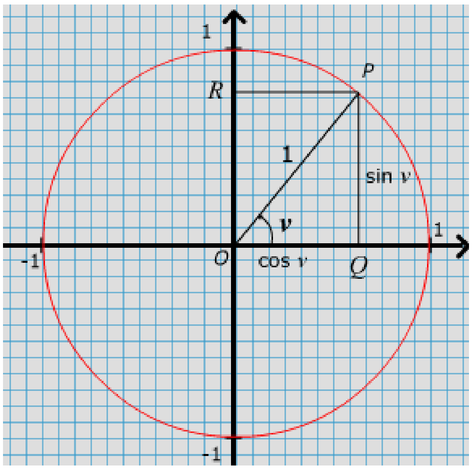
11 Trigonometriske funksjoner

Her skal du jobbe mer med trigonometriske formler og vi skal se på derivasjon og funksjonsdrøfting for trigonometriske funksjoner.

11.1 Sum og differanse av vinkler

Komplement vinkler:

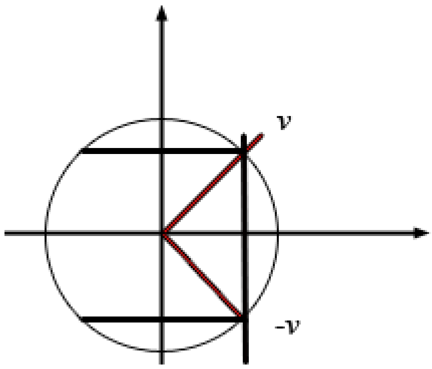


$$\cos(90° - v) = \sin v$$

$$\sin(90° - v) = \cos v$$

Legg merke til at $\angle ROP = 90° - v$
bruk så vanlig trekantberegninger til å bestemme lengdene til sidene *OR* og *RP*.

Negative vinkler: Vi ser av enhetssirkelen at



$$\cos(-v) = \cos v$$

$$\sin(-v) = -\sin v$$

som gir at

$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin v}{\cos v} = -\tan v$$

Formler for sum og differanse av vinkler:

$$\cos\left(u \pm v\right) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\sin\left(u \pm v\right) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\tan\left(u \pm v\right) = \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \cdot \tan v}$$

Merk den «kompakte» skrivemåten, her må du lese linje for linje for å få rett fortegn.

Utledning, kikk i boka …

Eksempel 1:

$$\begin{aligned}\sin 75° &= \sin(30° + 45°) \\ &= \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}}\end{aligned}$$

Eksempel 2:

$$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(30° + 45°)\\ &= \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}\end{aligned}$$

11.2 Doble vinkler

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Eksempel: Vi vet at $\sin v = \frac{3}{5}$, $v \in [0°, 90°]$

Finn $\sin 2v$, $\cos 2v$, $\tan 2v$

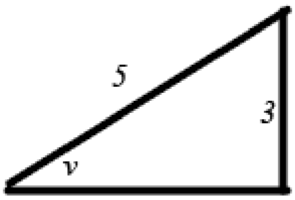
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ flere valg

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Ser at vi trenger å finne verdien til cos og tangens til *v*.

Lager en hjelpefigur:



Dette er en trekant med mål som passer opplysningene i oppgaven. Vi kan nå finne den siste siden ved hjelp av Pytagoras setning:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Vi finner så at

$$\cos v = \frac{hos}{hyp} = \frac{4}{5}$$

$$\tan v = \frac{mot}{hos} = \frac{3}{4}$$

Til slutt setter vi dette sammen og finner de svarene vi var på jakt etter:

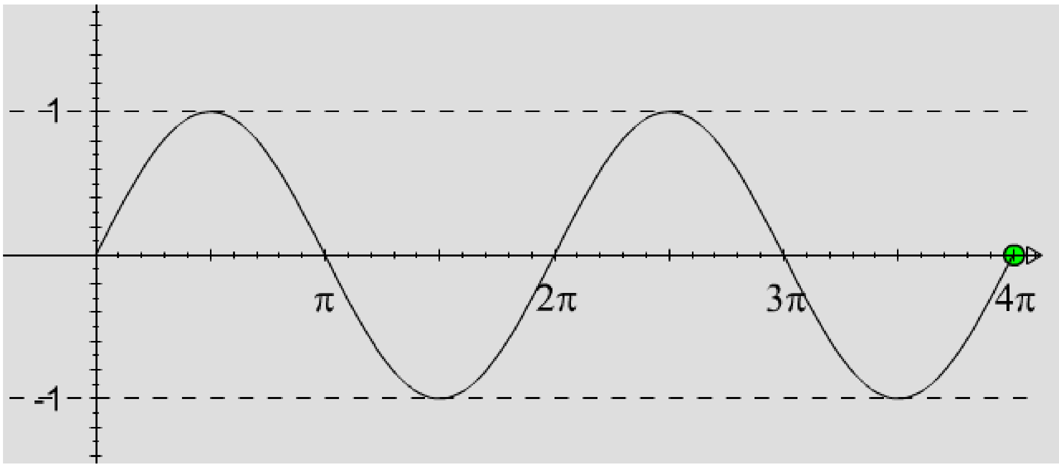
$$\sin 2v = 2\sin v \cos v = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$$

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{18}{25} = \underline{\underline{\frac{7}{25}}}$$

$$\tan 2v = \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{24}{16}}{\frac{7}{16}} = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$$

11.3 Sinusfunksjonen

$f(x)=\sin x$, og la vinkler måles i radianer.



<u>Merk</u> Vi sier at sin *x* er periodisk med en periode på 2π; $\sin x=\sin(x+2\pi)$

Legg merke til toppunkt i punktene $\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(\frac{5\pi}{2},1\right)$

og tilsvarende bunnpunkt i $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)\left(\frac{7\pi}{2},-1\right)$

Eksempel:
Finn ved nullpunktene, bunnpunktene og toppunktene til

$f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ved regning når $x\in[0,2\pi]$

Nullpunkt:

$$f(x)=0$$

$$4\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\frac{x}{2}=0 \qquad \vee \qquad \frac{x}{2}=\pi$$

$$\underline{\underline{x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=2\pi}}$$

Største verdi når "*sin*" er størst mulig, dvs =1 $\quad f_{maks}=4\cdot 1=4$.
Denne verdien oppnås når:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1$$

$$som\ gir\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$Dvs\ \ x=\pi \qquad \underline{\underline{Toppunkt:(\pi,4)}}$$

Minste verdi når ”*sin*” er minst mulig, det vil si =-1 $f_{\min} = 4 \cdot (-1) = -4$.

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -1$

$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow x = 3\pi$, men det er utenfor området. Sjekker derfor endepunktene.

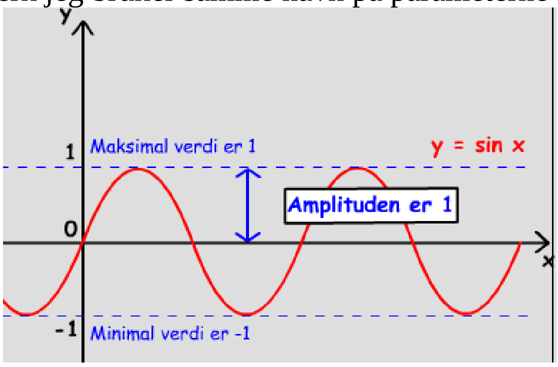
Bunnpunkt innen området er $(0,0)$, $(2\pi, 0)$

Graf:

11.4 Amplitude, periode, fase og likevektslinje

Hvordan påvirker parameterne grafen til $A\sin(cx+\varphi)+d = A\sin c(x+\frac{\varphi}{c})+d$?

(Merk jeg bruker samme navn på parameterne som formelsamlingene.)



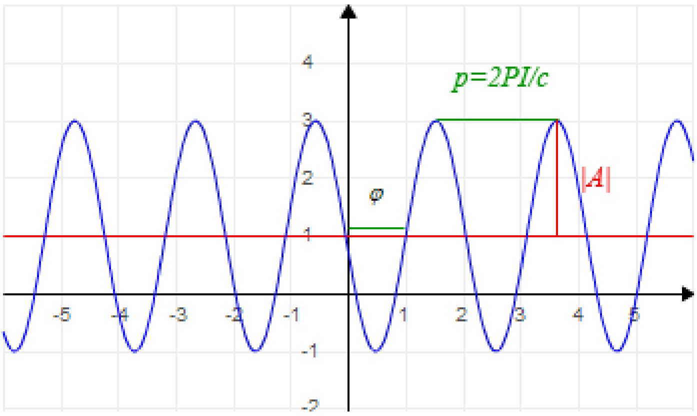
Amplitude A «bølgehøyden»

Likevektslinje: y = d «like mye av grafen er over og under denne linjen».

Faseforskyvning φ: grafen er forskjøvet φ grader/radianer

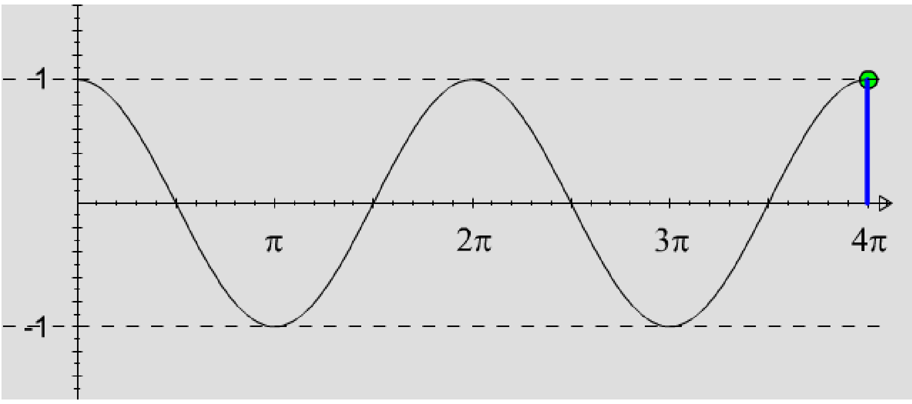
(mot høyre når φ < 0, mot venstre når φ > 0).

Periode: $p = \frac{2\pi}{c}$



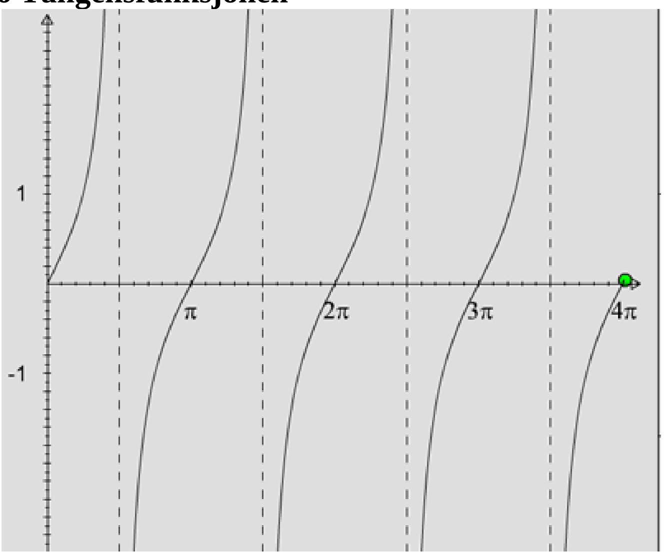
Sinusfunksjonen brukes gjerne i modeller der «ting» varierer på en periodisk måte. Eksempler er lydbølger, bølger - generelt

11.5 Cosinusfunksjonen



«analyse» tilsvarende som for sinus. Merk at cosinusfunksjonen er en sinuskurve som har fått en «dytt» mot høyre.

11.6 Tangensfunksjonen



Når vi skal tegne grafer til tangensfunksjoner starter vi med å finne nullpunktene og asymptotene.

tan x har asymptoter (brudd) for $x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n\,heltall$

Eksempel:

$f\left(x\right)=\tan(2x) \qquad x\in\left[-\pi,\pi\right]$

Finn nullpunktene og asymptotene:

Nullpunkter:

$$f\left(x\right)=0$$
$$\tan(2x)=0 \qquad x\in\left[-\pi,\pi\right]$$
$$2x=0+n\pi \,\bigg|\cdot\frac{1}{2}$$
$$x=0+\frac{n\pi}{2}$$
$$\underline{\underline{L=\left\{-\pi,-\frac{\pi}{2},0,\frac{\pi}{2},\pi\right\}}}$$

Asymptotene:

Ser på $\tan 2x$ som har brudd for

$$2x=\frac{\pi}{2}+n\pi \,\bigg|\cdot\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$$

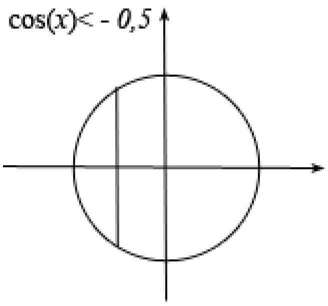
Asymptoter :

$$\underline{\underline{x=-\frac{3\pi}{4}\ \ ,\ \ x=-\frac{\pi}{4}\ \ ,\ \ x=\frac{\pi}{4}\ \ ,\ \ x=\frac{3\pi}{4}}}$$

11.7 Trigonometriske ulikheter

Enhetssirkelen kan vi også bruke til å løse ulikeheter som kan omformes til

sin x > a eller cos x < b $\qquad x\in\left[0,2\pi\right\rangle$



Du husker kanskje at $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$?

Ser av enhetssirkel at de aktuelle skjæringspunktene på sirkelen er:

$x=\frac{2\pi}{3}$ og $x=\frac{4\pi}{3}$.

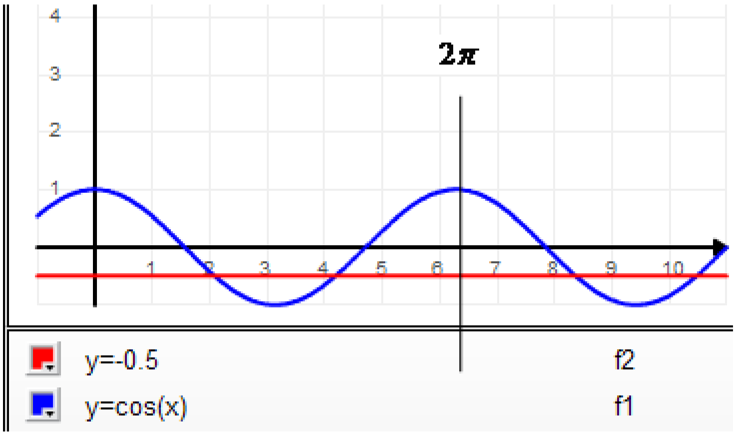
Løsning på ulikheten blir

$$\cos x < -0{,}5 \qquad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

$$\text{når} \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \quad \text{eller} \quad x \in \left\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\rangle$$

(verdier til venstre for linjen)

Dette kan vi også finne grafisk, selv om det ikke er så enkelt å lese av nøyaktige verdier. (lettere på kalkulatoren)



11.8 Derivasjon av de trigonometriske funksjonene

$$\left(\sin x\right)' = \cos x \qquad\qquad \left(\cos x\right)' = -\sin x$$

$$\left(\tan x\right)' = ?$$

$$\text{Bruker at: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad\qquad + \text{brøkregel}$$

$$\begin{aligned}\left(\tan x\right)' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \left(-\sin x\right)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad \text{enhetsformelen} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Eksempler: Husk at de «gamle» derivasjonsreglene også kan brukes her:

a) Eksempel med bruk av kjerneregelen

$$f(x) = \cos(\pi x) = \cos(u)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(u) \cdot u' \\ &= \underline{\underline{-\pi \sin(\pi x)}} \end{aligned}$$

b) Eksempel med produktregelen.

$$g(x)=\overset{u}{x^2}\,\overset{v}{\sin x}$$

$$g'(x)=\underline{\underline{2x\sin x+x^2\cos x}}$$

c) Eksempel med bruk av kjerneregel:

$$f(x)=\cos^2 x=(\cos x)^2=u^2$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=2u\cdot u'\\&=2\cos x\cdot(-\sin x)\\&=\underline{\underline{-2\sin x\cos x}}=(-\sin(2x))\quad \text{ved formel for sinus til den doble vinkel}\end{aligned}$$

11.9 Drøfting av trigonometriske funksjoner

Her er det ikke noe nytt, bruk derivasjonsreglene og oppsettet for funksjonsdrøfting du har brukt for polynomer og brøkfunksjoner. Det som er annerledes er utseende på likningene som må løses, men dette er jo også kjent fra tidligere.

Oppgave / eksempel

Funksjonen *f* er definert ved $f(x)=2(\cos x+1)\sin x$, $D_f=[0,2\pi\rangle$

a) Bestem nullpunktene til *f* (*x*).

b) Vis at $f'(x)=4\cos^2 x+2\cos x-2$.

c) Bestem ekstremalpunktene til *f*.

Vi har også funksjonen $g(x)=\sin x$

d) Skisser grafene til $f(x)$ og $g(x)$ i samme koordinatsystem.

e) Regn ut koordinatene til skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$.

Løsning:

a) Nullpunktene.

$$f(x)=0 \quad , \quad D_f=[0,2\pi\rangle$$

$$2(\cos x+1)\sin x=0 \qquad \text{Bruker produktregel } (a\cdot b=0,\text{ om } a=0 \text{ eller } b=0)$$

$$\cos x+1=0 \quad \vee \quad \sin x=0$$

$$\cos x=-1 \quad \vee \quad \sin x=0$$

$$x_1=\pi \quad \vee \quad x_2=0 \qquad x_3=\pi$$

$$\underline{\underline{L=\{0,\pi\}}}$$

b) Vis at $f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

$$f(x) = 2(\cos x + 1)\sin x$$
$$f'(x) = 2\left[(-\sin x)\cdot \sin x + (\cos x + 1)\cos x\right]$$
$$= 2\left[-\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x\right] \quad \text{NB enhetsformelen}$$
$$= 2\left[\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x\right]$$
$$= 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 \qquad QED$$

c) Ekstremalpunktene til *f*. (der $f'(x) = 0$)

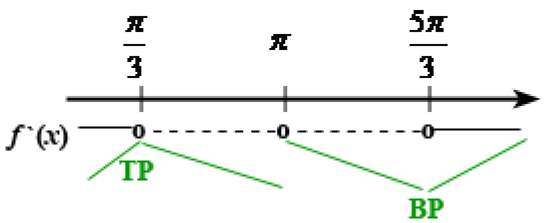
$$f'(x) = 0$$
$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0 \qquad \text{La } u = \cos x$$
$$4u^2 + 2u - 2 = 0 \qquad |:2$$
$$2u^2 + u - 1 = 0$$
$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$
$$= \frac{-1 \pm 3}{4}$$
$$u_1 = \frac{2}{4} = \underline{\frac{1}{2}}$$
$$u_2 = \frac{-4}{4} = \underline{-1}$$ dette gir oss to likninger å løse:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = -1$$

Tegner vi enhetssirkel ser vi at vi får løsningene:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \qquad x_2 = \frac{5\pi}{3} \qquad x_3 = \pi$$

For å sjekke om disse gir topp- eller bunnpunkt tegner vi fortegnslinje:



Denne finner vi ved først å tegne inn nullpunktene (i stigende rekkefølge) og så sjekke fortegnet ved å regne ut verdien til et valgt tall innen hvert intervall. Finner så koordinatene til punktene.

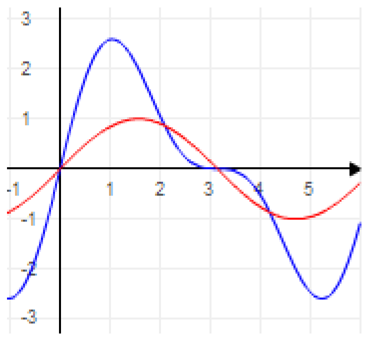
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}=2\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2,6$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}2\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}\approx -2,6$$

Toppunkt: $\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\approx\left(\frac{\pi}{3},\ 2,6\right)$

Bunnpunkt: $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\approx\ \left(\frac{5\pi}{3},\ -2,6\right)$

d) Skisser grafene til $f(x)$ og $g(x)$ i samme koordinatsystem.



Nb Aksen burde gått helt bort til 6,28 på *x*- aksen

e) Regn ut koordinatene til skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$.

$f(x)=g(x) \qquad x\in[0,2\pi\rangle$

$2(\cos x+1)\sin x=\sin x$

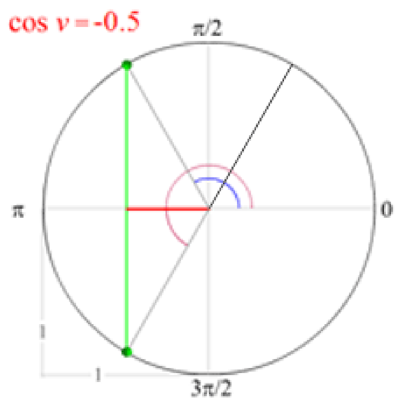
$2(\cos x+1)\sin x-\sin x=0$

$\sin x\left[2(\cos x+1)-1\right]=0$

$\sin x=0 \qquad \vee \qquad 2\cos x+2-1=0$

$\sin x=0 \qquad \vee \qquad \cos x=-\frac{1}{2}$

$x_1=0 \quad x_2=\pi \qquad x_3=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3} \qquad x_4=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$



$g(0)=\sin 0=0 \qquad g(\pi)=0$

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Skjæringspunkter : $(0,0)$, $(\pi,0)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$