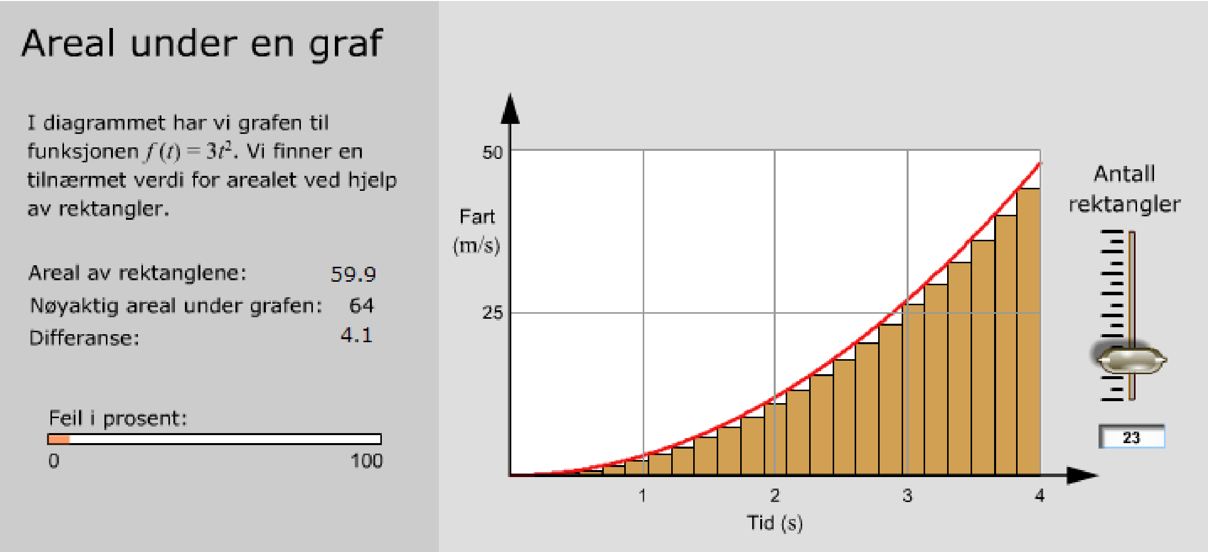
15. Integralregning

I dette kapittelet møter du en ny operasjon, integrering. Det er viktig å holde fokus på forståelsen av hva integrasjon betyr, ulike anvendelser, men også hvordan vi kan regne ut integralene.

Merk Jeg byttet litt om på rekkefølgen i forhold til sinusboka.

15.5 Bestemt integral som grense for en sum

Bestemt integral kan tolkes som et areal:



Her deles arealet opp i rektangler med høyde $= f(x)$ og bredde Δx.

Finner vi **summen av rektanglene**, vil vi få en tilnærmet verdi for arealet.

Når vi integrerer kan vi tenke oss at vi finner summen av mange slike <u>svært smale</u> integraler mellom de to gitte *x*-verdiene, a og b.

Dersom vi tenker at alle rektanglene har lik bredde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ blir sum av areal til n rektangler: $S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

Dersom *f* er kontinuerlig, eksisterer grenseverdien til S_n, definerer vi det bestemte integralet slik:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

, der n er antall rektangler.

Litt om notasjonen:

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$\int$ - integraltegn

$f(x)$ – integrand

dx – forteller at x er variabelen

Husk på at den deriverte ble definert som $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Vi sier gjerne at dx er differensialet til x – det vil si tilveksten, eller en liten endring i den uavhengige variabelen x. Mer om dette under differensial likninger og bestemte integraler

Høyden i et rektangel er jo et positivt tall, så

dersom flate stykket ligger over *x*-aksen:	$A = \int_a^b f(x)\,dx$
men	
dersom flate stykket ligger under *x*-aksen:	$A = -\int_a^b f(x)\,dx$

Formelen du trenger huske er arealformelen for et rektangel – dA = gh

15.1. Ubestemt integral

Vi skal nå se på den motsatte operasjonen til derivasjon. Det vil si å bestemme et funksjonsuttrykk når uttrykket for den deriverte er kjent.

$F(x)$ er den **antideriverte** til f (x) når $F'(x) = f(x)$

Eksempel

Er $f(x) = 2x$, kan vi la $F(x) = x^2$ siden $\left(x^2\right)' = 2x$, men det er flere funksjoner som har en derivert lik 2*x*.

$F(x) = x^2 + 1$ siden $\left(x^2 + 1\right)' = 2x$

$F(x) = x^2 + \pi$ siden $\left(x^2 + \pi\right)' = 2x$

$F(x) = x^2 + C$ siden $\left(x^2 + C\right)' = 2x$ $\quad C \in \mathbb{R}$

Vi sier gjerne at C er en vilkårlig konstant, (integrasjonskonstanten)

Vi kan bestemme verdien til *C* dersom det settes et tilleggs krav til funksjonen, f.eks. Vi har gitt at $F(x) = x^2 + C$ og krav om at $F(1) = 2$.

Da får vi likningen

$$1^2 + C = 2 \qquad \text{for } x = 1$$
$$C = 2 - 1^2 = 1$$
$$\underline{\underline{F(x) = x^2 + 1}}$$

Den vanlige skrivemåten for å finne den antideriverte er med integrasjonstegn:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Eksempler:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$
$$\int 2\,dx = 2x + C$$
$$\int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C \qquad \text{ledd for ledd}$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int (\sin x + \cos x)\,dx = -\cos x + \sin x + C \quad \text{Nb fortegn!}$$

For en del enkle funksjoner kan vi altså lese derivasjons regler baklengs for å finne integralet til funksjonen. Men snart får vi også bruk for integrasjonsregler og noen teknikker for å løse litt mer utfordrende integraler.

Noen generelle integrasjonsregler.

Integrasjon av konstanter: $\int k\,dx = kx + C \qquad k - \text{konstant}$

Eksempel: $\int 2\,dx = 2x + C \qquad \text{siden} \quad (2x)' = 2$

Vi vet at $\left(\dfrac{1}{r+1}x^{r+1}\right)' = \dfrac{1}{r+1}\cdot(r+1)\,x^{r+1-1} = x^r \qquad r \in \mathbb{R}$

Dette gir

Potensregel for integrasjon: $\int x^r\,dx = \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + C$ eller $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Eksempler:

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 + C}}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C = \frac{1}{-1}x^{-1} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + C}}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C = \underline{\underline{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C}}$$

Vi kan integrere ledd for ledd (tilsvarende som når vi deriverer)

$$\underline{\int (af(x)+bg(x))\,dx = aF(x)+bG(x)+C}$$

Bevis: ved å derivere svaret:

$$\left(aF(x)+bG(x)+C\right)' = af(x)+bg(x)$$

Eksempel 1:

$$\int \left(x^3+2x^2+3x+1\right)dx = \frac{1}{4}x^4+2\frac{1}{3}x^3+3\frac{1}{2}x^2+x+C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x+C}}$$

Eksempel 2:

$$\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-x+\frac{3}{x^2}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}-x+3x^{-2}\right)dx$$

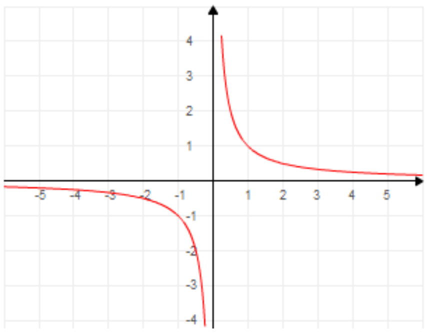
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+3\frac{1}{-1}x^{-1}+C \qquad \frac{1}{\frac{3}{2}}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \quad \textit{hvorfor?}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{x}+C}} \qquad x^{\frac{3}{2}}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x\sqrt{x}$$

Legg merke til at her kommer potensreglene til nytte for å skrive om uttrykk.

15.2. Integralet $\int \frac{1}{x}\,dx$

Grafen til $f(x)=\frac{1}{x}$



Når

$x>0$ er $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (husk $\ln x$ definert for $x>0$)

dvs $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

Og når

$x<0$ er $\left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$ (kjerneregel)

dvs for $x<0$ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x)+C$

Vi kan slå dette sammen til en formel:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \text{for } x\in\mathbb{R}$$

Eksempler:

a) $\int\left(4x+\frac{2}{x}\right)dx = 4\cdot\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|+C = \underline{\underline{2x^2+2\ln|x|+C}}$

b) $\int\frac{2x+1}{x}dx = \int\left(\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx = \underline{\underline{2x+\ln|x|+C}}$

I b) velger vi å skrive om (deler opp i to brøker, dog uten å endre verdien) før vi integrerer. Tren på å se etter de gode alternativene for omskriving!

15.3. Integrasjon av eksponentialfunksjoner

Derivasjonsreglene gir:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C \qquad k \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \qquad a > 0 \quad \text{og} \quad a \neq 1$$

Eksempel:

$$\int 2x+1+e^x+2e^{2x}dx =$$

$$= x^2+x+e^x+2\frac{1}{2}e^{2x}+C = \underline{\underline{x^2+x+e^x+e^{2x}+C}}$$

15.4. Flere integrasjonsformler

Når

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x + C$$

, tenk antiderivasjon også her.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$$

Dropper her antideriverte, av sammensatt uttrykk med kjerne som er et lineært uttrykk. (u = ax + b) Dette kommer generelt i kap 16.

15.6. Bestemt integral og antiderivasjon

Merk notasjonen: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

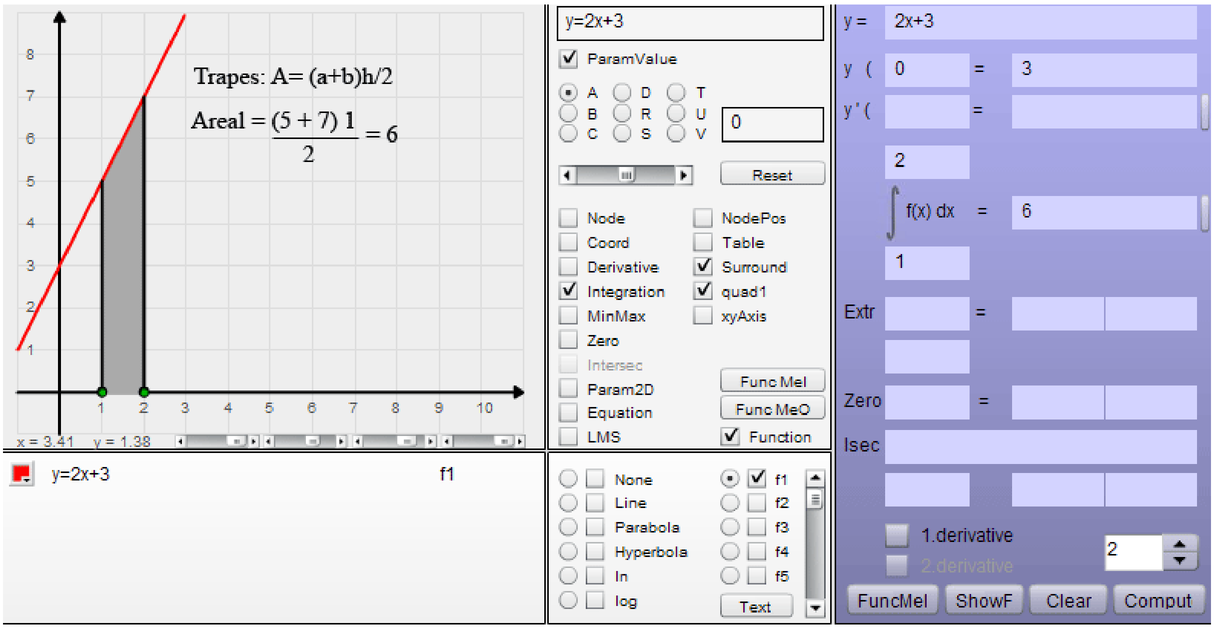
$$\int_1^2 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x+C\right]_1^2 = 4+6+C-(1+3+C) = 10-4 = \underline{\underline{6}}$$

Merk at C faller bort, det er derfor nok å velge den enkleste antideriverte (C = 0), så vanligvis skriver vi:

$$\int_1^2 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_1^2 = 4+6-(1+3) = 10-4 = \underline{\underline{6}}$$

Geometrisk tolkning:

Vi starter med å tegne grafen til $f(x) = 2x+3$, som er en rett linje. Og vil bestemme arealet mellom øvre og nedre grense, dvs det grå feltet i figur under. Vi ser at dette blir et trapes, og kan bruke geometri for å finne arealet. (for å sjekke om integralmetoden– virker her? NB dette er ikke noe bevis)



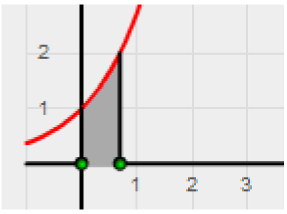
Figur laget med hjelp av simReal – kalkulator

Vi skal nå finne det samme arealet ved integrasjon:

$$\int_1^2 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x+C\right]_1^2 = 4+6+C-(1+3+C) = 10-4 = 6$$

15.7. Mer om integrasjon og areal

Eksempel 1



Vi skal finne avgrenset av grafen til

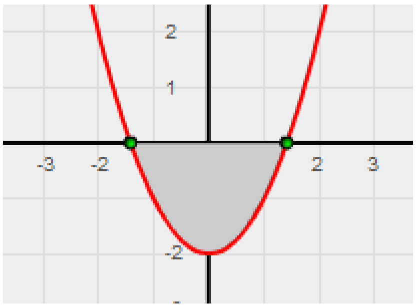
$f(x)=e^x$, $x-$aksen *og* $y-$aksen *og* $x=\ln 2$.

$$\int_0^{\ln 2} e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 2}=e^{\ln 2}-e^0=2-1=\underline{\underline{1}}$$

Eksempel 2:

Finn areal avgrenset av $f(x)=x^2-2$ og *x*- aksen.

Vi starter med å tegne en graf + eventuelt regne ut skjæringspunkter.



Finner skjæringspunktene:

$$f(x)=0$$
$$x^2-2=0$$
$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

Merk at arealet ligger under *x*-aksen, det betyr at $f(x)<0$, men høyden er jo ikke negativ. Vi får at $h=-f(x)$

Areal:

$$A=-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(x^2-2\right)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=-\left[\frac{1}{3}2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\left(-\frac{1}{3}2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\frac{-4}{3}\sqrt{2}+4\sqrt{2}=\frac{-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{3}=\underline{\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}}$$

Regel:

Areal under x-aksen: $A=-\int_a^b f(x)\,dx$

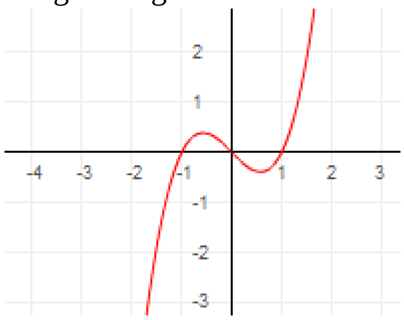
NB

Når vi skal bestemme areal avgrenset av en funksjonsgraf og *x*-aksen må vi tegne figur/ graf for å se om arealet er over eller under *x*-aksen og bestemme grensene før vi integrerer.

Eksempel 3:
Vi skal bestemme arealet av grenset av *x*-aksen og grafen til

$$f(x)=x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x+1)(x-1).$$

Først tegner vi grafen:



Vi ser at areal avgrenset av x = -1 og x = 0, ligger over x- aksen, men fra x = 0 til x = 1 er grafen under- For å bestemme arealet må vi regne ut to integraler:

$$A_1=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)=\underline{\frac{1}{4}}$$

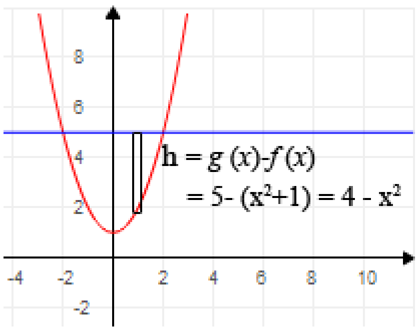
$$A_2=-\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx=\int_{0}^{1}\left(x-x^3\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{4}}$$

Samlet areal: $A=A_1+A_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

Areal mellom kurver

Vi skal bestemme arealet mellom $f(x)=x^2+1$ og $g(x)=5$



Når du skal sette opp et integral som gir arealet av flaten mellom to kurver, er det lurt å tegne inn et «typisk» rektangel og finne et uttrykk for høyden.

Vi trenger også å bestemme skjæringspunktene mellom kurvene:

$$\begin{aligned}f(x)&=g(x)\\x^2+1&=5\\x^2&=4\\x&=\pm\sqrt{4}=\pm2\end{aligned}$$

Areal: $\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}=8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=16-\frac{16}{3}=\underline{\underline{\frac{32}{3}}}.$

15.8. Integral og samlet resultat.

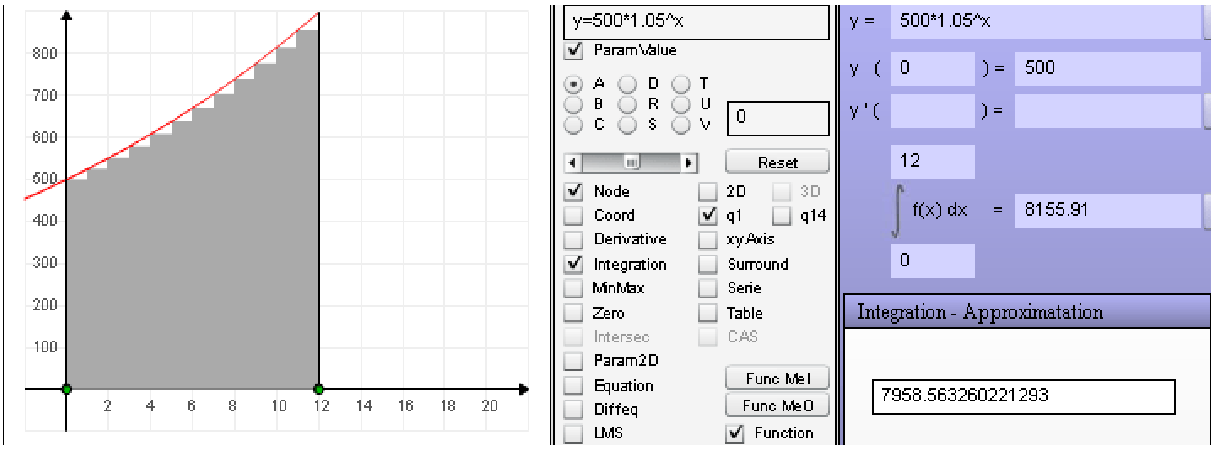
Vi kan også bruke integral til å bestemme en tilnærmet verdi til en sum som er vanskelig å bestemme nøyaktig, eller for å spare litt jobb.

Tenk at Ole sparer til lommepenger til tur neste år (om 12 mnd.). Han bestemmer seg for å legge 500 kr i et Norgesglass den første måneden, og så øke beløpet med 5 % for hver av de neste månedene. Anslå hvor mye han har etter 12 måneder.

Vi starter med å bestemme en funksjon som gir oss sparebeløpet for måned nr *x*.

$f(x) = 500 \cdot 1{,}05^x$ 5% økning gir vekstfaktor 1,05

Vi kan derfor avbilde den eksakte summen som rektangler under grafen. Se graf:



Vi kan beregne dette arealet til kr 7958, 56.

Vi kan finne en tilnærmet verdi ved å beregne integralet:

$$\int_0^{12} 500 \cdot 1{,}05^x dx = 500\left[\frac{1}{\ln 1{,}05} 1{,}05^x\right]_0^{12} = \frac{500}{\ln 1{,}05}\left(1{,}05^{12} - 1\right) \approx 8155{,}91$$

Vi ser at vi får en litt større verdi, for her tar vi med hele arealet under kurven, grått + de små hvite feltene. Men fordelen er at vi har et uttrykk som er enkelt å beregne.

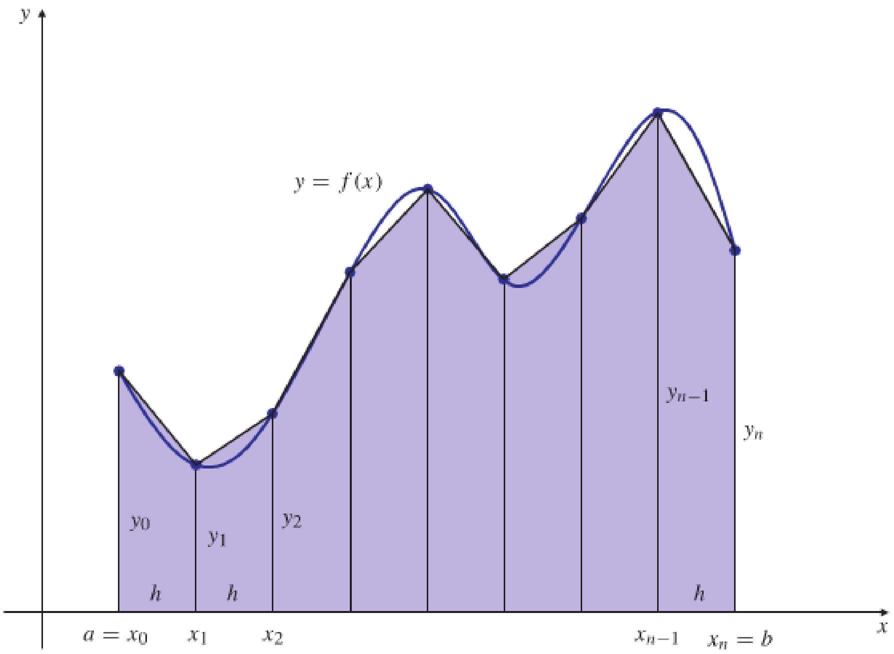
15.9. Numerisk integrasjon

Dette emnet er ikke eksamensrelevant på forkurs, og jeg finner heller ikke formlene i formelsamlingen for vgs. (Når du regner de forslåtte oppgavene, bruker du bare formlene fra boka.) Likevel gir dette en nyttig smakebit på et emne som er nyttig siden.

Med numerisk integrasjon går vi tilbake til å dele opp areal underkurven med rektangler e.l. for å kunne beregne en tilnærmet verdi for et integral. Enten fordi integralet ikke lar seg beregne analytisk eller fordi det arbeidskrevende eller fordi vi ikke kjenner selve funksjonen, bare noen målte verdier. (tilsvarende ide som med samlet resultat, bare motsatt)

Rektangelmetoden (eksempel i boka

Trapesmetoden



Hvordan kommer man frem til formelen?

For hvert delintervall tegnes et trapes som har areal gitt ved $A_T = \dfrac{(a+b)h}{2}$

Setter vi inn *y*-verdier (og setter felles h, utenfor parentesen) får vi at:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$
$$= h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right).$$

Hvert delintervall skal ha lik bredde,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = h$$

Simpson- metode

Ideen her er å bruke en parabel-bue mellom tre punkter (1. og andre delintervall) så over de tre neste (3. og 4. delintervall).

DEFINITION 5

Simpson's Rule

The **Simpson's Rule** approximation to $\int_a^b f(x)\,dx$ based on a subdivision of $[a,b]$ into an even number n of subintervals of equal length $h = (b-a)/n$ is denoted S_n and is given by:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx S_n \\ &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(\sum y_{\text{"ends"}} + 4\sum y_{\text{"odds"}} + 2\sum y_{\text{"evens"}}\right).\end{aligned}$$

Note that the Simpson's Rule approximation S_n requires no more data than does the Trapezoid Rule approximation T_n; both require the values of $f(x)$ at $n+1$ equally spaced points. However, Simpson's Rule treats the data differently, weighting successive values either $1/3$, $2/3$, or $4/3$. As we will see, this can produce a much better approximation to the integral of f.

fra calculus boka

Eksempel

Bruk trapesmetoden med n =4 delintervaller til å bestemme en tilnærmet verdi for integralet $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\sin x}\,dx$

Her står vi fast, dette er et integral det ikke er enkelt å finne den antideriverte til.

Vi finner derfor frem trapesformelen, som er metoden oppgaven ber oss bruke.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

med $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$n = 4 \text{ gir } \Delta x = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$T_4 = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)\right)$$

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{\pi}{12},\quad x_2 = \frac{2\pi}{12},\quad x_3 = \frac{3\pi}{12},\quad x_4 = \frac{4\pi}{12}$$

$$T_4 = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\sin x}\,dx \approx T_4 = \frac{\pi}{12}\left(2e^{\sin 0} + e^{\sin\frac{\pi}{12}} + e^{\sin\frac{\pi}{6}} + e^{\sin\frac{\pi}{4}} + 2e^{\sin\frac{\pi}{3}}\right) = \underline{\underline{1{,}7438}}$$