f(t)dt=-1 \quad \therefore \int_0^1 f(t)dt=1$

$\therefore g(x)=x+1$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=x^2+(a+1)x-1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+1 \quad \therefore a=-1$

$\therefore \int_1^x f(t)dt=x^2-1$ …… ㉡

㉡의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$f(x)=2x \quad \therefore f(2)=4$

답 4

**11** $g(x)=x^2+2x+x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x)&=2x+2+\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)\\&=2x+2+\int_0^x f'(t)dt\\&=2x+2+f(x)-f(0)\end{aligned}$$

따라서 $g'(x)=f(x)+2x+1$이므로
$g'(1)=f(1)+3=2+3=5$

답 5

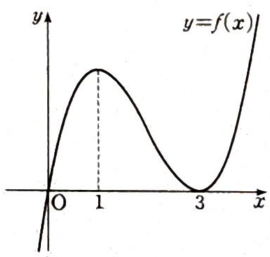
**12** $f(x)=k(x-1)(x-3)\ (k>0)$이므로
$g'(x)=f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
이때 $g(x)$는 삼차함수이고 $x=3$을 지날 때 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $g(x)$는 $x=3$에서 극소이다.
따라서 함수 $g(x)$의 극솟값은

$g(3)=\int_1^3 f(t)dt=-2$

답 ①

**13** 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지고 극솟값은 0이며 $f(0)=0$이므로 그 그래프는 그림과 같다.
$\therefore f'(x)=(x-1)(x-3)$
$\therefore f'(0)=3$

답 3




**14** $g(x)=\int_0^x (t-1)f'(t)dt$ …… ㉠에서
$g'(x)=(x-1)f'(x)$ …… ㉡이고 $f'(0)=0$이므로
$g'(0)=0,\ g'(1)=0$
함수 $g(x)$가 극댓값을 갖지 않으므로 최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $g'(x)$는

$g'(x)=3x^2(x-1)$ 또는 $g'(x)=3x(x-1)^2$

㉠에서 $g(0)=0$이고 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$g'(x)=3x^2(x-1)$, $g(x)=\frac{3}{4}x^4-x^3$

이어야 한다. 따라서 ㉡에서

$3x^2(x-1)=(x-1)f'(x)$, $f'(x)=3x^2$

이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3$ $\quad\therefore f(2)=8$

답 8

**15** ㄱ. $f'(x)=1-|x|$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. $f'(x)=1-|x|$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$이고 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소, $x=1$에서 극대이다. (참)

ㄷ. $f'(x)$가 우함수이고, $f(0)=\int_{-1}^{0}(1-|t|)dt=\frac{1}{2}$이므로

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$은 기함수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**16** $g(1)=0$이고, $g(x)=\int_{1}^{x}tf(t)dt$를 $x$에 대하여 미분하면

$$g'(x)=xf(x)=\begin{cases}x & (x<0)\\ x(x-1) & (x\geq 0)\end{cases}$$

ㄱ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $x<0$, $0<x<1$에서 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g(x)$의 최솟값은 $x=1$일 때 $g(1)=0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x)\geq 0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

**17** $x=a$일 때 $f(a)=0$이고 $0<x<a$일 때 $f(x)>0$, $a<x<b$일 때 $f(x)<0$이므로 함수 $F(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (가)에 의하여

$F(a)=\int_{0}^{a}f(t)dt=2$

즉 닫힌구간 $[0, a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 2이다.

또 $G'(x)=|f(x)|$이고 $|f(x)|\geq 0$이므로 함수 $G(x)$는 증가하는 함수이다.

조건 (나)에 의하여 $G(x)$는 $x=b$에서 최댓값 5를 가지므로

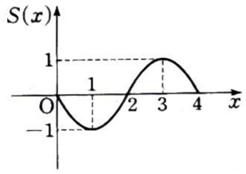
$$\begin{aligned}G(b)&=\int_{0}^{b}|f(t)|dt\\&=\int_{0}^{a}|f(t)|dt+\int_{a}^{b}|f(t)|dt\\&=2+\int_{a}^{b}|f(t)|dt=5\end{aligned}$$

$\therefore \int_{a}^{b}|f(t)|dt=3$

따라서 닫힌구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 3이다.

답 ③

**18** $0\leq x\leq 4$에서 함수 $S(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




따라서 $S(x)$는 $x=3$일 때 최대, $x=1$일 때 최소이므로 $a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=4$

답 ④

**19** $f(x)=|x^2-4|$, $F'(x)=f(x)$라 하면

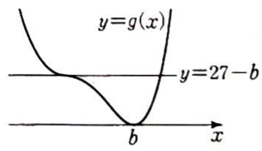
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2-h}\int_{3-h}^{3+h}|x^2-4|dx\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h(h-1)}\int_{3-h}^{3+h}f(x)dx\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h-1}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{3-h}^{3+h}f(x)dx\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3-h)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(3+h)-F(3)}{h}+\frac{F(3-h)-F(3)}{-h}\right\}\\&=-2F'(3)=-2f(3)=-10\end{aligned}$$

답 ①

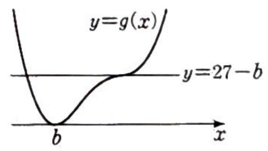
**20** $g(x)=\int_{b}^{x}f(t)dt$에서

$g(b)=0$, $g'(x)=f(x)=4x^3+2ax^2+3ax$

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 사차함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.




[그림 1]




[그림 2]

$g'(x)=x(4x^2+2ax+3a)$에서 $a=0$이면 $g'(x)=4x^3$이므로 조건 (나)에 모순이다.

따라서 $a\neq 0$, $b=0$이고 이차방정식 $4x^2+2ax+3a=0$이 중근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-12a=0$ $\quad\therefore a=12$

$\therefore g'(x)=4x^3+24x^2+36x$

$g(0)=0$이므로

$g(x)=x^4+8x^3+18x^2$

$\therefore g(1)=27$

답 27

**21** $\int_3^x f(t)dt=|x-4|(x^2+ax+b)$에서 $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

$\int_3^3 f(t)dt=0$이므로 $g(3)=0$이어야 한다.

$h(x)=|x-4|(x^2+ax+b)$라 하면 $\int_3^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $h(x)$가 $x=4$에서 미분가능하려면 $g(4)=0$이어야 한다.

$\therefore g(x)=(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$

따라서 $a=-7$, $b=12$이므로

$a+b=5$

답 ②

**22** $g'(x)=f(x)-f(x-2)$이고, $g(x)$가 $x=a$, $x=a+2$에서 극값을 가지므로

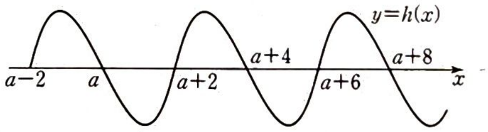
$g'(a)=f(a)-f(a-2)=0$, $g'(a+2)=f(a+2)-f(a)=0$

이고, $f(a)=0$이므로

$f(a-2)=f(a)=f(a+2)=0$

$\therefore f(x)=(x-a+2)(x-a)(x-a-2)$

이때 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




$y=f(x)$의 그래프는 점 $(a, 0)$에 대하여 대칭이고, $y=h(x)$의 그래프는 $a\le x\le a+4$일 때 점 $(a+2, 0)$에 대하여 대칭이므로

$\int_c^{c+2} h(x)dx=0$을 만족시키는 모든 $c$의 값은 작은 것부터 차례대로

$a-1$, $a+1$, $a+3$, $\cdots$이다.

$\sum_{k=1}^{10} c_k=\sum_{k=1}^{10}\{a+(2k-3)\}=10a+80$

$10a+80=50$에서 $a=-3$이므로

$f(x)=(x+5)(x+3)(x+1)$

따라서

$$g(-3)=\int_{-5}^{-3}(t+5)(t+3)(t+1)dt$$
$$=\int_{-2}^{0}(t^3-4t)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^2\right]_{-2}^{0}=4$$

답 4

**다른 풀이**

$$g(-3)=\int_{-5}^{-3}(t+5)(t+3)(t+1)dt$$
$$=\frac{1}{4}\times\{(-3)-(-5)\}^4=4$$

## Theme 18 넓이의 아이디어

083p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 2 | ① | 3 | ③ | 4 | ③ | 5 | ① |
| 6 | 4 | 7 | ② | 8 | 18 | 9 | ⑤ | 10 | 13 |
| 11 | 150 | | | | | | | | |

**1** 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 세 점에서 만나고 그때의 $x$좌표는 0, 3, 4이므로

$f(x)-g(x)=ax(x-3)(x-4)$라 하면

$$\int_0^3 ax(x-3)(x-4)dx=a\int_0^3(x^3-7x^2+12x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+6x^2\right]_0^3$$
$$=\frac{45}{4}a=45$$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)-g(x)=4x(x-3)(x-4)$이므로

$f(2)-g(2)=16$

답 16

**다른 풀이**

$$\int_0^3 ax(x-3)(x-4)dx$$
$$=\int_0^3\{ax^2(x-3)-4ax(x-3)\}dx$$
$$=\int_0^3 ax^2(x-3)dx-\int_0^3 4ax(x-3)dx$$
$$=-\frac{a}{12}\times(3-0)^4-\left\{-\frac{4a}{6}\times(3-0)^3\right\}$$
$$=-\frac{27}{4}a+18a=\frac{45}{4}a$$

**2** $\int_{-1}^2 f(x)dx=S_1-S_2=5$ …… ㉠

$\int_{-1}^2 |f(x)|dx=S_1+S_2=15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $S_1=10$, $S_2=5$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=2$

답 ①

**3** $f(x)\ge g(x)\ge 0$이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=t\ (t>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $t^3+t$이므로

$\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx=t^3+t$

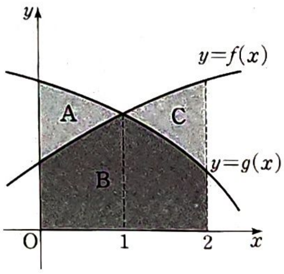
양변에 $t=2$를 대입하면 $\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx=10$

이때 $\int_0^2 f(x)dx=17$이고, $\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 g(x)dx=10$이므로

$\int_0^2 g(x)dx=17-10=7$

답 ③

**4** 조건 (가)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.




이때 두 곡선과 $x$축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 나누어진 세 부분 A, B, C의 넓이를 각각 $a$, $b$, $c$라 하자.

조건 (나)에서 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx=5$이므로

$b+c=a+b=5$

$b+c=a+b$에서 $a=c$

또 조건 (다)에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은 4이므로

$a+c=4$, $2a=4$ $(a=c)$ $\quad \therefore a=2$

따라서 $b=5-a=3$이므로 $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx=b=3$

답 ③

**5** $f(x)=x^3-(2+m)x^2+3mx$, $g(x)=mx$라 하면

$f(x)-g(x)=x^3-(2+m)x^2+2mx=x(x-2)(x-m)$

$f(x)-g(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $0=\frac{2+m}{2}$ 또는 $m=\frac{0+2}{2}$ 또는 $2=\frac{0+m}{2}$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=1$ 또는 $m=4$

따라서 모든 상수 $m$의 값의 합은

$-2+1+4=3$

답 ①

**6** 곡선 $y=x^2-2x$의 대칭축은 $x=1$이고, $S_1=2S_2$이므로

$\int_1^k (x^2-2x)dx=0$, $\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^k=0$

$\frac{1}{3}k^3-k^2+\frac{2}{3}=0$, $k^3-3k^2+2=0$, $(k-1)(k^2-2k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=1-\sqrt{3}$ 또는 $k=1+\sqrt{3}$

이때 $k>2$이므로 $k=1+\sqrt{3}$

따라서 $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$

답 4

**다른 풀이**

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^2-2x$라 하면 $f'(0)=f'(2)=0$이고, 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이다.

$\int_1^k f'(x)dx=f(k)-f(1)=0$

이고 $k>2$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여

$k-1=\sqrt{3}(2-1) \quad \therefore k=1+\sqrt{3}$

**7** 곡선 $y=x^3$과 직선 $y=-x+k$는 $0<x<2$에서 만나고, 주어진 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^2 \{x^3-(-x+k)\}dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-kx\right]_0^2$$
$$=6-2k=0$$

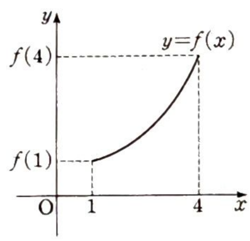
$\therefore k=3$

답 ②

**8** $\int_{f(1)}^{f(4)} f^{-1}(x)dx$

$=\{4\times f(4)-1\times f(1)\}$

$\quad -\int_1^4 f(x)dx$




$\int_1^4 f(x)dx=k$라 하면 조건 (다)에서

$k=36-k \quad \therefore k=18$

답 18

**9** $f(x)=2x^3+x$라 하면

$f(1)=3$, $f(2)=18$

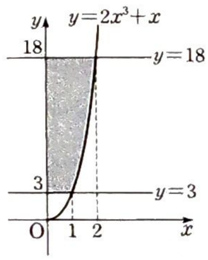
따라서 구하는 넓이는

$\{2\times f(2)-1\times f(1)\}-\int_1^2 f(x)dx$

$=2\times 18-1\times 3-\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

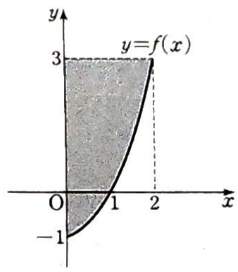
$=36-3-9$

$=24$




답 ⑤

**10** $\int_{-1}^3 g(x)dx=\int_{-1}^3 g(y)dy$이고, $\int_{-1}^3 g(y)dy$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$ 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이이다.




이때 $\int_1^0 f(x)dx=\frac{3}{4}$에서 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{3}{4}$이고,

$\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$이므로

$$\int_{-1}^3 g(y)dy=\int_{-1}^0 g(y)dy+\int_0^3 g(y)dy$$
$$=\left(-\int_0^1 f(x)dx\right)+\left(2\times 3-\int_1^2 f(x)dx\right)$$
$$=\frac{3}{4}+\left(6-\frac{5}{4}\right)$$
$$=\frac{11}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=11$이므로

$p+q=13$

답 13

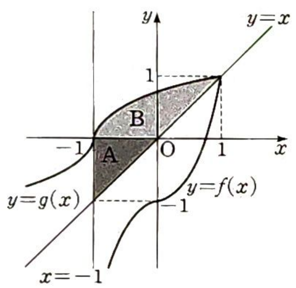
**11** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는

$2x^3-1=x$에서

$2x^3-x-1=0$, $(x-1)(2x^2+2x+1)=0$

$\therefore x=1$

그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.




곡선 $y=g(x)$와 두 직선 $y=x$, $x=-1$로 둘러싸인 도형이 $x$축에 의하여 두 부분 A, B로 나누어진다고 하면

A 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이고

B 부분의 넓이는 $\int_0^1\{x-f(x)\}dx$와 같다.

$$\therefore S=\frac{1}{2}+\int_0^1\{x-(2x^3-1)\}dx$$
$$=\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

$\therefore 100S=100\times\frac{3}{2}=150$

답 150

**다른 풀이**

A 부분의 넓이와 B 부분의 넓이의 합은 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 부분의 넓이, 즉 곡선 $y=2x^3$과 $y$축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

원점 O와 세 점 P(1, 0), Q(1, 2), R(0, 2)에 대하여 사각형 OPQR의 넓이는 2이고, 곡선 $y=2x^3$과 $y$축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=2x^3$과 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이의 비는 3 : 1이므로

$S=\frac{3}{3+1}\times2=\frac{3}{2}$

## Theme 19 속도는 위치의 도함수다

087p

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | 18 | 3 | ⑤ | 4 | 3 | 5 | ② |
| 6 | ④ | 7 | ④ | 8 | 4 | 9 | ④ | | |

**1** 두 점 P, Q의 시각 $t$일 때의 속도는 각각

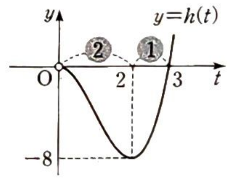
$f'(t)=4t^3-12t^2+10$, $g'(t)=2a$

두 점 P, Q의 속도가 서로 같은 순간이 한 번만 존재하려면 $t>0$에서 방정식 $f'(t)=g'(t)$의 실근의 개수가 1이어야 한다.

$f'(t)=g'(t)$에서 $2t^3-6t^2=a-5$이므로

$h(t)=2t^3-6t^2=2t^2(t-3)$이라 하면

$h(t)$는 $t=0$에서 극댓값 0을 갖고 $h(0)=h(3)$이므로 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 의하여 $h(t)$는 $t=2$에서 극솟값 $-8$을 갖는다.




$t>0$에서 방정식 $2t^3-6t^2=a-5$의 실근의 개수가 1이려면

$a-5=-8$ 또는 $a-5\geq0$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a\geq5$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 $-3$이다.

답 ②

**2** $t=1$과 $t=3$에서 점 P의 속도는 0이므로 점 P의 시각 $t$에서의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3p(t-1)(t-3)=3p(t^2-4t+3)$

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치가 0이므로

$x=p(t^3-6t^2+9t)$

점 P의 시각 $t$에서의 가속도를 $a$라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=6p(t-2)$

시각 $t=3$에서의 가속도가 2이므로

$6p\times(3-2)=2 \quad\therefore p=\frac{1}{3}$

따라서 $x=\frac{1}{3}t(t-3)^2$이므로 시각 $t=6$일 때의 점 P의 위치는

$\frac{1}{3}\times6\times3^2=18$

답 18

**3** ㄱ. $f'(2)-g'(2)=0$

$\therefore f'(2)=g'(2)$ (참)

ㄴ. $f'(4)-g'(4)>0$

$\therefore f'(4)>g'(4)$ (참)

ㄷ. $0<t\leq6$에서 $f(t)-g(t)=-20\pi$, 0, $20\pi$, $40\pi$, $60\pi$를 만족시키는 $t$의 값은 5개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**4** 점 P가 출발 후 처음으로 방향을 바꾼 다음 두 번째로 방향을 바꿀 때까지 움직인 거리는 $\frac{4}{3}$이므로

$\int_1^a|(t-1)(t-a)|dt=\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{4}{3}$

$\therefore a=3$

답 3

**5** 가속도가 $a(t)=-t+4$이므로 속도 $v(t)$를

$v(t)=-\frac{1}{2}t^2+4t+C$ ($C$는 상수)

라 하면 $t=6$에서 운동 방향이 바뀌므로

$v(6)=6+C=0 \qquad \therefore C=-6$

$v(t)=-\frac{1}{2}t^2+4t-6=-\frac{1}{2}(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=6$

$\therefore a=2$

답 ②

**6** 출발하고 $t$초가 지났을 때, 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(t)=\int_0^t (4u-2)du=\left[2u^2-2u\right]_0^t=2t^2-2t$

$x_Q(t)=\int_0^t (2u+4)du=\left[u^2+4u\right]_0^t=t^2+4t$

출발 후 두 점 P, Q가 다시 만나는 시각은 $2t^2-2t=t^2+4t$에서

$t^2-6t=0$, $t(t-6)=0 \qquad \therefore t=6\ (t>0)$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리를 $d$라 하면

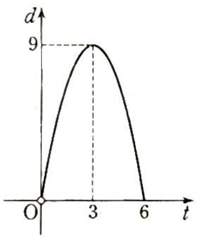
$d=|(2t^2-2t)-(t^2+4t)|$

$=|t^2-6t|$

$=|(t-3)^2-9|$

이므로 $0<t\le6$에서 $0\le d\le9$이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 9이다.




답 ④

**7** 세 구간 $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$에서 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 $A$, $B$, $C$라 하면 $\int_0^a v(t)dt=\int_a^c |v(t)|dt$에서

$A=B+C$

또 $\int_a^b |v(t)|dt<\int_b^c v(t)dt$에서

$B<C$

ㄱ. 점 P가 $a\le t\le b$일 때만 출발할 때의 방향과 반대 방향으로 움직이므로

$\int_0^b v(t)dt=A-B=(B+C)-B=C>0$

따라서 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\int_0^b v(t)dt=A-B=(B+C)-B=C=\int_b^c v(t)dt$ (참)

ㄷ. 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는 $\int_0^a v(t)dt=A=B+C$

점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는

$\int_0^c v(t)dt=A-B+C=(B+C)-B+C=2C$

이때 $B<C$이므로 $B+C<2C$

따라서 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때의 시각은 $t=c$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

**8** 점 P가 $t=a$ $(0<a<3)$에서 운동 방향을 바꾼다고 할 때

$\int_0^a |v(t)|dt=p$, $\int_a^3 |v(t)|dt=q$

라 하면

$p+q=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $\int_0^a v(t)dt=-p$, $\int_a^3 v(t)dt=q$일 때

$\int_0^3 v(t)dt=(-p)+q=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $p=3$, $q=4$이므로 점 P는 $a<t<3$일 때 다시 원점을 지난다.

(ii) $\int_0^a v(t)dt=p$, $\int_a^3 v(t)dt=-q$일 때

$\int_0^3 v(t)dt=p+(-q)=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 $p=4$, $q=3$이므로 점 P는 다시 원점을 지나지 않는다.

(ii)에서 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 $t=a$일 때 4이다.

답 4

**9** 두 점 P, Q의 시각 $t$에서의 속도가 각각 $v_1(t)=2t^2-3t+5$, $v_2(t)=t^2+2t+1$이므로 $t=0$일 때 원점에서 출발하는 점 P와 점 A$(a)$에서 출발하는 점 Q의 위치를 각각

$x_1(t)=\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+5t$, $x_2(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t+a$

라 하자.

두 점 P, Q가 만나지 않으려면 $t>0$에서 방정식 $x_1(t)=x_2(t)$, 즉 $\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t=a$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

$f(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t$라 하면

$f'(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

$f(0)=0>f(4)=-\frac{8}{3}$이므로 $t>0$일 때 삼차함수 $f(t)$는 $t=4$에서 최솟값 $-\frac{8}{3}$을 갖는다.

따라서 $a<-\frac{8}{3}$에서 정수 $a$의 최댓값은 $-3$이다.

답 ④

# MEMO

수학적 영감의 지속적인 확대를 통한 실력 거듭나기_시발수