Fakultet for Teknologi og Realfag

LF Tentamen vår 2020

Emnekode: MA-015

27. mars 2020

09:00 - 14:00

Generell informasjon

Antall sider inkl. forside: 7

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator. Formelhefte i matematikk.

Merknader:

- Hver oppgave teller like mye ved sensur.
- Skriv ned oversiktlige svar og vis alle nødvendige mellomregninger – skriv ned hva du gjør og hvorfor du gjør det.
- Oppgaven skal leveres som én enkel .pdf-fil på Canvas. Se ytterligere informasjon om innlevering på Canvas.
- **OBS:** På første side av din innlevering skal du inkludere denne teksten og skrive under med din underskrift:

  "Jeg er klar over at innleveringen i MA-015 er et selvstendig arbeid, ikke gruppearbeid. Jeg bekrefter at jeg ikke siterer eller på annen måte bruker andres arbeid uten at dette er oppgitt.

  ________________"

Kontakt under tentamen: Vuk Milanovic, tlf: 900 46 227, e-mail: vuk.milanovic@uia.no

Oppgave 1

Forkort/forenkle følgende uttrykk:

a) $\dfrac{a^2b^{-3}c^4}{a^{-2}b^3c^{-4}} = a^{2-(-2)}b^{-3-3}c^{4-(-4)} = \underline{\underline{a^4b^{-6}c^8 = \frac{a^4c^8}{b^6}}}$

b) $\dfrac{2x^2+8x+8}{2x^2-8} = \dfrac{2(x^2+4x+4)}{2(x^2-4)} = \dfrac{2(x+2)^2}{2(x-2)(x+2)} = \underline{\underline{\dfrac{x+2}{x-2}}}$

Oppgave 2

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $16 + 12 + 9 + ...$

a) Finn k og a_5. Vis at rekka er konvergent.

k finner vi ved å ta "neste" ledd i rekka og dele på den "forrige", vi gjør dette for flere ledd for å se om det er én gjennomgående (og samme) k:

$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
$k = \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\underline{\underline{\text{k} = \frac{3}{4} \text{ og rekka er konvergent da k} \in [-1, 1]}}$

Finner a_5 ved formelen:

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

$a_5 = 16 \cdot (\frac{3}{4})^{5-1}$

$a_5 = 16 \cdot 0.75^4$

$\underline{\underline{a_5 = 5.0625}}$

b) Finn summen av rekka.

Summen finner vi ved hjelp av formelen:

$s = \frac{a_1}{1-k}$

$s = \frac{16}{1-\frac{3}{4}}$

$\underline{\underline{s = 64}}$

Oppgave 3

Gitt følgende funksjon:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 3}$$

a) Regn ut eventuelle nullpunkter til f(x).

Nullpunktene finner vi når teller = 0, samtidig som nevner er $\neq 0$

Finner når teller = 0:

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Sjekker om nevner er = 0 for disse x-verdiene:

$\pm\sqrt{2} + 3 \neq 0$ Dette stemmer at nevner ikke er lik 0 for disse x-verdiene.

$\underline{\underline{\text{Nullpunktene til f(x) er i } x = \pm\sqrt{2}}}$

b) Regn ut eventuelle asymptoter.

Vi finner vertikale asymptoter når nevneren $= 0$, samtidig som teller $\neq 0$.

Finner når nevner $= 0$:

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

Sjekker om teller er $= 0$ for denne x-verdien:

$(-3)^2 - 2 \neq 0$ Det stemmer at teller ikke er lik 0 for denne x-verdien.

V.A. i x = -3.

Da telleren er én grad høyere enn nevner så finnes det også en skrå asymptote og det finnes ikke noen horisontal asymptote.

Skrå asymptoten finner vi ved å utføre polynomdivisjon:

$(x^2 - 2) : (x + 3) = x - 3 + \frac{6}{x+3}$

Når x $\rightarrow \infty$ så vil $\frac{6}{x+3} \rightarrow 0$

Skrå asymptote i x-3.

c) Regn ut eventuelle ekstremalpunkter og bestem om disse er topp-/bunnpunkter.

Vi finner ekstremalpunktene når den deriverte til f(x) = 0. Vi må finne den deriverte:

f'(x) finner vi v.h.a. kvotientregelen: $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ der u $= x^2 - 2$ og $u' = 2x$, v $= x + 3$ og v' $= 1$:

$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+3) - (x^2-2) \cdot 1}{(x+3)^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2 + 6x - x^2 + 2}{(x+3)^2}$

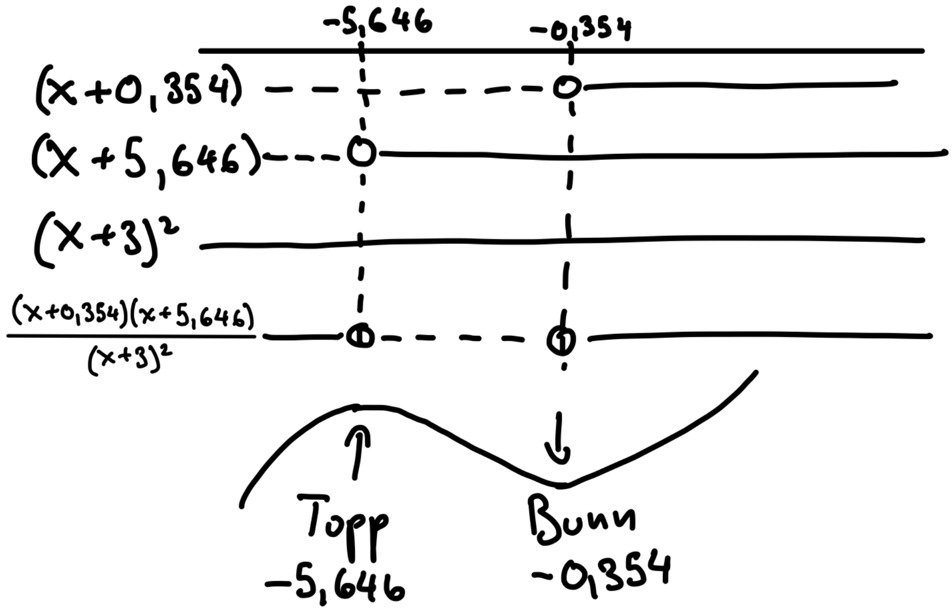
$f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 2}{(x+3)^2}$

Dette er lik 0 når telleren er lik 0, samtidig som nevner $\neq 0$ for samme x-verdier. Vi undersøker når teller $= 0$:

$x^2 + 6x + 2 = 0$ når $x_1 = -3 + \sqrt{7} = -0.354$ og $x_2 = -3 - \sqrt{7} = -5.646$, her ser vi at nevner $\neq$ for x_1 og x_2

Sjekker nå om hvilke som er topp-/bunnpunkter ved å enten tegne opp fortegnslinje for den deriverte f'(x) eller ved å sette inn x_1 og x_2 inn i f"(x) og undersøke om verdien er positiv/negativ.

Fortegnslinje:



Vi leser av her at toppunktet er i $x_2 = -5.646$ mens bunnpunktet er i $x_1 = -0.354$. Vi finner y-verdiene til disse punktene ved å sette x_1 og x_2 inn i f(x) og får da:

Toppunktet er i (-5.646, -11,292), mens bunnpunktet ligger i (-0.354, -0.708)

Andrederivert f"(x):

$f''(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ der u = $x^2 + 6x + 2$ og u' = $2x + 6$, mens v = $(x + 3)^2$ og v' = 2(x+3)

$f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2-(x^2+6x+2)(2x+6)}{((x+3)^2)^2}$

Ved å sette inn $x_1 = -0.354$ og $x_2 = -5.646$ ser vi nå at:

Toppunktet er i $x_2 = -5.646$ (pga at verdien på f"(x) er negativ for denne x-verdien) mens bunnpunktet er i $x_1 = -0.354$ (pga at verdien på f"(x) er positiv for denne x-verdien). Vi finner y-verdiene til disse punktene ved å sette x_1 og x_2 inn i f(x) og får da:

Toppunktet er i (-5.646, -11,292), mens bunnpunktet ligger i (-0.354, -0.708)

Oppgave 4

Løs følgende integraler:

a) $\int_0^2 (5x^4 + x^2 - 3)dx$

Integrerer hvert ledd for seg selv:

$\int_0^2 (5x^4 + x^2 - 3)dx = [x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 3x]_0^2 = (2^5 + \frac{1}{3}2^3 - 3 \cdot 2) - (0) = 28.667$

b) $\int xe^{2x}dx$

Løser v.h.a delvis integrasjon: $\int uv' = uv - \int u'v$ Velger u = x og v' = e^{2x}, da får vi u' = 1, og v = $\frac{1}{2}e^{2x}$

Setter inn i formelen og får:

$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = e^{2x}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

c) $\int \frac{\sin x}{2\cos x+1}dx$

Løser v.h.a substitusjon. Setter u = $2\cos x + 1$ og får da at $\frac{du}{dx} = 2\sin x$

Dette igjen gir oss en ny formel for dx: $dx = \frac{du}{-2\sin x}$ Setter så dette inn i den opprinelige formelen og får da:

$\int \frac{\sin x}{u}\frac{du}{-2\sin x} = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln u + C$

Da har vi at:

$\int \frac{\sin x}{2\cos x+1}dx = -\frac{1}{2}\ln|2\cos x + 1| + C$

Finn den førstederiverte til g(x):

d) $g(x) = x^2e^{3x}$

Løser dette ved hjelp av produktregelen: $(uv)' = uv' + u'v$

Velger u = x^2 og v = e^{3x}, da blir u' = $2x$ og v' = $3e^{3x}$ Innsatt gir dette:

$g'(x) = x^2 \cdot 3e^{3x} + 2x \cdot e^{3x} = xe^{3x}(3x + 2)$

Oppgave 5

Gitt følgende punkter: A (1,-2,3), B (-1,2,3) og C (1,3,-2)

a) Regn ut $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ og $\vec{AB} \times \vec{AC}$

Skalarproduktet kan vi ta på koordinatform ved å første finne vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$:

$\vec{AB} = [-1 - 1, 2 - (-2), 3 - 3] = [-2, 4, 0]$

$\vec{AC} = [1 - 1, 3 - (-2), -2 - 3] = [0, 5, -5]$

Finner da skalarproduktet $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = [-2, 4, 0] \cdot [0, 5, -5] = 20$

Kryssproduktet $\vec{AB} \times \vec{AC}$ finner vi ved å sette opp en 3×3-determinant med enhetsvektor som første rad:

$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}$ = [-20-0, -(10-0), -10-0]

$\underline{\underline{\text{Kryssproduktet } \vec{AB} \times \vec{AC} = [-20, -10, -10]}}$

b) Regn ut arealet av Δ ABC

Arealet til trekanten ABC finner man ved $A_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Lengden av kryssproduktet $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-20)^2 + (-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{600}$

$\underline{\underline{\text{Arealet til } \Delta ABC = \frac{\sqrt{600}}{2}}}$

Punktet T (4,-1,4) er en del av pyramiden ABCT

c) Regn ut volumet til pyramiden.

Volumet av en trekantet pyramide finner vi ved å dele lengden av trevektorproduktet på seks der de tre vektorene er vektorer som utspenner pyramiden ABCT fra samme punkt. Vi behøver da $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ og $\vec{AT}$, slik at vi kan løse: $V = \frac{1}{6}|(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AT}|$

Vi har allerede funnet $\vec{AB} \times \vec{AC} = [-20, -10, -10]$, behøver nå $\vec{AT} = [4-1, -1-(-2), 4-3] = [3, 1, 1]$

Volumet blir da:

$V = \frac{1}{6}| \cdot ((-20) \cdot 3 + (-10) \cdot 1 + (-10) \cdot 1| = \frac{1}{6}| - 80|$
$\underline{\underline{V = \frac{40}{3}}}$

En linje l går gjennom punktet T og står vinkelrett på planet som inneholder punktene A, B og C.

d) Finn parameterfremstillingen for linja l

Parameterfremstillingen for en linje l i rommet får vi ved å sette inn verdier i:

$$l : \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Der $x_0.y_0, z_0$ er koordinatene til et punkt på linja og a, b, c er koordinatene til en vektor som er parallell med linja. Kryssproduktet $\vec{AB} \times \vec{AC}$ er vinkelrett på trekanten ABC så da er den parallell med linja l da denne oppgis å være vinkelrett på ABC-planet. Parameterfremstillinga for linja blir da:

$$\underline{\underline{l : \begin{cases} x = 4 - 20t \\ y = -1 - 10t \\ z = 4 - 10t \end{cases}}}$$

e) Vis at planet som inneholder A, B og C kan utrykkes som $\alpha : -2x - y - z + 3 = 0$

Likningen for et plan finner vi ved å finne et punkt i planet og en normalvektor på planet. Kryssproduktet $\vec{AB} \times \vec{AC}$ er en normalvektor til planet som inneholder ABC da denne er normalt på ABC. Videre har vi 3 punkter å velge mellom: A(1,-2,3), B(-1,2,3) og C(1,3-2).

Vi setter dette inn i formelen for et plan:

$\alpha : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ der a,b,c er vektorkoordinatene til en normalvektor og x_0, y_0, z_0 er koordinatene til et punkt i planet (vi velger punkt A(1,-2,3):

$\alpha : -20(x - 1) + -10(y - (-2)) + -10(z - 3) = 0$

$\alpha : -20x + 20 - 10y - 20 - 10z + 30 = 0$ Deler dette på 10 og får:

$\underline{\underline{\alpha : -2x - y - z + 3}}$

f) Finn skjæringspunktet mellom linja l og planet α

Først må vi finne en t-verdi for linja ved å sette parameterfremstillingen til linja inn i likningen til planet. Deretter bruker vi denne t-verdien til å finne (x,y,z) koordinatene på linja der denne møter planet:

Setter inn linja l i planet α:

$-2(4 - 20t) - (-1 - 10t) - (4 - 10t) + 3 = 0$ Løser for t og får:

$-8 + 40t + 1 + 10t - 4 + 10t + 3 = 0$
$-8 + 60t = 0$
$t = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} = 0.1333333$

Setter så denne inn i parameterfremstillingen for linja for å finne skjæringspunktet:

$x = 4 - 20 \cdot \frac{2}{15}, y = -1 - 10 \cdot \frac{2}{15}, z = 4 - 10 \cdot \frac{2}{15}$

Skjæringspunkt i: $(\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{8}{3})$

Oppgave 6

Løs for x:

a) $\sqrt{x+2} - x = x - 2$

$(\sqrt{x+2})^2 = (2x-2)^2$

$x + 2 = 4x^2 - 8x + 4$

$4x^2 - 9x + 2 = 0$ Løser denne andregradslikningen og får to mulige svar:

$x_1 = 2$

$x_2 = \frac{1}{4}$

Setter prøve på svaret:

x = 2 gir:

$\sqrt{2+2} - 2 = 2 - 2$

$\sqrt{4} - 2 = 0$

Dette stemmer.

x = $\frac{1}{4}$ gir:

$\sqrt{\frac{1}{4} + 2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 2$

$\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{8}$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{7}{8}$

$\frac{12-2}{8} = -\frac{7}{8}$

Dette stemmer ikke.

Dermed er $x = 2$ det riktige svaret.

b) $2e^{(3x+1)} = 44053$

$e^{3x+1} = \frac{44053}{2}$

$e^{(3x+1)} = 22026,5$

$\ln e^{(3x+1)} = \ln 22026,5$

$3x + 1 = 10$

$3x = 9$

$x = 3$

c) $\sin 2x = \frac{\pi}{6}, \qquad x \in [0, 2\pi]$

$2x = \sin^{-1}(\frac{\pi}{6})$

Dette gir to muligheter:

$2x = 0.551 + k2\pi$

og

$2x = (\pi - 0.551) + k2\pi$ som tilsvarer: $2x = 2.591 + k2\pi$

Da får vi disse mulighetene:

$x = 0.276 + k\pi$ og $x = 1.296 + k\pi$

For k = 0, k = 1 er vi innenfor definisjonsområdet til likningen, svarene blir dermed:

$x = 0.276 \;\&\; x = 0.276 + \pi = 3.416 \;\&\; x = 1.296 \;\&\; 1.296 + \pi = 4.436$

Oppgave 7

Den norske troppen til VM i skiskyting bestod av 7 menn og 6 kvinner. I herrestafett er 4 løpere på ett lag.

a) Hvor mange ulike herrelag kan vi lage fra denne VM troppen?

Det er 7 menn totalt og vi skal ta et uttak på 4. Vi starter med å kunne velge mellom 7 menn, deretter 6, 5 og til slutt 4. Det er også spørsmål om ulike lag. Så lag som f.eks er dannet av person1, person2, person3 og person4 kan dannes på flere måte, f.eks: p1,p2,p3,p4 - p1,p2,p4,p3 - p1,p4,p3,p2 etc., men alle disse er det samme laget. Dermed er det:

$\underline{\underline{\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{840}{24} = 35 \text{ ulike herrelag å lage fra denne VM troppen.}}}$

På laget i mix-stafett er det 2 menn og 2 kvinner.

b) Hvor mange ulike firemannslag med 2 menn og 2 kvinner er det mulig å sette sammen av den norske troppen?

Det er mulig å sette sammen $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ ulike 2-personers herrelag.

Det er også mulig å sette sammen $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ ulike 2-personers damelag.

Man multipliserer så disse mulighetene og får svaret:

$\underline{\underline{\text{Det er mulig å sette sammen } 21 \cdot 15 = 315 \text{ ulike firemannslag med 2 menn og 2 kvinner av den norske troppen.}}}$