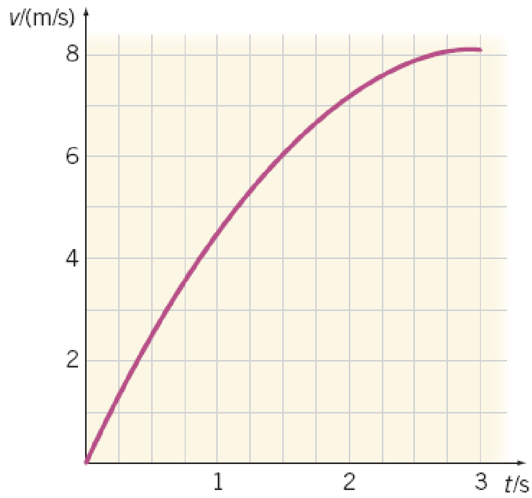
LØST OPPGAVE 14.313

14.413

Grafen viser farten *v* som funksjon av tida *t* i de tre første sekundene av et hundremeterløp.



a) Hvor stor er akselerasjonen i det øyeblikket farten er 4,0 m/s?

b) Bruk avlesninger fra grafen og regresjon til å bestemme den andregradsfunksjonen som passer best til grafen.

Vis at vi kan si at akselerasjonen er en lineær funksjon av tida.

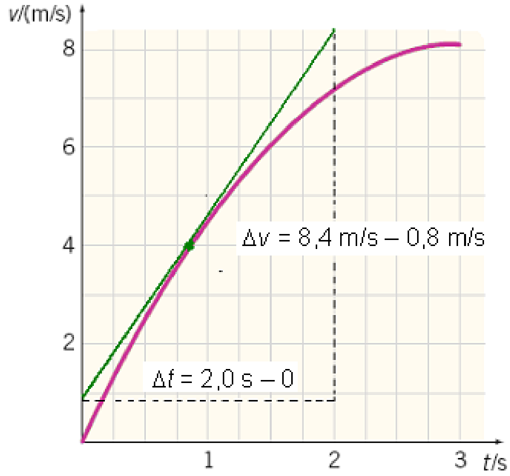
Finn den største farten til løperen under løpet.

Vi antar at løperen etter å ha nådd maksimalfart holder konstant fart i resten av løpet.

c) Finn en tilnærmet tid for 100 m-løpet.

Løsning:

a) Akselerasjonen er lik den deriverte av *v* ved det tidspunktet der $v = 4{,}0$ m/s. Siden vi ikke har et uttrykk for *v* finner vi den deriverte som stigningstallet til tangenten i dette punktet på grafen, se figuren på neste side.



Av figuren finner vi akselerasjonen

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8,4\ \text{m/s} - 0,8\ \text{m/s}}{2,0\ \text{s} - 0} = \underline{3,8\ \text{m/s}^2}$$

b) Vi leser av på grafen og får følgende tabell over sammenhørende verdier for tida t og farten v:

t/s	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v/(m/s)	0	2,5	4,5	6,0	7,2	7,9	8,1

Ved hjelp av et digitalt hjelpemiddel finner vi med kvadratisk regresjon at den andregradsfunksjonen som passer best til grafen er

$$v(t) = \underline{-0,9\ \text{m/s}^3 \cdot t^2 + 5,4\ \text{m/s}^2 \cdot t}$$

Akselerasjonen er lik den deriverte av farten. Hvis farten er en andregradsfunksjon av tida, må akselerasjonen være en lineær funksjon. Funksjonen blir:

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) = -0,9\ \text{m/s}^3 \cdot 2t + 5,4\ \text{m/s}^2 \\ &= \underline{-1,8\ \text{m/s}^3 \cdot t + 5,4\ \text{m/s}^2} \end{aligned}$$

Når farten er størst, er den deriverte av farten, dvs. akslerasjonen, lik null:

$$a(t_1) = 0$$

$$-1,8\ \text{m/s}^3 \cdot t_1 + 5,4\ \text{m/s}^2 = 0$$

$$t_1 = \frac{-5,4\ \text{m/s}^2}{-1,8\ \text{m/s}^3} = 3,000\ \text{s}$$

Den største farten er altså

$$\begin{aligned} v_{\text{maks}} &= v(3,000\ \text{s}) \\ &= -0,9\ \text{m/s}^3 \cdot (3,000\ \text{s})^2 + 5,4\ \text{m/s}^2 \cdot 3,000\ \text{s} = \underline{8,1\ \text{m/s}} \end{aligned}$$

c) Vi finner først den veien løperen har løpt på de tre første sekundene ved hjelp av integrasjon:

$$
\begin{aligned}
s(3,0\ s) &= \int_0^{3,0\,\mathrm{s}} v(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{3,0\,\mathrm{s}} (-0,9\ \mathrm{m/s^3} \cdot t^2 + 5,4\ \mathrm{m/s^2} \cdot t)\mathrm{d}t \\
&= \left[-0,3\ \mathrm{m/s^3} \cdot t^3 + 2,7\ \mathrm{m/s^2} \cdot t^2\right]_0^{3,0\,\mathrm{s}} \\
&= -0,3\ \mathrm{m/s^3} \cdot (3,0\ \mathrm{s})^3 + 2,7\ \mathrm{m/s^2} \cdot (3,0\ \mathrm{s})^2 - 0 = 16,20\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

I resten av løpet er farten konstant slik at vi kan bruke likningen $s = vt$. Da blir tida for resten av løpet:

$$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{100\ \mathrm{m} - 16,20\ \mathrm{m}}{8,1\ \mathrm{m/s}} = 10,30\ \mathrm{s}$$

Tida for hele løpet blir da:

$$t = t_1 + t_2 = 3,000\ \mathrm{s} + 10,30\ \mathrm{s} = \underline{13\ \mathrm{s}}$$