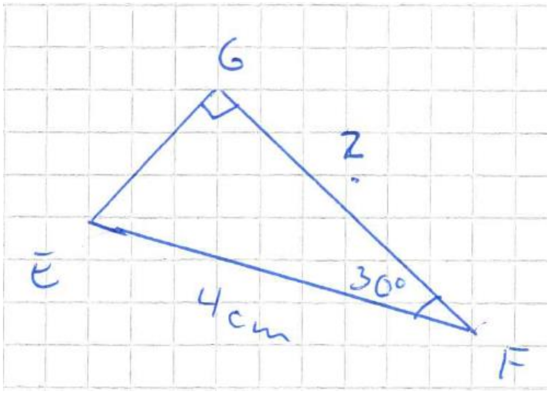
2. innlevering Geometri og vektorregning.

Oppgave 1

I $\triangle EFG$ er vinkel G rett, $\angle F = 30°$ og siden $EF = 4\,\text{cm}$. Bestem lengden til siden FG.

Starter med å tegne en figur.



Ser at vi kjenner hypotenus, og skal bestemme hosliggende katet til vinkel F.

$\cos F = \dfrac{FG}{EF}$ som gir

$FG = EF \cos F = 4\,\text{cm} \cdot \cos 30° = 2\sqrt{3}\,\text{cm} \approx \underline{\underline{3{,}46\,\text{cm}}}$

Oppgave 2

I $\triangle ABC$ er siden $AB = 6\,\text{m}$ og sidene $AC = BC = 4\,\text{m}$. Her er det lurt å tegne figur.

a) Bestem $\angle A$ ved regning.

Vi kjenner alle sidene og kan bruke cosinussetningen til å finne vinkel A.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 16}{48} = 0{,}75$$

$$\angle A = \cos^{-1}(0{,}75) = \underline{\underline{41{,}41°}}$$

b) Bestem også de to siste vinklene i trekant ABC.

$\angle A = \underline{\underline{41{,}41°}}$ Bruker så at trekanten er likebeint.

$\angle B = \angle A = \underline{\underline{41{,}41°}}$ Bruker vinkelsummen til en trekant til å bestemme siste vinkel.

$\angle C = 180° - 2 \cdot 41{,}41° = \underline{\underline{97{,}18°}}$

Oppgave 3

I en trekant ABC er siden AB = 6,0 cm og siden AC = 8,0 cm. Vinkel A = 55°.

a) Regn ut siden BC. Bruker cosinussetningen.

Regner uten benevning, men passer på at alle lengder er i cm

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$
$$= 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 0{,}574 = 44{,}94$$
$$\underline{\underline{BC = 6{,}7 \text{ cm}}}$$

b) Finn arealet av trekanten. Her det enkleste å bruke arealsetningen for trekanter

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot \sin 55° = \underline{\underline{19{,}7 \text{ cm}^2}}$$

c) Regn også ut de to ukjente vinklene.

Finner først vinkel C ved hjelp av sinussetningen:

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a} \qquad \Leftrightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{6{,}0\,\text{cm} \cdot \sin 55°}{6{,}7\,\text{cm}} \approx 0{,}7336...$$

$\angle C = 47{,}2°$ eller $\angle C = 180 - 47{,}2° = 132{,}8°$

Ser av figur at vinkel C er spiss, slik at

$$\underline{\underline{\angle C = 47{,}2°}}$$

og dermed blir $\angle B = 180° - 47{,}2° - 55° = \underline{\underline{77{,}8°}}$

Oppgave 4

a)

$$4\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) - \frac{2}{3}\left(6\vec{b} - 3\vec{a}\right) =$$
$$= 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{b} + 2\vec{a}$$
$$\underline{\underline{= 4\vec{a} - \vec{b}}}$$

b) Vektorene $\vec{u} = -6\vec{a} + 3\vec{b}$ og $\vec{v} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ er parallelle

hvis det fins et tall t slik at $t \cdot \vec{u} = \vec{v}$.

$$t \cdot \left(-6\vec{a} + 3\vec{b}\right) = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$
$$-6t\vec{a} + 3t\vec{b} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

Hvis vektorene skal være like, må

$-6t = 4$ og $3t = -2$

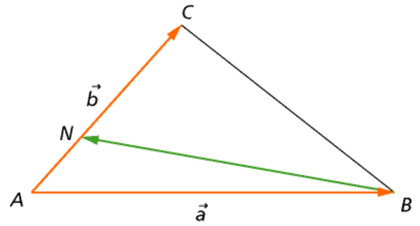
1. likning gir $\quad -t = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

2. likning gir $\quad t = -\frac{2}{3}$

Siden begge «retninger» krever samme verdi for t kan vi si at

$$\underline{\underline{\text{Vektorene er parallelle}}}$$

c) Vi tegner ΔABC og avsetter N på AC slik at $AN : NC = 1 : 2$.



Siden $\overrightarrow{AN}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle, er $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \underline{\underline{-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}}$$

Oppgave 5

I et koordinatsystem har vi punktene $A(0,0)$, $B(1,-1)$ og $C(3,0)$.

a) $\overrightarrow{BC} = [3-1, 0-(-1)] = \underline{\underline{[2,1]}}$

b) Finner $\angle ABC$ ved å bruke skalarprodukt:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \angle ABC = 108,4^\circ}}$$

c) Arealet til $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5}\sin 108,4^\circ = \underline{\underline{1,5}}$.

d) Et fjerde punkt D er bestemt ved at $ABCD$ danner et parallellogram.

Anta at D er gitt ved (x, y).

$ABCD$ parallellogram $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

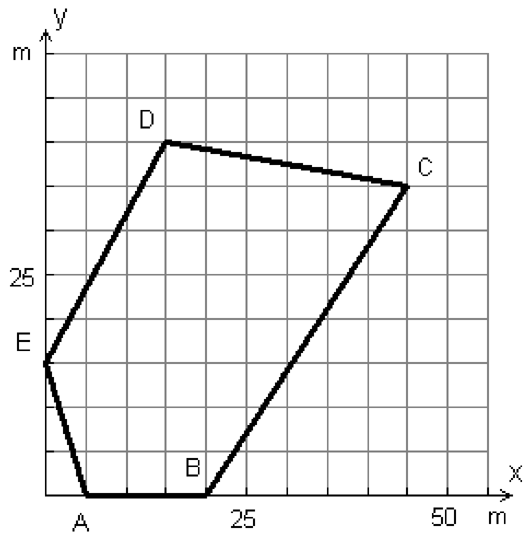
$[1,-1] = [3-x, -y]$ som gir at

$1 = 3 - x \quad \wedge \quad -1 = -y$

$x = 3 - 1 = 2 \quad \wedge \quad y = 1 \qquad \underline{\underline{D(2,1)}}$

Oppgave 6

a) A(5,0) B(20,0) C(45,35) D(15,40) E(0,15)



$\overrightarrow{ED} = [15-0, 40-15] = \underline{\underline{[15,\ 25]}}$

$\left|\overrightarrow{ED}\right| = \sqrt{15^2+25^2} = \sqrt{850} = \sqrt{5^2\cdot 2\cdot 17} = \underline{\underline{5\sqrt{34}}}$

b) **Alternativ 1)** Finner $\angle CED$ ved skalarprodukt:

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED} = [45,20]\cdot[15,25] = 45\cdot 15 + 20\cdot 25 = 1175$

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED} = \left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ED}\right|\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}}{\left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ED}\right|} = \frac{1175}{\sqrt{45^2+20^2}\cdot 5\sqrt{34}}$$

$\angle CED = \alpha = \underline{\underline{35{,}1^\circ}}$

Alternativ 2) Finner $\angle CED$ ved cosinussetningen

Cosinussetningen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$DC^2 = DE^2 + EC^2 - 2DE\cdot EC\cos(CED)$

$925 = 850 + 2425 - 2\cdot 5\sqrt{34}\cdot 5\sqrt{97}\cdot\cos(CED)$

$$\cos(CED) = \frac{850+2425-925}{2\cdot 5\sqrt{34}\cdot 5\sqrt{97}}$$

$\underline{\underline{\angle CED = 35{,}1^\circ}}$

c) Areal $\triangle CDE$: Bruker f.eks. arealformelen: $Areal_{\triangle CDE} = \dfrac{1}{2}ED\cdot EC\cdot\sin 35.1 = \underline{\underline{412{,}8\,\mathrm{m}^2}}$

d)

$\text{Areal hele tomta} = 45\cdot 40\,\mathrm{m}^2 - 4\ \text{trekanter}$

$= 45\cdot 40 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 15 - \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 35 - \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 25$ se figur i oppg

$= 1800 - 37{,}5 - 437{,}5 - 75 - 187{,}5 = \underline{\underline{1062{,}5\,\mathrm{m}^2}}$

e) Halve arealet er lik

$$\frac{\text{Areal hele tomta}}{2} = \frac{1062,5\,\text{m}^2}{2} = \underline{531,25\,\text{m}^2}$$

$$Areal_{\triangle CEF} = 531,25 - A_{\triangle CDE} = \underline{118,45\text{m}^2}$$

$$\overrightarrow{CE} = [-45, -20]$$

$$\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{CB} = t[-25, -35]$$

$$A_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{CE} \\ \overrightarrow{CF}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-45 & -20 \\ -25t & -35t\end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1575t - 500t) = 537,5t$$

$$A_{\triangle CEF} = 537,5t = 118,75 \qquad gir\ t \approx 0,22$$

$$\overrightarrow{CF} = 0,22[-25, -35] = [-5,5\ ,\ -7,7]$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = [45, 35] + [-5,5\ ,\ -7,7] = [39,5\ ,\ 27,3] \qquad F\,(39,5\ ,\ 27,3)$$