Løsningsforslag eksamen matematikk 3-termin V 2012

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen: $f(x) = 4x^3 - 2$

$$f'(x) = 12x^2$$

b) Deriver funksjonen: $g(x) = \sqrt{\pi} - e^{7x}$

$$g'(x) = -7e^{7x}$$

c) Vi har funksjonen $h(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Vis at: $h'(x) = -\sin^{-2}(x)$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{-\sin(x)\cdot\sin(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{-1}{\sin^2(x)} \\
&= -\sin^{-2}(x)
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Løs ligningen ved regning: $-\lg(x) + 5 = \frac{6}{\lg(x)}$

$$\begin{aligned}
-\lg(x) + 5 &= \frac{6}{\lg(x)} \\
-(\lg(x))^2 + 5\lg(x) &= 6 \\
-(\lg(x))^2 + 5\lg(x) - 6 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg(x) &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-6)}}{-2} \\
&= \frac{-5 \pm -1}{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg(x) = 2 &\quad \text{eller} \quad \lg(x) = 3 \\
10^{\lg(x)} = 10^2 &\quad \text{eller} \quad 10^{\lg(x)} = 10^3 \\
x = 100 &\quad \text{eller} \quad x = 1000
\end{aligned}$$

b) Løs ligningen ved regning: $4^x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} 4^x &= 5 \\ \ln(4^x) &= \ln(5) \\ x \ln 4 &= \ln(5) \\ x &= \frac{\ln(5)}{\ln(4)} \approx 1,16 \end{aligned}$$

c) Vi kaster to vanlige, sekssidede terninger. Hvor stor er sannsynligheten for at den ene terningen viser en sekser samtidig som den andre terningen ikke viser en sekser?

Sannsynligheten er gitt ved antall gunstige utfall delt på antall mulige utfall.
Antall mulige utfall er gitt ved $6 \cdot 6 = 36$.
Antall utfall der den første terningen viser en sekser og den andre ikke viser en sekser: $1 \cdot 5 = 5$.
Antall utfall der den første terningen ikke viser en sekser og den andre terningen viser en sekser: $5 \cdot 1 = 5$.
Totalt antall gunstige utfall: $5 + 5 = 10$

$$P(\text{en sekser og en ikke-sekser}) = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Merk at denne oppgaven kan løses på flere måter.

Oppgave 3

a) Finn det ubestemte integralet

$$\int 4x^2 \mathrm{d}x$$

$$\int 4x^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 + C$$

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int (4x^2 - 1)e^x \mathrm{d}x$$

Vi bruker delvis integrasjon to ganger

$$\begin{aligned} \int (4x^2 - 1)e^x \mathrm{d}x &= (4x^2 - 1) \cdot e^x - \int 8x \cdot e^x \mathrm{d}x \\ &= (4x^2 - 1) \cdot e^x - \left(8x \cdot e^x - \int 8\, e^x \mathrm{d}x\right) \\ &= (4x^2 - 1) \cdot e^x - 8x \cdot e^x + 8e^x + C \\ &= e^x \left(4x^2 - 8x + 7\right) + C \end{aligned}$$

c) Finn det ubestemte integralet.

$$\int (2x-1)\sin(-x^2+x+3)\,\mathrm{d}x$$

Vi bruker variabelskifte:

$$\begin{aligned}
u &= -x^2+x+3 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -2x+1 \\
\mathrm{d}u &= (-2x+1)\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}u}{-2x+1} = -\frac{\mathrm{d}u}{2x-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (2x-1)\sin(-x^2+x+3)\,\mathrm{d}x &= \int -\sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \cos(u)+C \\
&= \cos(-x^2+x+3)+C
\end{aligned}$$

d) Finn det bestemte integralet ved regning

$$\int_1^2 \left(3x^2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(3x^2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= \left[x^3-\ln|x|\right]_1^2 \\
&= \left(2^3-\ln(2)\right)-\left(1^3-\ln(1)\right) \\
&= 8-\ln(2)-1+\ln(1) \\
&= 7-\ln(2)
\end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Regn ut vinkelen (i grader) mellom vektorene $\vec{a}=[4,0]$ og $\vec{b}=[-3,4]$.

Vi har: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= 4\cdot(-3)+0\cdot 4 \\
&= -12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{4^2+0^2}=4 \\
|\vec{b}| &= \sqrt{(-3)^2+4^2}=5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\
&= \frac{-12}{4\cdot 5} \\
&= -\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-3/5) \approx 127^\circ$$

b) Finn arealet til parallellogrammet som har hjørner i (2,2), (8,0), (6,4) og (0,6)

Vi tar utgangspunkt i to av vektorene fra punktet (2,2) og ser på vektorene til punktene (6,4) og (0,6) (andre valg er mulig). Disse vektorene kaller vi henholdsvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (6-2, 4-2) = (4,2) \\
\vec{b} &= (0-2, 6-2) = (-2,4)
\end{aligned}
$$

Arealet, A, til parallellogrammet er da gitt ved:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 4\cdot 4 - 2\cdot(-2) \\
&= 20
\end{aligned}
$$

c) Bestem tallet x
slik at vektorene $[1+x, 2-x, 1+2x]$ og $[2,2,3]$ står vinkelrett på hverandre.

Vektorene står vinkelrett på hverandre hvis skalarproduktet er lik null.

$$
\begin{aligned}
[1+x, 2-x, 1+2x]\cdot[2,2,3] &= 2\cdot(1+x) + 2\cdot(2-x) + 3\cdot(1+2x) \\
&= 2 + 2x + 4 - 2x + 3 + 6x \\
&= 6x + 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6x + 9 &= 0 \\
6x &= -9 \\
x &= -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Oppgave 5

Et flatestykke er avgrenset av linja $x = 0$, $x = 2$ og grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. Finn ved regning volumet av gjenstanden vi får når vi dreier flatestykket 360° om x-aksen.

Volumet av et omdreiningslegeme er gitt ved $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{x^3+1}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^2 \left(x^3+1\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_0^2 \\
&= \pi \left(\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 + 0\right)\right) \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved:

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$$

a) Finn de to neste leddene i rekka.

$k = \frac{1}{4}$. De to neste leddene i rekka blir derfor $\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ og $\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{256}$.

b) Avgjør om rekken konvergerer, og finn eventuelt summen av den uendelige rekka.
Den geometriske rekka konvergerer siden $-1 < k < 1$ og $a_1 \neq 0$. Summen av rekka er da gitt ved

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{4}{1-1/4} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$$

Oppgave 7

La funksjonen $f(x)$ være gitt ved

$$f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x$$

a) Hva er den største definisjonsmengden f kan ha?

Funksjonen $\ln x$ *er bare definert for* $x > 0$*. Definisjonsmengden til* f *er derfor gitt ved* $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$*.*

b) Finn nullpunktene til f ved regning.

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 - 3\ln x &= 0 \\ \ln x\,(\ln x - 3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln x = 3 \quad &\text{eller} \quad \ln x = 0 \\ x = e^3 \quad &\text{eller} \quad x = e^0 = 1 \end{aligned}$$

f *har nullpunkter i* $(e^3, 0)$ *og* $(1, 0)$*.*

c) Vis at den deriverte til $f(x)$ er gitt ved $f'(x) = \frac{1}{x}(2\ln x - 3)$ og finn eventuelle toppunkter og bunnpunkter til f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\,(2\ln x - 3) \end{aligned}$$

Vi ser etter topp- og bunnpunkter der $f'(x) = 0$*.* $\frac{1}{x}$ *kan aldri bli 0. Vi må derfor ha*

$$\begin{aligned} 2\ln x - 3 &= 0 \\ 2\ln x &= 3 \\ \ln x &= \frac{3}{2} \\ x &= e^{3/2} \end{aligned}$$

Vi kan tegne fortegnsskjema for å vise at $x = e^{3/2}$ *gir et bunnpunkt for* $f(x)$*.*

$$
\begin{aligned}
f(3/2) &= \left(\ln(e^{3/2})\right)^2 - 3\ln(e^{3/2}) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} \\
&= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} \\
&= -\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

f har et bunnpunkt i $(e^{3/2}, -\frac{9}{4})$.

d) Finn vendepunktet til f.

Vi ser etter vendepunkter der $f''(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{1}{x}(2\ln x - 3)\right)' \\
&= -\frac{1}{x^2}(2\ln x - 3) + \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(2 - (2\ln x - 3)\right) \\
&= \frac{5 - 2\ln x}{x^2}
\end{aligned}
$$

For at $f''(x)$ skal være lik 0 må vi ha at $5 - 2\ln x = 0$.

$$
\begin{aligned}
5 - 2\ln x &= 0 \\
-2\ln x &= -5 \\
\ln x &= \frac{5}{2} \\
x &= e^{5/2}
\end{aligned}
$$

Vi ser også at $f''(x)$ skifter fortegn i $x = e^{5/2}$. Vi må derfor ha et vendepunkt for $x = e^{5/2}$.

$$
\begin{aligned}
f(e^{5/2}) &= \left(\ln(e^{5/2}\right)^2 - 3\ln(e^{5/2}) \\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{25}{4} - \frac{15}{2} \\
&= \frac{25}{4} - \frac{30}{4} \\
&= -\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Vendepunktet ligger i $(e^{5/2}, -\frac{5}{4})$.