Skalarprodukt - Prikkprodukt

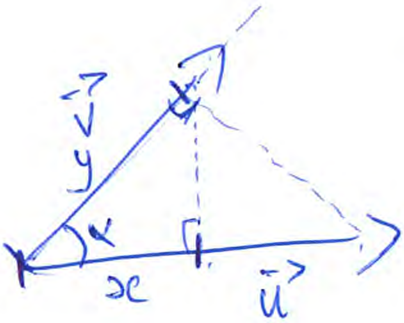
Gitt to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$

Definerer

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha).$$

Svaret blir da et tall, en skalar.

Hva representerer dette tallet.



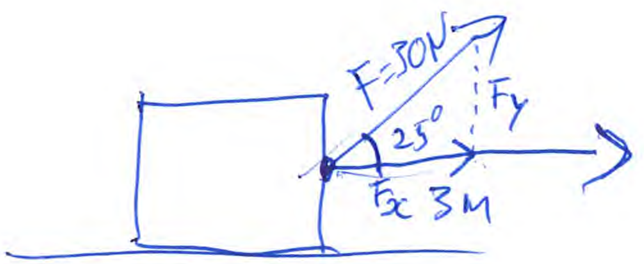
$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{v}|} \qquad x = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{|\vec{u}|} \qquad y = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = (lengden til $\vec{v}$ projisert ned på $\vec{u}$) · (lengden til $\vec{u}$)
= (lengden til $\vec{u}$ projisert ned på $\vec{v}$) · (lengden til $\vec{v}$)

Eks: Arbeid utført av en kraft.

Arbeid er kraft ganget strekning.



Friksjonsfritt underlag

$$W = F_x \cdot S$$
$$= F \cdot \cos 25^\circ \cdot S$$
$$= F \cdot s \cdot \cos 25^\circ$$
$$= \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F \cdot \cos 25^\circ$$

For vektorer: Arbeid er fremdeles kraft ganget strekning, men nå kraftvektor prikket med strekningsvektor.

Vi bruker skalarprodukt.

Vi skal senere lære om kryssprodukt/vektorprodukt,

$\vec{u} \times \vec{v}$

Tre spørsmål: Vi har to vektorer, $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og får vite:

i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$

ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Hva vet vi om $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i disse tilfellene?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$.

Husk:

$\cos(180^\circ - v^\circ) = -\cos(v)$

Så at: Hvis $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ må $\alpha \in [0, 90^\circ)$

Hvis $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$ må $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ]$

Hvis $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ må $\alpha = 90^\circ$

eller $|\vec{u}| = 0$ eller $|\vec{v}| = 0$.

Vet vi om vi har ca 

Merk: Om vi vet $|\vec{u}|$ og $|\vec{v}|$ og $\vec{u}\cdot\vec{v}$, kan vi finne α.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

For at dette skal være nyttig trenger vi en alternativ måte å regne prikkproduktet på.

Vi har følgende regneregler for prikkproduktet:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
3. $(a\cdot\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = a\cdot b\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$

<u>Idé</u>: Vil gå over til koordinater.

Vet at vi kan skrive $\vec{u} = [x_u, y_u]$

$$= x_u \vec{e_x} + y_u \cdot \vec{e_y}$$

Generelt:
$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Merk at:

- $\vec{e_x} \cdot \vec{e_x} = |\vec{e_x}| \cdot |\vec{e_x}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{e_x}|^2 = \underline{1}$
- $\vec{e_y} \cdot \vec{e_y} = \underline{1}$
- $\vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = |\vec{e_x}| \cdot |\vec{e_y}| \cdot \cos 90^\circ = 0$

Faktiske tall: $\vec{u} = [2, 3]$ $\quad \vec{v} = [-1, 4]$

vil finne $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} = 2 \cdot \vec{e_x} + 3\vec{e_y} \qquad \vec{v} = -1 \cdot \vec{e_x} + 4\vec{e_y}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}) \cdot (-\vec{e_x} + 4\vec{e_y})$$

$$= (2\vec{e_x}) \cdot (-1\vec{e_x}) + (2\vec{e_x}) \cdot (4\vec{e_y})$$

$$+ (3\vec{e_y}) \cdot (-1\vec{e_x}) + (3\vec{e_y}) \cdot (4\vec{e_y})$$

$$= \overset{2\cdot(-1)}{\cancel{2}} (\vec{e_x} \cdot \vec{e_x}) + 2 \cdot 4 (\vec{e_x} \cdot \vec{e_y}) + 3 \cdot (-1) \vec{e_y} \cdot \vec{e_x}$$

$$+ 3 \cdot 4\, \vec{e_y} \cdot \vec{e_y} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = \underline{10}$$

Gjør det samme for to vilkårlige vektorer

$$\vec{u} = [x_u, y_u] = x_u\vec{e_x} + y_u\vec{e_y}$$

$$\vec{v} = [x_v, y_v] = x_v\vec{e_x} + y_v\vec{e_y}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_u\vec{e_x} + y_u\vec{e_y})\cdot(x_v\vec{e_x} + y_v\vec{e_y})$$

$$= (x_u\vec{e_x})\cdot(x_v\vec{e_x}) + (x_u\vec{e_x})\cdot(y_v\vec{e_y}) + (y_u\vec{e_y})\cdot(x_v\vec{e_x}) + (y_u\vec{e_y})\cdot(y_v\vec{e_y})$$

$$= x_u x_v(\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}) + x_u y_v(\vec{e_x}\cdot\vec{e_y}) + y_u x_v(\vec{e_y}\cdot\vec{e_x}) + y_u y_v(\vec{e_y}\cdot\vec{e_y})$$

$$= \underline{x_u x_v + y_u y_v}$$

Formel:

$$[x_1, y_1]\cdot[x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Eksempler:

a) Hva er prikkproduktet til $\vec{u} \cdot \vec{v}$ når

$\vec{u} = [3, 4]$ og $\vec{v} = [-2, 2]$?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2$$
$$= -6 + 8 = \underline{\underline{2}}$$

b) Finn lengdene til $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

c) Hva er vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$2 = 5 \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = 81.87^\circ$$

$2 = 5 \cdot \sqrt{8} \cdot y \quad \Big| : 5$

$\frac{2}{5} = \frac{\cancel{5}\sqrt{8}y}{\cancel{5}} \qquad \frac{2}{5} = \sqrt{8}y \quad \Big| : \sqrt{8}$

$\frac{2/5}{\sqrt{8}} = \frac{\cancel{\sqrt{8}}y}{\cancel{\sqrt{8}}} \qquad \frac{2}{5\sqrt{8}} = y$

$2 = 5\sqrt{8}y \quad \Big| : (5\sqrt{8})$

$\frac{2}{5\sqrt{8}} = \frac{\cancel{5\sqrt{8}}y}{\cancel{5\sqrt{8}}} \qquad \frac{2}{5\sqrt{8}} = y$

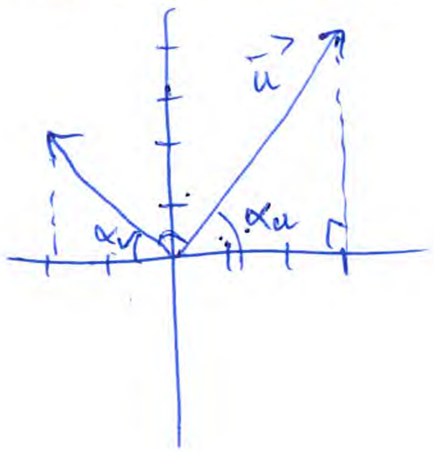
$2 = 5\sqrt{8}y + 1 \quad \Big| : 5\sqrt{8}$

$\frac{2}{5\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{8}y + 1}{5\sqrt{8}} = \frac{\cancel{5\sqrt{8}}y}{\cancel{5\sqrt{8}}} + \frac{1}{5\sqrt{8}}$

$\frac{2}{5\sqrt{8}} = y + \frac{1}{5\sqrt{8}} \quad \Big| - \frac{1}{5\sqrt{8}}$

$\frac{2}{5\sqrt{8}} - \frac{1}{5\sqrt{8}} = y + \cancel{\frac{1}{5\sqrt{8}}} - \cancel{\frac{1}{5\sqrt{8}}}$

Vi kunne funnet vinkelen mellom vektorene uten prikkprodukt.
Men ville vært mer jobb.



$$\tan \alpha_u = \frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha_v = \frac{2}{2} = 1$$

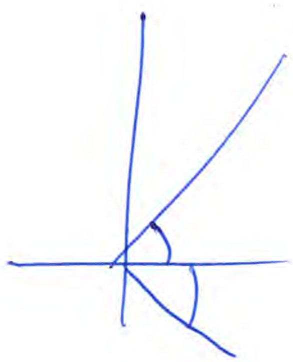
$$\alpha_u = 53.13^\circ$$

$$\alpha_v = 45^\circ$$

$$180^\circ = \alpha_u + \alpha_v + \alpha$$

$$\alpha = 180^\circ - 45^\circ - 53.13^\circ$$
$$= 81.87^\circ$$

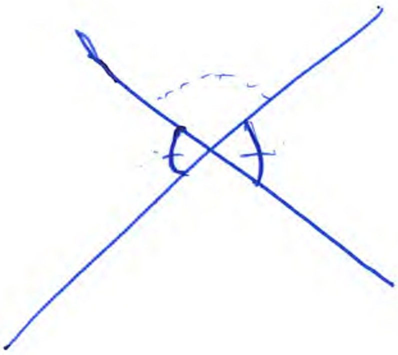
Kunne sett ut som mye vart



Må da vite at vi har tegnet riktig figur for å få rett svar.

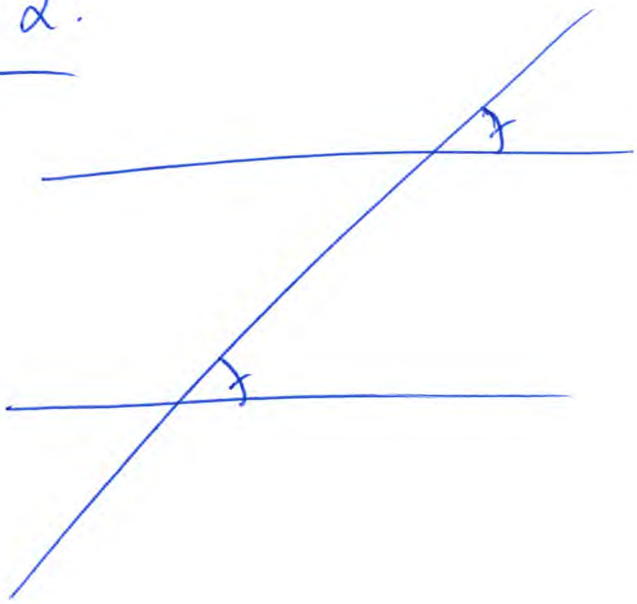
Like vinkler:

Situasjon 1:



Disse er den samme vinkelen.

Situasjon 2:



Parallelle linjer

Disse vinklene er den samme vinkelen.

Eksempel fra fysikk: