Eksempel på funksjonsanalyse av en rasjonalfunksjon

Oppgave:

La $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^2-4}$

a) Bestem nullpunktene ved regning.

b) Bestem eventuelle asymptoter.

c) Deriver funksjonen.

d) Bestem ekstremalpunktene til *f* ved regning.

e) Tegn grafen til *f* og asymptotene i samme koordinatsystem.

Løsning:

a)

Her jobber vi med et brøkuttrykk, da er det nyttig å huske at en brøk er lik 0, når telleren er 0.

$$f(x)=0$$
$$3x^2-1=0$$
$$3x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{3}$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nullpunktene er altså gitt ved: $\underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}}}\approx\{-0{,}58\ ,\ 0{,}58\}$

b) **Vertikal asymptote** der nevner = 0, og samtidig teller ≠ 0.

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm 2$$

<u>Dette gir asymptotene *x* =- -2 og *x* = 2</u>

Siden graden i teller er lik får vi en horisontal asymptote:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

<u>Dette gir en horisontal asymptote y = 3</u>

c)

$$f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2-4}=\frac{u}{v}$$

$$f'(x)=\frac{6x\cdot\left(x^2-4\right)-\left(3x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$=\frac{6x^3-24x-6x^3+2x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

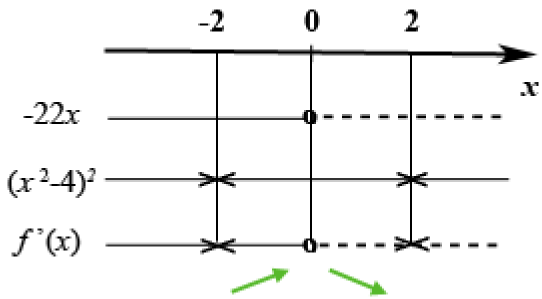
$$=\underline{\underline{\frac{-22x}{\left(x^2-4\right)^2}}}$$

d) For å finne ekstremalpunktene må vi finne for hvilke x-verdier $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{-22x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Her ser vi at $f'(x)$ bare har ett nullpunkt, nemlig x = 0.

Vi tegner fortegnsskjema for å sjekke om det er topp eller bunnpunkt.



Vi må bestemme y-verdien når $x = 0$.

$$f(0)=\frac{3\cdot 0^2-1}{0^2-4}=\frac{1}{4}$$

Grafen har toppunkt $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

e)