챕터 E

기출 문제

모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

챕터 E 삼각함수의 뜻과 성질

해/설/을/활/용/하/는/방/법

해설을 읽어보기 전에 반드시 모든 문제를 스스로 풀어보도록 합시다. 책 본문에서 설명한 대로 안 풀리면 1주일 간격으로 반복해서 풀고 3주간 3번 푸는데 풀 때마다 해설을 위에서부터 조금씩 보면서 매주 조금씩 더 보면서 힌트 삼아 최대한 스스로 풀어보도록 하세요.

E·01

| 2021.9·나 3번 |

교과서적 해법

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2=\frac{15}{4}$$

정답 ④

E·02

| 2002·예체능 26번 |

교과서적 해법

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}-2$$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow$ 양변 제곱: $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

$\rightarrow\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}\ (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

$\rightarrow\ \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}-2=14$

정답 14

E·03

해설 발상 정리 | 2023.9 3번 |

교과서적 해법

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{5}{13}$$

$$\rightarrow\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{12}{13}\ (\because\ \cos\theta<0)$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{5}{12}$$

발상 | 하나의 삼각함수를 알면 → 나머지도 다 안다!

예시 | $\sin\theta=\frac{4}{5}$ 가 주어지면 → $|\cos\theta|=\frac{3}{5}$, $|\tan\theta|=\frac{4}{3}$

정답 ②

E·04

| 2023.6 3번 |

교과서적 해법

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\cos\theta<0$ 이므로

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{5}{9}\qquad \cos\theta=-\sqrt{\cos^2\theta}=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}$$

정답 ④

E·05

| 2022.3 5번 |

교과서적 해법

$\tan=\frac{\sin}{\cos}$ 이므로

$$\cos\theta\tan\theta=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow\ \theta=\frac{5\pi}{6}\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

$$\therefore\ \cos\theta+\tan\theta=\cos\frac{5\pi}{6}+\tan\frac{5\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

정답 ①

E·06

| 2021·가 3번 |

교과서적 해법

$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 이므로 빗변이 7, 높이가 $\sqrt{21}$ 인 직각삼각형에서 밑변의 길이를 구하면 된다. 피타고라스의 정리에 의해 밑변의 길이는 $\sqrt{7^2-(\sqrt{21})^2}=\sqrt{28}$ 이므로 $\tan\theta$ 의 값은 $\pm\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 중 하나이다.

이때, θ 의 범위가 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

정답 ①

E·07

| 2022.5 5번 |

교과서적 해법1

$\sin\theta\cos\theta = -\frac{12}{25}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 을 연립해서 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 를 찾으면 된다. 삼각함수에서 식 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 은 항상 기본으로 깔고 있어야 한다.

그런데 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$ 의 양변을 제곱하려고 보면 숫자가 상당히 복잡해진다. 현장에서 만약 이 풀이밖에 보이지 않는다면 끝까지 계산하여 답을 내면 된다. 하지만 복잡할 것으로 예측되면 즉시 다른 풀이를 머릿속에서 상상해 보는 것이 기본적인 문제 풀이 자세이다.

교과서적 해법2

[교과서적 해법1]로 진행 중 계산의 복잡성을 깨닫고 다른 풀이로 접근하려고 생각할 수 있다. 구하는 것인 $\sin\theta-\cos\theta$ 을 제곱하면 간단히 정리되는 것을 추측한 후 풀이를 시작할 수 있다. $\sin\theta-\cos\theta=k$ 라 두고 양변을 제곱하자.

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=k^2$$

$$\Leftrightarrow\ 1-2\left(-\frac{12}{25}\right)=k^2$$

$$\Leftrightarrow\ k=\frac{7}{5}\ (\because\ \sin\theta>0,\ \cos\theta<0)$$

정답 ④

E·08

| 2023.10 5번 |

교과서적 해법

$$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2}{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta}$$

$$\to\ \frac{2}{\sin^2\theta}=18$$

$$\to\ \sin^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{1}{3}\ \left(\because\ \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$$

정답 ②

E·09

| 2022.9 6번 |

교과서적 해법

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta\neq\pm1$ 이므로

$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$ 의 양변에 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ 를 곱해서 정리하자.

$$\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)=4(1-\sin^2\theta)$$

$$\Leftrightarrow\ \sin^2\theta=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\cos\theta<0$ 이다.

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ \to\ \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

챕터 F

기출 문제

모든 문제에서 [교과서 개념]만 활용한 [교과서적 해법]과 [수능 개념]까지 같이 활용한 [수능적 해법]을 완성해 보자. 스스로 하기에 어렵다면 해설을 봐서라도 다 완성하자.

챕터 F 삼각함수의 그래프

해/설/을/활/용/하/는/방/법

해설을 읽어보기 전에 반드시 모든 문제를 스스로 풀어보도록 합시다. 책 본문에서 설명한 대로 안 풀리면 1주일 간격으로 반복해서 풀고 3주간 3번 푸는데 풀 때마다 해설을 위에서부터 조금씩 보면서 매주 조금씩 더 보면서 힌트 삼아 최대한 스스로 풀어보도록 하세요.

F·01

해설 발상 정리 | 2018·가 7번 |

교과서적 해법

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 대입하면

$$1-\sin^2 x = \sin^2 x - \sin x \iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$
$$\iff (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$
$$\iff \sin x = -\frac{1}{2} \text{ or } 1$$

이다. $\sin x = -\frac{1}{2}$ 에서 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대칭인 두 실근이므로 두 실근의 합은 $\frac{3}{2}\pi \times 2 = 3\pi$, $\sin x = 1$ 에서 $x = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 \le x < 2\pi$ 에서 모든 해의 합은 $3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$ 이다.

발상 | 삼각방정식의 모든 실근의 합 → (대칭축)×(실근의 개수)

예시 | $1, 2, 3, 7, 8, 9$ 의 합
→ 대칭축이 5, 숫자가 6 개이므로 그 합은 $5 \times 6 = 30$

정답 ④

F·02

해설 발상 정리 | 2021.6·나 22번 |

교과서적 해법

발상 | 일반적인 삼각함수의 그래프 → 주기, 최댓값, 최솟값을 찾는다!

예시 | $y = 2\sin \pi x - 1$ → 주기: $\frac{2\pi}{|\pi|} = 2$, 최댓값: $|2| - 1 = 1$,
최솟값: $-|2| - 1 = -3$

머릿속에서 그래프가 그려지면서 위 발상이 자연스럽게 나와야 한다.

$\therefore$ $5\sin x + 1$ 의 최댓값: $|5| + 1 = 6$

정답 6

F·03

| 2021·나 4번 |

교과서적 해법

$\therefore$ $4\sin x + 3$ 의 최댓값: $|4| + 3 = 7$

정답 ②

F·04

해설 발상 정리 | 2023 5번 |

교과서적 해법

삼각함수의 변형은 반드시 암기해야 한다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\sin\theta < 0$ 이고 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} < 0$ 이므로 $\cos\theta > 0$ 이다.

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

발상 | $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ 의 삼각함수가 보이면
→ [수능 개념]-'삼각함수의 변형'을 활용한다!

예시 | ① $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ ② $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
③ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

정답 ⑤

F·05

| 2001·예체능 21번 |

교과서적 해법

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$\cos(x + \pi) = \cos(\pi + x) = -\cos x$$

이므로 $f(x) = \cos x - \cos^2 x$ 이고 $\cos x = X$ 로 치환하면 $-1 \le X \le 1$ 에서 주어진 함수는 $X - X^2$ 이다. 이 X 에 대한 이차함수는 $X = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값을 갖고 구간 $[-1, 1]$ 에 속하므로 이 값이 최댓값이다.

$$\therefore \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

정답 ①

F·06

| 2017·가 25번 |

교과서적 해법

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 를 대입하면

$$\sin^2 x + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x + 1) = 0$$

이므로 $\sin x = 0$ 에서 $x = \pi$, $\sin x = -1$ 에서 $x = \frac{3\pi}{2}$ 이다.

$$\therefore \ \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi \quad \rightarrow \quad p+q=7$$

정답 7

F·07

| 2020·가 7번 |

교과서적 해법

$\sin x \cos x < 0$ 을 만족시키기 위해서는 x 가 제 2 사분면 혹은 제 4 사분면의 각이어야 한다.

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$ 을 만족하는 제 2 사분면의 각은 $\frac{2}{3}\pi$, 제 4 사분면의 각은 $\frac{5}{3}\pi$ 이다.

$$\therefore \ \frac{2}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi \ = \ \frac{7}{3}\pi$$

정답 ②

F·08

| 2023.4 8번 |

교과서적 해법

그래프를 통해 주어진 함수의 주기는 $8-2=6$ 임을 알 수 있다. 또한 $y=a\tan b\pi x$ 를 통해 구한 주기는 $\frac{\pi}{b\pi} = \frac{1}{b}$ 이다. 그러므로 $\frac{1}{b} = 6$ 에서 $b = \frac{1}{6}$ 을 얻는다. 또한 이 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 대입하면 a 를 구할 수 있다.

$$3 = a\tan\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{3}$$

$$\therefore \ a^2 \times b = (\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

정답 ③

F·09

| 2023.6·고2 10번 |

교과서적 해법

그래프를 통해 주어진 함수의 주기는 $2 \times (3\pi - \pi) = 4\pi$ 임을 알 수 있다. 또한 $y = a\sin bx + c$ 를 통해 구한 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이다. 그러므로 $\frac{2\pi}{b} = 4\pi$ 에서 $b = \frac{1}{2}$ 을 얻는다.

또한 그래프를 통해 주어진 함수의 최댓값과 최솟값은 각각 5, 1이고, $y = a\sin bx + c$ 를 통해 구한 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$ 이다.($\because$ $a>0$) 따라서

$$a+c=5, \ -a+c=1 \quad \rightarrow \quad a=2, \ c=3$$

$$\therefore \ a \times b \times c = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 = 3$$

정답 ⑤

F·10

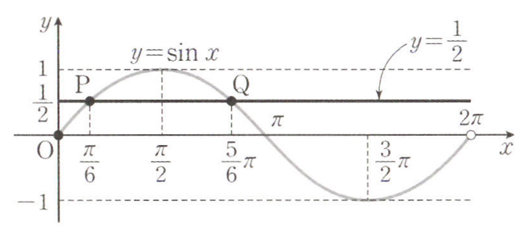
| 2019·가 11번 |

교과서적 해법

판별식이 0 보다 작아야 한다.

$$\begin{aligned} D/4 &= (2\cos\theta)^2 - 6\sin\theta = 4(1-\sin^2\theta) - 6\sin\theta \\ &= -4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 4 \\ &= -2(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) \\ &< 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow \ \sin\theta > \frac{1}{2}$ ($\because$ $\sin\theta$ 는 항상 -1 보다 크거나 같다.)



$$\therefore \ \sin\theta > \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \quad \rightarrow \quad 3\alpha + \beta = \frac{4}{3}\pi$$

정답 ④

F·11

해설 발상 정리 | 2022 7번 |

교과서적 해법

주어진 범위 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\tan\theta > 0$ 임에 유의하여 주어진 조건의 양변에 $\tan\theta$ 를 곱하면 방정식을 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} \tan\theta - \frac{6}{\tan\theta} = 1 \quad &\rightarrow \quad \tan^2\theta - \tan\theta - 6 = 0 \\ &\rightarrow \quad (\tan\theta - 3)(\tan\theta + 2) = 0 \\ &\rightarrow \quad \tan\theta = 3 \ (\because \ \tan\theta > 0) \end{aligned}$$

밑변이 1, 높이가 3 인 직각삼각형을 그리면

$|\cos\theta| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $|\sin\theta| = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

임을 알 수 있다. 이때, $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$ 에서는 $\cos\theta$, $\sin\theta$가 모두 음수임을 잊지 말자.

$\therefore \ \sin\theta + \cos\theta = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10} - \dfrac{\sqrt{10}}{10} = -\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

정답 ①

F·12

| 2022.6·고2 10번 |

교과서적 해법

그래프를 통해 주어진 함수의 주기는 $\dfrac{2}{3}\pi$임을 알 수 있다.

또한 $y = a\cos bx + c$를 통해 구한 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2}{3}\pi$ 에서 $b = 3$을 얻는다.

또한 그래프를 통해 주어진 함수의 최댓값과 최솟값은 각각 1, -3이고, $y = a\cos bx + c$를 통해 구한 최댓값과 최솟값은 각각 $a+c$, $-a+c$이다.($\because \ a > 0$) 따라서

$$a + c = 1, \ -a + c = -3 \ \rightarrow \ a = 2, \ c = -1$$

$\therefore \ a \times b \times c = 2 \times 3 \times (-1) = -6$

정답 ③

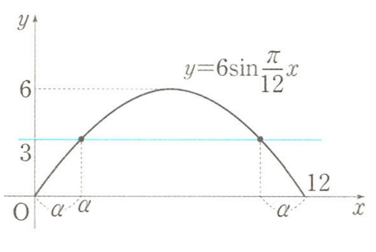
F·13

| 2022.5 8번 |

교과서적 해법

$\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ 이므로 $y = 6\sin\dfrac{\pi}{12}x$는 주기가 24 인 함수이다.

따라서 그래프를 그리면 다음과 같다.



그림에서 α만 찾으면 두 점 사이의 거리인 $12-2\alpha$를 구할 수 있다. $0 < x < 6$에서 α의 값을 찾자.

$$6\sin\frac{\pi}{12}x = 3 \ \Leftrightarrow \ \sin\frac{\pi}{12}x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ \frac{\pi}{12}x = \frac{\pi}{6} \ (0 < x < 6)$$
$$\Leftrightarrow \ x = 2 \ (0 < x < 6)$$

$\therefore \ 12 - 2\alpha = 12 - 2(2) = 8$

정답 ③

F·14

| 2023.9·고2 12번 |

교과서적 해법

그래프를 통해 주어진 함수의 주기는 $\pi - (-3\pi) = 4\pi$ 임을 알 수 있다. 또한 $y = a\tan(bx+c)$를 통해 구한 주기는 $\dfrac{\pi}{b}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{\pi}{b} = 4\pi$ 에서 $b = \dfrac{1}{4}$ 을 얻는다.

또한 그래프를 통해 두 점 $(\pi, 0)$, $(0, -3)$을 지남을 알 수 있으므로 대입하면

$(x, y) = (\pi, 0)$ 대입:

$$0 = a\tan\left(\frac{\pi}{4} + c\right) \ \rightarrow \ \frac{\pi}{4} + c = \pi$$
$$\rightarrow \ c = \frac{3\pi}{4} \ \ (\because \ 0 < c < \pi)$$

$(x, y) = (0, -3)$ 대입:

$$-3 = a\tan\frac{3\pi}{4} \ \rightarrow \ -a = -3 \ \rightarrow \ a = 3$$

$\therefore \ a \times b \times c = 3 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{9}{16}\pi$

정답 ①

F·15

| 2020·가 24번 변형 |

교과서적 해법

$t = \dfrac{3}{2}$ 이므로

$$\overline{OQ} = t = \frac{3}{2},$$
$$\overline{PQ} = \overline{PR} = \sin\frac{4}{9}\pi t = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

직각삼각형 OPQ 에서 $\tan\angle POQ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\angle POQ = \dfrac{\pi}{6}$ 이고 $\angle OPQ = \dfrac{\pi}{3}$ 이다. 따라서 부채꼴 PQR

의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}^2\cdot\angle QPR=\frac{1}{8}\pi$이다.

$\therefore\ p=8,\ q=1\ \rightarrow\ p+q=9$

정답 9

F·16

| 2023.6·고2 15번 |

교과서적 해법

점 A의 y좌표는 $f(0)=2a$이므로 점 A와 직선 BC 사이의 거리는 $2a-\frac{a}{2}=\frac{3}{2}a$이다. $\triangle$ABC는 정삼각형이므로 이 삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{3}{2}a\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}a$이다. 즉, $\overline{BC}=\sqrt{3}a$이고, 두 점 B, C는 y축에 대하여 대칭이므로 점 C의 x좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

이때, 점 C의 x좌표는 $\frac{3}{2}\pi$보다 작으므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}a<\frac{3}{2}\pi$에서 $a<\sqrt{3}\pi$를 얻는다. … Ⓐ

따라서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{a}{2}\right)$이고, 이를 $y=a\cos\frac{2}{3}x+a$에 대입하면 된다.

$$\therefore\ a\cos\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)+a=\frac{a}{2}\ \rightarrow\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)=-\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{2}{3}\pi\ (\because\ Ⓐ)$$
$$\rightarrow\ a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

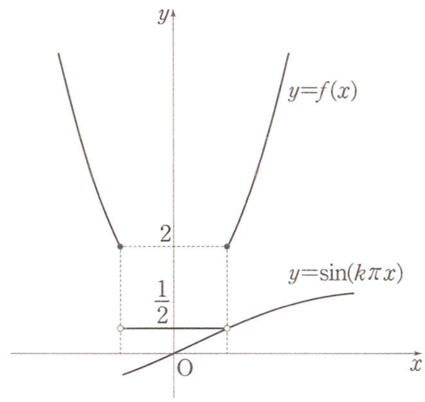
정답 ⑤

F·17

| 2007.6·가 21번 변형 |

교과서적 해법

$f(x)=\begin{cases}2x^2 & (|x|\geq 1)\\ \frac{1}{2} & (|x|<1)\end{cases}$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않기 위해선 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 그림과 같이 교점이 없어야 한다.



$60k$의 최댓값을 찾아야 하는데 k가 클수록 $\sin(k\pi x)$의 주기가 작아진다. 따라서 위의 그림과 같을 때 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않으면서 k가 최대가 된다. 즉 $y=g(x)$가 $0<k\pi<\frac{\pi}{2}$이고 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나면 된다.

$$\therefore\ g(1)=\sin(k\pi)=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ k=\frac{1}{6}\ \rightarrow\ 60k=10$$

정답 10

F·18

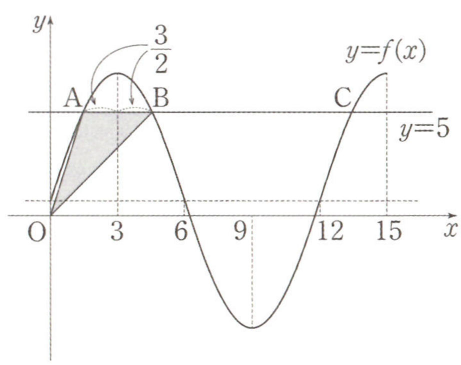
| 2023.10 11번 |

교과서적 해법

$\triangle$AOB에서 밑변을 AB로 두면 높이는 5이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot 5=\frac{15}{2}\ \rightarrow\ \overline{AB}=3$$

이고, $\overline{BC}=\overline{AB}+6=9$이다. 따라서 $\overline{AC}=12$이다. 즉, 함수 $y=a\sin\frac{\pi x}{b}+1$의 주기는 12이다. 이 식에서 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$이므로 $2b=12$에서 $b=6$임을 알 수 있다.



또한 그림과 같이 두 점 A, B의 중점의 x좌표는 $\frac{b}{2}=3$이므로 점 A의 x좌표는 $3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ 5\right)$이다. 이를 $y=a\sin\frac{\pi x}{b}+1$에 대입하면 a를 구할 수 있다.

$$5=a\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{3}{2}\right)+1 \quad\rightarrow\quad a=4\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2+6^2=68$$

정답 ①

F·19

[2019.9·가 14번]

교과서적 해법

$\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$와 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$는 코사인 내부의 각이 $\frac{\pi}{2}$만큼 차이나기 때문에 다음과 같이 각을 일치시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right) &= \cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\ &= \sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\ &= -\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1+k\end{aligned}$$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$로 치환하면

$$f(x)=-t^2-t+1+k=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$$
$$(-1\le t\le 1)$$

이 함수의 최댓값은 $t=-\frac{1}{2}$일 때, $k+\frac{5}{4}=3$이다. 즉, $k=\frac{7}{4}$이다. 최솟값은 $t=1$일 때, $-1-1+1+k=\frac{3}{4}$이다.

$$\therefore\ k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$$

정답 ③

F·20

해설 발상 정리

[2010.6·가 28번]

교과서적 해법

두 점 P, Q와 축 사이의 거리를 알려면 먼저 그 좌표를 알아야 한다.

삼각함수의 단위원 해석

발상 | → cos은 x좌표, sin은 y좌표, tan는 기울기!

예시 | ① $\cos x=\frac{1}{2}$ → x좌표가 $\frac{1}{2}$인 단위원 위의 점

② $\tan x=\sqrt{3}$ → 동경의 기울기가 $\sqrt{3}$인 단위원 위의 점

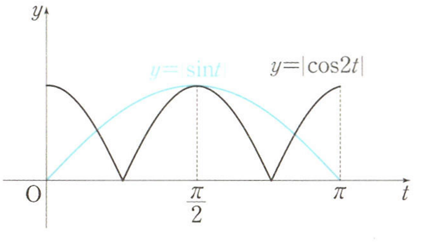
위의 발상은 삼각함수의 정의이기도 하므로 언제든 자연스럽게 활용할 수 있어야 한다.

점 A의 좌표를 $(1,\ 0)$이라 하면 호 AQ의 길이가 t이므로 부채꼴 QOA의 중심각을 구해 보면 호의 길이 공식인 $l=r\theta$에 의해 $\theta=t$. 따라서 동경 OQ가 나타내는 각은 t이고 동경 OP가 나타내는 각은 $2t$이므로 점 P의 좌표는 $(\cos 2t,\ \sin 2t)$이고 점 Q의 좌표는 $(\cos t,\ \sin t)$이다. 그런데 문제에서 축까지의 거리를 묻고 있기 때문에 좌표에 절댓값을 취해야 함을 생각할 수 있다.

(P에서 y축까지의 거리)
=(P의 x좌표를 항상 양수로)
$=|\cos 2t|$

(Q에서 x축까지의 거리)
=(Q의 y좌표를 항상 양수로)
$=|\sin t|$

이므로 방정식 $|\cos 2t|=|\sin t|$ $(0\le t\le\pi)$의 실근의 개수를 찾으면 된다. 이제 두 그래프를 그려서 실근의 개수를 찾아야하는데 $\cos 2t$의 그래프는 $\cos t$에서 t의 자리에 $2t$를 대입했으므로 t좌표가 $\frac{1}{2}$배된 그래프임을 생각해서 그래프를 그리면 된다. 두 그래프 $y=|\cos 2t|$, $y=|\sin t|$를 그려보면 다음과 같다. 교점은 3개[1)]이고 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 모든 t의 값의 합은 $\frac{3\pi}{2}$이다.



Part 1

CHECK 각주 **해설 본문의 각주**

1) $x=\frac{\pi}{2}$ 근방에서 두 그래프

$y=|\cos 2t|,\ y=|\sin t|$

의 교점이 오직 하나 존재하는지 엄밀하게 확인하고 싶다면 앞서 배운 확대·축소 논리를 이용하면 된다.

167p, 170p

정답 ⑤

F