Løsningsforslag eksamen tretermin våren 2015

Oppgave 1

For at funksjonen $g(x)=\begin{cases} 5 & for \quad x=2 \\ a+x^2 & for \;\; x<2 \\ b/x^2 & for \;\; x>2 \end{cases}$ skal være kontinuerlig ved $x=2$ må

$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2+} g(x)=g(2)=5$. Her er $\lim_{x\to 2-} g(x)=a+4$ og $\lim_{x\to 2+} g(x)=b/4$. Følgelig må $a+4=5$, dvs. $\underline{a=1}$ og $b/4=5$, dvs. $\underline{b=20}$ for at funksjonen skal være kontinuerlig.

Oppgave 2.

1. Vi skriver funksjonen på formen $y=2+x^{3/2}+x^{-1/2}$ og bruker potensregelen for derivasjon,

   $(x^n)'=nx^{n-1}$. Det gir $y'=(3/2)x^{1/2}-(1/2)x^{-3/2}$ som kan skrives $\underline{y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}$.

2. Derivasjon gir: $y'=3e^{3x}+\frac{2}{2x}=\underline{3e^{3x}+\frac{1}{x}}$.

3. Ved å bruke produktregelen for derivasjon fås: $\underline{y'=2x\cos x-x^2\sin x}$.

Oppgave 3. Likningen for en linje som tangerer grafen til en funksjon $y(x)$ i punktet (x_0,y_0), er

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. Her er $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ som gir $y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$.

Videre er $(x_0,y_0)=(1,1)$, som gir $y'=-1$. Likningen for tangenten blir da:

$y-1=-(x-1)=-x+1$ eller $\underline{y=-x+2}$.

Oppgave 4. Utregning gir:

$$I_1=\int_1^4\left(1+2e^x+e^{2x}\right)dx=\left[x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^4=\left(4+2e^4+\frac{1}{2}e^8\right)-\left(1+2e+\frac{1}{2}e^2\right)=\underline{3+2e^4+\frac{1}{2}e^8-2e-\frac{1}{2}e^2}.$$

Oppgave 5

$I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$. $u = \cos x$. Da er $du = u'dx = -\sin x \, dx$. Dermed fås

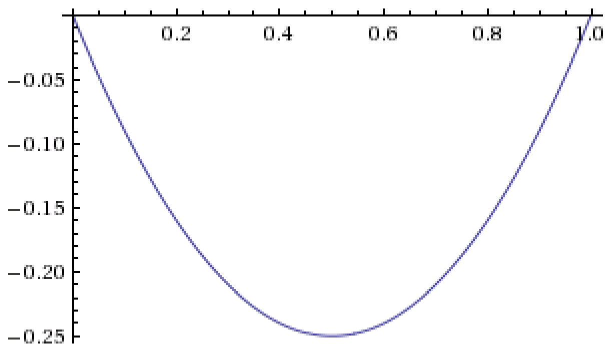
$I_2 = -\int \frac{1}{u^4} du = -\int u^{-4} + K = \underline{-\frac{1}{3\cos^3 x}} + K$.

Oppgave 6

$I_3 = \int x\cos(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(2x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)dx = \underline{\frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + K}$.

Oppgave 7

a) Grafen til funksjonen $y = x(x-1)$ i området fra $x = 0$ til $x = 1$:



Vi har: $y = x(x-1) = x^2 - x$.

Derivasjon gir: $y' = 2x - 1$.

Maksimumspunktet finnes ved å sette $y' = 0$, dvs. $2x - 1 = 0$.

Løsningene er: $x = \frac{1}{2}$. Dvs. det er minimumspunkt i $\underline{x = 1 \ , \ y = -0{,}25}$.

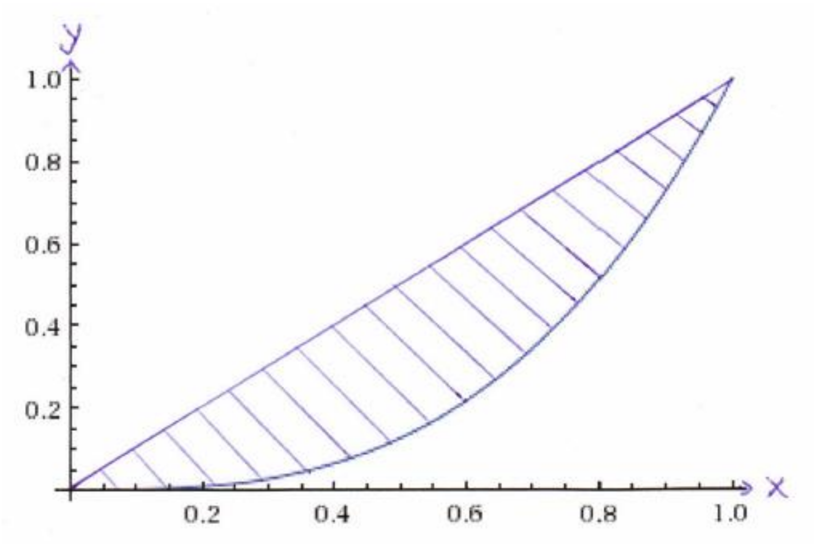
b) Arealet mellom kurven og x-aksen i området fra $x = 0$ til $x = 1$ er:

$$A = \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 x(x-1)dx = \int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{6}} .$$

Minustegnet betyr at flaten befinner seg under *x*-aksen.

Oppgave 8

Kurven $y_1 = x^2$ og linjen $y_2 = x$ skjærer hverandre i et punkt x_P gitt ved $y_1(x_P) = y_2(x_P)$, dvs. $x_P^3 = x_P$ som gir $x_P = 1$. Skjæringspunktet er $\underline{(1,1)}$.



Volumet av rotasjonslegemet som oppstår når flaten mellom kurven $y_1(x) = x^2$ og linjen $y_2(x) = x$ roteres om *y*-aksen, kan beregnes på to måter.

Vi tenker oss først at det består av vannrette sirkelskiver med indre radius $x_1(y) = y^{1/2}$ og ytre radius $x_2(y) = y$. Da er volumet gitt ved integralet

$$V = \pi\int_0^1 \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy = \pi\int_0^1 \left(y - y^2\right) = \pi\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{\pi}{6}}.$$

Alternativt kan vi tenke oss at volumet består av sylinderskall. Da er volumet gitt ved integralet

$$V = 2\pi\int_0^1 \left(x y_2(x) - x y_1(x)\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx = 2\pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\frac{\pi}{6}}.$$

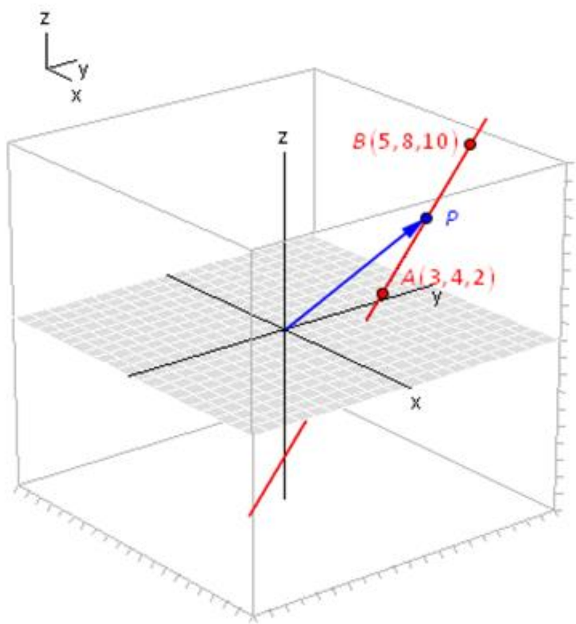
Oppgave 9

Gitt de to vektorene $\vec{A} = [1,\ 1,\ 1]$ og $\vec{B} = [a,\ -4,\ 1]$. Skalarproduktet av vektorene er

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 1\cdot a + 1\cdot(-4) + 1\cdot 1 = a - 3$. Skalarproduktet kan også skrives $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ der θ er vinkelen mellom $\vec{A}$ og $\vec{B}$. Siden $\cos 90^0 = 0$ betyr $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ at vektorene står vinkelrett på hverandre. Følgelig står vektorene vinkelrett på hverandre dersom $\underline{a = 3}$.

Oppgave 10

Vi skal først skrive likningen for linjen L på vektorform. La $\vec{r} = [x,\ y,\ z]$ være posisjonsvektoren til et vilkårlig punkt P på linjen som vist i figuren. Av figuren ser vi at $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$. Vektoren $\vec{r} = \overrightarrow{AP}$ peker langs $\overrightarrow{AB}$. Det betyr at man alltid kan finne et tall *t* slik at $\vec{r} = \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}$. Tallet t kalles en *parameter* og kan oppfattes som en koordinat langs linjen slik at hvert punkt på linjen har en verdi av t, og alle punktene har forskjellige verdier. Verdien av t kan for eksempel vokse fra 0 ved $\vec{A}$ til 1 ved $\vec{B}$. Dermed fås vektorlikningen for linjen $\underline{\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}t}$.



På komponentform tar denne likningen formen

$[x,\ y,\ z] = [3,\ 4,\ 2] + [5-3,\ 8-4,\ 10-2]t = [3,\ 4,\ 2] + [2,\ 4,\ 8]t$.

Dette gir parameterformen til likningen for L

$\underline{x = 3 + 2t \quad , \quad y = 4 + 4t \quad , \quad z = 2 + 8t}$.