Oppgave 1

Deriver funksjonene

(a) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 7x + e^x$

(b) $g(x) = (2x)^3 \pi^{5x}$

(c) $h(x) = \sin(3x \cos 2x)$

Oppgave 2

Regn ut integralene

(a) $\int x^5 - \sin x + e^{3x} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int 2x \ln 3x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{\pi/3} \tan x \, \mathrm{d}x$

Oppgave 3

Løs likningene og ulikhetene

(a) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + x - 6} \geq 0$

(b) $x - 3 - \sqrt{14 - 2x} > 0$

(c) $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0$

Oppgave 4

Regn ut grensene

(a) $\lim\limits_{x \to (-1)} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

(b) $\lim\limits_{x \to (-2)} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

Oppgave 5

Herons formel er en formel som gir arealet av en trekant dersom man kan sidene. Om en trekant har sidelengder a, b, og c, sier Herons formel at arealet er gitt ved

$$\text{Areal} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}. \tag{1}$$

(a) Bruk Herons formel til å finne arealet av en trekant med sidelengder 3, 4, og 5. Finn også arealet til trekanten *uten* å bruke Herons formel.

De neste oppgavene er til sammen *for store* til at jeg ville gitt den på en faktisk eksamen, men er god trening i bokstavregning.

Vi skal nå vise at Herons formel stemmer, ved å bruke cosinussetningen og arealsetningen.

(b) Om $\angle C$ er vinkelen mellom sidene a og b, vis at vi har

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{2}$$

(c) Bruk likningen $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, arealsetningen, og resultatet fra forrige deloppgave til å vise at vi har

$$\text{Areal}^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} \tag{3}$$

(d) Vis at

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 \tag{4}$$

og bruk dette til å vise at Herons formel stemmer.

Info: Dette er den biten av oppgaven som ville vært for mye å gjøre på en faktisk eksamen. Hold tunga rett i munnen!

Oppgave 6

En differensiallikning er gitt ved

$$y' = y^2 \tag{5}$$

(a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.

(b) Finn asymptotene til den generelle løsningen.

(c) Finn løsningen som er slik at $y(0) = 1/2$.

Oppgave 7

Vi har gitt tre punkter

$$A = (3, 1, 1), \tag{6}$$
$$B = (2, 2, 2), \text{ og} \tag{7}$$
$$C = (-2, -2, 3). \tag{8}$$

(a) Finn vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og bestem arealet til $\triangle ABC$.

(b) Finn en likning for planet α som A, B, og C ligger i.

(c) Finn en parameterfremstilling til en linje ℓ som går gjennom B og er normal på planet α.

Oppgave 8

I denne oppgaven skal vi løse integralet

$$\int x^5 \sqrt{2 - x^3}\, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Prøv gjerne litt på integralet først, før du leser «trikset» under!

(a) Løs integralet over ved hjelp av delvis integrasjon, hvor vi velger $u = x^3$ og $v' = x^2\sqrt{2 - x^3}$.

Oppgave 9

Et andregradspolynom p er gitt ved

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20. \tag{10}$$

(a) Vis at $x - 5$ deler p.

Et integral som ikke står i boka, men som jeg har nevnt en eller to ganger i forelesning er

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x = \tan^{-1} x. \tag{11}$$

(b) Løs integralet

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}\, \mathrm{d}x. \tag{12}$$

Hint: Sjekk at $x^2 + 4 = 4((x/2)^2 + 1)$.