Løsningsforslag påsketentamen 2022 for MaA-015 / MA-017

Oppgave 1 Løs likningene

a)

$$
\begin{aligned}
\lg x^2 - \lg x - 1 &= 0 \\
2\lg x - \lg x &= 1 \\
\lg x &= 1 \\
\underline{\underline{x = 10}}
\end{aligned}
$$

b)

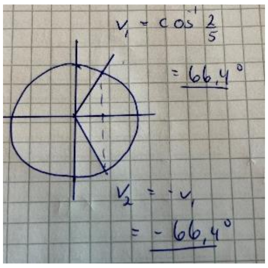
$$
\begin{aligned}
e^{2x} - 3e^x &= 0 \\
e^x\left(e^x - 3\right) &= 0 \\
e^x &= 3 \qquad \textit{siden } e^x > 0 \\
\underline{\underline{x = \ln 3}}
\end{aligned}
$$

c)

$$5\cos v - 2 = 0 \quad v \in [-180°, 180°]$$

$$\cos v = \frac{2}{5}$$

$$\underline{\underline{L = \{-66{,}4°, 66{,}4°\}}}$$



Oppgave 2 Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - \pi$$

$$f'(x) = \underline{\underline{6x^2 - \frac{2}{3}x + 2}}$$

b)

$$g(x) = 3x^2e^{2x+3} \qquad \text{Bruker produkt- og kjerneregel}$$

$$g(x) = 6xe^{2x+3} + 3x^2e^{2x+3}\cdot 2$$

$$= \underline{\underline{6xe^{2x+3} + 6x^2e^{2x+3} = 6xe^{2x+3}(1+x)}}$$

Oppgave 3 $f(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

a) Nullpunktene:

$$f(x)=0$$

$$\frac{2x^2-1}{x}=0$$

$$2x^2-1=0 \qquad \text{teller} = 0$$

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}} \qquad (\approx \pm 0{,}71)$$

b) Asymptoter:

Når *f* er skrevet som en brøk, ser vi at <u>$x = 0$ er en vertikal asymptote</u>.

Slik *f* var gitt i oppgaven kan vi tenke at divisjonen er utført, <u>skrå asymptote blir $y = 2x$.</u>

c) Bestem ekstremalpunkt:

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}=\frac{u}{v} \qquad \text{deriverer som en brøk}$$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot x-\left(2x^2-1\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{4x^2-2x^2+1}{x^2}=\frac{2x^2+1}{x^2}$$

eller omformer, og så deriverer

$$f(x)=2x-\frac{1}{x}=2x-x^{-1}$$

$$f'(x)=2+x^{-2}=2+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2+1}{x^2}$$

<u>Den deriverte har ingen nullpunkt, derfor har *f* ingen ekstremalpunkt</u>.

Oppgave 4

a)

$$\int x^3 \ln x\, dx \qquad \text{Bruker delvis integrasjon med} \qquad u'=x^3 \;\; og \;\; v=\ln x$$

$$u=\frac{1}{4}x^4 \qquad v'=\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\int\frac{1}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4+C==\underline{\underline{\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C}}$$

b)

$$\int \frac{2}{x^2+2x}dx$$

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \Big| \cdot x(x+2)$$

$$2 = A(x+2) + Bx$$

$$x - ledd: 0 = A + B \quad \Leftrightarrow A = -B$$

$$\text{konstant ledd}: 2 = 2A \quad \Leftrightarrow A = 1 \quad \wedge\ B = -1$$

$$\int \frac{2}{x^2+2x}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \underline{\underline{\ln|x| - \ln|x+2| + C}}$$

$$= \underline{\underline{\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C}}$$

Oppgave 5

a) Finn likningen tangenten til $f(x) = x^2 - 4x + 2$ i punktet $(4, f(4))$.

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \qquad f(4) = 16 - 16 + 2 = \underline{2}$$

$$f'(x) = 2x - 4 \qquad a = f'(4) = 8 - 4 = 4$$

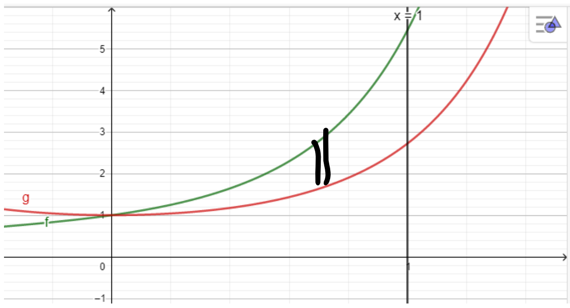
$$y - 2 = 4(x - 4)$$

$$y = 4x - 16 + 2$$

$$\underline{\underline{y = 4x - 14}}$$

b) Arealet avgrenset av $f(x) = (x+1)e^{x^2}, g(x) = e^{x^2}$ og linjene $x = 0$ og $x = 1$.

$f(x) = g(x)$, for $x = 0$ og siden (x+1) er større enn 1 i intervallet. Derfor blir $f(x) \geq g(x)$ for $x \in [0,1]$ (eller se på graf.



Et «typisk» rektangel vil ha

$$h = f(x) - g(x) = xe^{x^2} + e^{x^2} - e^{x^2} = xe^{x^2}$$

$$A = \int_0^1 xe^{x^2}dx \qquad \text{velger } u = x^2$$

$$du = 2xdx \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

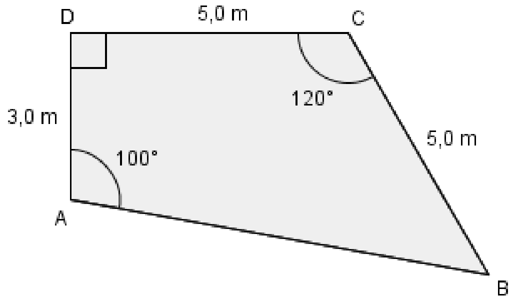
$$\frac{1}{2}du = xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}\left[e^1 - e^0\right] = \underline{\underline{\frac{e-1}{2}}}$$

c)

$$y' = \frac{2y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$
$$\int \frac{1}{y} dy = 2\int \frac{1}{x} dx$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + C_1$$
$$\ln|y| = \ln|x|^2 + C_1$$
$$|y| = e^{\ln|x|^2 + C_1} = e^{\ln|x|^2} e^{C_1} = x^2 \cdot e^{C_1}$$
$$\underline{\underline{y = Cx^2}}$$

Oppgave 6



a) Finn avstanden BD ved regning.
Siden trekant BCD er likebeint, blir de to like vinklene $\frac{180° - 120°}{2} = \underline{30°}$

Ved hjelp av sinussetningen får vi:

$$\frac{BD}{\sin 120°} = \frac{5{,}0\text{ m}}{\sin 30°} \quad \Rightarrow BD = \frac{5{,}0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{5{,}0 \cdot \sqrt{3}\text{m} \approx 8{,}7\text{ m}}}$$

(eller:

$$\frac{BD}{5{,}0\text{ m}} = \frac{\sin 120°}{\sin 30°} \quad \Rightarrow BD = \frac{5{,}0\text{ m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2} = \underline{\underline{5{,}0 \cdot \sqrt{3}\text{m} \approx 8{,}7\text{ m}}}\ )$$

b) Deler arealet opp i to trekanter: *ABD* og *BCD*

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3{,}0 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot \sin 120° = \frac{15{,}0}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{25{,}0}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \underline{\underline{22{,}1\text{m}^2}}$$

Oppgave 7

Omsetningen (salget) i millioner kroner pr måned kan beskrives ved

$S(x) = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in [0,12]$, der x er måneder etter nytt år.

a) Regn ut hvilken måned butikken hadde størst omsetning, og hvor stor omsetningen var denne måneden.

$$S_{maks} = 6 + 4 = 10$$

Dette oppnås når $\cos(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}) = 1$ $\quad$ *La* $u = \frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}$

$$\cos u = 1 \qquad u \in [-\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}]$$

$$u = 0$$

$$x = \frac{6}{\pi} \cdot u + 2\Big|_{u=0} = 2$$

Omsetningen i februar er på 10 millioner kr.

b) Regn ut når butikken hadde en omsetning på 6 millioner kroner.

$$S(x) = 6 + 4\cos(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}) = 6$$

$$4\cos(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\cos u = 0$$

$$u_1 = \frac{\pi}{2} \qquad u_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{\pi} \cdot u + 2\Big|_{u=\frac{\pi}{2}} = 3 + 2 = 5$$

$$x_2 = \frac{6}{\pi} \cdot u + 2\Big|_{u=\frac{3\pi}{2}} = 9 + 2 = 11$$

Omsetningen var på 6 millioner kroner i mai og i november.

Oppgave 8

a)

$$a_1 = 3000 \qquad d = 200 \qquad a_{25} = 3000 + 24 \cdot 200 = 7800$$

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25 = \frac{3000 + 7800}{2} \cdot 25 = 135000\,\text{m} = \underline{\underline{135\,\text{km}}}$$

b)

Rekken

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ $\quad$ er geometrisk med $k = \frac{1}{3}$ den er derfor konvergent

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 9 En trekant ABC er gitt ved punktene $A(1,1-1), B(0,0,2)$ og $C(-1,3,3)$.

a)

$$\overrightarrow{AB} = [0-1, 0-1, 2-(-1)] = \underline{\underline{[-1,-1,3]}}$$

$$2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = 2[-2,2,4] - [1,-3,-1] = \underline{\underline{[-5,7,9]}}$$

b) Finn vinkel A i $\triangle ABC$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [-1,-1,3] \cdot [-2,2,4] = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 12$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{\sqrt{11} \cdot 2\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\angle A = 42{,}4°}}$$

c) Finn likningen til planet α som går gjennom punktene *A*, *B* og *C*.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = [-4-6, -(-4+6), -2-2] = [-10,-2,-4]$$

Velger $\vec{n} = -\frac{1}{2}[-10,-2,-4] = [5,1,2]$ og bruker *B* (0,0,2) som punkt.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$5(x - 0) + 1(y - 0) + 2(z - 2) = 0$$

$$\underline{\underline{5x + y + 2z - 4 = 0}}$$

d) Finn en parameterfremstilling for et β som er parallelt med planet α og som inneholder punktet $E(2,3,4)$.

Vektorer i plan β: $\overrightarrow{AB} = [-1,-1,3]$ og $\overrightarrow{AC} = [-2,2,4]$. Punkt: $E(2,3,4)$

$$\beta = \begin{cases} x = 2 + (-1)t + (-2)s \\ y = 3 + (-1)t + 2s \\ z = 4 + 3t + 4s \end{cases} = \begin{cases} x = 2 - t - 2s \\ y = 3 - t + 2s \\ z = 4 + 3t + 4s \end{cases}$$

e) Gitt et punkt *D* på *y*- aksen. Finn koordinatene til *D* når trekantpyramiden *ABCD* er 20.

$D(0, y, 0) \qquad \overrightarrow{AD} = [0-1, y-1, 0-(-1)] = [-1, y-1, 1]$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|[10,2,4] \cdot [-1, y-1, 1]\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|10 \cdot (-1) + 2(y-1) + 4 \cdot 1\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|-10 + 2y - 2 + 4\right| = \frac{1}{6}\left|-8 + 2y\right|$$

$$\frac{1}{6}\left|-8 + 2y\right| = 20$$

$$\left|-8 + 2y\right| = 120$$

$$-8 + 2y = 120 \quad \vee \quad -8 + 2y = -120$$

$$y = 64 \quad \vee \quad y = -56$$

$\underline{\underline{\text{Punktet } D \text{ får koordinatene } D(0,64,0) \text{ eller } D(0,-56,0)}}$