**Løsningsforslag matematikk tretermin våren 2014**

## Oppgave 1

Vi setter inn $x=4$ og krever at $\lim_{x\to 4_-} f(x)=\lim_{x\to 4_+} f(x)=f(4)$. Det gir likningene:

$2\cdot a\cdot 4=4+b=4^2-6=10$, som gir $\underline{a=1{,}25}$ og $\underline{b=6}$.

## Oppgave 2

1. $y(x)=\ln\sqrt{5x^2-4}=\ln\left(5x^2-4\right)^{1/2}=(1/2)\ln\left(5x^2-4\right)$. $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{10x}{5x^2-4}=\underline{\dfrac{5x}{5x^2-4}}.$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\underline{2^{x+4}\ln 2}.$

3. $\dfrac{dy}{dx}=e^x\sin s+e^x cox=\underline{e^x\left(\sin x+cox\right)}.$

## Oppgave 3

Likningen for linjen er $y=12-x$. Vi skal finne maksimum av funksjonen

$z=x^2y=x^2(12-x)=12x^2-x^3$. Da må vi derivere og sette den deriverte lik null.

$z'=24x-3x^2=3x(8-x)=0$, som gir $\underline{x=8\ ,\quad y=4}.$

Punktet på linjen som gir størst verdi for $z$ er $\underline{(8,\ 4)}$.

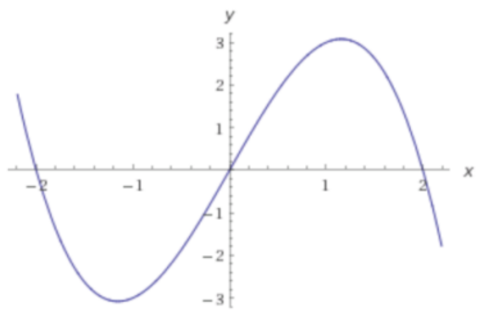
Maksimalverdien til $z$ er $\underline{z_{maks}=256}.$

## Oppgave 4

$$I=\left[2x^3-\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{1}{x^2}\right]_1^8=1024-12-\frac{1}{64}-2+\frac{3}{4}+1=\underline{\frac{64751}{64}\approx 1012.}$$

## Oppgave 5

Grafen til funksjonen $y=4x-x^3$:




Kurvens skjæringspunkter med x-aksen er gitt ved $y=0$,

dvs. $4x-x^3=x\left(4-x^2\right)=0$. Det gir skjæringspunktene:

$\underline{x_1 = -2 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 2}$ .

Arealet på høyre side av y-aksen mellom kurven og x-aksen er:

$$A = \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 8 - 4 = \underline{4} \ .$$

**Oppgave 6**

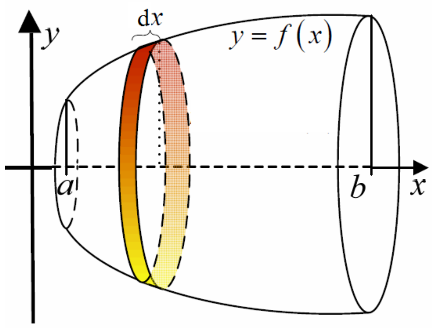
$I = \int x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$ . Vi innfører $u = x^2 - 1$ og får $du = 2x\, dx$ . Dermed tar integralet formen

$$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{1/2} du = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}}u^{1+1/2} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \underline{\frac{1}{3}\left(x^2 - 1\right)^{3/2} + C}.$$

**Oppgave 7**

a) Når vi skal beregne volumet av et rotasjonslegeme som dannes ved å rotere en flate om *x*-aksen, tenker vi oss at volumet er satt sammen av sirkulære skiver med tykkelse *dx* som vist på figuren. Skivene har areal $A = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ og volum $dV = A\, dx = \pi f^2(x)\, dx$ . Volumet til omdreiningslegemet er lik summen av volumene til alle skivene som er lik integralet

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx \ .$$




b) Grafen til $y = 1 - x^2$ skjærer x-aksen i $x = -1$ og $x = 1$. Den er symmetrisk om *y*-aksen, så det er like flater på hver side av *y*-aksen. Derfor kan vi regne ut volumet av omdreiningslegemet ved å se på den delen som er til høyre for *y*-aksen og multiplisere med to. Det gir

$$V = 2\pi\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^2 dx = 2\pi\int_0^1 \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = 2\pi\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \underline{\frac{16}{15}\pi} \ .$$

**Oppgave 8**

**a)** Lengden av vektoren er $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ .

Følgelig er enhetsvektoren med samme retning som $\vec{v}$ : $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \underline{\frac{5}{13}\vec{e}_x - \frac{12}{13}\vec{e}_y}$ .

b) For å finne vinkelen *v* mellom vektorene bruker vi formelen for skalarproduktet av to vektorer.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos v$ , dvs. $\cos v = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$ .

Koordinatformelen for skalarproduktet gir: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 2\cdot 3 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 = 1.$

Størrelsene av vektorene er: $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{2^2 + 1^1 + 1^2} = \sqrt{6}$ , $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ .

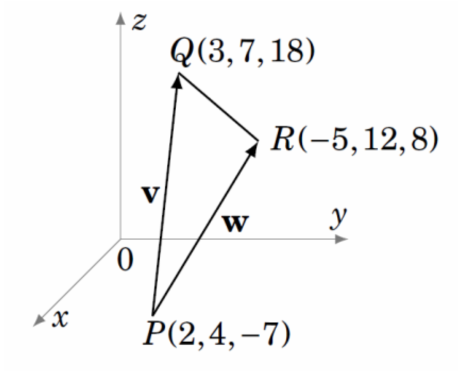
Dermed fås: $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{6}\sqrt{26}} \approx 0{,}08$ som gir $\underline{v \approx 85^0 \approx 1{,}5 \text{ radianer}}$ .

**Oppgave 9**

Vi skal finne arealet av trekanten vist på figuren.

To av sidekantene er beskrevet ved vektorene

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = [1,\ 3,\ 25]$ og $\vec{w} = \overrightarrow{PR} = [-7,\ 8,\ 15]$.




Arealet til trekanten er

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{v}\times\vec{w}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 3 & 25 \\ -7 & 8 & 15 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 3 & 25 \\ 8 & 15 \end{vmatrix} \vec{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 25 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} \vec{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} \vec{e}_z \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| -155\vec{e}_x - 190\vec{e}_y + 29\vec{e}_z \right| = \frac{1}{2}\sqrt{155^2 + 190^2 + 29^2} = \underline{123{,}5}.$$

**Oppgave 10**

Volumet av parallellepipedet er

$$V = \left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right| = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = \left| 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left|2(-8) - 1(0) + 3(-4)\right| = |-28| = \underline{28.}$$