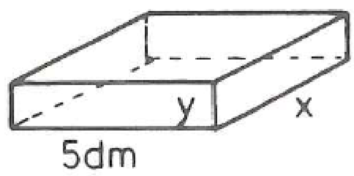
Løsningsforslag juletentamen 2020 Forkurs / Realfagskurs:

Oppgave 1

En åpen rektangulær boks har lengde 5 dm, bredde *x* dm og høyde *y* dm. Boksen rommer 30 dm^3 og er laget av en $52\,\text{dm}^2$ kobberplate. Bestem høyde og bredde ved regning.



Vi kan sette opp et likningssett basert på informasjon i teksten:

Fra volum:

$$5xy = 30$$
$$xy = 6$$

Fra overflateareal:

$$5x + 2\cdot 5y + 2\cdot xy = 52$$
$$5x + 10y + 2xy = 52$$

Løser likning settet:

$$I: \quad xy = 6$$
$$II: \quad 5x + 10y + 2xy = 52$$

Snur på I og setter inn for *x* i II:

$$I: \quad x = \frac{6}{y}$$

$$II: \quad 5\cdot\frac{6}{y} + 10y + 2\cdot\frac{6}{y}\cdot y = 52$$

$$\frac{30}{y} + 10y + 12 - 52 = 0$$

$$\frac{30}{y} + 10y - 40 = 0 \,|\cdot y$$

$$10y^2 - 40y + 30 = 0$$

$$y_1 = 3 \qquad x_1 = \frac{6}{3} = 2$$

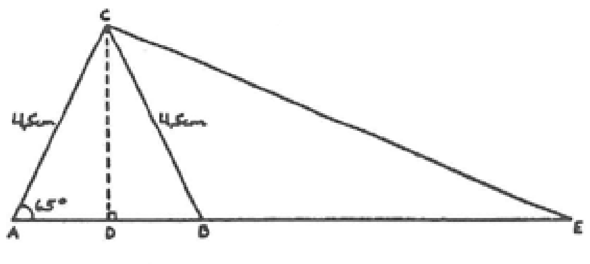
$$y_2 = 1 \qquad x_2 = \frac{6}{1} = 6$$

To mulige løsninger:

$$\underline{\underline{x = 2\,\text{cm og } y = 3\,\text{cm} \quad \text{eller } x = 6\,\text{cm og } y = 1\,\text{cm}}}$$

Oppgave 2

I trekanten ABC er $\angle A = 65°$, $AC = BC = 4{,}5\,\text{cm}$. *CD* står vinkelrett på *AB*.



a. Regn ut lengden til *CD*.

$$\sin A = \frac{mot}{hyp} = \frac{CD}{AC}$$

$$CD = AC \sin A = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin 65^\circ \approx \underline{\underline{4{,}1\,\text{cm}}}$$

b. Regn ut lengden til *AB*.

Bruker Pytagoras setning til å finne AD (som er lik halve AB).

$$AD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$AD = \sqrt{(4{,}5\,\text{cm})^2 - (4{,}1\,\text{cm})^2}$$

$$\underline{\underline{AB = 2AD \approx 3{,}7\,\text{cm}}}$$

Punktet E ligger i forlengelsen av *AB* slik at *BE* er dobbelt så lang som *AB*.

c. Bestem $\angle E$ og *EC*.

$$BE = 2AB \approx \underline{7{,}4\,\text{cm}}$$

Siden $\triangle ABC$ er likebeint er $\angle ABC = \underline{65^\circ}$ og

$$\angle CBE = 180^\circ - 65^\circ = \underline{115^\circ}$$

Bruker cosinussetning til å finne EC:

$$EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cdot \cos \angle CBE$$

$$EC = \sqrt{(7{,}4\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm}) - 2 \cdot 7{,}4\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 115^\circ} \approx \underline{\underline{10{,}2\,\text{cm}}}$$

Finner vinkel E med sinussetningen:

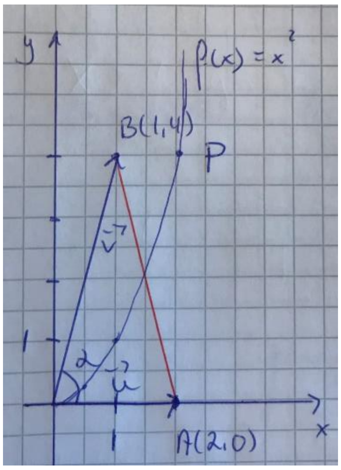
$$\frac{\sin E}{\sin CBE} = \frac{BC}{CE}$$

$$\sin E = \sin 115^\circ \cdot \frac{4{,}5\,\text{cm}}{10{,}2\,\text{cm}} \approx 0{,}3998...$$

$$\angle E \approx \sin^{-1}(0{,}3998...) \approx \underline{\underline{23{,}6^\circ}}$$

Oppgave 3

Vi har to punkter i planet $A(2,0)$ og $B(1,4)$. La $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ og $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



a) Bruker skalarprodukt til å regne ut vinkelen mellom vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$\vec{u} = [2,0] \qquad |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 0} = \underline{2}$$

$$\vec{v} = [1,4] \qquad \vec{v} = \sqrt{1+16} = \underline{\sqrt{17}}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = \underline{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot\vec{v}} = \frac{2}{2\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \underline{\underline{76,0°}}$$

b) Arealet av trekanten som blir utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

$$A_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot 4-0) = \frac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$$

(Et annet alternativ er å løse oppgaven med arealsetning for trekanter.)

c) Punktet P ligger på grafen til funksjonen $f(x) = x^2$ og vi krever at $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OA}$.

La $P(x, x^2)$ da blir $\overrightarrow{AP} = [x-2, x^2]$

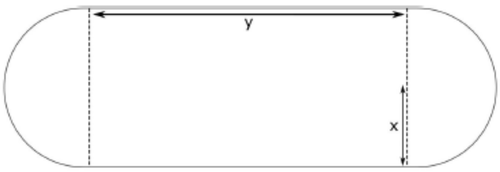
Videre gir $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OA}$ at $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

$$[2,0]\cdot[x-2, x^2] = 0$$
$$2(x-2) + 0\cdot x^2 = 0$$
$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2 \quad \underline{\underline{P(2,4)}}$$

Oppgave 4

Idrettsplassens omkrets er 400 m. Halvsirkelens radius settes lik *x*.

a) Vis at fotballbanens areal kan uttrykkes som $A(x) = 400x - 2\pi x^2$.



Omkrets=2langsider + 2 halve sirkler $= 2y + 2\cdot\frac{2\pi x}{2} = 400$

Løser for *y*: $2y = 400 - 2\pi x$

$$y = 200 - \pi x$$

Areal av forballbane er lik

$$A = 2xy$$

$$A(x) = 2x(200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2 \quad Q.E.D.$$

b) Regn ut fotballbanes største areal.

Finner toppunkt til $A(x) = 400x - 2\pi x^2$

$$A'(x) = 400 - 4\pi x$$
$$A'(x) = 0$$
$$400 - 4\pi x = 0$$
$$-4\pi x = -400$$
$$x = \frac{-400}{-4\pi} = \frac{100}{\pi} \approx 31{,}8\text{m}$$

Bruker 2. derivert test for å sjekke TP (kan også tegne fortegnsskjema)

$A''(x) = -4\pi$ Graf krummer ned for alle verdier av *x*, og vi har funnet et toppunkt.

$$\text{A}_{maks} = 400 \cdot \frac{100}{\pi} - 2\pi \left(\frac{100}{\pi}\right)^2$$
$$= \frac{40000}{\pi} - \frac{20000}{\pi} = \underline{\underline{\frac{20000}{\pi}}} \approx 6366{,}2m^2$$

Oppgave 5 Funksjonen $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3x}$.

a. Bestem alle asymptotene til g(x) ved regning.

Bestemmer vertikale asymptoter der nevner er lik 0.

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \qquad x_2 = -3$$

$\underline{\underline{\text{Vertikale asymptoter: } x = 0 \text{ og } x = -3}}$

Horisontal asymptote (teller har lavere grad enn nevner, så det er ingen skråasymptote)

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{0}{1} = \underline{0}$$

$\underline{\underline{\text{Horisontal asymptote: } y = 0}}$

b. Noen påstår at grafen til g har ikke noen topp- eller bunnpunkt. Vis ved regning hvorfor dette stemmer.

$$g(x)=\frac{x+2}{x^2+3x}=\frac{u}{v}$$

$$g'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+3x\right)-\left(x+2\right)\left(2x+3\right)}{\left(x^2+3x\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-\left(2x^2+3x+4x+6\right)}{\left(x^2+3x\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-2x^2-7x-6}{\left(x^2+3x\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2-4x-6}{\left(x^2+3x\right)^2}$$

Teller har ingen reelle røtter,

$g'(x)\neq 0$ så g har ingen topp- eller bunnpunkt.

Oppgave 6

Karbon $\left({}^{14}C\right)$ har en halveringstid på 5700 år. Vi har 200 g av dette stoffet.

Nedbrytningen av karbon $\left({}^{14}C\right)$ følger denne formelen: $C\left(t\right)=200e^{-0,000121t}$, der t måles i år. En tilsvarende formel for 500 g hydrogen $\left({}^{3}H\right)$ er $H\left(t\right)=500e^{-0,0563t}$.

a. Regn ut hvor lang tid det tar før massen av karbonet er redusert til 180 g.

$$200e^{-0,000121t}=180$$

$$e^{-0,000121t}=\frac{180}{200}$$

$$\ln e^{-0,000121t}=\ln 0,9$$

$$-0,000121t=\ln 0,9$$

$$t=\frac{\ln 0,9}{-0,000121}\approx \underline{\underline{871\,\text{år}}}$$

b. Hvor lang tid tar det før det er like mange gram av begge stoffene? Hvor mange gram er det da igjen av hvert stoff?

$$C(t) = H(t)$$
$$200e^{-0{,}000121t} = 500e^{-0{,}0563t}$$
$$\frac{e^{-0{,}000121t}}{e^{-0{,}0563t}} = \frac{500}{200}$$
$$e^{-0{,}000121t+0{,}0563t} = 2{,}5$$
$$\ln e^{0{,}056179t} = \ln 2{,}5$$
$$t = \frac{\ln 2{,}5}{0{,}056179} \approx \underline{\underline{16{,}35\,\text{år}}}$$

$$C(16{,}35) \approx H(16{,}35) = 500e^{-0{,}0563 \cdot 16{,}35} \approx 199{,}6$$

Etter 16 år og 4 måneder er det ca. 199,6 gram igjen av stoffene.

Pga. lange halveringstid har det nesten ikke minket på mengden karbon.

Oppgave 7 Gitt funksjonen $f(x) = e^x \ln x^2$, $D_f = \mathbb{R} / \{0\}$.

a. Bestem nullpunktene til *f* ved regning.

$$e^x \ln x^2 = 0$$
$$e^x = 0 \quad \vee \quad \ln x^2 = 0$$
$$\text{ingen løsning} \quad e^{\ln x^2} = e^0$$
$$x^2 = 1$$
$$\underline{\underline{x = \pm 1}}$$

b. Finn tangenten til $f(x)$ i punktet $(1, f(1))$ ved regning.

$f(1) = e^1 \ln 1^2 = e \cdot 0 = 0$ Punkt: $(1, 0)$

$f(x) = e^x \ln x^2$ Bruker produktregel+ kjerneregel

$$f'(x) = e^x \ln x^2 + e^x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$
$$= e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x} \right)$$
$$f'(1) = e(0+2) = 2e$$

Tangent: $y - 0 = 2e(x-1)$

$$\underline{\underline{y = 2ex - 2e}}$$

Oppgave 8

Gitt at funksjonen *f* er en tredjegradsfunksjon med nullpunktene -3, 0 og 3.

a) Vis at *f* kan skrives på formen $f(x) = ax^3 - 9ax$ der *a* er et reelt tall, $a \neq 0$.

Fra informasjon om nullpunktene får vi at

$(x+3), x$ og $(x-3)$ er faktorer i funksjonen.

$f(x) = ax(x+3)(x-3) = ax(x^2 - 9) = ax^3 - 9ax \qquad a \neq 0$

b) Stigningstallet til *f* i punktet $(1, f(1))$ er lik 3. Bruk dette til å bestemme verdien til a.

$f(x) = ax^3 - 9ax$

$f'(x) = 3ax^2 - 9a$

$f'(1) = 3a - 9a = 3$

$-6a = 3$

$a = -\frac{3}{6} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \qquad f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x$

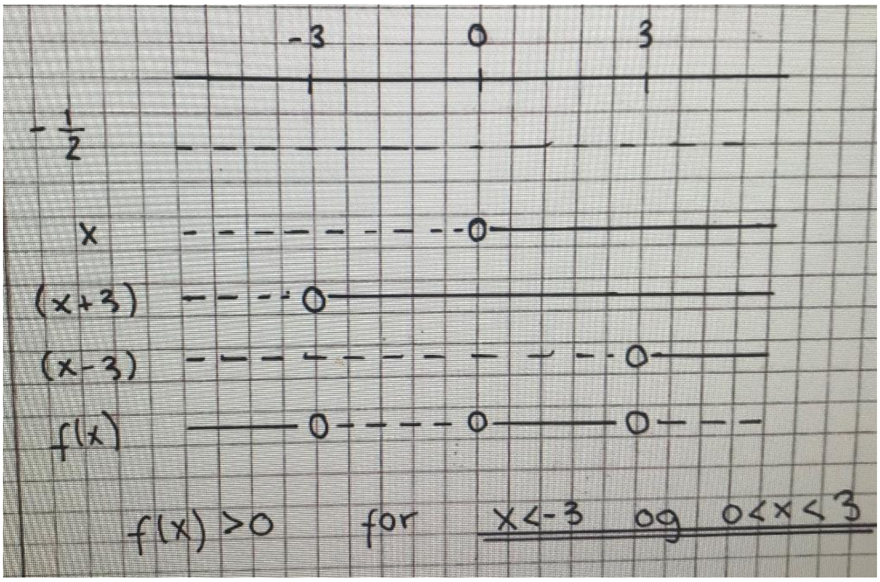
I resten av oppgaven setter vi $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x \qquad D_f = \mathbb{R}$

c) Bestem ved regning hvilke verdier av *x* som grafen til *f* ligger over *x*-aksen.

$f(x) > 0$

$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x > 0$ må tegne fortegnsskjema

$-\frac{1}{2}x(x-3)(x+3) > 0$ fra informasjon i a)



d) Regn ut koordinatene til topp- og bunnpunktene på grafen.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}(x^2 - 3) = -\frac{3}{2}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

Bruker 2. derivert test for å avgjøre type ekstremalpunkt (kan også tegne fortegnsskjema)

$$f''(x) = -3x$$

$$f''(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \qquad x = \sqrt{3} \text{ gir et TP}$$

$$f''(-\sqrt{3}) = -3\left(-\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} \qquad x = -\sqrt{3} \qquad \text{gir et BP}$$

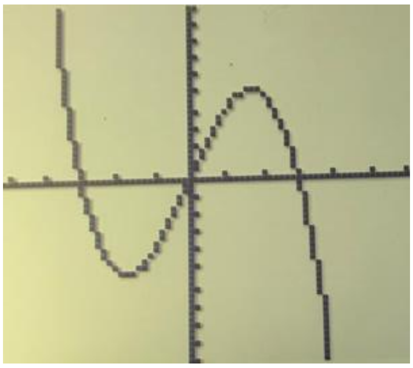
Bestemmer y – koordinater:

$$f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{3})^3 + \frac{9}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{6}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(-\sqrt{3})^3 + \frac{9}{2}(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

Toppunkt $\left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$, Bunnpunkt $\left(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$

e) Tegn grafen til *f*.



Her et kjapt bilde fra kalkulatoren, når dere tegner grafen må dere huske på minst ett tall på hver akse. Tegn inn nullpunktene, og der grafen har TP og BP + 2-3 punkter til før dere trekker kurven.

Oppgave 9

Funksjonen $f(x) = e^x$, har en tangent som går gjennom Origo (punkter (0,0)**.**

Bestem den eksakte likningen til denne tangenten.

En tangent har likning gitt ved ettpunksformelen:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

Starter med å derivere:

$$f'(x) = e^x$$

Om vi velger $x = a$, får vi punktet $P\left(a, e^a\right)$ og stigningstall e^a.

Likning til tangent kan utrykkes:

$y - e^a = e^a(x - a)$

$y = e^a x - ae^a + e^a$ Bruker at tangent går gjennom $(0, 0)$.

$0 = e^a \cdot 0 - ae^a + e^a$

$ae^a - e^a = 0$

$e^a(a - 1) = 0$

$a = 1$ (siden $\mathrm{e}^a > 0$)

Tangent : $y = ex - e + e$

$\underline{\underline{y = ex}}$