Summer

Summenotasjon:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 302$$

Vi vil skrive dette på ~~en~~ mer kompakt måte:

$$\sum_{k=0}^{100} (3k+2)$$

Formel for ledd nr k

Start når $k=0$ — Øk k med én hver gang

Slutt når $k=100$

Som at:

$k=0: \quad 3\cdot 0+2 = 2$
$k=1: \quad 3\cdot 1+2 = 5$
$k=2: \quad 3\cdot 2+2 = 8$
$k=3: \quad 3\cdot 3+2 = 11$
$k=4: \quad 3\cdot 4+2 = 14$

Gresk sigma, stor sigma $\sum$ betyr „summer disse tallene"

Finnes også $\prod_{k=0}^{100}(3k+2) = 2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdot \dots \cdot 302$

Riemann sum:

$$\sum_{a}^{b} f(x)\,\Delta x \qquad \text{betyr:}$$

Skal summere $f(a+k\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$ for alle k slik at

$a \le a\cdot k\cdot\Delta x \le b.$

a: start-sted $\qquad \Delta x$ - steglengde:

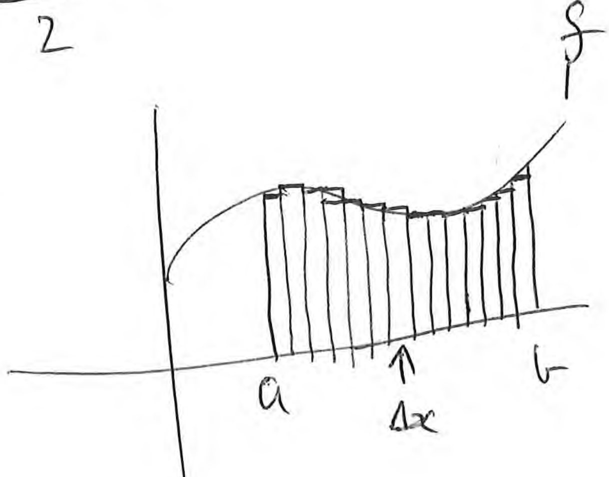
b: sluttsted

Eks fra i stad, $a=2$, $b=302$, $\Delta x = 3$.

(ville fått $f(x) = \frac{x}{3}$ for å få samme sum som i stad):

$$\sum_{2}^{302} \frac{x}{3}\cdot\Delta x = 2 + 5 + 8 + \dots + 302$$

Eks:



$$\sum_{a}^{b} f(x)\Delta x$$

Idé! Jo mindre Δx blir, jo mer nøyaktig blir Riemann-summen til arealet.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x)\Delta x$$

Andre eksempler på nyttige Riemann-summer/integraler:

Arbeid utført:

$$\sum_a^b F\Delta s \Rightarrow \int_a^b F(s)\,ds$$

Strekning: $s = v \cdot t$

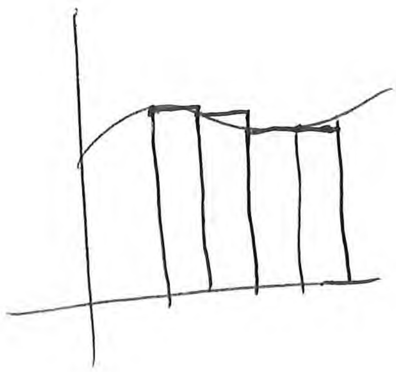
$$s = \sum_a^b v(t)\cdot\Delta t \Rightarrow \int_a^b v(t)\,dt$$

Dette hinter om fundamentalteoremet:

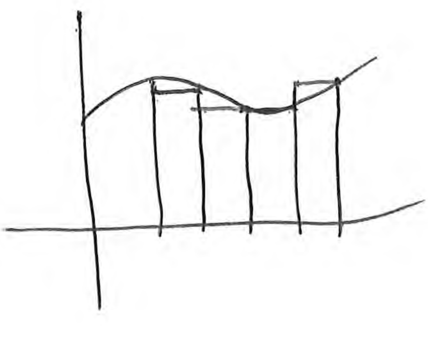
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{hvor } F'(x) = f(x)$$

Smakebit på numerisk integrasjon:

Metode 1: Venstresummen

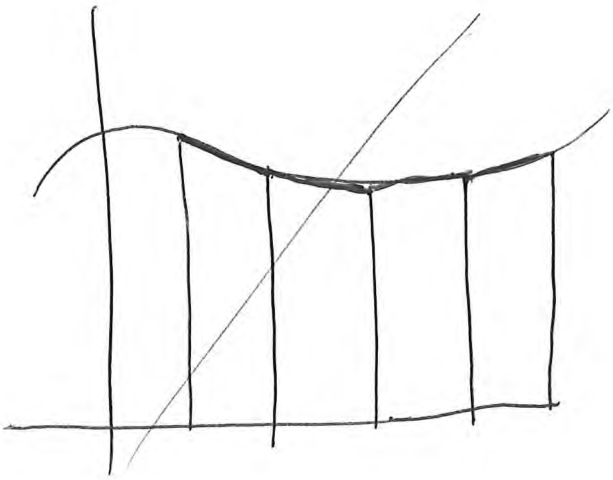


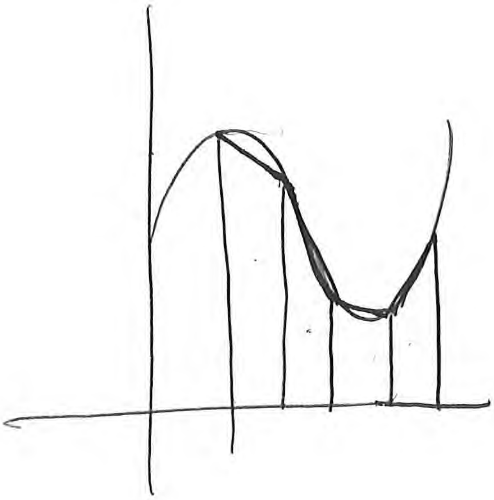
Metode 2: Høyresummen



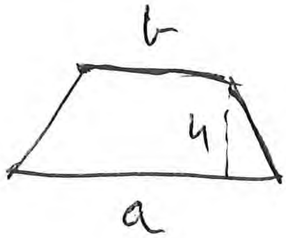
Metode 3: Ta gjennomsnittet av de to forrige metodene.

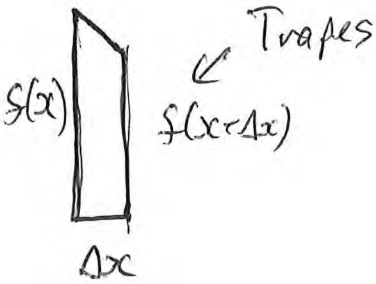
Metode 4: Trapesmetoden:





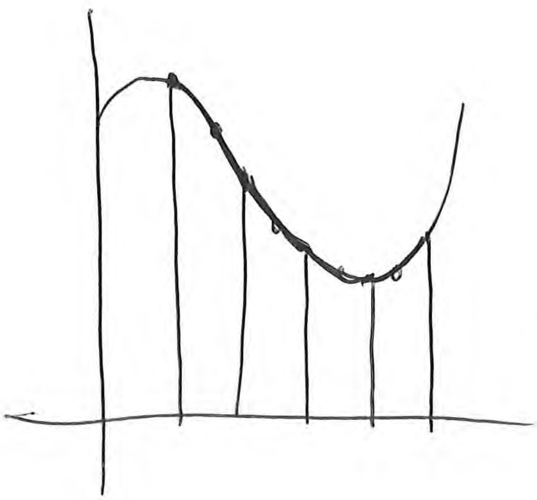
Trapes: Type firkant, to av sidene e parallelle:





Areal: $\frac{a+b}{2} \cdot h$

Simpsons metode:



Finner andregrads funksjon som går gjennom venstresida, høyresida, og et punkt i midten, regner integralet av denne andregradsfunksjonen.

Mest nøyaktig, men bruker da lenger tid.

Eksempel på integral-utregning:

Vil finne volumet av en pyramide:

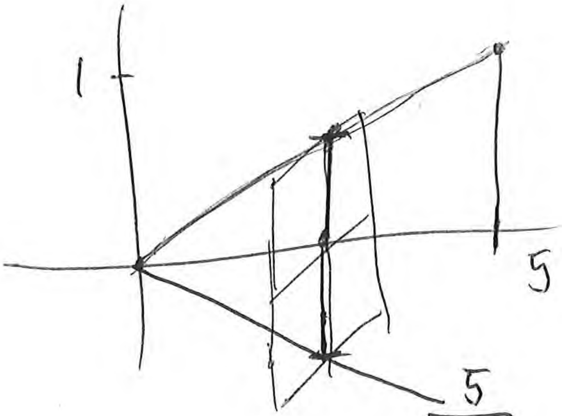
Grunnflate: ~~Firkant~~, kvadrat, 2x2.
Høyde: 5.
Volumet skal bli:

$$\frac{4\cdot 5}{3} = \frac{20}{3} = 6.667.$$

Del den opp i mindre blokker:

Hver slik bit har volum lik grunnflate ganget høyde.

Tar en „slice" av pyramiden, legger sidelengs.



$$f(x) = \frac{x}{5}$$

$$A(x) = \left(\frac{2\cdot x}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}x^2$$

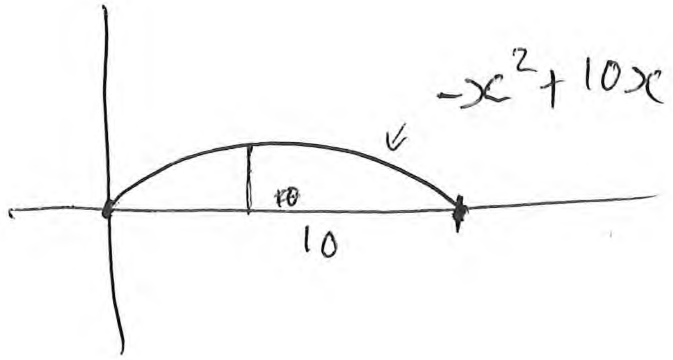
Volum av pyramiden $\sum_{0}^{5} A(h)\cdot \Delta h = \sum_{0}^{5} \frac{4}{25}h^2\cdot \Delta h$

$$\rightarrow \int_0^5 \frac{4}{25}h^2\,dh = \left[\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{3}h^3\right]_0^5 = \frac{4}{\cancel{25}}\cdot\frac{1}{3}\cdot 5^3 - 0$$

$$= \frac{4\cdot 5}{3} = \frac{20}{3}$$

Eks: En linse ser slik ut

Areal på πr^2
$= \pi(-x^2+10x)^2$



Volumet av hele:

$$\sum_{0}^{10} \pi(-x^2+10x)^2 \Delta x$$

Nøyaktig: $$\int_0^{10} \pi(-x^2+10x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{10} (-x^2)^2 + 2\cdot(-x^2)\cdot 10x + (10x)^2\,dx$$

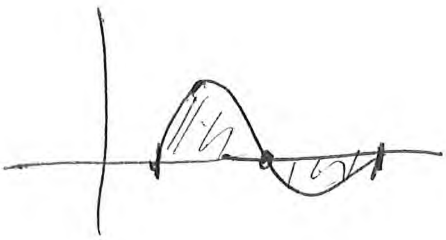
$$= \pi\int_0^{10} x^4 - 20x^3 + 100x^2\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - 5x^4 + \frac{100}{3}x^3\right]_0^{10}$$

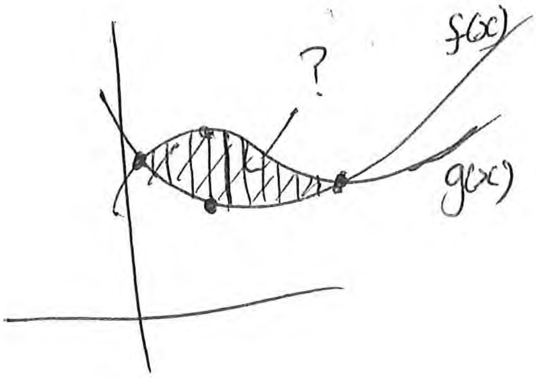
$$= \pi\cdot\left(\frac{10^5}{5} - 5\cdot 10^4 + \frac{100}{3}\cdot 10^3\right) =$$

$$= \pi\cdot(20\,000 - 50\,000 + 33\,333) = 3333\cdot\pi$$

Husk: Når vi regner areal med integral er det alltid areal mellom grafen og x-aksen i området, med fortegn.



Vi vil ofte finne integralet eller arealet mellom to funksjoner:



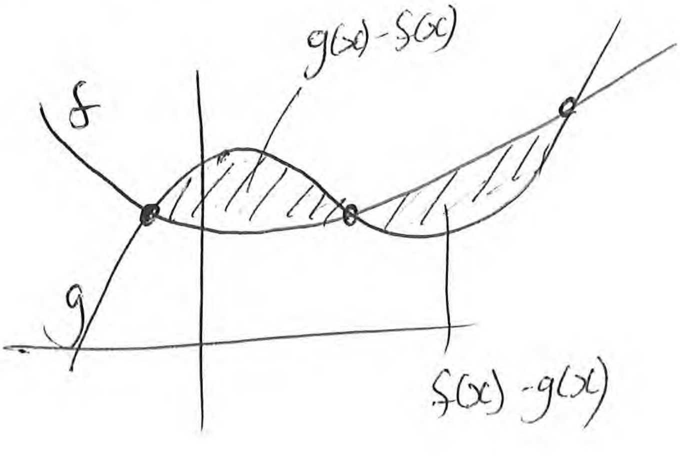
Vi kan da regne ut

Se nå at hver „høgde" er gitt ved $g(x) - f(x)$

Integralet blir derfor $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$

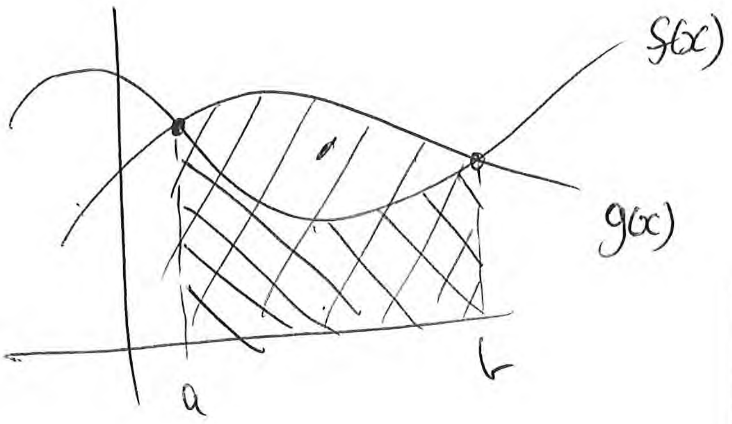
Må finne a og b ved å løse $f(x) = g(x)$, finn når grafene møtes.

Kan få situasjoner som:



Om vi vil vite arealet må vi da gjøre hver bit for seg selv, fjerne eventuelle minustegn, så plusse sammen.

Kan også se: $\int_a^b g(x) - f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$



Må nå egentlig se om vi også får riktig svar i spesialtilfelle: