Forelesning - 20.01.22

FYS009-G 21H - Fysikk realfagskurs

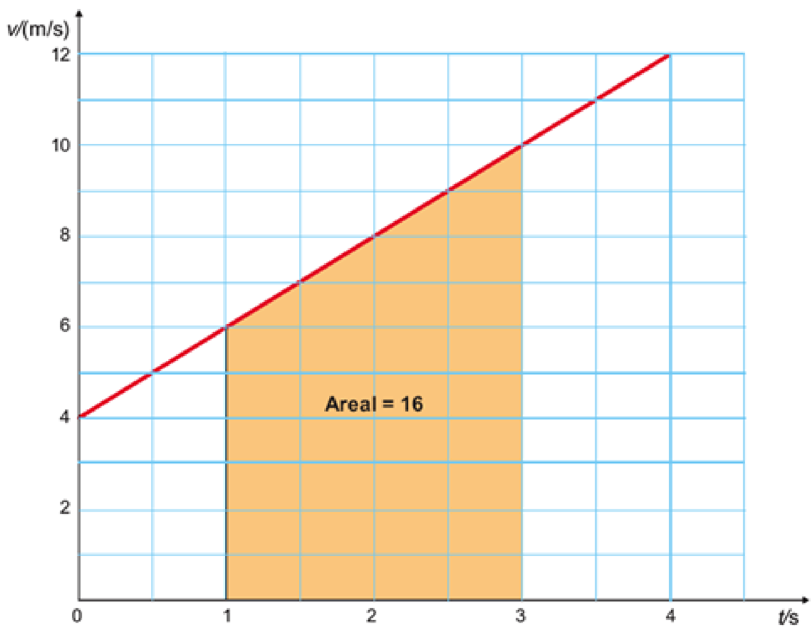
Kapittel 14 - Bevegelse II

Forelesningene dekker i hovedsak boken *Rom-Stoff-Tid - Fysikk forkurs* fra Cappelen Damm. I tillegg til teorien gjennomgåes det endel simuleringer og regnede eksempler. De fleste eksemplene er orientert etter oppgaver fra boka, men også andre oppgaver og problemstillinger kan taes opp.

Bevegelsesligningene

Utledning av bevegelseslikningene. Boka: øverst side 380. og Bevegelseslikningene

Areal under fartsgrafen og integrasjon.



Link: *Simulering - Vei- og fartsgrafer*

Link: *Simulering - Bevegelsesgrafer*

Regnet: Eksempel 14.1

Regnet: Eksempel 14.2

Noen flervalgsoppgaver som ble gjennomgått:

Regnet i plenum: Tur til postkontoret

Regnet i plenum: Loddrett kast

Regnet oppgave:

Eksempel: Oppgave 14.302

Bevegelseslikningene

Definisjon av akselerasjon og hastighet

Akselerasjon er definert som endring av hastighet over tid:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$$

der $v_1 = v$, $t_1 = t$ og $t_0 = 0$. Når endringen taes over et endelig tidsrom Δt snakker man om *gjennomsnittsakselerasjon*. Når $\Delta t \to dt$ definerer vi det ofte som *momentanakselerasjon*. På samme måte kan man si at hastighet er definert som endring av posisjon over tid

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t}$$

Når endringen taes over et endelig tidsrom Δt snakker man om *gjennomsnittsfart*. Når $\Delta t \to dt$ definerer vi det ofte som *momentanfart*.

Bevegelseslikningene basert på definisjonen av akselerasjon og $s = vt$.

Vi starter med

$$a = \frac{v - v_0}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = v_0 + at}$$

og når a er konstant, vil dette være en *rett linje* i et vt-diagram (fartsgraf).

Neste steg er å betrakte $s = vt$. Hvis akselerasjonen $a = 0$ får vi konstant fart. Hvis man har jevn akselerasjon $a \neq 0$, kan vi sette

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_0}{2} = \frac{v + v_0}{2}$$

Da vil

$$s = \bar{v}t$$

Husk at hastigheten v alltid har et fortegn, slik at hvis man flytter seg fra punkt A til B, og tilbake etterpå, så vil $\bar{v} = 0$. Da blir

$$\boxed{s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t}$$

Vi har altså

$$v = v_0 + at \qquad \text{og} \qquad s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t$$

Vi setter uttrykket for v til venstre inn i uttrykket for s til høyre

$$\begin{aligned} s = \left(\frac{v_0 + at + v_0}{2}\right) t = \left(\frac{2v_0 + at}{2}\right) t &= \left(v_0 + \frac{at}{2}\right) t \\ &= \boxed{v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2} \end{aligned}$$

Deretter prøver vi å utlede den såkalte *tidløsformelen* fra dette. Vi eliminerer tiden t fra likningene. Vi har at

$$v = v_0 + at \qquad \text{og} \qquad s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t$$

Fra den første får vi at

$$v = v_0 + at \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v - v_0}{a}$$

og dette setter vi inn i uttrykket for s.

$$s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 2as = (v + v_0)(v - v_0) = v^2 - v_0^2$$

slik at

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2as}$$

Bevegelseslikninger for bevegelse med konstant akselerasjon.

$$v = v_0 + at$$

$$s = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) t$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

Derivasjon og integrasjon av bevegelseslikningene

Vi husker at

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{og} \qquad \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Vi kan godt skrive dette på differensialform, og vi får da for momentanhastigheten og momentanakselerasjonen at

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t) \qquad \text{og} \qquad a = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

Dette innebærer at

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt \qquad \text{og} \qquad v = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$$

Derivasjon:

Vi setter

$$v = s'(t) = \left(v_0 t + \tfrac{1}{2}\,at^2\right)' = v_0 + \tfrac{1}{2}\,a(2t) = v_0 + at$$

og

$$a = v'(t) = (v_0 + at)' = a$$

Integrasjon:

Vi setter

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (v_0 + at)\,dt = \left[v_0 t + a\left(\tfrac{1}{2}\,t^2\right) + C\right]_{t_0}^{t_1}$$

setter vi $t_0 = 0$, $t_1 = t$ og $s(0) = s_0$ får vi

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\,at^2$$

og

$$v = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a\,dt = \left[at + C\right]_{t_0}^{t_1}$$

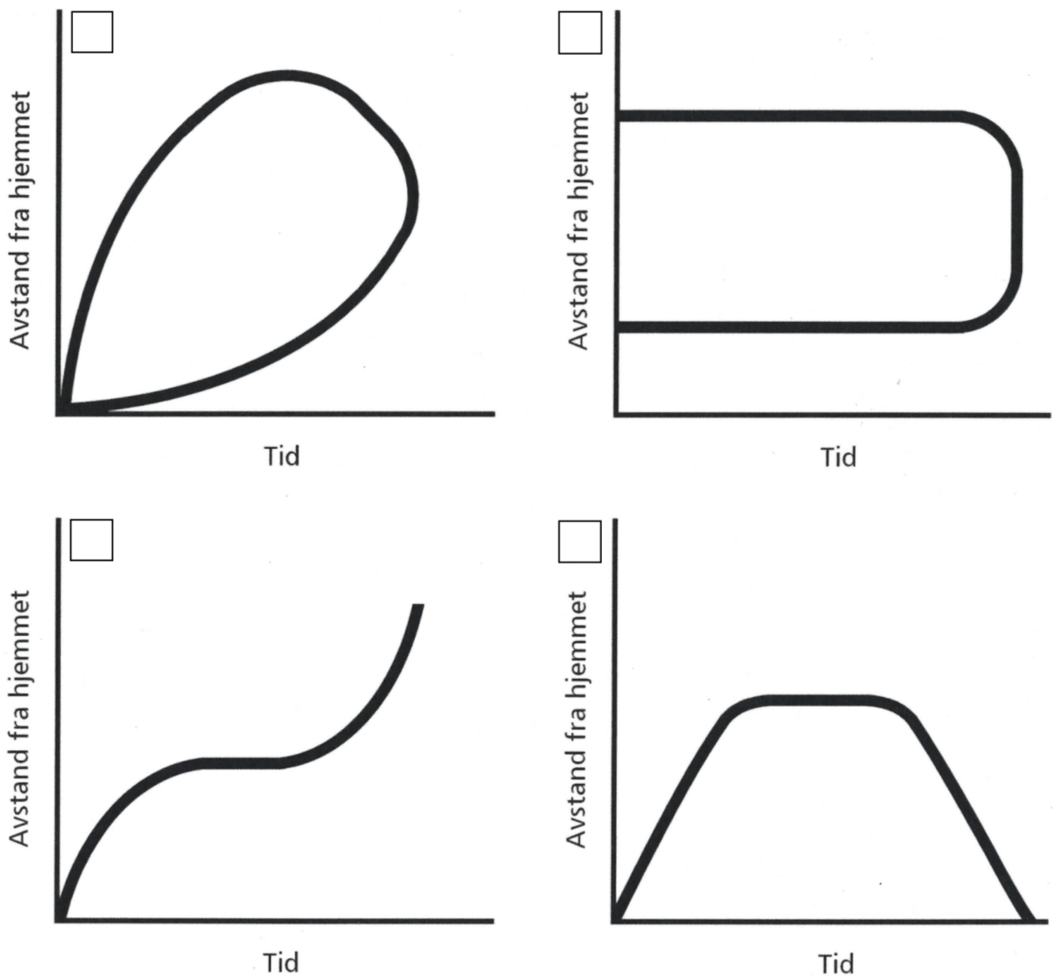
setter vi $t_0 = 0$, $t_1 = t$ og $v(0) = v_0$ får vi

$$v = v_0 + at$$

Oppgave - Tur til postkontoret

Hanne skal til postkontoret for å levere en pakke. Hun går hjemmefra med jevn hastighet. På postkontoret må hun stå i kø før hun blir ekspedert. Deretter går hun hjem med samme hastighet.

Hvilken av grafene under mener du beskriver turen til Hanne best?



Løsning:

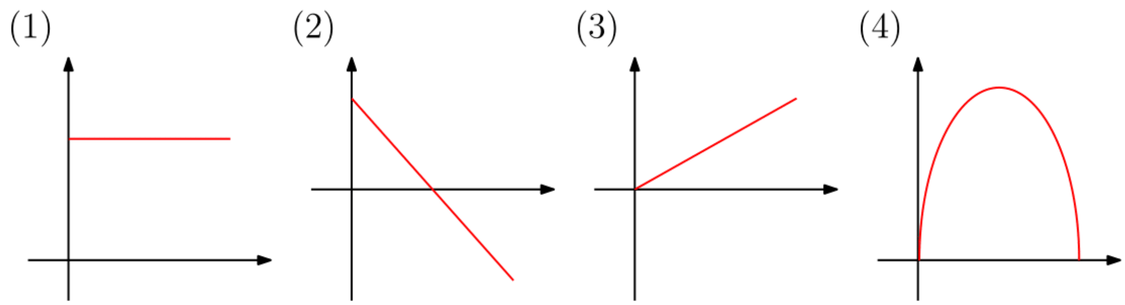
Graf (1) og graf (2) er ikke riktige, fordi Hanne her er to plasser på en gang. Ved et tidspunkt t vil hun som regel ha to mulige verdier av s, hvilket er umulig her.

Graf (3) er mulig, men her avslutter hun i en annen avstand fra hjemmet $(s \neq 0)$ enn hun startet $(s = 0)$. Hun har altså ikke gått hjem etter turen på postkontoret.

Graf (4) stemmer med all informasjon som er gitt i oppgaven.

Oppgave - Loddrett kast

For et loddrett kast oppover lar vi positiv retning peke oppover. Hvilken av grafene viser farten som funksjon av tiden?



Løsning:

Vi velger positiv retning oppover. Når en ball da kastes oppover vil hastigheten avta, men så lenge ballen beveger seg oppover vil farten forsatt være positiv.

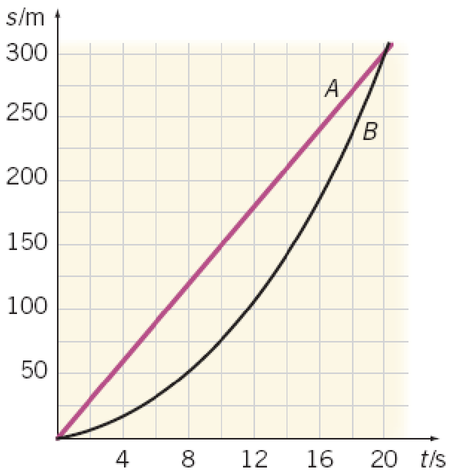
Når ballen når toppen av banen blir farten lik null, og deretter negativ når ballen faller nedover igjen.

Den eneste grafen som passer til dette er graf (2).

LØST OPPGAVE 14.302

14.302

Figuren viser posisjonsgrafen for to tog A og B som kjører på parallelle spor.



a) Hva er farten til togene A og B 8,0 s etter start?

b) Ved hvilket tidspunkt har togene samme fart?

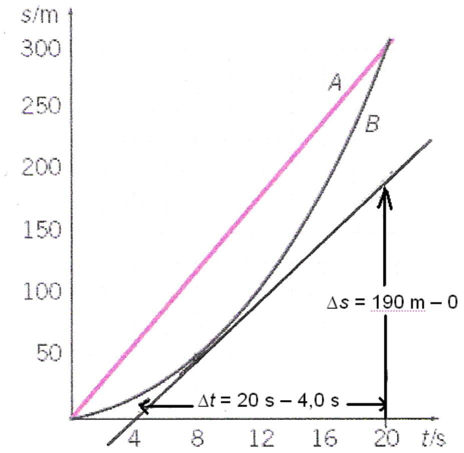
c) Hvilket tog har størst gjennomsnittsakselerasjon de første 20 sekundene?

Løsning:

a) Posisjonsgrafen til tog A er en rett linje. Da er farten til tog A konstant og lik stigningstallet til posisjonsgrafen. Grafen går gjennom punktene (0, 0) og (10 s, 150 m). Farten til tog A etter 8,0 s er altså lik den konstante farten.

$$v_A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{150\ \text{m} - 0}{10\ \text{s} - 0} = \underline{15\ \text{m/s}}$$

For å finne farten til tog B må vi bestemme den deriverte av posisjonsfunksjonen ved t = 8,0 s. Den er lik stigningstallet til tangenten til posisjonsgrafen i punktet (8,0 s, 50 m). Vi tegner tangenten etter beste skjønn, se figuren nedenfor.



På tangenten leser vi av – så godt vi kan – koordinatene til to punkter. Vi har valgt punktene (4,0 s, 0) og (20 s, 190 m). Da finner vi farten til tog B som stigningstallet til tangenten.

$$v_B = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{190\ \text{m} - 0}{20\ \text{s} - 4{,}0\ \text{s}} = \underline{12\ \text{m/s}}$$

Oppgave 14.302b

Hastighetene til togene er gitt ved stigningstallet til posisjonsgrafen. Togene har derfor samme hastighet når *tangentene* til posisjonsgrafene er like.

Utfra grafene ser dette ut til å være omtrent når $t = 12\ \mathrm{m/s}$.

Oppgave 14.302c

Etter $t = 20\ \mathrm{s}$ har begge togene tilbakelagt samme strekning $s = 300\ \mathrm{m}$. Vi setter

$$s_A = \bar{v}_A t_A$$
$$s_B = \bar{v}_B t_B$$

der $\bar{v}_A$ og $\bar{v}_B$ er gjennomsnittsfarten til henholdsvis tog A og B over strekningen s. Vi ser da at siden $s_A = s_B$ og $t_A = t_B$ så må

$$\boxed{\bar{v}_A = \bar{v}_B}$$

Vi bruker deretter formelen $v = v_0 + at$, og beregner middelverdiene $\bar{v}_A$ og $\bar{v}_B$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{0A} + \bar{a}_A t_A$$
$$\bar{v}_B = \bar{v}_{0B} + \bar{a}_B t_B$$

Siden v_{0A} og v_{0B} er konstanter så blir $\bar{v}_{0A} = v_{0A}$ og $\bar{v}_{0B} = v_{0B}$. I tillegg vet vi at $t_A = t_B$. Da setter vi

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B \qquad \Rightarrow \qquad v_{0A} + \bar{a}_A t_A = v_{0B} + \bar{a}_B t_B$$

Vi kan se fra figuren at $v_{0A} > v_{0B}$, siden posisjonskurven for tog A er brattere enn for tog B i startpunktet $t = 0$. Da følger det at

$$v_{0A} > v_{0B} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a_A < a_B}$$