현우진의

SYNAPSE

시냅스

수학Ⅱ | 공통

“시냅스”는 “뉴런”과 병행했을 때 가장 좋은 시너지가 생기는, “뉴런”의 워크북입니다.

1. 기출문제가 아닙니다.

“시냅스”는 뉴런에서 학습한 기본 개념, 수능 실전 개념, 그리고 나아가 미 출제 요소까지 모두 꼼꼼하게 점검할 수 있도록 자체 제작된 연습용 문항입니다. 또한 수능/평가원 기출문제의 기본정신을 담되, 너무 답습하지 않았으며 항상 새로운 유형이 등장할 수 있다는 가능성을 염두에 두고 제작하고 구성하였습니다. 풀어보면 도움이 될 내용들과 소재들을 “뉴런”의 Theme에 맞추어 구성하였으니 뉴런에서 학습한 내용을 바탕으로 복습하기 좋은 교재입니다.

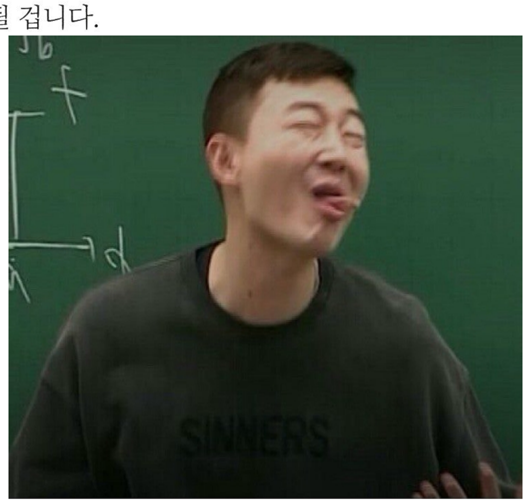
2. 변화된 수능, 그리고 미래에 대한 대비

수능시험은 많은 변화를 거치면서 발전해 왔지만, 아직도 격동과 진화가 진행되고 있습니다. 최근의 수능시험은 기존의 기출문제를 탈피하려고 노력하는 모습도 많이 보이고 있으며, 출제되지 않은 요소들을 다루려는 과감한 시도 또한 살펴볼 수 있습니다. 흔히 수험생들은 “수능스러움, 평가원스러움”을 주장하며 기출문제에서 출제된 틀 안에서만 생각하려고 하는 경향이 있지만, 함부로 예측하고 단정 짓지 마세요. 어떤 주제가 어떤 방식으로 어떤 각도로 또한 어떠한 난이도로 출제될지는 정말 아무도 모르는 것입니다. 시험에서 만점을 받기 위해서는 본인이 생각하는 “주관적인 중요함”만 다루어서는 안됩니다. 학문적으로 중요한 내용이 Test에서 중요하게 다루어지지 않을 수도 있고, 역으로 중요하지 않은 내용이 Test에서 다루어질 수도 있다는 것을 명심하세요.

3. 익숙함과 낯섦의 그 어디 중간쯤

수능 수학시험은 놀랍게도 매 시즌 발전에 발전을 거듭하고 소재를 개발하고 트렌드화 시켜 변형 출제하는 능력을 지니게 되었습니다. 고3 수험생들은 낯섦과 앞으로 1년을 싸워나가야 할 것이고 N수생들은 익숙함을 낯섦으로 인식하며 새로운 발견들을 해나가는 것이 올바른 수험생활 태도임을 기억하도록 합시다.

고민하고 고뇌하고 이해하고 그리고 소화하세요.
수능시험 당일의 아주 좋은 기초체력이 될 겁니다.
수학은 결국 手학이기도 하니까요.



현우진 드림

Contents

Chapter 1

함수의 극한과 연속

Theme 1

함수의 극한과 부정형의 계산

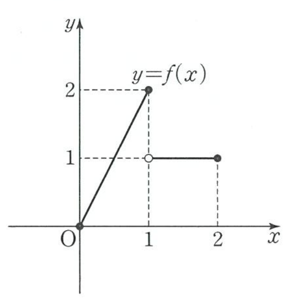
1 함수

$$f(x)=\begin{cases} kx-5 & (x>2) \\ 0 & (x=2) \\ (x-k)^2 & (x<2) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하기 위한 실수 k의 값을 구하시오.

2 정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0, 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.

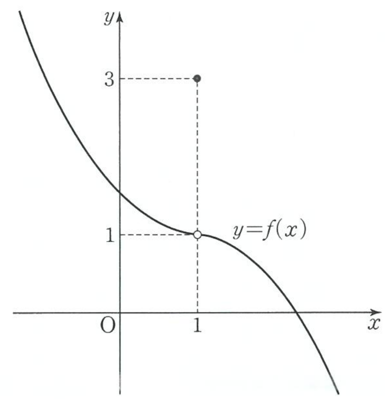
$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to -1-} f(x)$의 값은?



① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

3 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\{f(x)-f(1)\}}{x^2-1}$의 값은?

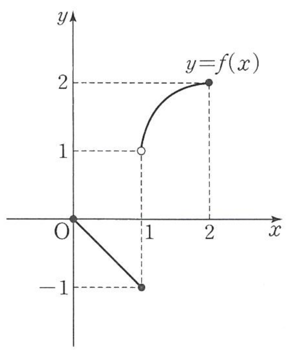


① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4 정의역이 $\{x\mid 0\le x\le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 2\}$인 함수 $g(x)$가

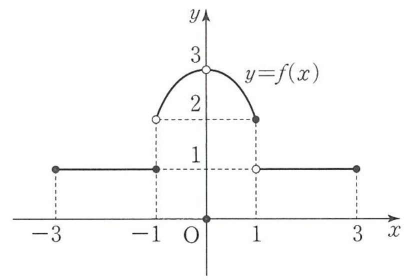
$$g(x)=\begin{cases}-f(-x) & (-2\le x\le 0)\\ -f(x) & (0<x\le 2)\end{cases}$$

일 때, $\lim\limits_{x\to 1+}g(x)+\lim\limits_{x\to -1-}g(x)$의 값은?



① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

5 정의역이 $\{x\mid -3\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to -1+}f(x^2)$의 값은?

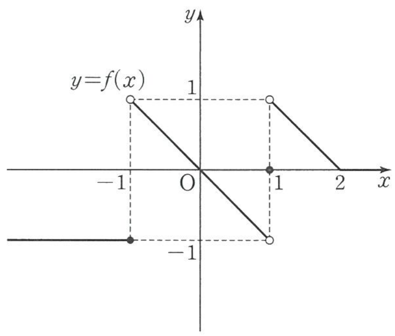
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

6 실수 a에 대하여 기울기가 a이고 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나는 직선과 곡선 $y=|x^2-1|$이 만나는 점의 개수를 $f(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a\to 1-}f(a)-\lim\limits_{a\to 1+}f(a)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

함수의 극한과 부정형의 계산

7 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 극한값이 존재하는 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to -1} \{f(x)\}^2$

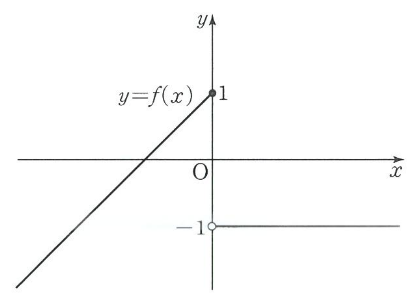
ㄴ. $\lim_{x \to 0} f(x-1)f(x)$

ㄷ. $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f(x^2+1)}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8 함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같고, 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{x^2}=2$
(나) $\lim_{x \to 0} g(f(x))=1$



$g(2)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

정답 및 풀이 092p

9 $\lim_{x\to2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2-4}\right\}$의 값은?

① $-\frac{1}{12}$　② $-\frac{1}{14}$　③ $-\frac{1}{16}$

④ $-\frac{1}{18}$　⑤ $-\frac{1}{20}$

10 $\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+h}}\right)\right\}$의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

11 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=3$$

일 때, $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)-2}{x}$의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

12 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$$

일 때, $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x+1)\}^2-4}{x}$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

함수의 극한과 부정형의 계산

13 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$2x-1<xf(x)<2x+3$$

을 만족시킨다. $\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{(x+3)f(x)}$의 값을 구하시오.

14 함수 $y=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x-1\le f(x)\le x^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

15 이차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+g(3)$의 값은?

(가) $f(1)=f(2)=g(1)$

(나) $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

(다) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

16 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은?

(가) $g(2)=0$

(나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)}=(-1)^n+1$ $(n=1, 2, 3, 4)$

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

17 삼차함수 $f(x)$와 $g(-1)=0$인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}=0$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(1)=0$

ㄴ. $g(1)=0$이면 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=0$이다.

ㄷ. $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{g(x)}=0$이면 $\lim_{x \to -1} \frac{g(x)}{x+1} \neq 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

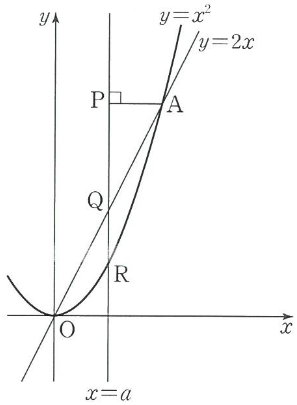
(나) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-f(x)}$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 a의 값은 2, 4뿐이다.

$f(3)=-3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

함수의 극한과 부정형의 계산

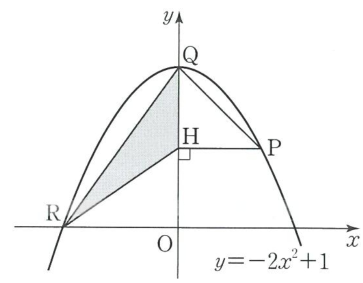
19 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 A에서 직선 $x=a$에 내린 수선의 발을 P라 하고 직선 $x=a$가 직선 $y=2x$, 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 각각 Q, R이라 할 때, $\lim_{a \to 2-} \frac{\overline{QR}}{\overline{AP}}$의 값은?

(단, $0<a<2$)



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

20 그림과 같이 곡선 $y=-2x^2+1$ 위에 점 P가 있고, 곡선 $y=-2x^2+1$이 y축과 만나는 점을 Q, x축과 만나는 두 점 중 x좌표가 음수인 점을 R이라 하자.
점 P의 x좌표가 $t\ (t>0)$일 때, 선분 PQ의 길이를 $f(t)$, 점 P에서 y축에 내린 수선의 발 H에 대하여 삼각형 QRH의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{\{f(t)\}^2}{g(t)}$의 값은?



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

21 양의 실수 t에 대하여 함수 $y=\frac{1}{x+1}-1$의 그래프와 직선 $y=-x+t$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{S(t)}{t^2}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

다항함수의 결정

정답 및 풀이 094p

1 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

2 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-3x^3}{x^2-x}=2,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=4$$

일 때, $f(1)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

3 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{f(x)}=-\frac{1}{8},\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=\alpha$$

일 때, 상수 α의 값을 구하시오.

4 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)+x}$

(나) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x^2-x-6}=2$

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

다항함수의 결정

5 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키고,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=4$$

일 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

6 $f(1)=0$인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=8$$

일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

7 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-2}{x}=1,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

8 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}$의 값이 존재하고 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)f(x)\geq0$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

9 다음 조건을 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 값은?

(가) $f(0)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=(x+1)f'(x)+1$ 이다.

① -4 ② -5 ③ -6 ④ -7 ⑤ -8

10 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f(1)=g(1)$
(나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=a$
(단, a는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

11 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(0)x^3}{x^2}=f(-1)$
(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(1)}{x^n}=2$를 만족시키는 자연수 n이 존재한다.

$f(n-4)$의 값을 구하시오.

Theme 3

여러 가지 함수의 연속

1 $x=0$에서 연속인 함수만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $f(x)=|x|(x-1)$

ㄴ. $g(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-x}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x+1 & (x\geq 0) \\ (x-1)^2 & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

2 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<1) \\ b & (x=1) \\ x(x+1)^2 & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax & (|x|>1) \\ b-x & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<a) \\ 6x+k & (x\geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수가 1일 때, 상수 k의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

5 함수 $f(x)=x^2+ax-2a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x\le 0) \\ f(x+3) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

6 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2} & (x\ne 1) \\ c & (x=1) \end{cases}$$

가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=(x-1)^2$이다.
> (나) $g(1)=1$, $g(2)=2$

8 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & (0\le x\le 2) \\ 2x+b & (x>2) \end{cases}$

$f(-3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

여러 가지 함수의 연속

9 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $0 \le x < 6$에서

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (0 \le x < 3) \\ a(x-3)^2 + b & (3 \le x < 6) \end{cases}$$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+6) = f(x)$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{30} f(k)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

10 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x) + 1$을 만족시키고, $0 \le x < 2$에서 두 상수 a, b에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & (0 \le x < 1) \\ 2x^2 + ax + b & (1 \le x < 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f\left(\frac{11}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{9}{2}$ ② 4 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{5}{2}$

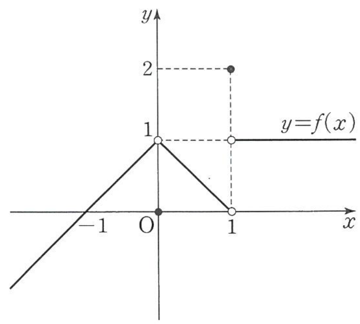
11 두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+a & (x \le 1) \\ -x+2a & (x > 1) \end{cases}, \quad g(x) = x^2 + ax + 3$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

12 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x \to 1-} f(f(x))=1$

ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13 함수

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (x<-1) \\ x^2 & (-1 \le x \le 1) \\ x-2 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)f(-x)=1$

ㄴ. 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14 함수 $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{x-1}$에 대하여 함수 $(f \circ f)(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때, 모든 실수 a의 값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

여러 가지 함수의 연속

15 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+ax+2a}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

16 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x<1) \\ x+2 & (x\geq 1) \end{cases},\ g(x)=x-a$$

에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

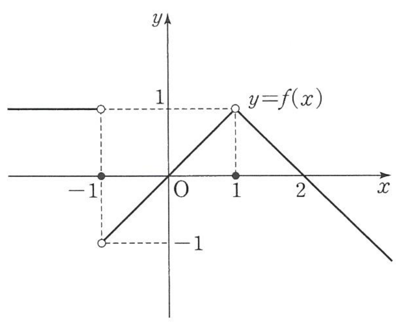
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

17 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (|x|<1) \\ 2x & (|x|\geq 1) \end{cases}$$

와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $g(0)=2$일 때, $g(3)$의 값을 구하시오.

18 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)f(x-1)$이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때, 다음 중 a의 값을 모두 구한 것은?



① -1 ② 1 ③ $-1,\ 0$
④ $-1,\ 1$ ⑤ $-1,\ 0,\ 1$

19 실수 t에 대하여 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

20 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & (x\le 0) \\ x^2-4x & (x>0) \end{cases}$$

와 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(t)$에 대하여 함수 $g(t)h(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $h(3)$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

여러 가지 함수의 연속

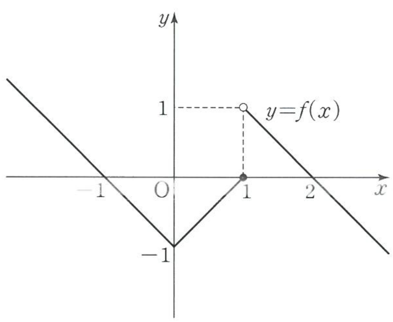
정답 및 풀이 100p

21 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (x\le 0) \\ x-1 & (0<x\le 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a+1$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2



22 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+3a & (x<1) \\ ax^2-bx-4 & (x\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 구간 $(1, 2)$에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다. 두 정수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Chapter 2

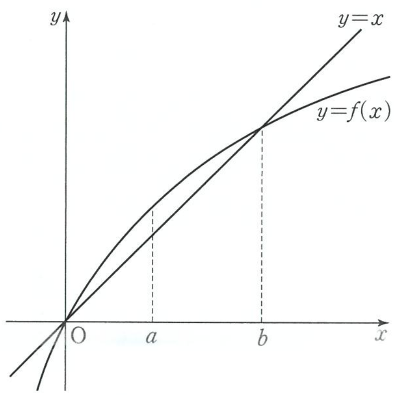
미분

Theme 4

미분계수는 평균변화율의 극한값이다

1 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 두 점 $(0, 0)$, $(b, f(b))$에서 만날 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $0<a<b$)



〈보기〉

ㄱ. $f(b)-f(a)>b-a$

ㄴ. $bf(a)>af(b)$

ㄷ. $(b-a)f'(b)<f(b)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

2 함수 $f(x)=-x^2+2x$에 대하여 닫힌구간 $[a_1, 2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_2, 닫힌구간 $[a_2, 2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_3이라 하자. 이와 같이 계속하여 a_4, a_5, $\cdots$를 정할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.)

〈보기〉

ㄱ. $a_2=\frac{3}{2}$

ㄴ. $a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$

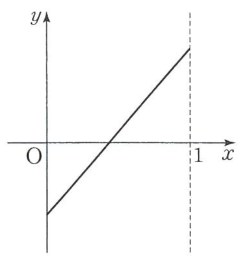
ㄷ. $f'(a_5)=-\frac{15}{8}$

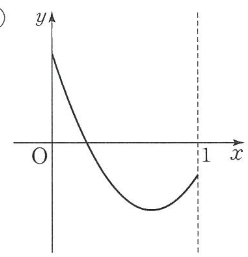
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

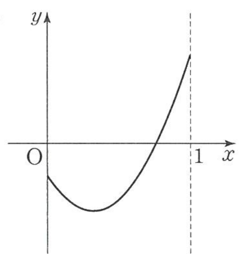
3 다음 중 $0<a<b<1$인 임의의 두 실수 a, b에 대하여

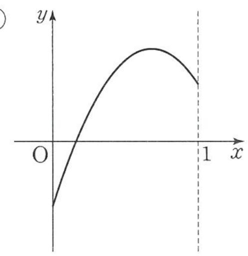
$$f(b)>(b-a)f'(a)+f(a),\ bf(a)<af(b)$$

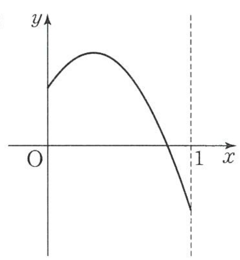
를 만족시키는 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프로 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


4 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 감소하는 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하다. 1보다 작은 모든 양의 실수 a에 대하여 점 $(-a,\ f(-a))$와 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 $2a^2+6a$일 때, $f'(0)$의 값은?

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{6}$ ③ -2
④ $-\sqrt{2}$ ⑤ -1

5 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=3-|f(x)|$에 대하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|g(\alpha+h)|-|g(\alpha-h)|}{h}=0$$

을 만족시키는 모든 α의 값을 작은 것부터 크기순으로 나열한 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오.

Theme 5

도함수는 원래의 함수에서 유도된 함수다

1 함수 $f(x)=x^2+ax+3$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+ah)-f(2)}{h}=-4$$

일 때, $f(a)$의 값은?

① 8 ② 11 ③ 14 ④ 17 ⑤ 20

2 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(4)=2$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(x+6)}{x+2}$의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

3 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=1$, $f'(0)=1$일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(\frac{3}{x}\right)-1\right\}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(2)=g(2),\ f'(2)=3,\ g'(2)=-3$$

일 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(2+\frac{1}{x}\right)-g\left(2+\frac{3}{x}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

정답 및 풀이 101p

5 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-1}{h}=3,\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-2}{x^2-4}=1$$

이 성립할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-2}{x-2}$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

6 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}=15$

(나) $g(0)=3$

$f'(0)$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

7 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(-1, -3)$을 지난다. 함수 $g(x)=(x+1)^2f(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 기울기를 구하시오.

도함수는 원래의 함수에서 유도된 함수다

8 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)=-1$, $f'(2)=2$일 때,

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(x)+4}{x-2}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

9 $\lim_{x\to -1}\frac{x^{2n}-x-2}{x^2-1}=\frac{9}{2}$일 때, 자연수 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$f'(1)=2$, $f'(2)=3$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{f(-2x)-f(2)}$의 값은?

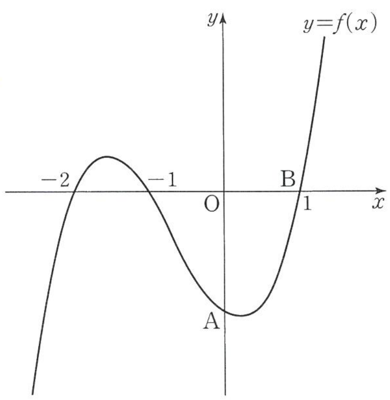
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

11 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$f'(2)=4$, $f'(4)=1$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(-2)}{f(x^2)+f(-4)}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점 A에서의 접선의 기울기가 -2일 때, $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{B}(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기를 k라 하자. k의 값을 구하시오.



13 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(1)}{x-a}=0,\ f'(1)=4$$

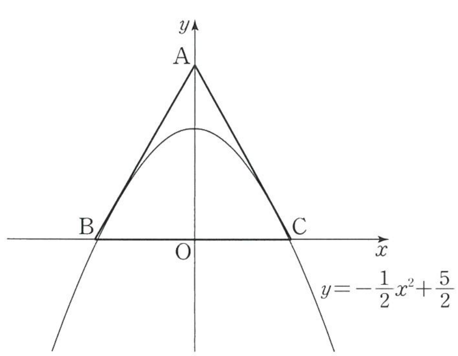
일 때, 양수 a의 값을 구하시오.

Theme 6

접선의 방정식과 활용

1 점 $\mathrm{A}(2, 0)$에서 곡선 $y=x^3$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

2 그림과 같이 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점 A는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, C는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 AC가 각각 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$의 그래프에 접할 때, 정삼각형 ABC의 둘레의 길이는?



① $5\sqrt{3}$　② $6\sqrt{3}$　③ $7\sqrt{3}$　④ $8\sqrt{3}$　⑤ $9\sqrt{3}$

3 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)=xf(x)+1$에 대하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. $a-b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

정답 및 풀이 103p

4 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)=2xf(x)+3$
> (나) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x^2-1}=1$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ g(1))$에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 상수이다.)

5 곡선 $y=x^3$ 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 한 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하자. 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{OR}}=2:1$일 때, $a+b$의 값은?

(단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6 곡선 $y=x^2-2x+2$ 위의 점과 직선 $y=2x-7$ 위의 점 사이의 거리의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

접선의 방정식과 활용

7 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P와 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이의 최솟값은?

① $\sqrt{5}-2$ ② $\sqrt{5}-1$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{5}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+2$

8 실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-2x$와 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9 곡선 $y=x^3-2x^2+ax-4$가 x축에 접할 때, 상수 a의 값은?

① -7 ② -5 ③ -3 ④ 3 ⑤ 5

10 두 함수 $y=x^3-2x$, $y=|x|+a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① $-\frac{8\sqrt{3}}{9}$ ② $-\frac{7\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$

함수에 대한 부등식의 조건과 두 함수의 차

정답 및 풀이 104p

1 두 함수

$$f(x)=x^4-3x^3+x,\ g(x)=-x^3-x^2+x$$

와 미분가능한 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)\le h(x)\le f(x)$$

를 만족시킬 때, $h'(0)+h'(1)$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

2 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f(x)-1-x^2+4x|\le x^2$$

을 만족시킬 때, $f(0)+f'(0)$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

3 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^3(x-6) & (x<a)\\ 0 & (x\ge a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}-16(x-k) & (x<k)\\ 0 & (x\ge k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최댓값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

Theme 7
함수에 대한 부등식의 조건과 두 함수의 차

4 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

> (가) $f(-1)=-2$
> (나) $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)\geq x_2-x_1$이다.

5 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\leq 3$이다.
> (나) $f(0)=1$

6 다음 조건을 만족시키는 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값을 구하시오.

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) $f(0)=f'(0)$
> (다) $-1\leq x\leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq f'(x)$
> 이다.

함수의 해석 도구

정답 및 풀이 105p

1 함수 $f(x)=|x^3(x+4)|$의 극댓값은?

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

2 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax^2+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

> (가) $f(2)=22$
> (나) $f(x)$의 극댓값은 6이다.

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3 함수 $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+4x$에 대하여 부등식

$$n^3f(n)<(n^3+n^2)f(n+1)$$

을 만족시키는 정수 n의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax$는 증가하고 함수 $g(x)=-x^3+(a+1)x^2-(a+1)x$는 감소할 때, 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+5x$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 오직 원점에서만 만난다.

자연수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=x^2+1$이다. 함수

$$g(x)=f(x)-ax^2$$

이 극값을 가질 때, 자연수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 기울기가 4인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$는 x좌표가 -1인 점에서 만나고, x좌표가 3인 점에서 접한다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극소일 때, p의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

8 함수

$$f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+k\right|$$

가 극솟값을 갖는 서로 다른 x의 값의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

정답 및 풀이 106p

9 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+a^2x$가 열린구간 $(-\infty, 1)$에서 감소하고, 열린구간 $(1, \infty)$에서 증가할 때, $6f(a-2)$의 값을 구하시오.

10 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=1$에서 극값 0을 가질 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $x=1$에서 $f(x)$가 극대, $g(x)$가 극대이면 $f(x)g(x)$는 극소이다.

ㄴ. $x=1$에서 $f(x)$가 극대, $g(x)$가 극소이면 $f(x)g(x)$는 극대이다.

ㄷ. $x=1$에서 $f(x)$가 극소, $g(x)$가 극대이면 $f(x)-g(x)$는 극소이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$
(나) $f'(0)=f'(6)=-15$

방정식 $f(|x|)=k$가 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

함수의 해석 도구

정답 및 풀이 107p

12 닫힌구간 $[-6, 1]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+6x+10} & (-6\le x<-1) \\ \dfrac{3}{3x^3+9x^2+1} & (-1\le x\le 1) \end{cases}$$

일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13 $f(0)<0$, $f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(k)$, 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=ax+t$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(k)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(k)$는 $k=0$, $k=\alpha$ $(\alpha>0)$에서만 불연속이다.
(나) 함수 $h(t)$가 상수함수가 되도록 하는 실수 a의 최댓값은 -3이다.

$f(8)$의 값을 구하시오.

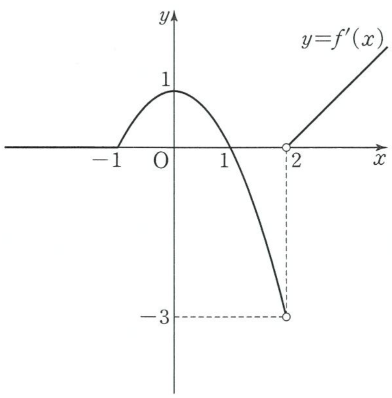
Chapter 3

그래프 해석의 도구

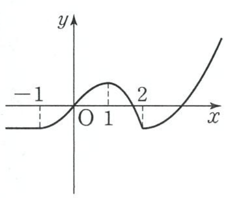
Theme 9

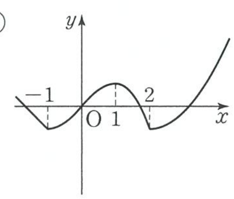
도함수의 정보

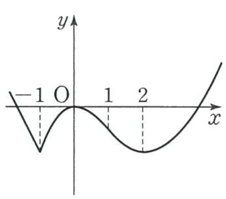
1 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$인 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다.

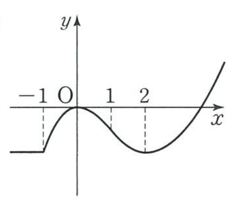


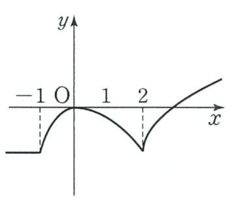
다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


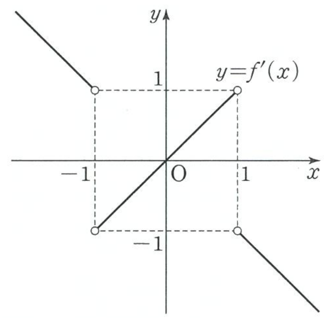
②


③


④


⑤


2 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $|x|\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$를 만족시킨다. 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

ㄷ. $f(0)f(1)<0$이면 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 풀이 108p

3 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)<g'(x)$를 만족시키고 $f(0)=g(0)$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

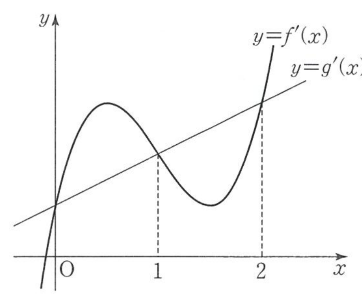
ㄱ. $f(-1)>g(-1)$

ㄴ. 함수 $f(x)-g(x)$는 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f(1)-f(2)>g(1)-g(2)$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수 $y=g'(x)$의 그래프가 그림과 같이 x좌표가 0, 1, 2인 세 점에서 만난다.
$f(1)=g(1)$일 때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



〈보기〉

ㄱ. $0<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

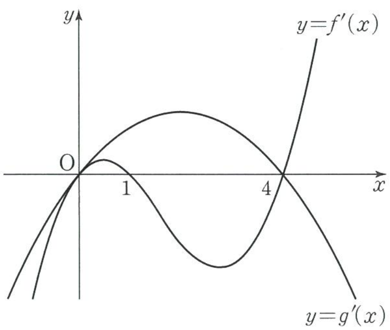
ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

도함수의 정보

5 사차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같이 두 점 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$에서만 만난다.



함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프는 $x=0$에서 접한다.)

〈보기〉

ㄱ. $1<x<4$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

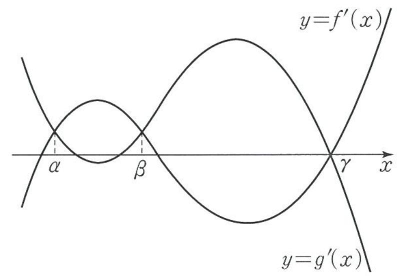
ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

ㄷ. $f(0)=g(0)$이면 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6 두 사차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 그림과 같이 x좌표가 α, β, γ인 점에서 만나고 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$의 최솟값이 음수일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $\alpha+\gamma>2\beta$)



〈보기〉

ㄱ. $h(\alpha)=h(\gamma)<h(\beta)$

ㄴ. $(\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\}<(\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Theme 10

이차함수의 모든 것

정답 및 풀이 108p

1 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.
> (나) $a+b=8$인 두 실수 a, b에 대하여
> $f'(a)+f'(b)=0$이다.

$m+f'(m)$의 값을 구하시오.

2 함수 $f(x)=x^2-2x$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$와 직선 $y=x+4$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극값을 갖도록 하는 모든 α의 값의 합은?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

3 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & (x<-1) \\ bx^2-2x+3 & (x\geq -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① -16　② -14　③ -12　④ -10　⑤ -8

이차함수의 모든 것

4 이차함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 곡선 $y=f(|x|)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

5 곡선 $y=-x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분될 때, 상수 m에 대하여 $(3-m)^3$의 값은?

① $\frac{25}{2}$ ② 13 ③ $\frac{27}{2}$ ④ 14 ⑤ $\frac{29}{2}$

6 곡선 $y=x^2-4x$와 직선 $y=x-4$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

7 두 곡선 $y=x^2-3x$와 $y=-x^2-x+4$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

8 함수 $f(x)=-x^2+13x-36$에 대하여 원점을 지나는 직선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 제1사분면에서 접한다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ 11 ⑤ $\frac{34}{3}$

9 곡선 $y=-x^2+5x$와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 P라 하자.
곡선 $y=-x^2+5x$ 위의 x좌표가 $a\,(0<a<4)$인 점 A에 대하여 삼각형 AOP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

Theme 11

삼차함수의 모든 것

1 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값 -2를 갖는다.

방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 모든 실근의 합을 구하시오.

2 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖는다.
> (다) $f(1)-f(-1)=4$

$f(1)-f'(2)$의 값을 구하시오.

3 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=0$
> (나) $f(0)=12$

함수 $f(x)$의 극댓값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오.

4 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서만 만나고, $f'(-1)>0$이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오.

5 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}=0$
> (나) $f(1)=-3$
> (다) $x<2$일 때 $f(x)<0$, $x>2$일 때 $f(x)>0$이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

6 함수 $f(x)=x^2|x-k|$ $(k>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

7 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.
함수 $f(x)-g(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지고 $f'(3)=1$일 때, $f(5)$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

삼차함수의 모든 것

8 최고차항의 계수가 양수이고, 극솟값이 음수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f(0)$

(나) 방정식 $f(x)=f(2)$가 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=f\left(\frac{10}{n}\right)$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

9 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=5$에서 극댓값 1을 갖는다.

(나) 함수 $f'(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$\frac{f(8)+1}{f(2)+1}$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

10 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2f(1)=f(0)+f(2)$

(나) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.

(다) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(1)$의 값을 구하시오.

정답 및 풀이 111p

11 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 $-2\sqrt{3}$, 0, $2\sqrt{3}$이고, 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱이 -16이다.
두 점 $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

12 1보다 큰 양수 a에 대하여 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그은 접선 중 하나와 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $a^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

13 삼차함수 $f(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$가 $x=a$에서 극대일 때, $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 실수 b의 최솟값은?
(단, $a\neq b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=-16$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $f(-1)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15 함수 $f(x)=x^3+3x^2-5x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$에서의 접선이 서로 평행하고, 선분 AB의 중점 M을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선과 수직일 때, $(a-1)(b-1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

16 기울기가 4인 직선과 곡선 $y=x^3+x$가 점 A에서 접하고 점 A가 아닌 점 B에서 만날 때, 점 B의 x좌표는?

(단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

17 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표는 각각 0, 3이다. 직선 $y=g(x)$와 평행한 직선 $y=h(x)$가 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점의 x좌표의 합은? (단, $g(x)>h(x)$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

18 $f(1)=f'(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 $t>1$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[1, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=4$에서 미분가능하지 않을 때, 방정식 $f(x)f'(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합을 구하시오.

정답 및 풀이 112p

19 닫힌구간 $[a, a+6]$에서 함수 $f(x)=(x-1)(x-7)^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=32$를 만족시키는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha \leq a \leq \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

20 정의역이 $\{x \mid 0<x<\sqrt{3}\}$인 함수 $y=3-x^2$의 그래프 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 삼각형 POQ의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

21 $f(0)=0$인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=-x^2+4$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

22 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^3-nx^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} \frac{S_n}{n}$의 값은?

① $\frac{37}{2}$ ② $\frac{75}{4}$ ③ 19 ④ $\frac{77}{4}$ ⑤ $\frac{39}{2}$

23 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 점 $(-1,\ f(-1))$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 방정식이 각각 $y=g(x)$, $y=h(x)$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 -1, α, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(x)$의 교점의 x좌표는 -1, β이고, $-1<\alpha<\beta$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $\frac{B}{A}$의 값을 구하시오.

24 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가 $f(-1)=0$이고 $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{2}^{0} f(x)dx$를 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

25 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x-6$은 점 $(3,\ 0)$에서 접한다. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2x-6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 9일 때, $f(4)$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

Theme 12

사차함수의 모든 것

정답 및 풀이 113p

1 양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=-2x^4+1$에 그은 접선과 점 $(-a,\ 0)$에서 곡선 $y=-2x^4+1$에 그은 접선이 서로 수직일 때, a의 값은?

① $\frac{11}{8}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{15}{8}$ ④ $\frac{17}{8}$ ⑤ $\frac{19}{8}$

2 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) $f(-2)=0,\ f'(-1)=0$

함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극솟값 q를 가질 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.

3 함수 $f(x)=x^4-18x^2+3$에 대하여 $f'(k)f'(k+3)<0$을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 합은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

4 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.
> (나) $f(1)=1$
> (다) $f(0)=f'(0)=0$

$f(3)$의 값을 구하시오.

사차함수의 모든 것

5 모든 계수가 정수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=-f'(x)$이다.
> (나) $f'(\sqrt{3})=0$
> (다) 닫힌구간 $[0, \sqrt{3}]$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

방정식 $f(x)=n$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 정수 n의 개수가 8일 때, $f(2)-f(1)$의 값을 구하시오.

6 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=2$에서 x축에 접한다.
> (나) $f'(0)=4$
> (다) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

$-7\times f(0)$의 값을 구하시오.

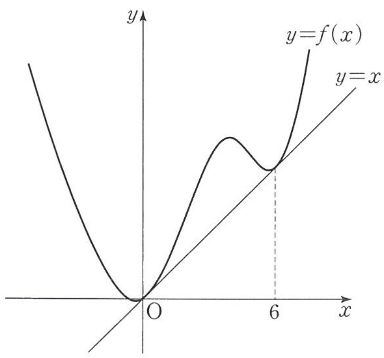
7 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(4)=24$
> (나) $\alpha+\beta=4$
> (다) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극소이다.

방정식 $f(x)=f(2)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 곱을 구하시오.

정답 및 풀이 114p

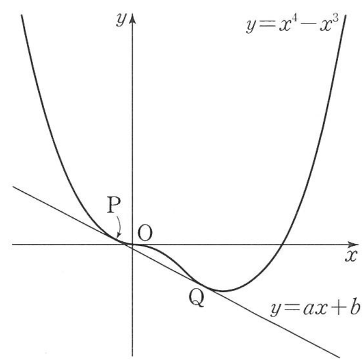
8 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 $x=0$, $x=6$인 점에서 접한다. 직선 $y=x$에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 $x=a$인 점에서 접할 때, a의 값은? (단, $0<a<6$)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9 그림과 같이 곡선 $y=x^4-x^3$과 직선 $y=ax+b$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 동시에 접할 때, a의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)



① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{7}$ ⑤ $-\frac{1}{8}$

사차함수의 모든 것

10 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f'(1)=0$
> (나) 구간 $(-\infty, 2)$에서 감소한다.

$f(2)$의 최댓값은?

① -1 ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

11 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서만 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.
> (다) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

$g(0)$의 값을 구하시오.

12 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

> (가) $f(-1)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)\geq 0$이다.

13 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f'(x)=0$의 실근은 α, β $(0\leq\alpha<\beta)$뿐이다.
> (나) 열린구간 $(0,\ 6)$, $(6,\ \infty)$에서 $f'(x)f'(-x)<0$이다.

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수가 1일 때, $f(5)$의 값은?

① -7 ② -5 ③ -1 ④ 5 ⑤ 7

14 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f'(0)=f'(2)=0$
> (나) x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 $t=0$과 $t=10$에서만 불연속이다.
> (다) $f'(3)>0$

정의역이 $\{x \mid x\neq 0\}$인 함수 $h(x)$가 $f(x)=xh(x)+10$을 만족시킬 때, 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 곱은?

① -24　② -60　③ -120　④ -360　⑤ -720

15 최고차항의 계수가 $-\frac{3}{4}$인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(\sqrt{3})$의 값은?

> (가) 방정식 $f(2)-f(-2)=4f'(x)$의 실근은 α, 0, β $(\alpha<0<\beta)$이다.
> (나) $-2<x<2$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 3을 가지고, 최댓값은 6이다.

① 5　② $\frac{21}{4}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{23}{4}$　⑤ 6

사차함수의 모든 것

16 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\left|\int_{2a}^{x} f(t)dt\right| \ (0<a<3)$$

이다. $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $F(x)$는 $x=a$에서 최솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 값의 개수는 1이다.

$f(3a)=100$일 때, $f(4a)$의 값을 구하시오.

17 두 곡선 $y=x^4-4x^3+x^2+x$와 $y=-x^3-2x^2+2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

18 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g'(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x^2}=3$$

을 만족시키고 $f(0)=1$일 때, $\int_{-1}^{0} f(x)g(x)dx$의 값은?

① $-\frac{1}{20}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{20}$

19 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|x^2(x-3)|$이고, $2f(a)=f(0)+f(4)$이다.

$a+f(4)-f(0)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

Theme 13

방정식과 부등식의 그래프 관점

정답 및 풀이 116p

1 곡선 $y=x^3-2x+3$과 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2 점 $(-1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그은 접선이 두 개만 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3 사차함수 $f(x)=x^4-6x^2+2ax$가 극댓값을 갖지 않도록 하는 양의 실수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=1$이고, $f'(x)=-x^2(x-2)$일 때, 사차방정식 $f(x)=k$의 네 근이 모두 실수이기 위한 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

방정식과 부등식의 그래프 관점

5 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $f(0)=0$을 만족시킨다.
방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?

① 81 ② 63 ③ 54 ④ 45 ⑤ 36

6 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x-1)-4}{x-3}=15$
(나) $f(0)=6$, $f'(-2)=15$

양의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 방정식 $g(t)=kt$가 오직 하나의 양의 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값은?

① $\sqrt{6}$ ② $1+\sqrt{6}$ ③ $2+\sqrt{6}$
④ $3+\sqrt{6}$ ⑤ $4+\sqrt{6}$

7 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=|f(x)-f(k)|+f(k)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $t \geq 47$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 한 점에서만 만난다.
(나) 방정식 $g(x)=47$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 k의 값은 -1, 5, α $(\alpha>5)$뿐이다.

$f(0)+f(\alpha)$의 값을 구하시오.

8 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 k에 대하여 $|x+1| \leq k$일 때, $f(x) \leq f(1)$이다.
(나) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $2f(x) \geq f(0)+f(3)$이다.

k의 최댓값을 구하시오.

9 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=3$이 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근 중 한 근이 $-\sqrt{2}$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

10 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접선을 그을 때, 접점의 x좌표가 양수인 접선이 존재하도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(2+x)+f(2-x)=4$이다.
> (나) x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0-} g(t) \times \lim_{t \to 0+} g(t)=3$이다.

삼차함수 $h(x)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\dfrac{h'(2)}{h'(1)}$의 값은?

① -2 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 2

12 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x-14$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x)=a$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a의 값을 구하시오.

방정식과 부등식의 그래프 관점

13 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+4x^3+a\geq 2x^2+12x$가 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

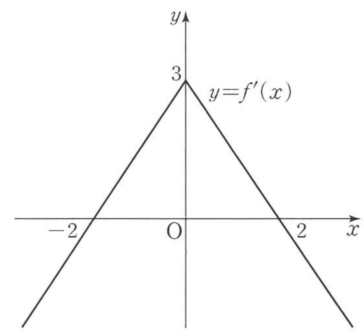
14 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x^3 & (x\geq 0)\end{cases}$$

일 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq kx-2$가 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

15 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. $f(0)=0$일 때, 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<kx$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.



16 함수 $f(x)=x^3-3x+a$와 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=|f(t)|$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

Theme 14

미분가능을 확인하는 여러 가지 방법

정답 및 풀이 120p

1 함수 $f(x)=|x-1|(x^2+ax)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 상수 a의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

2 함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -4x+1 & (x<0) \\ g(x) & (0\le x<1) \\ -1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 다음 중 $g(x)$로 알맞은 것은?

① $g(x)=x^2-3x$ ② $g(x)=2x^2-4x$
③ $g(x)=x^2-3x+1$ ④ $g(x)=2x^2-4x+1$
⑤ $g(x)=3x^2-5x+1$

3 최고차항의 계수가 1이고 극값을 가지는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 1보다 큰 모든 실수 t의 값의 범위가 $\alpha\le t\le\beta$일 때, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (x<\alpha) \\ ax+b & (\alpha\le x<\beta) \\ f(x) & (x\ge\beta) \end{cases}$$

$\frac{k}{b}$의 값을 구하시오. (단, a, b, k는 상수이다.)

4 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+9$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2a-f(x) & (x<b) \\ a+f(x) & (x\ge b) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, $b\ne 0$)

미분가능을 확인하는 여러 가지 방법

5 $f(0)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ kx-f(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이다. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=2$일 때, $g(2)$의 값을 구하시오.

(단, k는 상수이다.)

6 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\leq x<2$에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(1001)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

7 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 $x=1$에서 미분가능한 함수만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $g_1(x)=|f(x)|$

ㄴ. $g_2(x)=(x-1)|f(x)|$

ㄷ. $g_3(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ -f(x-1) & (x\geq 1) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 함수
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때,
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉
ㄱ. $t<-1$일 때 함수 $g(t)$는 감소한다.
ㄴ. 함수 $g(t)$의 최솟값은 -31이다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$에서 미분가능하지 않고, $g(1)=0$, $g'(1)=0$일 때, $f(\alpha)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

10 두 함수 $f(x)=x^3+ax^2+b$, $g(x)=3x^2+b$의 그래프가 직선 $x=t$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q 사이의 거리를 $h(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=3$
(나) 함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

11 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=3$이다.
(나) 함수 $|f(x)-4x+1|$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

미분가능을 확인하는 여러 가지 방법

정답 및 풀이 122p

12 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f'(0)=0$
> (나) 함수 $|f(x)-27|$이 구간 (a, ∞)에서 미분가능하도록 하는 실수 a의 최솟값은 -1이다.

$f(5)$의 값은?

① 75 ② 80 ③ 85 ④ 90 ⑤ 95

13 함수 $f(x)=x(x-3)$과 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=|x-a|f(x)+(x-a)|f(x)|$$

가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않고, $g(x)<0$인 구간이 존재할 때, 함수 $g(x)$의 최솟값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

14 삼차함수 $f(x)=x(x-6)^2$과 함수 $g(x)=a|x-b|$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(0)$의 최댓값은? (단, a, b는 실수이다.)

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60