17. Følger og rekker

17.1 Tallfølger

En tallfølge er en liste av tall, men komma mellom. Tallene følger (gjerne) et mønster som er lett, - eller vanskelig å oppdage.

Eksempel på en tallfølge:

$$1\ ,\ 2\ ,4\ ,8\ ,16$$

$$a_1\,,a_2,a_3,a_4,a_5$$

Merk at rekkefølgen har betydning, og at vi pleier å gi tallene "navn" etter hvilket nr det har i tallfølgen.

Tallmønsteret kan beskrives ved en **rekursiv formel**. Slik som tallfølgen i eksempelet dersom vi setter

$$a_1 = 1 \quad , \qquad a_n = 2a_{n-1}$$

Her beskrives hvordan vi finner nye ledd i tallfølgen, basert på at vi kjenner ett eller flere foregående ledd.

a_n - kaller vi det allmenne ledd.

Merk det er også vanlig å bruke *i*, *j* og *k* som indekser/ navn på vilkårlige ledd i tallfølgen.

Tallfølger kan også beskrives ved en **eksplisitt formel**, dvs. en formel som vi kan bruke for å regne ut leddene, der det eneste vi trenger å vite er hvilket nummer tallet har i tallfølgen.

Eksempel 1: Finn tallfølgen gitt ved $a_n = 2n-1$.

Løsning:

$$a_n = 2n-1 \qquad a_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2\cdot 2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2\cdot 3 - 1 = 5$$

Vi ser at denne formelen gir oddetallene.

$$1,3,5,7,\ldots$$

Eksempel 2 En tallfølge gitt ved $a_1 = 2$ og for $i > 1$ er $a_i = 3a_{i-1}$

a) Finn de 5 første leddene i tallfølgen

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3\cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3\cdot 6 = 18$$

$$a_4 = 3\cdot 18 = 54$$

$$a_5 = 3\cdot 54 = 162$$

$$\text{Tallfølge}: 2,6,18,54,162,\ldots$$

b) Finn en formel for ledd nr *i*

Vi må lete etter mønsteret, og tar en ny titt på tallene:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3\cdot 2 = 6 = 3\cdot a_1$$

$$a_3 = 3\cdot 6 = 18 = 3\cdot a_2 = 3\cdot 3\cdot a_1 = 3^2\cdot 2$$

$$a_4 = 3\cdot 18 = 54 = 3\cdot a_3 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot a_1 = 3^3\cdot 2$$

$$a_5 = 3\cdot 54 = 162 = 3^4\cdot 2$$

Ledd nr i: $\quad a_i = 3^{i-1}\cdot 2 \qquad$ (også for $i = 1$ *siden* $a_1 = 3^0\cdot 2$)

c) Finn ledd nr 15

$$a_{15} = 3^{15-1}\cdot 2 = \underline{\underline{9565938}}$$

17.2 Rekker

Rekke = summen av tallene i en tallfølge.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n \quad mao\ S_n = \text{sum av } n \text{ første ledd (endelig rekke)}$$

Merk skrivemåten med summetegn. Kort og presis! Men krever at vi kan finne en formel for *n*- te leddet a_n .

En rekke er gitt ved: $1+3+5+7+9+... = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

$a_n = ?$

$2n$ gir oss partall Her passer: $a_n = 2n-1$

$S_4 = 1+3+5+7 = 16$ (vanlig addisjon Enkelt - men tungvint ved mange ledd)

$S_7 = S_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$= 16+9+11+13 = 49$

Kalkulator er til hjelp, men formler for aritmetiske og geometriske rekker er mer effektive. Og da kan vi også regne med bokstaver. (Jeg forventer utregning, som begrunnelse for summer som krever mer enn vanlig hoderegning)

17.3 Aritmetiske følger

En tallfølge er aritmetisk når det finnes en *d* slik at $a_n = a_{n-1} + d$

En aritmetisk tallfølge kan skrives på formen:

$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 4d, ...$ med $a_n = a_1 + (n-1)d$

Eksempel 1

Vi skal finne et ukjent ledd og et uttrykk for n-te ledd i en aritmetisk tallfølge.

$a_1 = 2$, $d = \frac{1}{2}$ Finn a_{10} og a_n

Løsning: det kan være lurt å skrive opp noen ledd for å se mønsteret:

$$a_2 = a_1 + d = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = a_2 + d = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

$$a_n = 2 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{4+n-1}{2} = \underline{\underline{\frac{n+3}{2}}}$$

Eksempel 2

Hvordan bestemme første ledd og differens nå to ledd av en aritmetisk tallfølge der to ledd er kjent.

I en aritmetisk tallfølge kjenner vi leddene

$a_2 = 4$ $a_4 = 2$ Finn a_1 , d og a_n.

Løsning:

$a_2 = 4 = a_1 + d \qquad a_4 = 2 = a_1 + 3d$

$a_4 - a_2 = 2 - 4 = a_1 + 3d - (a_1 + d) = 2d$

$-2 = 2d$

$\underline{\underline{d = -1}}$

$a_2 = 4 = a_1 + d \qquad \Rightarrow a_1 = 4 - d = 4 - (-1) = \underline{\underline{5}}$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)\cdot(-1) = \underline{\underline{6-n}}$

17.4 Aritmetiske rekker

En aritmetisk rekke kan skrives på formen:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d)$$

Vi skal nå utlede en formel for å finne summen av en aritmetisk rekke:

i) $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$

ii) $S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$

iii) $2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \ldots + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d)$

iv) $2S_n = n(2a_1 + (n-1)d)$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Summen av en aritmetisk rekke med n ledd:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Forklaring:

- i) Skriver tallene i motsatt rekkefølge
- ii) Adderer venstre sidene og høyre sidene
- iii) Merk at alle leddene er like
- iv) Vi finner så et uttrykk for S_n

Eksempel 1

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i \qquad a_1 = 1 \quad , n = 100 \quad \text{og} \quad a_{100} = 100$

$$S_{100} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{100(1+100)}{2} = 50 \cdot 101 = \underline{\underline{5050}}$$

Eksempel 2

Ole har 100 kr i ukepenger, og har forhandlet seg til at beløpet øker med 2 kr pr uke.

a) Hvor mye har han i ukepenger de 4 første ukene?

b) Hvor mye har han i ukepenger etter 2 år?

c) Hvor mye har han fått i løpet av disse to årene?

Løsning:

a)

$$a_1 = 100$$
$$a_2 = 102$$
$$a_3 = 104$$
$$a_4 = 106 \qquad\qquad a_1 = 100 \qquad d = 2$$

b)

2 år = 104 uker

$$a_{104} = a_1 + (n-1)d = 100 + 103 \cdot 2 = \underline{\underline{306}}$$

c)

$$S_{104} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{104(100+306)}{2} = \underline{\underline{21\,112\,\text{kr}}}$$

<u>Eksempel 3</u> Finn et uttrykk / formel for summen av de *n* første oddetall.

Løsning:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

$$S_n = \frac{n(1+(2n-1))}{2} = \frac{n+2n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = \underline{\underline{n^2}}$$

<u>Eksempel 4</u> Aritmetisk rekke med kjent sum, men ukjent formel for n-te ledd og ukjent antall ledd.

$$5+7+\ldots+\ldots = 192$$

a) Finn de 5 første leddene i rekken

b) Finn en formel for ledd nr n

c) Bestem antall ledd i rekken

Løsning

a) De 5 første leddene i rekken

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 7 \qquad\qquad d = 2$$
$$a_3 = 9$$
$$a_4 = 11$$
$$a_5 = 13$$

b) Finn en formel for ledd nr n

$$a_1 = 5$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)2$$
$$= 5 + 2n - 2 = \underline{\underline{2n+3}}$$

c) Antall ledd i rekken?

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(5+2n+3)}{2}$$
$$= \frac{n(2n+8)}{2} = \frac{2n(n+4)}{2} = n^2 + 4n = 192$$

Løser likningen $n^2 + 4n - 192 = 0$

$n_1 = 12 \ \vee \qquad n_2 = -16 \qquad n > 0$ gir

$\underline{\underline{n = 12 \ \text{ledd}}}$

Eksempel 5 Finn første ledd og differens i en aritmetisk rekke der to del - summer er kjent.

En aritmetisk rekke har ledd slik at $S_{10} = 0$, $S_{15} = 75$ Finn a_1 og d.

Løsning:

$$S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 5a_1 + 5a_{10}$$
$$= 5a_1 + 5(a_1 + 9d)$$
$$= \underline{10a_1 + 45d = 0}$$

$$S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15}{2}a_1 + \frac{15}{2}a_{15}$$
$$= \frac{15}{2}a_1 + \frac{15}{2}(a_1 + 14d)$$
$$= \underline{15a_1 + 105d = 75}$$

Vi løser disse to likningene som et likningssett med 2 ukjente

$10a_1 + 45d = 0 \,|\, :5$ reduserer for å få enklere regning.

$15a_1 + 105d = 75 \,|\, :15$

$I: \quad 2a_1 + 9d = 0$

$II: \quad a_1 + 7d = 5 \quad \Rightarrow a_1 = 5 - 7d$ som settes inn i I

$2(5 - 7d) + 9d = 0$

$10 - 14d + 9d = 0$

$-5d = -10$

$\underline{\underline{d = 2}} \qquad a_1 = 5 - 7d = 5 - 14 = -9$

Rekken: -9-7-5-3-1+1+3+5+7+9+...

17.5 Geometriske følger

En geometrisk tallfølge kan skrives på formen:

$a_1, a_1k, a_1k^2, a_1k^3, ...a_1k^n, ..$

Merk $\frac{a_i}{a_{i-1}} = k \qquad a_n = a_1k^{n-1}$

Eksempel 1

$i) \quad 1, 2, 4, 8, 16, ...2^{n-1} \qquad$ Her er $a_1 = 1 \quad k = 2$

$ii) \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, .. \qquad$ Her er $a_1 = 1 \quad k = -\frac{1}{2}$

Det 10. tallet i tallfølgen kan betemmes slik: $a_{10} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{512}}}$

Eksempel 2

Hvordan bestemme første ledd og kvotient nå to ledd av en geometrisk tallfølge der to ledd er kjent.

I en geometrisk tallfølge kjenner vi leddene $a_2 = 4$ $a_4 = 2$ Finn a_1 , k og a_n.

Løsning:

$a_2 = 4 = a_1 k$ $\qquad a_4 = 2 = a_1 k^3$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{a_1 k^3}{a_1 k} = k^2$$

$$k^2 = \frac{1}{2}$$

$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ Vi har altså to løsninger.

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ gir } \quad 4 = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow a_1 = \underline{\underline{4\sqrt{2}}} \quad a_n = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}} = \underline{\underline{\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}}}}$$

$$k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{gir} \quad 4 = a_1 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow a_1 = \underline{\underline{-4\sqrt{2}}} \quad a_n = -4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\left(-\sqrt{2}\right)^{n-1}} = \underline{\underline{\frac{4}{\left(-\sqrt{2}\right)^{n-2}}}}$$

Starten på disse tallfølgene vil se slik ut

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{gir} \quad 4\sqrt{2} \text{ , } 4 \text{ , } \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ , } 2 \text{ , } \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ , } 1 \text{ , } \frac{1}{\sqrt{2}} \ldots$$

$$k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{gir} \quad -4\sqrt{2} \text{ , } 4 \text{ , } \frac{-4}{\sqrt{2}} \text{ , } 2 \text{ , } \frac{-2}{\sqrt{2}} \text{ , } 1 \text{ , } \frac{-1}{\sqrt{2}} \ldots$$

For å bestemme leddene i en tallfølge er det til stor hjelp dersom vi kan avgjøre om tallfølgen er geometrisk eller aritmetisk. **Men** ikke alle tallfølger passer inn i formen til en av disse.

17.6 Geometriske rekker

En geometrisk rekke kan skrives på formen:

$$S_n = a_1 + k\,a_1 + k^2\,a_1 + \ldots + k^{n-2}\,a_1 + k^{n-1}\,a_1 = \sum_{i=1}^{n} k^{i-1} \cdot a_1$$

Vi skal nå utlede en formel for å finne summen av en geometrisk rekke:

i) $S_n = a_1 + k\,a_1 + k^2\,a_1 + \ldots + k^{n-2}\,a_1 + k^{n-1}\,a_1$

ii) $k \cdot S_n = k \cdot a_1 + k^2 a_1 + k^3 a_1 + \ldots + k^{n-1} a_1 + k^n a_1$

$$k \cdot S_n - S_n = k \cdot a_1 + k^2 a_1 + k^3 a_1 + \ldots + k^{n-1} a_1 + k^n a_1 - (a_1 + k\,a_1 + k^2\,a_1 + \ldots + k^{n-2} a_1 + k^{n-1} a_1)$$
$$= k^n a_1 - a_1$$

iii) $k \cdot S_n - S_n = k^n a_1 - a_1$

iv) $S_n (k - 1) = a_1 (k^n - 1)$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1 (k^n - 1)}{k - 1} \quad , k \neq 1$$

Summen av en geometrisk rekke med n ledd:

$S_n = \dfrac{a_1 (k^n - 1)}{k - 1}$ $, k \neq 1$ med $k = 1 \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$

Forklaring:

i) Multipliserer med k

ii) Trekker fra (venstre side fra venstre side, og tilsv. med høyresidene)

iii) Faktoriserer, med tanke på å finne en formel for summen.

iv) Merk at $k = 1$, gir 0 under brøkstreken i formelen. Men k = 1, gir en rekke med bare like ledd, noe som gjør det enkelt å finne summen likevel.

Eksempel 1

Oppgave:
Vi skal finne summen av de 9 første ledd; S_9 i den geometriske rekken: $1+3+9+27+81+..$

Vi vil bruke at summen i en geometrisk rekke er $S_n = a_1 \dfrac{(k^n - 1)}{k - 1}$

Vi har $n = 9$ og ser fra den kjente delen av rekken at $a_1 = 1$

$$a_n = k \cdot a_{n-1} \implies k = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$n = 1 \implies k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$S_9 = 1\,\frac{(3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{19683 - 1}{2} = \underline{\underline{9841}}$$

Summen av de 9 første leddene er $S_9 = 9841$

Eksempel 2 Lommepenger
Ole har et nytt forslag for beregning av «lønnstigning».
Som før er utgangspunktet 100 kr pr uke, men nå med 2% tillegg pr uke.

a) Bestem beløpene de 4 første ukene.

b) Hvilket beløp får han etter2 år?

a) Sum ukepenger disse 2 årene?

Løsning:

a) Bestem beløpene de 4 første ukene.

$$a_1 = 100$$

$$a_2 = 100 \cdot 1,02 = 102$$

$$a_3 = 100 \cdot 1,02^2 = 104,04$$

$$a_4 = 100 \cdot 1,02^3 = 106,12$$

b) Beløp etter 2 år?

$$a_{104} = 100 \cdot 1,02^{103} = 768,81$$

c)

$$S_{104} = \frac{a_1\left(k^n - 1\right)}{k - 1} = \frac{100\left(1,02^{104} - 1\right)}{1,02 - 1} = 34209,19\,\text{kr}$$ (gml ordning 21112,-)

Eksempel 3 geometrisk rekke der a_1 og k er ukjent

Oppgave:
Vi skal finne summen av de 6 første ledd; S_6
i den geometriske rekken der: $a_2 = 3$ og $a_5 = \frac{1}{9}$:

Formelen for n-te ledd i en geometrisk rekke er
$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$ og summen av rekken er $S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$

Vi har $n = 6$, men a_1 og k er ukjente.

$a_2 = k \cdot a_1 = 3$

$a_5 = k^4 \cdot a_1 = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \frac{a_5}{a_2} = \frac{k^4 \cdot a_1}{k \cdot a_1} = k^3 = \frac{\frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{27}$$

$$k = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

$a_2 = \frac{1}{3} \cdot a_1 = 3$

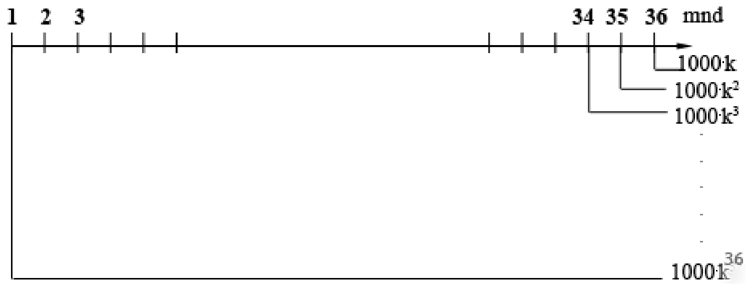
$\Rightarrow a_1 = 3 \cdot 3 = 9$

$$S_6 = 9 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{3^6} - 1}{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{364}{27}}}$$

Summen av de 6 første
leddene er $S_6 = \frac{364}{27}$

Eksempel 4 Sparing av 1000,- hver mnd i 3 år (36 mnd.) med 4 % p.a.
Hvor mye kan kontoeier ta ut 1 mnd etter siste innbetaling?

Lager en fig / tidslinje for å se hvordan hvert sparebeløp vokser:



$$\text{Rente pr mnd} = \frac{4 \cdot 1}{100 \cdot 12} = \frac{1}{300} = 3,33 \cdot 10^{-3} = 0,0033$$

Her står **k** for vekstfaktor: 100 % + rente =1,0033 = k

Samlet beløp:

$$1000\left(k + k^2 + k^3 + \ldots k^{36}\right) = 1000 \cdot \frac{a_1\left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$
$$= \frac{1000 \cdot 1,0033\left(1,0033^{36} - 1\right)}{1,0033 - 1}$$
$$= \underline{\underline{38284,84\,\text{kr}}}$$

17.7 Uendelige rekker

Gitt at vi har en uendelig geometrisk rekke $27 + 2,7 + 0,27 + 0,027 + 0,0027 + \ldots$ med $k = 0,1$

Når vi regner ut summen av rekka for de første leddene

$S_1 = 27$
$S_2 = 29,7$
$S_3 = 29,97$
$S_4 = 29,997$
$S_5 = 29,9997$
$S_6 = 29,99997$ ser det ut som om summen går mot 30 når n øker.

Vi sier at en rekke er **konvergent** dersom $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Det vil si når summen av en rekke går mot bestemt verdi selv om antall ledd øker.

Dersom delsummen S_n ikke går mot en grense, sier vi at rekken er **divergent**.

Et eksempel på en divergent rekke er denne geometriske rekken: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$.
Her blir leddene stadig større og da må også partsialsummene bli større og større når n øker.

Vanskeligheter i forbindelse med divergente rekker.

Omkring år 1700 var det stor diskusjon blant matematikere i Europa angående rekker.
James Bernoulli (1654-1705) studerte bl.a. rekken

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Om man skrev rekken slik:

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$

$= 0 + 0 + 0 + \ldots$

var summen opplagt 0,

men skriver man rekken på formen

$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) -$

$= 1 - 0 - 0 - 0 \ldots$

blir summen lik 1!

Brukte man summeformel for en geometrisk rekke oppnådde man $1 - x + x^2 - x^3 + ... = \dfrac{1}{1+x}$

setter vi inn for $x = 1$

Gir dette $1 - 1 + 1 - 1 + ... = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ nok en sum for den samme rekken!

I lys av dette forstår vi Abels utsagn om divergente rekker i brev til Holmboe (jan. 1826)

> *"Divergente Rækker er i det hele noget fandenskap, og det er en skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hva man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan det tænkes noget skrækkeligere end at sige at*
>
> $0 = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + etc.$ *hvor n er et heelt Tal."*

For hvilke verdier av k konvergerer en geometrisk rekke?

Vi vet at summen av de n først ledd i en geometrisk rekke er:

$$S_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \ldots + a_1 k^{n-1} = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \quad , k \neq 1$$

$$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = n a_1 \quad , k \neq 1$$

Vi deler opp i fire alternativer:

Klikk på det alternativet du ønsker å studere

- I $k = 1$
- II $|k| < 1$
- III $k = -1$
- IV $|k| > 1$
- Oppsummering

For en uendelig geometrisk rekke

$a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \ldots + a_1 k^{n-1} \ldots \quad , k = 1$ gjelder at:

Rekken konvergerer og har sum $S = \dfrac{a_1}{1 - k}$ hvis $|k| < 1$.

Rekken divergerer hvis $|k| \geq 1$

<u>Eksempel 1</u>

Finn summen til $1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots$

<u>Løsning:</u>

Dette er en konvergent geometrisk rekke siden $k = \dfrac{1}{2}$.

Summen er lik: $S = \dfrac{a_1}{1-k} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$

Eksempel 2

Utvinning av et oljefelt

I et oljefelt antar vi at det 1000 millioner tonn olje. I år utvinnes det 20 millioner tonn olje. I årene som kommer er det planlagt en fast % - vis reduksjon av utvinningen.

ⓐ Uttak ved 3% årlig reduksjon

ⓑ Hvor mye må den årlige reduksjonen være, dersom feltet ikke skal gå tomt.

a) 3% årlig reduksjon gir vekstfaktoren 0,97.

Dette gir samlet uttak gitt ved $20 + 20 \cdot 0{,}97 + 20 \cdot 0{,}97^2 + 20 \cdot 0{,}97^3 + \ldots$

Dette er en geometrisk rekke vi kan finne summen til:

$S = 20 + 20 \cdot 0{,}97 + 20 \cdot 0{,}97^2 + 20 \cdot 0{,}97^3 + \ldots = \dfrac{20}{1 - 0{,}97} = 666{,}67$ millioner tonn.

Vi ser at oljefeltet ikke vil gå tomt med et uttak basert på 3% årlig reduksjon.

b) Her ønsker vi å bestemme verdien til k, slik at

$S = 20 + 20 \cdot k + 20 \cdot k^2 + 20 \cdot k^3 + \ldots = 1000$

$$\frac{20}{1-k} = 1000$$

$$20 = 1000 - 1000k$$

$$1000k = 980$$

$$k = 0{,}98$$

$k = 0{,}98$ betyr en årlig reduksjon på 2%.

Med en årlig reduksjon på 2% vil ikke utvinningen overstige 1000 millioner tonn selv om utvinningen fortsetter og fortsetter år ettter år...

Noe annet er om utvinningen blir lønnsom etter hvert som uttaket minker.

17.8 Geometriske rekker med variable kvotienter

Ser vi på denne rekken

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Kan vi si at rekken er geometrisk med $a_1 = 1$, kvotsient $k = x$

Er $|x| < 1$ konvergerer rekken og $s = \dfrac{a_1}{1-k} = \dfrac{1}{1-x}$

Derfor kan vi skrive: $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ for $-1 < x < 1$

Merk! Funksjonen har et definisjonsområde $D_f = \mathbb{R} / \{1\}$, men rekkeutviklingen gjelder bare når $-1 < x < 1$.

Eksempel

Bestem konvergensområdet og summen til rekken: $3+(2x-5)+\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(2x-5)^3}{3^2}+\dots$

Løsning:

Vi ser at dette er en geometrisk rekke med $k=\frac{(2x-5)}{3}$

Geometriske rekken konvergerer (og har en sum), dersom

$|k|<1$ som her gir:

$$-1<\frac{(2x-5)}{3}<1 \,\Big|\cdot 3$$

$$-3<2x-5<3$$

$$-3+5<2x<3+5$$

$$2<2x<8 \,\big|:2$$

$$1<x<4$$

Bestemmer så summen: $S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{3}{1-\frac{(2x-5)}{3}}=\frac{9}{3-2x+5}=\frac{9}{8-2x}$

Konklusjon: $\frac{9}{8-2x}\approx 3+(2x-5)+\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(2x-5)^3}{3^2}+\dots$ når $x\in\langle 1,4\rangle$