Løsningsforslag utsatt eksamen matematikk 3-termin sommeren 2017

Oppgave 1

Linjen har likning: $y=\frac{3}{4}x+b$. Innsetting av koordinatene til punktet som linjen passerer gjennom gir

$9=\frac{3}{4}4+b$, dvs. $b=9-3=6$. Linjens likning er da: $y=\frac{3}{4}x+6$. Skjæringen med x-aksen har $y=0$ som gir $\underline{x=-8}$. Skjæringen med y-aksen har $x=0$ som gir $y=6$.

Oppgave 2.

a) Vi skriver funksjonen på formen $y=\frac{1}{24}x^{3/2}+2x^{-1/2}$ og bruker regelen for å derivere en potensfunksjon. Det gir: $\underline{y'=\frac{1}{16}x^{1/2}-x^{-3/2}}=\frac{1}{16}\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\underline{\frac{1}{16}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}}=\sqrt{x}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{x^2}\right)$.

b) Minimumspunktet har $y'=0$ som gir $x^2=16$, $x=4$, $\sqrt{x}=2$. Dette gir $y=\frac{1}{24}x\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{24}\cdot 4\cdot 2+\frac{2}{2}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$. Minimumspunktet er $\underline{\left(4,\ \frac{4}{3}\right)}$.

Oppgave 3

Tangentens likning kan skrives $y=ax+b$. Skjæringen med y-aksen er i $y=1/4$, dvs. $y=1/4$ for $x=0$. Det gir $b=1/4$. Linjen og parabelen har samme verdi av y og y' i tangeringspunktet. Da er $y'=a$. Likningen for parabelen kan skrives $y=x^{1/2}$ som gir $y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. I tangeringspunktet har vi da: $ax+\frac{1}{4}=\sqrt{x}$ og $a=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Fra den siste likningen har vi $\sqrt{x}=\frac{1}{2a}$ og $x=\frac{1}{4a^2}$. Innsetting i den første likningen gir $a\cdot\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2a}$, dvs. $\frac{1}{4a}=\frac{1}{4}$ som gir $a=1$. Det betyr at tangeringspunktet er $\underline{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}$.

Oppgave 4

a) $I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$. Ny variabel $u=\sqrt{\sin x}$ gir $u^2=\sin x$ og $2udu=\cos x\,dx$. Dermed tar integralet formen $I_1=\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int\frac{2udu}{u}du=\underline{\int 2du}=2u+C=\underline{2\sqrt{\sin x}+C}$.

b) $I_2 = \int x^3 \ln x \, dx$. Vi bruker delvis integrasjon og får:

$$I_2 = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C = \underline{\frac{1}{4}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right)} + C .$$

c) $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$. Dette gir

$2\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + 2C = e^x(\sin x - \cos x) + 2C$ eller

$$\underline{\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C} .$$

Oppgave 5

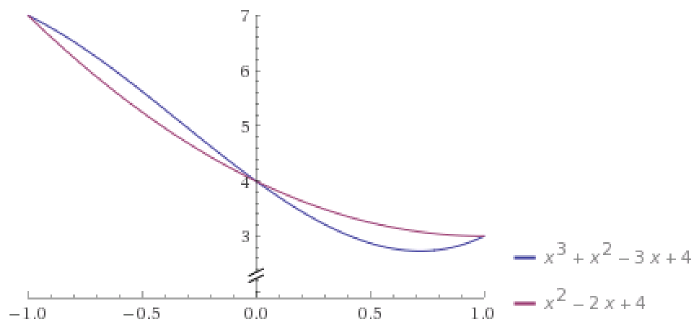
Derivasjon gir $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$, $g'(x) = 2x - 2$. Ny derivasjon gir $f''(x) = 6x + 2$, $g''(x) = 2$.

I ekstremalpunktene er den deriverte lik null. $f'(x) = 0$ gir

$x_1 = -\frac{1+\sqrt{10}}{3} \approx -1{,}4$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}-1}{3} \approx 0{,}7$, og $g'(x) = 0$ gir $x_3 = 1$.

Skjæringspunktene mellom kurvene er gitt ved $x^3 + x^2 - 3x + 4 = x^2 - 2x + 4$, dvs. $x^3 - x = 0$ eller $x(x^2 - 1) = 0$. En løsning er $x_4 = 0$. De to andre finnes av $x^2 - 1 = 0$ som gir $x_5 = -1$, $x_6 = 1$.

Grafene til funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er plottet nedenfor.



Arealet mellom grafene til venstre for *y*-aksen er

$$A_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \underline{\frac{1}{4}} .$$

Arealet mellom grafene til høyre for *y*-aksen er

$$A_2 = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{4}} .$$

Oppgave 6

Volumet av rotasjonslegemet er $V=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\sin x\cos x+x\right]_0^{\pi/2}=\underline{\frac{\pi^2}{4}}$.

Oppgave 7

Linjen $5y-12x=60$ skjærer x-aksen i $(-5,0)$ og y-aksen i $(0,12)$. Det betyr at vektoren $[5,12]$ er parallell med linjen. Den har lengde $\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$. Følgelig er $\underline{\left[\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right]}$ en enhetsvektor parallell med linjen.

Oppgave 8

a) Vektorene langs trekantens sidekanter er $\overrightarrow{AB}=[1,3,-2]$, $\overrightarrow{AC}=[5,1,-3]$, $\overrightarrow{BC}=[4,-2,-1]$. Skalarproduktet av de to første vektorene er $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot 5+3\cdot 1+(-2)\cdot(-3)=14$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot 4+3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)=0$. Dette viser at den rette vinkelen er ved hjørnet B. Dvs. sidekantene AB og BC er vinkelrett på hverandre. De har lengder $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$ og $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$.

b) Følgelig er trekantens areal $\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 7}=\underline{\frac{7}{2}\sqrt{6}}$.

Oppgave 9

Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $\vec{A}=[1,2,-1]$, $\vec{B}=[0,1,1]$ og $\vec{C}=[3,-1,2]$ er

$$V=\left|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1\cdot 3)-1\cdot\left[1\cdot(-1)-2\cdot 3\right]=2+3+7=\underline{12}.$$