Repetisjon Integrasjon

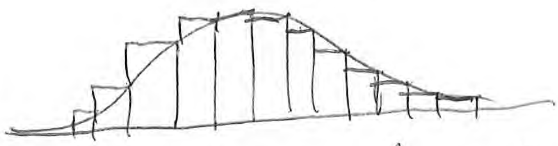
Antiderivasjon:

Finn en $F(x)$ slik at

$$F'(x) = f(x).$$

Har en $f(x)$ oppgitt.

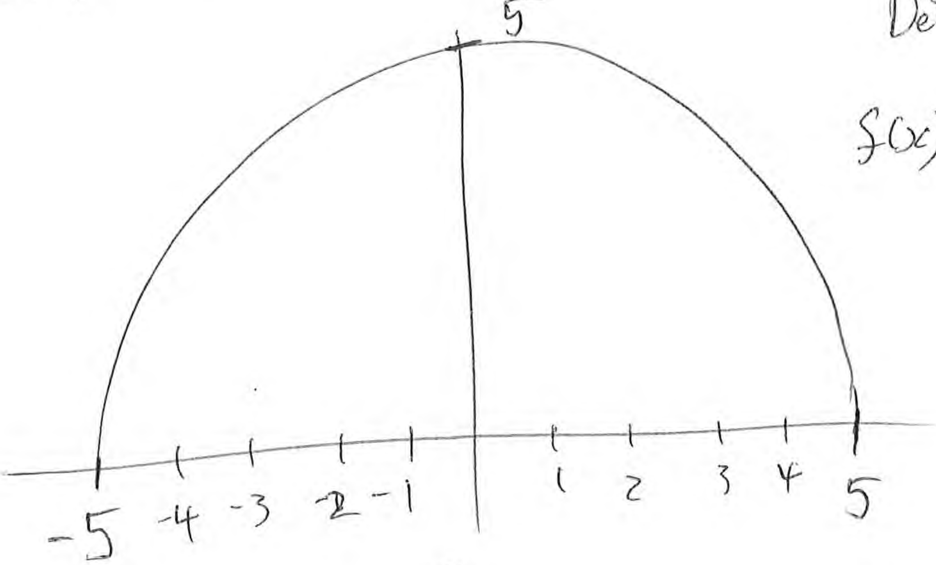
Areal under graf



Regn ut arealet under grafen ved å dele opp i små firkanter.

Riemann sum:

Se på halvsirkel med radius 5.

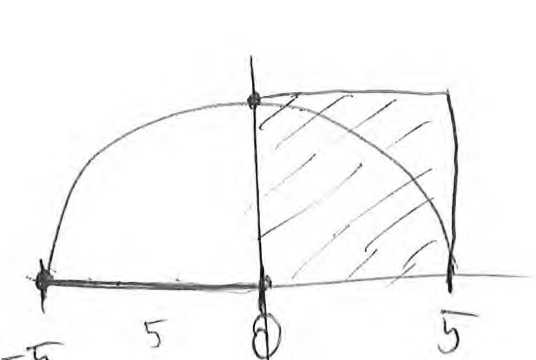


Dette er grafen

$$f(x) = y = \sqrt{25 - x^2}$$

Riemannsummen $\sum_{-5}^{5} f(x)\Delta x$

Eks 1: $\Delta x = 5$.



$$f(x_1)\cdot 5 + f(x_2)\cdot 5$$

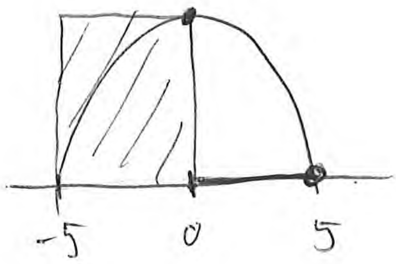
Tre „strategier" for å velge x_i.

Venstresumme:

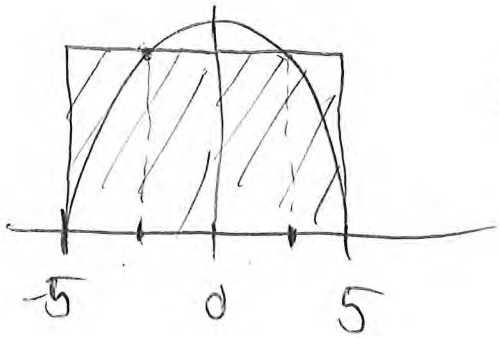
$$0\cdot 5 + 5\cdot 5 = 25$$

Høyresum

$$5 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 25$$



"Midtmetoden"



$$f(-2.5) = \sqrt{25-(-2.5)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.33$$

$$f(2.5) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.33.$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 25\sqrt{3} \approx 43.30.$$

Vet at det ekte svaret skal bli:

Areal av sirkel: $\pi \cdot r^2$

Areal av halvsirkel: $\frac{\pi r^2}{2}$

Ekte areal: $\frac{5^2 \cdot \pi}{2} = \frac{25 \cdot \pi}{2} = \underline{\underline{12.5\pi}} \approx 39.26990817$

Geogebra får svar på 39.269866 med 10 000 firkanter.

I stedet for å faktisk summere uendelig mange firkanter, har vi fundamentalsetningen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

hvor $F'(x) = f(x)$.

I vårt tilfelle, $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$, må finne funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = \sqrt{25-x^2}$.

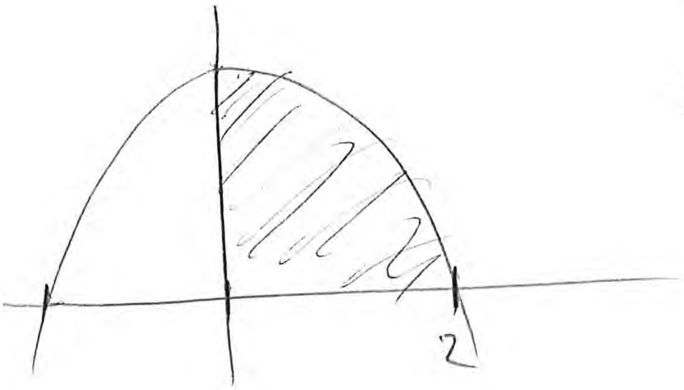
Situasjoner:

Finn areal avgrenset av ...

Eks: Avgrenset av x-aksen, y-aksen og grafen til $f(x) = 4 - x^2$, positiv side av y-aksen.

$$\int_0^2 4 - x^2 \, dx$$

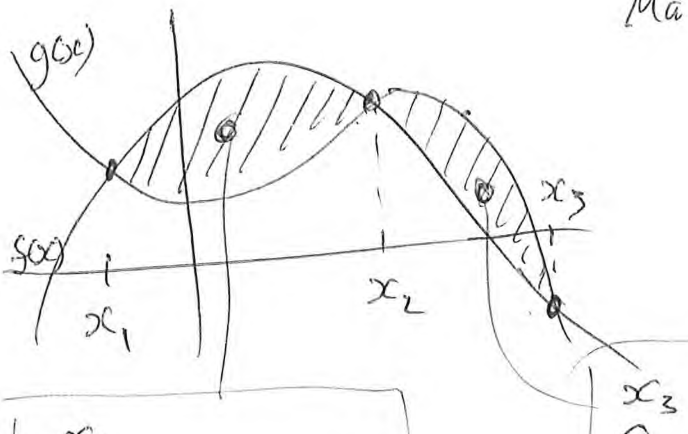
$$4 - x^2 = 0$$
$$4 = x^2$$
$$\pm 2 = x$$



Eks: Avgrenset av x-aksen, y-aksen og grafen til $g(x) = x^3 - 8$.

Finn areal mellom $f(x)$ og $g(x)$.
avgrenset av grafen til $f(x)$ og $g(x)$.

Må løse $f(x) = g(x)$.



$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x) \, dx}$$

$$\boxed{\int_{x_2}^{x_3} g(x) - f(x) \, dx}$$

Har for øyeblikket kan **tre** formler til å finne antideriverte.

① $$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

② $$\int k\cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$ k er en konstant.

③ $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$ $n \neq -1$

Spesialeks:
$$\boxed{\begin{aligned}\int 0\,dx &= C\\ \int k\,dx &= kx + C\end{aligned}}$$

Eks: Vi kan regne $\int \sqrt{x}\,dx$ og $\int 25-x^2\,dx$,

men **ikke** $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$

Integrasjonsoppgave:

$$\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \qquad \int x(x^2-1)^{-2}\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^4-2x^2+1}\,dx$$

$y = x^2$

$$\int \frac{\sqrt{y}}{(y-1)^2}\,dx$$

Har $\frac{x}{(x^2-1)^2}$, har noe som „likner" på $\frac{1}{x^2}$

Dvs har noe opphøyd i 2 under brøkstreken.

Vet at $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$ $\qquad \int x^{-2} = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = \frac{1}{-1}x^{-1}$

"<u>Gjetter</u> på at kanskje $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \approx -\frac{1}{(x^2-1)} + C$

~~Deriverer dette:~~

$$\cancel{\left(-\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)' = \left(-(x^2-1)^{-1}\right)' = 2x\cdot(x^2-1)^{-2}\cdot}$$

$$\left(-\frac{1}{(x^2-1)}\right)' = \left(-(x^2-1)^{-1}\right)' = (x^2-1)^{-2}\cdot 2x = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

Vi skulle finne antiderivert til $\frac{x}{(x^2-1)^2}$

Ser at $\int \frac{x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-1} + C$

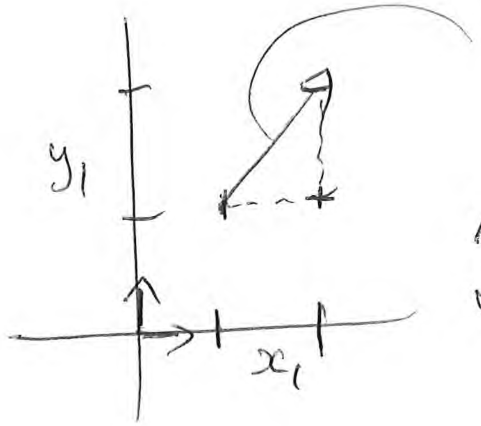
<u>Vektorer recap:</u>

<u>Idéen:</u> En vektor har en retning og en lengde.
En vektor <u>er</u> en pil.

Vi kan: • Kombinere (plusse sammen) vektorer:

• Skalere (gange med tall/skalar) vektoren

Koordinatrepresentasjon:



$[x_1, y_1]$

Merk at dette gir oss to spesielle vektorer, $\vec{e}_x = [1, 0]$

$\vec{e}_y = [0, 1]$,

Så da at $[x_1, y_1] = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y$

Relevant: Enkle regler for de tingene vi kan gjøre med vektorer:

- $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$
- $k[x_1, y_1] = [kx_1, ky_1]$.

$|[x_1, y_1]| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

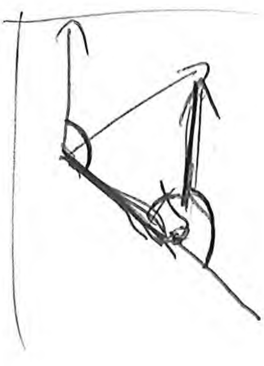
Lengde til vektor på koordinatform.

Skalarprodukt/Prikkprodukt

Definert som: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

| $\vec{u}$ projisert ned i $\vec{v}$ ganget $\vec{v}$.
| $\vec{v}$ projisert ned i $\vec{u}$ ganget $\vec{u}$

Disse lengdar ganget sammen.



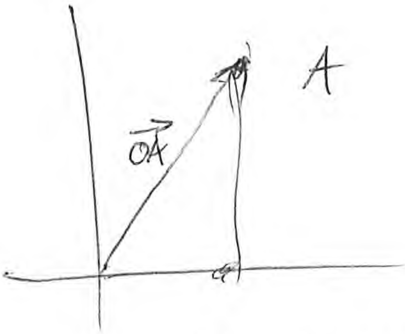
Enkelt å regne på koordinatform:

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = \underline{x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

Vektoren mellom punkt:

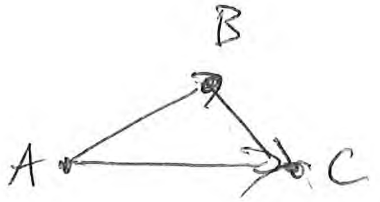
Punkt A har samme koordinater som vektor $\vec{OA}$.

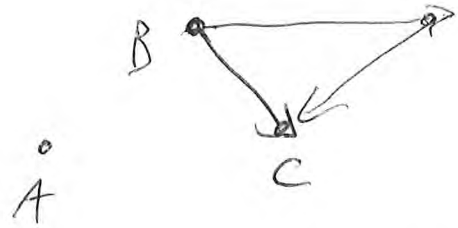
Vi kan bruke dette til å finne andre vektorer:



Husk: $\vec{u}+\vec{v}$ betyr "start i $\vec{u}$, følg $\vec{u}$, følg så $\vec{v}$, slutt i $\vec{v}$"

Betyr: $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC} \iff \vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$



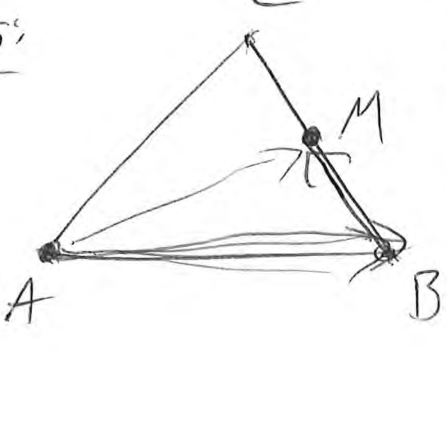


Ser nå at $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

Litt juksenotasjon.

$\Rightarrow \vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$ " $= B-A$ "

Eks:



Finn koord til punkt midt mellom B og C.

Kan A og $\vec{AB}$, og $\vec{BC}$.

Vil finne $\vec{AM}=\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$

$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{AM}$

$=\vec{OA}+\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$