Vektorer

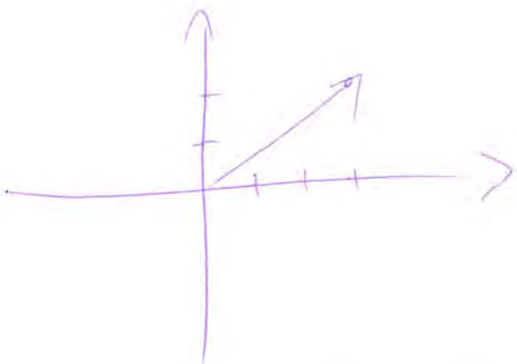
En vektor er en pil. Består av en retning og en lengde.

Kan skrive en vektor på koordinatform: $[x_1, y_1]$

- Vektoren som går x_1 steg mot høyre, så y_1 steg opp

$= [3,2]$

- Vektoren som kan tegnes mellom origo og punktet ~~(x,y)~~ (x_1, y_1).



Vi kan plusse vektorer:

På koordinatform.

$$[3, 2] + [-1, -2] = [3+(-1), 2+(-2)]$$

$$= \underline{[2, 0]}$$

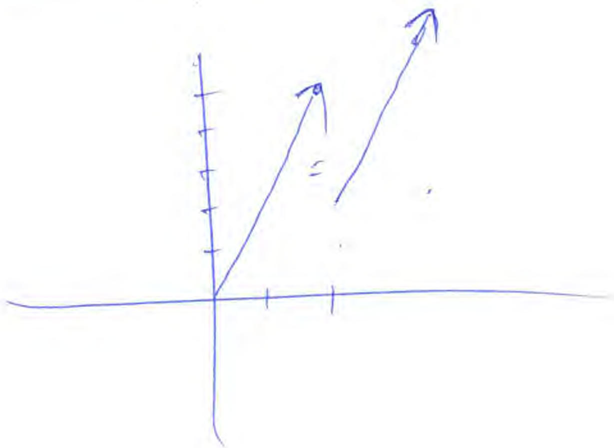
Vi kan skalere vektorer.

Tallet vi ganger med kalles en skalar.

På koordinatform:

$$3 \cdot [1,1] = [3\cdot 1, 3\cdot 1] = [3,3] \qquad -2\cdot[1,1] = [-2,-2]$$

$$\frac{1}{2}\cdot[1,1] = \left[\frac{1}{2}\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 1\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

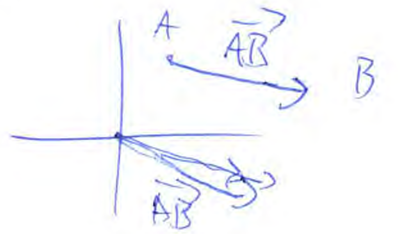


Gitt en vektor, $[2,5]$, kan tegnes i koordinatsystemet som vektoren som går fra origo til $(2,5)$.

Kan tegne den samme vektoren andre steder i det samme koordinatsystemet.

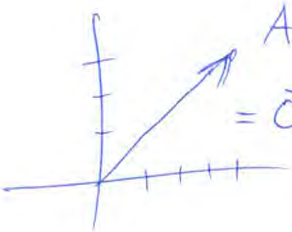
Spørsmål: Gitt to punkter, A, og B, kan vi finne ~~vektoren~~ koordinatene til vektoren som kan tegnes ved å starte i A, og slutte i B?

Litt notasjon: Vektoren vi her leter etter skrives som $\overrightarrow{AB}$



<u>Idé:</u> Ser at gitt et punkt A, kan vi skrive ned koordinatene til vektoren $\vec{OA}$, går fra origo til A.

<u>Eks:</u>

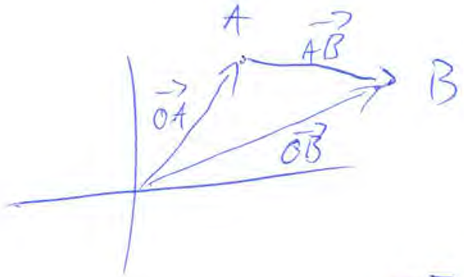


$A = (4, 3)$ ~~$A(4,3)$~~

$= \vec{OA} = [4, 3]$

(Generelt: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$)

Legger merke til at $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.



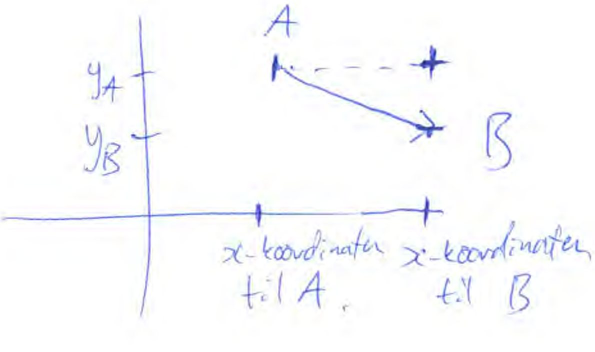
Ser derfor at $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.

<u>Eks:</u> Anta $A = (4, 3)$ og $B = (7, 2)$

Finn $\vec{AB}$. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [7, 2] - [4, 3]$

$= [7-4, 2-3] = \underline{\underline{[3, -1]}}$.

<u>Idé 2:</u> Stirrer på en figur, ser hvor langt $\vec{AB}$ må bevege seg mot høyre, og hvor langt $\vec{AB}$ må bevege seg opp.



x-koord til vektor må være x-koord til B minus x-koord til A.

Hvis $A = (x_A, y_A)$

$B = (x_B, y_B)$

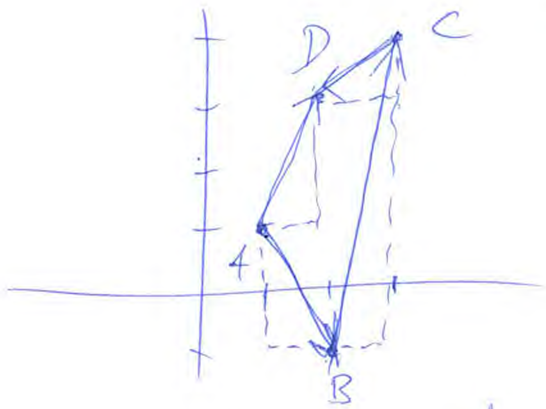
Får at $\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Eks:

Har en firkant med hjørner i

$A = (1,1)$, $B = (2,-1)$

$C = (3,4)$, $D = (2,3)$.



Finn lengdene på sidene i denne firkanten.

Regner ut én vektor per side:

$$AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = [2-1, -1-1] = [1, -2]$$

$$AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = [2-1, 3-1] = [1, 2]$$

$$BC \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = [3-2, 4-(-1)] = [1, 5]$$

$$CD \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = [2-3, 3-4] = [-1, -1]$$

Vi kan en formel for lengden til en vektor:

$$|[x_1, y_1]| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Får da:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Vi har lært å plusse vektorer, og å gange tall med vektor.

Vi har noen regneregler for disse operasjonene:

(1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\leftarrow$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(3) $t \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

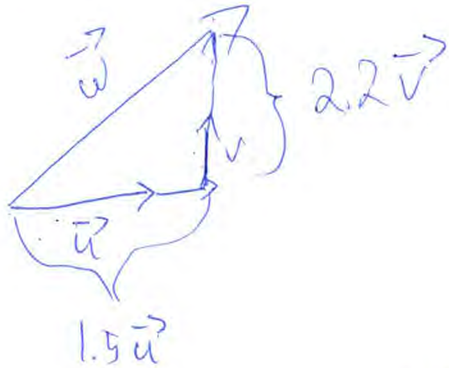
(4) $s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} = (s+t) \cdot \vec{a}$

(5) $s \cdot (t \cdot \vec{a}) = (s \cdot t) \cdot \vec{a}$

(6) Hvis en vektor kan skrives som $s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$, så er tallene s og t og $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, unike.

To vektorer er parallelle dersom de peker i samme eller motsatt retning.

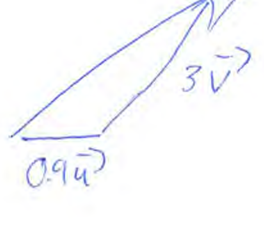
Idé bak (6):

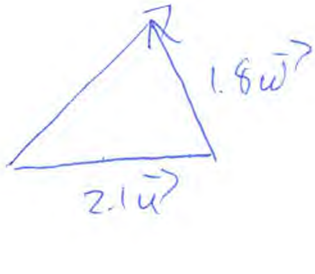


$\vec{w} = 1.5\vec{u} + 2.2\vec{v}$

Det finnes ingen annen kombinasjon av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som gir $\vec{w}$.

Om jeg hadde tre vektorer, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,





Matematisk definisjon:

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle dersom det finnes et tall s slik at $s \cdot \vec{u} = \vec{v}$.

Eks: Er vektorene $[6, 15]$ og $[4, 9]$ parallelle?

Finnes en s slik at $s \cdot [6, 15] = [4, 9]$?

$$[6s, 15s] = [4, 9]$$

Gir: $6s = 4 \Rightarrow s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$15s = 9 \Rightarrow s = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Nei, fordi s måtte vært både $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{5}$.

Disse er ikke parallelle.

Er vektorene $[4, -2]$ og $[-6, 3]$ parallelle?

Finnes en s slik at $s \cdot [4, -2] = [-6, 3]$

$$[4s, -2s] = [-6, 3]$$

Gir: $4s = -6 \Rightarrow s = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$

$-2s = 3 \Rightarrow s = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

Ja, $s = -\frac{3}{2}$ viser at disse er parallelle.

To subtiliteter

① Definisjonen av parallellitet var ikke symmetrisk.

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ Finnes s slik at $s \cdot \vec{u} = \vec{v}$.

$\vec{v}$ og $\vec{u}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ Finnes en t slik at $t \cdot \vec{v} = \vec{u}$.

Hvis $s \cdot \vec{u} = \vec{v}$ så er $\vec{u} = \frac{1}{s} \cdot \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $t \cdot \vec{v} = \vec{u}$
ved $t = \frac{1}{s}$.

② Hva om $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ er $\vec{0}$?

Anta at $\vec{v} = \vec{0} = [0, 0]$

$\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ Finnes en s slik at $s \cdot \vec{u} = \vec{v}$.

Finnes alltid en slik s, nemlig $s = 0$.

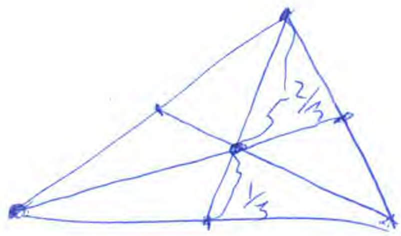
$\vec{v}$ og $\vec{u}$ er parallelle $\Leftrightarrow$ Finnes en t slik at $t \cdot \vec{v} = \vec{u}$.
(nesten, $\vec{u} = \vec{0}$ spesialtilfelle)

Finnes aldri en slik t.

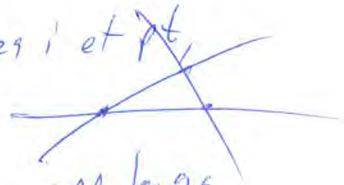
Definerer at nullvektoren $\vec{0}$ er parallell med alle vektorer.

Eksempel på vektorbruk uten koordinata:

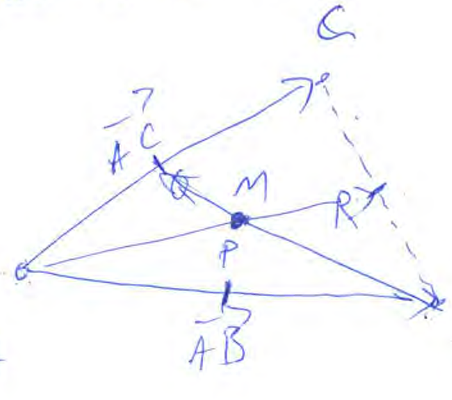
Idé: Har en trekant:



- På hver side, marker midtpunktet.
- Tegn linja fra motsatt hjørne til midtpunktene.
- Disse vil møtes i et pt, og dette er 1/3 av veien opp langs midtlinjene.



Bruker vektorer:



Bestemt av to vektorer, $\vec{AB} = \vec{u}$ og $\vec{AC} = \vec{v}$.

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{u}$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{AR} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC} = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{AR} = \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\vec{BQ} = \vec{BA} + \vec{AQ} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{AM} = s\cdot\vec{AR} = s\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$
$$= \vec{AB} + \vec{BM}$$
$$= \vec{u} + t\cdot\vec{BQ}$$
$$= \vec{u} + t\cdot\left(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$$

$$\vec{AM} = (1-t)\vec{u} + \frac{t}{2}\vec{v}$$

$$\vec{AM} = \frac{s}{2}\vec{u} + \frac{s}{2}\vec{v}$$