Kap. 18 Mengdelære og kombinatorikk

18.1 Mengdelære

Mengde på listeform: $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
Notasjon for å beskrive at et element tilhører mengden: eks $4 \in S$

Del – mengde

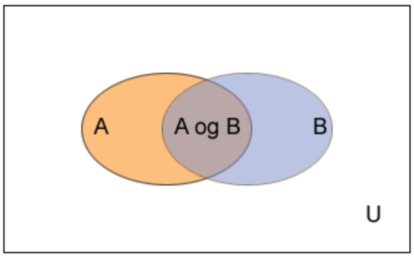
$A = \{0,1,2\}$

$B = \{0,2,4,6,8\}$

Både A og B er delmengder av S, dette kan vi skrive: $A \subset S$ $B \subset S$

Snittet av mengder (felles elementer)
$A \cap B = \{0,2\}$

(kan leses som: ”og”)



La $C = \{1,3,5,7,9\}$ Da er $B \cap C = \varnothing$ (den tomme mengde)

Union: kan leses som:” eller” $A \cup B = \{0,1,2,4,6,8\}$

Minner om store tallmengder har egne navn:

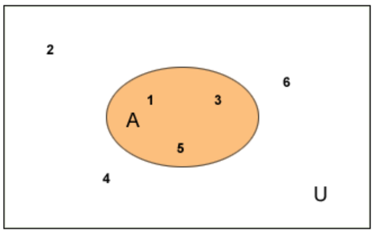
$\mathbb{N}$ – naturlige tall 1,2,3,...
$\mathbb{Z}$ – hele tall ...,-2-1,0,1,2,3,...
$\mathbb{Q}$ – rasjonale tall (hele tall + brøker)
$\mathbb{R}$ – reelle tall (alle tall på tallinja)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Intervaller er delmengder av de reelle tall (Her kan det være lurt å tegne intervallene under tallinja for å få et bilde av hvilket deler som hører med i mengden, dersom du er det minste i tvil.)

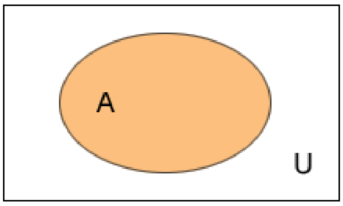
Eksempler: Lukket $[3,5]$, åpent $\langle 3,5 \rangle$

18.2 Venn diagram: brukes for å illustrere mengder og kan hjelpe oss til å sortere opplysninger.

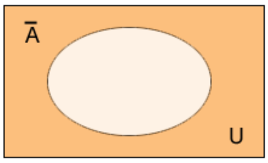


Hendelsen A er oppfylt dersom utfallene: 1, 3 eller 5 inntreffer.

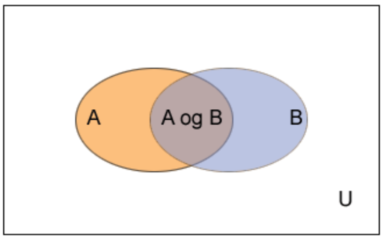
Mengden A



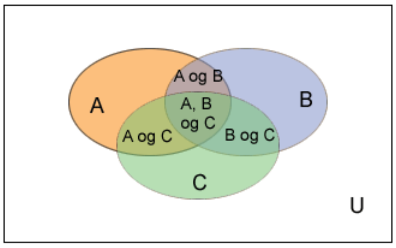
Komplement mengden $\overline{A} = S \setminus A$, det vil si alle utfall som ikke er med i A



Snitt Får frem hva som er felles

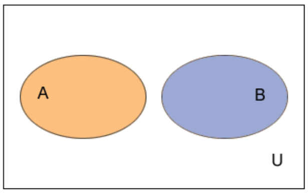


Her i forhold til tre ulike mengder



Disjunkte mengder $A \cap B = \varnothing$

Ser her to mengder som ikke har noe element felles.



Kombinatorikk = matematisk emne som angår prinsipper og metoder for systematisk telling og beregning av antall.

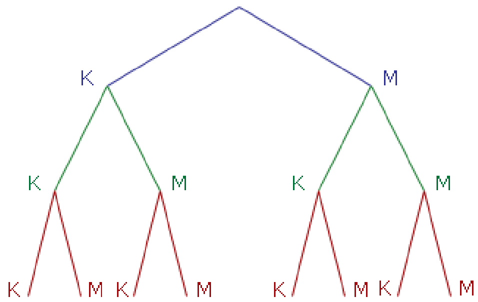
I emnet kombinatorikk skal vi forsøke å systematisere tellingen for å bestemme antallet gunstige og mulige i ulike situasjoner. Der vi tar et utvalg fra en endelig mengde med n elementer.

18.3 Multiplikasjonsprinsippet

Hvor mange ulike kombinasjoner (når vi tar hensyn til rekkefølgen)

Valgtre
Et valgtre kan være en enkel måte å illustrere alternativene & kombinasjonene.
Her et valgtre for 3 kast med mynt (K /M)

Opptelling av antall grener viser at vi kan få 8 ulike utfall.
(Det kan vi regne ut som $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$)



Eksempel: Kode til bankkort

a) Antall ulike koder: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\ 000$

b) Bare ulike siffer: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

Multiplikasjonsprinsippet:
Hvis vi skal gjøre to valg med n_1 valg muligheter i 1. valg og n_2 valg muligheter i 2. valg. Finnes det $n_1 \cdot n_2$ ulike kombinasjoner.
(Utvides tilsvarende for valg med flere trinn)

Et spesialtilfelle er når vi velger *k* ganger og har *n* valgmuligheter hver gang. Da finnes i alt:

$\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot .... \cdot n}^{k} = n^k$ ulike valgmuligheter.

Eksempel på en slik situasjon er tippekupongen. Vi har tre valg: H, U, B for hver kamp og med 12 kamper blir det i alt 3^{12} ulike rekker.

18.3 Ordnede utvalg

✓ Vi kaller det et **ordnet utvalg**, når rekkefølgen er av betydning.

Eksempel på et ordnet utvalg er: kode til et bankkort
Ønsker vi å bestemme en ny kode med 4 siffer kan vi for hvert siffer velge mellom tallene fra 0,1,2, ...9, dvs. 10 ulike muligheter hver gang et siffer skal velges.
Antall ulike koder blir da $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$

✓ Eksempelet med valg av kode, er et **ordnet utvalg med tilbakelegging**. Hver gang vi velger et siffer har vi 10 ulike tall å velge blant.

✓ Et eksempel på **et ordnet utvalg uten tilbakelegging.**

Tenk deg at personen som skal velge kode (4 siffer) ønsker at alle siffer skal være ulike? Antall ulike koder blir da redusert til $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$, siden mulig valg minker med 1 for hver gang.

Dette går greit å regne ut, når vi velger ut få elementer. Men hvordan kan vi skrive det «matematisk»?

Vi har en funksjon som heter n! (les n fakultet)
$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{120}}$

Merk vi definerer / bestemmer at: $0! = 1$ og $1! = 1$

Produktet $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$, kan vi da skrive som:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Generelt antall ulike ordnede utvalg når r elementer velges uten tilbakelegging fra totalt n,

er: $\dfrac{n!}{(n-r)!} = n\,\mathrm{Pr}$ P – for permutsjoner, altså antall ulike rekkefølger.

18.4 Uordnede utvalg

- ✓ Et eksempel på **et uordnet utvalg uten tilbakelegging.**

  Hvor mange ikke ordnede utvalg bestående av tre bokstaver kan dannes av A, B, C og D når utvelgelsen skjer uten tilbakelegging?
  Her er det ikke flere alternativer enn at vi kan skrive dem ned:
  ABC ABD ACD BCD
  Matematisk kan vi regne dette ut ved hjelp av Binomialkoeffisienten:

  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = nCr$ $\quad C -$ for antall ulike Combination / kombinasjoner

  Antall kombinasjoner av r elemnter valg fra totalt n elementer.
  Over skulle vi velge ut kombinasjoner av 3 av fra totalt 4 bokstaver.

  $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot1} = \underline{\underline{4}}$ $\quad 4C3$

- ✓ **Eksempel med Lotto tall**

  Lotto er et tallspill der det trekkes sju hovedtall av totalt 34 tall, i tillegg trekkes tre tilleggstall.

  Hva er sannsynligheten for at du velger å fylle ut kupongen slik at du får syv rette?

  Antall ulike kombinasjoner i Lotto $= \binom{34}{7} = 34C7 = 5379616$

  $i)$ $\quad P(\text{gjette 7 rette på neste trekning}) = \frac{g}{m} = \frac{1}{5379616} \approx \underline{\underline{1{,}86\cdot10^{-7}}}$

  $ii)$ $\quad P(\text{6 rette } +1\,\text{tillegstall}) = \frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{34}{7}} = \frac{21}{5379616} \approx \underline{\underline{3{,}90\cdot10^{-6}}}$

En oversikt ulike utvalg:

	Med tilbakelegging	Uten tilbakelegging
Ordnet	n^r	$\frac{n!}{(n-r)!} = nPr$
Uordnet	*lite brukt*	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = nCr$

Eksempler:

1) Regn ut:

a) $\frac{6!}{4!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=6\cdot 5=\underline{\underline{30}}$

b) $\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cdot (n-1)!}{(n-1)!}=\underline{\underline{n}}$

c) $\frac{n!}{(n-2)!}=$

d) $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot (5-3)!}=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2}=5\cdot 2=\underline{\underline{10}}$ $\qquad 5[nCr]3$

I oppgaver med kortstokk, menes en vanlig kortstokk med 52 kort. (De ulike fargene er: 13 hjerter, 13 ruter, 13 spar og 13 kløver).

2) En korthånd i poker består av 5 kort.

a. Hvor mange ulike korthender bestående av 5 kort finnes det?
Løsning: Dette er et uordnet utvalg uten tilbakelegging så vi bruker
$52[nCr]5=\underline{\underline{2\,598\,960}}$

b. Hvor mange korthender finnes det (i poker) med 5 kort av samme farge?
Vi har fire «farger», hver med 13 kort. Antallet blir derfor:
$4\cdot 13[nCr]5=\underline{\underline{5148}}$