Løsningsforslag påsketentamen forkurs 19. mars 2018

Oppgave 1

a)

$$\frac{(2x)^2\cdot\sqrt[3]{y}}{8y^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^2\cdot x^2\cdot y^{\frac{1}{3}}}{2^3\cdot y^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}=2^{2-3}\cdot x^{2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^{-1}\cdot x^0\cdot y^1=\underline{\underline{\frac{y}{2}}}$$

b)

$$(x-2)(x+2)+3(x+1)(x+3)-4x(x+3)=$$
$$x^2-4+3(x^2+3x+x+3)-4x^2-12x=$$
$$x^2-4+3x^2+9x+3x+9-4x^2-12x=\underline{\underline{5}}$$

c)

$$\sqrt{x-2}+2x=5$$
$$\sqrt{x-2}=5-2x$$
$$x-2=(5-2x)^2$$
$$x-2=25-20x+4x^2$$
$$4x^2-21x+27=0$$
$$\underline{x=3\ \vee\ x=\frac{9}{4}=(2,25)}$$

To mulige løsninger

Prøve for $x=3$

$vs:\sqrt{3-2}+2\cdot 3=7$ hs:5

$vs\neq hs$ $x=3$ er ikke en løsning

Prøve for $x=\frac{9}{4}$

$vs:\sqrt{2,25-2}+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$;hs:5

$vs=hs$

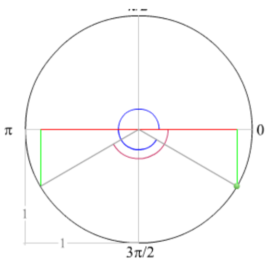
$$\underline{\underline{\textit{Løsning}\qquad x=\frac{9}{4}}}$$

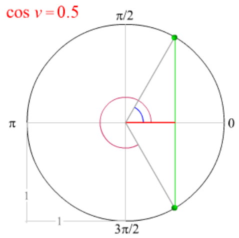
d)

$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0\qquad x\in[0,2\pi]$$

$$\sin x+\frac{1}{2}=0$$
$$\sin x=-\frac{1}{2}$$
$$\underline{\underline{x=\frac{7\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{11\pi}{6}}}$$

$$\cos x-\frac{1}{2}=0$$
$$\cos x=\frac{1}{2}$$
$$\underline{\underline{x=\frac{\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{5\pi}{3}}}$$





e)

$$\frac{x+3}{x-2} \le 2x$$ Samler alt på en brøkstrek. Husk fn.

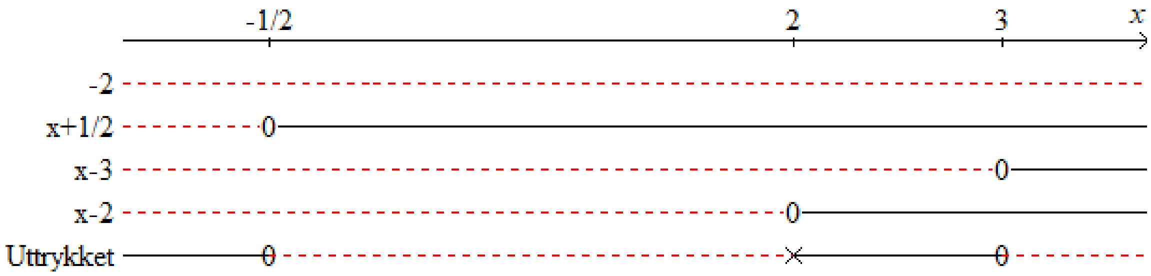
$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{2x(x-2)}{x-2} \le 0$$

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{\left(2x^2-4x\right)}{x-2} \le 0$$ Her er en fortegns "felle".

$$\frac{x+3-2x^2+4x}{x-2} \le 0$$

$$\frac{-2x^2+5x+3}{x-2} \le 0$$ Faktoriserer for å tegne fortegnsskjema.

$$\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)}{x-2} \le 0$$



$$\underline{\underline{-\frac{1}{2} \le x < 2 \quad \vee \quad x \ge 3}}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \sin x = u \cdot v$$

$$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = \underline{\underline{e^x(\sin x + \cos x)}}$$

g)

$$g(x) = \ln(x^2+1) = \ln(u)$$

$$g'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}}$$

h)

$$\int (3x + \cos 2x)dx = \frac{3}{2}x^2 + \sin 2x \cdot \frac{1}{2} + C = \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\sin 2x + C}}$$

i)

$$\int x^2(x^3+1)^5\,dx \qquad u = x^3+1$$

$$du = 3x^2dx$$

$$\frac{1}{3}du = x^2dx$$

$$= \int \frac{1}{3}u^5du = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C = \underline{\underline{\frac{1}{18}(x^3+1)^6 + C}}$$

j)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{3y^2} \quad , \quad y(0) = 2$$

$$\int y^2dy = \int \frac{2}{3}t\,dt$$

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2 + C_1$$

$$y^3 = \frac{1}{3}\cdot 3t^2 + C_2$$

$$\underline{y = \sqrt[3]{t^2+C}} \quad \text{generell løsning}$$

$$y = \sqrt[3]{t^2+C}$$

$$2 = \sqrt[3]{0^2+C}$$

$$2 = \sqrt[3]{C}$$

$$\underline{C = 2^3 = 8} \qquad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{t^2+8}}}$$

k)

$$x^3 + ax^2 + b = 0$$

$$x = 1 \qquad 1^3 + a\cdot 1^2 + b = 0$$

$$\underline{a = -1-b}$$

$$x = 2 \qquad 8 + 4a + b = 0$$

$$8 + 4(-1-b) + b = 0$$

$$8 - 4 - 4b + b4 = 0$$

$$-3b = -4$$

$$\underline{b = \frac{4}{3}} \quad \text{som gir } a = -1 - \frac{4}{3}$$

$$\underline{a = -\frac{7}{3}}$$

Dette gir likningen: $\underline{x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{4}{3}}$ Husk at både (x-1) og (x-2) er faktorer i polynomet.

$(x-1)(x-2)=x^2-2x-x+2=\underline{x^2-3x+2}$

$$(x^3-\frac{7}{3}x^2+\frac{4}{3}):(x^2-3x+2)=\underline{x+\frac{2}{3}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^3+3x^2-2x} \\
\quad \frac{2}{3}x^2-2x+\frac{4}{3} \\
\quad \underline{-\frac{2}{3}x^2+2x-\frac{4}{3}} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Den tredje løsningen er: $\underline{\underline{x=-\frac{2}{3}}}$

Oppgave 2 Gitt funksjonen: $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x}$

a) Finn definisjonsmengden til $f(x)$ og regn ut nullpunktene til funksjonen.

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x}$$

$\underline{\underline{D_f=\mathbb{R}\setminus 0}}$

Nullpunkt eller tenk at brøken er lik 0, når teller = 0

$$\frac{x^2+4x+3}{x}=0 \quad |\cdot x$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$\underline{\underline{x=-1 \quad \vee \quad x=-3}}$$

b) Finn ved regning eventuelle asymptoter til $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x}$.

Vertikal asymptote: $\underline{\underline{x=0}}$

Skrå asymptote: siden teller har en høyere grad en nevner.

$$(x^2+4x+3):x=x+4+\frac{3}{x}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^2} \\
\quad 4x \\
\quad \underline{-4x} \\
\qquad 3
\end{array}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}\to 0$ slik at skrå asymptoten er : $\underline{\underline{y=x+4}}$

c) Vis at den deriverte til $f(x)$ er: $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2}$.

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+4)\cdot x-(x^2+4x+3)\cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+4x-x^2-4x-3}{x^2}$$

$$\underline{\underline{f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}}}$$

d) Finn ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter til $f(x)$.

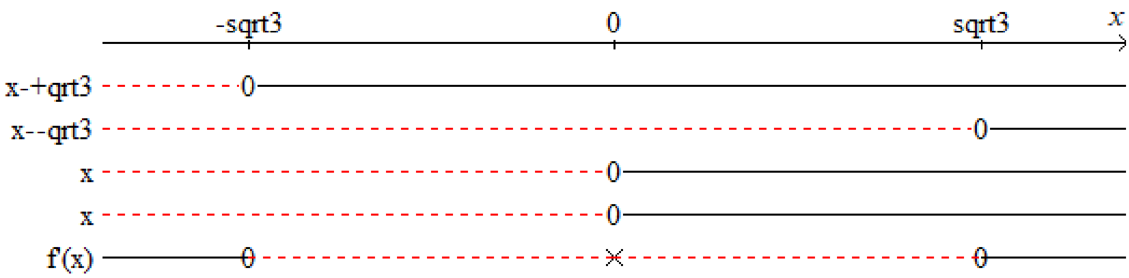
$$f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}$$

$$x^2-3=0$$

$$x^2=3$$

$$\underline{x=\pm\sqrt{3}}$$

$$f'(x)=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2}$$



$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+3}{-\sqrt{3}}=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)^2}{-\sqrt{3}}=$$

$$\frac{\cancel{\left(-\sqrt{3}\right)}\left(\left(-\sqrt{3}\right)+4+\left(-\sqrt{3}\right)\right)}{\cancel{-\sqrt{3}}}=4-2\sqrt{3}\approx 0,54$$

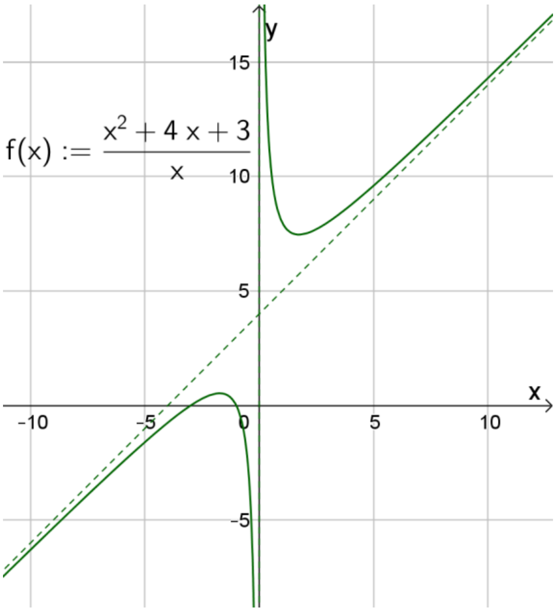
$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(\sqrt{3}\right)+3}{\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}\approx 7,46$$

Toppunkt: $\underline{\underline{\left(-\sqrt{3},4-2\sqrt{3}\right)\approx\left(-1.73,0.54\right)}}$

Bunnpunkt: $\underline{\underline{\left(\sqrt{3},4+2\sqrt{3}\right)\approx\left(1.73,7.46\right)}}$

e) Tegn grafen til $f(x)$ sammen med eventuelle asymptoter.

Hva er verdimengden til $f(x)$?



Verdimengde: $\underline{\underline{V_f = \mathbb{R} \setminus \langle 4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3} \rangle}}$ eller $\underline{\underline{V_f = \langle \leftarrow, 4-2\sqrt{3}] \cup [4+2\sqrt{3}, \rightarrow \rangle}}$

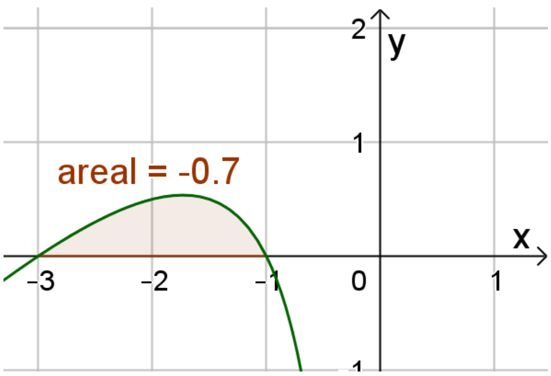
f) Grafen til $f(x)$ og x-aksen avgrenser et flatestykke i 2. kvadrant. Regn ut eksakt verdi til arealet av dette flatestykket.

Nullpunktene til f regnet vi ut i a)

$$\int_{-3}^{-1} \frac{x^2+4x+3}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left(x+4+\frac{3}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3\ln|x| \right]_{-3}^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3\ln|-1| \right) - \left(\frac{1}{2}(-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3\ln|-3| \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} - 4 + 3\ln 1 \right) - \left(\frac{9}{2} - 12 + 3\ln 3 \right) = \frac{1}{2} - 4 - \frac{9}{2} + 12 - 3\ln 3 = \underline{\underline{4 - 3\ln 3}} \approx (0,70)$$



Oppgave 3

I pyramiden $ABCT$ er koordinatene til hjørnene kjent:

$A(1,0,0)$, $B(5,1,0)$, $C(-2,3,1)$ og $T(3,0,16)$.

Punktene A, B og C danner grunnflaten i pyramiden.

a) Finn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ og vinkelen mellom disse to vektorene.

$$\overrightarrow{AB} = [5-1, 1-0, 0-0] = \underline{\underline{[4,1,0]}}$$

$$\overrightarrow{AC} = [-2-1, 3-0, 1-0] = \underline{\underline{[-3,3,1]}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{[4,1,0] \cdot [-3,3,1]}{\sqrt{4^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+3^2+1^2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{4 \cdot (-3) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{19}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-9}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{19}}$$

$$\underline{\underline{\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 120{,}1^\circ}}$$

b) Finn arealet av grunnflaten i pyramiden ved regning.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = [1 \cdot 1 - 0 \cdot 3, -(4 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)), 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-3)] = [1, -4, 15]$$

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 15^2} = \underline{\underline{\frac{11\sqrt{2}}{2}}}$$

c) Finn volumet av pyramiden $ABCT$ ved regning.

$$V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AT} \right|$$

$$V = \frac{1}{6} \left| [1,-4,15] \cdot [2,0,16] \right|$$

$$V = \frac{1}{6} \left| 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 + 15 \cdot 16 \right|$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 242$$

$$\underline{\underline{V = \frac{121}{3}}} \approx (7{,}78)$$

d) Vis ved regning at likningen til planet α bestemt av A, B og C er: $\alpha: x-4y+15z=1$.

En normalvektor er: $n_\alpha = [1,-4,15]$ og et punkt er $A(1,0,0)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-1)-4(y-0)+15(z-0)=0$

$x-1-4y+15z=0$

$\underline{\underline{x-4y+15z=1}}$

e) Finn en parameterframstilling for linja l som går gjennom punktet T og som står normalt på grunnflaten i pyramiden.

En retningsvektor for linjen er $r_l = n_\alpha = [1,-4,15]$ $T(3,0,16)$

$$\underline{\underline{l:\begin{cases} x=3+t \\ y=-4t \\ z=16+15t \end{cases}}}$$

f) Finn koordinatene til skjæringspunktet mellom planet α og linja l.

$\alpha: x-4y+15z=1$ og $l:\begin{cases} x=3+t \\ y=-4t \\ z=16+15t \end{cases}$

$(3+t)-4(-4t)+15(16+15t)=1$

$3+t+16t+240+225t=1$

$t+16t+225t=1-3-240$

$242t=-242$

$\underline{t=-1}$

$x=3+1\cdot(-1)=2$

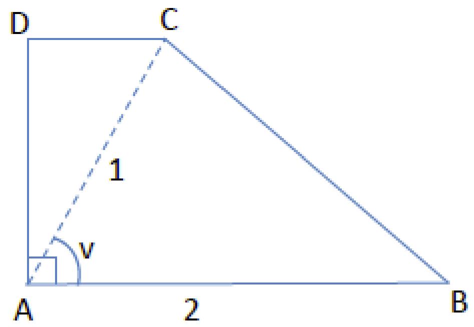
$y=-4\cdot(-1)=4$

$z=16+15\cdot(-1)=1$ *Skjæringspunkt* : $\underline{\underline{(2,4,1)}}$

Oppgave 4

I trapeset *ABCD* er *AB* og *CD* de parallelle sidene. AB=2

$$AB = 2, AC = 1, \angle A = \frac{\pi}{2} \text{ og } \angle BAC = v.$$



Vis at arealet av trapeset kan uttrykkes som en funksjon av *v* slik:

$$A(v) = \frac{(2+\cos v)\sin v}{2}$$

Ser at $\angle CAD = \frac{\pi}{2} - v$ og $\angle ACD = v$

$\cos v = \frac{CD}{1}$ som gir $\underline{CD = \cos v}$

$\sin v = \frac{AD}{1}$ som gir $\underline{AD = \sin v}$

Bruker vi formel for areal av trapes får vi

$$A = \frac{(AB + CD)\cdot AD}{2} = \frac{(2+\cos v)\sin v}{2}$$

Oppgave 5

a) I en uendelig geometrisk rekke er første leddet lik, $\frac{x}{2}$ og andre leddet er lik $\frac{x^2}{4}$.
For hvilke verdier av x er denne rekken konvergent, og hva blir summen da?

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{x}{2}} = \underline{\frac{x}{2}}$$

Konvergent geometrisk rekke når: $-1 < k < 1$

$$-1 < \frac{x}{2} < 1$$

$$\underline{\underline{-2 < x < 2}}$$

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \underline{\underline{\frac{x}{2-x}}}$$

b) I en aritmetisk rekke er summen av de 51 første leddene -1173 og summen av de 61 første leddene -1708.
Bestem første leddet og differansen til rekken.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$S_{51} = -1173$ $\qquad$ $S_{61} = -1708$

$$a_{51} = a_1 + 50d$$

$\frac{a_1 + a_1 + 50d}{2} \cdot 51 = -1173$ $\qquad$ $\frac{a_1 + a_1 + 60d}{2} \cdot 61 = -1708$

$102a_1 + 2550d = -2346$ $\qquad$ $122a_1 + 3660d = -3416$

$\underline{d = \frac{-2346 - 102a_1}{2550}}$ $\qquad$ $\underline{d = \frac{-3416 - 122a_1}{3660}}$

$$\frac{-2346 - 102a_1}{2550} = \frac{-3416 - 122a_1}{3660}$$

$$-8586360 - 373320a_1 = -8710800 - 311100a_1$$

$$-373320a_1 + 311100a_1 = -8710800 + 8586360$$

$$-62220a_1 = -124440$$

$$\underline{\underline{a_1 = 2}}$$

$$d = \frac{-2346 - 102a_1}{2550} = \frac{-2346 - 102 \cdot 2}{2550}$$

$$\underline{\underline{d = -1}}$$