Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{a^2b}{\left(\sqrt{a^3b}\right)^4} = \frac{a^2b}{\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^4} = \frac{a^2b}{a^6b^2} = \underline{\underline{\frac{1}{a^4b}}}$$

b) Løs likningen ved regning:

$$4\sin x - \sqrt{2} - \sqrt{6} = 0 \qquad x \in [0, 360^\circ\rangle$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,966 \quad \to \quad \underline{\underline{x_1 = 75^\circ,\ x_2 = 105^\circ}}$$

c) Løs likningen ved regning:

$$4(\ln x)^2 - \ln x^5 + 1 = 0 \quad \to \quad 4(\ln x)^2 - 5\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases} \quad \to \quad x = e^{\ln x} = \begin{cases} e^1 \\ e^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad \to \quad \underline{\underline{x = \begin{cases} e \\ \sqrt[4]{e} \end{cases}}}$$

d) Løs likningen ved regning:

$$\sqrt{x+2} - 2x = 1 \quad \to \quad \sqrt{x+2} = 2x+1 \quad \to \quad x+2 = (2x+1)^2$$

$$x+2 = 4x^2 + 4x + 1 \quad \to \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\underline{x = \begin{cases} 0,25 \\ -1 \end{cases}}$$

$$x = 0,25: \ V.S. = \sqrt{2,25} - 0,5 = 1,5 - 0,5 = 1 = H.S. \quad \underline{x = 0,25 \ \ passer\ i\ likningen}$$

$$x = 1: \quad V.S. = \sqrt{3} - 2 \approx 0,27 \neq H.S. \qquad \underline{x = 1\ passer\ ikke\ i\ likningen}$$

$$\underline{\underline{Svar: x = 0,25}}$$

e) Deriver funksjonen:

$$f(x) = x^3\sin(2x)$$

$$f'(x) = 3x^2\sin(2x) + x^3\cos(2x)\cdot 2$$

$$\underline{\underline{f'(x) = x^2(3\sin(2x) + 2x\cos(2x))}}$$

f) Regn ut det ubestemte integralet til funksjonen:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-4}$$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

1) Ved hjelp av delbrøkoppspalting

$$f(x)=\frac{3x}{x^2-4}=\frac{3x}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$3x=A(x+2)+B(x-2)$$

$$\underline{x=-2}:\ -6=B(-4)\quad\rightarrow\quad \underline{B=\frac{3}{2}}$$

$$\underline{x=2}:\ 6=A\cdot 4\quad\rightarrow\quad \underline{A=\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=\frac{3x}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{\frac{3}{2}}{x-2}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$$

$$\int f(x)\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+2}\,dx=\frac{3}{2}\left(\ln|x-2|+\ln|x+2|\right)+C$$

$$\underline{\underline{\int f(x)\,dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4\right|+C}}$$

2) Ved å sette inn en ny variabel

$$f(x)=\frac{3x}{x^2-4}\quad\rightarrow\quad u=x^2-4,\ du=2x\,dx\ eller\ \frac{du}{2}=x\,dx$$

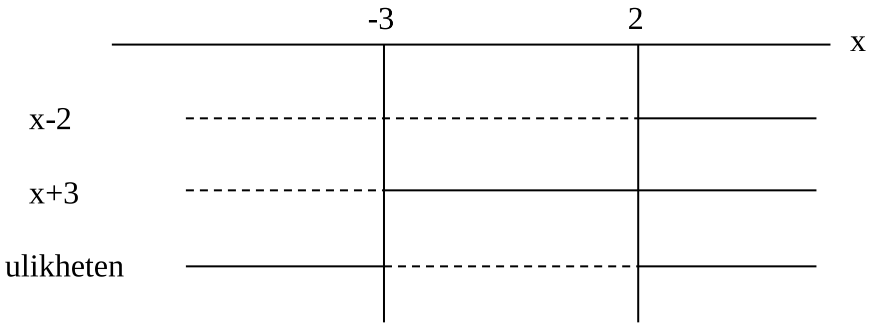
$$\int f(x)\,dx=\int\frac{3x}{x^2-4}\,dx=\int\frac{3}{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{3}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{3}{2}\ln|u|+C$$

$$\underline{\underline{\int f(x)\,dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4\right|+C}}$$

g) Regn ut ulikheten:

$$x^2+3x-6>2x\quad\rightarrow\quad x^2+x-6>0\quad\rightarrow\quad \underline{(x-2)(x+3)>0}$$

Setter opp fortegnslinje:



Svar: $\underline{\underline{x<-3\ eller\ x>2}}$, *alternativt* $\underline{\underline{x\in\langle\leftarrow,-3\rangle\vee\langle 2,\rightarrow\rangle}}$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

h) Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

Et flatestykke er avgrenset av x – aksen, linja $x = 1$, linja $x = 4$ og grafen til f.

Regn ut volumet av den gjenstanden vi får ved å dreie flatestykket 360° om x – aksen.

$$V = \pi\int_1^4 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_1^4 \frac{1}{4x^2}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^4 x^{-2}dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^4$$

$$V = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\underline{\underline{V = \frac{3\pi}{16}}}$$

i) Gitt en trekant ABC, der $AB = 4$, $BC = 6$ og $AC = 8$. Regn ut vinkel A og vinkel B.

$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cdot \cos A$$

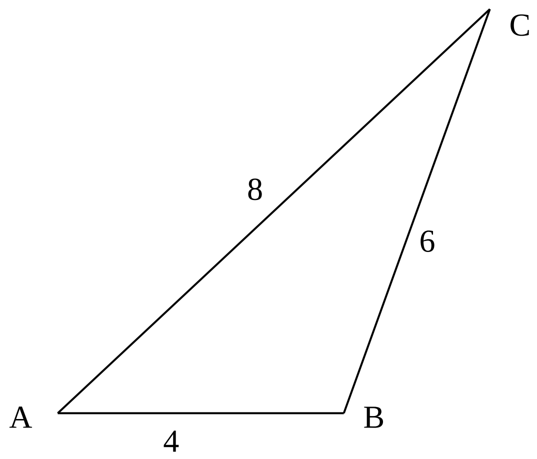
$$\cos A = \frac{64+16-36}{64} = \frac{44}{64}$$

$$\underline{\underline{\angle A = 46,6°}}$$

$$8^2 = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{36+16-64}{48} = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{\angle B = 104,5°}}$$



Oppgave 2

Gitt tre punkter A (0, 0, 0), B (3, 1, 0) og C (2, 4, 0).

a) Regn ut $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ og $\angle C$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{CA} = [-2,\ -4,\ 0]}} \qquad \underline{\underline{\overrightarrow{CB} = [1,\ -3,\ 0]}}$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{[-2,\ -4,\ 0]\cdot[1,\ -3,\ 0]}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{-2+12}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{\angle C = 45°}}$$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

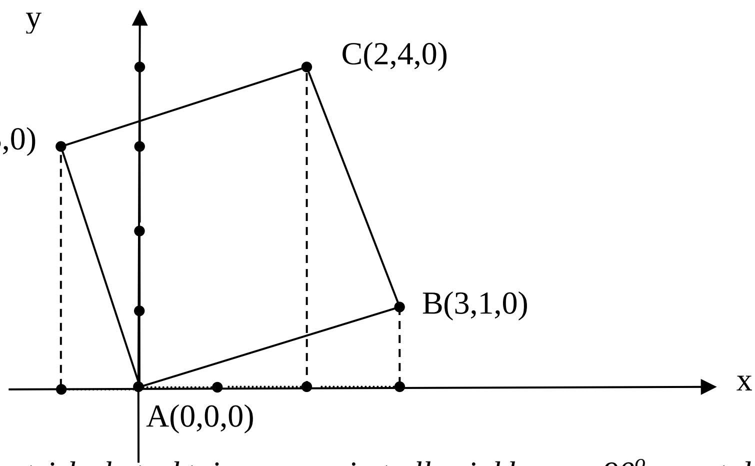
b) *A*, *B* og *C* utgjør tre av hjørnene i et parallellogram. Vis at punktet *D* (-1, 3, 0) utgjør det siste hjørnet når *ABCD* skal være et parallellogram.

$ABCD\ er\ et\ \ parallellogram\ dersom\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CB} = [1,\ -3,\ 0]$ $\qquad$ $\underline{\overrightarrow{DA} = [0-(-1),\ 0-3,\ 0-0] = [1,\ -3,\ 0] = \overrightarrow{CB}}$

$\underline{\underline{ABCD\ er\ et\ \ parallellogram}}$

c) *ABCD* utgjør grunnflaten i en pyramide med toppunkt *T* (1, 2, 5).
Vis og forklar hvorfor dette er en rett pyramide med kvadratisk grunnflate.
Punktene A, B, C og D ligger alle i xy-planet som vist nedenfor



Ved trigonometriske betraktninger ser vi at alle vinklene er 90°, og at diagonalene krysser hverandre i punktet (1, 2), som er rett under toppunktet T.
Dermed er dette en rett pyramide med kvadratisk grunnflate og høyde lik 5.

d) Regn ut volumet til pyramiden *ABCDT*.
$Volumet\ blir\ da:$

$$V = \frac{\left(\sqrt{1^2+3^2}\right)^2 \cdot 5}{3} = \frac{10\cdot 5}{3}$$

$$\underline{\underline{V = \frac{50}{3} \approx 16,7}}$$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

e) Regn ut arealet til sideflaten ABT.

Høyden h_s i sideflaten er gitt av:

$$h_s^{\,2} = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{, hvor } h = \textit{pyramidens høyde lik } 5 \textit{ og } s = \textit{sidekanten i grunnflaten lik } \sqrt{10}$$

$$h_s^{\,2} = 5^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 25 + \frac{10}{4} = 27,5 \quad \rightarrow \quad \underline{h_s = \frac{\sqrt{110}}{2}}$$

$$A_s = \frac{s \cdot h_s}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{110}}{4} = \frac{10\sqrt{11}}{4}$$

$$\underline{\underline{A_s = 2,5 \cdot \sqrt{11} \approx 8,3}}$$

f) Sideflaten ABT ligger i et plan α. Regn ut likningen for planet.

Vi trenger ett punkt i planet samt en normalvektor.

Velger $A(0, 0, 0)$

Normalvektoren finner vi ved å finne vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}$, *som gir:*

$$\underline{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}} = [3, 1, 0] \times [1, 2, 5] = \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right] = \underline{[5, -15, 5]}$$

Likningen for planet blir da:

$$\alpha : 5x - 15y + 5z = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x - 3y + z = 0}}$$

Oppgave 3

En funksjon $f(x)$ er gitt som $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x}$

a) Finn definisjonsmengden og eventuelle nullpunkter til $f(x)$.

$$\underline{\underline{D_f = \textit{alle } x \textit{ unntatt } x = 0}}$$

$$\textit{Nullpunkter når } x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}}}$$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

b) Regn ut eventuelle asymptoter til funksjonen.

$VA \text{ når funksjonens nevner er } 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{Vertikalasymptote: x = 0}}$

$SA \text{ fordi teller er én grad høyere enn nevner. Polynomdividerer:}$

$$x^2 - 3x - 4 : x = x - 3 - \frac{4}{x} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{Skråasymptote: y = x - 3}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(x^2\right)\qquad} \\ \quad -3x-4 \\ \underline{-(-3x)\quad} \\ \qquad\quad -4 \end{array}$$

c) Vis ved regning at: $f'(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x} = x - 3 - 4x^{-1}$$

$$\underline{\underline{f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2+4}{x^2}}}$$

d) Forklar at $f(x)$ ikke har topp – eller bunnpunkter.

Fordi $\underline{f'(x)}$ *aldri kan bli null, vil funksjonen ikke ha topp- eller bunnpunkter*

e) Bestem likningen for tangenten i punktet $(-1, 0)$ ved regning.

$a = f'(-1) = 5$

$y - 0 = 5(x+1) = 5x + 5 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 5x + 5}}$

f) En annen tangent har samme stigningstall som tangenten i e). Bestem likningen for den tangenten ved regning.

$Setter \text{ nå } f'(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2} = 5 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x = \pm 1}$

$Den \text{ andre tangenten berører grafen i punktet } (1,\ f(1)) = (1, -6)$

$Likningen \text{ blir da}: y + 6 = 5(x-1) = 5x - 5 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y = 5x - 11}}$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

Oppgave 4

En funksjon $f(x)$ er gitt som $f(x)=x^3-2x^2-x+2$, der det ene nullpunktet er $x=-1$

a) Bestem de andre nullpunktene til $f(x)$.

Vi polynomdividerer og får:

$$x^3-2x^2-x+2 : x+1 = \underline{x^2-3x+2}$$
$$\underline{-(x^3+x^2)}$$
$$-3x^2-x$$
$$\underline{-(-3x^2-3x)}$$
$$2x+2$$
$$\underline{-(2x+2)}$$
$$0$$

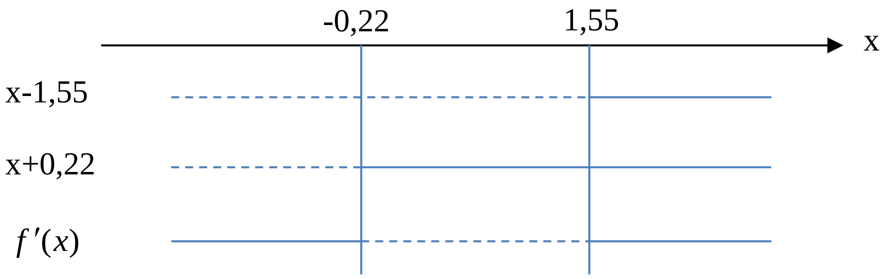
De andre nullpunktene er gitt av:

$$x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x=\begin{cases}2\\1\end{cases}}}$$

b) Finn topp – og bunnpunktet til $f(x)$ ved regning.

$$f(x)=x^3-2x^2-x+2 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3x^2-4x-1=3(x-1{,}5485)(x+0{,}215)$$

Setter opp en fortegnslinje:



Vi ser at vi har et toppunkt i $(-0.22,\ f(-0.22))=\underline{\underline{(-0.22,\ 2.11)}}$

og et bunnpunkt i $(1.55,\ f(1.55))=\underline{\underline{(1.55,\ -0.63)}}$

c) Bestem vendepunktet ved regning

$$f'(x)=3x^2-4x-1$$

$$f''(x)=6x-4 \quad \textit{Vendepunkt når } f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad \underline{x=\frac{2}{3}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Vendepunkt}}}:\left(\frac{2}{3},\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\underline{\underline{\left(\frac{2}{3},\ \frac{20}{27}\right)\approx(0.67,\ 0.74)}}$$

Vårtentamen MA-015 2016

FORSLAG TIL LØSNING

d) Et flatestykke er avgrenset av x – aksen og grafen til $f(x)$ fra $x = 0$ til $x = 1$. Regn ut arealet av dette flatestykket.

$$Arealet = A = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^1$$

$$\underline{\underline{A}} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \underline{\underline{\tfrac{13}{12} \approx 1{,}08}}$$