Løsningsforslag FO912A, utsatt eksamen august 2012

Merk at noen av oppgavene også kan løses på andre måter enn det jeg har gjort her.

Oppgave 1

Deriver følgende funksjoner:
a)

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

b)

$$g(x) = \frac{\ln(2x)}{3}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{3x} \end{aligned}$$

c)

$$h(t) = \frac{e^{t^2}}{t} - \lg(3)$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{e^{t^2} \cdot 2t \cdot t - e^{t^2} \cdot 1}{t^2} - 0 \\ &= \frac{e^{t^2}(2t^2 - 1)}{t^2} \end{aligned}$$

d)

$$p(x) = \sqrt{\ln\left(\sin(x^2)\right)}$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin(x^2))}} \cdot \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\tan(x^2)\sqrt{\ln(\sin(x^2))}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Finn de bestemte og ubestemte integralene.
a)

$$\int \left(3x^2 + 3\right)\, \mathrm{d}x$$

$$\int \left(3x^2 + 3\right)\, \mathrm{d}x = x^3 + 3x + C$$

b)

$$\int \frac{3x-4}{x^2-x-12}\, \mathrm{d}x$$

Bruker delbrøksoppspalting.
Først faktoriserer vi nevneren i integranden:

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$$

Vi kan nå skrive integranden på formen

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$$

der A *og* B *er konstanter som vi må bestemme. Vi ganger med fellesnevner:*

$$A(x+3) + B(x-4) = 3x - 4$$

$x = -3:$

$$\begin{aligned} B(-3-4) &= -9-4 \\ B &= \frac{13}{7} \end{aligned}$$

$x = 4:$

$$\begin{aligned} 7A &= 8 \\ A &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{x^2-x-12}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{8/7}{x-4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{13/7}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{7}\ln(x-4) + \frac{13}{7}\ln(x+3) + C \end{aligned}$$

c)

$$\int (3-x)\cos(-x)\,\mathrm{d}x$$

Vi bruker delvis integrasjon: $\int u' \cdot v\,dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$.

$$\begin{aligned} v &= 3-x \\ v' &= -1 \\ u' &= \cos(-x) \\ u &= -\sin(-x) = \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (3-x)\cos(-x)\,\mathrm{d}x &= (3-x)\sin(x) - \int \sin(x)\cdot(-1)\,\mathrm{d}x \\ &= (3-x)\sin(x) + \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (3-x)\sin(x) - \cos(x) + C \end{aligned}$$

d)

$$\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 \\ &= \frac{1}{2}(e^4-1) \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Løs ligningen ved regning:

$$\ln(x^2) - 2 = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} 2\ln(x) - 2 &= \ln(x) \\ 2\ln(x) - \ln(x) &= 2 \\ \ln(x) &= 2 \\ x &= e^2 \end{aligned}$$

b) Løs ligningen ved regning:

$$\pi \cdot 10^{\sqrt{x+1}} = 100\pi$$

$$\begin{aligned} 10^{\sqrt{x+1}} &= 100 \\ \lg\left(10^{\sqrt{x+1}}\right) &= \lg 100 \\ \sqrt{x+1} &= 2 \\ x+1 &= 2^2 = 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

c) Du skal kjøpe mobiltelefon og skal velge mellom 2 ulike modeller, 3 ulike farger og 20 ulike etuier. Hvor mange kombinasjonsmuligheter har du å velge mellom?

Du har $2 \cdot 3 \cdot 20 = 120$ *muligheter.*

Oppgave 4

En trekant har hjørner $A = (-1, 0, 0)$, $B = (x-1, -2, 0)$ og $C = (2x, -2x, 0)$, der $x \in [-3, 4]$.
a) Vis at vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0, 0, -2x^2 + 4x + 2]$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [x - 1 - (-1), -2 - 0, 0 - 0] = [x, -2, 0] \\ \overrightarrow{AC} &= [2x - (-1), -2x - 0, 0 - 0] = [2x + 1, -2x, 0] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ x & -2 & 0 \\ 2x+1 & -2x & 0 \end{vmatrix} \\
&= [0, 0, -2x^2 - (-2) \cdot (2x+1)] \\
&= [0, 0, -2x^2 + 4x + 2]
\end{aligned}
$$

b) Bestem x slik at arealet av trekanten ABC blir størst mulig. Hvor stort er arealet da?

Arealet til trekanten, $|A(x)|$, er gitt ved

$$
\begin{aligned}
|A(x)| &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + (-2x^2 + 4x + 2)^2} \\
&= \frac{1}{2}|-2x^2 + 4x + 2| \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Vi ser etter topp- eller bunnpunkter for $A(x)$ ved å sette $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = -2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$|A(1)| = \frac{1}{2}|-2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2| = 2$$

Vi må også sjekke endepunktene $x = -3$ og $x = 4$

$$
\begin{aligned}
|A(-3)| &= \frac{1}{2}|-2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 2| = 14 \\
|A(4)| &= \frac{1}{2}|-2 \cdot (4)^2 + 4 \cdot (4) + 2| = 7
\end{aligned}
$$

Arealet er altså størst for $x = -3$. Arealet er da 14.

Oppgave 5

To funksjoner er gitt ved $f(x) = \frac{4}{x} - 1$ og $g(x) = -x + 4$.
a) Finn alle skjæringspunktene til f og g.

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{x} - 1 &= -x + 4 \\
4 - x &= -x^2 + 4x \\
-x^2 + 5x - 4 &= 0 \\
x = 1 &\quad \vee \quad x = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(1) &= -1+4=3 \\
g(4) &= -4+4=0
\end{aligned}
$$

Skjæringspunkter i $(1,3)$ *og* $(4,0)$.

b) Bestem arealet av området eller områdene som er avgrenset av grafen til f og g.
Her kan det være lurt å tegne grafene til funksjonene for å se integrasjonsområdet. Vi ser da at grafen til g ligger over grafen til f *i det aktuelle området.*

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^4 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 (-x+4-\frac{4}{x}+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^4 (-x-\frac{4}{x}+5)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2-4\ln x+5x\right]_1^4 \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 16-4\ln(4)+20+\frac{1}{2}+4\ln(1)-5 \\
&= \frac{15}{2}-4\ln(4)
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

Grethe har laget seg et treningsprogram for 2013 (365 dager). Hver dag skal hun sykle en tur. Den første dagen i året turen skal hun sykle 5 kilometer. Deretter skal hun øke lengden på turen med 50 meter hver dag.

a) Hvor lang tur skal Grethe sykle den siste dagen i året?

Her har vi å gjære med en aritmetisk følge med $a_1=5$ *og* $d=0,05$ *(enhet km). Vi ønsker å finne* a_{365}.

$$
\begin{aligned}
a_{365} &= a_1+(n-1)d \\
&= 5+364\cdot 0,05 \\
&= 23,2
\end{aligned} \tag{2}
$$

Den siste dagen i året skal hun altså sykle 23,2 km.

b) Hvor mange kilometer skal hun sykle til sammen i løpet av hele 2013?
Her har vi en tilsvarende aritmetisk rekke.

$$\begin{aligned} s_{365} &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{365 \cdot (5 + 23,2)}{2} \\ &= 5146,5 \end{aligned}$$

Grethe skal altså totalt sykle 5146,5 km i løpet av året.

Oppgave 7

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \cos^2(2x) - \frac{3}{4}, \quad x \in [0, \pi\rangle$$

a) Finn eventuelle nullpunkter til funksjonen. Svarene skal gis eksakt.

$$\begin{aligned} \cos^2(2x) &= \frac{3}{4} \\ \cos(2x) &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \\ \cos(2x) &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vi ser først på tilfellet $\cos(2x) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$*. Tabellen over kjente verdier av* cos*-funksjonen gir løsning for*

$$2x = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

Bruk av enhetssirkelen (eller at $\cos(-u) = \cos(u)$*) forteller oss vi også har en løsning for*

$$2x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi \quad \Rightarrow x = \frac{11}{12}\pi$$

For $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *får vi (bruk enhetssirkelen!):*

$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \quad \Rightarrow x = \frac{5}{12}\pi$$

og

$$2x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \quad \Rightarrow x = \frac{7}{12}\pi$$

Dette er alle løsningene i intervallet $0 < x < \pi$.

b) Vis at den deriverte til funksjonen er gitt ved

$$f'(x) = -2\sin(4x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(2x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 \\ &= -4\cos(2x)\sin(2x) \\ &= -2\sin(4x) \end{aligned}$$

c) Finn eventuelle topppunkter og bunnpunkter til f. Svarene skal gis eksakt.

$$\begin{aligned} -2\sin(4x) &= 0 \\ \sin(4x) &= 0 \end{aligned}$$

Løsninger er gitt ved

$$\begin{aligned} 4x = 0 &\quad\Rightarrow\quad x = 0 \\ 4x = \pi &\quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{4}\pi \\ 4x = 2\pi &\quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{2}\pi \\ 4x = 3\pi &\quad\Rightarrow\quad x = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Tegning av fortegnsskjema eller bruk av den andrederiverte gir toppunkter ved $x = 0$ og $x = \frac{1}{2}\pi$ og bunnpunkter ved $x = \frac{1}{4}\pi$ og $\frac{3}{4}\pi$.

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos^2(0) - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ f\left(\frac{1}{4}\pi\right) &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \frac{3}{4} = 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \\ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) &= \cos^2\left(\frac{2}{2}\pi\right) - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ f\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \end{aligned} \tag{3}$$

Vi har toppunkter $(0, \frac{1}{4})$ *og* $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4})$ *og bunnpunkter* $(\frac{1}{4}\pi, -\frac{3}{4})$ *og* $(\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4})$.