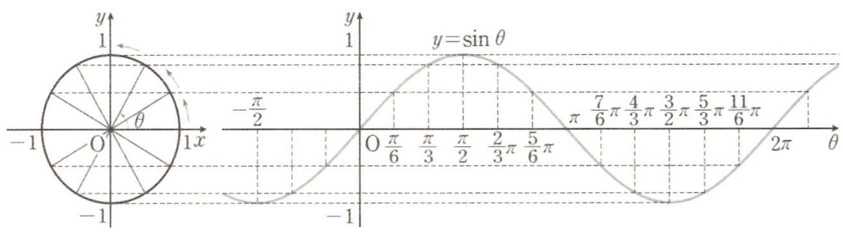
챕터 F 삼각함수의 그래프

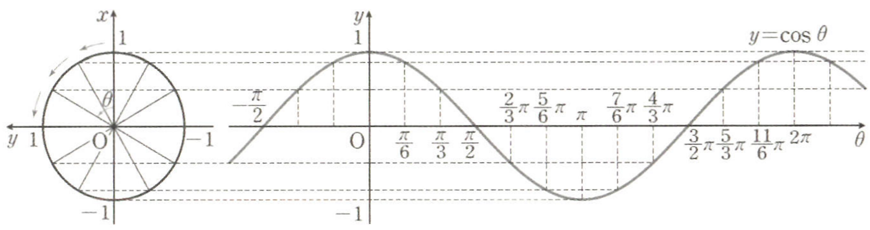
1. 삼각함수의 그래프

1-1. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프

먼저 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 스스로 그려보도록 하자. θ의 값을 0부터 조금씩 키워가면서 특수각 위주로 대입해도 개략적인 그래프를 알 수 있을 것이다. 하지만 사인함수의 정의를 제대로 기억하고 있는 사람은 단위원 위의 점의 y좌표로 사인함수를 정의했음을 떠올려 원과 비슷한 모양이 될 것이라고 추측할 수 있다. 다음 그림을 보자.



위 그림의 왼쪽에서 단위원을 보면 y좌표가 곧 좌표평면에 찍히는 과정을 그대로 다 보여준 것이다. 굴곡이 원과는 약간 다르지만 반원과 유사한 모양이 반복되는 것을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로 코사인함수를 그려야 하는데 코사인함수는 단위원 위의 점의 x좌표이므로 사인함수처럼 그리기는 힘들고, 좌표축을 회전해서 x좌표가 곧 좌표평면의 y좌표와 대응될 수 있도록 조작해서 그리면 다음과 같다.



위 그림의 왼쪽 좌표평면에서 x축/y축 위치가 바뀌어 있음을 주의 깊게 보고, 왜 바뀌어 있는지 스스로 이해할 수 있어야 코사인의 정의를 제대로 이해한 것이다.

당연한 것이지만 원을 돌면서 함숫값이 생성되므로 두 함수는 똑같은 함숫값이 반복된다. 이처럼 동일한 값이 반복되는 함수를 주기함수라고 부른다. 여기서 주기의 정의를 정확하게 알아두자.

교과서 개념 **주기함수, 주기의 정의** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

함수 $y = f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

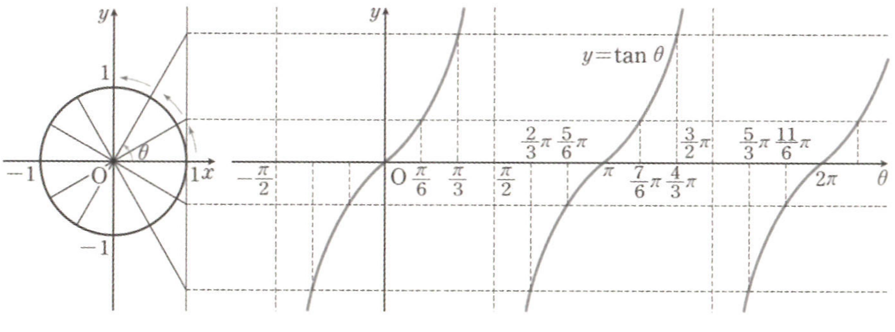
인 0이 아닌 상수 p가 존재하면 함수 $y = f(x)$를 주기함수라 한다. 이러한 상수 p의 값 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.[1]

이를 생각해 보면 두 함수 $y = \sin\theta$와 $y = \cos\theta$의 주기는 2π임을 쉽게 알 수 있다. 이제 두 함수의 특징을 정리해 보면 다음과 같다.

교과서 개념 **사인함수, 코사인함수의 특징** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

① 정의역은 $(-\infty, \infty)$, 치역은 $[-1, 1]$이다.
② 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $f(x+2\pi) = f(x)$를 만족시킨다.
③ $y = \sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
④ $y = \cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이 외에 중요한 것은 사인함수와 코사인함수는 평행이동해서 겹칠 수 있다는 것이다. 원에서 정의되는 것을 생각해 보면 당연하다는 것을 알 수 있다. 이제 탄젠트 함수에 대하여 알아보자. 탄젠트함수도 마찬가지로 단위원을 이용해서 그리면 된다. 탄젠트는 동경 OP의 기울기가 곧 함숫값이 되는 함수인데, 단위원에서 밑변이 1인 직각삼각형을 만들어 그 삼각형의 높이를 곧 함숫값으로 생각하면 된다.[2] 그림 이를 그림으로 나타내보면 다음과 같다.



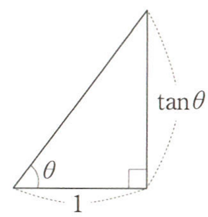
정의가 곧 기울기이기 때문에 동경이 나타내는 각이 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$일 때에는 그 값이 존재하지 않는 것을 알 수 있다. 즉, 정의역에서 $n\pi + \frac{\pi}{2}$(n은 정수)가 제외된다.

1) 주기의 정의를 보면 알겠지만 $f(x+1) = f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$의 주기가 반드시 1이라고 단정 지을 수는 없다.

$f(x) = \sin x$라는 함수는 $f(x+2\pi) = f(x)$를 만족하지만 $f(x+4\pi) = f(x)$도 만족한다.

즉, $f(x+4\pi) = f(x)$를 보고 주기가 4π라고 대답하면 틀린 대답이다. $\sin x$의 주기는 4π가 아니라 2π이다.

2) 그림과 같이 직각삼각형을 생각하면 된다.



또한, 함수 $y=\tan\theta$는 원에 의해 정의되므로 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$와 마찬가지로 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$라는 식을 만족시키는 것은 맞다. 물론 이 식을 만족시킨다고 해서 반드시 주기가 2π라는 보장은 없다. 실제로 $y=\tan\theta$의 정의역이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$일 때와 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$일 때 같은 함숫값(=기울기)이 반복되는 것을 알 수 있다. 따라서 $f(\theta)=\tan\theta$는 $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$도 만족하지만 $f(\theta+\pi)=f(\theta)$도 만족하므로 주기의 정의에 따라 π가 주기이다. 탄젠트함수의 특징을 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 **탄젠트함수의 특징** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

① 정의역은 $x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}$인 모든 실수이고, 치역은 $(-\infty, \infty)$이다.

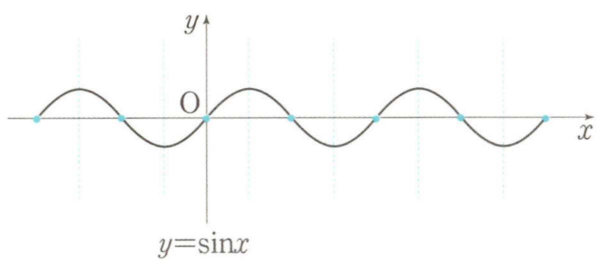
그래프에 점근선이 있고, 그 점근선은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$이다. (단, n은 정수)

② 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $f(x+\pi)=f(x)$를 만족시킨다.

③ $y=\tan x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이 외에도 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수는 대칭성을 갖고 있다.

① $y=\sin x$의 그래프



위 그림을 보면 $y=\sin x$는 원점 $(0, 0)$에 대하여 대칭이고, 그 외의 점인

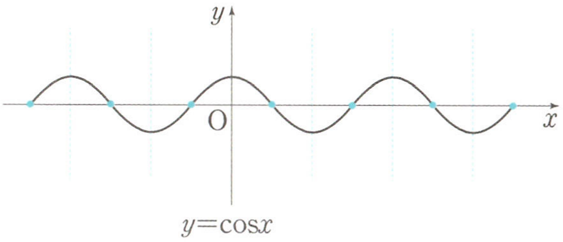
$$\cdots,\ (-2\pi, 0),\ (-\pi, 0),\ (0, 0),\ (\pi, 0),\ (2\pi, 0),\ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다. 마찬가지로 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고, 그 외의 직선인

$$x=\cdots,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다.

② $y = \cos x$ 의 그래프



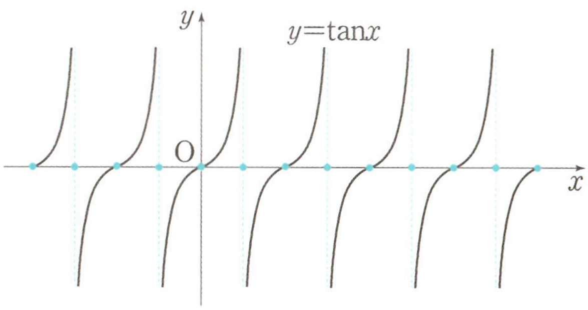
그래프에서 보듯이 $y = \cos x$ 는 다음 점들에 대하여 대칭인 그래프이다.

$$\cdots,\ \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right),\ \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right),\ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right),\ \cdots$$

마찬가지로 $y = \cos x$ 는 다음 직선들에 대하여 대칭인 그래프이다.

$$x = \cdots,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \cdots$$

③ $y = \tan x$ 의 그래프



위 그림을 보면 $y = \tan x$ 는 원점 $(0, 0)$ 에 대하여 대칭이고, 그 외의 점인

$$\cdots,\ (-\pi, 0),\ \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right),\ (0, 0),\ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right),\ (\pi, 0),\ \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right),\ \cdots$$

에 대하여 대칭인 것도 확인할 수 있다.

사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 대칭성을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 대칭성　교과서 개념　수능 개념　교과서 간접 개념

임의의 정수 n에 대하여 세 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프는 다음과 같은 대칭성을 갖는다.

함수	점 대칭성	선 대칭성
$y=\sin x$	$(n\pi,\ 0)$	$x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$
$y=\cos x$	$\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi,\ 0\right)$	$x=n\pi$
$y=\tan x$	$\left(\dfrac{n\pi}{2},\ 0\right)$	없음

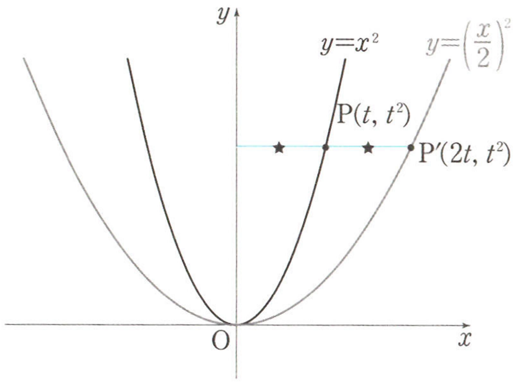
이제 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 평행이동, 대칭이동한 그래프에 대하여 배워볼 것이다. 일단 평행·대칭이동은 당연히 완벽하게 암기하자.

평행이동, 대칭이동　교과서 개념　수능 개념　교과서 간접 개념

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형에 대하여
① x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동: $f(x-a,\ y-b)=0$
② x축에 대하여 대칭이동: $f(x,\ -y)=0$
③ y축에 대하여 대칭이동: $f(-x,\ y)=0$
④ 원점에 대하여 대칭이동: $f(-x,\ -y)=0$
⑤ $y=x$에 대하여 대칭이동: $f(y,\ x)=0$

여기서 평행·대칭이동 외에 다른 그래프의 이동을 한 가지만 더 배워보자. 예를 들어, 두 함수 $y=x^2$과 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ 모두 $y=\bigstar^2$의 꼴인 것을 알 수 있고 $\bigstar=1$이면 $y=1$이므로 곡선 $y=x^2$이 $x=1$, $y=1$인 점 $(1,\ 1)$을 지난다는 말은 곧 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$이 $\dfrac{x}{2}=1$, $y=1$인 점 $(2,\ 1)$을 지난다는 말이다. 즉, 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 2배한 점의 집합[1]이라는 것을 알 수 있고, 이를 그래프로 표현해 보면 다음과 같다.

1) [교과서 간접 개념]-함수의 그래프
함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x,\ f(x))$ 전체의 집합
$G=\{(x,\ f(x)) \mid x \in X\}$
를 함수 f의 그래프라고 정의한다. 그 그래프는 순서쌍 $(x,\ f(x))$를 좌표평면에 점으로 나타내어 그릴 수 있다.



그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위에 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$이 있으면 곡선 $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ 위에는 반드시 점 $\mathrm{P}'(2t,\ t^2)$이 있다. 이 상황만 이해하면 양수 a에 대하여 $y=f(ax)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{a}$배한 그래프라는 것을 알 수 있다. a가 음수면 단순히 x좌표를 $\dfrac{1}{|a|}$배 한 후에 y축에 대하여 그래프를 대칭이동 했다고 생각하면 된다. **이러한 도형의 이동을 '확대, 축소'라고 반드시 기억하자.** 정리하면 다음과 같다.

수능 개념 그래프의 확대, 축소 　교과서 개념　수능 개념　교과서 간접 개념

① 양수 a에 대하여 $y=f(ax)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 위의 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{a}$배한 그래프이다.

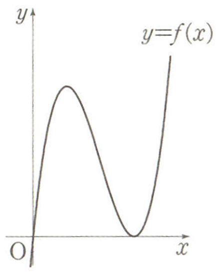
② a가 음수면 모든 점의 x좌표를 $\dfrac{1}{|a|}$배 한 후에 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 했다고 생각하면 된다.

위는 하나의 [수능 개념]으로 완벽하게 이해하고, 암기하고 있도록 하자. 이해하는 것은 '평행이동, 대칭이동'을 이해하는 과정과 같기 때문에 크게 어렵지 않을 것이다. 이 내용은 앞으로 지속적으로 도움이 되는 내용이므로 정확하게 알아두도록 하자.

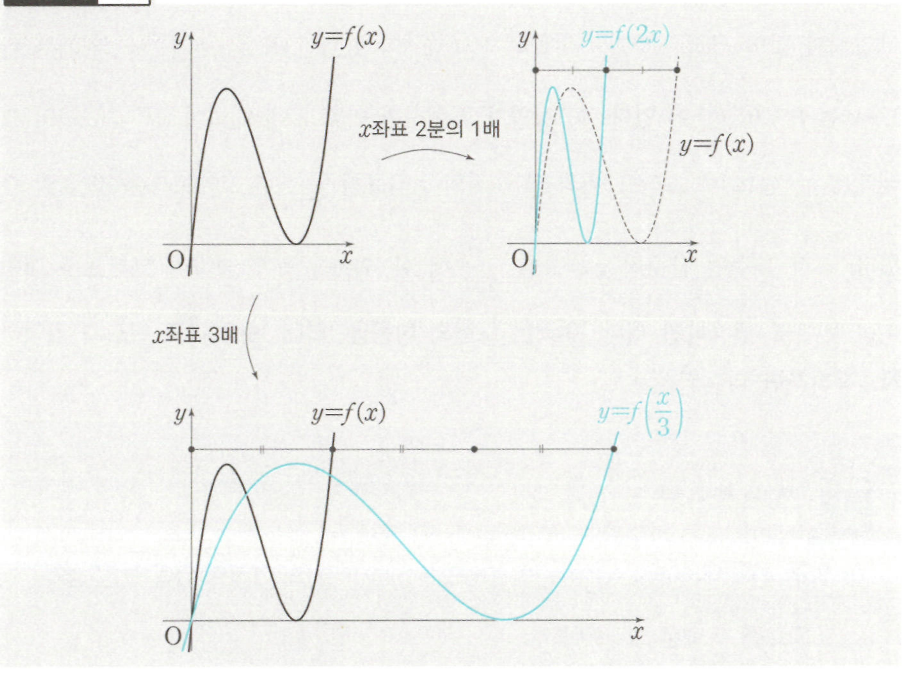
EX 01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 함수

$$y=f(2x),\quad y=f\left(\frac{x}{3}\right)$$

의 그래프의 개형을 그리시오.



교과서적 해법



여기까지 이해한 후에 주기가 2π 인 함수 $y=\sin x$ 에 대하여 함수 $y=\sin 2x$ 의 주기를 묻는다면 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 라고 매우 쉽게 대답할 수 있을 것이다. 애초에 x 의 자리에 $2x$ 를 대입하면 함수의 그래프의 모든 점의 x 좌표를 $\frac{1}{2}$ 배한 것이기 때문이다. 마찬가지로 $y=\sin\frac{x}{2}$ 의 주기는 4π 이다.

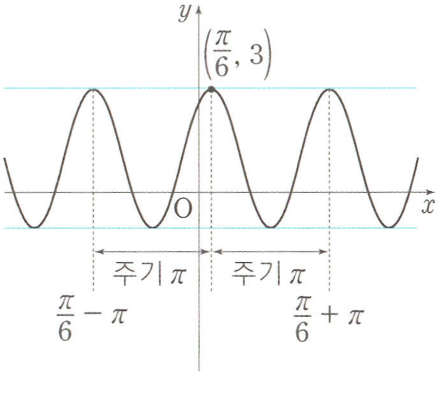
이제 [교과서 간접 개념]인 '평행이동, 대칭이동'[166p]과 [수능 개념]인 '그래프의 확대, 축소'[167p]를 종합하면 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 과 같은 그래프도 정확하게 파악할 수 있게 된다. $y=\cos x$ 에서 출발하여 다음 과정을 거치면 된다.

① 모든 함숫값을 2배 → $\cos x$에서 $2\cos x$
② y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동 → $2\cos x+1$
③ x축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동 → $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$
④ x 대신 $2x$를 대입하여 모든 점의 x좌표 $\frac{1}{2}$배 → $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$

위 과정을 거치면 사인/코사인이 포함된 함수의 그래프가 어떻게 나오건 정확하게 해석할 수 있을 것이다.[1] 그런데, 사실 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$의 그래프는 주기, 치역, 특별한 점(최대 혹은 최소가 되는 점, 대칭의 중심이 되는 점 등)만 찾으면 어렵지 않게 그릴 수 있다. 예를 들어 주기는 $2x$를 통해 π인 것을 알 수 있고, 치역은 $[-1, 3]$, 적당히 $2x-\frac{\pi}{3}=0$이 되도록 하는 점인 $x=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$을 지나는 것을 알 수 있다. 정보를 정리하면 다음과 같다.

① 주기: π ② 치역: $[-1, 3]$ ③ 특별한 점: $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$

이를 토대로 좌표평면에 두 직선 $y=-1$, $y=3$을 긋고, 한 점을 찍은 후 주기에 맞춰 그래프를 그리면 그림과 같다.



그림처럼 사인・코사인함수는 두 함수 모두 같은 모양의 그래프가 반복될 뿐이므로 주기/치역/특별한 점(최대・최소가 되는 점, 대칭의 중심이 되는 점)만 알면 모두 그래프를 그릴 수 있다는 것을 알아두자. 정리하면 다음과 같다.

1) 만약 확대, 축소부터 하게 되면 평행이동해야 하는 값이 달라지는 것을 알 수 있다. 어떤 이동부터 먼저 하든 간에 결과는 같아야 하기 때문이다.

수능 개념 일반적인 삼각함수의 특징

$y=a\sin(bx+c)+d$ 와 $y=a\cos(bx+c)+d$ 의 특징 $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

① 주기: $\dfrac{2\pi}{|b|}$ $\rightarrow$ 그래프의 확대, 축소로 이해해야 한다.

② 최댓값: $|a|+d$, 최솟값: $-|a|+d$

$\rightarrow$ $-1\leq \sin(bx+c)\leq 1$ 로부터 유도할 수 있어야 한다.

$y=a\tan(bx+c)+d$ 의 특징 $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

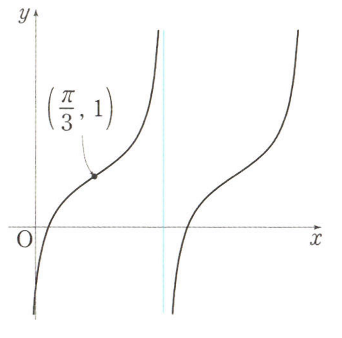
① 주기: $\dfrac{\pi}{|b|}$ ② 최댓값, 최솟값: 존재하지 않는다.

★ 일반적인 삼각함수의 그래프를 그리는 방법

① 대칭이동 + 평행이동 + 확대/축소로 해석하여 그래프를 그린다.

② 주기, 치역, 특별한 점(최대 · 최소가 되는 점, 대칭의 중심인 점)을 찾으면 그래프를 그릴 수 있다.

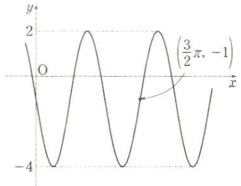
곡선 $y=2\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$ 을 그려보자. 주기가 2π 이고, 대칭의 중심이 되는 점 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ 1\right)$ 이 기준임을 생각하여 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있다.



$y=\tan x$ 의 점근선 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\dfrac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동하면 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 의 점근선이 $x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$ 임을 알 수 있다. 그런데 x 의 자리에 $\dfrac{x}{2}$ 를 대입하면 모든 좌표가 2배가 되므로 점근선도 2배가 된다. 따라서 $y=\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 의 점근선은 $x=\dfrac{2\pi}{3}\times 2=\dfrac{4\pi}{3}$ 이다. 또한 주기가 2π 이므로 점근선은 $x=2n\pi+\dfrac{4\pi}{3}$ (단, n 은 정수)이다.

$y=3\sin(2x-3\pi)-1$ 의 그래프를 그릴 때에도 점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ -1\right)$ 을 중심으로 잡고, 주기 π, 치역 $[-4,\ 2]$ 로 그래프를 완성하면 된다. 스스로 해 보자.[1)]

1) 스스로 그린 그래프가 아래 그림과 일치하는지 확인하자.



EX 02 [2003.4·가 15번] [변형]

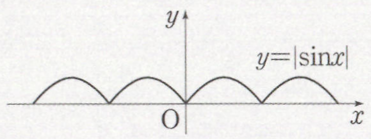
다음 함수들의 그래프를 그리고, 주기함수라면 주기를 구하시오.

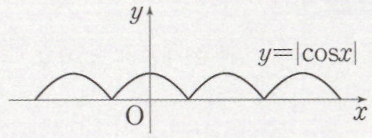
① $y=|\sin x|$ ② $y=|\cos x|$ ③ $y=|\tan x|$

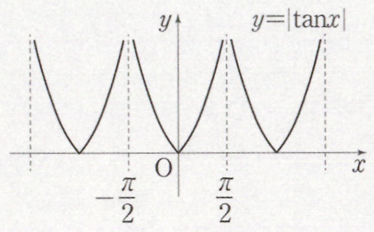
④ $y=\sin|x|$ ⑤ $y=\cos|x|$ ⑥ $y=\sin x+|\sin x|$

교과서적 해법

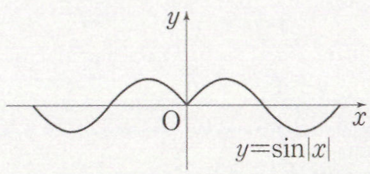
①, ②, ③은 그래프를 그려보면 다음과 같다. 즉, 모두 주기가 π이다.

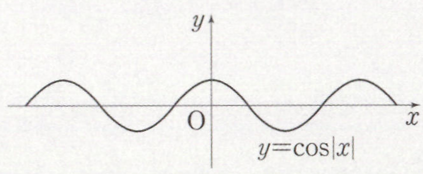




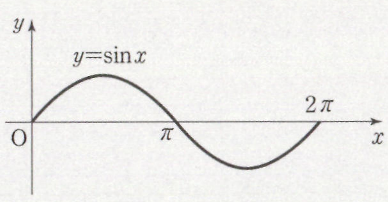


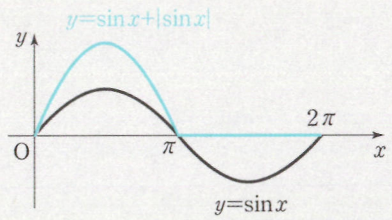
④, ⑤는 $x\geq 0$이면 $\sin|x|=\sin x$, $\cos|x|=\cos x$이고, $\sin|x|=\sin|-x|$, $\cos|x|=\cos|-x|$이므로 y축에 대칭인 함수이다. 즉, $x\geq 0$인 구간에서 각각 $\sin x$, $\cos x$의 그래프를 그린 후 y축에 대해 대칭이동해서 완성하면 된다. 이를 토대로 ④, ⑤의 그래프를 그리면 다음과 같고, ④는 주기함수가 아니고, ⑤는 $\cos x$와 완전히 같은 그래프임을 알 수 있다. 따라서 ⑤의 주기는 2π이다.





⑥은 $\sin x+|\sin x|=\begin{cases}2\sin x & (\sin x\geq 0)\\ 0 & (\sin x<0)\end{cases}$이므로 $\sin x$가 양수일 때는 $2\sin x$를 그리고, $\sin x$가 음수일 때는 0을 그리면 된다. 따라서 $\sin x$가 양수인지 음수인지가 중요하므로 $y=\sin x$의 그래프를 먼저 그려서 부호를 판단하면서 $2\sin x$와 0을 그리면 된다.





왼쪽 그림에서 $\sin x\geq 0$인 구간은 오른쪽 그림처럼 2배해서 $y=2\sin x$를 그리면 되고, $\sin x<0$인 구간은 $y=0$을 그리면 된다. 또한 주기는 2π이므로 그래프를 반복해서 그리면 $y=\sin x+|\sin x|$의 그래프를 완성할 수 있다.

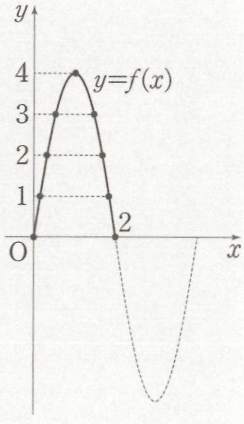
절댓값 그래프를 잘 모르겠다면 지수로그함수로 돌아가서 복습하자.

EX 03 [2018.4·가 24번]

좌표평면에서 곡선 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $(0\le x\le 2)$ 위의 점 중 y 좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오. [3점]

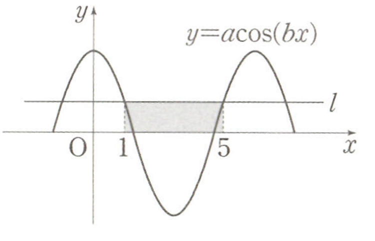
교과서적 해법

$y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 최댓값은 4이고, 주기가 $2\pi\div\frac{\pi}{2}=4$이다. 이를 토대로 함수 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다. 따라서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 9임을 알 수 있다.



EX 04 [2008.6·고2 자연] [26번]

그림과 같이 $y=a\cos(bx)$의 그래프의 일부분과 x축에 평행한 직선 l이 만나는 점의 x좌표가 1, 5이다. 직선 l과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 20일 때, a의 값을 구하시오. (단, $b>0$) [4점]



교과서적 해법

도형의 넓이가 20이므로 색칠된 직사각형의 높이는 5이다. 즉, $a\cos b=5$이다. $\frac{1+5}{2}=3$이고, 그림에서 3이 곧 주기의 절반임을 알 수 있다. 주어진 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로

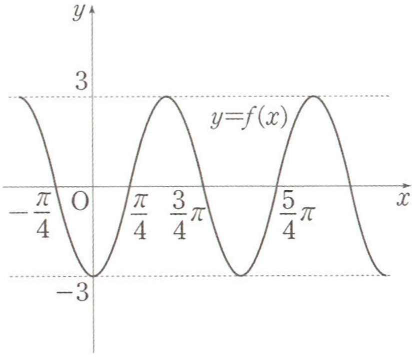
$$\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{b}=3 \Leftrightarrow b=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ a\cos b=5 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{3}=5 \Leftrightarrow a=10$$

이 문제에서 $\dfrac{1+5}{2}=3$을 활용해서 주기를 찾는 과정은 사인함수, 코사인함수가 선대칭을 갖고 있기 때문에 가능한 것이다.

EX 05 그림은 함수 $f(x)=a\sin\left\{b\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$의 그래프이다.

[2006.3·고2 25번]



a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

교과서적 해법

그래프에서 $2\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi$가 주기임을 알 수 있다. 함수 $f(x)$에서 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$이므로 $|b|=2$이다. 그래프에서 최댓값이 3이므로 $|a|=3$임을 바로 알 수 있다.

$\therefore\ a^2+b^2 = |a|^2+|b|^2 = 13$