Forelesning - 27.01.22

FYS009-G 21H - Fysikk realfagskurs

Kapittel 14 - Bevegelse II

Forelesningene dekker i hovedsak boken *Rom-Stoff-Tid - Fysikk forkurs* fra Cappelen Damm. I tillegg til teorien gjennomgåes det endel simuleringer og regnede eksempler. De fleste eksemplene er orientert etter oppgaver fra boka, men også andre oppgaver og problemstillinger kan taes opp.

Kastbevegelse - Repetisjon

Regnet: Ball i trapp

Regnet: Luftrenser

Sentripetalakselerasjon

Sentripetakselerasjon

Boka: side 391-393.

Regnet: Eksempel 14.8

Regnet: Skøyteløper i indre bane (500 m)

Regnet: Oppgave 14.16

Regnet: Oppgave 14.19

Oppgave - Ball i trapp

En liten ball ruller utfor en trapp og har da en vannrett fart på 1.4 m/s. Trappetrinnene er 16 cm høye og 16 cm brede.

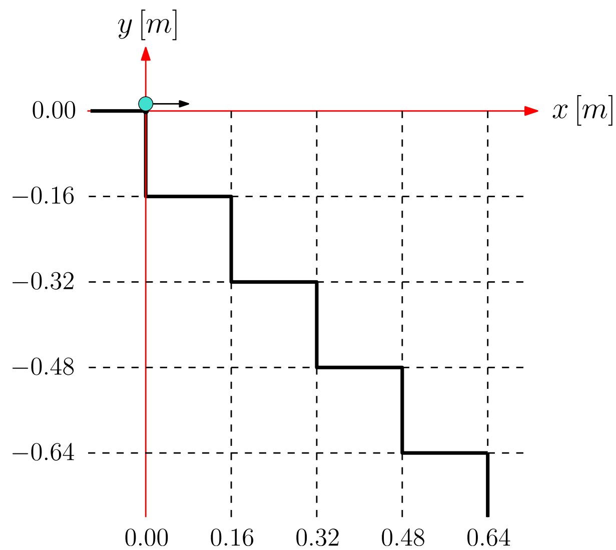
(a) Hvilket trinn er det første ballen treffer? Vi regner toppen av trappen som trinn nummer null.

(b) Hva er farten til ballen i det den treffer dette trinnet? Med hvilken vinkel treffer ballen dette trappetrinnet?

(c) Hvordan kunne du funnet farten i punkt (b) uten å bruke ligningene for kastbevegelse? Gjennomfør denne beregningen.

Løsning - Ball i trapp

Figuren under beskriver situasjonen.



(a) Hvis startposisjonen settes lik $(0, 0)$ har vi har generellt følgende bevegelsesformler for kastbevegelse uten luftmotstand:

$$x = v_{0x}t$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Her er $a = -g$ slik at y-retningen er definert som negativ nedover.

Vi har at $v_0 = 1.4$ m/s og siden utgangsvinkelen α i forhold til det horisontale er null grader vil dette være et såkalt *vannrett kast*. Dette betyr at $v_{0x} = v_0$ og $v_{0y} = 0$. Dette gir

$$x = v_0t$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

For å avgjøre hvilket trappetrinn ballen lander på, må vi regne ut x-posisjonen når ballen passerer trappetrinnverdiene $y = -0.16\,\mathrm{m}, -0.32\,\mathrm{m}, -0.48\,\mathrm{m}, \ldots$. Hvis x-posisjonen er større enn tilhørende y-verdi så betyr det at ballen farer forbi trappetrinnet uten å lande.

Vi bruker SI-enheter på alle størrelser, og setter $g = 9.81$ m/s.

Vi prøver først $\underline{y = -0.16\,\text{m}}$.
Vi får

$$y = -4.905t^2 = \underline{-0.16\,\text{m}} \quad \Rightarrow \quad t = 0.181\,\text{s}$$

$$\Rightarrow \quad x = v_0 t = (1.4\,\text{m/s})(0.181\,\text{s}) = \underline{0.253\,\text{m}}$$

Siden x-posisjonen er lik $0.253\,\text{m}$ når $y = -0.16\,\text{m}$ så betyr dette at ballen *ikke* treffer trappetrinn 1.

Vi prøver da $\underline{y = -0.32\,\text{m}}$.
Vi får

$$y = -4.905t^2 = \underline{-0.32\,\text{m}} \quad \Rightarrow \quad t = 0.255\,\text{s}$$

$$\Rightarrow \quad x = v_0 t = (1.4\,\text{m/s})(0.255\,\text{s}) = \underline{0.357\,\text{m}}$$

Siden x-posisjonen er lik $0.357\,\text{m}$ når $y = -0.32\,\text{s}$ så betyr dette at ballen *ikke* treffer trappetrinn 2.

Vi prøver deretter $\underline{y = -0.48\,\text{m}}$.
Da får vi

$$y = -4.905t^2 = \underline{-0.48\,\text{m}} \quad \Rightarrow \quad t = 0.313\,\text{s}$$

$$\Rightarrow \quad x = v_0 t = (1.4\,\text{m/s})(0.313\,\text{s}) = \underline{0.438\,\text{m}}$$

Siden x-posisjonen er lik $0.438\,\text{m}$ når $y = -0.48\,\text{m}$ så betyr dette at ballen faktisk treffer trappetrinn 3.

(b) Vi har altså funnet at ballen treffer trappetrinn 3, og det skjer ved tiden $t = 0.313\,\text{s}$. Vi finner komponentene til farten ved å derivere posisjonene

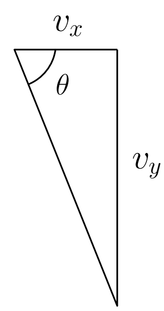
$$v_x = v_0$$
$$v_y = -gt = -9.81t$$

Setter vi inn $t = 0.313\,\text{s}$ får vi at $v_x = 1.4\,\text{m/s}$ og $v_y = --3.071\,\text{m/s}$. Da blir absoluttverdien av farten lik

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \simeq 3.375\,\text{m/s}$$

Farten til ballen når den treffer trappetrinnet er altså $\underline{v = 3.375\text{ m/s}}$.

For å finne vinkelen mellom hastighetsvektoren $\vec{v}$ og trappetrinnet bruker vi figuren under



Vi ser at

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{3.071}{1.4} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq \underline{65.49^\circ}$$

(c) Vi kan også finne sluttfarten ved hjelp av energibevarelse. Vi setter starthøyden $h_0 = 0$ og startfarten lik $v_0 = 1.4\,\mathrm{m/s}$. Den mekaniske energien ved $t = 0$ er da lik

$$\tfrac{1}{2}\,mv_0^2 + mg(0) = \tfrac{1}{2}\,mv_0^2$$

Den mekaniske energien når ballen treffer trappetrinnet er

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 + mgh$$

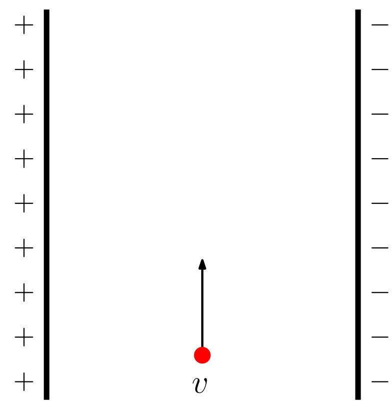
der v er farten og $h = -0.48\,\mathrm{m}$. Vi setter disse lik

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 + mgh = \tfrac{1}{2}\,mv_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \simeq \underline{3.375\ \mathrm{m/s}}$$

Oppgave - Luftrenser

Noen luftrenseanlegg fungerer ved at støvpartiklene først blir ladet, og at lufta med partiklene deretter strømmer inn mellom to ladde metallplater. På grunn av at partiklene er ladet blir de trukket mot sidekanten, og setter seg fast der.

Vi ser på en slik luftrenser hvor avstanden mellom de to metallplatene er $d = 130$ mm.



Metallplatene står loddrett på tyngdefeltet. En vifte sørger for at alle støvpartiklene beveger seg oppover på en slik måte at fartskomponenten *parallelt* med platene hele tiden er konstant lik $v = 10$ m/s.

Anta at en støvpartikkel har en masse $m = 3.0 \cdot 10^{-9}$ kg og er positivt ladet. Partikkelen kommer inn midt mellom platene, slik som på figuren. Den elektriske kraften som virker på partikkelen settes lik $F = 1.4 \cdot 10^{-6}$ N.

(a) Tegn kreftene som virker på partikkelen når den beveger seg mellom platene. Hvilken plate vil den bevege seg mot?

(b) Finn farten til partikkelen når den treffer metallplaten.

(c) Beregn vinkelen som partikkelen treffer metallplaten med.

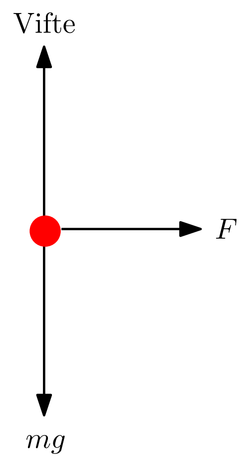
(d) Hvor lang tid bruker partikkelen på å treffe platen?

Støvpartiklene har i praksis masser som varierer mellom $1.0 \cdot 10^{-9}$ kg og $7.0 \cdot 10^{-9}$ kg. Partiklene kommer inn jevnt fordelt over hele åpningen mellom platene, og utsettes for den samme kraften.

(e) Regn ut hvor lange platene må være for at *alle* partiklene som er beskrevet ovenfor, skal bli fanget i luftrenseren.

Løsningsforslag - Luftrenser

(a) På partikkelen virker tre krefter: kraften fra viften som egentlig er en kraft fra luften rundt partikkelen, tyngekraften mg og den elektriske kraften F.



Siden partikkelen er positivt ladd vil den bevege seg mot den negativt ladede platen, altså mot høyre på figuren. Siden støvpartikkelen har konstant vertikal hastighet vil det ikke virke noen totalkraft i vertikal (loddrett) retning.

Kraften fra det elektriske feltet gir en akselerasjon i horisontal retning (mot den høyre platen)

(b) Vi velger x i horisontal retning, og y i vertikal retning, positiv mot høyre og oppover. Partikkelen starter i origo $(0, 0)$. Akselerasjonen i horisontal retning er da

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{1.4 \cdot 10^{-6}\ \text{N}}{1.0 \cdot 10^{-9}\ \text{kg}} = \underline{467\ \text{m/s}^2}$$

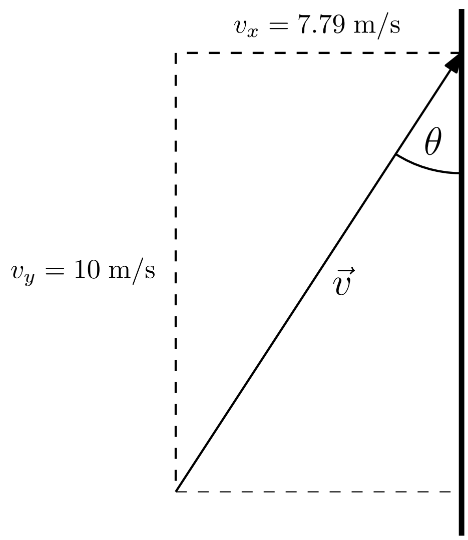
For farten i horisontal retning setter vi

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x x$$

Siden startfarten er null setter vi $v_{0x} = 0\,\text{m/s}$ og får $v_x^2 = \sqrt{2ax}$. Da er farten i horisontal retning når støvpartikkelen treffer platen

$$v_x^2 = 2 \cdot 467\ \text{m/s}^2 \cdot 0.065\ \text{m} \qquad \Rightarrow \qquad v_x \simeq 7.79\ \text{m/s}$$

(c) Hastighetsvektoren vil da se ut som på figuren i det partikkelen treffer platen



Vi ser at hastigheten er $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(7.79 \text{ m/s})^2 + (10 \text{ m/s})^2} \simeq \underline{12.68 \text{ m/s}}$. Retningen finner vi ved å beregne vinkelen

$$\tan\theta = \frac{7.79}{10} \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq 37.92^\circ$$

Partikkelen treffer altså platen slik at det er en vinkel på omlag 37.92° mellom hastighetsvektoren og platen.

(d) Vi setter

$$s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t \qquad \Rightarrow \qquad t = \left(\frac{2}{v_x + v_{0x}}\right)x$$

Her er $v_{0x} = 0$ m/s, og når støvpartikkelen treffer veggen er altså $x = 0.065$ m og $v_x = 7.79$ m/s. Da blir

$$t = \left(\frac{2}{7.79 \text{ m/s}}\right) 0.065 \text{ m} \simeq \underline{1.67 \cdot 10^{-2} \text{ s}}$$

Støvpartikkelen bruker altså bare litt under 2/100 sekunder på å treffe metallplaten.

(e) Hvis vi har to støvpartikler med masser henholdsvis m_1 og m_2 hvor $m_1 > m_2$, så vil den partikkelen med *høyest* masse avbøyes minst.

Det er også slik at hvis en støvpartikkel kommer inn i luftrenseren langt til høyre (nære den høyre platen), så vil den bruke mindre tid på å treffe platen enn hvis den startet langt til venstre.

Konklusjonen blir altså at den støvpartikkelen som bruker lengst tid (og strekning) på å treffe den høyre platen er en støvpartikkel med masse $m = 7.0 \cdot 10^{-9}$ kg og som i tillegg starter helt til venstre i åpningen på luftrenseren.

For en støvpartikkel med masse $m = 7.0 \cdot 10^{-9}$ kg, får vi akselerasjonen fra

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{1.4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}}{7.0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{kg}} = 200\ \mathrm{m/s^2}$$

Denne støvpartikkelen starter helt nederst til venstre i luftrenseren og må bevege seg en strekning $d = 130$ mm $= 0.13$ m i horisontal retning før den treffer platen. Vi vet at $a_x = 200\ \mathrm{m/s^2}$ og at $v_{0x} = 0$ og får da

$$x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{a_x}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.13\ \mathrm{m}}{200\ \mathrm{m/s^2}}} = 3.6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

I løpet av denne tiden beveger denne støvpartikkelen seg en strekning $s = (10\ \mathrm{m/s})(3.6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s} = \underline{0.36\ \mathrm{m}}$ i vertikal retning.

Den minste lengden platene i denne luftrenseren kan ha hvis den skal stoppe alle støvpartiklene er altså 36 cm.

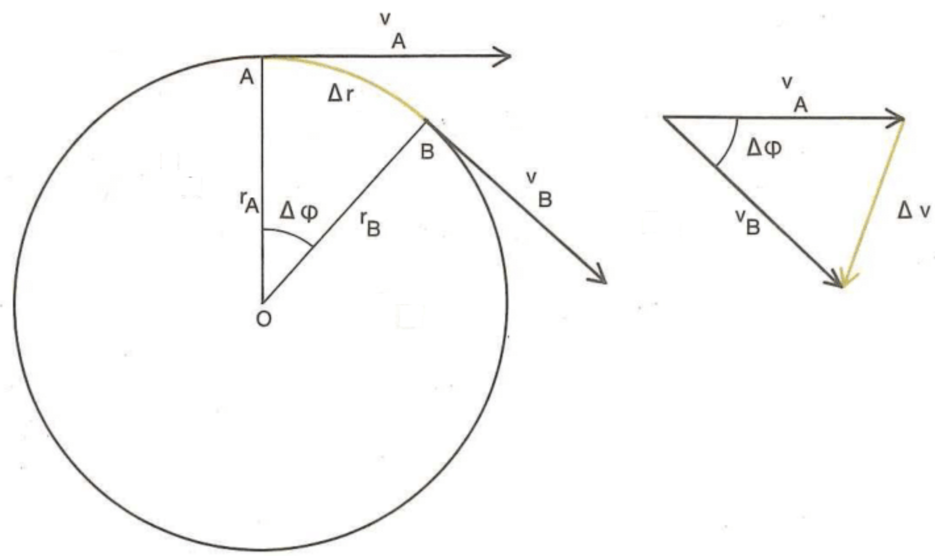
Sentripetalakselerasjon

Vi antar at et legeme med masse m går i en sirkelbane med konstant radius r, med konstant banefart v.

Vi husker at

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{og} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vi betrakter følgende figur:



Vi ser at retningen $d\vec{v}$ står normalt på fartsvektoren $\vec{v}$. Vi får derfor for sirkelbevegelse at

$$\vec{a} \perp \vec{v}$$

og denne akselerasjonen endrer *retningen* på hastighetsvektoren $\vec{v}$, men ikke verdien på $v = |\vec{v}|$.

Utledning av sentripetalakselerasjonen

Vi observerer at vinkelen $\Delta\phi$ mellom de to r-vektorene og de to v-vektorene, er den samme vinkelen. Forflytningsvektoren $\Delta\vec{r}$ danner en trekant sammen med $\vec{r}_A$ og $\vec{r}_B$. Denne trekanten er formlik med trekanten som dannes av $\Delta\vec{v}$ og $\vec{v}_A$ og $\vec{v}_B$.

Da har vi

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Når $\Delta t \to dt$ får vi

$$\boxed{a = \left(\frac{v}{r}\right) v = \frac{v^2}{r}}$$

Sentripetalakselerasjon og arbeid

Vi kan også observere at siden $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, så vil

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

siden $\vec{F} = m\vec{a}$ står normalt på $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Sentripetalkraften utfører altså ikke noe arbeid på legemet.

Analyse av uttrykket for sentripetalkraft

Vi har at

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Da blir uttrykket for sentripetalkraften

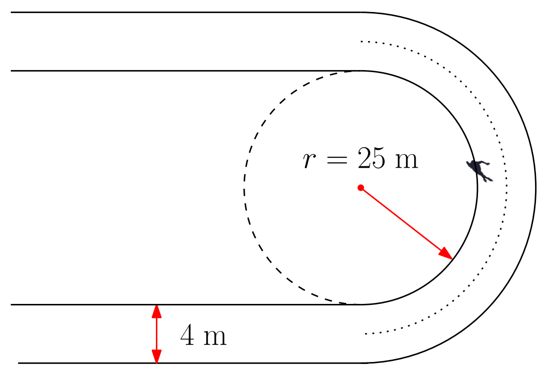
$$F = ma = \frac{mv^2}{r}$$

Vi kan observere følgende:

- Jo større massen m er desto større blir sentripetalkraften F. Det krever en større kraft å holde et tungt legeme på plass i sirkelbane, enn et lett legeme.
- Sentripetalkraften vokser *kvadratisk* med hastigheten v. En dobling av farten vil altså gi en firedobling av sentripetalkraften. Det krever en større kraft å holde et legeme med stor fart på plass i sirkelbane, enn et legeme med lav fart.
- Desto mindre radien r i sirkelbanen er, desto større blir sentripetalkraften. F er altså omvendt proporsjonal med radien r.

Skøyteløper i indre bane (500 m)

En standard internasjonal skøytebane for lengdeløp, har vanligvis en svingradius på $r = 25\ \mathrm{m}$, og bredden på banen (det indre oppvarmingsfeltet ekskludert) er $4\ \mathrm{m}$.



For skøyteløpere som går 500 m er farten blitt så stor at man går distansen to ganger, en gang med siste indre, og en gang med siste ytre. Grunnen til dette er at løperne ikke klarer å holde seg innenfor sin tildelte bane når de har siste indre.

Hva er sentripetalkraften som kreves for at en eliteløper på $80\ \mathrm{kg}$ skal klare å holde «lista», det vil si holde seg helt innerst i indre bane?

Løsning:

Da Pavel Kulizhnikov satte verdensrekord på 500 m i Salt Lake City i 9. mars 2019 på 33.62, brukte han omlag 5 sekunder på den siste svingen (indre).

Vi setter $r = 25\ \mathrm{m}$ og finner da at lengden på svingen er $s = 2\pi r/2$, siden det er en halvsirkel. Dette gir $s = 78.5\ \mathrm{m}$. Han brukte tiden $t = 5\ \mathrm{s}$, og dette gir

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{78.5\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{s}} = 15.7\ \mathrm{m/s}$$

Dette gir sentripetalakselerasjonen

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(15.7\ \mathrm{m/s})^2}{25\ \mathrm{m}} = 9.86\ \mathrm{m/s^2}$$

Altså svært nære 1 g. Dette gir en sentripetalkraft på

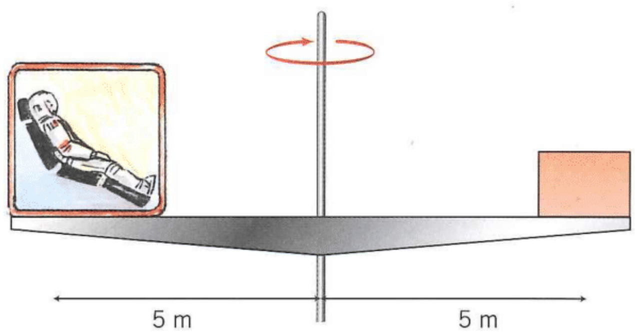
$$F = ma = (80\ \mathrm{kg})(9.86\ \mathrm{m/s^2}) \simeq \underline{789\ \mathrm{N}}$$

I praksis vil ikke skøyteløperen skyve skøyten i horisontal retning, men med en vinkel mot isflaten. Den virkelige kraften som kreves blir derfor større.

Hvis vinkelen mellom skøytebladet og isen er $60°$, vil den nødvendige kraften bli det dobbelte, altså 2 g eller $\simeq \underline{1578\ \mathrm{N}}$.

Oppgave 9.16

Figuren viser en sentrifuge som blir brukt av astronauter. Avstanden fra astonauten til omdreiningsaksen er $5\ \mathrm{m}$. Sentrifugen roterer med konstant omløpstid på en slik måte at astronauten har akselerasjonen $a = 90\ \mathrm{m/s^2}$.



Finn banefarten og omløpstida.

Løsning:

Vi har at

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{ar} = \sqrt{90\ \mathrm{m/s^2} \cdot 5\ \mathrm{m}} = \underline{21.21\ \mathrm{m/s}}$$

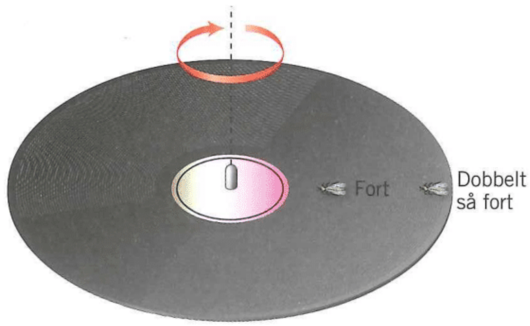
eller omlag $76.36\ \mathrm{km/h}$. For å finne omløpstiden setter vi

$$2\pi r = vT \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 5\ \mathrm{m}}{21.21\ \mathrm{m/s}} \simeq \underline{1.48\ \mathrm{s}}$$

Oppgave 9.19

To fluer sitter på en grammofonplate som snurrer rundt på en tallerken.

Den ene flua sitter ytterst på plata, mens den andre sitter halvveis mellom aksen og kanten.



(a) Er banefarten til den ytterste flua dobbelt så stor som banefarten til den innerste?

(b) Hva er forholdet mellom akselerasjonene til de to fluene?

(c) Tror du at fluene må klore seg like hardt fast?

Plata roterer 33 ganger per minutt.

(d) Beregn farten og akselerasjonen til de to fluene hvis den ene sitter i en avstand på $7\ \mathrm{cm}$ fra rotasjonsaksen, mens den andre sitter $14\ \mathrm{cm}$ fra aksen.

(e) Hva er forholdet mellom fartene og mellom akselerasjonene?

Løsning:

(a) Begge fluene har samme periode T. Vi setter $r_2 = 2r_1$. Da er strekningene de beveger seg i en omdreining henholdsvis $s_1 = 2\pi r_1$ og $s_2 = 2\pi r_2 = 4\pi r_1$.

Strekningen som flue 2 beveger seg er altså dobbelt så lang som flue 1. Siden $v = s/t$ vil da banefarten til flue 2 være dobbelt så stor, altså $\underline{v_2 = 2v_1}$

(b) Vi bruker

$$a = \frac{v^2}{r}$$

og finner da at

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} \qquad \text{og} \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{(2v_1)^2}{2r_1} = \frac{4v_1^2}{2r_1} = 2\frac{v_1^2}{r_1} = \underline{2a_1}$$

(c) Flue 2 vil da måtte «klore seg fast» litt hardere enn flue 1.

(d) Vi finner at perioden T er gitt ved

$$T = \frac{60}{33}\ \mathrm{s} \simeq 1.82\ \mathrm{s}$$

Vi setter $r_1 = 0.07\ \mathrm{m}$ og $r_1 = 0.14\ \mathrm{m}$. Vi finner

$$v_1 = \frac{s_1}{T} = \frac{2\pi \cdot 0.07\ \mathrm{m}}{1.82\ \mathrm{s}} \simeq \underline{0.24\ \mathrm{m/s}}$$

Da er $v_2 = 2v_1 = \underline{0.48\ \mathrm{m/s}}$. Vi finner for sentripetalakselerasjonen at

$$a_1 = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(0.24\ \mathrm{m/s})^2}{0.07\ \mathrm{m}} \simeq \underline{0.82\ \mathrm{m/s^2}}$$

Da er $a_2 = 2a_1 = \underline{1.64\ \mathrm{m/s^2}}$.

(e) Begge forholdene er $2 : 1$ i favør av flue 2.