Logaritmer

Idé: Finn x slik at $2^x = 12$.

Ser at $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ — ser for oss at det finnes en x mellom 3 og 4.

Om vi tester oss frem:

- $x = 3.5 \Rightarrow 2^x = 11.31$ For lavt
- $x = 3.6 \Rightarrow 2^x = 12.13$ For høyt
- $x = 3.55 \Rightarrow 2^x = 11.71$ For lavt
- $x = 3.58 \Rightarrow 2^x = 11.96$ For lavt
- $x = 3.59 \Rightarrow 2^x = 12.04$ For høyt.
- $x = 3.585 \Rightarrow 2^x = 12.0003$ såvidt for høyt.
- $x = 3.584 \Rightarrow 2^x = 11.991997$ såvidt for lavt.
- $x = 3.5849 \Rightarrow 2^x = 11.9995$ såvidt for lavt.

Vi kan gjette oss frem til svaret, men hadde vært greit om kalkulatoren bare ga oss rett svar uten gjetning.

Vil si: „Jeg vil løse $2^x = 12$. Hva er x?".

Kalkulatoren <u>har</u> en slik knapp, og den kalles for <u>logaritmen.</u>

Vil finne 2-er-logaritmen til 12, $\log_2(12)$

Definert som „den x-verdien som er slik at $2^x = 12$".

$$2^{\log_2(12)} = 12$$

Generelt:

$$\boxed{a^{\log_a(b)} = b}$$

Briggske logaritmer

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

$$10^{\log(a)} = a$$

Vi har en viss idé om hva en briggsk logaritme burde bli, bare ved å se på lengden til tallet.

Eks: $\log(72\,483\,535)$ er mellom 7 og 8.

Wild guess på sånn ca 7.9

Rett svar: 7.8602.

Eks: $\log_5(835\,793\,495) = ???$

Potenser og logaritmer:

Viktige potensregler:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Disse tre vil gi oss regler for logaritmer.

Definisjon av logaritme:

$$10^x = a \iff x = \log a$$

$$10^{\boxed{\log x + \log y}} = 10^{\log x} \cdot 10^{\log y} = \boxed{x \cdot y}$$

$$\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$$

$$10^{\boxed{\log x - \log y}} = \frac{10^{\log x}}{10^{\log y}} = \frac{x}{y}$$

$$\log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$10^{x \cdot \log(y)} = \left(10^{\log y}\right)^x = y^x$$

$$\log(y^x) = x \cdot \log(y)$$

Tre logaritmeregler:

1. $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
3. $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

Eks: $\log(3^2) = 2 \cdot \log 3$

$$\log(3 \cdot 3) = \log(3) + \log(3) = 2 \cdot \log 3$$

Idé: Bruke regel 3 for å kan ende opp med å trenge Briggske logaritmen:

Vil løse

$$5^x = 312$$

Ta logaritmen av begge sidene:

$$\log(5^x) = \log(312)$$

$$x \cdot \log(5) = \log(312)$$ 3

$$x = \frac{\log 312}{\log 5} = 3.5683$$

Generell regel: $\boxed{\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}}$

Kan bruke logaritme til å „skrive om" potenslikningen til en valgfri potens.

$$2 = 10^{\log 2}$$

$$2^x = 713$$

$$(10^{\log 2})^x = 713$$

$$10^{\log(2) \cdot x} = 713 \iff 10^{0.30103x} = 713$$

Idé: Vi hadde en ny type likninger, eksponensiallikninger,

$$10^x = a$$

Hadde ingen løsning, så vi fant på en ny type funksjon som ga oss rett svar, $\log a$.

Var i akkurat samme situasjon tidligere, ville løse en ny type likning,

$$x^2 = a$$

Introduserte en ny funksjon, $\sqrt{\cdot}$, som ga oss rett svar.

Kan nå løse eksponentiallikninger.

$$10^x = 5$$

$$x = \log 5$$

$$= 0.69897$$

$$\log(10^x) = \log(5)$$

$$x \cdot \log(10) = \log(5)$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 10} = 0.69897$$

$$5 \cdot 7^x = 79$$

Løsning 1:

$$\frac{79}{5} = 15.8$$

$$7^x = \frac{79}{5}$$

$$\log(7^x) = \log\left(\frac{79}{5}\right)$$

$$x \cdot \log 7 = \log\left(\frac{79}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{\log(15.8)}{\log(7)} = 1.4184$$

Løsning ② $5 \cdot 7^x = 79$

$$\log(5 \cdot 7^x) = \log(79)$$

$$\log(5) + \log(7^x) = \log(79)$$

$$\log(5) + x \cdot \log(7) = \log(79)$$

$$x \cdot \log 7 = \log(79) - \log(5)$$

$$x = \frac{\log(79) - \log(5)}{\log(7)} = 1.4184.$$

Har at $\log(79) - \log 5 = \log \frac{79}{5} = \log(15.8)$

Eks: $3 \cdot 5^x = 4 \cdot 2^x$

Løsning ①: $\log(3 \cdot 5^x) = \log(4 \cdot 2^x)$

$$\log(3) + x \cdot \log(5) = \log(4) + x \cdot \log(2)$$

$$x \cdot \log 5 - x \cdot \log(2) = \log 4 - \log 3$$

$$x \cdot (\log 5 - \log 2) = \log 4 - \log 3$$

$$x = \frac{\log(4) - \log(3)}{\log(5) - \log(2)} = \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)}{\log \frac{5}{2}} = 0.3140$$

Løsning ② $\frac{5^x}{2^x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{4}{3} \Rightarrow x \cdot \log\left(\frac{5}{2}\right) = \log\left(\frac{4}{3}\right)$

$$\Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)}{\log\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Eks: $2^x = -5$ <u>Umulig!</u>

2^x er alltid positivt!

$a^x > 0$ for <u>alle</u> x. $(a > 0)$

$a^{-x} = \boxed{\frac{1}{a^x}}$ $\quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} > 0$

$2^x = -5$ $\quad x \cdot \log 2 = \log(-5)$

$$x = \frac{\log(-5)}{\log 2}$$ Gir <u>error</u>.

Kan <u>ikke</u> regne logaritmen til negative tall.

Hva må 10 opphøyes i for å få noe negativt.

$10^x > 0$ for alle x.

Kan heller ikke regne logaritmen til 0.

Eks: Hva er definisjonsmengden til

$f(x) = \log(x^2 - 1)$?

Må ha at $x^2 - 1 > 0$ $\quad x < -1$ eller $x > 1$