Time Out: Polynom 7.3

Funksjonen *f* er gitt ved $f\left(x\right)=ax^3-x^2+bx+5, \qquad D_f=\mathbb{R}$

a) Bestem *a* og *b* slik at $f\left(x\right)$ er delelig med $\left(x+3\right)$ og med $\left(x-1\right)$.

For at $\left(x+3\right)$ skal være en faktor må -3 være et nullpunkt og tilsvarende må også 1 være et nullpunkt.

$x=1$ gir $\qquad a-1+b+5=0$

$x=-3$ gir $\qquad -27a-9-3b+5=0$

Som vi kan forenkle til likningssettet:

$a+b=-4$

$-27a-3b=4$

Løsningen på likningssettet er: $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{13}{3}$

Som gir at $\underline{\underline{f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{13}{3}x+5,}} \qquad D_f=\mathbb{R}$

b) Faktoriser $f\left(x\right)$, og vis at vi kan skrive $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-5\right)$.

Jeg ganger sammen de to faktorene og får at $\left(x+3\right)\left(x-1\right)=x^2+2x-3$ og utfører en polynomdivisjon.

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{13}{3}x+5:\left(x^2+2x-3\right)=\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x\right)}$$

$$-\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{3}x+5$$

$$\underline{-\left(-\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{3}x+5\right)}$$

$$0$$

$$f(x)=\left(x^2+2x-3\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{3}\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-5\right)}}$$

c) Finn topp og bunnpunktene til grafen til *f* (ved regning).

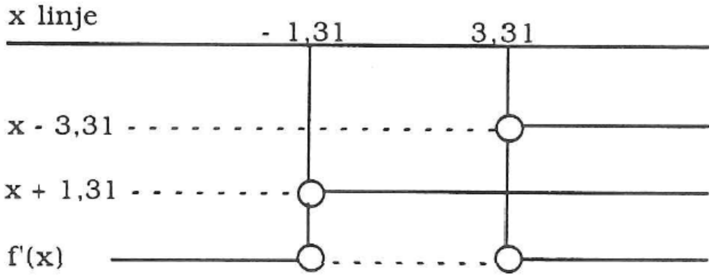
$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{13}{3}x+5$

$f'\left(x\right)=x^2-2x-\dfrac{13}{3}$

$f'\left(x\right)=0 \qquad$ for

$x_1=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3}\approx 3{,}31 \qquad , \qquad x_2=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{3}\approx -1{,}31$

Tegner fortegnsskjema for å bestemme TP og BP.

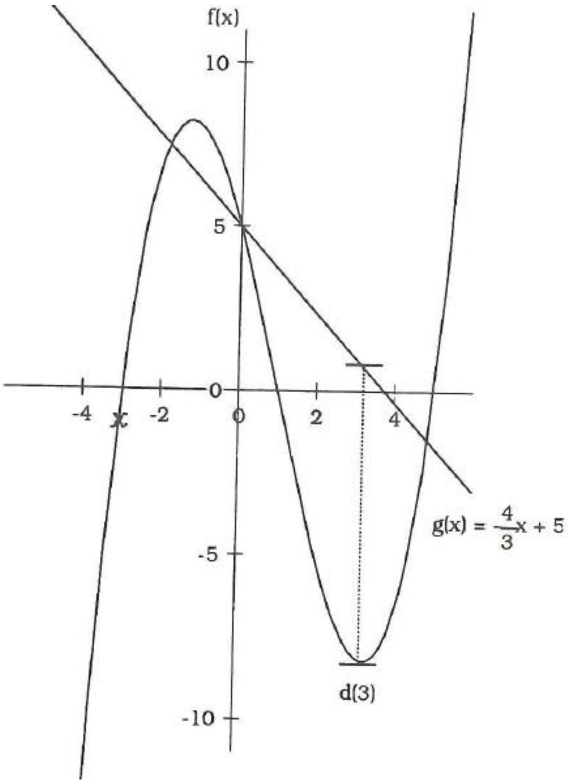


$f(-1{,}31) = 8{,}21$ Toppunkt $(-1{,}31\ ,\ 8{,}21)$

$f\left(3{,}31\right) = -8{,}21$ Bunnpunkt $\left(3{,}31\ ,\ -8{,}21\right)$

Eventuelt kan du bruke 2. derivert test til å vise det samme.

d) Tegn grafen til $f\left(x\right)$ med 1 cm som enhet på begge aksene.



$g(x) = -\frac{4}{3}x + 5$, $D_g = \mathbb{R}$

Vi setter $d\left(x\right) = g\left(x\right) - f\left(x\right)$ når $x \in \langle 0, 5 \rangle$

e) Løs likningen $d'(x) = 0$

Finner først $d(x)$:

$$d(x) = g(x) - f(x) \quad \text{når } x \in \langle 0,5 \rangle$$

$$d(x) = -\frac{4}{3}x + 5 - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{13}{3}x + 5\right)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{9}{3}x = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

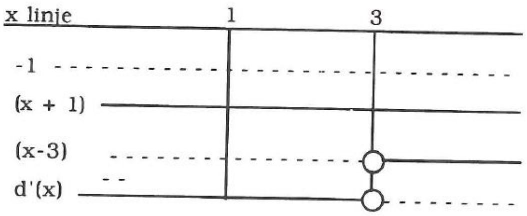
$$d'(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$\cancel{x_1 = -1}$ utenfor def.

$x_2 = 3$

Forklar at denne løsningen kan brukes til å bestemme den største vertikale avstanden mellom grafene til *f* og *g* når $x \in \langle 0,5 \rangle$. Regn ut denne avstanden og marker på figuren.

I intervallet er grafen til *g* over *f* i hele intervallet. *d* gir avstanden (vertikalt) mellom grafene. Størst avstand, når d oppnår sin største verdi for $x = 3$, slik fortegnsskjemaet viser. Merk at det vi ser på x-verdier mellom 0 og 5.



$$d(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 3 \cdot 3$$

$$= -9 + 9 + 9 = \underline{\underline{9}}$$