Rep oppgaver rekker

Oppgave 1

a) Finn summen av de 20 første leddene av rekken 1 + 1,8 + 2,6 + 3,4…

b) Finn summen av de 20 første leddene av rekken 100 + 80 + 64 + 51,2…

c) Begrunn hvorfor den uendelige, geometriske rekken

$\frac{4}{3} - 1 + \frac{3}{4} - ....$, konvergerer og regn ut summen av rekken.

Oppgave 2

Summen av alle oddetallene under 200 er gitt ved 1 +3+5+…+199

a) Finn ved regning hvor mange oddetall det er i rekken.

b) Bestem ved regning summen av rekken.

c) Skriv brøken så enkelt som mulig: $\frac{1+3+5+7+...+199}{2+4+6+8+...+200}$

Oppgave 3

a) I en aritmetisk tallfølge er $s_{10} = 100 \; og \; s_{20} = 400$, finn første ledd a_1 og differansen *d*.

b). I en uendelig geometrisk rekke er $a_2 = \frac{1}{2} \; og \; a_5 = \frac{1}{16}$.

i. Regn ut første ledd a_1 og kvotienten *k*.

ii. Finn summen til rekken.

Oppgave 4

Ole har fått diagnosen allergi og må ta medisin hver dag fra nå av. Tabletten inneholder 0,6 mg aktivt stoff. Hver dag bryter kroppen ned 8 % av dette aktive stoffet.

a) Hvor stor mengde av det aktive stoffet har Ole i kroppen like etter at han har tatt den syvende tabletten?

b) Kroppen tåler i lengden høyst 10 mg av det aktive stoffet uten skadevirkninger. Vis / begrunn at en tablett om dagen er en forsvarlig dose.

Løsningsforslag:

Oppgave 1

a) Summen av de 20 første leddene av rekken 1 + 1,8 + 2,6 + 3,4…

Rekken er aritmetisk med:

$a_1 = 1 \quad d = 0{,}8$ slik at vi kan finne $a_{20} = a_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 0{,}8 = 16{,}2$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \underline{\underline{172}}$$

b) Finn summen av de 20 første leddene av rekken 100 + 80 + 64 + 51,2…

Rekken er geometrisk med: $a_1 = 100 \qquad k = 0{,}8$

Vi kan derfor finne summen slik: $S_{20} = \frac{a_1\left(k^{20} - 1\right)}{k - 1} = \frac{100\left(0{,}8^{20} - 1\right)}{0{,}8 - 1} \approx \underline{\underline{494{,}2}}$

c) Den uendelige, geometriske rekken $\frac{4}{3} - 1 + \frac{3}{4} - \dots$, konvergerer fordi

$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4}$ slik at $|k| < 1$.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 12}{\left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot 12} = \frac{16}{12 + 9} = \frac{16}{\underline{\underline{21}}}$$

Oppgave 2

Summen av alle oddetallene under 200 er gitt ved 1 +3+5+…+199

a) Antall oddetall i rekken (som er aritmetisk med d = 2)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$1 + (n-1) \cdot 2 = 199$$
$$1 + 2n - 2 = 199$$
$$2n = 199 - 1 + 2 = 200$$
$$\underline{\underline{n = 100}}$$

b) Summen av rekken.

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$
$$s_{100} = \frac{1 + 199}{2} \cdot 100 = 100 \cdot 100 = \underline{\underline{10\,000}}$$

c) Skriv brøken så enkelt som mulig: $\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199}{2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200}$

Bruker svar fra b) til teller, men må se på sum av tallene i nevner

$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200 \qquad n = 100\,,\ d = 2$

$$s_{100} = \frac{2 + 200}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 100 = 10100$$

Samlet gir dette: $\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199}{2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 200} = \frac{10\,000}{10100} = \frac{100}{\underline{\underline{101}}}$

Oppgave 3

a) I en aritmetisk tallfølge er $s_{10} = 100$ *og* $s_{20} = 400$, finn første ledd a_1 og differansen d.

$$s_{10} = 100 = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 9d) \cdot 5 = 10a_1 + 45d$$

$$s_{20} = 400 = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{a_1 + a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2a_1 + 19d) \cdot 10 = 20a_1 + 190d$$

Gir likningene:

$100 = 10a_1 + 45d$ som kan reduseres til

$400 = 20a_1 + 190d$

$20 = 2a_1 + 9d$

$40 = 2a_1 + 19d$

som gir at $2a_1 = 20 - 9d$ setter dette inn i likning 2

$40 = 20 - 9d + 19d$

$20 = 10d$

$\underline{d = 2}$ som hjelper oss å bestemme a_1

$2a_1 = 20 - 9d = 20 - 18 = 2$

$\underline{\underline{a_1 = 1}}$

b). I en uendelig geometrisk rekke er $a_2 = \frac{1}{2}$ *og* $a_5 = \frac{1}{16}$.

i. Finner a_1 og kvotienten k.

$$a_2 = \frac{1}{2} = a_1 k$$

$$a_5 = \frac{1}{16} = a_1 k^4$$

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 k^4}{a_1 k} = k^3 = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$k^3 = \frac{1}{8}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}$$

$$a_2 = a_1 k \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{a_2}{k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

ii. $$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

Oppgave 4

Tabletten inneholder 0,6 mg aktivt stoff. Hver dag bryter kroppen ned 8 % av dette aktive stoffet.

a) Hvor stor mengde av det aktive stoffet har Ole i kroppen like etter at han har tatt den syvende tabletten?

fra 7. tablett	0,6 mg
Fra 6. tablett	$0,6 \cdot 0,92\,\text{mg}$
Fra 5. tablett	$0,6 \cdot 0,92^2\,\text{mg}$
Fra 4 tablett	$0,6 \cdot 0,92^3\,\text{mg}$
Fra 3. tablett	$0,6 \cdot 0,92^4\,\text{mg}$
Fra 2 tablett	$0,6 \cdot 0,92^5\,\text{mg}$
Fra 1. tablett	$0,6 \cdot 0,92^6\,\text{mg}$
Sum aktivt stoff i kroppen etter 7. tablett	$0,6 + 0,6 \cdot 0,92 + 0,6 \cdot 0,92^2 + \ldots 0,6 \cdot 0,92^6$ $= 0,6\left(1 + 0,92 + 0,92^2 + \ldots 0,92^6\right)$ $= 0,6\,\dfrac{1\left(0,92^7 - 1\right)}{0,92 - 1} = \underline{\underline{3,32\,\text{mg}}}$

b)

Tas dosen over lengre tid blir dette en uendelig geometrisk rekke, mengden aktivt stoff er størst like etter at siste tablett er tatt:

$$0,6 + 0,6 \cdot 0,92 + 0,6 \cdot 0,92^2 + \ldots$$

$$= \frac{0,6}{1 - 0,92} = \frac{0,6}{0,08} = 7,5\,\text{mg}$$

Mengde aktivt stoff vil være under grensen på 10 mg, så vi ser at dosen er forsvarlig.