Logaritme og eksponentialer

Lært om logaritmer, to „hoved typer"

- Briggske logaritmen, lg/log $\boxed{10^{\log x} = x}$

  Svarer på spørsmålet
  „Hva må jeg opphøye 10 i for å få x?"

  Eks: $\log(1000) = 3$ fordi $10^3 = 1000$

  Må bruke kalkulator for „vanskeligere" tall.

- Naturlige logaritmen, ln $\boxed{e^{\ln x} = x}$

  Eks: $\ln(e^3) = 3$

  $e \approx 2.7183$

Ser at $\log(1) = 0$ fordi $10^0 = 1$

$\ln(1) = 0$ fordi $e^0 = 1$

$\ln(x) < 0$ når $x < 1$

$\ln(x) > 0$ når $x > 1$

$\boxed{x > 0}$

Lært logaritmereglene:

- $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^x) = x \cdot \log a$

Bruke nederste regel mest til å løse likninger av typen

$$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Lært å derivere eksponenter og logaritmer:

$$(e^x)' = e^x$$

Generelle regel:

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

a^x	x^a	Vanskelig derivasjons-oppgave:
Eks: $a=3$		
3^x	x^3	x^x

Integrasjonsregler:

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{for } x>0$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)'$$

$$= \frac{1}{\cancel{\ln a}} \cdot \cancel{\ln a} \cdot a^x$$

$$= a^x$$

Fra tidligere:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

for $n \neq -1$

Eneste integralet som manglet var

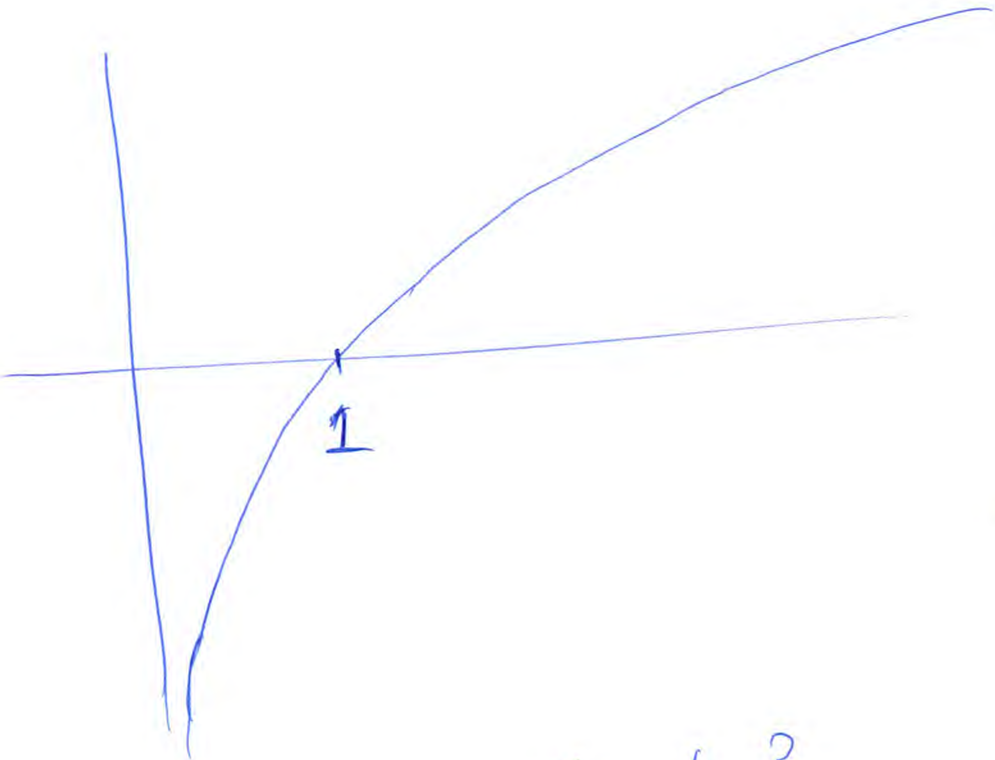
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Fordi: $x>0 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$x<0 \quad (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

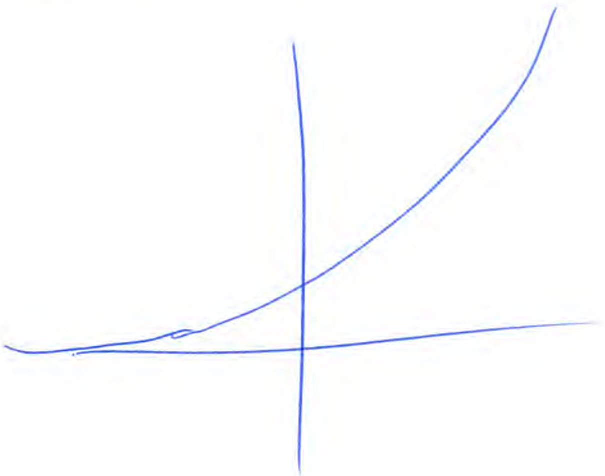
$$(\log x)' = \frac{1}{\ln(10) x}$$

Hvordan ser funksjonen $\ln(x)$ ut?



Nullpunkt: $x = 1$.
Ingen toppunkt.
Ingen bunnpunkt.
Vertikal asymptote: $x = 0$.

Hvordan ser e^x ut?



Ingen nullpunkt.
Ingen toppunkt.
Ingen bunnpunkt.
Horisontal asymptote: $y = 0$.

Eks: Finn egenskaper til $f(x) = e^{-x^2}$.

Nullpunkt: $0 = e^{-x^2}$ Vet at $e^y > 0$.

Ingen løsning, ingen nullpunkt.

Toppunkt/Bunnpunkt: $f'(x) = \left(e^{\overset{u}{-x^2}}\right)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 0$ $\quad -2 \cdot x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$

Dobbeltderivert: $f''(x) = \left(\underbrace{\boxed{-2x}}_{u}\underbrace{\boxed{e^{-x^2}}}_{v}\right)' = \underbrace{-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}}_{u' \cdot v + u \cdot v'}$

Får at $f''(0) = -2e^{-0^2} + 4\cdot 0^2 e^{-0^2}$

$= \underline{-2} < 0$ Toppunkt.

Har et toppunkt i $(0, f(0))$ $\quad f(0) = e^{-0^2} = e^0 = \underline{1}$

$= (0, \underline{1})$

Kan finne vendepunkt:

$f''(x) = 0 = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$ $\quad e^y > 0$ for alle y

$= (-2 + 4x^2)\cdot e^{-x^2}$

$0 = -2 + 4x^2$

$2 = 4x^2$

$\frac{1}{2} = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

vendepunkter i $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, f(-\sqrt{\frac{1}{2}})\right)$ $\quad f(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = e^{-(-\sqrt{\frac{1}{2}})^2}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, f(\sqrt{\frac{1}{2}})\right)$ $\quad f(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = e^{-(\sqrt{\frac{1}{2}})^2}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

De e da omtrent i

$(-0.7071, 0.6065)$

$(0.7071, 0.6065)$

Kan i teorien ende opp med problemer vi ikke klarer løse:

Eks: $f(x) = e^x - x$. Finn nullpunkt.

$$e^x - x = 0 \qquad \boxed{e^x = x}$$

$$x = \ln x$$

$$e^x = x$$

Ikke egentlig nytt:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

Finn nullpunkter.

Tilsvarende kunne vi hatt oppgave med logaritmer:

Eks: $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$

sidespor:

$(\ln x)^2 \neq \ln(x^2)$

Første spørsmål: Hva er definisjonsmengden?

Svar: Alle positive x er lov, $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

Hva er nullpunktene til funksjonen?

$$(\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x = 0 \qquad y = \ln x$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y \cdot (y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad y = 2$$

$$\ln x = 0 \qquad \ln x = 2$$

$$x = e^0 \qquad x = e^2$$

$$\underline{x = 1} \qquad x \approx 7.39$$

$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x$

Hva er topp/bunnpunkte?

$u = \ln x$

$u' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2 \cdot u \cdot u' - \frac{2}{x}$

$= \frac{2 \cdot \ln x}{x} - \frac{2}{x}$

$= \frac{2 \cdot \ln x - 2}{x}$

$f'(x) = 0 \qquad \frac{2 \cdot \ln x - 2}{x} = 0 \Rightarrow 2\ln x - 2 = 0$

$\ln x = 1$

$x = e^1 = e$

Finner andrederivete:

$f''(x) = \left(\frac{2\ln x - 2}{x}\right)'$

$u = 2\ln x - 2$

$v = x$

$u' = \frac{2}{x} \quad v' = 1$

$= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{2 - (2\ln x - 2)}{x^2}$

$= \frac{4 - 2\ln x}{x^2}$

$f''(e) = \frac{4 - 2 \cdot \ln(e^1)}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0$ Bunnpunkt.

Bunnpunkt i $(e, f(e)) = (e, -1)$

$f(e) = (\ln e)^2 - 2 \cdot \ln e = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

Vendepunkt:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{4 - 2\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 4 - 2\ln x = 0$$

$$2 = \ln x$$

$$e^2 = x$$

Tegne grafen:

Hva skjer når $x = 0$

Tror den går mot $+\infty$