Løsningsforslag

Oppgave 1

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\underline{1}$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{-\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x}{\cos x}=\underline{-2}$ **.**

Oppgave 2

1. $y=\frac{5}{\sqrt{x}}+6x\sqrt{x}=5x^{-1/2}+6x^{3/2}$ gir $y'=-\frac{5}{2}x^{-3/2}+9x^{1/2}=\underline{-\frac{5\sqrt{x}}{2x^2}+9\sqrt{x}}$.

2. $y=\tan^3 x=u(v)$ der $u=v^3$ og $v=\tan x$.

   Dvs. $y'(x)=u'(v)v'(x)$ der $u'(v)=3v^2=3\tan^2 x$ og $v'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

   Dette gir: $y'=\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}=\underline{\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}}$.

3. $y=\sqrt{x}\ln x=x^{1/2}\ln x=uv$ der $u=x^{1/2}$ og $v=\ln x$.

   Dvs. $y'=u'v+uv'$ der $u'=\frac{1}{2}x^{-1/2}$ og $v'=\frac{1}{x}$.

   Dette gir: $y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x+x^{1/2}\frac{1}{x}=\underline{\frac{1+(1/2)\ln x}{\sqrt{x}}}$. .

Oppgave 3

a) En kurve er gitt ved $y=\sqrt{x+1}$. Avstanden fra origo er $s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x+1}$.

   $s'=\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)^{-1/2}(2x+1)=\frac{x+0{,}5}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Minst avstand, $s'=0$, for $\underline{x=-0{,}5}$ som gir

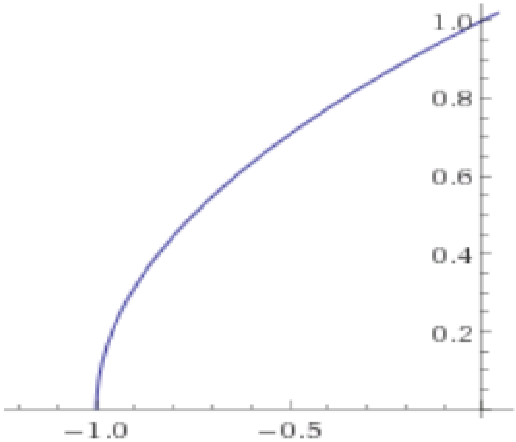
   $\underline{y=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71}$. Kurvens minste avstand fra origo er $\underline{s\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87}$.

b) Den deriverte av y er $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. I punktet $(x_0,y_0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ med minst avstand fra

   origo er $y'=1/\sqrt{2}$. Tangenten til kurven i dette punktet er gitt ved

   $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ som gir $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$, dvs. $\underline{y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{3}{2}\right)}$.

   Grafen til funksjonen er vist nedenfor.



Oppgave 4

a) $\int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}\,dx = \frac{1}{-3/2+1}x^{-3/2+1} + C = -2x^{-1/2} + C = \underline{-\frac{2}{\sqrt{x}} + C}$.

b) $\int 40\cos(5x)dx$. Innfører ny variabel $u = 5x$, dvs. $x = (1/5)u$ og $dx = x'(u)du = (1/5)du$. Dermed tar integralet formen $\int 40\cos u \frac{du}{5} = 8\int \cos u\,du = 8\sin u + C = \underline{8\sin(5x) + C}$.

c) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. Innfører ny variabel $u = \sin x$ som gir $du = u'(x)dx = \cos x\,dx$.
Dermed tar integralet formen $\int e^{u}\,du = e^{u} + C = \underline{e^{\sin x} + C}$.

Oppgave 5

a) På skjæringspunktene til kurvene er $y_1 = y_2$, dvs. $x^3 - x + 3 = x^2 + x + 3$, dvs. $x^3 - x^2 - 2x = 0$, eller $x\left(x^2 - x - 2\right) = 0$. Likningen $x^2 - x - 2 = 0$ har løsningene: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$.
Vi har $y(2) = 9$ og $y(-1) = 3$. De tre skjæringspunktene er $\underline{(-1,3),\ (0,3),\ (2,9)}$.

b) I området $0 \le x \le 2$ er $y_2 \ge y_1$. Følgelig er arealet mellom kurvene for positive verdier av x :
$A = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)dx$ der x_1 og x_2 er x-verdiene til de to skjæringspunktene som begrenser det aktuelle området. Dette gir $A = \int_0^2 \left(2x + x^2 - x^3\right)dx = \left[x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3} - 4 = \underline{\frac{8}{3}}$.

Oppgave 6

a) $A=\int_{-1}^{0}\sqrt{x+1}\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^{1/2}\,dx$. Vi innfører ny variabel $u=x+1$ som gir $du=dx$ og

$u(-1)=0$ og $u(0)=1$. Dermed fås $A=\int_{0}^{1}u^{1/2}du=\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^1=\underline{\frac{2}{3}}$.

b) Vi kan tenke oss at rotasjonslegemet som dannes når flaten mellom grafen, *x*-aksen og *y*-aksen roteres om *x*-aksen, består av sirkelskiver med tykkelse *dx*, og radius *y*. En slik skive har volumet $dV=\pi y^2dx=\pi(x+1)dx$. Den roterte flaten begrenses av $x_1=-1$ og $x_2=0$.

Følgelig er rotasjonslegemets volum: $V=\pi\int_{-1}^{0}(x+1)dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{0}=\underline{\frac{\pi}{2}}$.

Oppgave 7

En linje er gitt ved: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{6}$. Den går gjennom de to punktene A$(0,\ 7/6)$ og B$(7/8, 0)$.

Vektoren fra A til B har komponenter $\overrightarrow{AB}=[7/8,-7/6]$. Vektorens lengde er

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{35}{24}$. En enhetsvektor med samme retning er: $\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{24}{35}\left[\frac{7}{8},-\frac{7}{6}\right]=\underline{\frac{1}{5}[3,-4]}$.

Oppgave 8

a) Likningen for et plan som passerer gjennom et punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ og har normalvektor $\vec{n}=[a,b,c]$, er: $ax+by+cz=d$ der $d=ax_0+by_0+cz_0$.

I denne oppgaven går et plan gjennom de 3 punktene $A(0,-1,1)$, $B(5,0,1)$, $C(4,-1,0)$.

Vektorene $\overrightarrow{AB}=[5,1,0]$ og $\overrightarrow{AC}=[4,0,-1]$ ligger begge i planet. Følgelig er

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 5 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=[-1,\ 5,\ -4]$ en normalvektor til planet.

Ved å bruke at punktet A ligger i planet fås: $d=0\cdot(-1)+(-1)\cdot 5+1\cdot(-4)=-9$.

Dermed blir planets likning: $-x+5y-4z=-9$ eller $\underline{x-5y+4z=9}$.

b) Et plan har likningen $x+z=4$. Det betyr at $\underline{\vec{n}_1=[1,\ 0,\ 1]}$ er en normalvektor til planet. Vekt oren ligger i x,z -planet og er altså vinkelrett på y -aksen. Planet er parallelt med y-aksen og går gjennom punktet $(0,\ 0,\ 4)$ på $z-$ aksen.

Et annet plan har likningen $-2x+2y=13$.

Det har normalvektor $[-2,\ 2,\ 0]$ eller $\underline{\vec{n}_2=[-1,\ 1,\ 0]}$.

c) Skalarproduktet mellom normalvektorene er $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1$.

Lengdene av normalvektorene er $|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 0^1 + 1^2} = \sqrt{2}$ og $|\vec{n}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^1 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Skalarproduktet av vektorene kan også skrives $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2|\cos\alpha$ der α er vinkelen mellom vektorene. Dette gir $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_1|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$.

Følgelig er vinkelen mellom normalvektorene $\underline{2\pi / 3}$ radianer eller $\underline{120^0}$.