EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER

Forkurs for ingeniørutdanning og maritim høgskoleutdanning

Universitetet i Stavanger, Universitetet i Tromsø, Høgskolen i Buskerud, Høgskulen i Sogn og Fjordane, Høgskolen i Sør-Trøndelag, Høgskolen i Telemark, Høgskolen i Vestfold, Høgskolen i Østfold, Høgskolen i Ålesund, Sjøkrigsskolen

Eksamensoppgave

30. mai 2012

MATEMATIKK

Bokmål

Eksamenstid:
5 timer

Hjelpemidler:
Godkjent tabell og kalkulator.

Andre opplysninger:
Dette oppgavesettet inneholder fire oppgaver med deloppgaver.
Du skal svare på alle oppgavene og deloppgavene.

Oppgavesettet har fire tekstsider medregnet forsiden.

OPPGAVE 1

a) Skriv så enkelt som mulig:

1) $e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(2)}$ 2) $32^{\frac{2}{5}} \cdot 4a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2$

b) Løs likningen ved regning: $\cos 2x = \frac{1}{2}$ der $x \in [0,2\pi]$

c) Løs likningen ved regning: $\sqrt{x^2 + 16} = \sqrt{2}\,x$

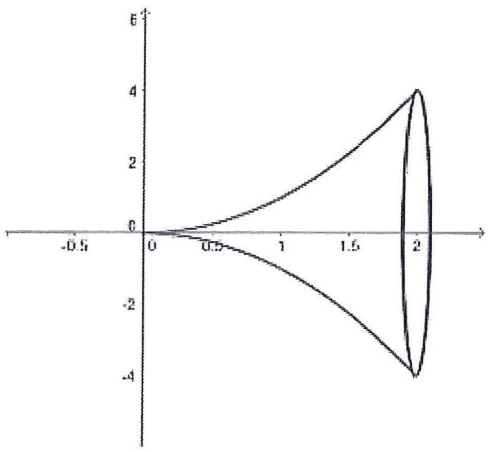
d) Løs likningssettet grafisk eller ved regning:

I: $4x - y = 2$ II: $x + y = 3$

e)

1) En uendelig geometrisk rekke har $a_1 = 5$ og $k = \ln 6 - 2$. Begrunn hvorfor rekka er konvergent og finn summen.
2) En uendelig geometrisk rekke har $a_1 = 5$ og $k = \ln x - 2$. For hvilke verdier av x er rekka konvergent?

f) Figuren nedenfor viser omdreiningslegemet som dannes når vi dreier grafen til $g(x) = x^2$ 360° om x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$. Beregn volumet av omdreiningslegemet.



g) Regn ut integralet: $\int x \sin x \, dx$

h) Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt forkursstudent stryker i norsk til eksamen er 4%. Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt student stryker i engelsk er 5%. Sannsynligheten for at en student som stryker i engelsk også stryker i norsk er 30%. Finn sannsynligheten for at en student som stryker i norsk også stryker i engelsk.

OPPGAVE 2

Gitt funksjonen $f(x) = \frac{3x^2-48}{x^2-4}$

a) Finn nullpunktene til f.

b) Vis at $f'(x) = \frac{72x}{(x^2-4)^2}$ og regn ut koordinatene til bunnpunktet til f.

c) Finn eventuelle asymptoter til f.

d) Regn ut likningen for tangenten til f i punktet $(4, f(4))$.

e) Vis ved polynomdivisjon at uttrykket for f kan skrives $f(x) = 3 - \frac{36}{x^2-4}$. Bruk dette til å regne ut arealet av området begrenset av grafen til f og linjene $x = -1$ og $x = 1$.

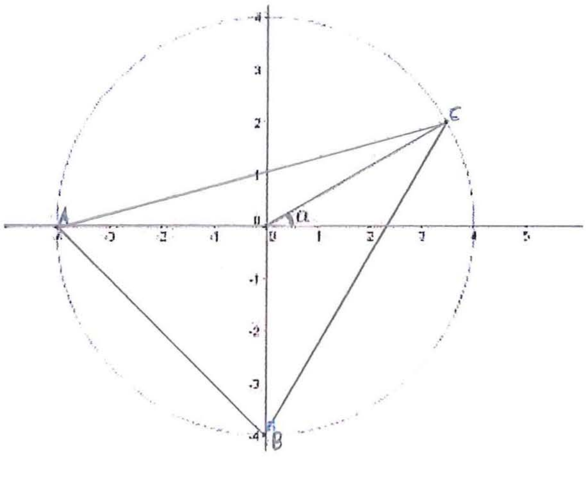
OPPGAVE 3

a)

1) Bruk formelen for sinus til en sum av to vinkler til å finne en eksakt verdi for $\sin 120^{\circ}$.

2) Vis at $\sin(90^{\circ} + v) = \cos(v)$.

Figuren nedenfor viser en sirkel med sentrum i origo og radius 4. Trekanten ABC har hjørner i $A(-4{,}0)$, $B(0,-4)$ og C på sirkelen. Vinkelen mellom $x-$ aksen og OC er α



b) Regn ut arealene av trekantene COB og ABC dersom $\alpha = 30°$

Vi lar $0° < \alpha < 90°$.

c) Bruk at $\sin(90° + \alpha) = \cos \alpha$ og $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$ til å vise at vi kan uttrykke arealet av trekanten ABC som $A(\alpha) = 8 + 8\cos\alpha + 8\sin\alpha$

d) Bestem ved regning den vinkelen α som gir det største arealet av trekanten ABC.

OPPGAVE 4

Gitt punktene $A(3,2,1)$, $B(6,7,-3)$ og $C(0,5,1)$

a) Regn ut $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og vinkelen mellom disse to vektorene.

b) Regn ut arealet av trekanten ABC.

c) Vis ved regning at likningen for planet α utspent av punktene A, B og C er
$x + y + 2z - 7 = 0$

d) Vis at punktet $D(2,5,0)$ ligger i planet α.

e) Gitt $\vec{v} = [1,1,2]$. Regn ut koordinatene til punktet E når $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$. Finn en parameterfremstilling av linja gjennom Dog E.

f) Vis at punktet $T(4,7,4)$ ligger på linja gjennom D og E. Finn høyden av pyramiden $ABCT$ der T er pyramidens toppunkt.

Løsning FK matematikk 30.05.2012

Oppgave 1

a) 1) $e^{(\ln 1)} \underline{= 1}$ 2) $\left(\sqrt[5]{32}\right)^2 \cdot 4a \cdot \frac{1}{a^2} = 4 \cdot \frac{4}{a} = \underline{\frac{16}{a}}$

b) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ når $2x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, dvs. når $2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ eller $2x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$. Dette gir at $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$, dvs $\underline{x = \frac{\pi}{6}}$ eller $\underline{x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}}$ eller $\underline{x = \frac{5\pi}{6}}$ eller $\underline{x = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}}$

c) Opphøyer i andre potens og får $x^2 + 16 = 2x^2$, dvs. $-x^2 + 16 = 0$, altså $-(x^2 - 16) = 0$, dvs. $x = -4$, eller $x = 4$. Setter vi prøve på svaret, ser vi at $x = -4$ ikke stemmer, så svaret er $\underline{x = 4}$.

d) Likning II gir at $y = -x + 3$, som innsatt i likning I gir $4x - (-x + 3) = 2$ som gir at $x = 1$. Svaret blir dermed $\underline{x = 1 \text{ og } y = 2}$.

e) 1) Rekka er konvergent fordi den oppgitte $k = \ln 6 - 2$ er et tall mellom 1 og -1. Summen er $s = \frac{5}{1-(\ln 6 - 2)} = \underline{-\frac{5}{\ln 6 - 3}}$

2) Rekka er konvergent når $-1 < \ln x - 2 < 1$, dvs. når $1 < \ln x$ og samtidig $\ln x < 3$. Dette gir at rekka er konvergent når $x < e^3$ og samtidig $x > e$. Svar: Rekka er konvergent når $\underline{x \in \langle e, e^3 \rangle}$.

f) $V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \underline{= \frac{32}{5}\pi \approx 20{,}11}$

g) Delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sin x$ gir $u' = 1$ og $v = -\cos x$ som gir at $\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = \underline{-x \cos x + \sin x + C}$

h) E: Stryker i engelsk. N: Stryker i norsk. Da er $\mathrm{P(E)} = 0{,}05$, $\mathrm{P(N)} = 0{,}04$ og $\mathrm{P(N|E)} = 0{,}3$. Altså er $\mathrm{P(E|N)} = \frac{\mathrm{P(N|E)P(E)}}{\mathrm{P(N)}} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{0{,}04} = \underline{0{,}375} = 37{,}5\%$.

Oppgave 2

a) $f(x) = 0$ når $3x^2 = 48$ dvs. når $\underline{x = \pm 4}$.

b) Den deriverte til f er null bare når $x = 0$, og drøfting med fortegnsskjema viser at dette er et bunnpunkt. Koordinatene for bunnpunktet er $\underline{(0{,}12)}$

c) Horisontal asymptote: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$, så $\underline{y = 3 \text{ er horisontal asymptote}}$. Nevneren er null når $\underline{x = \pm 2}$, så dette er vertikale asymptoter. Funksjonen har ingen skrå asymptoter.

d) Stigningstallet til tangenten er $f'(4) = 2$, og tangenten går gjennom punktet $(4{,}0)$. Likningen for tangenten er da gitt ved $y - 0 = 2(x - 4)$ som gir $\underline{y = 2x - 8}$

e) Polynomdivisjon: $(3x^2 - 48) : (x^2 - 4) = 3 + \frac{-36}{x^2-4}$.
$\int_{-1}^{1} \left(3 + \frac{-36}{x^2-4}\right) dx = \int_{-1}^{1} 3 \, dx + \int_{-1}^{1} \frac{-36}{x^2-4} dx = 6 + \int_{-1}^{1} \frac{-36}{x^2-4} dx$. Bruker delbrøksoppspalting og skriver om integralet: $6 + \int_{-1}^{1} \frac{-36}{x^2-4} dx = 6 + \int_{-1}^{1} \frac{-9}{x-2} + \frac{9}{x+2} dx = \underline{6 + 18 \ln 3 \approx 25{,}8}$.

Oppgave 3

a) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ \cos 30^\circ - \cos 90^\circ \sin 30^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
og $\sin(90^\circ + v) = \sin 90^\circ \cos v - \cos 90^\circ \sin v = 1 \cdot \cos v - 0 = \underline{\cos v}$

b) I ΔCOB kjenner vi to sider og vinkelen mellom dem, og arealsetningen gir da at $A_{\Delta COB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(90^\circ + 30^\circ) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Videre må $\angle COA = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, og igjen kan vi bruke arealsetningen for å finne at $A_{\Delta COA} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$. Til slutt: $A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Arealet av hele trekanten er derfor $A = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 + 8 = \underline{4\sqrt{3} + 12}$

c) $A_{\Delta COB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = 8 \sin(90^\circ + \alpha) = 8 \cos \alpha$ og $A_{\Delta COA} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = 8 \sin(180^\circ - \alpha) = 8 \sin \alpha$. Derfor er det totale arealet $A(\alpha) = 8 + 8 \cos \alpha + 8 \sin \alpha$.

d) Sett $A(\alpha) = 8 + 8 \cos \alpha + 8 \sin \alpha$. Da er $A'(\alpha) = -8 \sin \alpha + 8 \cos \alpha$. Dette gir at $A'(\alpha) = 0$ når $\sin \alpha = \cos \alpha$, dvs. når $x = \frac{\pi}{4}$ eller $x = \frac{5\pi}{4}$. Fortegnsskjema viser at $x = \frac{\pi}{4}$ gir toppunkt for $A(\alpha)$. Arealet er altså størst når $\alpha = 45^\circ$.

Oppgave 4

a) $\overrightarrow{AB} = [3,5,-4], \overrightarrow{AC} = [-3,3,0]$. Vinkel: $\cos v = \frac{[3,5,-4] \cdot [-3,3,0]}{|[3,5,-4]| \cdot |[-3,3,0]|} = \frac{6}{\sqrt{50}\sqrt{18}} = 0{,}2$ som gir $v = \cos^{-1} 0{,}2 \approx 78{,}46^\circ$

b) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|[12,12,24]| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 12^2 + 24^2} = 6\sqrt{6}$

c) En normalvektor til planet er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12,12,24] = 12[1,1,2]$, og likningen for planet α er $(x-3) + (y-2) + 2(z-1) = 0$, som etter opprydding blir $\underline{x + y + 2z - 7 = 0}$

d) Vi sjekker om koordinatene til D passer inn i likningen for planet: $2 + 5 + 0 - 7 = 0$, så det stemmer. Da ligger D i planet α.

e) $\overrightarrow{DE} = [x-2, y-5, z] = [1,1,2]$ gir at koordinatene til E er $(x,y,z) = (3,6,2)$.
Parameterfremstilling av linja gjennom D og E: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + t \\ z = 2t \end{cases}$

f) Ved å velge $t = 2$ i paramterfremstillingen for linja gjennom D og E, får vi $\begin{cases} x = 2 + 2 = 4 \\ y = 5 + 2 = 7, \\ z = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases}$ som er koordinatene til T. Derfor ligger T på linja. Høyden av pyramiden: Linja gjennom D og E er normal til planet α, så derfor er lengden av $\overrightarrow{DT}$ nettopp høyden i pyramiden. $|\overrightarrow{DT}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$.