Antideriverte - Ubestemte integral.

Eks: Har en partikkel i et magnetisk felt

$$F(t) = t^2 - 3t + 7.$$

Anta $m = 1$

Fra fysikk: $F = m \cdot a$ $\quad a = \frac{F}{m}$

$$a = t^2 - 3t + 7.$$

Vil vite hvordan denne partikkelen beveger seg.
Både posisjon og fart.

Starter med fart, $v' = a$

Vet at
$$v'(t) = t^2 - 3t + 7.$$

Hvordan kan jeg finne en funksjon $v(t)$ med riktig derivert?

Kan i stedet svare på:

Hva deriverer jeg for å få:

- t^2
- $-3t$
- $+7$

Hva deriveer vi for å få t^2?

Husker at $(t^3)' = 3t^2$

Får $\frac{1}{3}(t^3)' = t^2$

Og derfor at

$$\left(\frac{1}{3}t^3\right)' = t^2$$

Dobbeltsjekk: $\left(\frac{1}{3}t^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}t^2 = t^2.$

Hva deriverer jeg for å få $-3t$?

Husker at $(t^2)' = 2t \quad | \cdot \frac{-3}{2}$

Får $\frac{-3}{2}(t^2)' = -3t$

Og derfor $\left(-\frac{3}{2}t^2\right)' = -3t$

Dobbeltsjekk: $\left(-\frac{3}{2}t^2\right)' = -\frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}t = \underline{-3t}$

Hva deriverer jeg for å få 7?

Husker at $(t)' = 1 \Rightarrow (7t)' = 7.$

Har derfor at

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t$$

gir riktig derivert.

$$v'(t) = t^2 - 3t + 7$$

Dette er ett mulig svar, det finnes faktisk uendelig mange svar.

Eks:

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t - 10 \quad \text{gir også riktig derivert}$$

$$v'(t) = t^2 - 3t + 7 \quad (-0)$$

Alle løsningen fås ved å starte med én løsning, og plusse på en konstant.

Skriver da løsninga som

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t + C$$

En konstant (valgfri, ukjent)

Ser at $v(0) = C$.

Vi finner at C er startfarten til partikkelen.

Neste spørsmål: Hva er posisjonen til partikkelen?

$$s'(t) = v(t)$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t + C$$

Notasjon:

$$\int f(x)\,dx$$ ← Finn alle antideriverte til f.

Eks:

$$\int t^2 - 3t + 7 \, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t + C$$

Integrasjon/Antiderivasjon oppfører seg pent med hensyn på plussing og ganging med konstanter.

$$\boxed{\begin{gathered} (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x) \\ \Updownarrow \\ \int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} (k\cdot f(x))' = k\,f'(x) \\ \Updownarrow \\ \int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int f(x)\,dx \end{gathered}}$$

Essensielt to til derivasjonsregler:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

En tredje:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Regelen $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ kan vi bruke for å se en siste nyttig integrasjonsregel.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Dobbeltsjekk: $\cancel{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$ $\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cancel{(n+1)} x^n = x^n$

Vi hadde funnet at

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t + C$$

Vet at $s'(t) = v(t)$

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 7t + C \, dt$$

Sumregelen

$$\cancel{= \int \frac{1}{3}t^3 dt + \int \frac{3}{2}t^2 dt + \int 7t\, dt + \int C\, dt}$$

$$= \int \frac{1}{3}t^3 dt - \int \frac{3}{2}t^2 dt + \int 7t\, dt + \int C\, dt$$

Konstantregelen

$$= \frac{1}{3}\int t^3 dt - \frac{3}{2}\int t^2 dt + 7\int t\, dt + C\int 1\, dt$$

Potensregelen

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3+1}t^{3+1} + C_1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2+1}t^{2+1} + C_2\right) + 7\left(\frac{1}{1+1}t^{1+1} + C_3\right)$$

$$+ C\left(\frac{1}{0+1}t^{0+1} + C_4\right)$$

D

$$= \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + Ct + \boxed{\frac{1}{3}C_1 - \frac{3}{2}C_2 + 7C_3 + CC_4}$$

Sluttresultatet:

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + Ct + D$$

Så i stad at $v(0) = C = v_0$

Ser nå at

$$s(0) = D = s_0$$

Får da

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + v_0 t + s_0$$

Eks: En ball faller. $F = m \cdot a$, $F = -9.81 \cdot m$

$$v' = a = -9.81 \qquad v = \int -9.81 \, dt = -9.81 t + C$$

$$v(0) = C = v_0$$

$$s'(t) = v(t) = -9.81 t + v_0$$

$$s(t) = \int -9.81 t + v_0 \, dt = -9.81 \int t \, dt + \int v_0 \, dt$$

$$= -9.81 \cdot \frac{1}{2} t^2 + v_0 t + C$$

$$s(0) = C = s_0$$

$$s(t) = -\frac{9.81}{2} t^2 + v_0 t + s_0$$

Litt vanskeligere eksempel:

$$\int (3x^2-4x+1)(2x^2-5)\,dx$$

Vårt eneste valg for øyeblikket: Gjøre om til polynom.

Gange ut parenteson.

$$(3x^2-4x+1)(2x^2-5) = 6x^4-15x^2-8x^3+20x+2x^2-5$$
$$= 6x^4-8x^3-13x^2+20x-5$$

Nå kan vi antiderivere:

$$\int 6x^4-8x^3-13x^2+20x-5\,dx =$$
$$= \frac{6}{5}x^5 - 2x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 10x^2 - 5x + C$$

Alternativ tenkemåte: $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$(x^4)' = 4x^3$

Kan se: $8x^3 = 2\cdot 4x^3 \xrightarrow{\text{Antideriv}} 2\cdot x^4$

Ditto: $20x = 10\cdot 2x \xrightarrow{\text{Antideriv}} 10x^2$

For alle mulige kombinasjoner av kjente funksjoner, kan vi alltids derivere.

Dette er ikke sant for antiderivasjon.

For øyeblikket kan vi antiderivere polynomer. Men vi kan faktisk litt mer:

Husk at $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Vi kan derfor finne

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3/2}x^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 + C$$

Kan også antiderivere veldig spesifikke brøker.

Eks: $$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

For øyeblikket klarer vi ikke antiderivere om vi gjør sammensetningen.

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx$$

Finnes også en spesifikk potens vi ikke klarer integrere.

$$\int x^{-1} dx \neq \frac{1}{-1+1} x^{-1+1}$$
$$= \frac{1}{0} x^{0}$$

$$\int x^{1} dx = \frac{1}{1+1} x^{1+1} = \frac{1}{2}x^{2}$$

$$\int x^{0} dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} = x$$

$$\int 1 \, dx = x$$

Problem! Får ikke lov til å dele på 0.

Spesifikt $\int \frac{1}{x} dx$ kan vi ikke løse (ennå).

Vi kan også ennå ikke integrere for eksempel $\int 3^x dx$

Denne kan dere heller ikke derivere (ennå).

Regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$ antar at det er x-en, ikke n-en som endres.

Fordelen med skrivemåten $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n+1}$

Notasjonsmåte: $\int df = f + C$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \iff df = f'(x)dx$$
$$\iff \int df = \int f'(x) dx$$
$$\iff f + C = \int f'(x) dx$$