# 7. Funksjonsdrøfting

Her skal du lære mer om derivering og anvende derivasjon til å studere funksjoner. Begrepene vi bruker her vil vi også bruke for andre funksjonstyper som du lærer om siden. Med andre ord er dette et sentralt kapittel!

## 7.1 Funksjonsdrøfting + 7.2 Krumning og vendepunkter

Ordliste i sammenheng med funksjonsdrøfting:

- Toppunkt – her er funksjonsverdi (*y*) større enn i nabopunktene
- Bunnpunkt – her er funksjonsverdi (*y*) lavere enn i nabopunktene
- Ekstremalpunkt, er et samleord som betyr punkter som er topp- eller bunnpunkt
- Monotoniegenskap – bestemme hvor *f* er voksende eller avtagende
- *f* er voksende når $f'(x) > 0$
- *f* er avtagende/minkende når $f'(x) < 0$

Den deriverte gir oss nyttig informasjon om grafen til en funksjon.

$f'(x)$ – stiger eller avtar grafen?

$f''(x)$ – krummer grafen opp eller ned?

Derfor en liten repetisjon:

Fra forrige kapittel vet vi at når: $f(x) = x^r$ *er* $f'(x) = rx^{r-1}$ **potensregel**

Og at for en konstant, k er $(k)' = 0$.

Vi <u>kan</u> bruke grenseverdisetningene til å vise at:

$$\big(u(x)+v(x)\big)' = u'(x)+v'(x)$$ Med ord: «vi deriverer ledd for ledd».

$$\big(k\cdot u(x)\big)' = k\cdot u'(x)$$

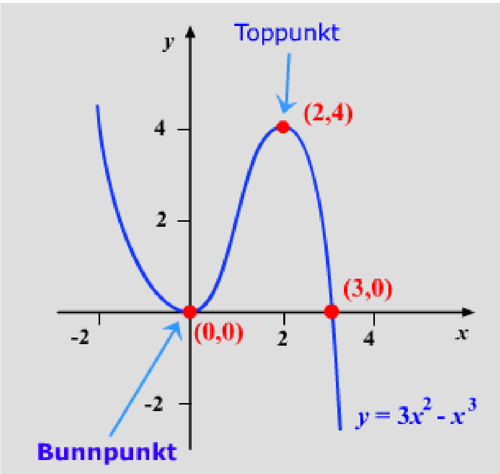
Ved hjelp av disse reglene kan vi derivere polynomer:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3\cdot 2x + 2x^0$$ Merk at den deriverte til en konstant er lik 0, linjen "stiger ikke"

$$= \underline{\underline{3x^2 + 6x + 2}}$$

**Funksjonsanalyse / drøfting** - Eksempel med $f(x) = 3x^2 - x^3$ $x \in \mathbb{R}$




Ved hjelp av kalkulatoren kan vi finne koordinatene til nullpunktene, topp- og bunnpunkt. Merk at oppgaver utover i kurset gjerne forventer at dere finner nullpunkt, og topp-/ bunnpunkt ved regning. I tillegg skal vi bestemme krumningen til grafen ved regning.

Normal starter vi med å regne ut koordinatene til punktene, for deretter å tegne grafen.

a) Bestemme nullpunkt ved regning.

$$f(x) = 0$$

$3x^2 - x^3 = 0$ Her faktoriserer vi for å finne nullpunktene,

$x^2(3 - x) = 0$ og bruker så produktregelen.

$x^2 = 0 \quad \vee \quad 3 - x = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 3 \qquad eller \quad (0,0)\ ,\ (3,0)$

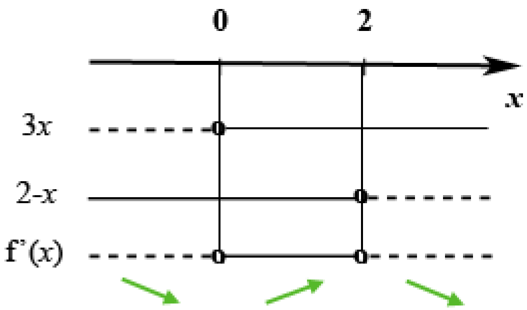
b) Bestem topp- og bunnpunkt til grafen – ved regning. Eller bestem ekstremalpunktene.

Her finner vi den deriverte og bestemmer topp- og bunnpunkt ved å tegne fortegnsskjema.

$$f(x) = 3x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

Tegner så fortegnskjema for den deriverte




Merk linjene under fortegnsskjemaet. Sammenlikn med hvor grafen stiger og avtar.
Vi ser at pilene danner en bunn for

$x = 0 \quad finner \qquad f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0 = 0 \quad Bunnpunkt\ (0,0)$

Pilene danner en topp for

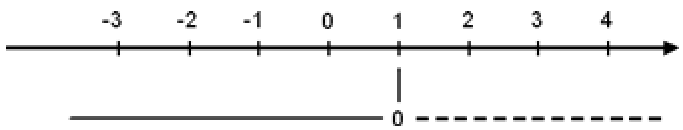
$x = 2 \quad finner \qquad f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2^3 = 12 - 8 = 4 \qquad Toppunkt\ (2,4)$

Krumning Deriverer en gang til

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$f''(x) = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

Tegner fortegnsskjema for $f''(x)$:




Merk at til venstre for $x$ = 1, er $f''(x)$ positiv og her krummer grafen opp.
Til høyre for $x$ = 1, er $f''(x)$ negativ og her krummer grafen ned.

d) Vendepunkt og vendetangent.

**Vendepunkt** punkter med $x$-verdier slik at $f''(x) = 0$ + at $f''(x)$ bytter fortegn for denne $x$-verdien, ser av fortegnsskjemaet at dette er tilfelle for $x$ = 1. Vil nå bestemme y-koordinaten til punktet:

$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1^3 = 3 - 1 = 2 \qquad Vendepunkt\ (1,2)$

**Vendetangent** = tangent i vendepunktet.

Vi skal bestemme tangenten til punktet (1,2)

$$a = f'(1) = 6 - 3 = 3$$

Likning til tangenten i punktet $(1, 2)$:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$y - 2 = 3(x - 1)$$
$$y = 3x - 3 + 2$$
$$\underline{\underline{y = 3x - 1}}$$

**Noen presiseringer:**

**Stasjonært punkt:**
punkt der $f'(x) = 0$, kan være topp eller bunnpunkt, men sjekk også at den deriverte bytter fortegn. Som regle ønsker vi også å bestemme type.

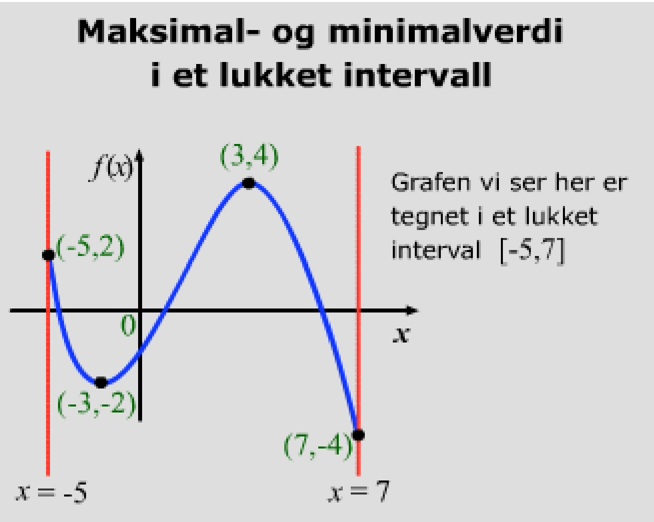
**Vendepunkt:** $f''(x) = 0$ + <u>bytter fortegn</u>

## 7.3 Optimering

**Største og minste funksjonsverdi,** når definisjonsmengden er et lukket intervall

Punkter der $f'(x) = 0$ og som gir topp- eller bunnpunkt gir ikke alltid største eller minste verdi. Dette skyldes at vi kan ha lokale toppunkt eller bunnpunkt. Skal vi være presise skiller vi mellom lokale og globale topp- eller bunnpunkt.

Eksempel:




Her ser vi at funksjonen har største verdi i toppunktet (3,4).

Mens minsteverdi oppnås i endepunktet (7,-4)

**Generelt**:
En funksjon som er definert på et lukket intervall, [a,b] oppnår største / minsteverdi enten når:

- $x$ slik at $f'(x) = 0$

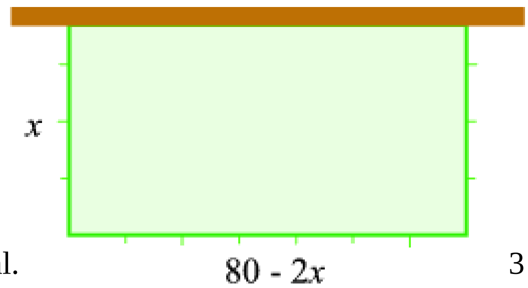
eller

- endepunktene ($x$ = a eller $x$ = b)

## 7.4 Optimering i geometri

Vi kan bruke derivasjon til å bestemme hvordan geometriske figurer bør se ut for å størst (minst) mulig areal eller volum.

**Eksempel 1.**
En bonde har 80 meter gjerde han ønsker å benytte til en innhegning. Gjerdet skal stå mot en eksisterende vegg, dvs. det er tre sider i



innhegningen (et rektangel) han skal ha gjerde. Vi skal finne maksimalt areal han kan gjerde inne med det gjerde han har.
Setter vi lengden til de korte sidene til x, har vi 80 – 2x igjen av gjerdet til den lange siden.

Da kan vi uttrykke arealet ved $A(x) = g \cdot h = x(80-2x) = 80x - 2x^2$

Ved å derivere kan vi bestemme maks / min

$$A(x) = 80x - 2x^2$$
$$A'(x) = 80 - 4x =$$
$$A'(x) = 4(20-x) = 0$$
$$20 - x = 0$$
$$\underline{x = 20}$$

Kan bruke 2. derivert test eller fortegnsskjema for å avgjøre om dette gir maks / min.

$$A'(x) = 80 - 4x =$$

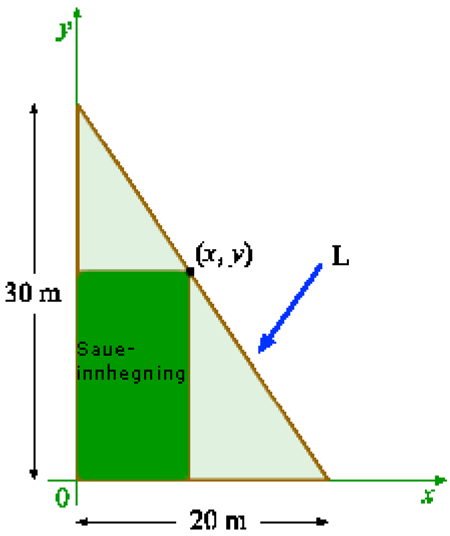
$A''(x) = -4$ dvs at grafen krummer ned for alle x -verdier.

$x = 20$ må derfor være et toppunkt

$$A_{maks} = A(20) = 80 \cdot 20 - 2 \cdot 20^2 = \underline{\underline{800\,\text{m}^2}}$$

$og\ b =$ 20m og $l = 80 - 40 = 40\text{m}$

**Eksempel 2**




En bonde ønske å bygge en rektangulær innhegning for sauer i et trekantet felt.

Finn maksimalt areal på innhegningen.

Vi kan gjerne sette grunnlinjen g = x, men trenger å finne et uttrykk for høyden, h.

Merk at hjørnet ligger på linjen L.

Prøv derfor å bestemme likningen for linjen.
Linjen går gjennom punktene (0,30) og (20,0).

$$a = \frac{dy}{dx} = \frac{0-30}{20-0} = \frac{-30}{20} = -\frac{3}{2}$$

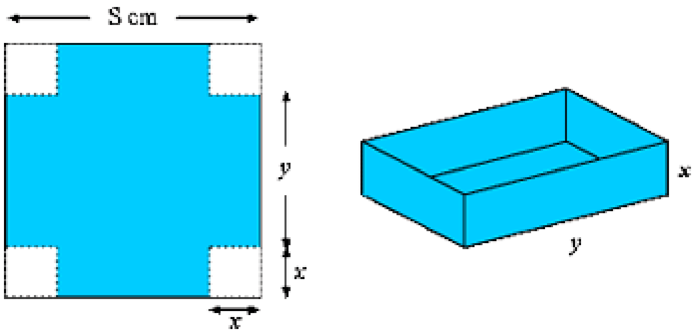
$$y = -\frac{3}{2}x + 30$$

Areal $A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 30\right) = -\frac{3}{2}x^2 + 30x$

Deriverer for å optimere (bestemme $x$ som gir største/minste verdi):

$$A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 30x$$
$$A'(x) = -3x + 30 = -3(x - 10)$$
$$A'(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow x = 10$$
$$A''(x) = -3 \qquad \Rightarrow \textit{toppunkt}$$
$$A_{maks} = A(10) = -\frac{3}{2}\cdot 10^2 + 30\cdot 10 = -150 + 300 = \underline{\underline{150\,\text{m}^2}}$$
$$\underline{b = 10\,\text{m}} \qquad h = -\frac{3}{2}\cdot 10 + 30 = -15 + 30 = \underline{15\,\text{m}}$$

**Eksempel 3**




En kvadratisk kartong med side s = 6 cm har små kvadrater med side x klippet ut fra hvert hjørne.

Kartongen blir deretter brettet slik at den danner en åpen eske som vist på figuren.

Finn den verdien av $x$ som gir esken maksimalt volum.

$$y = 6 - 2x$$
$$V(x) = y^2 \cdot x = (6 - 2x)^2\, x = (36 - 24x + 4x^2)\,x = 36x - 24x^2 + 4x^3$$
$$V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$$
$$V'(x) = 0$$
$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \qquad \text{mulige maks/min}$$

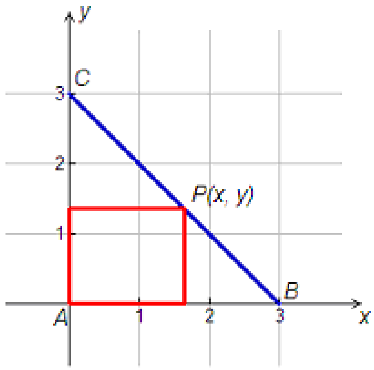
Sjekker $V''(x) = -48 + 24x$

$V''(1) = -48 + 24 = -24$ grafen krummer ned $\Rightarrow$ maks punkt

$V''(3) = -48 + 24\cdot 3 = 24$ grafen krummer opp $\Rightarrow$ min punkt

Boksen får størst volum når vi velger $x$ = 1 cm. Volumet er da V (1) = 16 cm$^3$.

**Ekstra oppgave:** (spør dersom du ikke får til å løse oppgaven)




En likebeint, rettvinklet trekant $ABC$ er plassert i et koordinatsystem. Hjørnene i trekanten har koordinatene $A(0,0)$, $B(3,0)$ og $C(0,3)$.

Et rektangel er innskrevet i trekanten slik at et hjørne ligger i origo og et annet hjørne $P(x, y)$ ligger på hypotenusen. Se figur.

a. Finn likningen til linjen gjennom $B$ og $C$ ved regning.

b. Finn et uttrykk $A(x)$, for arealet til det innskrevne rektangelet.

c. Bestem ved regning den største verdien arealet $A$ kan ha. Hva er sidene i rektangelet da?

### 7.5 Potens- og rot funksjoner

Noen uttrykk, ser ikke ut som potenser ved første øyekast, men etter omskriving kan vi anvende potensregelen likevel.

Eksempel 1

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

Eksempel 2

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'(x) = -1x^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

### 7.6 Sammensatte funksjoner

Starter først med å se litt på sammensatte funksjoner.

Starter vi med funksjonene $f$ og $g$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{x}$

Kan gi oss den sammensatte funksjon: $f \circ g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

eller $\qquad g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \quad$ Husk at $\sqrt{a} \geq 0$

Merk at vi har en ytre funksjon, og en indre funksjon – kjernen.

Kjerneregel for derivasjon av sammensatte funksjoner

$$f(x) = g(u(x))$$
$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

eller slik:

$f(x) = f(u)$ der $u$ er en funksjon av $x$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad Leibniz-\text{notasjon}$$

Regelen ser vrien ut, men forsøk å få tak i tankegangen med u i eksemplene:

Eksempler:

i)

$$f(x) = (x^2+1)^4 = u^4$$
$$f'(x) = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2+1)^3 \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{8x(x^2+1)^3}}$$

Den ytre funksjonen er en potensfunksjon, kjernen er polynomet.

Vi multipliserer ikke ut, svaret fordi vi ofte skal finne nullpunktene til den deriverte. Men at svar bør "ryddes".

ii)

$$f(x) = (2x-1)^3 = u^3$$
$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot u' = 3(2x-1)^2 \cdot 2$$
$$= \underline{\underline{6(2x-1)^2}}$$

iii)

$$f(x) = (x^2+3x)^4 = u^4$$
$$f'(x) = 4u^3 \cdot u' = 4(x^2+3x)^3 \cdot \left(2x+3\right)$$
$$= \underline{\underline{4\left(2x+3\right)(x^2+3x)^3}}$$

iv)

$$g(x) = \sqrt{x^2+2} = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2}\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}}$$

## 7.7 Omvendte funksjoner (ikke eksamensstoff)

## 7.8 Derivasjon av et produkt

(Ikke helt nødvendig ennå, men behovet kommer, øv derfor på å bruke regelen)

$$f(x) = u \cdot v \qquad f'(x) = u' \cdot v + uv'$$

Eksempler der vi bruker produktregel:

**a)**

$$g(x) = \overset{u}{x^2}\overbrace{\left(x^2+1\right)}^{v}$$
$$g'(x) = 2x\left(x^2+1\right) + x^2 \cdot 2x$$
$$= 2x^3 + 2x + 2x^3 = \underline{\underline{4x^3+2x}}$$

Her kan vi også multiplisere sammen, før vi deriverer. Sjekker at vi får samme resultat:

$g(x) = x^2\left(x^2+1\right) = x^4 + x^2 \qquad g'(x) = \underline{\underline{4x^3 + 2x}} \qquad \textit{OK}$

Her kunne vi velge regel fritt, men produktregel er nyttig siden.

**b)**

$f(x) = x\cdot\left(x^2+1\right)^3$ vil bruke produktregel + kjerneregel, når vi deriverer *v*

$f'(x) = 1\cdot\left(x^2+1\right)^3 + x\cdot 3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x$ vil sette felles faktor utenfor, for å forenkle uttrykket

$$= \left(x^2+1\right)^2\left[x^2+1+6x^2\right]$$

$$= \underline{\underline{\left(x^2+1\right)^2\left(7x^2+1\right)}}$$

**7.9 Derivasjon av kvotient** brøk

$$f(x) = \frac{u}{v} \qquad f'(x) = \frac{u'\cdot v - uv'}{v^2}$$

Eksempler:

a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(x-1)^2}}}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(1-x)-x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}}} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

**Eksempler deriver og velg regel selv.**

i) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1 \qquad \underline{\underline{f'(x) = 6x + 4}}$

ii)

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ *brøk eller omskriving* + *potensregel*

$$f'(x) = \frac{0-1\cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$$

iii) et vrient eksempel som løses med både kjerneregel og produktregel.

$$g(x)=\overbrace{\left(x^2+4\right)^2}^{u}\overbrace{\left(2x^3-1\right)}^{v}$$

$$\begin{aligned}
g'(x)&=2\left(x^2+4\right)\cdot 2x\cdot\left(2x^3-1\right)+\left(x^2+4\right)^2\cdot 6x^2\\
&=2x\left(x^2+4\right)\left[2\left(2x^3-1\right)+3x\left(x^2+4\right)\right]\\
&=2x\left(x^2+4\right)\left(4x^3-2+3x^3+12x\right)\\
&=\underline{\underline{2x\left(x^2+4\right)\left(7x^3+12x-2\right)}}
\end{aligned}$$

**Regelen** «Øvelse gjør mester!», gjelder også her.

I tillegg er det ok ¨merke seg at derivasjon, sammen med likninger er viktige verktøy for en ingeniør.