UNIVERSITETET I AGDER
FAKULTET FOR REALFAG OG TEKNOLOGI

J U L E T E N T A M E N

LØSNING

Emnekode:	**MA-015**
Emnenavn:	**Matematikk for forkurs**
Dato:	09.12.2015
Varighet:	5 timer
Antall sider inkl. forside	3
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og formelsamling
Merknader:	Alle delspørsmål vektes likt. Mellomregninger skal tas med, og alle svar skal markeres tydelig.

Oppgave 1

Gjør uttrykkene så enkle som mulig:

a) $\frac{2x^2-8}{2x+8} : \frac{3x+6}{x+4} = \frac{2x^2-8}{2x+8} \cdot \frac{x+4}{3x+6} = \frac{\cancel{2}(x^2-4)}{\cancel{2}(3x+6)} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{3\cancel{(x+2)}} = \underline{\underline{\frac{x-2}{3}}}$

b) $\left(\frac{a}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{6a^3}{a^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{2} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot 6a^3 \cdot a^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{1}{3}} \cdot a^2 \cdot 2} = \frac{6a^4}{6a^2} = \underline{\underline{a^2}}$

Løs likningene ved regning:

$(x-2)\sqrt{2} = \sqrt{x}$

c) $(x^2-4x+4)\cdot 2 = x \quad \Rightarrow \quad 2x^2-9x+8=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \begin{cases} 3,28 \\ 1,22 \end{cases}}$

Prøve viser at: $\underline{\underline{x = 3,28}}$

$5\sin x - 1 = 0 \qquad x \in [0,\ 2\pi\rangle$

d) $\sin x = 0,2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \begin{cases} 0,20 \\ 2,94 \end{cases}}}$

Løs likningsettet ved regning:

1) $x + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - y^2$

e) 2) $-3x + y = -2 \quad \Rightarrow \quad -3(2-y^2) + y = -2$

$3y^2 + y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \begin{cases} 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \\ -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{9} \end{cases}}}$

Oppgave 2

a) Gitt en trekant ABC, der $AB = 4,\ AC = x,\ BC = 6 - x$ og $\angle A = 60°$.

Finn AC og $\angle B$.

$(6-x)^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot \cos 60°$

$36 - 12x + x^2 = 16 + x^2 - 4x$

$8x = 20 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = AC = 2,5}}$

$\frac{\sin B}{2,5} = \frac{\sin 60°}{3,5} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2,5}{3,5} = 0,619$

$\underline{\underline{\angle B = 38,2°}}$

b) Polynomet $P(x) = ax^2 + bx + c$ har et nullpunkt for $x = 2$ og toppunkt i $(0,\ 12)$.

Bestem verdiene for koeffisientene a, b og c.

Innsatt $x = 2$ *i* $P(x)$ *gir*: 1) $4a + 2b + c = 0$

$P'(x) = 2ax + b \quad \Rightarrow$ 2) $P'(0) = \underline{\underline{b = 0}}$

2) *innsatt i* 1): 3) $a = -\frac{1}{4}c$

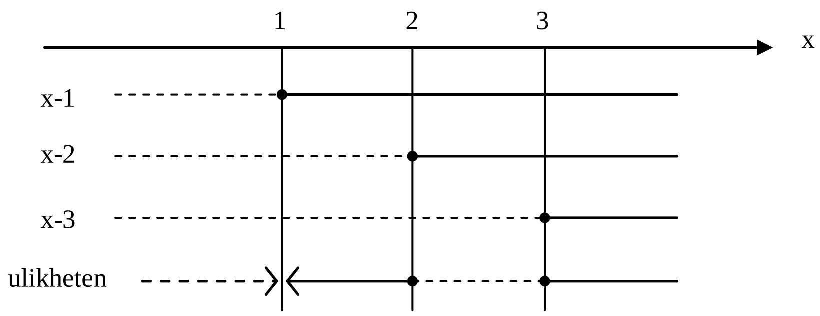
$P(0) = 12$ *gir*: 4) $\underline{\underline{c = 12}}$

som innsatt i 3 *gir*: 5) $\underline{\underline{a = -3}}$

c) Løs ulikheten

$$\frac{x^2-6x+7}{x-1} \le -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-6x+7+x-1}{x-1} \le 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{x-1} \le 0$$



Svar: $\underline{\underline{x<1 \ eller \ 2 \le x \le 3}}$

Oppgave 3

En funksjon $f(x)$ er gitt som: $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$

a) Finn definisjonsmengden og eventuelle nullpunkter til $f(x)$.

$\underline{\underline{Nullpunkt \ når \ x=0}}$ $\quad \underline{\underline{D_f = R/\{-2,\ 2\}}}$ $(eller \ alle \ x - verdier \ unntatt \ x = \pm 2)$

b) Regn ut eventuelle asymptoter til funksjonen.

$$\underline{\underline{VA \ når \ nevneren = 0, \ altså \ x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}}}$$

$\underline{\underline{HA: \ y = 2}}$ $\quad (Ser \ det \ direkte \ ved \ å \ dividere \ 2x^2 \ i \ teller \ med \ x^2 \ i \ nevner)$

c) Vis ved utregning at $f'(x) = \dfrac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2}$

$$\underline{\underline{f(x)}} = \frac{2x^2}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4x\cdot\left(x^2-4\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = -\underline{\underline{\frac{16x}{\left(x^2-4\right)^2}}}$$

d) Regn ut eventuelle topp- og bunnpunkter for $f(x)$.

Topp- eller bunnpunkt når $f'(x)=0$, altså i punktet $\underline{\left(0,\ f(0)\right) = (0,\ 0)}$

$$f''(x) = \frac{-16\cdot\left(x^2-4\right)^2-(-16x)\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{64x^2\left(x^2-4\right)-16\cdot\left(x^2-4\right)^2}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$f''(x) = \frac{16\left(x^2-4\right)\left(4x^2-x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{16\left(x^2-4\right)\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$\underline{\underline{f''(0) = \frac{-256}{256} = -1 < 0, \ dermed \ toppunkt}}$$

e) Finn eventuelle vendepunkter til $f(x)$.

$f''(x) \ kan \ aldri \ bli \ 0 \ fordi \ 3x^2+4>0 \ for \ alle \ x \ (ser \ bort \ fra \ x = \pm 2 \ da \ det \ er \ VA)$

$Konklusjon: \ \underline{\underline{Ingen \ vendepunkt}}$

Oppgave 4

Temperaturen i en industrihall varierer periodisk over tid. Temperaturen kan med god tilnærming beskrives ved funksjonen:

$$T(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right) + 18 \qquad x \in [0,\ 24]$$

der T er temperaturen i grader Celsius x antall timer etter midnatt.

a) Bestem funksjonens periode, amplitude og likevektslinje.

$\underline{\underline{\textit{Amplitude}: 3}}$ $\quad$ $\underline{\underline{\textit{Likevektslinje}: 18}}$ $\quad$ $\underline{\underline{\textit{Periode}: \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24}}$

b) Hva blir den høyeste temperaturen i hallen?

$\underline{\underline{\textit{Høyeste temperatur blir } 3 + 18 = 21 \textit{ grader}}}$

c) Når er temperaturen høyest?

$\textit{Når } \sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{12}x = \frac{5\pi}{4}$

$\underline{\underline{x = 15, \textit{ altså kl. } 15}}$

d) Vis at $T'(x) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right)$. Regn også ut $T''(x)$.

$$T(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right) + 18$$

$$\underline{\underline{T'(x)}} = 3\cos\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right)}}$$

$$\underline{\underline{T''(x)}} = \frac{\pi}{4}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi^2}{48}\sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{3\pi}{4}\right)}}$$

e) Benytt resultatene i d) til å regne ut når temperaturen synker raskest.
Hvor mye synker den da pr. tidsenhet?

Temperaturen synker raskest en kvart periode etter toppunktet,

$\underline{\underline{\textit{altså når klokken er } 15 + 6 = 21}}$

Innsatt i $T'(x)$ *får vi*:

$$T'(21) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 21 - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\pi = -0,79$$

$\underline{\underline{\textit{Klokken } 21 \textit{ synker temperaturen med } 0,79 \textit{ grad per time}}}$

Oppgave 5

En funksjon $f(x)$ er definert ved $f(x) = 2x^3 - 8x \quad D_f = R$

a) Faktoriser funksjonsuttrykket så mye som mulig.
Finn nullpunktene til $f(x)$.

$$\underline{\underline{f(x)}} = 2x^3 - 8x = 2x\left(x^2 - 4\right) = \underline{\underline{2x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Nullpunkter når } x = \begin{cases} 2 \\ 0 \\ -2 \end{cases}}}$$

b) Regn ut likningen til tangenten i punktet $\left(1,\ f(1)\right)$.

$$\left(1,\ f(1)\right) = \left(1,\ -6\right)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = f'(1) = -2}$$

Likningen for tangenten er da gitt av ett-punkts formelen:

$$y - (-6) = -2(x-1) = -2x + 2$$

$$\underline{\underline{y = -2x - 4}}$$

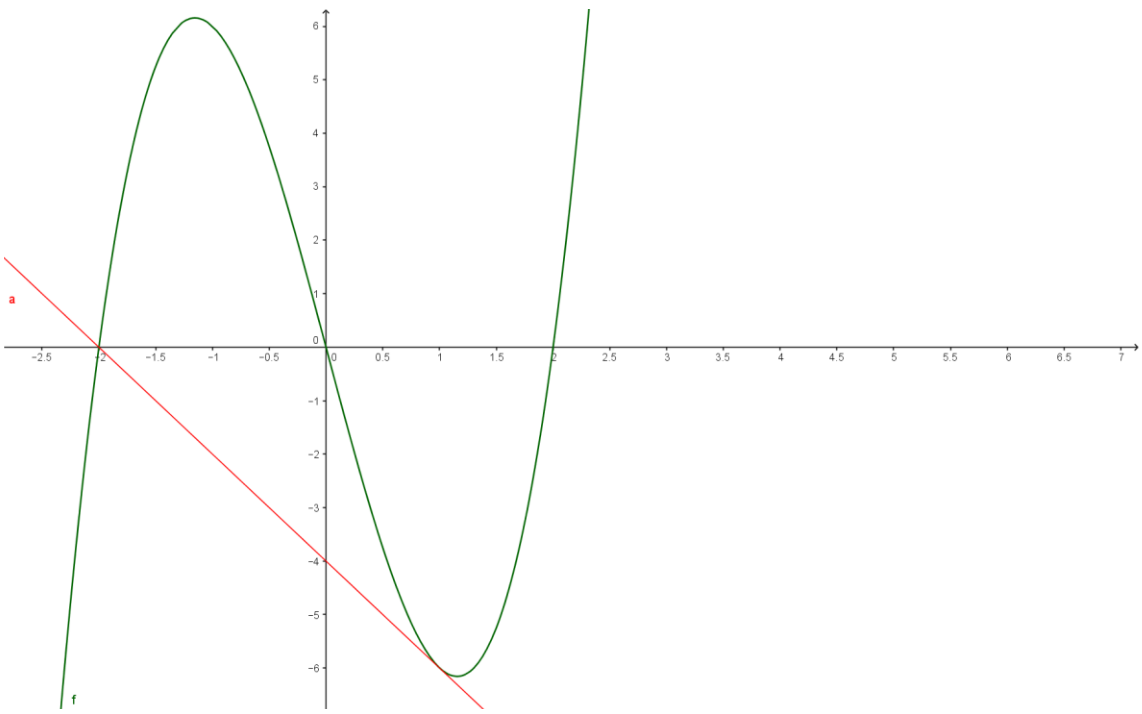
Bruk $f''(x)$ til å undersøke hvordan grafen til $f(x)$ krummer.

c) Tegn grafen og tangenten fra oppgave b) i samme koordinatsystem

$$f''(x) = 12x, \textit{ altså vendepunkt i } (0, f(0)) = \left(0, 0\right)$$

$$f''(x) < 0 \textit{ når } x < 0 \textit{ og } f''(x) > 0 \textit{ når } x > 0$$

$$\underline{\underline{\textit{Grafen har hul side ned når } x < 0, \textit{ og hul side opp når } x > 0}}$$



Oppgave 6

Vi skal konstruere et høydebasseng som skal forsyne et område med vann. Bassenget skal utformes som en lukket sylindrisk tank med et volum på 800 m^3.

a) Finn høyden *h* i sylinderen uttrykt ved hjelp av radiusen *r*.
Anta at *h* og *r* måles i meter.

$$V = \pi r^2 h = 800$$

$$\underline{\underline{h = \frac{800}{\pi r^2}}}$$

b) Vis at overflaten til sylinderen (målt i m^2) kan uttrykkes som:

$$O = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

$$O = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{800}{\pi r^2}$$

$$\underline{\underline{O = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}}}$$

c) Vi ønsker å bruke minst mulig materialer når sylindertanken skal utformes.
Regn ut høyden *h* og radiusen *r* i dette tilfellet.

$$O' = 4\pi r - \frac{1600}{r^2} = 0 \ \ gir \ \ at:$$

$$4\pi r^3 = 1600 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{400}{\pi} \ \ som \ \ gir \ \ at:$$

$$\underline{\underline{r = 5,03 \ \ meter}} \qquad \underline{\underline{h = 10,06 \ \ meter}}$$