5. Polynomer og rasjonale uttrykk

Faktorisering kan være nyttig når vi skal løse likninger. Temaet ulikheter utvides til også å studere rasjonale uttrykk. Merk at fortegnsskjema også er til hjelp senere i kurset.

5.1. Polynomfunksjoner

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ Der n viser graden til funksjonen**.**

grad 1 eksempel $y = 2x + 1$, rett linje

grad 2 eksempel $f(x) = 2x^2 + x + 1$,en parabel

Test gjerne ut på kalkulatoren, hvordan grafer av polynomer ser, når graden øker.

Merk at polynomer har kontinuerlige (sammenhengende) grafer.

5.2. Polynomdivisjon

Polynomdivisjon - verktøy til faktorisering av polynomer

Repetisjon av divisjon med penn og papir. Eksempel utfør divisjonen: $156:11=$

$$
\begin{array}{l}
156:11 = 14 \\
\underline{-11} \\
\quad 46 \\
\underline{\;-44} \\
\quad\;\; 2
\end{array}
$$

Divisjonen går ikke opp, vi har 2 til rest.

Polynomdivisjon er omtrent på samme vis.

Vi skal utføre divisjonen: $\left(x^2 - 3x - 10\right):\left(x + 2\right) =$

$$
\begin{array}{l}
\left(x^2 - 3x - 10\right):\left(x+2\right) = x - 5 \\
-\underline{\left(x^2 + 2x\right)} \\
\qquad -5x - 10 \\
\quad -\underline{\left(-5x - 10\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Når vi får 0 til rest, sier vi at divisjonen går opp.

5.3. Resten ved en polynomdivisjon

Eksempel

$$\left(x^4+3x^3+2x^2+3x-3\right):\left(x^2+1\right)=x^2+3x+1-\frac{4}{x^2+1}$$

$$-\left(x^4 \qquad +x^2\right)$$

$$3x^3+x^2+3x-3$$

$$-\left(3x^3 \qquad +3x\right)$$

$$x^2 \qquad -3$$

$$-\left(x^2 \qquad +1\right)$$

$$-4 \qquad \textit{rest}$$

Nyttig regel for å sjekke om divisjonen opp?

Divisjonen $P(x):(x-x_0)$ går opp hvis $P(x_0)=0$
Dersom divisjonen ikke går opp, er resten lik $P(x_0)$.

Eksempel $\qquad P(x)=2x^3-12x^2+22x-12$

Begynner fra en kant med å sjekke heltallsfaktorene i 12, dvs. $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$
$P(1)=2-12+22-12=0 \qquad \Rightarrow$ Divisjonen $P(x):(x-1)$ går opp
Stopp når du har funnet ett nullpunkt, og bruk polynomdivisjon til å redusere graden av polynomet.

$$2x^3-12x^2+22x-12:\left(x-1\right)=2x^2-10x+12$$

$$-\left(2x^3-2x^2\right)$$

$$-10x^2+22x-12$$

$$-\left(-10x^2+10x\right)$$

$$12x-12$$

$$-\left(12-12\right)$$

$$0$$

Bruker vi 2. gradsformelen på svaret, $2x^2-10x+12$ finner vi nullpunktene 2 og 3.

Nå kan vi faktorisere: $P(x)=2x^3-12x^2+22x-12=2\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right))$

5.4. Faktorisering av polynomer

Her skal vi kombinere polynomdivisjon, med faktorisering av 2. gradsuttrykk ved hjelp av nullpunkt.

Eksempel Utfør divisjonen $\left(2x^3-5x^2+x+2\right):\left(x-1\right)$, og bruk dette til å faktorisere $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3-5x^2+x+2):(x-1)=2x^2-3x-2 \\
\underline{-(2x^3-2x^2)} \\
\quad -3x^2+x+2 \\
\quad \underline{-(-3x^2+3x)} \\
\qquad -2x+2 \\
\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Vi vet nå at: $P\left(x\right)=2x^3-5x^2+x+2=\left(x-1\right)\left(2x^2-3x-2\right)$, og trenger å faktorisere 2. gradspolynomet videre.

Vi setter $2x^2-3x-2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}$$

$$=\frac{3\pm 5}{4}=\begin{cases}\dfrac{8}{2}=\underline{2}\\[2ex] \dfrac{-2}{4}=\underline{-\dfrac{1}{2}}\end{cases}$$

<u>Samlet gir dette</u>**:**

$$P\left(x\right)=2x^3-5x^2+x+2=\left(x-1\right)\left(2x^2-3x-2\right)=2\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Oppsummering: Faktorisering av polynomer Vurder om du kan

- Sette utenfor felles faktor
- Bruke kvadratsetningene, særlig den 3. $a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$
- Bruke 2. gradsformelen for å finne nullpunkt $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

  NB ikke glem faktor a !
- Skrive om ved hjelp av f.eks. $u=x^2$ for å bruke teknikker for 2. gradsuttrykk
- Polynomdivisjon, husk på å sjekke om det finnes heltallsfaktorer

5.5. Forkorting av rasjonale uttrykk

Husk at når vi forkorter en brøk må vi ha felles faktor i teller og nevner. Så når vi forkorter rasjonale utrykk er faktorisering viktig for å finne felles faktorer.

Eksempler: Forkort brøkene

a)

$$\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+2x}=\frac{x\left(x^2+4x+4\right)}{x\left(x+2\right)}$$

ser gjerne først etter om uttrykkene kan forenkles

$$=\frac{\cancel{x}\left(x^2+4x+4\right)}{\cancel{x}\left(x+2\right)}$$

Bruk nå nullpunktene, eller kvadratsetning for å faktorisere

$$=\frac{\left(x+2\right)^2}{x+2}$$

$$=\underline{\underline{x+2}}$$

b) **Et ganske vrient eksempel:** Forkort om mulig: $\dfrac{5x^3+ax^2-5x-a}{x^2-1}=$

Kommentarer:

- Her er a en parameter, det vil si en ukjent som kan gis ulike verdier.
- Ser at jeg kan bruke 3. kvadratsetning på nevneren som gir faktorene $\left(x+1\right)\text{og}\left(x-1\right)$.
- Dersom brøken skal kunne faktoriseres, må en av disse (eller begge) være faktor også i teller.

$$La\,P(x)=5x^3+ax^2-5x-a$$

$$P(1)=5+a-5-a=0$$

$\left(x-1\right)$ er en faktor i telleren!

$$\begin{array}{l}
5x^3+ax^2-5x-a:\left(x-1\right)=5x^2+\left(a+5\right)x+a \\
\underline{-\left(5x^3-5x^2\right)} \\
\quad\left(a+5\right)x^2-5x-a \\
\underline{-\left(\left(a+5\right)x^2-\left(a+5\right)x\right)} \\
\qquad\qquad ax-a \\
\qquad\qquad \underline{-\left(ax-a\right)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Forsøker så å bruke andregradsformelen på dette 2. gradsuttrykket.

$$5x^2+(a+5)x+a=0$$

$$=\frac{-(a+5)\pm\sqrt{(a+5)^2-4\cdot 5\cdot a}}{2\cdot 5}$$

$$=\frac{-a-5\pm\sqrt{a^2+10a+25-20a}}{10}$$

$$=\frac{-a-5\pm\sqrt{a^2-10a+25}}{10}=\frac{-a-5\pm\sqrt{(a-5)^2}}{10}$$

$$=\frac{-a-5\pm(a-5)}{10}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-a-5+(a-5)}{10}=\dfrac{-10}{10}=\underline{-1}\\[2ex] \dfrac{-a-5-(a-5)}{10}=\dfrac{-2a}{10}=\underline{-\dfrac{a}{5}}\end{cases}$$

Vi har nå det som trengs til faktorisering og kan forkorte felles faktorer:

$$\frac{5x^3+ax^2-5x-a}{x^2-1}=\frac{5(x-1)(x+1)\left(x+\frac{a}{5}\right)}{(x-1)(x+1)}=5\left(x+\frac{a}{5}\right)=\underline{\underline{5x+a}}$$

5.6. Doble andregradsulikheter

Eksempel på hvordan vi kan løse doble andregradsulikheter.

Gitt ulikheten $-x+2<-x^2+2x+6<6$

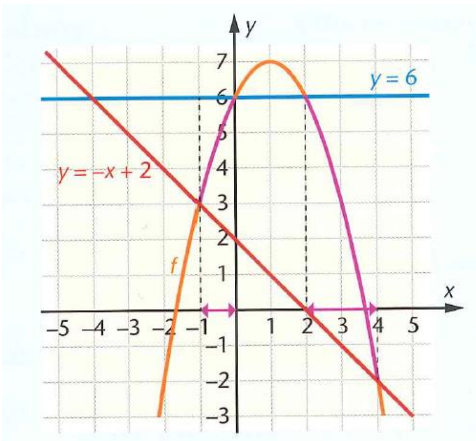
a. Løs ulikheten grafisk.

b. Løs ulikheten ved regning.

Løsning.

a. Vi starter med å tegne grafen til de tre uttrykkene i ulikheten i samme koordinatsystem:

Så ser vi etter i hvilke intervall, ligger parabelen mellom den skrå-linjen og den horisontale (blå) linjen.



Svar:
$-1<x<0\ \cup\ \ 2<x<4$ $\qquad\cup$ leser vi som eller

b. Løsning ved regning. Her må vi dele opp i to ulikheter (som begge må være oppfylt):

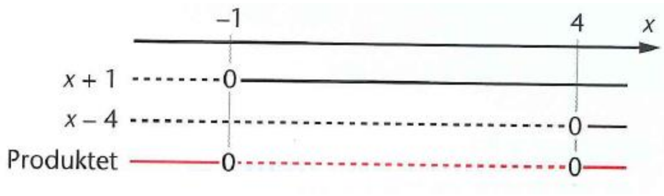
$$-x+2<-x^2+2x+6 \qquad\wedge\qquad -x^2+2x+6<6$$

Vi starter med å løse den første på vanlig måte:

$-x+2<-x^2+2x+6$

$x^2-3x-4<0$ Bruker nullpunktene til å faktorisere.

$(x+1)(x-4)<0$ Tegner så et fortegnsskjema.



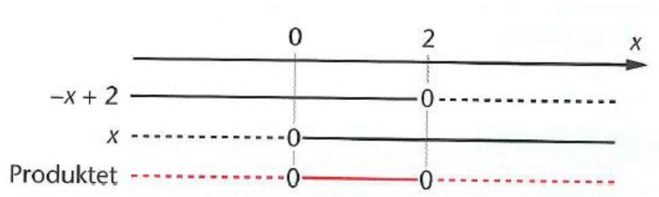
Løsningen her er $-1<x<4$

Så den andre ulikheten:

$-x^2+2x+6<6$

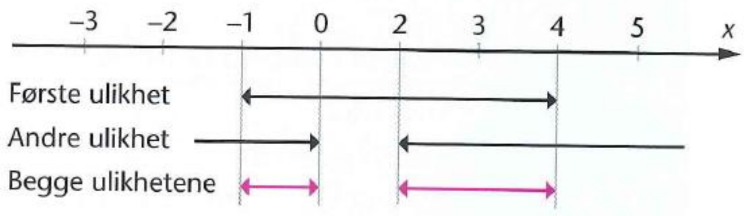
$-x^2+2x<0$

$x(-x+2)<0$ Her trenger vi også et fortegnsskjema.



Vi ser at løsninger her blir $x<0 \quad \vee \quad x>2$.

Løsingen av den doble ulikheten er de *x*-ene som passer i begge ulikhetene.



Nederste linje viser oss løsningen: $\underline{\underline{-1<x<0 \quad \vee \quad 2<x<4}}$

5.7. Likninger og ulikheter av tredje grad

Når vi skal løse likninger av høyere grad er det særlig to teknikker vi benytter:

- Omskriving med *u*, for å redusere til en 2. gradslikning
- Faktorisere + bruke produktregelen. Produktregel: $a \cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$

I eksempelet tidligere i kapittelet fant vi at

$$P(x)=2x^3-5x^2+x+2=(x-1)(2x^2-3x-2)=2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Dette kan vi bruke til å løse likningen

$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$

$2(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$ produktregelen gir at

$x-1=0 \ \vee \ x-2=0 \ \vee \ x+\frac{1}{2}=0$

$x=1 \ \vee \ x=2 \ \vee \ x=-\frac{1}{2}$ $\qquad \underline{\underline{L=\{-\frac{1}{2},1,2\}}}$

Ulikheter av tredje eller høyere grad løser vi helt tilsvarende som 2. gradsulikheter. Dvs. med fortegnsskjema, men vi får gjerne flere linjer i skjemaet.

5.8. Irrasjonale likninger

likning med kvadratrot

Eksempel

$3+\sqrt{x+3} = x$

$\sqrt{x+3} = x-3$ Må få rottegnet alene på en side av likhetstegnet

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-3)^2$ Kvadrerer begge sider NB Dette kan gi falske løsninger

$x+3 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7\pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = \underline{\underline{6}} \\ \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}} \end{cases}$$

Vi har funnet <u>to mulige løsninger</u>, da er neste trinn å sette prøve.

$x_2 = 1 \quad gir$

$\text{Venstre side}: 3+\sqrt{1+3} = 3+2 = 5$

$\text{Høyre side}: 1$

$Vs \neq Hs \qquad x=1$ er ikke en løsning.

Sjekker så den andre *x*-verdien

$x_2 = 6 \quad gir$

$\text{Venstre side}: 3+\sqrt{6+3} = 3+3 = 6$

$\text{Høyre side}: 6$

$Vs = Hs \qquad \underline{\underline{x=6 \text{ er en løsning.}}}$