2-1 2. 삼각함수 - 1. 삼각함수

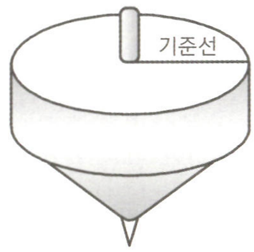
챕터 E 삼각함수의 뜻과 성질

1. 일반각과 호도법[1]

1-1. 시초선과 동경, 그리고 일반각

1) 일반각과 호도법에 대해 잘 알고 있다고 생각하더라도 마지막이라는 생각으로 반드시 모든 글을 다 읽고 개념을 제대로 공부하길 바란다.

다음 그림과 같은 팽이 2개를 해원이와 종혁이가 하나씩 돌린다고 하자.

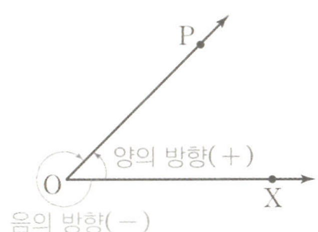


해원이가 돌린 팽이는 팽이의 중심이 고정된 상태로 시계 반대 방향으로 $750°$를 회전하고, 종혁이가 돌린 팽이는 팽이의 중심이 고정된 상태로 시계 방향으로 $1410°$를 회전했다고 하자. 두 팽이에 대하여 기준선이 어느 위치에 있을지 생각해서 그 선이 초기 기준선과 이루는 각을 스스로 생각해 보자.

$750° = 360° \times 2 + 30°$이므로 기준선으로부터 시계 반대 방향으로 $30°$를 돌린 상황과 같다. 마찬가지로 $1410° = 360° \times 3 + 330° = 360° \times 4 - 30°$이므로 기준선으로부터 시계 방향으로 $330°$를 돌리거나 시계 반대 방향으로 $30°$를 돌린 상황과 같다. 두 각은 기준선으로부터 상대적인 위치를 생각해 보면 정확히 같으므로 **결과적으로 보면 기준선으로부터 시계 반대 방향의 $30°$로 같은 상황이다.** 하지만 두 팽이는 분명히 서로 회전한 횟수도 다르며, 회전한 방향도 다르다.

지금까지 우리는 각을 $0°$에서 $360°$까지의 범위로만 나타내어 왔다. 그런데 위의 상황에서 해원이와 종혁이가 돌린 팽이처럼 여러 바퀴 회전하거나 회전한 방향을 구분해야 할 필요가 있을 때를 위해 각의 범위를 넓힐 필요성을 느낄 수 있다. 이제 각의 크기의 뜻을 다시 정의하고, 그 범위를 확장해 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 반직선 OX, OP에 의해 정해진 $\angle XOP$의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 반직선 OX에서 반직선 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다.



여기서

① 반직선 OX 를 시초선 ② 반직선 OP 를 동경

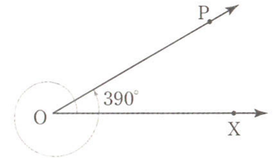
이라고 정의한다. 또한 동경 OP 가 점 O 를 중심으로 회전할 때 **시계 반대 방향을 양의 방향, 시계 방향을 음의 방향으로 정의한다.**

여기까지만 하면 이제 $390°$ 와 같은 $360°$ 를 넘는 각도 표현할 수 있고, $-760°$ 와 같은 음의 각도 표현할 수 있게 되었다. 이제 일반각의 정의를 보자. 만약 동경 OP 의 위치가 $30°$ 로 정해져있더라도 $\angle XOP$ 의 크기는 $390°$, $-330°$ 등 여러 가지로 쓸 수 있다.[1] 이를 일반적으로 표현해 보면 다음과 같다. 일반적으로 시초선 OX 와 동경 OP 가 나타내는 한 각의 크기를 $a°$ 라 하면

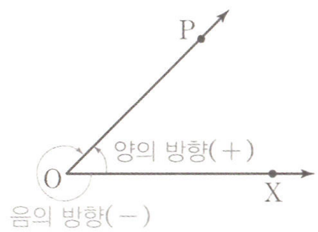
($\angle XOP$ 의 크기)$=360° \times n + a°$ (단, n 은 정수)

이것을 동경 OP 가 나타내는 일반각이라고 한다. 예를 들어, '$30°$ 의 동경이 나타내는 일반각을 구하시오.'라고 문제가 나오면 $360° \times n + 30°$ 라고 쓸 수 있어야 한다. 지금까지 배운 정의를 정리하면 다음과 같다.

1) $390°$ 를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



교과서 개념 **시초선, 동경, 일반각** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념



두 반직선 OX 와 OP 에 대하여 $\angle XOP$ 의 크기를 반직선 OP 가 반직선 OX 의 위치에서 점 O 를 중심으로 반직선 OP 의 위치까지 회전한 양으로 정의한다. 이때

① 반직선 OX 를 시초선 ② 반직선 OP 를 동경

라 하고, 동경 OP 가 나타내는 한 각의 크기를 $a°$ 라 하면

③ ($\angle XOP$ 의 크기) $= 360° \times n + a°$ (단, n 은 정수)
$=$ (동경 OP 가 나타내는 일반각)

이 정의는 상위권 학생들도 설명해 보라고 하면 잘 못하는 경우가 매우 많다. 지금 여기서 **시초선, 동경, 각의 크기, 일반각의 정의를 정확하게 이해하고 완벽하게 암기하고 넘어가도록 하자.** 다음 문제를 풀어보자.

EX 01 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 $360° \times n + a°$ 의 꼴로 나타내시오. (단, n은 정수, $0° \le a° < 360°$)

① $40°$ ② $1500°$ ③ $-140°$ ④ $-735°$

교과서적 해법

① $360° \times n + 40°$

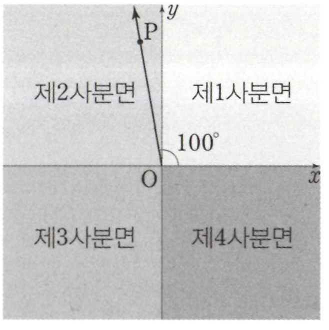
② $1500° = 360° \times 4 + 120°$ 이므로 일반각은 $360° \times n + 120°$

③ $-140° = 360° \times (-1) + 200°$ 이므로 일반각은 $360° \times n + 200°$

④ $-735° = 360° \times (-3) + 345°$ 이므로 일반각은 $360° \times n + 345°$

일반각의 꼭짓점을 좌표평면의 원점에 놓고, 시초선 OX 를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP 가 제 n사분면에 있으면 동경 OP 가 나타내는 각을 **제 n사분면의 각**이라고 한다.[1] 예를 들어 $460°$ 는 $460° = 360° + 100°$ 이므로 그림과 같이 제 2 사분면의 각이다.

1) $n = 1, 2, 3, 4$

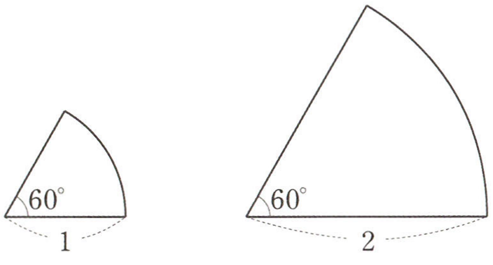


이제 '호로 각도를 표현하는 법'인 '호도법'을 배워보자.

1-2. 호도법

지금까지 우리는 한 바퀴를 360등분한 육십분법을 활용했다. 이 육십분법 외에 각을 표현하는 또 다른 방법인 호도법에 대해 공부해 보자. 호도법이라는 단어를 풀어쓰면 **'호의 길이를 이용해서 각도를 나타내는 방법'** 이다. 호를 이용해서 각도를 나타내기 위해 노력해 보자. 그림과 같이 중심각이 $60°$ 이고 반지름의 길이가 1, 2 인 두 부채꼴의 호의 길이를 일단 구해 보면 다음과 같다.

$$2\pi \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3}, \quad 4\pi \times \frac{60}{360} = \frac{2\pi}{3}.$$



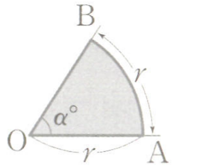
만약 각을 호의 길이로 정의한 후, 누군가에게 각 $\frac{2\pi}{3}$ 를 그려보라고 했는데 누군가는 반지름의 길이가 1 이고 중심각이 $120°$ 인 부채꼴을 그리고, 누군가는 반지름의 길이가 2 이고 중심각이 $60°$ 인 부채꼴을 그린다면 곤란할 것이다. 따라서 일대일대응이 되어야 제대로 각을 약속할 수 있다는 것을 알 수 있다. 일대일 대응으로 만들기 위해 두 부채꼴의 닮음을 활용해서

$$\frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}}$$

로 각도를 약속하면 $\frac{\pi}{3}$ 와 $60°$ 는 정확히 일대일대응이 된다. 이 호의 길이를 이용해 나타낸 각도의 단위를 라디안이라 부르기로 약속하자. 라디안이라는 단위는 주로 생략하는 편이다.

$\frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}}$ 의 값을 각도로 약속한 후 누군가에게 각 $\frac{\pi}{3}$ 를 그림으로 그려보라고 하면 누군가는 반지름의 길이가 1 이고 중심각이 $60°$ 인 부채꼴을 그릴 것이고, 누군가는 반지름의 길이가 2 이고 중심각이 $60°$ 인 부채꼴을 그릴 것이다. 즉, 반지름의 길이는 달라도 중심각은 일치하는 부채꼴을 그린다는 것이다. 따라서 호의 길이로 완벽하게 각도를 약속한 것이다. 예를 들어, 그림과 같이 반지름의 길이가 r 이고 호의 길이가 r 인 부채꼴 OAB 의 중심각을 구해 보면

$$\frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}} = \frac{r}{r} = 1\text{(라디안)}$$



이라고 할 수 있는 것이다. r의 값에 상관없이 각의 크기는 일정하고, 그 일정한 값을 1(라디안)이라 약속한 것이다. 마찬가지로 반원의 중심각을 생각해 보면

$$\frac{\text{호의 길이}}{\text{반지름의 길이}} = \frac{\pi r}{r} = \pi\text{(라디안)}$$

이라 할 수 있고, $180° = \pi$(라디안) 이라는 각은 정확하게 암기하도록 하자.

최종적으로 호도법을 일반각과 함께 생각하면 우리는 어떤 실수를 봤을 때 정확히 하나의 각을 대응시킬 수 있을 것이다. 예를 들어, $\frac{\pi}{4}$ 라는 실수를 보면 '$45°$를 의미하는구나'라 할 수 있고, $-\frac{\pi}{3}$ 라는 실수를 보면 '$-60°$를 의미하는구나'라 할 수 있어야 한다. 정리하면 다음과 같다.

교과서 개념 | 육십분법과 호도법의 일대일 대응 | 교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 심화 개념

육십분법과 호도법 사이의 관계

① $1\text{(라디안)} = \frac{180°}{\pi}$ ② $\frac{\pi}{180}\text{(라디안)} = 1°$

$\pi = 180°$ 만 외우고 양변에 상수배하여 비례계산만 하면 된다.

앞으로 나오는 모든 각은 ° 라는 기호가 붙어있지 않은 이상 모두 라디안이라고 생각하면 된다. 이번에는 라디안을 통해 일반각을 표현해 보자. 시초선인 반직선 OX 에 대한 반직선 OP 가 나타내는 한 각을 a(라디안)이라 하면 $360° = 2\pi$ 이므로

$\angle$XOP 의 크기 = 동경 OP 가 나타내는 일반각 = $2n\pi + a$
(단, n은 정수)

라고 할 수 있다. 이제 다음 페이지의 문제를 풀어보자.

EX 01 ① 각 $\frac{17}{6}\pi$의 동경이 나타내는 일반각을 $2n\pi+\theta$ (n은 정수, $0 \le \theta < 2\pi$)의 꼴로 나타내시오.

② θ가 제 3사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{2}$는 제 몇 사분면의 각인지 설명하시오.

교과서적 해법

① $\frac{17}{6}\pi$에 얼마든지 2π를 더하고 빼도 되는 것을 생각하자. 2π를 빼면 $\frac{5}{6}\pi$이므로 $\frac{17}{6}\pi$의 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n은 정수).

② 앞의 ①에서 배운 동경이 나타내는 일반각을 이용하자. 제 3 사분면에 있는 각이므로

$$2n\pi+\pi < \theta < 2n\pi+\frac{3\pi}{2} \quad (n\text{은 정수})$$

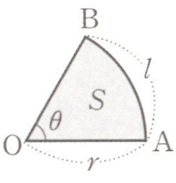
이고, 양변을 2로 나누면

$$n\pi+\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < n\pi+\frac{3\pi}{4}$$

인데, $n=1,\ 2,\ 3\ \cdots$을 대입해서 하나씩 확인해 보면 n이 짝수일 때에는 제 2사분면의 각이고 n이 홀수일 때에는 제 4사분면의 각임을 알 수 있다.

일반각과 호도법의 정의를 소홀히 하는 학생이 있는데 위의 문제 정도는 모든 교과서에서 소개하고 있기 때문에 반드시 풀 수 있어야 한다. 마지막으로 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 호도법으로 표현해 보고 마무리하자.

그림과 같이 중심각이 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호의 길이를 l이라 하자. 이때까지 θ를 °로 표현해서 360°와의 비율을 원의 둘레(넓이)에 곱해서 l을 계산했다. 이제는 360°에 해당하는 2π를 이용하면 되므로



$$(\text{호의 길이}) = l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta \quad \cdots [1]$$

$$(\text{부채꼴의 넓이}) = S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl \quad (r\theta = l \text{ 대입})$$

임을 쉽게 구할 수 있다.

1) 애초에 호도법을 정의할 때, 호의 길이로 각도를 정의했으므로 $l=k\theta$인데 정비례 관계이므로 그 비례상수 k가 r인 것이다. 즉, $l=r\theta$이다.

아래의 [교과서 개념]은 반드시 암기하도록 하자.

교과서 개념 **부채꼴의 호의 길이와 넓이** 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

반지름의 길이가 r이고, 중심각이 θ (라디안)인 부채꼴의 호의 길이 l, 넓이 S는

① $l = r\theta$ ② $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

EX 02 반지름의 길이가 4, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴의 호의 길이는? [2점]

[2018.4-가 2번]

교과서적 해법

$\therefore\ l = r\theta = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

EX 03 중심각의 크기가 2 (라디안)이고 넓이가 36 인 부채꼴의 호의 길이는? [3점]

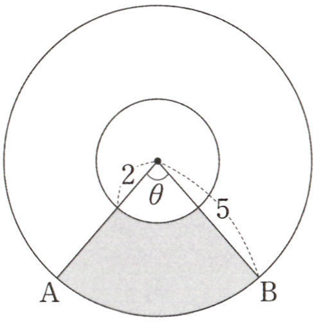
[2015.11-고2 가] [4번]

교과서적 해법

$\therefore\ S = \frac{1}{2}r^2\theta \Leftrightarrow 36 = \frac{1}{2}r^2(2) \Leftrightarrow r = 6 \rightarrow l = r\theta = (6)(2) = 12$

EX 04
[2003.4·인 5번]

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2, 5인 동심원이 있다. 어두운 부분의 둘레의 길이가 12일 때, 부채꼴 OAB의 중심각 θ의 값은? [3점]



교과서적 해법

공식 $l = r\theta$를 활용해서 호의 길이를 구해야 한다. 호 AB의 길이는 5θ이고 작은 부채꼴의 호의 길이는 2θ임을 알 수 있다.

$\therefore$ (둘레의 길이) $= 5\theta + 2\theta + 2(5-2) = 7\theta + 6 = 12 \quad \rightarrow \quad \theta = \dfrac{6}{7}$

EX 05
[2020.3·가 23번]

중심각의 크기가 1 라디안이고 둘레의 길이가 24인 부채꼴의 넓이를 구하시오. [3점]

교과서적 해법

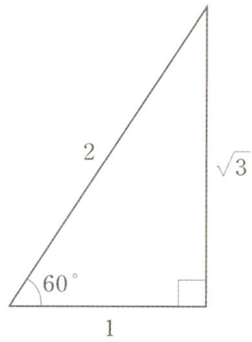
중심각이 1이므로 반지름의 길이를 r라 두고 호의 길이 l을 구하자.

$$l = r\theta = r \quad \rightarrow \quad 3r = 24 \quad \Leftrightarrow \quad r = 8$$

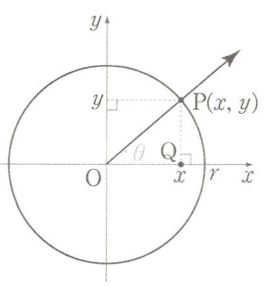
$\therefore$ (부채꼴의 넓이) $= \dfrac{1}{2}rl = \dfrac{1}{2}r^2 = 32$

2. 삼각함수의 뜻과 그 성질

2-1. 삼각함수의 정의

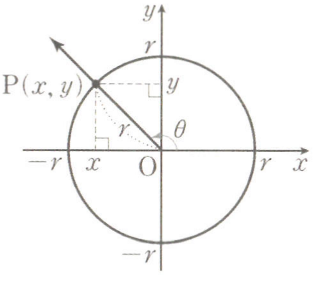


중학교에서 배운 삼각비는 직각삼각형에서만 정의했었다. 예를 들어, 위 그림과 같이 한 각이 $60°$ 인 직각삼각형을 그려서 $\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 계산할 수 있었다. 이렇게 중학교에서 배운 삼각비의 정의를 일반각의 경우로 확장해 보자.



오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 에 대하여 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 점 Q 라 하면 $y = \overline{\mathrm{PQ}}$ $(y > 0)$ 이므로 직각삼각형 OPQ 에서 중학교 때와 마찬가지로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{y}{r} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$



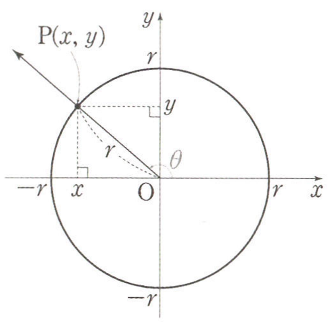
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 가 아닌 θ 에 대해서 sin 함수를 정의하는 방법은 다르지 않다. 그림과 같이 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 가 아닌 θ 에 대해서 위의 정의처럼 $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 로 정의하자. 일반각에서 배웠듯이[136p] θ 는 모든 실수에서 정의되고 $\sin\theta$ 도 θ 의 값에 따라 하나의 값으로 정해지므로 $\sin\theta$ 는 θ 에 대한 함수인 것이다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때 정의한 cos, tan 도 마찬가지로 $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 로 약속하면 하나의 함수가 되는 것을 알 수 있다.

요약하면 θ에 대한 함수인 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수를 각각

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (\text{단, 분모} \neq 0)$$

로 나타낸다. **이는 기호의 약속이므로 반드시 암기해야 한다.** 정리하면 다음과 같다.

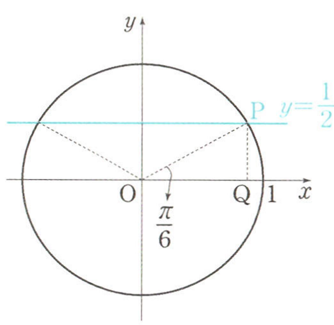
교과서 개념 삼각함수의 정의 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념



x축의 양의 방향을 시초선, 일반각 θ의 동경과 반지름의 길이가 r인 원 O의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$의 값은 r의 값에 관계없이 θ에 대하여 하나로 정확하게 결정된다. 따라서 이것들은 하나의 함수인데, **각 함수를 '사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수'라 약속하고 기호는 다음과 같다.**

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (\text{단, 분모} \neq 0)$$

위 정의를 통해 $\sin\theta = \frac{1}{2}\,(0 < \theta < 2\pi)$를 해석하는 방법이 다양하다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 그림과 같이 $r=1$, $y=\frac{1}{2}$로 해석해서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 중 y좌표가 $\frac{1}{2}$인 점의 일반각 θ를 구하면 된다. 그림의 삼각형 OPQ에서는 삼각비를 이용해서 각 $\frac{\pi}{6}$를 구할 수 있으므로 대칭성에 의하여 나머지 한 각은 $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$임을 알 수 있다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ or $\frac{5}{6}\pi$이다.

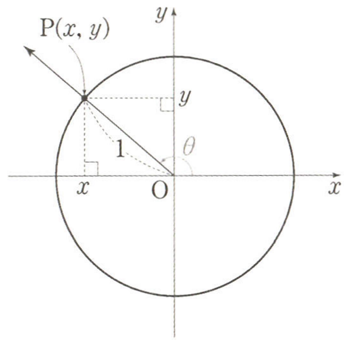


즉, 삼각함수의 정의를 정확하게 암기하고 있으면 원 $x^2+y^2=1$을 활용해서 방정식 $\sin\theta = \frac{1}{2}\,(0 < \theta < 2\pi)$의 해를 찾을 수 있다.[1)]

1) $\frac{y}{r} = \frac{1}{2}$이라 하면 대응되는 r, y의 값은 무수히 많다. 하지만 θ의 값은 늘 일정하다. 즉, $r=2$, $y=1$로 해도 θ의 값을 동일하게 구할 수 있다.

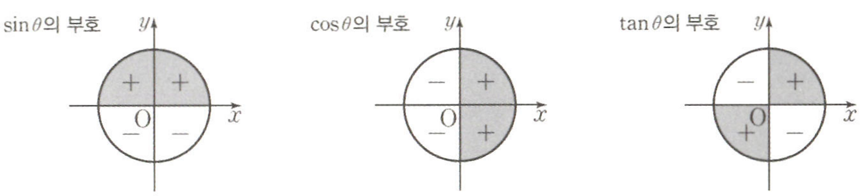
여기서 재미있는 것은 $r=1$ **이라고 생각하면 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 자체가 그냥 원 $x^2+y^2=1$ 위의 x 좌표, y 좌표가 된다는 것이다.** 그림과 같이 중심이 원점 O 인 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P 에 대하여 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 값은 다음 값과 같다.

$\sin\theta=$(점 P의 y 좌표)
$\cos\theta=$(점 P의 x 좌표)
$\tan\theta=$(직선 OP 의 기울기)



이를 토대로 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 의 부호를 생각하면 다음과 같다.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면 ($x>0$, $y>0$)	제2사분면 ($x<0$, $y>0$)	제3사분면 ($x<0$, $y<0$)	제4사분면 ($x>0$, $y<0$)
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	+	+	−	−
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	+	−	−	+
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	+	−	+	−



이 표를 이해 없이 외워서는 안 된다. $\sin\theta$ 는 y 좌표이므로 x 축 위쪽에서는 양수이고 x 축 아래쪽에서는 음수이다. $\cos\theta$ 는 x 좌표이므로 y 축 오른쪽에서는 양수, y 축 왼쪽에서는 음수이다. $\tan\theta$ 는 직선 OP 의 기울기이므로 양수/음수인 사분면이 위의 오른쪽 그림과 같이 나타나는 것이다.[1] 이처럼 정의를 정확하게 알고 있으면 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 부호도 즉각적으로 판단할 수 있다. 다음 문제를 풀어보자.

1) 제1~4사분면 순서대로 돌려가면서 '올싸탄코가 양수다'라고 외우기도 한다.

제1사분면
→올=all: 모두 양수
제2사분면
→싸=sin: sin만 양수
제3사분면
→탄=tan: tan만 양수
제4사분면
→코=cos: cos만 양수

EX 01 두 부등식 $\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$을 만족시키는 각 θ가 제 몇 사분면의 각인지 구하시오.

교과서적 해법

$\sin\theta > 0$이면 단위원 위의 점 중 y좌표가 양수인 구간이므로 제 1사분면 혹은 제 2사분면이다.

$\tan\theta < 0$이면 단위원 위의 점 P에 대하여 직선 OP의 기울기가 음수인 구간을 의미하므로 제 2사분면 혹은 제 4사분면이다.

따라서 겹치는 사분면은 제 2사분면임을 알 수 있다.

EX 02 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 2}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

교과서적 해법

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 2}$는 두 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(2, 0)$을 지나는 직선의 기울기로 해석할 수 있다.[1] 그런데 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 단위원 위의 점이므로 점 $(2, 0)$에서 단위원에 그은 접선의 기울기를 찾으면 그 값이 곧 최대 혹은 최소일 것이다.

원 밖의 점에서 그은 접선을 찾을 때에도 직선을 $y = m(x-2)$라 두고 원점에서 거리가 1임을 이용하면 된다. 계산해 보면 $m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

$\therefore$ 최댓값은 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 최솟값은 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ [2]

이처럼 좌표와 기울기로 느끼고 있어야 sin, cos, tan를 직관적으로 정확하게 이해하고 있는 것이다. 다음 페이지의 문제는 어려울 수 있으므로 모르겠으면 해법을 보면서 이해하자.

1) 미적분의 미분법까지 다 공부했다면

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 2}$$

를 미분해서 구해도 된다.

2) 원 $x^2 + y^2 = r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다. 유도는 $D=0$ 또는 점과 직선 사이의 거리 공식을 활용하면 어렵지 않게 할 수 있다. 기울기 공식을 이용해서 풀면 다음과 같다.

[교과서적 해법2]

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$$

에서 $r = 1$이므로

$$y = mx \pm \sqrt{m^2+1}$$

인데 $(2, 0)$을 지나는 접선을 구하고 싶으므로 점을 대입하면

$$0 = 2m \pm \sqrt{m^2+1}$$

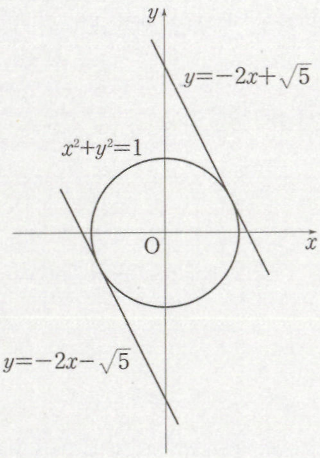
$$\rightarrow \quad m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

EX 03 $\sin\theta + 2\cos\theta$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

교과서적 해법

삼각함수의 정의에 따라, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이다.

$x^2+y^2=1$을 만족하는 $(x,\ y)$에 대하여 $y+2x$의 최대와 최소를 구하라는 것과 같은 문제이다.[1)]



원의 방정식 단원에서 많이 다루던 문제인데 $y+2x=k$라 두면 $y=-2x+k$이므로 원 $x^2+y^2=1$과 접점을 갖는 순간을 생각하면 된다. 즉, $x^2+y^2=1$에서 기울기가 -2인 접선의 방정식을 찾으면 되는데 접선은 $y=-2x+k$라 두고 원점 O에서 직선까지의 거리가 1임을 활용하면 된다.

$\therefore\ y=-2x\pm\sqrt{5}$ 이므로 k의 최댓값은 $\sqrt{5}$ 이고 최솟값은 $-\sqrt{5}$ 이다.

1) 미적분의 미분법까지 다 공부한 학생이라면

$f(\theta)=\sin\theta+2\cos\theta$

를 미분해서 구해도 된다. 또는 $\sin\theta=X$로 치환하여

$g(X)=X\pm2\sqrt{1-X^2}$

을 미분해서 구해도 된다.

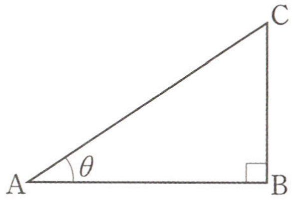
이 정도 난도의 문제가 삼각함수의 정의 자체에서 나올 수 있는 고난도 문항이라 생각하면 되고, 결국 핵심은 삼각함수의 정의

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

이다. 특히 sin, cos, tan를 단위원 위의 점의 좌표와 기울기로 해석할 수 있음을 명심하자.

다음 문제를 풀어보면서 중학교 때 배운 삼각비를 복습해 보자.

EX 04 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \theta$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다.



① $\overline{AC} = p$ 일 때, $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 값을 p, θ 로 표현하시오.

② $\overline{AB} = p$ 일 때, $\overline{BC}$ 와 $\overline{AC}$ 의 값을 p, θ 로 표현하시오.

③ $\overline{BC} = p$ 일 때, $\overline{AC}$ 와 $\overline{AB}$ 의 값을 p, θ 로 표현하시오.

교과서적 해법

그림에서 $\cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, $\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 임을 이용하면 다음과 같이 답을 구할 수 있다.

① $\overline{AB} = p\cos\theta$, $\overline{BC} = p\sin\theta$

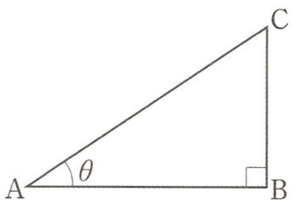
② $\overline{BC} = p\tan\theta$, $\overline{AC} = \frac{p}{\cos\theta}$

③ $\overline{AC} = \frac{p}{\sin\theta}$, $\overline{AB} = \frac{p}{\tan\theta}$

위 문제의 결론은 **직각삼각형에서 한 각과 한 변이 주어져 있을 때, 나머지 변을 구할 수 있어야 한다는 것**이다. 매우 자주 출제되고 중요하므로 반드시 알아두자. 이를 하나의 개념으로 정리하면 다음과 같다.

수능 개념 직각삼각형에서의 변 길이 표현

교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념



① $\overline{AC}$ 가 주어졌을 때: $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\theta$, $\overline{BC} = \overline{AC}\sin\theta$

② $\overline{AB}$ 가 주어졌을 때: $\overline{BC} = \overline{AB}\tan\theta$, $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\cos\theta}$

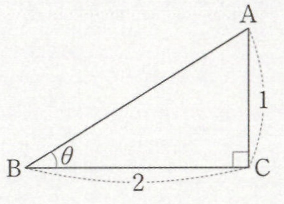
③ $\overline{BC}$ 가 주어졌을 때: $\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta}$, $\overline{AB} = \frac{\overline{BC}}{\tan\theta}$

삼각함수를 직각삼각형에서만 생각하는 것은 중학교 수학이지만 수학 문제를 풀 때 직각삼각형이 매우 유용하게 활용되므로 자유롭게 다룰 수 있어야 한다.

EX 05 예각 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta - \cos\theta$의 값은?

교과서적 해법

$\tan\theta = \frac{1}{2}$을 만족하는 직각삼각형을 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 피타고라스의 정리를 활용하면 빗변의 길이 $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$를 구할 수 있으므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$를 구할 수 있다.

$$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이로부터 다음을 알 수 있다.

저자의 특강 TIP **하나의 삼각함수를 알면 나머지도 다 알 수 있다.**

sin, cos, tan의 값 중 하나만 알면 직각삼각형을 이용해서 나머지 값을 찾을 수 있다.

하나의 삼각함수가 주어지면 다른 삼각함수의 값도 다 알 수 있다고 생각한 후 문제를 풀어나가면 된다.

2-2. 삼각함수 사이의 관계

삼각함수의 정의를 정확하게 이해하고 있다면

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

이라는 관계식은 보자마자 이해할 수 있다. 왜냐하면 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 θ에 관계 없이 항상 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이기 때문이다. 마찬가지로

$$\tan\theta = \frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

도 삼각함수의 정의로부터 어렵지 않게 이해할 수 있다. 다음을 확실히 암기하자.

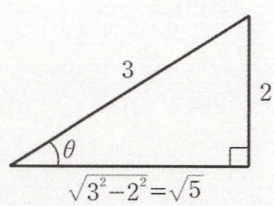
교과서 개념 | 삼각함수 사이의 관계 | 교과서 개념

① $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

EX 01 각 θ에 대하여 $\cos\theta < 0$, $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

교과서적 해법1

중학교 때로 돌아가서 생각하면 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$으로 sin의 값을 알기 때문에 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형만 그리면 $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값은



$$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 그런데 θ가 예각이라는 보장이 없으므로 부호를 결정해줘야 한다.

① $\cos\theta < 0$이므로 x좌표는 음수이다.

② $\sin\theta = \dfrac{2}{3} > 0$이므로 y좌표는 양수이다.

①, ②에 의해 θ는 제2사분면의 각임을 알 수 있다. 이때 $\tan\theta$의 값은 음수이므로 $\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$가 아니라 $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이다.

교과서적 해법2

$\sin\theta = \frac{2}{3}$이므로 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}(\cos\theta < 0)$.

$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

이 문제를 풀면서 여러분들이 깨달아야 하는 교훈은 다음과 같다.

저자의 특강 TIP **하나의 삼각함수를 알면 나머지도 다 알 수 있다.**

sin, cos, tan의 값 중 하나만 알면

① 직각삼각형　　② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

을 이용해서 나머지 값을 찾을 수 있다. 하지만 부호는 양수인지 음수인지 알 수 없기 때문에 따로 찾아야 한다.

요약하면

삼각함수 중 하나의 값만 알면 나머지도 알 수 있다는 것

이 핵심이다.

EX 02

[1994·2차 1번]
[2002·예 26번]

① $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$의 값은?

② $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$의 값은? [3점]

교과서적 해법

편의상 코사인, 사인함수를 C, S로 쓰겠다. $\tan=\frac{S}{C}$ 임을 기억하자.

① $\frac{1}{C}\left(\frac{S}{C}+\frac{C^2}{S^2}\right)=\frac{1}{C}\left(\frac{S^3+C^3}{CS^2}\right)=\frac{1}{(SC)^2}\{(S+C)^3-3SC(S+C)\}$

$$=\frac{1}{(SC)^2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3-SC\right\}$$

SC의 값을 구하자. $S+C=\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$S^2+2SC+C^2=\frac{1}{9}$ $\rightarrow$ $S^2+C^2=1$ 이므로 정리하면 $SC=-\frac{4}{9}$

$$\therefore\ \frac{1}{(SC)^2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3-SC\right\}=\frac{81}{16}\left\{\frac{1}{27}-\left(-\frac{4}{9}\right)\right\}=\frac{39}{16}$$

② $\frac{S^2}{C^2}+\frac{C^2}{S^2}=\frac{S^4+C^4}{(SC)^2}=\frac{(S^2+C^2)^2-2(SC)^2}{(SC)^2}=\frac{1-2(SC)^2}{(SC)^2}$

$$=\frac{1}{(SC)^2}-2$$

SC의 값을 구하자. $S+C=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$S^2+2SC+C^2=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $S^2+C^2=1$ 이므로 정리하면 $SC=-\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \frac{1}{(SC)^2}-2=14$$

이처럼 두 등식 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$는 항상 성립하므로 삼각함수 문제를 만나면 이를 항상 고려하면서 풀어야 한다.

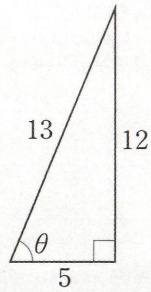
예제

모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

Example 01 [2022.6 3번]

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

교과서적 해법1



$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 θ 는 제3사분면의 각이고, 따라서

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ 이다. $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 이므로 밑변의 길이가 5, 높이가 12인 직각삼각형을 그리면 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 의 값을 구할 수 있다. $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = -\frac{12}{13},\ \cos\theta = -\frac{5}{13} \quad \rightarrow \quad \sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}$$

교과서적 해법2

[교과서적 해법1]의 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ 에서 시작하자. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로

$$\tan\theta = \frac{12}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5} \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{12}{5}\cos\theta$$

이를 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에 대입하면

$$\left(\frac{12}{5}\cos\theta\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{169}{25}\cos^2\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{25}{169}$$

그러면 다시 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에 의하여 $\sin^2\theta = \frac{144}{169}$ 이다.

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = -\frac{12}{13},\ \cos\theta = -\frac{5}{13} \quad \rightarrow \quad \sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}$$

[교과서적 해법1]과 같이 직각삼각형을 이용하든, [교과서적 해법2]와 같이 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 을 이용하든 상관없이

삼각함수 중 하나의 값만 알면 나머지도 알 수 있다는 것

이 핵심이다. 이때, 부호가 양인지 음인지는 알 수 없기 때문에 따로 찾아야 한다. 즉, 절댓값만을 알 수 있다. 이를 하나의 발상으로 정리하면 다음과 같다.

발상 | 하나의 삼각함수를 알면 → 나머지도 다 안다!

예시 | $\sin\theta = \frac{4}{5}$ 가 주어지면 → $|\cos\theta| = \frac{3}{5}$, $|\tan\theta| = \frac{4}{3}$

Example 02 [2009.9·나 28번]

수열[1] $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 3 + (-1)^n$ 일 때, 좌표평면 위의 점 P_n 을

$$\mathrm{P}_n\left(a_n \cos\frac{2n\pi}{3},\ a_n \sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

라 하자. 점 P_{2009} 와 같은 점은? [3점]

① P_1 ② P_2 ③ P_3 ④ P_4 ⑤ P_5

1) 수열이 무엇인지 모르면

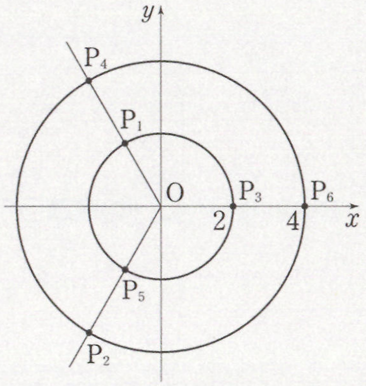
$$a_n = f(n)$$

즉, n에 대한 함수라 생각하면 된다. 점 P_n 의 좌표도 다음과 같다.

$$\left(f(n)\cos\frac{2n\pi}{3},\ f(n)\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

교과서적 해법

이 문제를 보고 처음에는 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 하나씩 대입해서 확인하더라도 결국 점 P_n이 원 위의 점이라는 것을 알아내야 제대로 문제를 풀 수 있다. 사인함수, 코사인함수의 정의를 생각해 보면 점 P_n은 반지름의 길이가 a_n인 원 위의 동경이 나타내는 일반각이 $\frac{2n\pi}{3}$ 인 점이다. 그런데 $a_n = 2$ or 4이므로 아래의 그림처럼 반지름의 길이가 2, 4인 원을 그려두고 그 위에 점을 찍으면서 확인하는 것이 옳다.



$n=1$에서 $n=6$까지 점을 찍어보면 오른쪽 그림과 같은데, $n=7$을 대입해 보면 점 P_7은 점 P_1과 같다. 이처럼 6을 주기로 계속 같은 점이 반복되므로 P_{2009}와 같은 점을 찾을 때에는 6으로 나눈 나머지만 보면 된다.

$2009 = 6 \times 334 + 5$이므로 점 P_{2009}는 점 P_5와 같다. 정답은 ⑤이다.

$\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$로 정의하기 때문에 점 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$를 반지름의 길이가 r인 원 위의 점으로 볼 수 있다는 것을 확실하게 이해하자.

발상 | 점 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$는? → 반지름의 길이가 r인 원 위의 점!

예시 | 점 $\left(2\cos\frac{\pi}{3},\ 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$는?

→ 반지름의 길이가 2인 원 위의 동경이 나타내는 일반각이 $\frac{\pi}{3}$ 인 점!

챕터 E

기출 문제

모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

네/모/박/스/를/활/용/하/는/방/법

교과서적 해법 / 논리적 사고과정 / 수능적 해법

1. 첫 번째 칸

[교과서 개념]만을 활용하는 풀이인 [교과서적 해법]을 통해 문제를 완벽하게 풀었으면 첫 번째 칸에 V 와 같이 체크하세요. 이 과정에서 교과서 본문으로부터 유도된 [수능 개념]을 활용하지 말고 반드시 [교과서 개념]만으로 문제를 풀어야 합니다. [교과서적 해법]을 완벽하게 공부하는 것이 Part 1의 가장 중요한 목표입니다.

2. 두 번째 칸

쉬운 개념이라도 [교과서 개념]과 기출문제로부터 유도된 [수능 개념]을 활용해서 풀었다면 V 와 같이 두 번째 칸에 체크하세요. [수능 개념]을 활용하는 [수능적 해법]은 문제마다 없을 수도 있습니다. [수능적 해법]은 Part 2를 학습해야 이해되는 해설도 많기 때문에 Part 2까지 공부한 후 다시 한번 Part 1의 기출문제를 복습해야 합니다. Part 1에서는 [교과서적 해법]을 마스터하는 것이 우선이고 [수능적 해법]은 Part 2 학습 후에 마스터하면 됩니다.

3. 세 번째 칸

복습할 때 본인만의 용도를 정해서 자유롭게 활용하세요.

4. 네 번째 칸

틀린 문제나 애매했던 문제에 대해서는 풀이과정에 '필연성 부여'를 하면서 '논리적 사고과정'을 정리해본 후 사고과정 칸에 체크하세요. 머릿속에서 사고과정이 쉽게 정리된다면 굳이 쓰지 않고 머릿속으로 생각하고 넘어가도 충분합니다.

E·01

| 2021.9·나 3번 |

$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{9}{4}$　③ 3　④ $\dfrac{15}{4}$　⑤ $\dfrac{9}{2}$

E·02

| 2002·예체능 26번 |

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ 의 값을 구하시오. [3점]

E·03

해설 발상 정리

| 2023.9 3번 |

$\sin(\pi-\theta)=\dfrac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$　② $-\dfrac{5}{12}$　③ 0　④ $\dfrac{5}{12}$　⑤ $\dfrac{12}{13}$

E·04

| 2023.6 3번 |

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$ 일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

E·05

| 2022.3 5번 |

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta\tan\theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\cos\theta + \tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ② $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

E·06

| 2021·가 3번 |

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

저자의 특강 TIP

문제가 어렵다면

1. 못 푸는 문제가 40% 이상이라면 해설을 보면서 이해하고 넘어가야 한다. 해설을 보는 것은 수학을 잘 하지 못할 때에는 매우 좋은 행위이다. 해설을 보고 암기하면 안 좋지만 해설의 논리과정을 이해하려고 노력하면 좋은 공부가 된다.

2. 60% 이상의 문항을 스스로 풀어내고 있다면, 틀린 문항에 대해 다시 시도하였다가 안 풀리면 따로 체크해 두었다가 한완수 Part 2까지 전부 학습한 후 2회독 때 풀어보도록 하자. 그렇게 3번 이상 못 풀면 해설을 보고 공부하면 된다.

E-1 해설·24p

E·07

[2022.5 5번]

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ에 대하여 $\sin\theta\cos\theta = -\frac{12}{25}$ 일 때, $\sin\theta - \cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

E·08

[2023.10 5번]

$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여

$$\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} = 18$$

일 때, $\sin\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

E·09

[2022.9 6번]

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} = 4$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Part 1

E

빠른 정답

저자의 특강 TIP **해설 활용법**

맞은 문제도 해설을 보면 공부에 도움이 된다. 문제풀이에 조금이라도 애매한 과정이 있었다면 해설과 본인의 풀이를 비교하며 공부하도록 하자.

E-7 해설·25p