Oppgave 1

Deriver funksjonene

(a) $f(x) = x^2 - 2x + e^\pi$

(b) $g(x) = x^2 \ln 7x$

(c) $h(x) = \sqrt{e^{3x} \sin x}$

Løsning.

(a) Denne deriverer vi rett frem, det eneste vi trenger å huske er at e^π er en konstant, og derfor deriveres bort. Vi får

$$f'(x) = 2x - 2 + 0 = 2x - 2. \tag{L1}$$

(b) Her må vi bruke produktregelen, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Vi får

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2)' \cdot \ln 7x + x^2 \cdot (\ln 7x)' && \text{(L2)} \\ &= 2x \ln 7x + x^2 \cdot \frac{1}{7x} \cdot 7 && \text{(L3)} \\ &= 2x \ln 7x + \frac{7x^2}{7x} && \text{(L4)} \\ &= 2x \ln 7x + x. && \text{(L5)} \end{aligned}$$

(c) Her må vi både bruke kjerneregelen og produktregelen. Minner om at $(\sqrt{x})' = {}^1/(2\sqrt{x})$. Vi får

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e^{3x} \sin x}} \cdot (e^{3x} \sin x)' && \text{(L6)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^{3x} \sin x}} \cdot \big((e^{3x})' \sin x + e^{3x} (\sin x)'\big) && \text{(L7)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e^{3x} \sin x}} \cdot (3e^{3x} \sin x + e^{3x} \cos x) && \text{(L8)} \\ &= \frac{e^{3x}(3 \sin x + \cos x)}{2\sqrt{e^{3x} \sin x}} && \text{(L9)} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Regn ut integralene

(a) $\int_0^2 3x^2 - 5x + \pi \, \mathrm{d}x$

(b) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} \, \mathrm{d}x$

Løsning.

(a) Denne integreres rett frem. Siden dette er et bestemt integral må vi huske å sette inn grensene. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^2 3x^2 - 5x + \pi\,\mathrm{d}x &= \left[x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \pi x\right]_0^2 \\ &= (2^3 - \frac{5}{2}\cdot 2^2 + 2\pi) - (0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 0\pi) \\ &= 8 - 10 + 2\pi = 2\pi - 2.\end{aligned}$$

(b) Her må vi bruke variabelskifte. Vi setter $u = \sin x$, og får da

$$\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x. \tag{L10}$$

Vi får derfor

$$\int \cos x \cdot e^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x}\cdot(\cos x\,\mathrm{d}x) \tag{L11}$$

$$= \int e^u\,\mathrm{d}u \tag{L12}$$

$$= e^u + C \tag{L13}$$

$$= e^{\sin x} + C. \tag{L14}$$

Oppgave 3

Løs likningene og ulikhetene

(a) $x^2 + 6x - 7 < 0$

(b) $\sqrt{8-8x} + 1 - x = 0$

(c) $\sin^2 x + 6\sin x - 7 = 0$

Løsning.

(a) For å vite når ulikheten er mindre enn null, finner vi først ut når den er lik null. Vi vil derfor løse

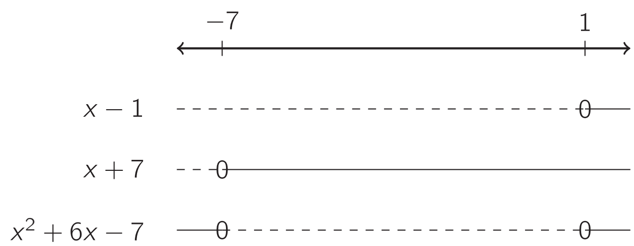
$$x^2 + 6x - 7 = 0. \tag{L15}$$

Denne kan vi løse på kalkulator, ved hjelp av andregradsformelen, eller ved å tenke oss frem til to tall som ganges sammen til -7 og plusses sammen til -6. Uavhengig av hvordan vi finner ut av det, finner vi ut at løsningen er $x = 1$ og $x = -7$. Dette betyr at vi kan faktorisere

$$x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7). \tag{L16}$$

Vi vet at denne er null når $x = -7$ og $x = 1$. Vi kan nå si at siden andregradslikningen har positiv koeffisient foran x^2 vil den først synke, så stige. Den må derfor gå fra positiv, så negativ, så positiv, og den vil derfor være negativ når x er mellom -7 og 1.

Vi kan også se dette ved å tegne en fortegnslinje:



Vi ser av fortegnslinjen at $x^2 + 6x - 7 < 0$ når $-7 < x < 1$.

(b) For å løse denne likningen vil vi først bli kvitt kvadratroten. Det gjør vi ved å flytte alt som ikke er en del av roten over på andre siden, og så opphøye i to.

$$\sqrt{8-8x} + 1 - x = 0 \tag{L17}$$
$$\sqrt{8-8x} = x - 1 \tag{L18}$$
$$(\sqrt{8-8x})^2 = (x-1)^2 \tag{L19}$$
$$8 - 8x = x^2 - 2x + 1. \tag{L20}$$

Vi flytter så alt over på høyresiden av likhetstegnet, og får

$$0 = x^2 - 2x + 8x + 1 - 8 = x^2 + 6x - 7. \tag{L21}$$

Denne andregradslikningen løste vi i forrige oppgave, og fikk da $x = 1$ og $x = -7$. Dette er våre to forslag til løsninger, men vi må nå huske at når vi opphøyet begge sidene i to så kan vi ha laget falske løsninger. Vi må derfor sette prøve på begge disse. Vi setter inn $x = 1$ i den originale likningen og får

$$\sqrt{8-8x} + 1 - x = \sqrt{8 - 8 \cdot 1} + 1 - 1 \tag{L22}$$
$$= \sqrt{0} + 0 \tag{L23}$$
$$= 0. \tag{L24}$$

Denne løsningen stemmer derfor. Om vi setter inn $x = -7$ i den originale likningen får vi

$$\sqrt{8-8x} + 1 - x = \sqrt{8 - 8 \cdot (-7)} + 1 - (-7) \tag{L25}$$
$$= \sqrt{64} + 8 \tag{L26}$$
$$= 16 \neq 0. \tag{L27}$$

Løsningen $x = -7$ er derfor ikke en løsning av den originale likningen, og vi sitter kun igjen med $x = 1$.

(c) For å løse denne likningen ser vi at om vi setter $u = \sin^2 x$ så får vi en andregradslikning i u. Vi må løse

$$\sin^2 x + 6 \sin x - 7 = u^2 + 6u - 7 = 0. \tag{L28}$$

Denne andregradslikningen har vi allerede løst, og vi vet at svaret er $u = 1$ og $u = -7$. Men oppgaven er ikke over, da vi må finne x. Vi må derfor løse

$$\sin x = 1 \tag{L29}$$
$$\sin x = -7. \tag{L30}$$

Den nederste av disse har ingen løsning, da $\sin x$ alltid er mellom -1 og 1. Den øverste har kun én løsning i første omløp, som er $x = \pi/2$, eller $x = 90°$. Alle løsninger får vi ved å legge til et valgfritt antall omdreininger, så vi får

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \tag{L31}$$

hvor k er et vilkårlig heltall.

Oppgave 4

Regn ut grensene

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 9x - 36}{x - 3}$ (b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln x - \sin x}{\cos x}$

Løsning.

(a) Det første vi burde sjekke når vi skal regne grenser er om vi bare får lov til å sette inn x-verdien. Her ser vi at vi ikke kan sette inn $x = 3$, da vi i så fall deler på 0, som ikke er lov. Vi må derfor prøve skrive om uttrykket slik at vi får lov til å sette inn $x = 3$. Vi faktoriserer telleren.

For å faktorisere $x^2 + 9x - 36$ må vi finne nullpunktene til polynomet. Vi kan finne disse på kalkulator, ved hjelp av andregradsformelen, eller ved å prøve å finne to tall som ganges sammen til -36 og plusses sammen til -9. Uansett metode vi bruker finner vi ut at nullpunktene er $x = -12$ og $x = 3$. Vi kan derfor faktorisere polynomet som

$$x^2 + 9x - 36 = (x + 12)(x - 3). \tag{L32}$$

Vi kan nå regne grensen som følger

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 9x - 36}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x + 12)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} \tag{L33}$$
$$= \lim_{x\to 3} x + 12 \tag{L34}$$
$$= 3 + 12 = 15. \tag{L35}$$

(b) Det første vi burde sjekke når vi skal regne grenser er om vi bare får lov til å sette inn x-verdien. Her ser vi at det ikke er noe galt i å bare sette inn $x = \pi$, så vi får riktig svar ved å bare sette inn (teknisk sett: siden alle funksjonene involvert er kontinuerlige). Vi får

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\ln x - \sin x}{\cos x} = \frac{\ln \pi - \sin \pi}{\cos \pi} \tag{L36}$$

$$= \frac{\ln \pi - 0}{-1} \tag{L37}$$

$$= -\ln \pi. \tag{L38}$$

Oppgave 5

En trekant har sidelengder $a = 12$, $b = 7$, og $c = 9$. Vi kaller hjørnet på motsatt side av a for A, motsatt side av b for B, og motsatt side av c for C.

(a) Finn vinklene i hjørnene A, B, og C.

(b) Finn arealet av trekanten.

Løsning.

(a) Siden vi har tre sider i trekanten, kan vi finne en av vinklene ved hjelp av cosinus-setningen. Jeg velger å finne $\angle A$ først. Cosinus-setningen gir oss da

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2BC \cos\angle A. \tag{L39}$$

Løser vi denne for $\cos\angle A$ og setter inn verdiene vi har, får vi

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{L40}$$

$$= \frac{7^2 + 9^2 - 12^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \tag{L41}$$

$$= -\frac{1}{9}. \tag{L42}$$

Vi bruker omvendt cosinus på $-{}^1\!/_9$ og får da at

$$a = 1{,}6821 = 96{,}38^\circ. \tag{L43}$$

Nå som vi har en vinkel, kunne vi brukt sinus-setningen til å finne en av de andre vinklene, men om vi gjør dette vil vi ende opp med to mulige svar. Vi må da gjøre noe ekstra-arbeid for å finne ut hvilken av disse to mulige svarene som er riktige, så det letteste er nok å bare bruke cosinus-setningen på nytt, på en annen vinkel. Vi finner for eksempel b. Cosinus-setningen gir oss da

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos b. \tag{L44}$$

Løser vi denne for $\cos b$ og setter inn verdiene vi har, får vi

$$\begin{aligned}
\cos b &= \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC} && \text{(L45)} \\
&= \frac{12^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 12 \cdot 9} && \text{(L46)} \\
&= \frac{22}{27}. && \text{(L47)}
\end{aligned}$$

Vi bruker omvendt cosinus på $^{22}/_{27}$ og får da at

$$b = 0{,}6184 = 35{,}43°. \qquad \text{(L48)}$$

Nå som vi har *to* vinkler, kan vi finne den siste ved å huske at summen av vinklene i en trekant skal bli π, eller 180°. Vi får derfor at

$$\begin{aligned}
c &= \pi - a - b && \text{(L49)} \\
&= \pi - 1{,}6821 - 0{,}6184 && \text{(L50)} \\
&= 0{,}8411 = 48{,}19°. && \text{(L51)}
\end{aligned}$$

Merk at om vi starter med å finne vinkelen tilhørende den lengste siden (som er det vi har gjort her), vet vi at dette skal gi den største vinkelen. Om vi da bruker sinussetningen til å finne en av de andre to vinklene så *vet* vi at denne vinkelen må være mindre enn 90°, og vet derfor hvilken av de to vinklene vi får fra sinus-setningen som må være den riktige.

(b) For å finne arealet av trekanten kan vi bruke arealsetningen. Jeg velger å bruke vinkel c, men man kan bruke en hvilken som helst vinkel, så lenge man bruker de tilhørende sidene i formelen. Vi får for eksempel

$$\begin{aligned}
\text{Areal} &= \frac{1}{2} ab \sin C && \text{(L52)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 \cdot \sin 0{,}8411 && \text{(L53)} \\
&= 31{,}3. && \text{(L54)}
\end{aligned}$$

Oppgave 6

En differensiallikning er gitt ved

$$y' + y \sin x = 0. \qquad (1)$$

(a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.

(b) Finn løsningen som er slik at $y(0) = e^2$.

Løsning.

(a) For å løse denne differensiallikningen vil vi skrive den om som

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{L55}$$

Vi gjør dette:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\sin x = 0 \tag{L56}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\sin x \tag{L57}$$
$$\mathrm{d}y = -y\sin x\,\mathrm{d}x \tag{L58}$$
$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x. \tag{L59}$$

Vi integrerer så begge sider og får

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -\sin x\,\mathrm{d}x \tag{L60}$$
$$\ln|y| = \cos x + C. \tag{L61}$$

Vi løser denne for y,

$$|y| = e^{\cos x + C} \tag{L62}$$
$$= e^C e^{\cos x} \tag{L63}$$
$$y = \pm e^C e^{\cos x} \tag{L64}$$
$$= De^{\cos x} \tag{L65}$$

hvor D nå er en valgfri konstant. Den generelle løsningen er derfor

$$y(x) = De^{\cos x}. \tag{L66}$$

(b) Vi setter inn $x = 0$ i likningen og får

$$y(0) = De^{\cos 0} \tag{L67}$$
$$= De^1 \tag{L68}$$
$$e^2 = De^1 \tag{L69}$$
$$e = D. \tag{L70}$$

Vi får derfor at $D = e$, og løsningen vi ser etter blir

$$y(x) = e \cdot e^{\cos x} = e^{\cos x + 1}. \tag{L71}$$

Oppgave 7

Vi har gitt tre punkter

$$A = (1, 2, 1), \tag{2}$$
$$B = (2, 1, 3), \text{ og} \tag{3}$$
$$C = (-1, 4, 2). \tag{4}$$

Et fjerde punkt D ligger slik at $\square ABCD$ er et parallellogram.

(a) Finn koordinatene til D.

(b) Finn vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og bestem arealet til $\square ABCD$.

(c) Finn en likning for planet som A, B, C, og D ligger i.

Løsning.

(a) For at $\square ABCD$ skal være et parallellogram så må vi ha $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Vi finner da punktet D ved å skrive

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \tag{L72}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}. \tag{L73}$$

Vi har

$$\overrightarrow{OA} = [1, 2, 1] \tag{L74}$$

$$\overrightarrow{BC} = [-1, 4, 2] - [2, 1, 3] \tag{L75}$$

$$= [-3, 3, -1] \tag{L76}$$

og derfor

$$\overrightarrow{OD} = [1, 2, 1] + [-3, 3, -1] \tag{L77}$$

$$= [-2, 5, 0]. \tag{L78}$$

Punktet D har derfor koordinatene $D = (-2, 5, 0)$.

Det finnes to andre «valg» av punktet D, nemlig at vi i stedet kunne sagt at vi måtte hatt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, eller at vi måtte hatt $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Om vi gjør en av disse valgene vil vi da i stedet få $D = (4, -1, 2)$ eller $D = (0, 3, 4)$. Valget av D jeg har gjort i den første utregningen er «mest riktig», da det er det eneste valget som er slik at om vi «går rundt» firkanten møter vi hjørnene i rekkefølgen

$$A \to B \to C \to D \tag{L79}$$

men jeg vil gi full pott for alle tre svarene.

(b) Vi regner først ut vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og får

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \tag{L80}$$

$$= [2, 1, 3] - [1, 2, 1] \tag{L81}$$

$$= [2-1, 1-2, 3-1] \tag{L82}$$

$$= [1, -1, 2], \tag{L83}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \tag{L84}$$

$$= [-1, 4, 2] - [1, 2, 1] \tag{L85}$$

$$= [-1-1, 4-2, 2-1] \tag{L86}$$

$$= [-2, 2, 1]. \tag{L87}$$

Vi regner nå ut kryssproduktet på vår yndlingsmåte, jeg liker å se på det som en determinant:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - \vec{e}_y(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) + \vec{e}_z(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2)) \tag{L88}$$

$$= -5\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 0\vec{e}_z \tag{L89}$$

$$= [-5, -5, 0]. \tag{L90}$$

Parallellogrammet $\square ABCD$ er parallellogrammet utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, så arealet er gitt ved lengden av $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Vi får derfor at arealet blir

$$\text{Areal} = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| \tag{L91}$$

$$= \|[-5, -5, 0]\| \tag{L92}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2} \tag{L93}$$

$$= \sqrt{50} \tag{L94}$$

$$= 5\sqrt{2}. \tag{L95}$$

(c) Formelen for et plan gjennom et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ med normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{L96}$$

Siden vårt plan skal gjennom A, B, og C, kan vi bruke $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ som normalvektor, og kan for eksempel bruke $P = A$. Vi får da

$$-5(x - 1) - 5(y - 2) + 0(z - 1) = 0 \tag{L97}$$

$$-5x + 5 - 5y + 10 + 0 = 0 \tag{L98}$$

$$15 = 5x + 5y \tag{L99}$$

$$3 = x + y. \tag{L100}$$

En likning for planet gjennom A, B, og C er derfor

$$x + y = 3. \tag{L101}$$

Siden D ligger i samme plan, er dette da også en likning for planet gjennom alle fire.

Oppgave 8

I denne oppgaven skal vi bruke trigonometriske identiteter til å løse et ellers vanskelig integral.

(a) Vis at

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{5}$$

(b) Bruk dette til å løse integralet

$$\int 2\sin^2 x \, \mathrm{d}x. \tag{6}$$

Løsning.

(a) Vi ser at på høyresiden av likningen står det $\cos(2x)$, og vi har fra dobbelvinkelformelen at

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{L102}$$

Vi får derfor at

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{2}. \tag{L103}$$

Nå vil vi bruke formelen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{L104}$$

til å se at

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x. \tag{L105}$$

Det gir oss da at

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(2x)}{2} &= \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{2} && \text{(L106)}\\
&= \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2} && \text{(L107)}\\
&= \frac{2\sin^2 x}{2} && \text{(L108)}\\
&= \sin^2 x. && \text{(L109)}
\end{aligned}$$

Dette var akkurat det vi ønsket å bevise.

(b) Vi bruker likheten fra forrige oppgave, og får

$$\begin{aligned}
\int 2\sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int 2 \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2} \, \mathrm{d}x && \text{(L110)}\\
&= \int 1 - \cos(2x) \, \mathrm{d}x && \text{(L111)}\\
&= \int \mathrm{d}x - \int \cos(2x) \, \mathrm{d}x && \text{(L112)}\\
&= x - \frac{1}{2}\sin(2x) + C && \text{(L113)}
\end{aligned}$$

Oppgave 9

Et andregradspolynom p er gitt ved

$$p(x) = x^2 + (2-2a)x + a. \tag{7}$$

(a) Bestem a slik at $p(x)$ har $x-1$ som faktor.

(b) For denne verdien av a, løs integralet

$$\int \frac{x+3}{p(x)}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

Løsning.

(a) At $p(x)$ har $x-1$ som faktor betyr at vi må ha $p(1) = 0$. Vi får derfor

$$\begin{aligned} 0 &= p(1) && \text{(L114)} \\ &= 1^2 + (2-2a)\cdot 1 + a && \text{(L115)} \\ &= 1 + 2 - 2a + a && \text{(L116)} \\ &= 3 - a && \text{(L117)} \\ a &= 3 && \text{(L118)} \end{aligned}$$

For at $p(x)$ skal ha $x-1$ som faktor må derfor $a = 3$.

(b) Om $a = 3$ får vi at

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + (2 - 2\cdot 3)x + 3 && \text{(L119)} \\ &= x^2 - 4x + 3 && \text{(L120)} \\ &= (x-1)(x-3). && \text{(L121)} \end{aligned}$$

Vi skal derfor løse

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x-3)} \tag{L122}$$

og bruker da delbrøksoppspaltning. Vi vil finne A og B slik at

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}. \tag{L123}$$

Om vi setter høyresiden på fellesnevner, og så fjerner nevneren fra begge sider, gir dette oss at

$$x + 3 = A(x-3) + B(x-1). \tag{L124}$$

Den raskeste måten å finne ut hva A og B er, er å sette inn $x = 1$ og $x = 3$ i denne likningen.

Om vi setter inn $x = 1$ får vi

$$1 + 3 = A(1 - 3) + B(1 - 1) \tag{L125}$$
$$4 = -2A \tag{L126}$$
$$-2 = A. \tag{L127}$$

Om vi setter inn $x = 3$ får vi

$$3 + 3 = A(3 - 3) + B(3 - 1) \tag{L128}$$
$$6 = 2B \tag{L129}$$
$$3 = B. \tag{L130}$$

Alternativt kan vi åpne parentesene på høyresiden av likning (L124), og få

$$x + 3 = (A + B)x - 3A - B. \tag{L131}$$

Siden dette skal stemme for *alle* x så må tallet foran x og konstantleddet være samme på begge sider, og vi får

$$1 = A + B, \tag{L132}$$
$$3 = -3A - B. \tag{L133}$$

Løser vi dette likningssystemet får vi igjen $A = -2$ og $B = 3$.

Uansett ønsket løsningsmetode får vi at integralet blir

$$\int \frac{x + 3}{(x - 1)(x - 3)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{3}{x - 3} - \frac{2}{x - 1} \, \mathrm{d}x \tag{L134}$$
$$= 3 \ln|x - 3| - 2 \ln|x - 1| + C. \tag{L135}$$