Løsningsforslag ordinær eksamen Vår 2020.

Oppgave 1

a) Først skriver vi alle røtter om til potenser og løser opp parentesene

$$\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^2 a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}\left(\sqrt{5}a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{5^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^2 a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}\left(5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}\right)^3}$$
$$= \frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{5}\cdot 2}a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}5^{\frac{1}{2}\cdot 3}a^{\frac{1}{3}\cdot 3}},$$

deretter bruker vi regnereglene for å gange sammen

$$\frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{5}\cdot 2}a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}5^{\frac{1}{2}\cdot 3}a^{\frac{1}{3}\cdot 3}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}}{5^{\frac{3}{2}}a^{-1+1}}$$
$$= 5^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}a^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}-0}$$
$$= \frac{a}{5}.$$

b) Husk at $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Dermed

$$\frac{5t^2 - 45}{t-3} : \frac{t+2}{3t^2+6t} = \frac{5t^2-45}{t-3} \cdot \frac{3t^2+6t}{t+2}.$$

Vi faktoriserer ved å ta felles faktorer ut, og bruke konjugatsetninga

$$\frac{5t^2-45}{t-3} \cdot \frac{3t^2+6t}{t+2} = \frac{5(t^2-9)}{t-3} \cdot \frac{3t(t+2)}{t+2}$$
$$= \frac{5(t-3)(t+3)}{t-3} \cdot \frac{3t(t+2)}{t+2},$$

og forkorter

$$\frac{5(t-3)(t+3)}{t-3} \cdot \frac{3t(t+2)}{t+2} = 5(t+3)3t$$
$$= 15t(t+3)$$
$$= 15t^2 + 45t.$$

c)

$$\ln x - \ln(x^2 - x) = 1 \qquad x \epsilon \langle 1, \rightarrow \rangle$$

$$\ln \frac{x}{x^2 - x} = 1$$

$$\frac{x}{x^2 - x} = e$$

$$x = e(x^2 - x)$$

$$ex^2 - ex - x = 0$$

$$x(ex - e - 1) = 0$$

$$ex - e - 1 = 0 \qquad x = 0$$

$$ex = e + 1 \qquad \emptyset$$

$$x = \frac{e+1}{e}$$

$$\underline{\underline{L = \frac{e+1}{e}}}$$

Oppgave 2

a) $(3x^3 - 4x^2 - 14x + 11):(x^2 - 3x + 2) = 3x + 5 + \frac{-5x+1}{x^2-3x+2}$

b) Vi bruker setninga som sier at resten ved $P(x):(x - x_0)$ kan regnes direkte som $r = P(x_0)$. Her er $x_0 = -3$, og dermed

$$r = (-3)^3 - 13(-3) - 12 = -27 + 39 - 12 = 0.$$

Siden resten ved polynomdivisjonen er 0 er $x + 3$ en faktor i polynomet.

c) Først trekker vi fra 12 på hver side og får $x^3 - 13x - 12 > 0$. Vi må faktorisere tredjegradsuttrykket, og bruker fra b) at $x + 3$ er en faktor. Polynomdivisjon gir

$$(x^3 - 13x - 12):(x + 3) = x^2 - 3x - 4.$$

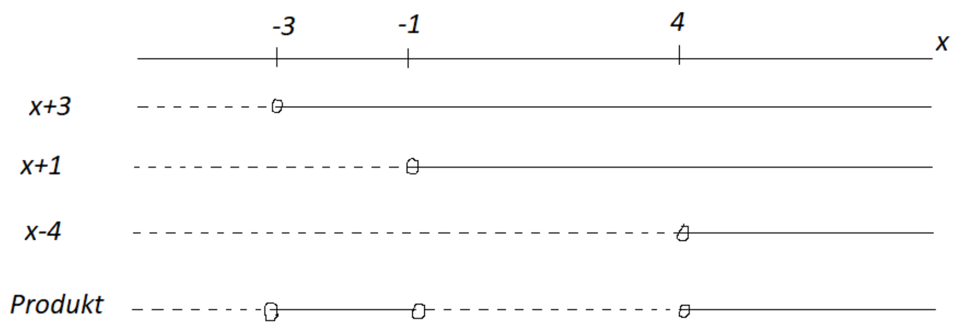
Vi bruker andregradsformelen til å finne nullpunkt til $x^2 - 3x - 4$,

$$x_{\pm} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases},$$

og vi får $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$. Dermed

$$x^3 - 13x - 12 = (x + 3)(x + 1)(x - 4),$$

med fortegnslinje



Vi leser av fortegnslinja $-3 < x < -1$ eller $4 < x$.

Oppgave 3

a)

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v = x^2 \qquad v' = 2x$

$$g'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2xlnx}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{1 - 2\ln x}{x^3}}}$$

b)

$f(x) = x(x+3)^3$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = (x+3)^3 \qquad v' = 3(x+3)^2$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot (x+3)^3 + x \cdot 3(x+3)^2 = (x+3)^2(x+3+3x) =$$

$$\underline{\underline{= (x+3)^2(4x+3)}}$$

c)

$$\frac{1}{2x} \cdot y' = e^{-y}$$

$$\frac{1}{2x} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 2xdx$$

$$e^{y} \cdot dy = 2x \cdot dx$$

$$\int e^{y} \cdot dy = \int 2x \cdot dx$$

$$e^{y} = x^2 + C$$

$$\ln e^{y} = \ln(x^2 + C)$$

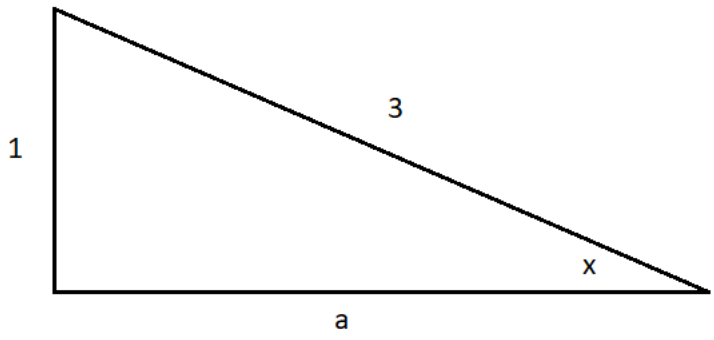
$$y = \ln(x^2 + C)$$

$$y = 1 \quad når \quad x = 0$$

$$1 = \ln(0 + C) \quad \rightarrow \quad \ln C = 1 \quad \rightarrow \quad C = e$$

$$\underline{\underline{y = \ln(x^2 + e)}}$$

Oppgave 4



$1^2 + a^2 = 3^2$

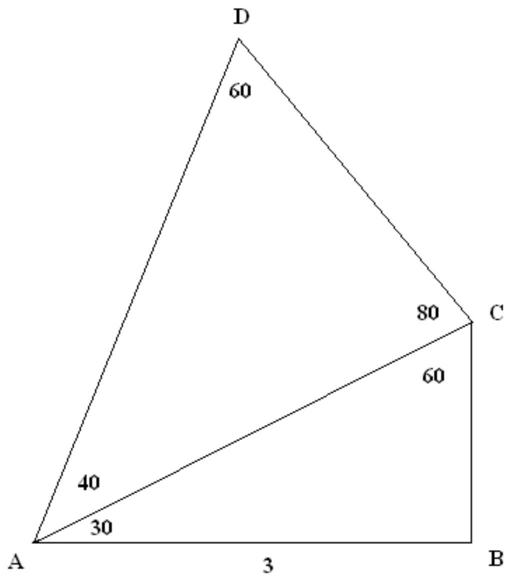
$a = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\underline{\underline{\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot -\frac{2\sqrt{2}}{3} \underline{\underline{= -\frac{4\sqrt{2}}{9}}}$$

$$\tan x = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \underline{\underline{= -\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

Oppgave 5



$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \underline{\underline{= 2\sqrt{3}}}$$

b)

$$\angle D = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin 80^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$AD = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \underline{\underline{= 3.94}}$$

c)

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3.94 \cdot \sin 40^\circ \underline{\underline{= 6.98}}$$

Oppgave 6

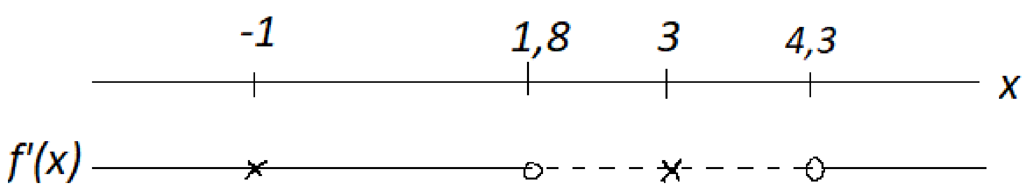
a) Vi ser av de vertikale hjelpelinjene at funksjonen har vertikale asymptoter $x = -1$ og $x = 3$. Den skrå hjelpelinjen angir en skrå asymptote. Vi ser at linja går gjennom blant annet punktene $(0{,}3)$ og $(4{,}5)$. Det gir stigningstall $a = \frac{5-3}{4-0} = \frac{1}{2}$, og fra ettpunktsformelen får vi

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0),$$

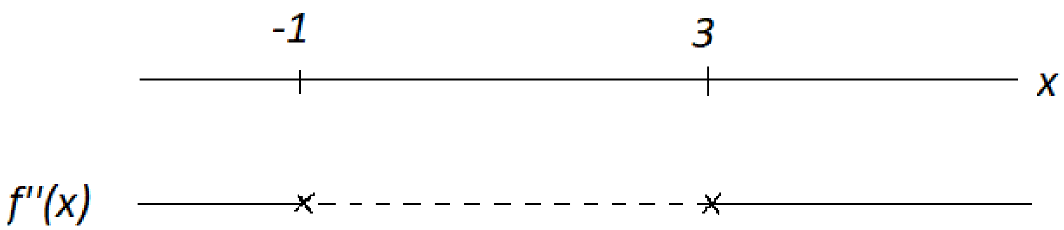
som kan skrives

$$y = \frac{1}{2}x + 3.$$

b) Fortegnslinja til den deriverte er



Grafen stiger fram til $x \approx 1{,}8$, og synker til $x \approx 4{,}3$, for så stige deretter. Legg merke til at den deriverte ikke er definert for $x = -1$ eller $x = 3$. Den andrederiverte har fortegnslinje



Vi ser at grafen krummer oppover (er konveks) for $x < -1$ og $x > 3$, og nedover (er konkav) for $-1 < x < 3$.

c) Vi ser at det er ett toppunkt i cirka $(1{,}8\ ,\ 2{,}9)$ og ett bunnpunkt i cirka $(4{,}3\ ,\ 5{,}8)$. Det er ingen vendepunkt.

Oppgave 7

a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = [4,1,-1] + [(-2) - 2, 2 - 3, 1 - 0] =$
$[4 + (-4), 1 + (-1), (-1) + 1] = [0,0,0] = \vec{0}$

$\Rightarrow D(0,0,0)$. D ligger i origo.

b) $A_p = |\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}|$
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} = [4,1,-1]$
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} = [-2,2,1]$
$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC} = [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 1, 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)] = [3,-2,10]$

$A_p = |[3,-2,10]| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{113} \approx 10{,}63$

c) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Leftrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{Pyramide}}{G}$

$G = A_p = \sqrt{113}$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{DT} = \frac{1}{3} \cdot [3,-2,10] \cdot [1,1,4]$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 10 \cdot 4) = \frac{41}{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3 \cdot \frac{41}{3}}{\sqrt{113}} = \frac{41}{\sqrt{113}} \approx 3{,}86$$

d) Vi trenger et punkt, P_0, i og en normalvektor, $\vec{n}$, til planet. Siden $ABCD$ er et parallellogram må også D ligge i planet. Da er det lettest å velge D, som er origo, som P_0. Kryssproduktet, $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}$, er et naturlig valg for normalvektoren.

$\Rightarrow$ Planet gjennom A, B og C kan uttrykkes

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$3(x - 0) + (-2)(y - 0) + 10(z - 0) = 0$$
$$3x - 2y + 10z = 0$$

e) $\angle BDT = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DT}}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DT}|}\right)$
$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} = [2,3,0]$
$\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{OT} = [1,1,4]$
$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DT} = [2,3,0] \cdot [1,1,4] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5$
$\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$
$\left|\overrightarrow{DT}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$

$$\Rightarrow \angle BDT = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{18}}\right) \approx 70{,}92^\circ$$

Oppgave 8

a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$
$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

q.e.d.

b) Benytt formelen i a) til å bestemme Amplituden, likevektslinjen og perioden til

$f(x) = \sin^2 x.$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

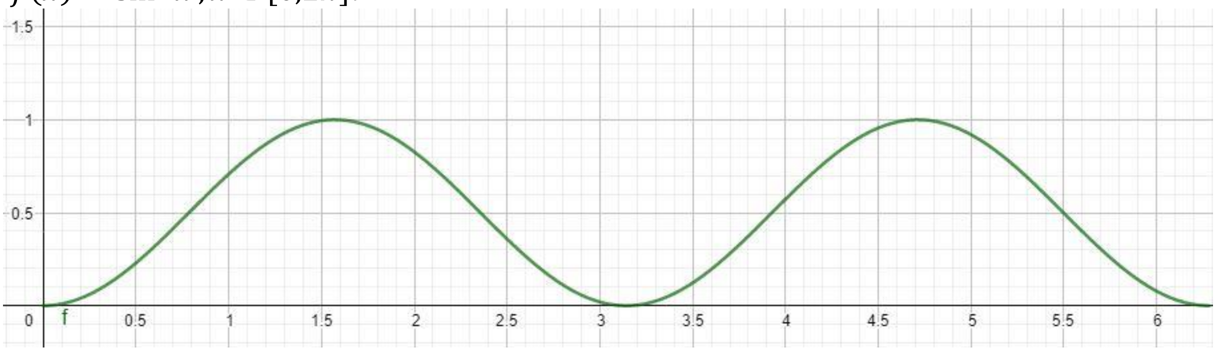
Gir

Amplitude, A = $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Likevektslinje, d = $\frac{1}{2}$

Svingetall, $k = 2 \Rightarrow$ Perioden $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

c) $f(x) = \sin^2 x, x \in [0, 2\pi]$:



d) Avlest fra grafen til $f(x) = \sin^2 x$: $V_f = [0,1]$

e) $\int \sin^2 x \;\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x +$
$C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

f) $\int \sin^2 x \;\, dx = \sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x)dx =$
$-\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)dx = -\sin x \cos x + x -$
$\int \sin^2 x \;\, dx$
$\Rightarrow$
$2\int \sin^2 x \;\, dx = x - \sin x \cos x + C'$
$\int \sin^2 x \;\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$

e) og f) blir det samme da $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$