6. Grenseverdier og derivasjon

Asymptoter kan vi gjerne kalle hjelpelinjer for grafen. Vi bestemmer asymptotene ved å beregne grenseverdier. For eksempel ved å studere hva skjer med grafen når *x*- vokser over alle grenser. Vi avslutter kapittelet med å innføre derivasjon, et særdeles viktig matematisk verktøy!

6.1 Grenseverdier

Merk skrivemåten $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, dvs. grenseverdien til $f(x)$ når *x* nærmer seg tallet *a*.

La oss se nærmere på funksjonen $f(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x+2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

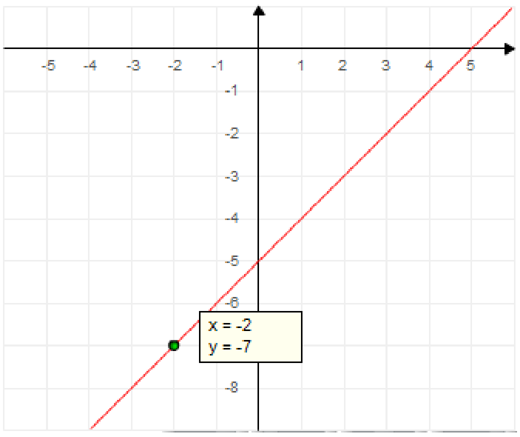
Her velger vi størst mulig definisjonsmengde, men passer på at nevner ikke blir lik 0.

Vi skal nå se på hva som skjer med funksjonsverdiene når *x* nærmer seg -2.

Vi kan sette opp en tabell for noen *x* – verdier i dette området:

x	-3	-2,5	-2,2	-2,1	-2,005	-2	-1,99	-1
$f(x)$	-8	-7,5	-7,2	-7,1	-7,005	?	-6,99	-6

Tegner vi dette inn i et koordinatsystem, ser vi av grafen at $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-7$ nærmer seg -7 når $x\to -2$. Merk grafen har ett ørlite «hull» – ett brudd når *x* = -2.



Fra venstre $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-7$

x nærmer seg 2, men er hele tiden litt mindre enn 2.

Fra høyre $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-7$

Her er x heletiden litt større enn 2.

Samlet har vi:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2} f(x)=-7$$

Hvordan regner vi oss frem til dette?

$$f(x)=\frac{x^2-3x-10}{x+2}$$

$$f(-2)=\frac{(-2)^2-3(-2)-10}{-2+2}=\frac{4+6-10}{0}=\frac{0}{0}=?$$

Dette forteller at vi kan faktorisere.

$$f(x)=\frac{x^2-3x-10}{x+2}=\frac{(x-5)(x+2)}{x+2}=x-5 \quad \text{for} \quad x\neq -2$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}(x-5)=-2-5=\underline{\underline{-7}}$$

Eksempel der vi bare kan sette inn og regne ut

La

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

- Om mulig, setter vi inn for den aktuelle x – verdi og regner ut grenseverdien.
- Men får vi et 0/0 uttrykk (kalles et ubestemt uttrykk), kan vi ikke regne ut direkte. Men da kan vi faktorisere og forkorte for å sjekke om grenseverdien likevel eksisterer.

Regler for grenseverdier:

Merk at følgende formelle regler gjelder for grenseverdiberegninger, men disse stemmer heldigvis godt overens med det vi intuitivt føler er riktig.

Grenseverdisetningene:

Dersom $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ eksisterer, er

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{dersom } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Grenseverdier når $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Her kan du selv teste ut " store" *x*-verdier.

Med mer sammensatte uttrykk, kan en metode ved å dele på høyeste potens av x være til hjelp for å bestemme grenseverdien.

Eksempel 1

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 + 10} =$$

Dividerer hvert ledd med høyeste potens av x, her x^2

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{10}{x^2}}$$

forkorter i hvert ledd, der det er mulig

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{10}{x^2}} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Eksempel 2.

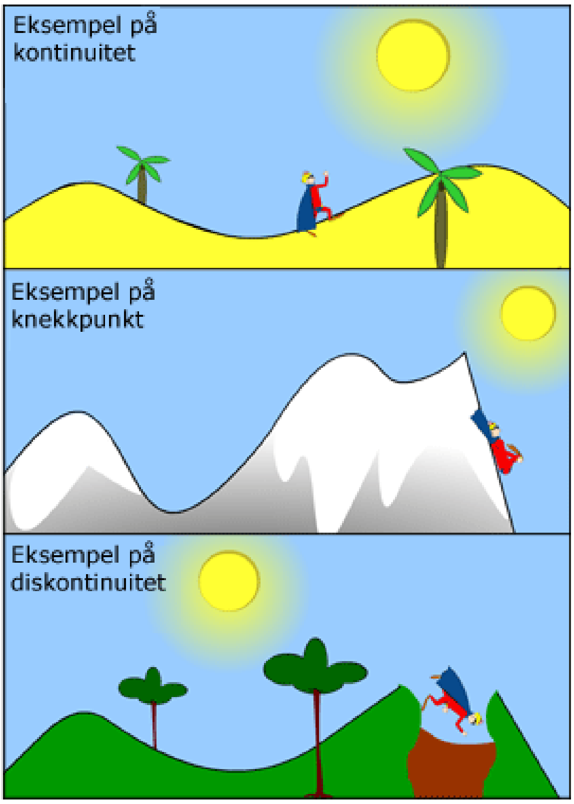
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x}{x^2+5}=$$ Dividerer hvert ledd med x^3

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}}$$ forkorter brøken i hvert ledd, om mulig

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}\to\frac{1-0}{0+0}=\frac{1}{0}$$ Grensen eksisterer ikke, men går mot uendelig, når $x\to\infty$.

6.2 Kontinuerlige funksjoner

Kontinuerlige funksjoner – i motsetning til <u>dis</u>kontinuerlige funksjoner



Kontinuerlige funksjoner har sammenhengende grafer for alle verdier av *x*.

En funksjon er kontinuerlig for $x=a$, dersom $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Merk alle polynomer er kontinuerlige

Oppstår gjerne for funksjoner med delt forskrift.

Brøkfunksjoner, der nevner kan bli lik 0 og tangensfunksjonen er eksempler på diskontinuerlige funksjoner.

Eksempel / oppgave

Funksjonen f er gitt ved $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ når $x\neq 3$.

Bestem $f(3)$ slik at f blir kontinuerlig for $x=3$.

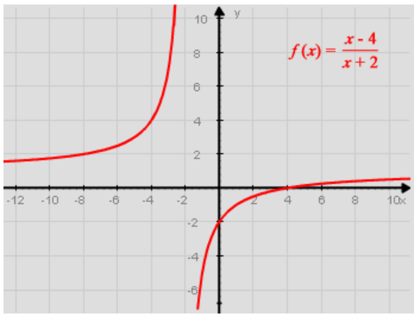
$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1$$

Vi får en kontinuerlig funksjon dersom vi velger $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & x\neq 3\\ 1 & x=3\end{cases}$

Vi kan tenke at vi «tetter» igjen hullet som var i grafen for $x = 3$.

6.3 Vertikale asymptoter og

6.4 Horisontale asymptote



Grafen til høyre har både en *vertikal* og en *horisontal asymptote.* Vi skal nå se på hvordan vi kan bestemme slike asymptoter.

Generelt for brøkfunksjoner $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gjelder at grafen har:

Vertikal asymptote for *x*-verdier slik at $Q(a) = 0$ og $P(a) \neq 0$

Horisontal asymptote: når $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = C \;\Rightarrow\; y = C$ er en asymptote

Ingen horisontal asymptote når $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

Eksempel

Finn horisontal og vertikal asymptote til $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Vertikal: Nevner er lik 0, når $x = 2$, samtidig er teller lik $2 - 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow f$ har en vertikal asymptote: $\underline{\underline{x = 2}}$

Horisontal:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$$

$\Rightarrow$ f har en horisontal asymptote $y = 1$

(tegn gjerne grafen, og pass på å få skrevet inn rett uttrykk, hele teller / hele nevner)

Når vi tegner grafen fungerer asymptotene som «hjelpelinjer» siden grafen nærmer seg asymptotene. På den måten trenger vi færre punkter for å tegne en graf som er nøyaktig nok.

6.5 Skrå asymptoter

Skrå asymptote når $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, når $P(x)$ har en grad høyere enn $Q(x)$.

Eksempel 1 $h(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ $D_h = \mathbb{R} / \{0\}$

$x = 0$ er en vertikal asymptote, siden nevner blir lik 0, når $x = 0$.

Det er en grads forskjell på teller og nevner, bruker derfor divisjon for å bestemme skråasymptoten.

$$\frac{x^3+1}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x+\frac{1}{x^2}$$ Her kunne vi dele opp i to brøker og forkorte,

men har vi flere ledd i nevner må vi bruke polynomdivisjon

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}(x+\frac{1}{x^2})=x \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\text{Skrå asymptote } y=x}}$$

Eksempel 2 Finn alle asymptotene til $f(x)=\dfrac{x-7}{x^2-x-2}$

i) Sjekker når nevner er lik 0: gir vertikal asymptotene x = -1 og x = 2

ii) Skrå / horisontal asymptote? Ikke skrå, når teller har grad lavere enn nevner.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-7}{x^2-x-2}$$ siden høyeste potens dominerer for store x-er, kan vi forenkle uttrykket

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$ alternativet, er metoden med å dividere alle ledd med x^2

$\underline{\underline{\text{Horisontal asymptote } y=0}}$

Eksempel 3 Analyser funksjonen $g(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x+1}$

a) Bestem definisjonsmengden.

Kan ikke dele på 0, slik at $D_g=\mathbb{R}/\{-1\}$

b) Bestem skjæring med koordinataksene.

Skjæring med y-aksen:

$$g(0)=\frac{0^2-3\cdot0-10}{0+1}=\frac{-10}{1}=-10$$ $\underline{\underline{\text{Skjæringspunkt med } y\text{-aksen } \left((0,-10)\right)}}$

Skjæringspunkt med x-aksen:

$$g(x)=0$$

$$\frac{x^2-3x-10}{x+1}=0$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$x_1=5$$

$$x_2=-2$$

$\underline{\underline{\text{Skjæringspunkt med x-aksen: } (-2,0) \text{ og } (5,0)}}$

c) Bestem eventuelle asymptoter.

Vertikal asymptote for x- verdier som gjør at nevner = 0. Se under a)

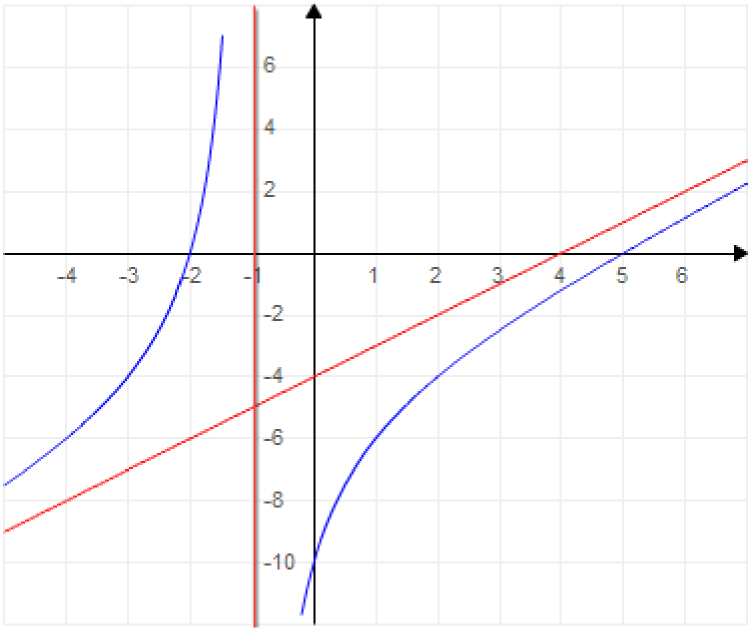
Asymptote: $\underline{\underline{x=-1}}$.

Teller har en grad høyere enn nevneren, g har derfor en skrå asymptote.

$$\left(x^2-3x-10\right):(x+1)=x-4-\frac{6}{x+1}$$
$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$
$$-4x-10$$
$$\underline{-\left(-4x-4\right)}$$
$$-6$$

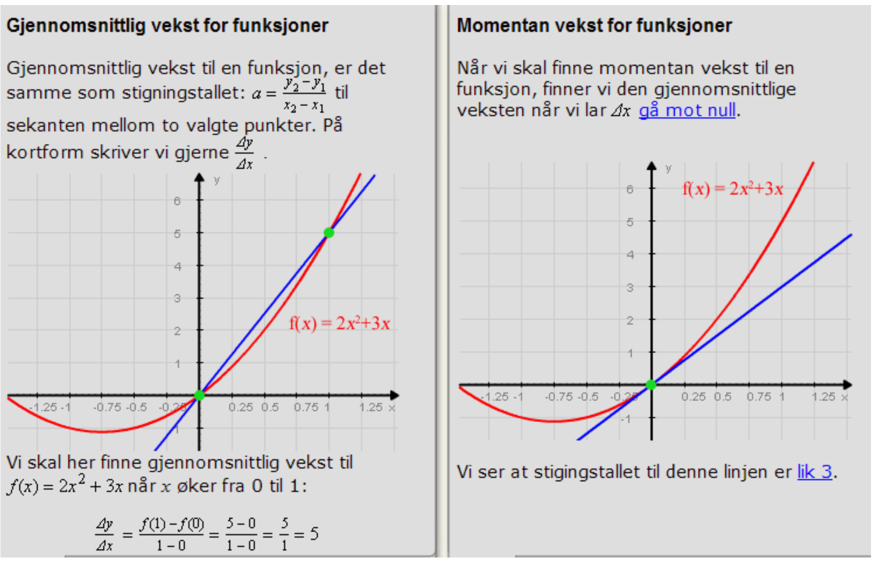
$\underline{\underline{\text{Asymptote} \qquad y=x-4}}$

d) Tegn grafen sammen med asymptotene.



Sammenlikner resultatene fra utregningen, når vi tegner asymptotene (røde) i forhold til graf (blå). Ser at asymptotene fungerer som hjelpe linjer for grafen.

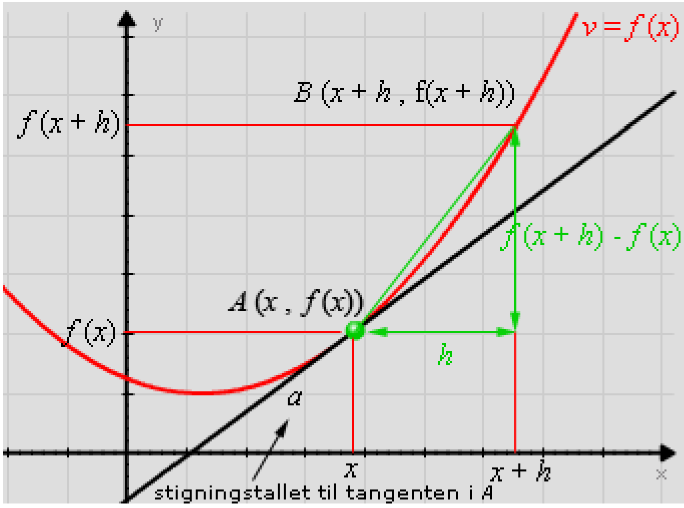
6.6 Vekstfart



Gjennomsnittlig vekst er det samme som å finne stigningstallet til den rette linjen som går mellom to (valgte) punkter på grafen. (En slik linje kalles en sekant)

Når vi bestemmer den momentane veksten, finner vi stigningstallet til tangenten i ett punkt. Det kan være vanskelig å bestemme stigningstallet nøyaktig dersom vi jobber grafisk.

Den deriverte gir oss et uttrykk for momentan vekstfart, slik at vi istedenfor kan regne ut stigningstallet:



Definisjon av den deriverte: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Denne grenseverdien er lik stigningstallet til tangenten i punktet $\left(x, f\left(x\right)\right)$

Eksempel: (uten å bruke definisjonen)

- Lar vi funksjonen være en rett linje, vet vi fra før at stigningstallet er a, slik at

Når $f(x) = ax + b$ *blir* $f'(x) = a$

- Lar vi funksjonen være konstant - svarer dette til en horisontal linje
  $f(x) = k$, $f'(x) = 0$

6.7 Tangenter og normaler

- Den deriverte i et punkt er lik stigningstallet til tangenten.
- Likningen til tangenten i et punkt $\left(x_1, y_1\right)$ kan bestemmes ved «ettpunkts-formelen», for en rett linje: $y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$ der $a = f'(x_1)$
- Normalen i et punkt på grafen har stigningstall gitt ved:

$$a_n = -\frac{1}{f'\left(x\right)}$$

6.8 Derivasjon

Derivasjonsregler for potenser:

Vi skal bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \left(\Delta x\right)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(2x + \Delta x\right)}{\Delta x}$$ faktoriserer, for å se forkortingen lettere

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x + \Delta x\right) = 2x$$

Vekstfarten i punktet der $x = 2$ er altså $f'\left(2\right) = 2 \cdot 2 = 4$

Men tilbake til potenser, vi kan på tilsvarende måte som for $f(x) = x^2$**,** bruke definisjonen for potenser av høyere grad.

Når n er et heltall gjelder $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = nx^{n-1}$, men faktisk holder denne regelen for alle reelle tal. Vi skriver derfor

Potensregel: $f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = rx^{r-1}$

Eksempler:

$f(x) = x^3$ *gir* $f'(x) = \underline{\underline{3x^2}}$

$g(x) = x^4$ *gir* $g'(x) = \underline{\underline{4x^3}}$

$h(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ *gir* $h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}$

$k(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ *gir* $k'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$

6.9 Fart og akselerasjon

Derivasjon ble oppfunnet og tatt i bruk omtrent samtidig (1600 tallet) av Isaac Newton og Gottfried Leibniz. Newton innførte derivasjonsbegrepet i sitt arbeid med fart og akselerasjon. Vi skal her se på sammenhengen mellom tilbakelagt strekning, fart og akselerasjon.

Eksempel.
En gjenstand beveger seg lang en rett linje og har flyttet seg $s(t)$ meter på t sekunder, der
$s(t) = 2t^2 + 4t$

Etter 4 og 6 sekunder har gjenstanden forflyttet seg:
$s(4) = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 48\,\mathrm{m}$

$s(6) = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 96\,\mathrm{m}$

Her er

$\triangle s = s(6) - s(4) = 96\,\mathrm{m} - 48\,\mathrm{m} = 48\,\mathrm{m}$

$\triangle t = 6\mathrm{s} - 4\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}$

For t $\in [4,6]$ er <u>gjennomsnittsfarten</u>: $\dfrac{\triangle s}{\triangle t} = \dfrac{48\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 24\,\mathrm{m/s}$

<u>Momentan</u> fart finner vi ved å la tidsintervallet gå mot 0.

$v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$ tilsvarende for akselerasjon som er endring av fart

$a(t) = v'(t) = s''(t)$

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Merk, dette er begreper vi kjenner godt fra hverdagen, det kan være lurt å tenke benevning om du er i tvil om hva som skal i teller og nevner på brøken.