UNIVERSITETET I AGDER

FAKULTET FOR TEKNOLOGI OG REALFAG

J U L E T E N T A M E N

Emnekode: **Ma-015**
Emnenavn: **Matematikk for forkurs**

Dato: 1. desember 2017
Varighet: 5 timer

Antall sider inkl. forside: 3

Tillatte hjelpemidler:

Godkjente formelsamlinger i matematikk – uten notater.
Godkjent kalkulator.

Merknader:

Løs hver oppgave oversiktlig. Ta med nødvendige mellomregninger at du forklarer fremgangsmåter og begrunner svarene. Legg vekt på nøyaktige utregninger.

Ved vurdering teller alle deloppgaver likt.

Oppgave 1 Skriv så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{2a^{-2}\cdot b\cdot 3\sqrt{a}}{6a^{-3}\cdot\sqrt[3]{b^2}}$

b) $\dfrac{3x^2+6x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}$

Oppgave 2 Løs likningene:

a) $\sqrt{x+1}-2x=1$

b) $x^4-5x^2+4=0$

c) $\lg x^2-\lg x-1=0$

Oppgave 3 Løs likningssettet:

$$-x-2y=-1$$
$$3x^2+y=3$$

Oppgave 4 Deriver funksjonene:

a) $f(x)=2x^3-\dfrac{1}{3}x^2+2x-\pi$

b) $f(x)=e^{x^2+2x}$

c) $f(x)=x^2\sqrt{2x-1}$

Oppgave 5 I $\triangle ABC$ er siden AB lik 10,0 cm, siden AC lik 8,0 cm og $\angle A=55°$.

a) Bestem arealet til trekant ABC ved regning.

b) Regn ut lengden til siden BC.

c) Bestem vinkel B.

Oppgave 6 Gitt $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x}$

a) Finn definisjonsmengden til $f(x)$ og regn ut nullpunktene til funksjonen.

b) Finn eventuelle asymptoter til $f(x)$.

Oppgave 7 La $f\left(x\right)=x^3+6x^2+9x+4$

a) Vis at $x+1$ er en faktor i $f(x)$.

b) Faktoriser $f(x)$.

c) Løs ulikheten $f(x)\geq 0$.

d) Bestem likningen for tangenten i punktet $\left(0, f(0)\right)$.

Oppgave 8 Funksjonen f er gitt ved $f\left(x\right)=\dfrac{12\ln x}{x^2}$

a) Bestem eventuelle nullpunktene til f ved regning.

b) Bestem uttrykket for $f'(x)$ og regn ut koordinatene til toppunktet til f .

c) Regn ut koordinatene til vendepunktet til f .

d) Tegn grafen til f .

Oppgave 9 Gitt to punkter i planet $A\left(2,1\right)$ og $B\left(2,8\right)$.

a) Tegn vektorene $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ og $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

Tegn vektoren $2\vec{a}-\vec{b}$.

Regn ut koordinatorene til vektoren $2\vec{a}-\vec{b}$.

b) Regn ut vinkelen mellom vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) Regn ut arealet til trekanten som er utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Oppgave 10 Løs likningene:

a) $2\sin x+\sqrt{3}=0$, $x\in\left[-90°, 360°\right]$

b) $2\tan x-2=0$, $x\in\ [0, 2\pi >$

Lykke til!

Løsningsforslag

Oppgave 1

Skriv enklest mulig:

a) $$\frac{2a^{-2}\cdot b\cdot 3\sqrt{a}}{6a^{-3}\cdot\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\cancel{2}a^{-2}\cdot b\cdot\cancel{3}a^{\frac{1}{2}}}{\cancel{6}a^{-3}\cdot b^{\frac{2}{3}}}=a^{-2+\frac{1}{2}+3}\cdot b^{1-\frac{2}{3}}=\underline{\underline{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}=\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{b}}}$$

b)

$$\frac{3x^2+6x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=\frac{3x^2+6x-2(x+2)}{x^2-4}=\frac{3x^2+6x-2x-4}{x^2-4}$$

$$=\frac{3x^2+4x-4}{x^2-4}=\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-2)}=\underline{\underline{\frac{3x-2}{x-2}}}$$

Oppgave 2

Løs likningene

a) $\sqrt{x+1}-2x=1$

$$\sqrt{x+1}-2x=1$$ rottegnet må stå alene på en side av likhetstegnet

$$\sqrt{x+1}=1+2x$$ kvadrerer begge sider, men dette kan gi falske løsninger

$$x+1=1+4x+4x^2$$

$$4x^2+3x=0$$

$$x(4x+3)=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=-\frac{3}{4}$$

Vi har to mulige løsninger, og setter prøve for å sjekke om dette er ekte løsninger av likningen:

Prøve for x = 0:

$$Vs:\sqrt{x+1}-2x=\sqrt{0+1}-2\cdot 0=\sqrt{1}=1$$

$$Hs:=1$$

$$Vs=hs \qquad \Rightarrow \underline{x=0 \quad \text{er en løsning}}$$

Prøve for $x = -\frac{3}{4}$

$$Vs : \sqrt{x+1} - 2x = \sqrt{-\frac{3}{4}+1-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$Hs := 1$

$Vs \neq hs \qquad \Rightarrow \underline{x = -\frac{3}{4} \qquad \text{er ikke en løsning}} \qquad \underline{\underline{L = \{0\}}}$

b)

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ La $u = x^2$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$u_1 = 4 \;\vee\; u_2 = 1$ Bruker at $u = x^2$

$x^2 = 4 \;\vee\; x^2 = 1$

$x = \pm 2 \;\vee\; x = \pm 1$

$\underline{\underline{L = \{-2, -1, 1, 2\}}}$

c)

$\lg x^2 - \lg x - 1 = 0$

$2\lg x - \lg x = 1$

$\lg x = 1$

$x = 10^1 = \underline{\underline{10}}$

Oppgave 3

$-x - 2y = -1 \quad \Rightarrow x = 1 - 2y$

$3x^2 + y = 3$

$3(1-2y)^2 + y = 3$

$3(1-4y+4y^2) + y = 3$

$3 - 12y + 12y^2 + y = 3$

$12y^2 - 11y = 0$

$y(12y - 11) = 0$

$y = 0 \;\vee\; 12y = 11$

$\underline{y_1 = 0 \;\vee\; y_2 = \frac{11}{12}}$

$x_1 = 1 - 2\cdot 0 = \underline{1}$

$x_2 = 1 - 2\cdot\frac{11}{12} = 1 - \frac{11}{6} = \underline{-\frac{5}{6}}$ $\qquad$ $Løsning: \underline{\underline{(1,0) \;\vee\; \left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right)}}$

Oppgave 4 Deriver funksjonene:

a)

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - \pi$$

$$f'(x) = \underline{\underline{6x^2 - \frac{2}{3}x + 2}}$$

b)

$$f(x) = e^{x^2+2x} = e^u$$

$$f'(x) = e^u \cdot u' = \underline{\underline{(2x+2)e^{x^2+2x}}}$$

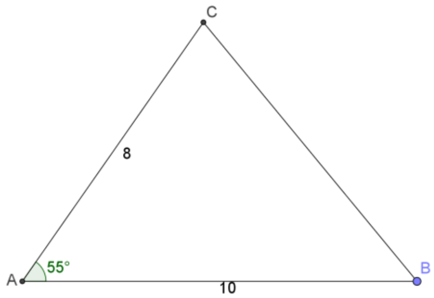
c)

$$f(x) = x^2\sqrt{2x-1} \qquad f'(x) = 2x\sqrt{2x-1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2$$

$$= \underline{\underline{2x\sqrt{2x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}}}$$

Oppgave 5

I $\triangle ABC$ er siden AB lik 10,0 cm, siden AC lik 8,0 cm og $\angle A = 55°$.



a) Bestem arealet til trekant ABC ved regning. $A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 55° = \underline{\underline{32{,}8\text{cm}^2}}$

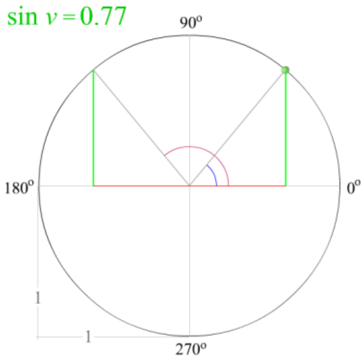
b) Regn ut lengden til siden BC.
Bruker cosinussetning:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 55°$$

$$\Rightarrow BC = a = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 55°}$$

$$BC = \underline{\underline{8{,}5cm}}$$



c) Bestem vinkel B.
Bruker sinussetningen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \sin 55°}{8,5} \approx 0,770$$

$v = 50,4°$ $\vee$ $v = 180° - 50,4° = 129,6°$

NB $\sin B = 0,770$ har to løsninger, men kun 1 passer,
129,6° går ikke i trekanten.(for stor vinkelsum)
Trekanten er entydig bestemt, derfor er det bare en vinkel som passer.

$\underline{\underline{\angle B = 50,4°}}$

Oppgave 6 Gitt $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x}$

a) Finn definisjonsmengden til $f(x)$ og regn ut nullpunktene til funksjonen.

Kan ikke ha 0 i nevner, dvs. definisjonsmengden blir: $D_f = \underline{\underline{R \setminus \{0\}}}$

Nullpunktene finnes fra 2. gradsformelen eller kalkulator:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \underline{\underline{\{-3, -1\}}}$

b) Finn eventuelle asymptoter til $f(x)$.

Vertikal asymptote der nevner er lik 0:

$\underline{\underline{x = 0}}$
$x = 0$ gir ikke 0 i teller derfor er $x = 0$ vertikal asymptote

Skråasymptote (siden teller har høyere grad enn nevner)

$f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x} = \left(x + 4 + \dfrac{3}{x}\right)$ $\underline{\underline{\text{Skråasymptote: } y = x + 4}}$

Oppgave 7 $f\left(x\right)=x^3+6x^2+9x+4$

a)

$$f\left(x\right)=x^3+6x^2+9x+4$$
$$f\left(-1\right)=\left(-1\right)^3+6\cdot\left(-1\right)^2+9\cdot\left(-1\right)+4=-1+6-9+4=0$$
$$f(-1)=0$$

$(x+1)$ er da en faktor i $f(x)$

b)

$$(x^3+6x^2+9x+4):(x+1)=x^2+5x+4$$
$$\underline{-x^3-x^2}$$
$$5x^2+9x$$
$$\underline{-5x^2-5x}$$
$$4x+4$$
$$\underline{-4x-4}$$
$$0$$

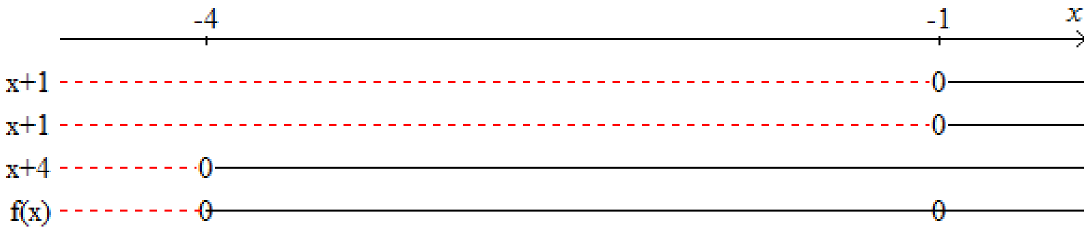
$$x^2+5x+4=0$$

Bruker EQUA på kalkulator

$$x=-1 \ \vee \ x=-4$$
$$\underline{\underline{f(x)=\left(x+1\right)^2(x+4)}}$$

c)

$$f(x)\geq 0$$
$$\left(x+1\right)^2(x+4)\geq 0$$



$$f(x)\geq 0$$
$$\underline{\underline{x\geq -4}}$$

d) Bestem likningen for tangenten i punktet $\left(0, f(0)\right)$.

$$\left(0, f(0)\right) = \left(0, 4\right)$$

$a = f'(0) = 9$ bruker så ettpunktsformelen for en rett linje

$$y - 4 = 9(x - 0)$$

$$\underline{\underline{y = 9x + 4}}$$

Oppgave 8 Funksjonen f er gitt ved $f\left(x\right) = \dfrac{12\ln x}{x^2}$ $D_f = \left\langle 0, \rightarrow \right\rangle$

a)

$$f\left(x\right) = 0$$

$$\frac{12\ln x}{x^2} = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$e^{\ln x} = e^0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

b) Regn ut koordinatene til toppunktet til f.

$$f'\left(x\right) = \frac{\frac{12}{x}x^2 - 12\ln x \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{12x - 24x\ln x}{x^4} = \frac{12 - 24\ln x}{x^3} = \underline{\underline{\frac{12\left(1 - 2\ln x\right)}{x^3}}}$$

$$f'\left(x\right) = 0$$

$$\frac{12\left(1 - 2\ln x\right)}{x^3} = 0$$

$$1 - 2\ln x = 0$$

$$2\ln x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Sjekker om dette gir toppunkt.

$$f''(x)=\frac{\frac{-24\ln x}{x}\cdot x^3-(12-24\ln x)3x^2}{x^6}$$
$$=\frac{-24x^2\ln x-36x^2+72x^2\ln x}{x^6}$$
$$=\frac{48\ln x-36}{x^4}$$

eller vha fortegnsskjema

$$f''\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{48\ln e^{\frac{1}{2}}-36}{e^{\frac{1}{2}\cdot 4}}=\frac{24-36}{e^2}=\frac{-12}{e^2}<0$$

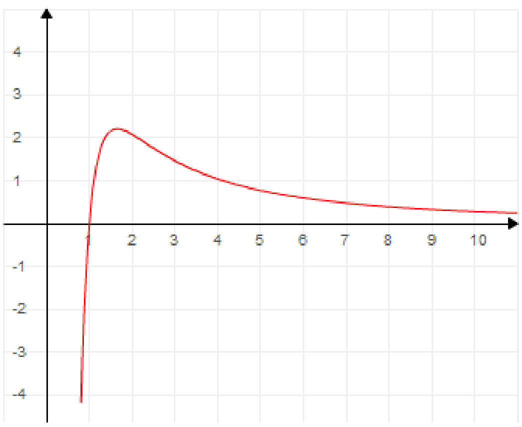
Toppunkt: $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{12\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}\cdot 2}}=\frac{12\cdot\frac{1}{2}}{e}=\frac{6}{e}$ $\qquad \underline{\underline{TP:\left(e^{\frac{1}{2}},\frac{6}{e}\right)\approx(1{,}65\ ,\ 2{,}21)}}$

c) Regn ut koordinatene til vendepunktet til f .

$$f''(x)=\frac{48\ln x-36}{x^4}$$
$$f''(x)=0$$
$$48\ln x-36=0$$
$$\ln x=\frac{36}{48}=\frac{3}{4}$$
$$x=e^{\frac{3}{4}}\approx 2{,}12$$
$$f\left(e^{\frac{3}{4}}\right)=\frac{12\ln e^{\frac{3}{4}}}{e^{\frac{3}{4}\cdot 2}}=\frac{9}{e^{\frac{3}{2}}}\approx 4{,}25$$
$$\underline{\underline{VP:\left(e^{\frac{3}{4}},\frac{9}{e^{\frac{3}{2}}}\right)}}$$

+ vis at den dobbeltderiverte bytter fortegn.

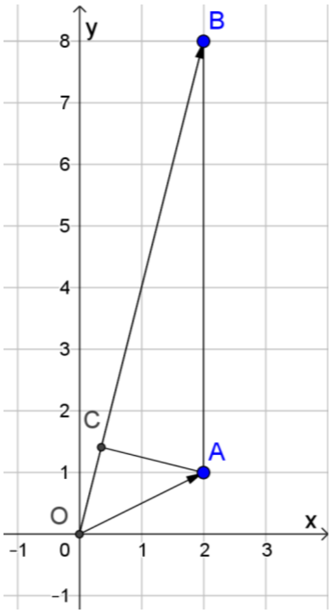
b) Grafen til f

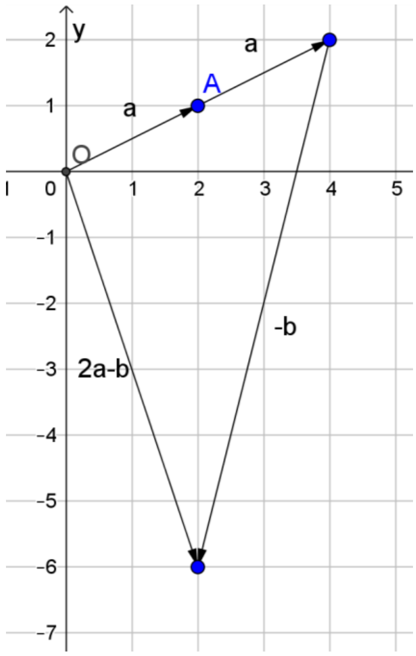


Oppgave 9

Gitt to punkter i planet $A(2,1)$ og $B(2,8)$.

a) Tegn vektorene $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.





Vis hvordan du ved tegning kan bestemme vektoren $2\vec{a} - \vec{b}$.

Regn ut koordinatorene til vektoren $2\vec{a} - \vec{b}$.

$A(2,1)\ \ B(2,8)$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = [2,1]$

$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = [2,8]$

$2\vec{a} - \vec{b} = 2[2,1] - [2,8] = [4-2, 2-8] = \underline{\underline{[2,-6]}}$

b) Regn ut vinkelen mellom vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{[2,1] \cdot [2,8]}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{68}}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{12}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{68}}$$

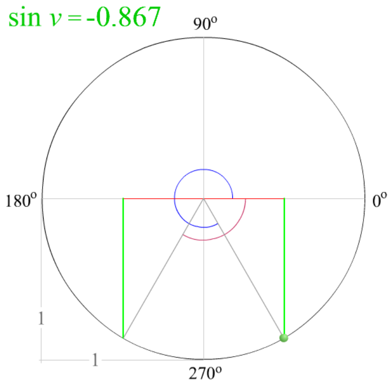
$$\underline{\underline{\angle(\vec{a},\vec{b}) = 49,4^\circ}}$$

c) Regn ut arealet til trekanten som er utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 8\end{vmatrix}=\frac{16-2}{2}=\frac{14}{2}=\underline{\underline{7}}$$

Oppgave 10 Løs likningene:

a) $2\sin x+\sqrt{3}=0 \qquad , \; x\in[-90°, 360°]$



$$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx -0{,}866$$

$$x_1=-60°$$

$$x_2=-60°+3+360°=300°$$

$$x_3=180°+60°=240° \qquad \underline{\underline{L=\{-60°, 240°, 300°\}}}$$

b) $2\tan x-2=0\;,\quad x\in\ [0, 2\pi>$

$$2\tan x-2=0$$

$$\tan x=1$$

$$x_1=\frac{\pi}{4}\quad , \quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

$$\underline{\underline{L=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}}}$$