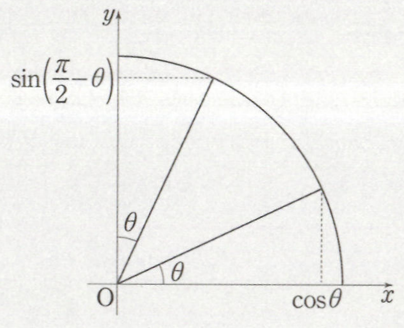
1-2. 삼각함수의 변형

앞서 배운 사인함수와 코사인함수의 그래프의 개형을 생각해 보자. 두 함수는 평행이동과 대칭이동을 반복하면 결국은 겹칠 수 있기 때문에 코사인함수는 반드시 사인함수로 나타낼 수 있으며, 마찬가지로 사인함수는 반드시 코사인함수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 다음 문제를 풀어보자.

EX 01 예각 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값과 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 값을 비교하시오.

교과서적 해법

$y=\cos\theta$와 $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 그래프를 그려서 생각해도 좋지만, $\frac{n\pi}{2}$ 꼴이 포함된 삼각함수의 값들을 비교할 때에는 다시 삼각함수의 정의인 원으로 돌아가서 생각하는 것이 편한 경우가 많다.[1] $\sin\theta$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 y좌표였고, $\cos\theta$는 x좌표였다. 즉, θ에 대한 x좌표와 $\frac{\pi}{2}-\theta$에 대한 y좌표를 단위원 위에 나타내보면 다음 그림과 같다.



그림을 보면 예각 θ에 대하여 항상 $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$임을 알 수 있다.

$\therefore\ \cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

1) 삼각함수는 원에서 정의했고 그 정의로부터 삼각함수의 그래프를 배운 것이다. 필요할 때에 언제든지 정의로 돌아갈 수 있어야 한다.

이를 통해 여러분들이 얻어야 하는 교훈은 다음과 같다.

저자의 특강 TIP 삼각함수의 두 가지 접근법

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.
② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.

EX01의 문제를 그래프로 돌아가서 확인해 보자. 그래프로 확인해도 $y=\sin\theta$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sin(-\theta)$이고, 다시 θ축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면 $y=\sin\left\{-\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이다. 그런데 이 그래프는 정확히 $\cos\theta$와 겹치는 것을 확인할 수 있을 것이다. 결국 θ가 예각이라 가정하여 단위원에서 유도한 $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$라는 식은 예각이 아닌 모든 θ에 대하여 성립한다는 사실까지 유도할 수 있다.[1] 또 문제를 풀어보자.

EX 02 단위원과 그래프를 활용하여 다음을 모두 증명하시오.

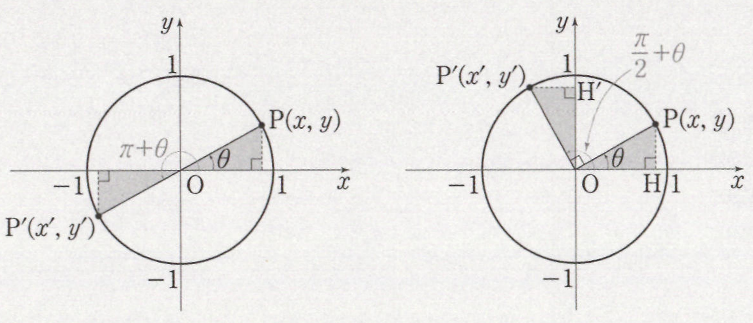
① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$　　② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$　　④ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

⑤ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$　　⑥ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

교과서적 해법

단위원으로 접근해 보자.



위의 왼쪽 그림으로 ①②③을 증명할 수 있고, 오른쪽 그림으로 ④⑤⑥을 증명할 수 있다.

EX02의 ①~⑤에 대하여 단위원이 아닌 '삼각함수의 그래프'를 이용한 증명은 스스로 해보자.[F]

1) 물론 단위원에서 확인해도 θ가 예각이 아닐 때도 성립한다는 것을 알 수 있다.

결국 단위원에서 그래프가 나온 것이기 때문에 한 쪽에서 증명가능하다는 것은 나머지 한 쪽에서도 증명가능하다는 것이다.

단, 처음 문제를 접근할 때는 어떠한 접근법이 편할지 풀기 전에는 알기 힘들다. 충분히 많은 문제를 풀고 경험을 쌓다 보면 보는 눈이 생기는 것이다.

수능 개념 **삼각함수의 변형** 교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

주기성을 활용하는 방법과 예시

사인함수 · 코사인함수

주기가 2π이므로 $f(\theta)=f(\theta+2\pi)$를 항상 만족시킨다. 이를 반복 적용하면

$$f(\theta)\ =\ f(\theta+2\pi)\ =\ f(\theta+4\pi)\ =\ \cdots$$

이므로 $f(\theta)=f(\theta+2n\pi)$ (n은 정수)라 쓸 수 있다. 이를 응용하면

$$\cos\left(\frac{9}{2}\pi+\theta\right)\ =\ \cos\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\ =\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

으로 정리할 수 있고 앞의 예제 문제를 참고하면 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$가 되는 것을 알 수 있다. 이처럼 주기성은 삼각함수를 간단하게 정리하는데 큰 도움이 된다.

탄젠트함수

탄젠트 함수는 주기가 π이므로 사인함수, 코사인함수와 마찬가지로 생각하면 된다.

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{2}+\theta\right)$$

를 간단하게 변형하라고 하면 내부에 적당히 3π를 더해서 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$로 바꿀 수 있다. 즉,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

대칭성을 활용하는 방법과 예시

사인함수 · 탄젠트함수

사인함수, 탄젠트함수는 원점에 대하여 대칭이므로 $f(-\theta)=-f(\theta)$를 만족한다.1) 따라서 $\sin(-\theta)$와 같은 식이 주어지면 보자마자 $-\sin\theta$로 바꿀 수 있다. 마찬가지로

$$\tan\left(-\theta-\frac{7\pi}{2}\right)$$

와 같은 식이 주어지면

$$\begin{aligned}\tan\left(-\theta-\frac{7\pi}{2}\right)\ &=\ -\tan\left(\theta+\frac{7\pi}{2}\right)\\ &=\ -\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ &=\ \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

와 같이 정리할 수 있다.

코사인함수

코사인함수는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-\theta)=f(\theta)$를 만족한다. 따라서

$$\begin{aligned}&\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\\ &=\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\\ &=\ -\sin\theta\end{aligned}$$

위 표의 내용을 완벽히 숙지한 후에 EX03~EX04 문제를 풀어보자. 최대한 스스로 풀어보고 모른다면 해법을 조금씩 참고하면서라도 풀어보자.

1) 함수 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이면 $y=f(x)$를 원점에 대하여 대칭이동한 함수인 $-y=f(-x)$와 $y=f(x)$가 같아야 한다.

$-y=f(-x)$를 정리하면 $y=-f(-x)$이므로 $f(x)=-f(-x)$여야 한다. 깔끔하게 정리하면 $f(-x)=-f(x)$임을 알 수 있다. 이러한 함수를 기함수라고 부른다. 마찬가지로 y축에 대하여 대칭인 함수를 우함수라고 부른다.

기함수, 우함수도 교과서 본문에 없는 개념으로 위와 같이 대칭이동으로부터 유도하는 것이 올바른 [교과서적 해법]이 된다.

하지만 '기함수와 우함수'를 하나의 [수능 개념]으로 받아들이고 익숙해져야 한다.

EX 03 ① $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cdots + \cos^2 88° + \cos^2 89°$ 의 값을 구하시오.

② $\tan^2 1° \times \tan^2 2° \times \cdots \times \tan^2 88° \times \tan^2 89°$ 의 값을 구하시오.

교과서적 해법

① $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ 임을 생각하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cdots + \cos^2 88° + \cos^2 89°\\ &= (\cos^2 1° + \cos^2 89°) + \cdots + (\cos^2 44° + \cos^2 46°) + \cos^2 45°\\ &= (\cos^2 1° + \sin^2 1°) + \cdots + (\cos^2 44° + \sin^2 44°) + \cos^2 45°\\ &= \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{44\text{개}} + \cos^2 45°\\ &= 44 + \frac{1}{2}\\ &= \frac{89}{2}\end{aligned}$$

② 마찬가지로 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$ 임을 이용할 생각부터 해야 한다.

$$\begin{aligned}&\tan^2 1° \times \tan^2 2° \times \tan^2 3° \times \cdots \times \tan^2 88° \times \tan^2 89°\\ &= (\tan^2 1° \times \tan^2 89°) \times \cdots \times (\tan^2 44° \times \tan^2 46°) \times \tan^2 45°\\ &= \left(\tan^2 1° \times \frac{1}{\tan^2 1°}\right) \times \cdots \times \left(\tan^2 44° \times \frac{1}{\tan^2 44°}\right) \times \tan^2 45°\\ &= \overbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}^{45\text{개}}\\ &= 1\end{aligned}$$

EX 04 다음 삼각함수를 최대한 간단하게 변형하시오.

① $\sin(\theta + 4\pi)$ ② $\cos(-\theta + 3\pi)$ ③ $\tan(-\theta + \pi)$

④ $\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{2}\right)$ ⑤ $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$ ⑥ $\tan\left(-\theta - \frac{9\pi}{2}\right)$

교과서적 해법

모르겠으면 단위원을 그리면서 확인하면 된다.

① $\sin(\theta + 4\pi) = \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$

② $\cos(-\theta + 3\pi) = \cos(3\pi - \theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

③ $\tan(-\theta + \pi) = -\tan\theta$

④ $\sin\left(\theta + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

⑤ $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

⑥ $\tan\left(-\theta - \frac{9\pi}{2}\right) = -\tan\left(\theta + \frac{9\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

EX04 문제를 매번 단위원을 그려놓고 유도하여 풀면 매우 번거롭다. 결국 이 결과를 다 정리해서 개념을 완벽하게 암기해야 한다.

수능 개념 삼각함수의 변형 교과서 개념 수능 개념 교과서 간접 개념

1. $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$

① n이 홀수

→ sin을 cos으로 바꾼다.

→ $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$에서 θ를 예각이라 가정하고 $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$가 단위원 위에서 양수인지 음수인지 파악하여 최종부호를 결정한다.

예시: $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$에서 $\frac{(1)\pi}{2}$이므로 cos으로 바꾸고,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$에서 θ가 예각이면 제 2 사분면의 각이므로 양수이다.

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이다.

② n이 짝수

→ sin은 그대로 둔다.

→ $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$에서 θ를 예각이라 가정하고 $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$가 단위원 위에서 양수인지 음수인지 파악하여 최종부호를 결정한다.

2. $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$

→ n이 홀수이면 sin으로 바꾸고, n이 짝수이면 cos 그대로 둔다.

→ $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$에서 θ를 예각이라 가정하고 $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$가 단위원 위에서 양수인지 음수인지 파악하여 최종부호를 결정한다.

3. $\tan\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$

→ n이 홀수이면 $\frac{1}{\tan}$로 바꾸고, n이 짝수이면 tan 그대로 둔다.

→ $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$에서 θ를 예각이라 가정하고 $\tan\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)$가 단위원 위에서 양수인지 음수인지 파악하여 최종부호를 결정한다.

위 내용의 증명은 삼각함수의 다음 2가지 접근법으로 하면 된다.[1) 반드시 풀기]

1) 연습문제

$\sin(5\pi+\theta)$, $\tan\left(\theta-\frac{7\pi}{2}\right)$를 간단한 삼각함수로 변형하시오.

① $\sin(5\pi+\theta)$에서 $5=\frac{10}{2}$으로 분자가 짝수이기 때문에 sin 그대로이고 $5\pi+\theta$는 θ가 예각이라 가정하면 제3사분면의 각이므로 sin은 음수이다. 따라서

$\sin(5\pi+\theta)=-\sin\theta$.

② $\tan\left(\theta-\frac{7\pi}{2}\right)$에서 tan이므로 적당히 π의 배수를 더해서 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$에서 시작해도 되고 $-$를 꺼내서

$-\tan\left(\frac{7\pi}{2}-\theta\right)$

에서 시작해도 된다.

$\tan\left(\theta-\frac{7\pi}{2}\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{1\pi}{2}$이므로 $\frac{1}{\tan\theta}$이 나타나야 한다. $\frac{\pi}{2}+\theta$에서 θ가 예각이라 가정하면 제2사분면의 각이므로 tan는 음수이다. 따라서

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

저자의 특강 **TIP** 삼각함수의 두 가지 접근법

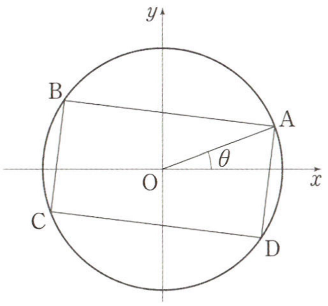
① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.

② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.

하지만 나올 때마다 증명하면 시간 내에 모든 문제를 풀 수 없다. 모두 암기하도록 하자. 교과서에 없는 [수능 개념]이지만 반드시 암기해야하는 필수 개념이라고 생각하면 되고, 단위원(삼각함수의 정의)이나 삼각함수의 그래프로부터 모두 유도할 수 있다는 원리는 당연히 파악하고 있어야 한다. **암기가 중요한 개념은 '종종' 있지만 원리는 '항상' 중요하다.** 이제 몇 가지 기출문제를 풀면서 연습해 보자.

EX 05 [2001·인문 5번]

그림과 같이 직사각형 ABCD 가 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원에 내접해 있다. x축과 선분 OA 가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos(\pi-\theta)$와 같은 것은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [3점]



① A 의 x좌표 ② B 의 y 좌표 ③ C 의 x 좌표
④ C 의 y 좌표 ⑤ D 의 x 좌표

교과서적 해법

$\cos(\pi-\theta)=\cos\left(\frac{2}{2}\pi-\theta\right)$에서 분자 2는 짝수이므로 cos함수 그대로 두면 된다. $\pi-\theta$는 θ를 예각이라 가정하면 제 2사분면의 각이므로 $\cos(\pi-\theta)$의 부호는 음수이다. 따라서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이다. 그림에서 보면 $\cos\theta$는 점 A 의 x좌표이므로 $-\cos\theta$는 점 A 의 원점 대칭점인 점 C 의 x좌표이다.

∴ 정답은 ③

EX 06

[2004·예체능] [10번 변형]

임의의 각 θ에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\pi+\theta)$

ㄴ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\pi+\theta)$

ㄷ. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{1}{\tan(\pi+\theta)}$

교과서적 해법

ㄱ. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{1\pi}{2}+\theta\right)$에서 1이 홀수이므로 cos으로 바꿔야하고 제2사분면의 각이므로 sin은 양수이다. 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$이다.

$\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{2}{2}\pi+\theta\right)$에서 2가 짝수이므로 cos 함수 그대로이고 제3사분면의 각이므로 cos은 음수이다. 따라서 $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ (거짓)

ㄴ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ (참)

ㄷ. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ (거짓)

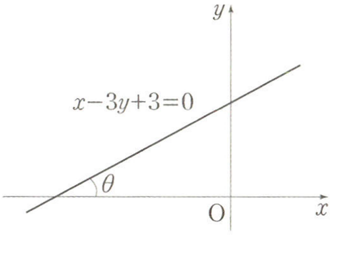
EX 07

[2006.3·고2 5번]

직선 $x-3y+3=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

$$\cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)$$

의 값은? [3점]



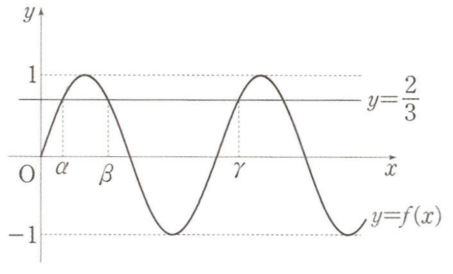
교과서적 해법

$x-3y+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{3}+1$이므로 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이다. 그런데 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ이므로 $\tan\theta=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore \cos(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(-\theta)=-\cos\theta+\cos\theta-\tan\theta=-\frac{1}{3}$

EX 08 [2011.3·고2 17번]

함수 $f(x)=\sin\pi x\ (x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{3}$가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]



교과서적 해법

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$를 직접 구하기보단, 항상 대칭성을 고려해야 한다. 함수 $f(x)$의 주기는 2이므로 대칭성을 생각해서 $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right) &= f(\alpha+4)+f\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \sin\pi(\alpha+4)+\sin\frac{3}{2}\pi\\ &= \sin(\pi\alpha)-1\\ &= f(\alpha)-1\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

삼각함수의 그래프는 선대칭, 점대칭을 모두 갖고 있으므로 EX08과 같이 x좌표의 합을 구할 때 대칭축을 이용하면 좋다. 이를 하나의 [수능 개념]으로 정리하면 다음과 같다.

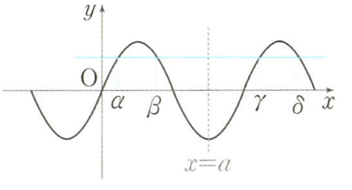
수능 개념 **대칭적인 숫자의 합** 교과서 개념 수능 개념 교과서 감점 개념

$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9$의 총합을 구하라고 할 때, 숫자가 5에 대하여 대칭적으로 존재하므로 6개의 숫자의 평균이 5임을 즉시 알 수 있다. 어떤 숫자들의 총합은 항상

(평균)×(항의 개수)

이므로 위 숫자의 총합은 $5\times6=30$이다. 이는 특히 삼각함수에서 대칭성이 있는 경우가 많아서 실근의 총합을 구할 때 다음과 같이 활용할 수 있다.

(평균)×(항의 개수) = (대칭축)×(실근의 개수)



예를 들어, 위의 그림에서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=$(대칭축)×(실근의 개수)$=4a$이다. 물론 실제 출제되는 문항은 주로 직접 실근을 찾을 수 있도록 값을 주기 때문에 직접 구해서 더해도 된다.

2. 삼각함수의 방정식과 부등식

EX 01 부등식 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ $(0 \leq x < 2\pi)$의 해를 구하시오.

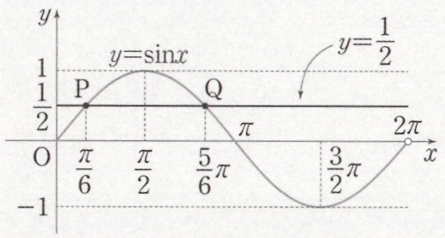
일단 문제부터 같이 풀면서 생각하자. 반복해서 설명하지만 삼각함수 문제의 대표적인 접근법은 아래와 같다. 삼각함수를 학습할 때에는 항상 2가지 방법 모두 해보고 시험 칠 때에는 문제에 따라 유리하다고 판단되는 방법을 취하자.

저자의 특강 TIP **삼각함수의 두 가지 접근법**

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.
② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.

교과서적 해법1

삼각함수의 정의로부터 삼각함수의 그래프를 배웠기 때문에 좀 더 나중에 배운 그래프를 활용해서 풀어보자.



위 그래프에서 $\sin x = \frac{1}{2}$을 만족하는 점 중 가장 간단한 값인 $x = \frac{\pi}{6}$는 특수각의 삼각비를 통해 찾을 수 있을 것이다. 나머지 점인 Q의 x좌표는 대칭성을 활용하여 찾을 수 있다.[1] 그래프를 보면 점 P와 점 Q는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 점 Q의 x좌표는 $\pi - \frac{\pi}{6}$이다. 따라서 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 두 실근은 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이고 부등식 $\sin x \geq \frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$이다.

1) 사인함수는 원점에 대해서도 대칭이지만 $(n\pi, 0)$(n은 정수)인 모든 점에 대하여 대칭이기도 하고

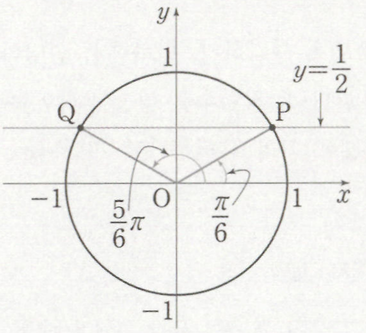
$x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

인 모든 직선에 대하여 대칭이기도 하다.

언제든 삼각함수의 정의로 돌아가서 단위원으로 문제를 해결할 수 있어야 한다.

교과서적 해법2

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ 이란 말은 단위원 $x^2+y^2=1$ 위의 점의 y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 같은 동경의 각을 찾으라는 것이므로 그림과 같이 그려서 접근할 수 있다.



그림에서 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 동경의 각을 구해 보면 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ 임을 알 수 있고, 따라서 부등식을 만족하는 구간은 짧은 호 PQ 이므로 해는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$.

대부분의 교과서에서 2가지 방법으로 해설하고 있기 때문에 반드시 2가지 풀이 모두 이해하고 활용할 수 있도록 하자. 다음 문제로 더 연습해 보자.

EX 02

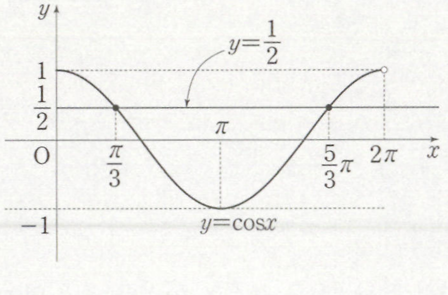
① 방정식 $2\cos x = 1$ $(0 \leq x < 2\pi)$ 의 해를 구하시오.

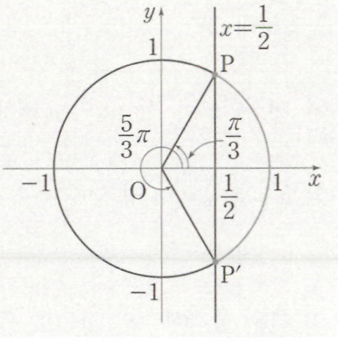
② 부등식 $\tan x \geq \sqrt{3}$ $(0 \leq x < 2\pi)$ 의 해를 구하시오.

교과서적 해법

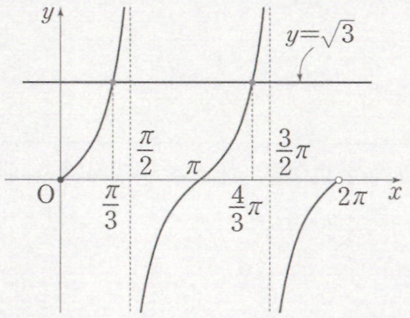
① 이 문제의 풀이는 다음 두 그림을 참고해서 스스로 풀이를 마무리하자.©

정답은 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ 이다.





②



그래프를 보면 부등식 $\tan x \geq \sqrt{3}$ 의 해는 $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$ 이다. 이처럼 탄젠트가 포함된 부등식에서는 점근선을 고려해줘야 한다. 단위원을 이용한다면 단위원 위의 점과 원점을 이은 직선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 보다 크거나 같은 구간을 찾아야 하므로 직선 $y = \sqrt{3}x$를 그려서 풀면 된다.

문제를 풀면서 알 수 있었지만 단위원에서 문제를 풀 때에는 $\sin x$의 경우 $y = \frac{1}{2}$ 이라는 x축과 평행한 직선이, $\cos x$의 경우 $x = \frac{1}{2}$ 이라는 y축에 평행한 직선이, $\tan x$의 경우 $y = \sqrt{3}x$ 라는 원점을 지나는 직선이 필요했다. 이를 정리해 보면 다음과 같다.

저자의 특강 TIP 삼각함수의 두 가지 접근법

① 삼각함수를 보면 그래프로 접근할 생각을 해야 한다.

② 하지만 ①에 매몰되어 삼각함수의 정의를 잊으면 안 된다. 정의로 돌아가서 생각하면 훨씬 편한 경우도 많다. 삼각함수의 정의는 단위원 위의 점에 대해 x좌표가 코사인함수, y좌표가 사인함수, 기울기가 탄젠트함수이다.
따라서 코사인함수는 단위원과 $x = a$의 교점을 찾아야 하고, 사인함수는 단위원과 $y = a$의 교점을 찾아야 한다. 탄젠트함수는 기울기이므로 단위원과 $y = mx$의 교점을 찾아서 문제를 풀면 된다.

이처럼 단순히 삼각함수의 그래프를 통한 풀이가 아닌 정의로 돌아가서 단위원에서 푸는 방법도 정확하게 이해하도록 하자. 이제 몇 가지 기출문제를 스스로 풀어보고 해설을 보도록 하자.

EX 03 $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$, $\cos x < 0$ $(0 \le x < 2\pi)$일 때, x의 값은? [2점]

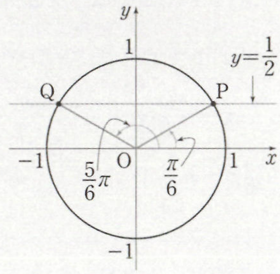
[2000·자연 3번] [변형]

교과서적 해법

$4\cos^2 x + 4\sin x = 5$에서 함수를 $\sin x$로 통일하기 위해 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 대입해서 정리하면

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0 \iff (2\sin x - 1)^2 = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$$

이를 단위원에 나타내보면 그림과 같다. 그런데 $\cos x < 0$이므로 x는 제 2, 3사분면의 각이어야 하고, $x = \frac{\pi}{6}$, $\pi - \frac{\pi}{6}$ 중 적합한 것은 $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$이다.



$\therefore\ x = \frac{5}{6}\pi$

EX 04 부등식 $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - a + 9 \ge 0$이 모든 θ에 대하여 성립하는 실수 a의 값의 범위는? [3점]

[2000·인문 19번] [변형]

교과서적 해법

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - a + 9 \ge 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2\theta - 3\cos\theta - a + 9 \ge 0$$

$$(\because\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta)$$

$\cos\theta = C$로 치환하면 $-1 \le C \le 1$이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 이차함수 $f(C) = C^2 - 3C - a + 9$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면 되는 것을 알 수 있다.

$$C^2 - 3C + \frac{9}{4} - a + \frac{27}{4} = \left(C - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{27}{4}$$

이차함수의 그래프를 생각해 보면 대칭축인 $C = \frac{3}{2}$에 가까운 값일수록 최소가 되므로 $C = 1$일 때 최솟값을 갖는다. 대입하면

$$f(1) = 1^2 - 3(1) - a + 9 = -a + 7 \ge 0 \quad \rightarrow \quad a \le 7$$

예제

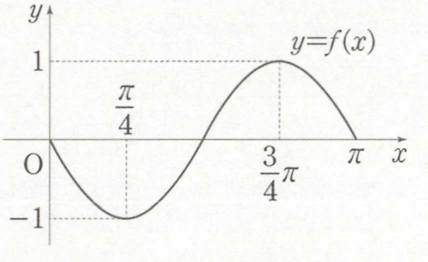
모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

Example 01 [2023.6 7번]

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$ 가 $x = a$ 에서 최댓값을 갖고 $x = b$ 에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

교과서적 해법

함수 $f(x) = -\sin 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 함수 $y = \sin 2x$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 인 사인함수이므로 그 그래프가 다음 그림과 같다.



그림으로부터 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값 1, $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최솟값 -1 을 가짐을 알 수 있다. 즉, $a = \frac{3}{4}\pi$, $b = \frac{\pi}{4}$ 이다.

$$\therefore \text{(구하는 직선의 기울기)} = \frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

이처럼 [수능 개념]-'일반적인 삼각함수의 특징' 170p을 숙지하여 어떤 삼각함수가 나와도 그래프를 그릴 수 있어야 한다. 예를 들어, 함수 $y = -3\cos\frac{\pi x}{6} - 1$ 이 나오면 식을 보자마자

$$\text{주기: } \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12, \quad \text{최댓값: } |-3| - 1 = 2, \quad \text{최솟값: } -|-3| - 1 = -4$$

임을 파악하고 그 그래프를 그릴 수 있어야 한다. 이를 하나의 발상으로 정리하면 다음과 같다.

발상 | 일반적인 삼각함수의 그래프 → 주기, 최댓값, 최솟값을 찾는다!

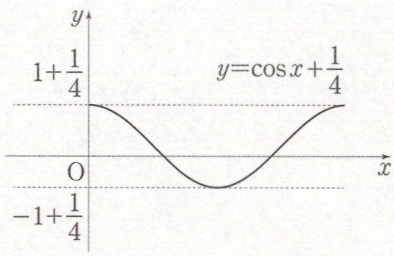
예시 | $y = 2\sin\pi x - 1$ → 주기: $\frac{2\pi}{|\pi|} = 2$, 최댓값: $|2| - 1 = 1$, 최솟값: $-|2| - 1 = -3$

Example 02 [2016.4·가 26번]

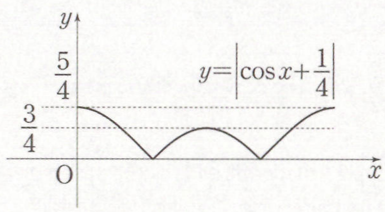
x에 대한 방정식 $\left|\cos x + \frac{1}{4}\right| = k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0 \le x < 2\pi$) [4점]

교과서적 해법

$y = \cos x + \frac{1}{4}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



최댓값은 $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, 최솟값은 $-1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$이므로 함수 $y = \left|\cos x + \frac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore\ k = \frac{3}{4}$일 때 서로 다른 실근이 3개임을 알 수 있다. $\rightarrow\ 40\alpha = 30$.

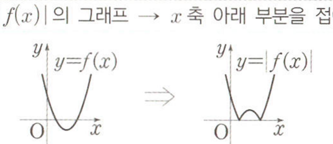
삼각함수 그래프와 삼각방정식 역시 다음이 핵심이다.

그래프의 교점의 x좌표는 방정식의 실근

따라서 위 문항처럼 절댓값이 포함된 삼각방정식이 나오면 [수능 개념]-'절댓값 그래프'[84p]에서 배운 것을 떠올려서 절댓값이 포함된 삼각함수의 그래프를 그리면 된다.

발상 | 함수 $y = |f(x)|$의 그래프 $\rightarrow$ x축 아래 부분을 접어 올린다!

예시 |



Example 03 [2021·나 16번]

$0 \le x < 4\pi$ 일 때, 방정식

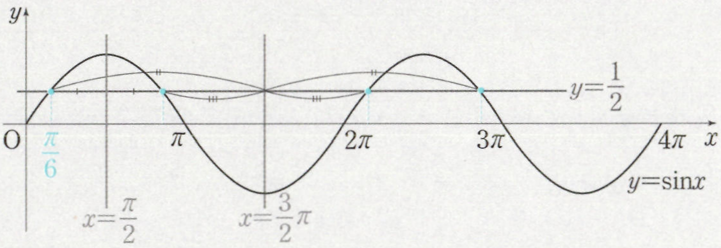
$$4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

교과서적 해법1

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} 4\sin^2 x - 4(-\sin x) - 3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 3)(2\sin - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because \ 2\sin x + 3 > 0) \end{aligned}$$



그림과 같이 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 가장 간단한 해인 $x = \frac{\pi}{6}$ 는 특수각의 삼각비를 통해 찾을 수 있다. 곡선 $y = \sin x$ 가 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 와 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로 대칭성을 활용하면 나머지 해인 $x = \frac{5}{6}\pi, \ \frac{13}{6}\pi, \ \frac{17}{6}\pi$ 를 찾을 수 있다.

$\therefore$ (모든 해의 합) $= \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{13}{6}\pi + \frac{17}{6}\pi = 6\pi$

'삼각함수의 변형'[176p]을 완벽하게 암기해서 식을 보자마자 변형할 수 있도록 하자. 예를 들어, 위 문항처럼 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$가 보이면 바로 $-\sin x$ 로 바꿀 수 있어야 한다.

발상 | $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ 의 삼각함수가 보이면 → [수능 개념]-'삼각함수의 변형' 을 활용한다!

예시 | ① $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ ② $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ ③ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

위 [교과서적 해법1]에서는 해를 직접 구해서 일일이 더했는데, [수능 개념]-'대칭적인 숫자의 합'[182p]을 활용하면 더 간단히 정답을 구할 수 있다. 스스로 시도해보고 다음 페이지의 [수능적 해법]을 확인하자.

수능적 해법

[교과서적 해법1]의 그림을 보면 $0 \le x < 4\pi$ 에서 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 네 실근을 직선 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대칭이 되도록 두 개씩 짝지을 수 있다. 따라서 [수능 개념]-'대칭적인 숫자의 합' 182p를 활용하면 그 합은 $\frac{3}{2}\pi \times 4 = 6\pi$ 이다.

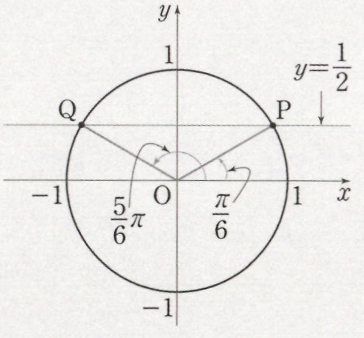
이처럼 삼각방정식의 모든 실근의 합을 구하는 문제가 나오면, 일일이 해를 구하는 것이 아니라 (대칭축)×(실근의 개수)를 활용하여 더 간단히 해를 구할 수는 없는지 생각해보는 것이 좋다.

발상 | 삼각방정식의 모든 실근의 합 → (대칭축)×(실근의 개수)
예시 | 1, 2, 3, 7, 8, 9 의 합 → 대칭축이 5, 숫자가 6 개이므로 그 합은 $5 \times 6 = 30$

마지막으로 삼각함수의 정의로 돌아가서 단위원으로 문제를 해결해보자.

교과서적 해법2

$\sin\theta$ 는 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 중 동경이 θ 인 점의 y 좌표이므로 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 을 풀기 위해서는 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 중 y 좌표가 $\frac{1}{2}$ 인 동경의 각을 찾으면 된다.



그림으로부터 $0 \le x < 2\pi$ 에서의 해는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ 임을 알 수 있다.

동경의 범위가 $2\pi \le x \le 4\pi$ 인 경우의 해는 위에서 구한 해에 각각 2π 를 더한 $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ 이다.

$\therefore$ (모든 해의 합) $= \frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{13}{6}\pi + \frac{17}{6}\pi = 6\pi$

발상 | 삼각함수의 단위원 해석 → cos 은 x 좌표, sin 은 y 좌표, tan 은 기울기!
예시 | ① $\cos x = \frac{1}{2}$ → x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 인 단위원 위의 점
② $\tan x = \sqrt{3}$ → 동경의 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 단위원 위의 점

챕터 F

기출 문제
모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

네/모/박/스/를/활/용/하/는/방/법

교과서적 해법 / 논리적 사고과정 / 수능적 해법

1. 첫 번째 칸
[교과서 개념]만을 활용하는 풀이인 [교과서적 해법]을 통해 문제를 완벽하게 풀었으면 첫 번째 칸에 V 와 같이 체크하세요. 이 과정에서 교과서 본문으로부터 유도된 [수능 개념]을 활용하지 말고 반드시 [교과서 개념]만으로 문제를 풀어야 합니다. [교과서적 해법]을 완벽하게 공부하는 것이 Part 1의 가장 중요한 목표입니다.

2. 두 번째 칸
쉬운 개념이라도 [교과서 개념]과 기출문제로부터 유도된 [수능 개념]을 활용해서 풀었다면 V 와 같이 두 번째 칸에 체크하세요. [수능 개념]을 활용하는 [수능적 해법]은 문제마다 없을 수도 있습니다. [수능적 해법]은 Part 2를 학습해야 이해되는 해설도 많기 때문에 Part 2까지 공부한 후 다시 한번 Part 1의 기출문제를 복습해야 합니다. Part 1에서는 [교과서적 해법]을 마스터하는 것이 우선이고 [수능적 해법]은 Part 2 학습 후에 마스터하면 됩니다.

3. 세 번째 칸
복습할 때 본인만의 용도를 정해서 자유롭게 활용하세요.

4. 네 번째 칸
틀린 문제나 애매했던 문제에 대해서는 풀이과정에 '필연성 부여'를 하면서 '논리적 사고과정'을 정리해 본 후 사고과정 칸에 체크하세요. 머릿속에서 사고과정이 쉽게 정리된다면 굳이 쓰지 않고 머릿속으로 생각하고 넘어가도 충분합니다.

F·01

해설 발상 정리 | 2018·가 7번 |

$0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식

$$\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

F·02

해설 발상 정리 | 2021.6·나 22번 |

함수 $f(x) = 5\sin x + 1$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

F·03

| 2021·나 4번 |

함수 $f(x) = 4\cos x + 3$ 의 최댓값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

F·04

해설 발상 정리 | 2023 5번 |

$\tan\theta < 0$ 이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

F·05

| 2001·예체능 21번 |

함수 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2(x+\pi)$ 의 최댓값은?

[3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

F·06

| 2017·가 25번 |

$0<x<2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 x-\sin x=1$ 의 모든 실근의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

F·07

| 2020·가 7번 |

$0<x<2\pi$ 일 때, 방정식 $4\cos^2 x-1=0$ 과 부등식 $\sin x\cos x<0$ 을 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은?

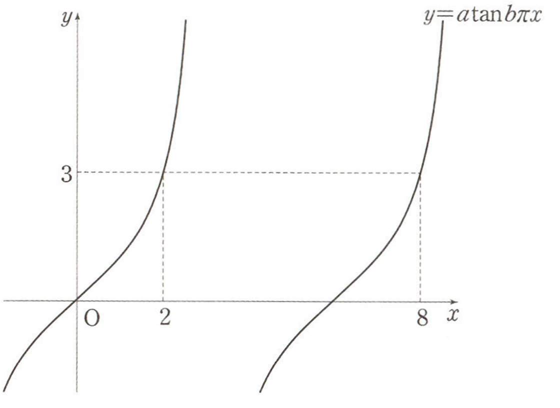
[3점]

① 2π　② $\frac{7}{3}\pi$　③ $\frac{8}{3}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

F·08

| 2023.4 8번 |

그림과 같이 함수 $y=a\tan b\pi x$ 의 그래프가 두 점 $(2,\ 3)$, $(8,\ 3)$ 을 지날 때, $a^2\times b$ 의 값은? (단, a, b 는 양수이다.) [3점]



① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

저자의 특강 **TIP** **문제가 어렵다면**

1. 못 푸는 문제가 40% 이상이라면 해설을 보면서 이해하고 넘어가야 한다. 해설을 보는 것은 수학을 잘 하지 못할 때에는 매우 좋은 행위이다. 해설을 보고 암기하면 안 좋지만 해설의 논리과정을 이해하려고 노력하면 좋은 공부가 된다.

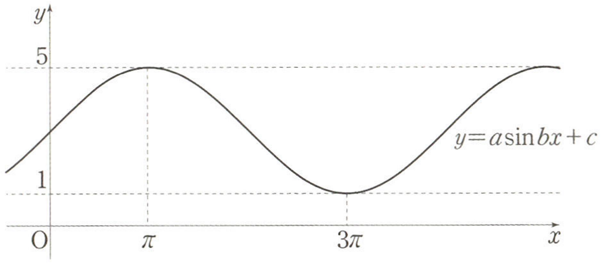
2. 60% 이상의 문항을 스스로 풀어내고 있다면, 틀린 문항에 대해 다시 시도하였다가 안 풀리면 따로 체크해 두었다가 한완수 Part 2까지 전부 학습한 후 2회독 때 풀어보도록 하자. 그렇게 3번 이상 못 풀면 해설을 보고 공부하면 된다.

F·1 해설·26p

F·09

|2023.6·고2 10번|

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\sin bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$) [3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

F·10

|2019·가 11번|

$0\le\theta<2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$이다. $3\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}\pi$ ② π ③ $\frac{7}{6}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

F·11

|2022 7번|

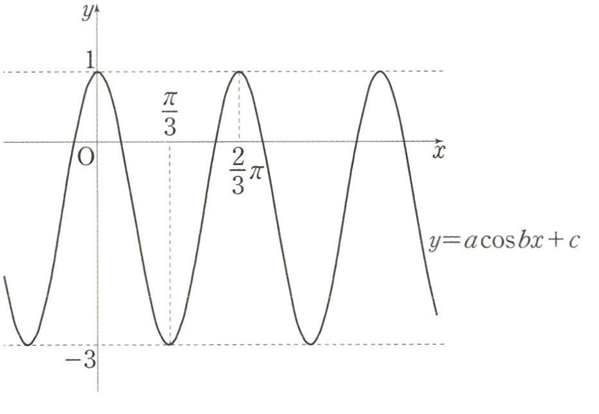
$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

F·12

|2022.6·고2 10번|

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\cos bx+c$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$) [3점]



① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

F·13

| 2022.5 8번 |

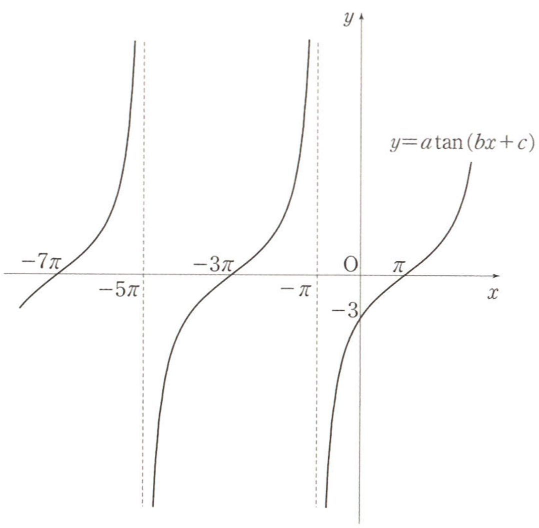
함수 $y=6\sin\frac{\pi}{12}x\ (0\le x\le 12)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

F·14

| 2023.9·고2 12번 |

세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\tan(bx+c)$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? (단, $0<c<\pi$) [3점]

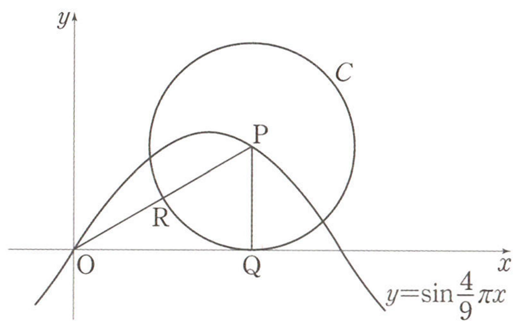


① $\frac{9}{16}\pi$ ② $\frac{5}{8}\pi$ ③ $\frac{11}{16}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{13}{16}\pi$

F·15

| 2020·가 24번 변형 |

좌표평면에서 곡선 $y=\sin\frac{4}{9}\pi x$ 위의 점 $P\left(t,\ \sin\frac{4}{9}\pi t\right)\left(0<t<\frac{9}{4}\right)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C가 x축에 접하는 점을 Q, 선분 OP와 만나는 점을 R라 하자. $t=\frac{3}{2}$일 때, 중심각이 예각인 부채꼴 PQR의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]



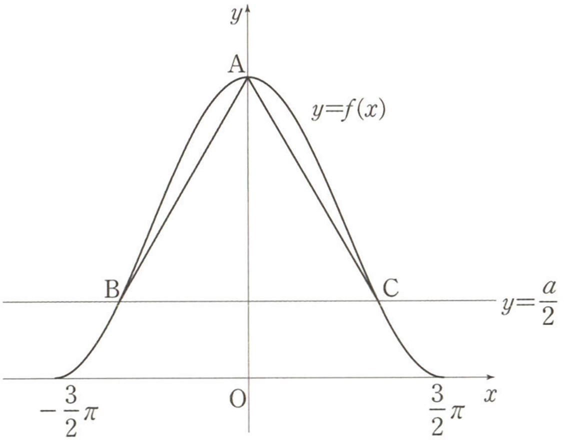
F·16

| 2023.6·고2 15번 |

$-\frac{3}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = a\cos\frac{2}{3}x + a \ (a > 0)$$

이 있다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A, 직선 $y = \frac{a}{2}$ 와 만나는 두 점을 각각 B, C 라 하자. 삼각형 ABC 가 정삼각형일 때, a 의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{12}\pi$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

F·17

| 2007.6·가 21번 변형 |

두 함수 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & (|x| \ge 1) \\ \frac{1}{2} & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = \sin(k\pi x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 실근을 갖지 않을 때, $60k$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

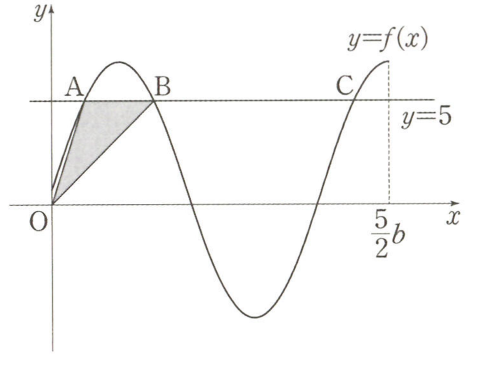
F·18

| 2023.10 11번 |

그림과 같이 두 상수 a, b 에 대하여

$$f(x) = a\sin\frac{\pi x}{b} + 1 \ \left(0 \le x \le \frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y = 5$ 가 만나는 점을 x 좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C 라 하자. $\overline{BC} = \overline{AB} + 6$ 이고 삼각형 AOB 의 넓이가 $\frac{15}{2}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a > 4$, $b > 0$ 이고, O 는 원점이다.) [4점]



① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

F·19

| 2019.9·가 14번 |

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

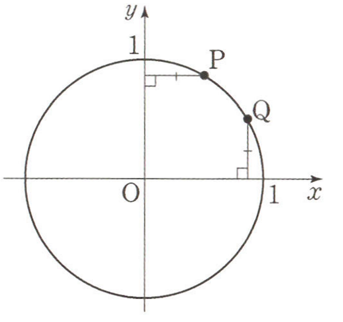
F·16 해설·29p

F·20

해설 발상 정리

| 2010.6·가 28번 |

좌표평면에서 두 점 P, Q가 점 $(1, 0)$을 동시에 출발하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 돌고 있으며, 점 P가 $2t\ (0 \le t \le \pi)$만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직인다. 점 P에서 y축까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같아지는 모든 t의 값의 합은? [3점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{5\pi}{4}$ ⑤ $\frac{3\pi}{2}$

빠른 정답

저자의 특강 TIP

해설 활용법

맞은 문제도 해설을 보면 공부에 도움이 된다. 문제풀이에 조금이라도 애매한 과정이 있었다면 해설과 본인의 풀이를 비교하며 공부하도록 하자.