utsatt sommeren

Eksamen matematikk 3-termin ~~våren~~ 2016

Oppgave 1

Bruk L'Hopitals regel til å finne følgende grenser:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

Oppgave 2.

Finn den deriverte av $y(x)$ for følgende funksjoner:

1. $y=\dfrac{x}{x+1}$, 2. $y=x\cos(5x)$, 3. $y=\ln(x^2+3)$.

Oppgave 3

Du fyller vann inn i en kuleformet ballong slik at radien r øker. Volumet er $V=(4\pi/3)r^3$.

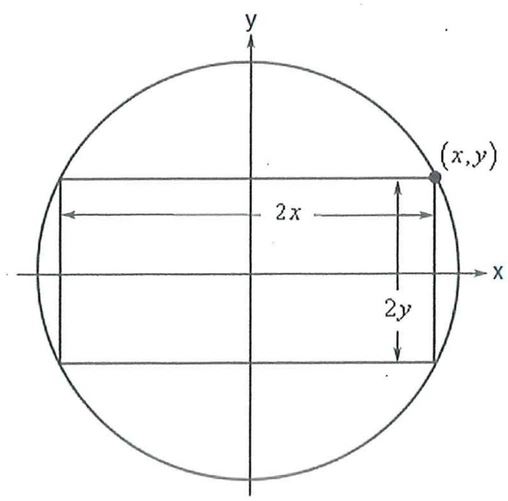
Hvor raskt øker radien når radien er $0{,}1m$ og du fyller inn en liter per sekund?

Oppgave 4

Inni en sirkel med radius $r=1$ er det en firkant som vist i figuren. Sirkellikningen er $x^2+y^2=1$.

a) Vis at firkantens areal er $A(x)=4x\sqrt{1-x^2}$.

b) Hvor stor er den største firkanten vi kan ha i sirkelen. Hvilken fasong har denne firkanten?



Oppgave 5

Beregn følgende integraler:

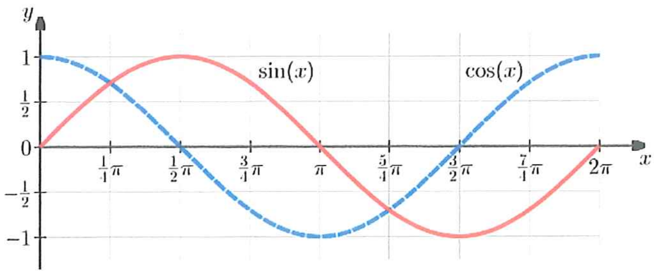
a) $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$,

b) $\int (\sin x)^{3/2} \cos x \, dx$

c) $\int x e^x \, dx$

Oppgave 6

a) Vis at de to skjæringspunktene med minst x-verdier for positive verdier av x til grafene av funksjonene $y = \sin x$ og $y = \cos x$ er $\left(\pi/4,\ 1/\sqrt{2}\right)$ og $\left(5\pi/4,\ -1/\sqrt{2}\right)$.



b) Finn arealet mellom grafene i området mellom de to skjæringspunktene.

Oppgave 7

a) Vis ved å bruke delvis integrasjon og identiteten $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ at $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C$.

b) Finn volumet av rotasjonslegemet som dannes når flaten mellom x-aksen, y-aksen og grafen til kurven $y = \cos x$ roteres om x-aksen.

Oppgave 8

Finn avstanden fra punktet $(6,0,-6)$ til planet $x - y = 4$.

Oppgave 9

Gitt tre vektorer $\vec{A} = [1,1,-1]$, $\vec{B} = [2,1,1]$, $\vec{C} = [-1,-2,3]$

a) Finn arealet utspent av vektorene $\vec{A}$ og $\vec{B}$.

b) Finn volumet utspent av vektorene $\vec{A}$, $\vec{B}$ og $\vec{C}$.

utsatt sommeren

Løsningsforslag eksamen i matematikk tretermin ~~våren~~ 2016

Oppgave 1

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$ er et ubestemt uttrykk. For å finne verdien av grensen bruker vi L'Hopitals regel og får: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\underline{\underline{1}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0(-\infty)$ som er et ubestemt uttrykk. Vi gjør det da om til en brøk og bruker L'Hopitals regel: $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}x=\underline{\underline{0}}$.

Oppgave 2

Volumet til en kule med radius r er $V=(4\pi/3)r^3$. Derivasjon ved å bruke kjerneregelen gir:

$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$, som leder til: $\underline{\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}}$.

Innsetting av $r=0{,}1m$ og $\frac{dV}{dt}=10^{-3}\frac{m^3}{s}$ gir $\frac{dr}{dt}=\frac{10^{-3}m^3/s}{4\pi\cdot 10^{-2}m^2}=\underline{\frac{1}{40\pi}\frac{m}{s}=\frac{10}{4\pi}\frac{cm}{s}\approx 0{,}8\frac{cm}{s}}$.

Oppgave 3

1. $y=\frac{x}{x+1}$. Derivasjon gir $y'=\frac{1(x+1)-x}{(x+1)^2}=\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}$.
2. $y=x\cos(5x)$. Derivasjon gir $\underline{y'=\cos(5x)-5x\sin(5x)}$.
3. $y=\ln(x^2+3)$. Derivasjon gir $y'=\underline{\frac{2x}{x^2+3}}$.

Oppgave 4

a) Firkantens areal er $A=4xy$. Fra sirkellikningen fås for halvsirkelen $y=\sqrt{1-x^2}$, som gir $\underline{A=4x\sqrt{1-x^2}}$.

b) Maksimalt areal fås når $A'=0$. Derivasjon gir:

$A'=4\sqrt{1-x^2}+4x\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4(1-x^2)-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}=4\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0$ gir $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ som gir

$A_{maks}=4\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{2}}$.

Videre fås $y=\frac{1}{\sqrt{2}}=x$ som viser at firkanten med maksimalt areal er et kvadrat.

Oppgave 5

a) $I=\int(2x+1)^{-3}dx$, $u=2x+1$, $du=2dx$, $dx=(1/2)du$ som gir

$$I=\frac{1}{2}\int u^{-3}du=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-2}+C=\underline{-\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+1)^2}+C}.$$

b) $I=\int(\sin x)^{3/2}\cos x\,dx$, $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$ som gir

$$I=\int u^{3/2}du=\frac{1}{1+3/2}u^{1+3/2}+C=\frac{2}{5}u^{5/2}+C=\underline{\frac{2}{5}(\sin x)^{5/2}+C}.$$

c) $I=\int xe^x dx$. Bruker delvis integrasjon og får: $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=\underline{xe^x-e^x+C}$.

Oppgave 6

a) Grafen til funksjonene $y=\sin x$ og $y=\cos x$ skjærer hverandre i punkter med x-verdier gitt ved $\sin x=\cos x$, dvs. $\tan x=1$. Ved å bruke enhetssirkelen ser vi at de to minste, positive vinklene er $x=\pi/4$ som gir $y=\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ og $x=5\pi/4$ som gir $y=\sin(5\pi/4)=-1/\sqrt{2}$. Dvs. skjæringspunktet er $\underline{(\pi/4,\ 1/\sqrt{2})}$ og $\underline{(5\pi/4,\ -1/\sqrt{2})}$.

b) Arealet mellom grafene er:

$$A=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4}=-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\underline{2\sqrt{2}}.$$

Oppgave 7

a) $I=\int\cos^2 x\,dx=\int\cos x\cos x\,dx$. Vi innfører $u'=\cos x$, $u=\sin x$, $v=\cos x$, $v'=-\sin x$

Ved å bruke formelen for delvis integrasjon, $\int u'v\,dx=uv-\int uv'dx$, fås da:

$I=\sin x\cos x+\int\sin^2 x\,dx=\sin x\ cox+\int(1-\cos^2 x)dx=\sin x\cos x+x+2C-I$., der jeg har valt å kalle integrasjonskonstanten $2C$. Dermed fås $2I=\sin x\cos x-x+2C$ som gir

$$\underline{\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{x}{2}+C}.$$

b) Volumet til rotasjonslegemet er:

$$V=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}\sin 0\cos 0+0\right)=\underline{\frac{\pi}{4}}.$$

Oppgave 8

Vi skal finne avstanden fra punktet $(6,0,-6)$ til planet $x-y=4$. Da brukes at avstanden fra et punkt $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ til et plan med likningen $Ax+By+Cz+D=0$ er $d=\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Her er $x_0=6$, $y_0=0$, $z_0=-6$ og $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-4$. Dette gir $d=\dfrac{6-4}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\sqrt{2}}$.

Oppgave 9

a) Arealet utspent av vektorene $\vec{A} = [1,1,-1]$, $\vec{B} = [2,1,1]$ er:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left|[2,\ 3,\ -1]\right| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \underline{\sqrt{14}}.$$

b) Volumet utspent av vektorene $\vec{A}$, $\vec{B}$ og $\vec{C} = [-1,-2,3]$ er:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5-7+3 = \underline{1}.$$