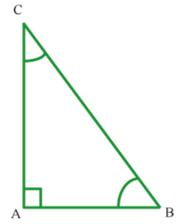
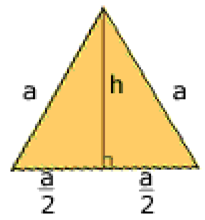
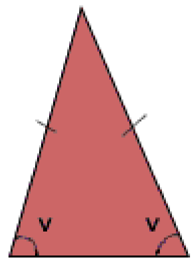
# 9 Trigonometri og geometri

Trigonometri er nyttig i trekantberegninger og også sentralt i beskrivelsen av periodiske fenomener. (eks lydbølger) Her får du noe repetering av stoff du trolig hva møtt tidligere, men skal også lære deg nye ferdigheter i et nyttig emne som er grunnlaget for metoder du bruker videre kurset her og videre i studiet.

Først litt repetisjon av navn på noen trekanter

| | Egenskaper | Eksempel |
|---|---|---|
| Rettvinklet trekant | En vinkel er $90°$, på figur er vinkel A merket som en rett vinkel.<br><br>**Merk** det er kun for rettvinklede trekanter at vi kan bruke Pytagoras læresetning:<br><br>Hyp$^2$= kat$_1^2$ + kat$_2$ $^2$ |  |
| Likesidet trekant | Alle tre sidene er like lange, dette gir også at vinklene er like med andre ord $\frac{180°}{3} = 60°$<br><br>*For alle trekanter gjelder at sum av vinklene er lik 180 grader.* |  |
| Likebeint trekant | To sider er like lange, og to vinkler er like store. |  |

Merk deg også at vi bruker stor bokstav på hjørner $A, B, C..$

Sidene betegner vi med f.eks. $AB, BC..$ eller $a, b..$ $a = BC$ $b = AC....$, merk deg at siden a ligger motstående til vinkel $A$

**9. 1 Pytagoras' setningen** Hyp$^2$= kat$_1^2$ + kat$_2$ $^2$ **NB** Gjelder for rettvinklede trekanter.

<u>Eksempel på bruk av Pytagoras læresetning.</u>

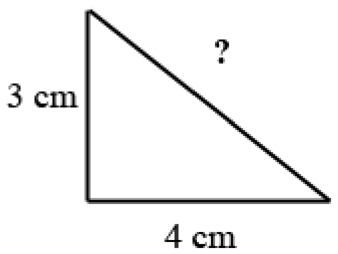
Finne lengden til hypotenusen:

Vi husker Pytagoras: Hyp$^2$= kat$_1^2$ + kat$_2$ $^2$, og setter inn:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

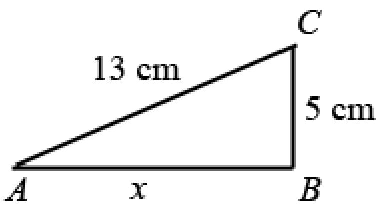
$$x^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$




<u>Hypotenusen i trekanten er 5 cm lang.</u>

Finne/ bestemme lengden til en katet:




Her får vi

$$x^2 + 5^2 = 13^2$$
$$x^2 = 169 - 25$$
$$x^2 = 144$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

Siden $AB$ er 12 cm lang

**9.2 – 9.4 sinus og cosinus og tangens sin *v*, cos *v* og tan *v***

Trigonometri: *læren om hvordan vi kan beregne vinkler og sider i en trekant.*

Definisjonene:

$$\cos v = \frac{hosliggende\,katet}{hypotenus} = \frac{hos}{hyp}$$
$$\sin v = \frac{motstående\,katet}{hypotenus} = \frac{mot}{hyp}$$
$$\tan v = \frac{motstående\,katet}{hosliggendekatet} = \frac{mot}{hos} = \left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)$$

Hypotenusen ligger ovenfor den rette vinkelen – og er den lengste siden.

Hosliggende katet er den siden som sammen med hypotenus, danner vinkel i fokus.

Motstående katet står motstående til den vinkel som er i fokus.

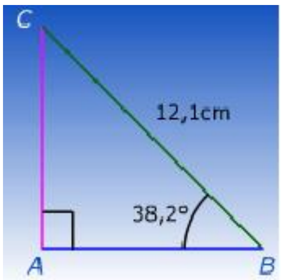
Merk at hosliggende sider til en vinkel er ett av vinkelbena, det er derfor viktig å være oppmerksom på hvilken vinkel vi har fokus på.

Merk
Her jobber vi med vinkler mål med grader, da må kalkulator være innstilt på **deg** (fra degrees)
Test: skriv in cos 60, får du da svaret med ½ eller 0,5 er kalkulator stilt inn på grader (deg). Se eventuelt i bruksanvisning angående valg av vinkelmål.

Eksempel Finne ukjent side:
I $\triangle ABC$ er vinkel $\angle A = 90°$ (rett), $\angle B = 38{,}2°$ og siden $BC = 12{,}1$cm.

Løsning:

Ser vi ut fra vinkel B (kjent) er AB hosliggende katet (= *x*) og BC (=12,1) hypotenus.




Vi har da nok opplysninger til å bruke cosinus.

$$\cos B = \frac{hos}{hyp} = \frac{AB}{BC}$$ **setter inn tall for de størrelsene vi kjenner**

$$\cos 38{,}2° = \frac{x}{12{,}1}$$ **Pass på at kalkulatoren står på deg!**

$$x = 12{,}1 \cdot \cos 38{,}2° \approx 9{,}5$$

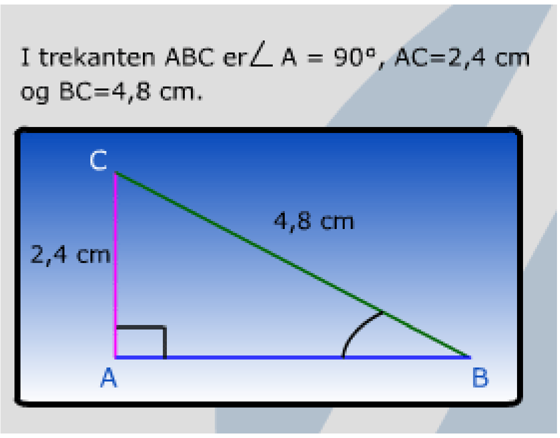
**Siden AB = 9,5 cm**

Den siste siden i trekanten kan vi enklest finne ved hjelp av Pytagoras' læresetning.

$$AC^2 + 9{,}5^2 = 12{,}1^2$$
$$AC^2 = 12{,}1^2 - 9{,}5^2$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{\left(12{,}1^2 - 9{,}5^2\right)} \approx 7{,}5$$

Siden AC er 7,5 cm lang.

<u>Eksempel</u> Bestemme ukjente vinkler:




Sett fra vinkel B, kjenner vi her motstående katet AC, og hypotenusen, BC. Vi har da nok opplysninger til å bruke sinus:

$$\sin B = \frac{mot}{hyp} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin B = \frac{2,4}{4,8} = 0,5$$

$$B = \sin^{-1}(0,5) = 30^\circ \quad \underline{\underline{\angle B = 30^\circ}}$$

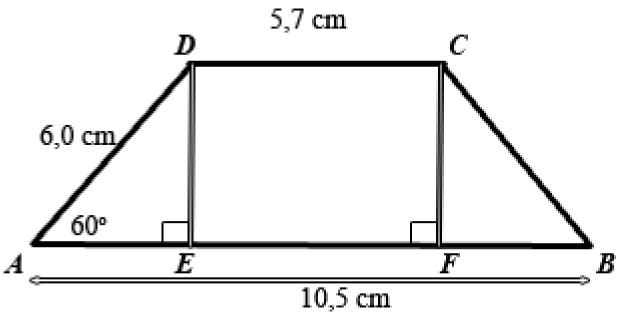
For å bestemme den siste vinkelen i trekanten bruker vi gjerne at summen av vinklene i en trekant alltid er 180°.

$$\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = \underline{\underline{60^\circ}}$$

<u>Eksempel</u> **(**Mer sammensatt figur.) I et trapes
$ABCD$ er $\angle A = 60^\circ, AB = 10,5\text{cm}$ $\quad AD = 6,0\,\text{cm}$ $\quad DC = 5,7\,\text{cm}$ $\quad og$ $\quad DC \parallel AB.$
Finn arealet og bestem vinkel B.

Tegner figur og bruker at areal til et trapes er gitt ved $A = \frac{(a+b)}{2}\cdot h$

Vi kjenner lengden til de to parallelle sidene, a og b, men må beregne høyden; DE.




I trekant AED er DE motstående katet (til vinkel A):

$$\sin A = \frac{mots}{hyp} = \frac{DE}{AD}$$

$$DE = \sin 60^\circ \cdot 6,0 = \underline{5,2\,\text{cm}}$$

Vi kan nå finne arealet:

$$A = \frac{(a+b)}{2}\cdot h$$

$$= \frac{(10,5\text{cm} + 5,7\text{cm})}{2}\cdot 5,2\text{cm} = \underline{\underline{42,1\text{cm}^2}}$$

For å bestemme vinkel B, må vi kjenne to sider i trekant BCF.
Siden sidene AB og DC er parallelle vet vi at DE = CF. På figuren ser det ut som om AE og FB er like lange, men dette <u>må vi sjekke</u> ved regning. AE:

$$\cos A = \frac{hos}{hyp} = \frac{AE}{AD}$$

$$AE = \cos 60^\circ \cdot 6,0\text{cm} = \underline{3,0\,\text{cm}}$$

$$\Rightarrow FB = AB - AE - EF = 10,5\text{cm} - 3,0\text{cm} - 5,7\text{cm} = \underline{1,8\,\text{cm}}$$

Vi kan nå bestemme vinkel B:

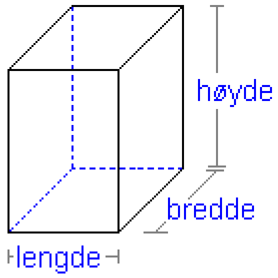
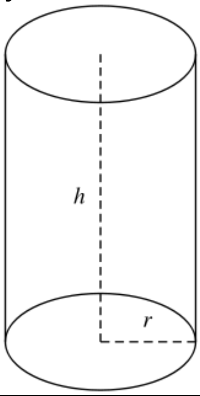
$$\tan B = \frac{mots}{hos} = \frac{CF}{FB} = \frac{5,2\text{cm}}{1,8\text{cm}} \quad \Rightarrow \angle B = \tan^{-1}(5,2/1,8) = \underline{\underline{70,9^\circ}}$$

### 9.5 Prismer og sylindre

Vær oppmerksom på detaljer i formlene i formelsamlingen. Merk at G (grunnflate) som i volumformelen brukes slik $V = G \cdot h = Grunnflate \cdot høyde$.

I motsetning til g i arealformel $A = g \cdot h = grunnlinje \cdot høyde$.

Husk også at alle mål må være med samme benevning: mm cm, dm m eller km. Husker du forholdet mellom disse? Og ikke vær for kjapp når du skal regne om areal ($cm^2$) eller volum ($cm^3$). I tillegg er sammenhengen med at 1 liter = 1 $dm^3$ nyttig.

| Eksempel rett prisme<br><br>Prismet har bunn- og toppflate formet som en identiske mangekanter.<br><br> | Eksempel rett sylinder<br><br> |
|---|---|

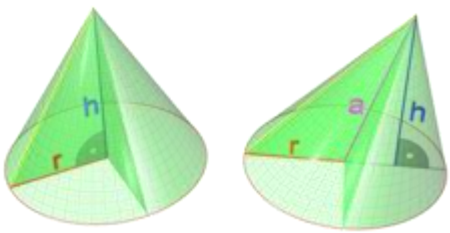
Dersom side flatene ikke står vinkelrett på grunnflaten, kaller vi prisme / sylinderen for skjev. For begge disse formene gjelder $V = G \cdot h = Grunnflate \cdot høyde$.

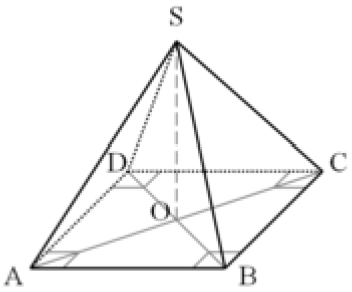
### 9.6 Pyramider, kjegler og kuler

Kjegler $V = \frac{Gh}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Pyramider $V = \frac{Gh}{3}$

Rett skjev



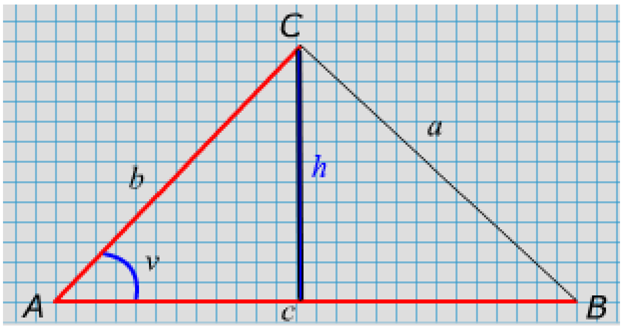



### 9.7 Arealsetningen

Utgangspunktet er den vanlige arealformelen for en trekant:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Anta at vi kjenner AB, AC og vinkel A.

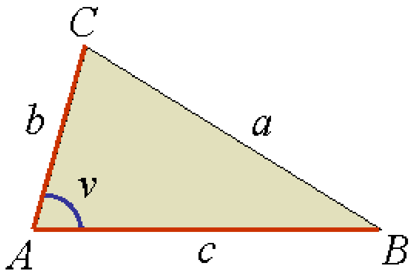



Da kan vi finne et uttrykk for h:

$$\sin A = \frac{mots}{hyp}$$

$$\sin v = \frac{h}{AC} \qquad h = \sin v \cdot AC = \sin v \cdot b$$

$$A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{c \cdot \sin v \cdot b}{2} = \frac{1}{2} bc \sin v$$




**<u>Arealsetning for en trekant:</u>** $A = \frac{1}{2} bc \sin v$, der v er vinkel mellom de to kjente sidene.

Vi kan dermed finne arealet av en trekant, når vi kjenner to sider og den mellom - liggende vinkelen.

NB Denne gjelder for ALLE trekanter – uansett form.

### 9.8 Sinussetningen

Vi skal bruke *arealsetningen* for å utlede en setning som gir oss sammenheng mellom vinkler og sider i vilkårlige trekanter; **sinussetningen:**

Arealet av trekanten over kan uttrykkes ved hjelp av alle tre vinklene:

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$ multipliserer med 2 for å fjerne brøkene

$$bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C$$ så dividerer vi med abc

$$\frac{bc \sin A}{abc} = \frac{ac \sin B}{abc} = \frac{ab \sin C}{abc}$$ og forkorter

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

*eller* som gir oss ***Sinussetningen.***

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

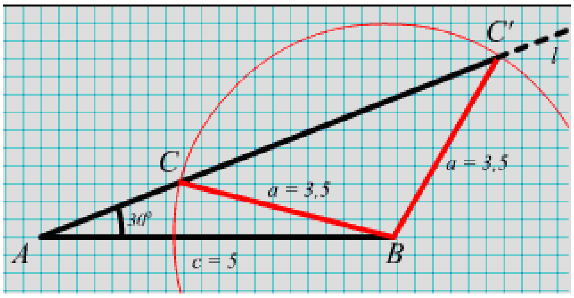
Eksempel der vi anvender sinussetningen:

I $\triangle ABC$ er $\angle A = 30°$, $c = 5$ $a = 3,5$.

Oppgaven er å finne ukjent sider og vinkler:

Merk at a er siden motstående til vinkel A osv.

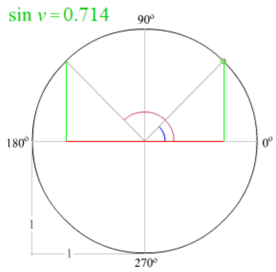
Konstruerer / tegner vi en trekant basert på disse opplysningene får vi to mulige trekanter nemlig $\triangle ABC$ og $\triangle ABC'$ (les C merket)




Vi skal nå se hvordan utregningen blir:

Sinussetningen gir at

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$
$$\frac{\sin 30}{3,5} = \frac{\sin C}{5}$$
$$\sin C = \frac{\sin 30}{3,5} \cdot 5 = 0,714$$




Generelt gjelder at:

Enhetssirkelen viser at vi har to løsninger:

$\sin v = \sin(180 - v)$ Mer om dette i kap. 10 til høsten.

$$v_1 = 45,6°$$
$$v_2 = 134,4°$$

Fra figuren ser vi at det er lurt å sette

$$C = 134,4°$$
$$C' = 45,6°$$

Bruker vi at summen av vinklene i en trekant er $180°$, finner vi at

$$B = 15,6°$$
$$B' = 104,4°$$

Så kan vi finne de to siste ukjente sidene ved å bruke sinussetningen, igjen

**For den lille trekanten:**

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30}{3,5} = \frac{\sin 15,6}{b}$$

$$b = \frac{3,5 \cdot \sin 15,6}{\sin 30} = \underline{\underline{1,88}}$$

**For større trekanten:**

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B'}{b'}$$

$$\frac{\sin 30}{3,5} = \frac{\sin 104,4}{b'}$$

$$b' = \frac{3,5 \cdot \sin 104,4}{\sin 30} = \underline{\underline{6,78}}$$

**Cosinussetningen** - den utvidede Pytagoras setningen

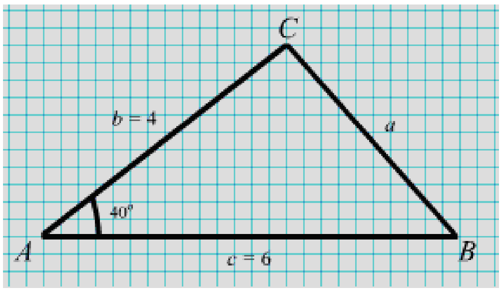
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$ (for utledning se læreboka)

Brukes slik:

- når to sider b og c og den mellom- liggende vinkel er kjent, kan vi finne den motstående siden, a.
- når tre sider er kjent, kan vi bestemme en ukjent vinkel

Eksempel:

Finn den ukjente siden og de ukjente vinklene i trekanten.




Vi kjenner to sider og en vinkel, og har nok opplysninger til å bruke cosinussetningen.

(hvorfor kan vi ikke bruke sinussetningen her?)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 40$$

$$= 16 + 36 - 48 \cdot \cos 40$$

$$a = \sqrt{16 + 36 - 48 \cdot \cos 40} \approx \underline{\underline{3,9}}$$

Cosinus gir vinkelen entydig. Vi skal nå finne vinkel B og skriver setningen slik

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{3,9^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 3,9 \cdot 6}\right) = \underline{\underline{41,2°}}$$

Vi bruker vinkelsummen i en trekant til å finne siste vinkel; $\angle C = 180° - 40° - 41,2° = \underline{\underline{98,8°}}$