Løsningsforslag til 5. Innleveringsoppgaver i Ma-017 (kap 15, 16 og 17)

***Oppgave 1** Bestem integralene:

a) $\int \left(3x^2+2x+1\right)dx = \underline{\underline{x^3+x^2+x+C}}$

b)

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C}}$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{4}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+C = \frac{2}{5}x^{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{5}x^{2}\cdot\sqrt{x}+C}}$$

c)

$$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}\right)dx = \int\left(x^{-2}-\frac{4}{x}\right)dx = \underline{\underline{-\frac{1}{x}-4\ln|x|+C}}$$

d)

$$\int \frac{1}{x^2-9}dx \qquad \frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}\Big|\cdot fn$$

$$1 = A(x-3)+B(x+3)$$

$$x-\text{ledd}: \qquad 0 = A+B \qquad \Leftrightarrow A=-B$$

$$\text{konstant-ledd}: 1 = -3A+3B$$

$$1 = -3(-B)+3B$$

$$1 = 6B$$

$$\underline{B=\frac{1}{6}} \quad , \qquad \underline{A=-\frac{1}{6}}$$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+3}dx+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+C}}$$

e) Bruker formel for delvis integrasjon

$$\int u'v dx = uv-\int u'v dx \qquad \text{Pass godt på fortegnene!}$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx \qquad u=x \quad \text{gir} \quad u'=1$$

$$= -xe^{-x}-e^{-x}+C \qquad v=e^{-x} \quad \text{gir} \quad v'=-e^{-x}$$

***Oppgave 2** Regn ut de bestemte integralene, eksakte svar er ønskelig.

a) $\int_0^2 (2x-3x^2)\,dx = \left[x^2-x^3\right]_0^2 = 2^2-2^3-0 = 4-8 = \underline{\underline{-4}}$

b) $\int_0^1 \left(e^x+1\right)dx = \left[e^x + x\right]_0^1 = e^1 + 1 - \left(e^0 + 0\right) = e + 1 - 1 = \underline{\underline{e}}$

c) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = \underline{\underline{-\ln 2}}$

d) $\int_1^2 \frac{x+1}{x}dx = \int_1^2 1 + \frac{1}{x}dx = \left[x + \ln|x|\right]_1^2 = 2 + \ln 2 - \left(1 + \ln 1\right) = \underline{\underline{1 + \ln 2}}$

***Oppgave 3** Funksjonene *f* og *g* er gitt ved $f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = x + 2$

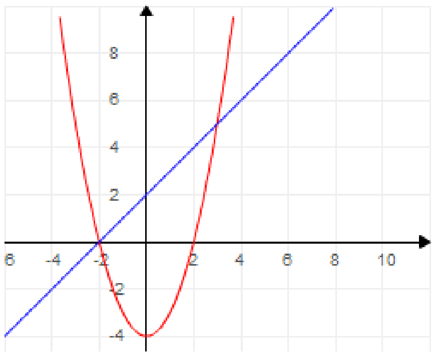
a) Finn arealet av det området som er avgrenset av *x*-aksen og grafen til f .

$$A = -\int_{-2}^{2} x^2 - 4dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\left(\frac{8}{3} - 8 - \left(\frac{-8}{3} + 8\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{8}{3} - 8 - \left(\frac{-8}{3} + 8\right)\right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$



b) Finn arealet av det området som ligger mellom grafene til f og g .

$$A = \int_{-2}^{3} g(x) - f(x)dx = \int_{-2}^{3} -x^2 + x + 6\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{3}$$

$$= -\frac{1}{3}3^3 + \frac{1}{2}3^2 + 18 - \left(-\frac{1}{3}(-8) + \frac{1}{2}\cdot 4 - 12\right)$$

$$= -9 + \frac{9}{2} + 18 - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12\right)$$

$$= 9 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 10 = \frac{54 + 27 - 16 + 60}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6}}}$$

***Oppgave 4** Finn integralene:

a)

$$\int 4x\left(x^2-3\right)^4 dx = \qquad u = x^2-3$$

$$du = 2xdx$$

$$2du = 4xdx$$

$$= \int 2u^4 du = \frac{2}{5}\left(x^2-3\right)^5 + C$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 6\sin^2 x \cdot \cos x\, dx \qquad u = \sin x \qquad gir \qquad du = \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 6u^2\, du = 2\left[u^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{8}-0\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

***Oppgave 5** Løs differensiallikningene:

a)

$$\left(x+1\right)\cdot y' = 2y$$

$$\left(x+1\right)\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$\ln\left|y\right| = 2\ln\left|x+1\right| + C_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x+1|^2 + C_1} = e^{\ln|x+1|^2} e^{C_1}$$

$$y = \underline{\underline{C\left(x+1\right)^2}}$$

b)

$$y' - 2y = 6 \quad \text{der} \quad y(0) = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = 6 + 2y = 2(y+3)$$
$$\frac{dy}{y+3} = 2dx$$
$$\int \frac{1}{y+3} dy = \int 2dx$$
$$\ln|y+3| = 2x + C_1$$
$$|y+3| = e^{2x} e^{C_1}$$
$$y = Ce^{2x} - 3 \qquad : generell\ løsning$$
$$2 = Ce^0 - 3$$
$$C = 5$$
$$\underline{\underline{y = 5e^{2x} - 3}}$$

***Oppgave 6** En aritmetisk tallfølge består av bare positive ledd.

Det første leddet $a_1 = 2$ og det tredje leddet $a_3 = 18$.

a) Finn differansen d.

$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$18 = 2 + 2d$$
$$16 = 2d$$
$$d = \frac{16}{2} = \underline{\underline{8}}$$

b) $a_2 = a_1 + d = 2 + 8 = \underline{\underline{10}}$

c) Finn en formel for ledd nr. *i*.

For en aritmetisk følge:

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$
$$a_i = 2 + (i-1)\cdot 8 = 2 + 8i - 8$$
$$\underline{\underline{a_i = 8i - 6}}$$

d) Finn ledd nr. 23.

$$a_i = 8i - 6$$
$$a_{23} = 8 \cdot 23 - 6 = \underline{\underline{178}}$$

***Oppgave 7** En bedrift har en omsetning på 200 millioner kroner pr år og har som mål å øke omsetningen med 7% per år.

a) Lag en funksjon som beskriver omsetningen etter *x* år.

$$O(x) = 200 \cdot 1,07^{x-1} mill\ kr\ /\ år \qquad x \in \mathbb{N}$$

b) Regn ut hvor mange år det tar før omsetningen er doblet?
Geometrisk følge:

Omsetning i år *x*: $a_x = 200 \cdot 1,07^{x-1}$

$$a_x = 400$$

$$200 \cdot 1,07^{x-1} = 400$$

$$1,07^{x-1} = 2 \qquad \text{bruker logaritmeregler}$$

$$(x-1)\ln 1,07 = \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 1,07} + 1 \approx 11,24$$

Etter 12 år er omsetningen fordoblet.

Kunne også regnet ut omsetning år for år til vi fant svaret – tungvint når n er stor.

år		
1	200	mill kr /år
2	214	mill kr /år
3	229	mill kr /år
4	245	mill kr /år
5	262	mill kr /år
6	281	mill kr /år
7	300	mill kr /år
8	321	mill kr /år
9	344	mill kr /år
10	368	mill kr /år
11	393	mill kr /år
12	421	mill kr /år

c) Lag en funksjon som gir den samlede omsetningen etter *x* år. Hva er omsetningen etter 10 år?

$$S(x) = \sum_{i=1}^{x} 200 mill\ kr \cdot 1,07^{i-1}$$

$$= 200 mill\ kr \cdot \sum_{i=1}^{x} 1,07^{i-1} = 200 mill\ kr \cdot \frac{1,07^{x} - 1}{1,07 - 1}$$

$$S(10) = \sum_{i=1}^{10} 200 \cdot 1,07^{i-1} = 200\ mill\ kr \cdot \frac{1,07^{10} - 1}{0,07} \approx \underline{\underline{2763,3\ mill\ kr}}$$

***Oppgave 8** I en uendelig geometrisk rekke er første ledd lik $2e^x$ og andre ledd lik $e^x - 3$.

a) Bestem de verdiene av *x* som gjør at rekken konvergerer.

Finner først kvotienten: $k = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{e^x - 3}{2e^x}$.

Må deretter finne når $|k| < 1$ (kan løses grafisk eller ved regning.)

$$\begin{array}{lll}
-1 < \dfrac{e^x - 3}{2e^x} < 1 \;\Big|\cdot 2e^x & & \text{går bra siden } 2e^x > 0 \\
-2e^x < e^x - 3 < 2e^x & & \text{Deler i to ulikheter} \\
-2e^x < e^x - 3 & \wedge & e^x - 3 < 2e^x \\
3 < 3e^x & \wedge & -3 < e^x \\
1 < e^x & \wedge & -3 < e^x \\
\ln 1 < \ln e^x & \wedge & \forall x \text{ (alle } x\text{)} \\
0 < x \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R} & & \text{Begge er oppfylt når} \\
\underline{\underline{x \in \langle 0, \rightarrow \rangle}} & &
\end{array}$$

b) Finn summen av den uendelige geometriske rekken.

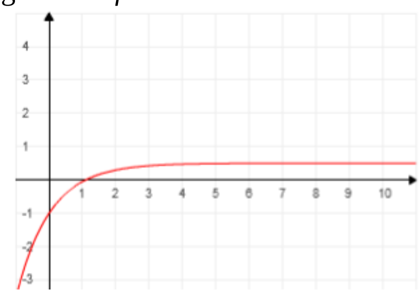
$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2e^x}{1 - \dfrac{e^x - 3}{2e^x}} = \frac{4e^{2x}}{2e^x - \left(e^x - 3\right)} = \underline{\underline{\frac{4e^{2x}}{e^x + 3}}}$$

c) Bestem *x* når summen av den uendelige geometriske rekken er lik 2.

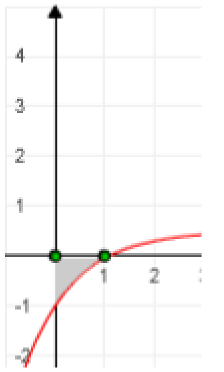
$$\begin{array}{lll}
S(x) = 2 & & \\
\dfrac{4e^{2x}}{e^x + 3} = 2 \;\Big|\cdot\left(e^x + 3\right) & & \\
4e^{2x} = 2e^x + 6 & & \\
4e^{2x} - 2e^x - 6 = 0 & & \text{2. grads uttrykk} \\
e^x = \dfrac{3}{2} & \vee & e^x = -1 \text{ (ingen løsning)} \\
\underline{\underline{x = \ln \dfrac{3}{2}}} \approx 0,405 & &
\end{array}$$

Rekkens kvotient er en funksjon av *x* som kan skrives. $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{2e^x}$

d) Skisser grafen til *f*.



e) Bestem arealet avgrenset av koordinataksene og grafen til *f*.



Tenker vertikal rektangler med høyde

$$h = 0 - f(x) = -\frac{e^x - 3}{2e^x} = \frac{3 - e^x}{2e^x} = \frac{3}{2e^x} - \frac{e^x}{2e^x} = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}$$

Bredde Δx

Summerer vi rektanglene får vi

$$A = \int_0^{\ln 3} \left(\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[-\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x \right]_0^{\ln 3} = -\frac{3}{2}e^{-\ln 3} - \frac{1}{2}\ln 3 - \left(-\frac{3}{2} - 0 \right)$$

$$= -\frac{3}{2}e^{\ln 3^{-1}} - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 3 = 1 - \frac{1}{2}\ln 3 \approx \underline{\underline{0,45}}$$

Finn volumet av det omdreiningslegemet som kommer frem når dette arealet dreies om *x*- aksen.
Når et typisk rektangel dreies, får vi en sirkelskive.

$$dV = \pi \left(\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{9}{4}e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} \left(\frac{9}{4}e^{-2x} - \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{4} \right) dx = \pi \left[-\frac{9}{8}e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{4}x \right]_0^{\ln 3}$$

$$= \pi \left(-\frac{9}{8}e^{\ln 3^{-2}} + \frac{3e^{\ln 3^{-1}}}{2} + \frac{1}{4}\ln 3 - \left(-\frac{9}{8} + \frac{3}{2} + 0 \right) \right) = \pi \left(-\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{9}{8} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \pi \left(1 - 1 + \frac{1}{4}\ln 3 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\ln 3}} \approx 0,86$$

***Oppgave 9** I en uendelig geometrisk rekke er de to første leddene

$$a_1 = \cos x \qquad \text{og} \qquad a_2 = 2\sin 2x + \cos x, \quad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

a) Bestem for hvilke verdier av x rekken er konvergent.
Finner k:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sin 2x + \cos x}{\cos x}$$

$$= \frac{2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x + \cos x}{\cos x} = \frac{(4\sin x + 1)\cos x}{\cos x} = 4\sin x + 1$$

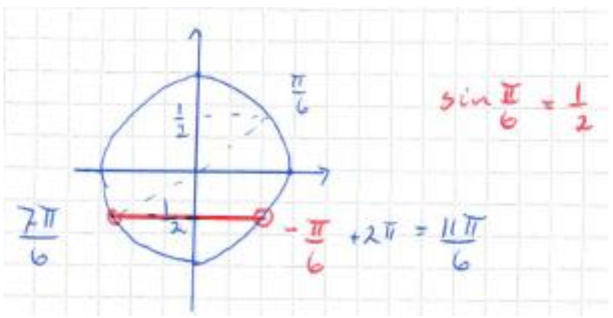
krav $|k| < 1$

$-1 < 4\sin x + 1 < 1$ trekker fra 1

$-2 < 4\sin x < 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2} < \sin x < 0$

Skisserer en enhetssirkel og leser av løsning.



I tillegg får en konvergent rekke når første leddet er lik 0.
$a_1 = \cos x = 0$

Samlet får vi at rekken er konvergent når

$$\underline{\underline{x \in \left\langle \pi, \frac{7\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right\rangle \cup \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}}}$$

b) Finn et utrykk for summen av rekken, $S(x)$.

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\cos x}{1-(4\sin x + 1)} = -\frac{\cos x}{4\sin x}$$

c) Løs likningen $S(x) = \sin x$

$-\frac{\cos x}{4\sin x} = \sin x \,\Big|\cdot 4\sin x$

$-\cos x = 4\sin^2 x$ bruk enhetsformel

$-\cos x = 4\left(1 - \cos^2 x\right)$

$4\cos^2 x - \cos x - 4 = 0$ bruker 2.gradsformel

$\cos x \approx 1{,}133 \quad \vee \quad \cos x = -0{,}882$ tegn gjerne inn på enhetssirkel

$\varnothing \quad \vee \quad x = 2{,}65 + n \cdot 2\pi$ i 2. kvadrant, utenfor def. for $S(x)$

$x = -2{,}65 + n \cdot 2\pi$

$x_1 = -2{,}65 + 2\pi \approx \underline{\underline{3{,}63}}$