Delbrøksoppspalting

Vil løse integraler som likner på:

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 5}\,dx$$

Her har vi veldig flaks,

$u = x^3 - x^2 + x - 5$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2x + 1$

$dx = \frac{du}{3x^2 - 2x + 1}$

$$= \int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u| = \ln|x^3 - x^2 + x - 5|$$

Gikk kun fordi toppen var lik derivate av bunnen.

Eks:

$$\int \frac{3}{x^2 + 5x + 4}\,dx$$

Idé: Vil skrive om uttrykket slik at vi kan løse integralet.

Går an å se at:

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{(x+4)}{(x+4)} - \frac{1}{(x+4)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}$$

Sjekk: Skriv høgreside på fellesnevner:

$$\frac{x+4 - (x+1)}{(x+4)(x+1)} = \frac{3}{x^2+5x+4}$$

Får derfor at

$$\int \frac{3}{x^2+5x+4}\,dx = \int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x+4| + C$$

$$= \ln\left(\left|\frac{x+1}{x+4}\right|\right) + C$$

Store spørsmålet: Hvordan kommer vi fra

$$\frac{3}{x^2+5x+4} \quad \text{til} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \;?$$

Kalles delbrøksoppspalting. Spalter en brøk opp i deler. Eng: Partial fraction decomposition.

Se at vi må faktorisere nevneren på venstre side for å se hva som må være nevnere på høyre side.

Eks: $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$

Neste spørsmål: Hva blir tellerne? Velger oss noen variabelnavn, og finner ut av hva de må være:

Finn ut hva A og B må være.

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

Idé: Vil finne A og B slik at

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

Skriv høyresida på fellesnevnar

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{A\cdot(x+4) + B(x+1)}{x^2+5x+4}$$

Må ha:

$$3 = A(x+4) + B(x+1) \quad \text{for alle } x.$$

Den vanskelige måten:

$$0x + 3 = (A+B)x + 4A + B$$

$$0 = A + B \qquad B = -A$$
$$3 = 4A + B$$
$$3 = 3A \Rightarrow A = 1$$
$$B = -1$$

Den lurere måten!

$$3 = A(x+4) + B(x+1)$$

Testa for lure x-verdier.

$x = -1$:
$$3 = A\cdot(-1+4) \cancel{+ B(-1+1)}$$
$$3 = 3A \Rightarrow A = 1.$$

$x = -4$:
$$3 = \cancel{A(-4+4)} + B(-4+1)$$
$$3 = -3B \Rightarrow B = -1$$

Recap:

Vil løse integraler som likner på forr eksempel

$$\int \frac{3}{x^2+5x+4}\,dx.$$

Gjør dette ved å skrive om

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}$$

Steg for omskrivning:
- Faktoriser nevner på høyreside til (helst) førstegrads faktorer.
- Skriv høyreside som sum av brøker med disse faktorene i nevner, og ukjent teller.
- Finn ut hva teller må være.

Eks: $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx$

Faktoriser nevner: $x^2+2x = x(x+2)$

$$\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

Vil få til: $x+4 = A(x+2)+Bx$

$x=0$

$4 = 2A \Rightarrow A=2$

$x=-2$

$2 = -2B \Rightarrow B=-1$

$$\frac{x+4}{x^2+2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= 2\cdot \ln|x| - \ln|x+2| + C$$

Det går alltid an å finne slike konstanter, om nevneren kan faktoriseres til unike førsteordens faktorer, og telleren er lavere grad enn nevneren.

Hva om teller er av grad høyere enn eller lik nevner?

Svaret: Polynomdivisjon.

Stort eksempel:

$$\int \frac{x^4+x^3+4x^2-5x-4}{x^3-x}\,dx$$

Kan regne ut:

$$\begin{array}{l}
x^4+x^3+4x^2-5x-4 : x^3+0x^2-x+0 = x+1 + \dfrac{5x^2-4x-4}{x^3-x} \\
\underline{-x^4 \qquad +x^2} \\
\quad x^3+5x^2-5x-4 \\
\quad \underline{-x^3 \qquad\quad +x} \\
\qquad 5x^2-4x-4
\end{array}$$

$$\int x+1+\frac{5x^2-4x-4}{x^3-x}\,dx = \frac{1}{2}x^2+x+\int \frac{5x^2-4x-4}{x^3-x}\,dx$$

Må bruke delbrøksoppspalting på siste:

$$\int \frac{5x^2-4x-4}{x^3-x}\,dx$$

Faktorisere nevner:

$$x^3-x = x(x^2-1)$$
$$= x\cdot(x-1)(x+1)$$

Påstår at det finnes tall A, B, og C, slik at

$$\frac{5x^2-4x-4}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$5x^2-4x-4 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$x=0$ $\qquad -4 = -A \Rightarrow A = 4$

$x=\underline{1}$ $\qquad -3 = 2B \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$

$x=-\underline{1}$ $\qquad 5 = 2C \Rightarrow C = \frac{5}{2}$

$$\int \frac{5x^2-4x-4}{x^3-x}\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx - \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{5}{2}}{x+1}\,dx$$

$$= 4\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x+1| + C$$

To mulige problem:

Problem 1: En av faktorene er ikke førstegrads:

$$\int \frac{x-1}{x^3+4x}\,dx$$

Faktorisere:

$$x^3+4x = x(x^2+4)$$

„Løsning":

$$\frac{x-1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Problem fremdeles: Kan vanligvis ikke løse

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+4}\,dx$$

Problem 2: En av faktorene er ikke unike:

$$\int \frac{x-1}{x^3-2x^2+x}\,dx$$

Faktorisere:

$$x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1)$$
$$= x(x-1)(x-1)$$

„Løsning"

$$\frac{x-1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Problem: Vi kan ikke integralet $\int \frac{C}{(x-1)^2}\,dx$.

Eks:

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx = \int 1 + \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$$

Siden teller har lik grad som nevner, må polynom dividere:

$$\begin{array}{l} x^2+x-1 : x^2-x+0 = 1 + \frac{2x-1}{x^2-x} \\ \underline{-x^2+x} \\ \quad 2x-1 \end{array}$$

Må nå delbrøksoppspalte $\frac{2x-1}{x^2-x}$:

Faktorisere $x^2-x = x(x-1)$

Finn A og B slik at

$$\frac{2x-1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$2x-1 = A(x-1) + Bx$$

Lure x-verdier!

$x=0$ $\quad -1 = -A \Rightarrow A = 1$

$x=1$ $\quad 1 = B \Rightarrow B = 1$

Andre x-verdier:

$x=-1$

$-3 = -2A - B$

$x=2$

$3 = A + 2B$

Kunne løses og gir også

$A=1 \quad B=1$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx = \int 1 + \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

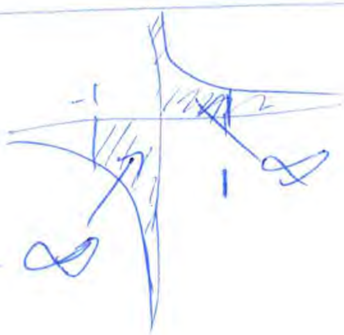
$$= x + \ln|x| + \ln|x-1| + C$$

Recap:

Om teller har lik grad eller høyere grad som nevner:
- Polynom divisjon.

Når teller har lavere grad enn nevner:
- Faktoriser nevner i unike førstegrads faktorer.
- Skriv brøken som en sum av ukjent teller delt på hver faktor.
- Finn ukjente tellere. (Ved å sette inn lure x-verdier etter å ha skrevet alt på felles nevner).

Se opp for: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$



Bestemte Integraler bør kun regnes ut når funksjonen er definert på hele intervallet.