# Eksamen matematikk forkurs, vår 2015

## LØSNINGSFORSLAG

### Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{a}}{b^3}\right)^2$$

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{a}}{b^3}\right)^2 = \frac{a^{-8}}{b^{-4}} \cdot \frac{a^2 a}{b^6} = \frac{a^{-5}}{b^2} = \underline{\underline{\frac{1}{a^5 b^2}}}$$

b) Løs likningen ved regning:

$$4\sin x - \sqrt{6} = \sqrt{2} \qquad \text{der } \; x \in [0°, 360° >$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 1) \;\; x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = 75° \\ 2) \;\; x_2 = 180° - x_1 = 105° \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x \in \{75°, 105°\}}}$$

c) Løs likningen ved regning:

$$3\,(\ln x)^2 - \ln x^5 - 2 = 0$$

$$3\,(\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$$

2. gradslikningen gir vha. kalkulator eller 2. gradsformelen:

$$\left.\begin{array}{lll} \ln x = 2 & \Longrightarrow & x = e^2 \\ \ln x = -\frac{1}{3} & \Longrightarrow & x = e^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x \in \{e^2, e^{-\frac{1}{3}}\}}}$$

MERK: 2. gradsformelen må være brukt minst én gang i besvarelsen.

d) Løs likningen ved regning:

$$\sqrt{x+2} - 2x = 1$$

$$\sqrt{x+2} = 2x + 1 \,|(\cdot)^2 \quad \Longrightarrow \quad x + 2 = (2x+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{4}$$

Setter prøve:

$x = -1$: $H.S. \neq V.S.$ $\Rightarrow$ ikke løsning

$x = \frac{1}{4}$: $H.S.: \frac{3}{2} - \frac{2}{4} = \frac{2}{2} = 1 = V.S.$ $\Longrightarrow$ $\underline{\underline{x = \frac{1}{4}}}$ er eneste løsning.

e) Deriver funksjonen:

$$f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$$

Produktregelen gir:

$$f'(x) = 2x \cdot \cos 2x + x^2 \cdot (-2\sin 2x) \underline{\underline{= 2x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}$$

f) Regn ut det ubestemte integralet til funksjonen:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

Substitusjon med $u = x^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad du = 2xdx \quad \Longrightarrow$

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C \underline{\underline{= \ln|x^2 - 1| + C}}$$

*Alternativt*: Bruk delbrøkoppspalting:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad 2x = A(x+1) + B(x-1)$$

$x = 1$: $2 = 2A \quad \Leftrightarrow \quad A = 1$ $\qquad$ $x = -1$: $-2 = -2B \quad \Leftrightarrow \quad B = 1$

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

$$= \ln|(x-1)(x+1)| + C = \ln|x^2-1| + C$$

g) Løs den doble ulikheten:

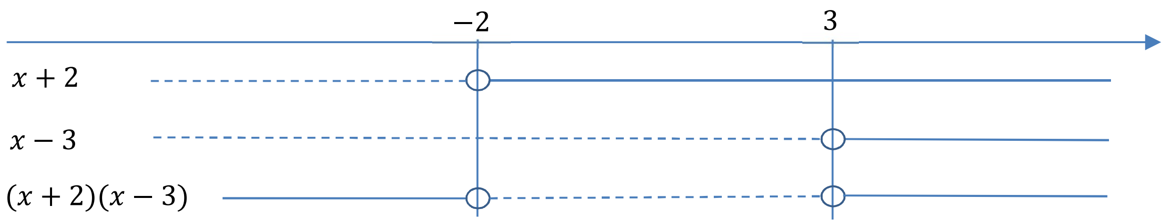
$$0 < x - 1 \leq x^2 - 7$$

Deler opp i 2 ulikheter:

1) $0 < x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

2) $x - 1 \leq x^2 - 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-3) \geq 0$

Fortegnslinje gir:




$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ x > 1 \\ 2)\ \ x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \geq 3}}$$

h) Vi skal designe en vase med utgangspunkt i grafen til funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

Vaseformen oppnås ved å la grafen til $f(x)$ mellom $x = 1$ dm og $x = 4$ dm danne konturen til et omdreiningslegeme om $x$-aksen. Hvor mye vann vil vasen kunne romme når konturen gir oss de indre veggene i vasen?

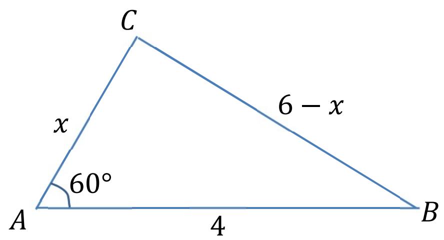
$$V = \pi \int_1^4 f^2(x)dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{4x^2}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^4 x^{-2}dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_1^4 = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

Enheten er $1\ \mathrm{dm}^3 = 1\ l \quad \Longrightarrow \quad$ Vasen rommer $\underline{\underline{\frac{3\pi}{16}}}\ l$ ($\approx 0{,}59\ l$) vann.

i) Gitt en trekant ABC, der $AB = 4$, $AC = x$, $BC = 6 - x$ og $\angle A = 60°$.

Finn AC og $\angle B$.




Cosinussetningen:

$$(6 - x)^2 = x^2 + 4^2 - 2x\cdot 4\cdot\cos 60°$$

$$36 - 12x + x^2 = x^2 + 16 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 20 = 8x \quad \Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{AC = \frac{5}{2}}}$$

Cosinussetningen:

$$x^2 = 4^2 + (6 - x)^2 - 2\cdot 4\cdot(6 - x)\cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{4^2 + (6 - x)^2 - x^2}{2\cdot 4\cdot(6 - x)}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos B = 0{,}785714 \quad \Rightarrow \quad \angle B \underline{\underline{= 38{,}2°}}$$

Alternativt med sinussetningen:

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}, \qquad BC = 6 - AC = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\sin B = \sin 60° \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \qquad \Rightarrow \quad \angle B = \sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right) \underline{\underline{= 38{,}2°}}$$

Merk at sinussetningen gir mulig alternativ løsning $\angle B = 180° - 38{,}2° = 141{,}2°$.

$\angle A = 60° \quad \Rightarrow \quad \angle B$ kan *ikke* være $141{,}2°$ siden $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

**Oppgave 2**

Gitt tre punkter A(0, 0, 0), B(3, 1, 0) og C(2, 4, 0).

a) Regn ut vektorene $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ og $\angle C$.

$$\overrightarrow{CA} = [0-2, 0-4, 0-0] \underline{\underline{= [-2, -4, 0]}}$$

$$\overrightarrow{CB} = [3-2, 1-4, 0-0] \underline{\underline{= [1, -3, 0]}}$$

$\angle C$ finnes fra definisjon av skalarprodukt:

$$\cos \angle C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|}$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = [-2, -4, 0] \cdot [1, -3, 0] = (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) = 10$$

$$\cos \angle C = \frac{10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \quad \angle C = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\underline{= 45°}}$$

b) A, B og C utgjør tre av hjørnene i et parallellogram.
Vis at punktet D(-1, 3, 0) utgjør det siste hjørnet, når ABCD skal være et parallellogram.

Parallellogram hvis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = [-1, 3, 0]$. Med $D(x, y, z)$ fås:

$$[x-0, y-0, z-0] = [-1, 3, 0] \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \;\wedge\; y = 3 \;\wedge\; z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{D(-1, 3, 0)}}$$

c) ABCD utgjør grunnflaten i en pyramide med toppunkt T(1, 2, 5).
Vis og forklar hvorfor dette er en rett pyramide med kvadratisk grunnflate.

*Rett pyramide:*
Punktene A, B, C og D ligger alle i $xy$-planet ($z$-koordinat lik 0). Da får vi en rett pyramide hvis linja fra T til midtpunktet M av grunnflata står normalt på $xy$-planet (dvs. $\overrightarrow{MT} \perp z -$ aksen

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}[2, 4, 0] = [1, 2\,, 0] \quad \Longrightarrow \quad M(1, 2, 0)$$

Ser at midtpunktet M har samme $x$- og $y$-koordinat som T. Da står $\overrightarrow{MT}$ vinkelrett på grunnflata i $xy$-planet. Pyramiden er dermed rett.

Alternativt kan man sjekke at:

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MT} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MT} = 0$$

$[1, 2, 0] \cdot [0, 0, 5] = 0$ OK

*Kvadratisk grunnflate:*
Hvis grunnflata skal være kvadratisk må:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \text{og} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = [3, 1, 0] \;\Rightarrow\; \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10} = \left|\overrightarrow{CB}\right| \\ [3, 1, 0] \cdot [1, -3, 0] = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{kvadratisk grunnflate}$$

For å vise at pyramiden er både rett og med kvadratisk grunnflate vil det også være et fullgodt svar og vise at: : $\left|\overrightarrow{AT}\right| = \left|\overrightarrow{BT}\right| = \left|\overrightarrow{CT}\right| = \left|\overrightarrow{DT}\right|$

d) Regn ut volumet til pyramiden ABCDT.

Siden grunnflata ABCD er et kvadrat, blir volumet:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \cdot h}{3}$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10}$. $h = 5$ siden $z$-koordinaten til T er lik 5 og ABCD ligger i $xy$-planet.

$$V = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot 5}{3} = \underline{\underline{\frac{50}{3}}}$$

Alternativt finnes arealet av grunnflata som $G = \left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right|$. Evt. kan volumet finnes direkte som $V = \frac{1}{3} \cdot \left|\left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right) \cdot \overrightarrow{CT}\right|$.

e) Regn ut arealet til sideflaten ABT.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}\right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |[5, -15, 5]| = \frac{1}{2} \cdot 5|[1, -3, 1]|$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{11}}{2}}} \quad (\approx 8{,}29)$$

Alternativt kan arealsetningen benyttes.

f) Sideflaten ABT ligger i et plan $\alpha$. Regn ut likningen for planet.

Likningen for et plan:

$\alpha$: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ der:

$(x_0, y_0, z_0)$ er et punkt i planet og $\vec{n} = [a, b, c]$ er en normalvektor til planet.

Velger $(x_0, y_0, z_0) = A(0, 0, 0)$.

Fra pkt. e) fås en normalvektor for planet som: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} = 5[1, -3, 1]$.

Velger kortest mulig normalvektor: $\vec{n} = [1, -3, 1]$. Likningen for planet blir da:

$\alpha$: $1(x - 0) + (-3)(y - 0) + 1(z - 0) = 0$

$\underline{\underline{\alpha: \ x - 3y + z = 0}}$

**Oppgave 3**

En funksjon $f(x)$ er gitt som:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

a) Finn definisjonsmengden og evt. nullpunkter til $f(x)$.

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D_f = R \backslash \{-2, 2\}}}$$

Evt. nullpunkter for $f(x) = 0$, dvs. når teller $= 0$ og nevner $\neq 0$.

$$2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow$$

$\underline{\underline{\text{Nullpunkt: } (0, 0)}}$

b) Regn ut evt. asymptoter til funksjonen.

*Def.*: $x = x_0$ er V.A. hvis $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

For rasjonale polynomfunksjoner vil vi da finne V.A. når nevner $= 0$ og teller $\neq 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2 \quad \Rightarrow$$

2 vertikale asymptoter: $\underline{\underline{x = 2 \quad \wedge \quad x = -2}}$

Grad teller = grad nevner $\quad \Rightarrow \quad$ mulig H.A.:

*Def.*: $y = y_0$ er H.A. hvis $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$.

Deler $f(x)$ med høyeste grad av $x$ i teller og nevner:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = 2 \quad \Rightarrow$$

Horisontal asymptote: $\underline{\underline{y = 2}}$

Dermed ingen skrå asymptoter.

c) Vis ved regning at:

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

Kvotientregelen med $u = 2x^2 \;\Rightarrow\; u' = 4x$ og $v = x^2 - 4 \;\Rightarrow\; v' = 2x$:

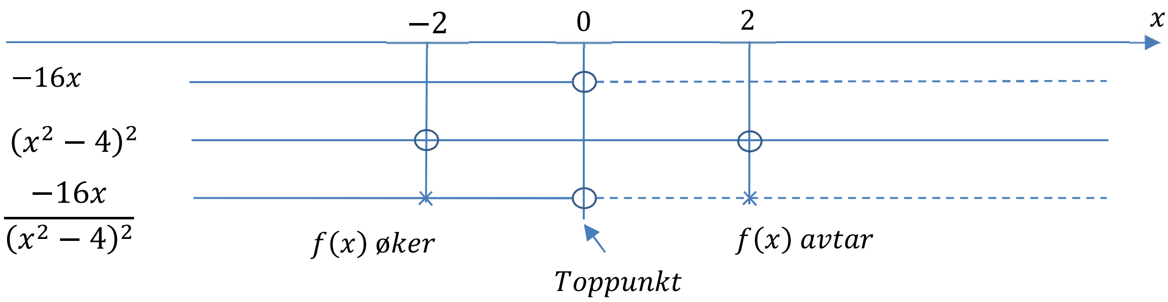
$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2-4)^2} = \underline{\underline{\frac{-16x}{(x^2-4)^2}}}$$

d) Regn ut evt. topp- og bunnpunkter for grafen til $f(x)$.

Topp-/bunnpunkt for $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ teller $= 0$ og nevner $\neq 0$:

$-16x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Fortegnsdrøfting:




Toppunkt for $x = 0$: $f(0) = 0 \;\Rightarrow\;$ Toppunkt: $\underline{\underline{(0,0)}}$

e) Finn eventuelle vendepunkter til $f(x)$.

Vendepunkter for $f''(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$u = -16x \;\Rightarrow\; u' = -16$ og $v = (x^2-4)^2 \;\Rightarrow\; v' = 2(x^2-4)2x = 4x(x^2-4)$

$$f''(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-16(x^2-4)^2 - (-16x)4x(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$
$$= \frac{16(x^2-4)[-(x^2-4)+4x^2]}{(x^2-4)^4} = \frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

Teller $\neq 0$ for alle verdier av $x$ $\Rightarrow$ $f''(x) \neq 0$, dermed har vi ingen vendepunkter.

**Oppgave 4**

Blant 3 lokale fotballklubber skal det plukkes ut 2 medlemmer til å delta på Rosenborgs fotballakademi. Disse trekkes ut tilfeldig blant alle medlemmene i klubbene. Klubb A har 250 medlemmer, klubb B har 100 medlemmer og klubb C har 50 medlemmer.

a) Hva er sannsynligheten for at begge de heldige kommer fra klubb A?

Definerer hendingene:

$A_1$: Klubb A i 1. trekning

$A_2$: Klubb A i 2. trekning

$n_A = 250,\ n_B = 100,\ n_C = 50,\ N = n_A + n_B + n_C = 400$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{n_A}{N} \cdot \frac{n_A - 1}{N - 1} = \frac{250}{400} \cdot \frac{249}{399} = \underline{\underline{\frac{415}{1064} \approx 0{,}39}}$$

b) Hva er sannsynligheten for at bare én av de to kommer fra klubb A?

Her må sannsynlighetene for alle valgmuligheter som inkluderer klubb A i enten bare første eller bare andre valg summeres (hendingene for valg av klubb B og C er tilsvarende som for klubb A):

$$P(kun\ \text{én}\ fra\ klubb\ A) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{250}{400} \cdot \frac{100}{399} + \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{399} + \frac{250}{400} \cdot \frac{50}{399} + \frac{50}{400} \cdot \frac{250}{399} = \frac{250 + 125}{798}$$
$$= \frac{375}{798} = \underline{\underline{\frac{125}{266} \approx 0{,}47}}$$

En enklere variant er kun å betrakte hendingene $A$ og $\bar{A}$ (ikke A):

$$P(kun\ \text{én}\ fra\ klubb\ A) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{250}{400} \cdot \frac{150}{399} + \frac{150}{400} \cdot \frac{250}{399} \approx 0{,}47$$

**Oppgave 5**

Vi skal konstruere et høydebasseng som skal forsyne et område med vann. Bassenget skal utformes som en lukket, sylindrisk tank med et volum på 800 m$^3$.

a) Finn høyden $h$ i sylinderen uttrykt vha. radiusen $r$. Anta at $r$ og $h$ måles i meter.

$$V = \pi r^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = \underline{\underline{\frac{800}{\pi r^2}}}$$

b) Forklar hvorfor overflaten til sylinderen (målt i m$^2$) kan uttrykkes som:

$$O = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

Overflaten $O$ består av to sirkelflater og én rektangulær flate (utrullet) med bredde lik omkretsen til sirkelflaten:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{800}{\pi r^2} = \underline{\underline{2\pi r^2 + \frac{1600}{r}}}$$

c) Vi ønsker å bruke minst mulig materialer når sylindertanken skal utformes. Regn ut høyden $h$ og radiusen $r$ i dette tilfellet.

$$O(r) = 2\pi r^2 + 1600 r^{-1}$$

$$O_{\text{min}} \quad \text{for} \;\; O'(r) = 0$$

$$O'(r) = 4\pi r - 1600 r^{-2}$$

$$4\pi r - 1600 r^{-2} = 0 \;|\cdot r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r^3 - 1600 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{1600}{4\pi} = \frac{400}{\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} = 5{,}031 \approx 5}}$$

$$h = \frac{800}{\pi r^2} \underline{\underline{= 10{,}062 \approx 10}}$$

Alle enheter er i meter.

For å forsikre seg om at man har et bunnpunkt for $r = 5$, kan man tegne fortegnsskjema for $O'(r)$ eller sjekke at $O''(r) > 0$ for $r = 5$ (Kreves ikke).

**Oppgave 6**

I en uendelig geometrisk rekke er $a_2 = \frac{1}{2}$ og $a_5 = \frac{1}{16}$.

a) Regn ut $a_1$ og kvotienten $k$ for rekken. Forklar hvorfor rekken er konvergent.

$$a_5 = a_4 k = a_3 k^2 = a_2 k^3 \quad \Rightarrow \quad k^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$a_2 = a_1 k \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \underline{\underline{= 1}}$$

Rekka er konvergent fordi $|k| < 1$

b) Vi skal nå benytte de $n$ første leddene i rekken. Vi ønsker at summen $S_n$ av den endelige rekken og summen $S$ av den uendelige rekken skal oppfylle betingelsen:

$$S - S_n < 0{,}0001$$

Hvor mange ledd må vi da ha med i den endelige rekken?

Summen av den konvergente, uendelige rekken:

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Summen av de $n$ første leddene i den endelige rekken:

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S - S_n < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}0001 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}00005$$

$\ln(\cdot)$ er en monotont økende funksjon. Vi kan derfor ta $\ln(\cdot)$ på begge sider av ulikheten uten at ulikheten endres:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}00005 \;\; |\ln(\cdot) \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln\frac{1}{2} < \ln 0{,}00005 \;\; |:\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Merk at $\ln\frac{1}{2} < 0$. Vi må derfor snu ulikhetstegnet ved divisjon med $\ln\frac{1}{2}$:

$$n > \frac{\ln 0{,}00005}{\ln\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad n > 14{,}3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{n \geq 15}}$$

Alternativt aksepteres det å prøve seg fram med økende verdier for $n$, inntil ulikheten $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}00005$ er oppfylt.