UNIVERSITETET I AGDER

FAKULTET FOR REALFAG OG TEKNOLOGI

J U L E T E N T A M E N

Løsning

Emnekode:	**MA-015**
Emnenavn:	**Matematikk for forkurs**
Dato:	07.12.2016
Varighet:	5 timer
Antall sider inkl. forside	3
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle delspørsmål vektes likt. Mellomregninger skal tas med, og alle svar skal markeres tydelig.

Oppgave 1

a) $$\frac{2x^2-8}{2x+8}:\frac{3x+6}{x+4}=\frac{\cancel{2}(x^2-4)}{\cancel{2}\,\cancel{(x+4)}}\cdot\frac{\cancel{x+4}}{3(x+2)}=\frac{(x-2)\,\cancel{(x+2)}}{3\,\cancel{(x+2)}}=\underline{\underline{\frac{x-2}{3}}}$$

b) $$\left(\frac{a}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{6a^3}{a^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot 6a^3\cdot a^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}\cdot a^2\cdot 2}=\frac{6a^4}{3a^2\cdot 2}=\underline{\underline{a^2}}$$

c)

$$e^{2x}-3e^x=18 \quad\Rightarrow\quad e^{2x}-3e^x-18=0$$

$$\left(e^x\right)^2-3e^x-18=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{e^x=\begin{cases}6\\-3\end{cases}}$$

Siden e^x alltid er positiv, får vi:

$$e^x=6 \quad\Rightarrow\quad x\ln e=\ln 6 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=\ln 6}}$$

d)

$$(x-1)\sqrt{2}=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2\cdot 2=x$$

$$2x^2-4x+2-x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-5x+2=0$$

$$\underline{x=\begin{cases}2\\0,5\end{cases}}$$

$$Setter\ prøve:$$

$$\underline{x=2:} \qquad V.S.=(2-1)\sqrt{2}=\sqrt{2} \qquad H.S.=\sqrt{2}$$

$$\underline{x=0,5:} \qquad V.S.=(0,5-1)\sqrt{0,5}\approx -0,35 \quad H.S.=\sqrt{0,5}\approx 0,71$$

$$\underline{\underline{Svar: x=2}}$$

e)

$$5\sin x-1=0 \qquad x\in\left[0,\ 2\pi\right\rangle$$

$$\sin x=0,2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x=\begin{cases}0,20\\2,94\end{cases}}}$$

Oppgave 2

a)

$$P(-2)=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{4a-2b+c=0}$$

$$Videre: P(0)=a\cdot 0+b\cdot 0+c=12 \quad \Rightarrow \quad \underline{c=12}$$

$$og: P'(x)=2ax+b \quad \Rightarrow \quad P'(0)=2a\cdot 0+b=0 \ \Rightarrow \ \underline{b=0}$$

$$Dette\ gir\ da: \underline{\underline{c=12,\ b=0,}}\ 4a-2\cdot 0+12=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=-3}}$$

b) $$\underline{\underline{f'(x)=6x-\frac{2}{x}+2\ln 3\cdot 3^{2x}}}$$

$$g(x)=2x^{-\frac{1}{2}}+x\ln x$$

c) $$g'(x)=2\cdot(-0,5)x^{-\frac{3}{2}}+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=-x^{-\frac{3}{2}}+\ln x+1$$

$$\underline{\underline{g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x\sqrt{x}}}}$$

Oppgave 3

a) $$f(x)=\frac{x+2}{x-3}$$

$$\underline{\underline{Nullpunkt\ når}}\ teller=0,\ altså\ \underline{\underline{x=-2}}$$

$Vertikal\ asymptote\ når\ nevner = 0:$

$\underline{\underline{VA:\ x = 3}}$

$Teller\ og\ nevner\ har\ samme\ grad,\ da\ har\ funksjonen\ en\ horisontal\ asymptote\ gitt\ av\ forholdet\ mellom\ konstantene\ foran\ leddene\ med\ høyest\ grad\ i\ teller\ og\ nevner:$

$\underline{\underline{HA:\ y = 1}}$

b) $\underline{f'(x)} = \dfrac{1\cdot(x-3)-(x+2)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x-3-x-2}{(x-2)^2} = \underline{\dfrac{-5}{(x-2)^2}}$

$\underline{\underline{Siden\ f'(x)\ aldri\ kan\ bli\ 0,\ har\ f(x)\ ingen\ topp-eller\ bunnpunkter}}$

Oppgave 4

a) 1)

$\ln x^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ln x = -6 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -3$

$e^{\ln x} = x = e^{-3} \qquad \underline{\underline{x = \dfrac{1}{e^3}}}$

2)

$2^x + 6 = 4^x \quad \Rightarrow \quad 4^x - 2^x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(2^2\right)^x - 2^x - 6 = 0$

$\left(2^x\right)^2 - 2^x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^x = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}}$

$Siden\ 2^x\ alltid\ er\ positiv,\ får\ vi:$

$2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x\ln 2 = \ln 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}58}}$

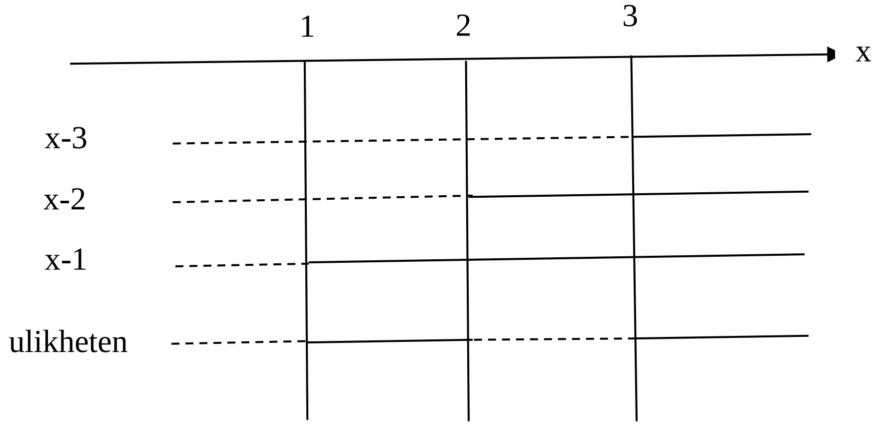
b)

$\dfrac{x^2-6x+7}{x-1} \le -1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2-6x+7}{x-1} + 1 \le 0$

$\dfrac{x^2-6x+7}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-1} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2-5x+6}{x-1} \le 0$

$\underline{\dfrac{(x-3)(x-2)}{x-1} \le 0}$

Setter opp fortegnslinje, se neste side.



Svar: $\underline{\underline{x < 1 \text{ eller } 2 \le x \le 3}}$ *alternativt* $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, 1\rangle \text{ eller } x \in [2, 3]}}$

c) **1)** Vi kaller den korteste siden i grunnflaten for x, og den lengste siden blir da 2x. Da får vi for overflaten til prismet:

$$\begin{aligned}
&\textit{Grunnflaten:} && A_G = x \cdot 2x = 2x^2 \\
&\textit{Toppflaten:} && A_T = A_G = 2x^2 \\
&\textit{To av sideflatene:} && 2A_{S1} = 2 \cdot x \cdot h = 2xh \\
&\textit{To andre sideflater:} && 2A_{S2} = 2 \cdot 2x \cdot h = 4xh
\end{aligned}$$

Dette gir at:

$$2x^2 + 2x^2 + 2xh + 4xh = 12 \quad \Rightarrow \quad 6xh = 12 - 4x^2$$

$$h = \frac{12 - 4x^2}{6x} = \frac{12}{6x} - \frac{4x^2}{6x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h = \frac{2}{x} - \frac{2}{3}x}}$$

2)

$$V = G \cdot h = 2x^2\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{3}x\right) = \frac{4x^2}{x} - \frac{4}{3}x^3$$

$$\underline{\underline{V = 4x - \frac{4}{3}x^3}}$$

$$V' = 4 - \frac{12}{3}x^2 = 4 - 4x^2 = 4(1 - x^2) = 4(1 - x)(1 + x)$$

3) $V' = 0 \text{ gir at } x = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \end{cases} \quad (x \text{ må være positiv})$

$\underline{\underline{x = 1}}$ *gir det største prismevolumet* $\underline{\underline{V = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}}}$

Oppgave 5

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4} = \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

a) Definisjonsmengden: $\underline{\underline{Alle\ x\ unntatt\ x = \pm 2}}$

Nullpunkt: $Når\ teller = 0$: $\underline{\underline{x = 0}}$

b)

$Vertikalasymptoter\ når\ nevner = 0$:

$\underline{\underline{VA: x = \pm 2}}$

$Horisontalasymptote\ \ fordi\ teller\ og\ nevner\ har\ samme\ grad$:

$\underline{\underline{HA: y = 2}}$

c)

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x^2 \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = -\frac{16x}{\left(x^2-4\right)^2}}}$$

d) Vi har enten et topp eller bunnpunkt når $x = 0$ (da blir telleren lik 0)

Fordi nevneren alltid er positiv, vil den deriverte bli positiv når $x < 0$ og negativ når $x > 0$.

Vi har derfor et topppunkt i punktet $\underline{\underline{(0,\ f(0)) = (0,\ 0)}}$

e) Vi deriverer en gang til, og får:

$$f''(x) = -\frac{16(x^2-4)^2 - 16x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{16(x^2-4)^2 - 64x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x) = -\frac{16(x^2-4)(x^2-4-4x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{16(x^2-4)(3x^2+4)}{(x^2-4)^4}$$

$$\underline{f''(x) = \frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}}$$

$Telleren\ i\ den\ andrederiverte\ vil\ aldri\ kunne\ bli\ 0,$

$\underline{\underline{derfor\ har\ ikke\ funksjonen\ noen\ vendepunkt.}}$