UNIVERSITETET I AGDER

FAKULTET FOR REALFAG OG TEKNOLOGI

PÅSKETENTAMEN 2017

MA-015

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}\cdot x^2}=\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}\cdot x^2}=x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2}=x^{\frac{8+6-3-24}{12}}=x^{-\frac{13}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{x^{13}}}=\underline{\underline{\frac{1}{x\cdot\sqrt[12]{x}}}}$$

b) Løs likningen ved regning:

$$\ln x^4-2\ln 2x=2\ln 5$$

$$\ln x^4-\ln(2x)^2=\ln 5^2$$

$$\ln\frac{x^4}{4x^2}=\ln 25 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^4}{4x^2}=25$$

$$x^2=100 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=10}}$$

c) Deriver uttrykkene

1)

$$f(x)=\left(4-5x^2\right)^3$$

$$\underline{\underline{f'(x)}}=3(4-5x^2)^2\cdot(-10x)=\underline{\underline{-30x(4-5x^2)^2}}$$

2)

$$g(x)=\ln(x^3-5x^2)$$

$$\underline{\underline{g'(x)}}=\frac{1}{x^3-5x^2}\cdot(3x^2-10x)=\underline{\underline{\frac{3x-10}{x^2-5x}}}$$

3)

$$h(x)=\frac{x^2+2x}{3x-1}$$

$$h'(x)=\frac{(2x+2)\cdot(3x-1)-\left(x^2+2x\right)\cdot 3}{(3x-1)^2}$$

$$\underline{\underline{h'(x)}}=\frac{6x^2+6x-2x-2-3x^2-6x}{(3x-1)^2}=\underline{\underline{\frac{3x^2-2x-2}{(3x-1)^2}}}$$

d) Løs integralene

$$\int xe^{-x^2}dx \qquad u=-x^2$$

1) $$=\int xe^u \frac{du}{-2x} = \qquad du=-2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C}}$$

$$\int \frac{x-5}{x^2+3x-10}dx = \int \frac{x-5}{(x-2)(x+5)}dx$$

$$\frac{x-5}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

2) $$\underline{x=2}: \; 2-5=A(2+5) \;\Rightarrow\; \underline{A=-\frac{3}{7}}$$

$$\underline{x=-5}: -5-5=B(-5-2) \;\Rightarrow\; \underline{B=\frac{10}{7}}$$

$$\int \frac{x-5}{x^2+3x-10}dx = -\frac{3}{7}\int\frac{1}{x-2}dx + \frac{10}{7}\int\frac{1}{x+5}dx$$

$$=\underline{\underline{-\frac{3}{7}\ln|x-2|+\frac{10}{7}\ln|x+5|+C}}$$

Oppgave 2

Gitt fire punkter $A(1,2,3),\ B(3,5,7),\ C(4,8,6)\ og\ D(2,6,10)$

a) Regn ut $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ og\ \angle BAC$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AB}=[2,\ 3,\ 4]}} \qquad \underline{\underline{\overrightarrow{AC}=[3,\ 6,\ 3]}}$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{6+18+12}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{54}} = 0,9097$$

$$\underline{\underline{\angle BAC = 24,5^\circ}}$$

b) Finn arealet av trekanten ABC

$$Arealet = A = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$

$$A=\tfrac{1}{2}\sqrt{29}\cdot\sqrt{54}\cdot\sin 24,5^\circ = 8,216$$

$$\underline{\underline{A\approx 8,2}}$$

c) Regn ut $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2,\ 3,\ 4] \times [3,\ 6,\ 3] = \left[\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \right]$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [-15,\ 6,\ 3]}}$$

d) Finn likningen for planet som trekanten *ABC* ligger i

Vi trenger en normalvektor og et punkt. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er normalvektor, og velger punkt $A(1,\ 2,\ 3)$

Likningen for planet blir:

$$-15x + 6y + 3z + (15 \cdot 1 - 6 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = 0$$

$$\underline{\underline{-15x + 6y + 3z - 6 = 0}}$$

e) Finn en parameterfremstilling for planet

Trenger nå to vektorer i planet som ikke er parallelle ($\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$) samt et punkt $A(1,\ 2,\ 3)$

En parameterfremstilling for planet blir da:

$$\underline{\underline{\alpha : \begin{cases} x = 1 + 2s + 3t \\ y = 2 + 3s + 6t \\ z = 3 + 4s + 3t \end{cases}}}$$

f) Punkt *D* er toppunktet i en pyramide som har trekant *ABC* som grunnflate.
Finn volumet av pyramiden

Volumet er gitt av

$$V = \tfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{6}[-15,\ 6,\ 3] \cdot [1,\ 4,\ 7]$$

$$\underline{\underline{V = \tfrac{1}{6} \cdot 30 = 5}}$$

Oppgave 3

Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4}{x^2}$

a) Finn definisjonsmengden og regn ut eventuelle nullpunkter til $f(x)$.

$$\underline{\underline{Definisjonsmengden\ er\ alle\ x\ unntatt\ x = 0}}$$

$$Nullpunkter\ når\ telleren = 0:$$

$$2x^3 - 4 = 0 \ \Rightarrow\ x^3 = 2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26}}$$

b) Regn ut eventuelle topp- og bunnpunkter til $f(x)$

$Vi\ deriverer\ og\ får:$

$$f'(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^4 - 4x^4 + 8x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8}{x^3}$$

$Topp - eller\ bunnpunkt\ når\ 2x^3 + 8 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{x = \sqrt[3]{-4} \approx -1,59}$

$For\ å\ avgjøre\ om\ dette\ er\ et\ topp - eller\ bunnpunkt$

$må\ vi\ derivere\ en\ gang\ til:$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8}{x^3} \ \Rightarrow\ f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^3 - (2x^3 + 8)\cdot 3x^2}{x^6}$$

$$\underline{f''(x) =} \frac{6x^5 - 6x^5 - 24x^2}{x^6} = \underline{-\frac{24}{x^4}}$$

$Innsatt\ x = -1,59\ gir\ at\ f''(x) < 0,\ derfor\ har\ vi\ et\ toppunkt$

$\underline{\underline{(-\sqrt[3]{4},\ f(-\sqrt[3]{4})) = (-1,59,\ -4,76)}}$

c) Finn asymptotene til funksjonen

$Vertikal\ asymptote\ når\ nevner = 0:$

$\underline{\underline{VA:\ x = 0}}$

$Skråasymptote\ fordi\ teller\ er\ en\ grad\ høyere\ enn\ nevner$

$$2x^3 - 4 : x^2 = 2x - \frac{4}{x^2}$$

$\underline{-(2x^3)}$

-4

$\underline{\underline{SA:\ y = 2x}}$

d) Finn likningen til tangenten i punktet (-1, f(-1))

$(-1,\ f(-1)) = (-1,\ -6)$

$$f'(-1) = \frac{2(-1)^3 + 8}{(-1)^3} = -6$$

$Likningen\ til\ tangenten\ blir\ da:$

$y + 6 = -6(x+1) = -6x - 6$

$\underline{\underline{y = -6x - 12}}$

e) Regn ut arealet som er avgrenset av x-aksen, grafen til $f(x)$ og linjene $x=2$ og $x=4$

$$Arealet = A = \int_2^4 \frac{2x^3-4}{x^2}dx = \int_2^4 (2x-4x^{-2})dx$$

$$A = \left[x^2+\frac{4}{x}\right]_2^4 = 4^2+\frac{4}{4}-\left(2^2+\frac{4}{2}\right) = 16+1-4-2$$

$$\underline{\underline{A=11}}$$

f) La dette arealet rotere 360 grader om x-aksen, og finn volumet vi da får

$$Volumet = V = \pi\int_2^4\left(\frac{2x^3-4}{x^2}\right)^2 dx = \pi\int_2^4\left(2x-4x^{-2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi\int_2^4\left(4x^2-\frac{16}{x}+16x^{-4}\right)dx = \pi\left[\frac{4}{3}x^3-16\ln|x|-\frac{16}{3x^3}\right]_2^4$$

$$V = \pi\left(\frac{4}{3}4^3-16\ln 4-\frac{16}{3\cdot 4^3}-\left(\frac{4}{3}2^3-16\ln 2-\frac{16}{3\cdot 2^3}\right)\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{256}{3}-32\ln 2-\frac{1}{12}-\frac{32}{3}+16\ln 2+\frac{2}{3}=\frac{1024-1-128+8}{12}-16\ln 2\right)$$

$$\underline{\underline{V = \pi\left(\frac{903}{12}-16\ln 2\right)\approx 201,6}}$$

Oppgave 4

Løs likningene

a)

$$\sqrt{x+5}-x=3 \;\Rightarrow\; \sqrt{x+5}=x+3$$

$$x+5=x^2+6x+9 \;\Rightarrow\; x^2+5x+4=0$$

$$\underline{x=\begin{cases}-1\\-4\end{cases}}$$

$$\underline{x=-1}:\; V.S.=\sqrt{-1+5}+1=2+1=3=H.S.$$

$$\underline{x=-4}:\; V.S.=\sqrt{-4+5}+4=1+4=5\neq H.S.$$

$$\underline{\underline{Svar: x=-1}}$$

b)

$$4\sin^2 x-2\cos x=2 \qquad x\in[0°,\ 360°]$$

$$4\left(1-\cos^2 x\right)-2\cos x-2=0$$

$$-4\cos^2 x-2\cos x+2=0$$

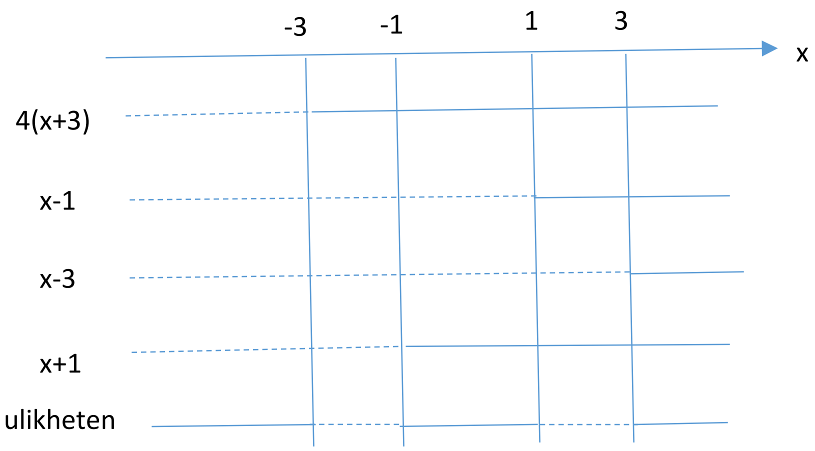
$$\cos x=\begin{cases}0,5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x=\begin{cases}60°\\300\end{cases}}}\\[2ex] -1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x=180°}}\end{cases}$$

Løs ulikheten ved hjelp av fortegnslinje

$$\frac{16x}{x^2-2x-3} > -4 \;\Rightarrow\; \frac{16x}{(x-3)(x+1)} + \frac{4\left(x^2-2x-3\right)}{(x-3)(x+1)} > 0$$

c) $$\frac{16x+4\left(x^2-2x-3\right)}{(x-3)(x+1)} = \frac{4x^2+8x-12}{(x-3)(x+1)} > 0$$

$$\frac{4(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} > 0$$



Svar: $\underline{\underline{x < -3 \text{ og } -1 < x < 1 \text{ og } x > 3}}$

Løs likningssettet

1) $x^2 - 4y + 2 = 0$

2) $4y - 2x = 10 \;\Rightarrow\; (y = \frac{5+x}{2})$

d) $1) + 2)$ $gir: x^2 - 4y + 2 + 4y - 2x = 0 + 10$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = 4 \; gir \; y = \frac{9}{2}}} \;\; og \;\; \underline{\underline{x = -2 \; gir \; y = \frac{3}{2}}}$$

Gitt en aritmetisk rekke med $a_1 = 3$ og $d = 5$

e) Finn a_{10} og S_{10}

$$a_{10} = a_1 + (10-1)\cdot d = 3 + 9\cdot 5$$

$$\underline{\underline{a_{10} = 48}}$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 = \frac{3+48}{2}\cdot 10$$

$$\underline{\underline{S_{10} = 255}}$$

I en geometrisk rekke er $a_7 = 729$ og $k = 3$

f) Finn a_1 og summen S_7 av de 7 første leddene

$$a_7 = a_1 \cdot k^6 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{a_7}{k^6} = \frac{729}{3^6}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 1}}$$

$$S_7 = a_1 \frac{k^7 - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{2187 - 1}{3 - 1} = \frac{2186}{2}$$

$$\underline{\underline{S_7 = 1093}}$$