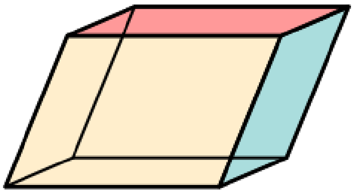
14 Vektorer i rommet

Her har skal vi jobbe mer med vektorer, men nå i rommet.

14. 1 Vektorer i rommet

Enhver vektor i rommet kan skrives på formen $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, dersom de tre vektorene er lineært uavhengige. Det vil si at en vektor ikke kan skrives som en lineær kombinasjon av de to andre.

Nytt ord Parallellepiped: (Alle sidene er parallellogrammer.)



14.2 Vektorkoordinater

Regneregler: regnereglene for vektorer i rommet et helt like som i planet, bortsett fra at vi må utvide med en *z*-koordinat:

Skrive måte for 3D vektorer: $\vec{v} = [x, y, z] = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$

To vektorer er like $\vec{v} = \vec{u}$ dersom koordinatene er parvis like.

Eksempel:

Vi kjenner punktene $A(2,2,1)$, $B(4,4,5)$ og $C(5,3,4)$

Oppgave: Bestem koordinatene til et 4. punkt D i *xy*- planet slik at $CD \parallel AB$.

Løsning:

Punktet D er ukjent, men kan skrives på formen $D(x, y, 0)$, siden punktet ligger i xy – planet. Det kan være lurt å starte med å finne koordinatene til vektorene

$\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = [4-2, 4-2, 5-1] = [2, 2, 4]$

$\overrightarrow{CD} = [x-5, y-3, -4]$

Vi skal sørge for at vektorene blir parallelle:

$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ gir

$[x-5, y-3, -4] = t[2, 2, 4]$ lurt å holde *t*-en unna ukjente *x* og *y*

Sammenligner koordinatene:

$x-5 = 2t$ $y-3 = 2t$ $-4 = 4t$

Finner t ved å se på *z*- koordinatene $\Rightarrow t =$ -1

Bruker verdien til *t*, til å finne *x* og *y*

$x = 5 + 2t = 5 + 2\cdot(-1) = 3$

$y = 3 + 2t = 3 + 2\cdot(-1) = 1$ $\underline{\underline{D(3,1,0)}}$

14.3 Lengden av en vektor Absoluttverdi til en vektor i rommet

Lengde: $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Eksempel:

La

$$\vec{u} = [5, 2, 1] \qquad \vec{v} = [-3, 2, 3]$$

$a)\quad \vec{u} + \vec{v} = [5, 2, 1] + [-3, 2, 3] = [2, 4, 4]$

$b)\quad \vec{u} - \vec{v} = [5, 2, 1] - [-3, 2, 3] = [8, 0, -2]$

$c)\quad 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot [5, 2, 1] = [10, 4, 2]$

$d):\quad \left|\vec{u}\right| = \sqrt{25 + 4 + 1} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}$

Absoluttverdi = lengde til en vektor = Avstand mellom to punkter

Eksempel

Punktet *P* på *x*- aksen skal ha samme avstand til $Q(5, 4, 6)$ som til $R(-3, 2, 4)$, bestem koordinatene til punktet *P*.

Siden *P* ligger på *x*- aksen vil det ha koordinater *P* (*x*, 0,0).

$$\overrightarrow{PQ} = [5 - x, 4, 6] \qquad \overrightarrow{PR} = [-3 - x, 2, 4]$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PR}\right|$$

$$\sqrt{(5-x)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{(-3-x)^2 + 4 + 16}$$

$$25 - 10x + x^2 + 16 + 36 = 9 + 6x + x^2 + 20$$

$$-16x = -48$$

$$x = 3 \qquad \underline{\underline{P(3, 0, 0)}}$$

14.4 Skalarproduktet

Skalarprodukt (også her tilsvarende som i planet)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha \qquad \alpha \in [0°, 180°]$$

Koordinatform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Eksempel Velg en verdi for *t* slik at vektorene står normalt på hverandre:

$\vec{x} \perp \vec{y}$ når $\vec{x} = [3, -5, t] \quad \vec{y} = [-4, -t, -2]$

Dvs $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

$$-12 + 5t - 2t = 0$$

$$3t = 12$$

$$t = 4 \qquad \underline{\underline{\vec{x} \perp \vec{y} \text{ når } t = 4}}$$

Ved hjelp av skalarprodukt kan vi enkelt regne ut vinkler, helt tilsvarende som vi gjorde i planet.

14.5 Vektorproduktet   kryssprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

Definisjon:

1) $\vec{a} \times \vec{b}$ er en vektor som alltid står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
2) (I rekkefølgen) $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a} \times \vec{b}$ danner et høyrehåndssystem.
3) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin \alpha$ der α er vinkel mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$

1) Hvis $\vec{a} = \vec{0}$ eller $\vec{b} = \vec{0}$
2) Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle $(\alpha = 0°$ eller $\alpha = 180°)$

Utregning   Eksempel:

$\vec{a} = [2, -3, 1]$ $\vec{b} = [-1, 2, 5]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

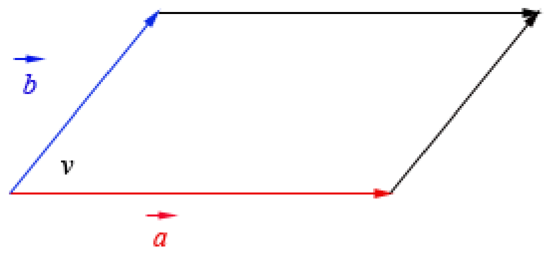
$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{e_1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

$$= (-15 - 2)\vec{e_1} - (10 + 1)\vec{e_2} + (4 - 3)\vec{e_3}$$

$$= \underline{\underline{[-17, -11, 1]}}$$

Geometrisk tolkning: **Parallellogram:** utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Merk **vektorer i rommet, men arealet er jo alltid en flate..**



Finner høyden: $h = \left|\vec{b}\right| \sin v$

Areal: $A = g \cdot h = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin v = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Vi kan tolke kryssproduktet som arealet av et parallellogram

Trekant $A = \dfrac{g \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Eksempel
En trekant har hjørner:

$$A(1,-2,0) \qquad B(3,1,-2) \qquad C(-2,-2,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = [2,3,-2]$$

$$\overrightarrow{AC} = [-3,0,2]$$

$$a)\ Areal = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(6-0)\vec{e_1} - (4-6)\vec{e_2} + (0+9)\vec{e_3}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left\|[6,2,9]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{36+4+81} = \frac{1}{2}\sqrt{121} = \underline{\underline{\frac{11}{2}}}$$

b) Bestem vinkel A.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha \qquad \alpha \in [0°, 180°]$$

og $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Finner først:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+9+4} = \underline{\sqrt{17}}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+0+4} = \underline{\sqrt{13}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6+0-4 = \underline{-10}$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{13}}$$

$$\underline{\underline{\angle A = 132,27°}}$$

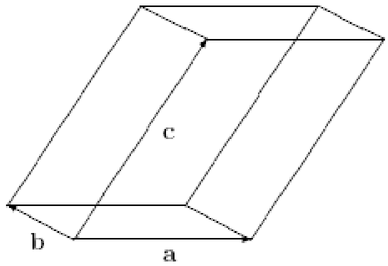
Bruk gjerne arealsetning for trekanter som en kontroll på arealet.

14.6 Trevektorproduktet

Trevektorproduktet - Skalart vektorprodukt

$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

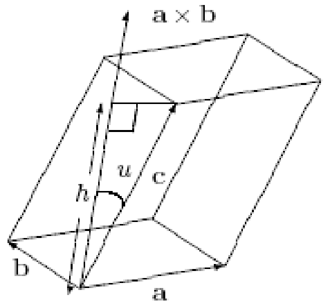
(Et parallellepiped er en lukket tredimensjonal geometrisk figur bestående av seks flate sider, hvor to og to sider er parvis parallelle)



Parallellepiped er utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$

$$Volum = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot høyde$$

Høyden står normalt på grunnflaten, dvs. parallelt med vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$, kaller vi vinkelen mellom høyden og $\vec{c}$ for u. kan vi sette $h = |\vec{c}| \cos u$



Vi får da at volumet kan uttrykkes:

$$V = G \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos u = |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

Eksempel:

Et parallellepiped er utspent av $\vec{u} = [1, 2, -3]$ $\vec{v} = [-2, 0, 3]$ $\vec{w} = [1, -2, 1]$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6-0)\vec{e_1} - (3-6)\vec{e_2} + (0-(-4))\vec{e_3} = [6, 3, 4]$$

$$V = |[6, 3, 4] \cdot [1, -2, 1]| = |6 - 6 + 4| = |4| = \underline{\underline{4}}$$

<u>Alternativ, kjappere utregning:</u>

$\vec{u} = [1, 2, -3]$ $\vec{v} = [-2, 0, 3]$ $\vec{w} = [1, -2, 1]$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} = |1 \cdot (0+6) - 2 \cdot (-2-3) + (-3) \cdot (4-0)|$$

$$= |6 + 10 - 12| = \underline{\underline{4}}$$

Volum 4-kant pyramide $V = \frac{1}{3}|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$	**Volum 3-kant pyramide** $V = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$

Eksempel:

En trekant pyramide er bestemt av punktene

$A(-1,0,1) \qquad B(2,1,0) \qquad C(3,3,2) \qquad T(2,2,5)$

$\overrightarrow{AB} = [3,1,-1]$

$\overrightarrow{AC} = [4,3,1]$

$\overrightarrow{AT} = [3,2,4]$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

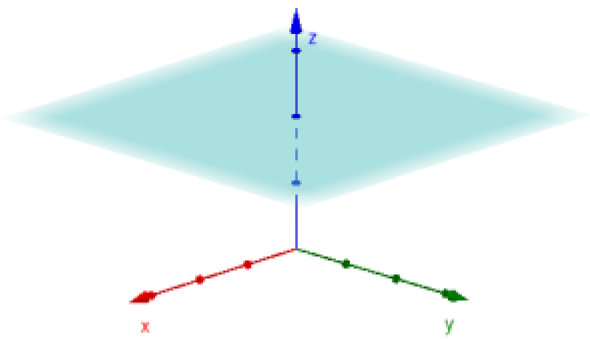
Regner ut determinanten først:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(12-2) - 1\cdot(16-3) + \cdot(-1)(8-9)$$

$$= 30 - 13 + 1 = 18$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AT}\right| = \frac{18}{6} = \underline{\underline{3}}$$

14.7 Likning for et plan



Et plan i rommet er en flate som ikke krummer. Når vi tegner en flate må vi tegne med klare avgrensinger for å gi inntrykk av hvordan planet er.

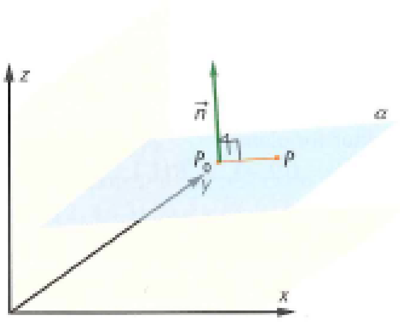
Plan gir vi ofte navn ved små greske bokstaver: α, β

Et plan er entydig bestemt dersom vi kjenner tre punkter som ikke ligger på en rett linje.

Et plan er også bestemt dersom vi kjenner et punkt i planet og en normal-vektor $\vec{n}$ som står vinkelrett på planet.

Begrunnelse:

En normalvektor $\vec{n}$ står normalt på alle linjer i planet.



La $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være et gitt punktet i planet og la $\vec{n} = [a,b,c]$. Da kan vi si at et punkt $P(x,y,z)$ ligger i planet dersom $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

Det gir at P ligger i planet hvis og bare hvis

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0$$

$$[a,b,c]\cdot[x-x_0, y-y_0, z-z_0] = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Likning til et plan med normalvektor $\vec{n} = [a,b,c]$ og et gitt punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Likningen kan omformes til $ax + by + cz + d = 0$

Dersom minst ett av tallen a, b eller c er ulik 0 vil $\vec{n} = [a,b,c]$ være normalvektor til planet.

Eksempler:

a) Likningen $2x - 3y - 4z = 0$, er et plan som går gjennom origo og har en normal-vektor, $\vec{n} = [2,-3,-4]$.

b) Et plan som går gjennom punktet $(2,0,1)$ og som står normalt på linjen som passerer gjennom punktene $(1,1,0)$ *og* $(4,-1,-2)$ har en normal-vektor:
$\vec{n} = [4-1,-1-1,-2-0] = [3,-2,-2]$.

Derfor blir likningen til planet:

$$3(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1) = 0 \qquad \text{eller enklere}$$
$$3x - 6 - 2y - 2z + 2 = 0$$
$$\underline{3x - 2y - 2z = 4}$$

c) Et plan er gitt ved likningen $2x - y = 1$ har normal $\vec{n} = [2,-1,0]$ som står normalt på *z*- aksen. Planet er derfor parallelt med *z*- aksen.
I *xy*– planet er $2x - y = 1$ $(y = 2x - 1)$ en rett linje, i rommet representerer likningen et plan som inneholder linjen og som er parallelt med *z*- aksen.

Kjenner vi to vektorer i planet kan vi bruke kryssprodukt for å bestemme en normalvektor til planet.

Eksempel

Bestem likningen til planet som går gjennom punktene
$P(1,1,0)$, $Q(0,2,1)$ *og* $R(3,2,-1)$.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad , \ \vec{n} = [a,b,c] \ , \ P(x_0, y_0, z_0)$$

Vi trenger å bestemme en normal-vektor. En mulighet er f.eks.

$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ *der* $\overrightarrow{PQ} = [-1,1,1]$ $\quad \overrightarrow{PR} = [2,1,-1]$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1)\vec{i} - (1-2)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = [-2,1,-3]$$

Velger vi ett av punktene (f.eks. P) kan vi nå finne likningen til planet:

$$-2(x-1)+(y-1)-3(z-0)=0$$
$$-2x+2+y-1-3z=0$$
$$-2x+y-3z=-2+1$$
$$-2x+y-3z=-1 \,\Big|\cdot -1 \qquad \text{"kosmetikk" for ett penere uttrykk}$$
$$2x-y+3z=1$$

Merk

Dersom kryssproduktet blir lik 0-vektor betyr det at punktene ligger på en linje …

14.8 Rette linjer i rommet

En linje i rommet går gjennom punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ og har retningsvektor $\vec{r}=[a,b,c]$

Et punkt $P(x,y,z)$ ligger på denne linjen hvis og bare hvis $\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{r}$

$$\overrightarrow{P_0P}=t\cdot\vec{r} \qquad \text{for et tall t}$$
$$[x-x_0, y-y_0, z-z_0]=t[a,b,c]$$

Slik at $[x-x_0, y-y_0, z-z_0]=[ta,tb,tc]$

$$x-x_0=ta \quad \wedge \quad y-y_0=tb \quad \wedge \quad z-z_0=tc$$
$$x=x_0+ta \quad \wedge \quad y=y_0+tb \quad \wedge \quad z=z_0+tc$$

Parameterfremstilling for en rett linje i rommet er gitt ved: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \quad -\infty<t<\infty$

Eksempel

En partikkel beveger seg med jevn fart langs linjen:

$\begin{cases} x=1+4t \\ y=3+4t \\ z=6-2t \end{cases}$ Her er koordinatene målt i meter og tiden i sekund.

a) Finn farten til partikkelen.

b) Når treffer partikkelen *xy*-planet? Hva er posisjonen da?

Løsning:

a) Finn farten til partikkelen. Fartsvektoren er
$\vec{v}=[4,4,-2]$

Farten $|\vec{v}|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=$

$\underline{\underline{\text{Farten er } 6\text{m/s}}}$

b) Når treffer partikkelen *xy*-planet?

Partikkelen treffer xy-planet når

$z=0$

Det vil si at $6-2t=0$

$-2t=-6$.

$t=\frac{-6}{-2}=\underline{3}$

Hva er posisjonen da?

Når $t=3$ er posisjonen

$$\begin{cases} x=1+4t\big|_{t=3}=1+12=13 \\ y=3+4t\big|_{t=3}=3+12=15 \\ z=6-2t\big|_{t=3}=0 \end{cases}$$

Partikkelen treffer xy-planet etter 3s i punktet $(13,15,0)$

14.9 Parameterfremstilling for et plan

Et plan α er entydig bestemt hvis vi kjenner et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ og i tillegg to vektorer $\vec{u}=[a_1,b_1,c_1]$ og $\vec{v}=[a_2,b_2,c_2]$ i planet, som ikke parallelle.

$$\begin{cases} x=x_0+a_1s+a_2t \\ y=y_0+b_1s+b_2t \\ z=z_0+c_1s+c_2t \end{cases} \qquad \begin{matrix} -\infty < s < \infty \\ -\infty < t < \infty \end{matrix}$$

Eksempel parameterfremstilling

Et plan α går gjennom punktene $A(1,1,1), B(-2,0,3)$ og $C(-1,2,4)$.

a) Finn en parameterfremstilling for α .
b) Undersøk om vektoren $[1,-3,-4]$ er parallell med planet α .

Løsning:

a) Vi kan velge $A(1,1,1)$ som punktet i planet og så bruke punktene til å finne to vektorer som ligger i planet.

$\overrightarrow{AB}=[-2-1,0-1,3-1]=[-3,-1,2]$

$\overrightarrow{AC}=[-2,1,3]$

Disse to ser vi ikke er parallelle, så de «utspenner» planet.

En parameterfremstilling av planet er derfor: $\alpha:\begin{cases} x=1-3s-2t \\ y=1-1s+t \\ z=1+2s+3t \end{cases}$

b) vektoren $[1,-3,-4]$ er parallell med planet α , dersom den kan skrives som en lineærkombinasjon av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

$s[-3,-1,2]+t[-2,1,3]=[1,-3,-4]$ som gir oss likningene:

$-3s-2t=1$

$-s+t=-3$

$2s+3t=-4$

Vi har tre likninger og to ukjente. Så vi kan løse ett likning sett med to av likningene og deretter sjekke at løsningen også passer i den tredje.

De to øverste likningene gir løsningen: $s=1,\ t=-2$, denne løsningen passer også i likning nr 3.

Vektoren er parallell med planet.

Eksempel på likning til et plan.

Et plan er gitt ved $\alpha:\begin{cases} x=1+2s+t \\ y=-3+s+t \\ z=s-3t \end{cases}$

a) Ligger punktet (8,1,0) i planet?

I så fall må

$8=1+2s+t$

$1=-3+s+t$

$0=s-3t$

Fra den siste likningen får vi $s=3t,$ setter dette inn i likning 1 får vi

$8=1+6t+t \quad \Rightarrow t=1 og \quad s=3$

Sjekker den 2. likningen om det stemmer her

$Vs=1$ og $Hs=-3+3+1=1$

Vi finner at samme verdier for *s* og *t* passer, så punktet ligger i planet.

b) Bestem normalvektor til planet.

Vi vet at vektorene $\vec{u}=[2,1,1] \quad og \quad \vec{v}=[1,1,-3]$ ligger i planet.

Vi kan derfor finne normalvektor til planet ved å krysse disse to vektorene.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=[-3-1,-(-6-1),2-1]=\underline{\underline{[-4,7,1]}}$$

c) Finn likningen til planet

Vi ser at punktet (1,-3,0) ligger i planet og bruker normalvektoren funnet i b)

Likningen blir derfor:

$-4(x-1)+7(y+3)+1(z-0)=0$

$-4x+4+7y+21+z=0$

$\underline{\underline{-4x+7y+z=-25}}$