Løsningsforslag tentamen høst 2021for Ma-015 og Ma-017.

Oppgave 1

a) $\dfrac{\left(a^2b\right)^{-1}\cdot\sqrt[3]{b^4a}}{(ab)^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{-2}b^{-1}\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}}=a^{-2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\cdot b^{-1+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}=a^{-2+1}b^{-1+2}=a^{-1}b=\underline{\underline{\dfrac{b}{a}}}.$

b) $x^2-2x+6\le 0$.

2. gradsuttrykket har ingen reelle røtter og bytter derfor ikke fortegn. Sjekker for $x = 0$, og får -6. Ulikheten er oppfylt for alle verdier av x. (graf ligger over x- aksen)

$L=\mathbb{R}$

c)

$3e^{4x}-3e^{x}=0$

$3e^{x}\left(e^{4x}-1\right)=0$

$e^{x}\neq 0\quad ,\qquad e^{4x}-1=0$

$e^{4x}=1$

$\ln e^{4x}=\ln 1$

$4x=0$

$\underline{\underline{x=0}}$

Oppgave 2

a)

$f(x)=4x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=4x^2-2+x^{-2}$

$f'(x)=8x-2x^{-2-1}=\underline{\underline{8x-\dfrac{2}{x^3}}}$

b)

$g(x)=\overset{u}{x^3}\cdot\overset{v}{e^{2x}}$ deriverer med produktregel + kjerneregel

$g'(x)=3x^2e^{2x}+x^3e^{2x}\cdot 2=\underline{\underline{3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}}}=\underline{\underline{x^2e^{2x}\left(3+2x\right)}}$

c)

$h(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{2x-4}\right)=\ln x^2-\ln\left(2x-4\right)=2\ln x-\ln\left(2x-4\right)$

$h'(x)=2\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-4}\cdot 2=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2x-4-x}{x\left(x-2\right)}=\underline{\underline{\dfrac{x-4}{x^2-2x}}}$

Oppgave 3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$

a) Nullpunkt

$$f(x)=0$$

$$\frac{1}{3}x^3+x^2-3x=0$$

$$x\left(\frac{1}{3}x^2+x-3\right)=0$$

$$x_1=0 \quad \vee \qquad \frac{1}{3}x^2+x-3=0$$

$$x_1=0 \quad , \qquad x_2=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}85 \quad , \qquad x_3=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\approx -4{,}85$$

$$\underline{\underline{L=\{-4{,}85,\ 0,\ 1{,}85\}}}$$

b)

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$$

$$f'(x)=x^2+2x-3$$

$$f'(x)=0$$

$$x_1=1 \quad , \qquad x_2=-3$$

Vil bruke 2. derivert test for å bestemme TP/BP

(Et annet alternativ kan være å tegne fortegnsskjema.)

$$f''(x)=2x+2$$

$f''(1)=2+2=4$ positiv, så graf krummer opp, gir BP

$f''(-3)=-3+2=-1$ negativ, så graf krummer ned, gir TP

Setter inn i $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$ for å finne y- koordinatene.

$$f(1)=\frac{1}{3}+1-3=\frac{1+3-9}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$f(-3)=-\frac{1}{3}\cdot 27+9+9=-9+9+9=9$$

$$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt :}\left(1,-\frac{5}{3}\right) \quad \text{og} \qquad \text{Toppunkt:}(-3,9)}}$$

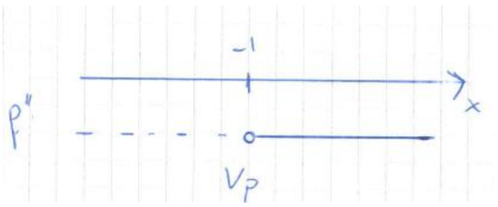
c) Bestem vendepunktet og vendetangenten til *f*.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$$

$$f'(x)=x^2+2x-3$$

$$f''(x)=2x+2=2\left(x+1\right)$$

Vendepunkt der $f''(x)=0$ + bytter fortegn se under



$f(-1)=-\frac{1}{3}+1+3=\frac{11}{3}$ Vendepunkt $\underline{\underline{\left(-1,\frac{11}{3}\right)}}$

Vendetangent:

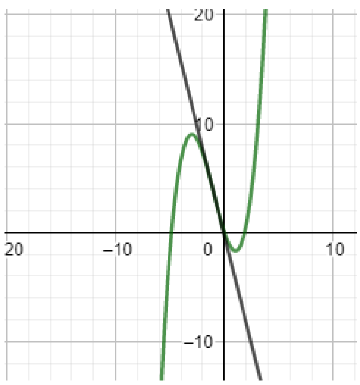
$$a=f'(-1)=1-2-3=-4$$

$$y-\frac{11}{3}=-4(x+1)$$

$$y=-4x-4+\frac{11}{3}$$

$$\underline{\underline{y=-4x-\frac{1}{3}}}$$

d) Tegn grafen til *f* med vendetangenten i samme koordinatsystem.



Oppgave 4 Gitt funksjonen $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2x-1}$

a) Finn eventuelle skjæringspunkter med koordinataksene.
Skjæring med *y*-aksen:

$$f\left(0\right)=\frac{0^2}{2\cdot 0-1}=0$$

Skjæring med *x*-aksen:

$f(x)=0$

$x^2=0$ Brøken er lik 0, når teller er 0.

$x=0$

Grafen skjærer både x- og y-aksen i $\underline{\underline{(0,0)}}$

b) Asymptoter:

Vertikal asymptote når nevner = 0.
$2x-1=0$

Vertikal asymptote: $\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$

Skrå asymptote, siden teller har 1 grad høyere enn nevner:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2:(2x-1)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\
\underline{-\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)} \\
\qquad \frac{1}{2}x \\
\quad \underline{-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)} \\
\qquad\qquad \frac{1}{4} \text{ rest}
\end{array}
$$

Skrå asymptote $\underline{\underline{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}$

c) Vis at $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$. Finn også funksjonens toppunkt og bunnpunkt ved regning.

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-1}=\frac{u}{v}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2x-1)-x^2\cdot 2}{(2x-1)^2}$$

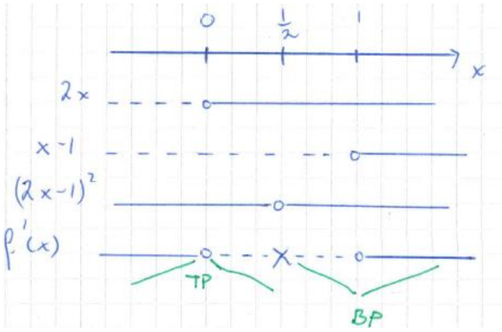
$$=\frac{4x^2-2x-2x^2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2}=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Topp- og bunnpunkt når $f'(x)=0$

$$\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}=0$$

$2x(x-1)=0$ Finner nullpunktene, og tegner fortegnsskjema.

$x=0 \quad \vee \quad x=1$



Finner så y- koordinatene:

$f(0) = 0$ fra a)

$$f(1) = \frac{1^2}{2 \cdot 1 - 1} = 1$$

$\underline{\underline{\text{Toppunkt}: (0,0) \text{ og Bunnpunkt}: (1,1)}}$

d) Finn ved regning skjæringspunktene mellom $f(x)$ og $g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2x-1} = x \Big| \cdot (2x-1)$$

$$x^2 = 2x^2 - x$$

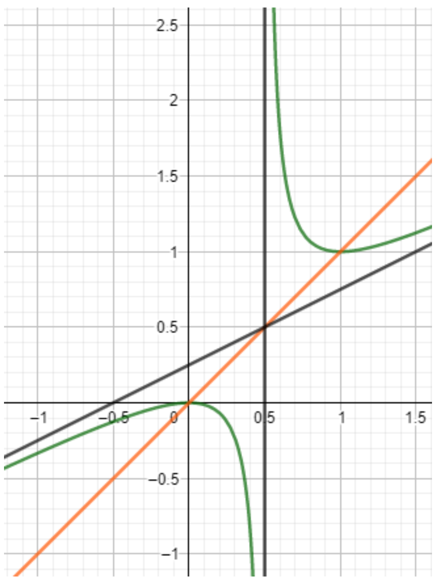
$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

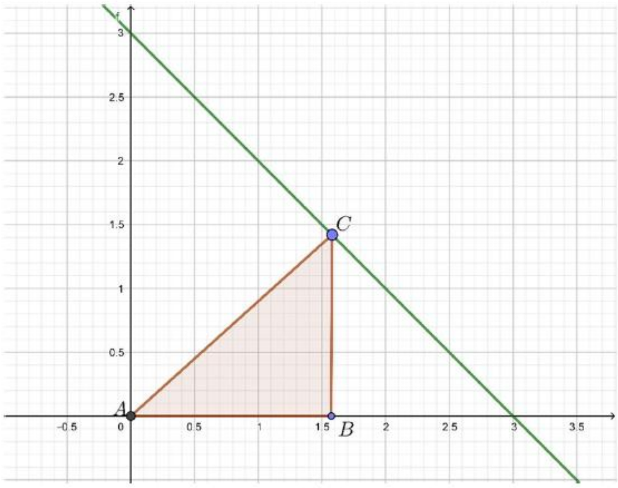
$\underline{\underline{\text{Skjæringspunkt mellom grafene er}: (0,0) \text{ og } (1,1)}}$

Dette viser grafen:



Oppgave 5 Figuren under viser en del av den rette linjen $y = 3 - x$.

Trekanten, $\triangle ABC$ er rettvinklet. Punktet C kan skyves langs linjen og har koordinater $C(x, 3-x)$.



a) Finn et uttrykk for arealet til trekant ABC, $A(x)$, der $x \in \langle 0,3 \rangle$.

$$A = \frac{gh}{2}$$

$$A(x) = \frac{x \cdot (3-x)}{2} = \frac{3x - x^2}{2}$$

b) Beregn hvilken verdi av x som gir trekanten størst mulig areal.

$$A(x) = \frac{3x - x^2}{2} = \frac{1}{2}(3x - x^2)$$

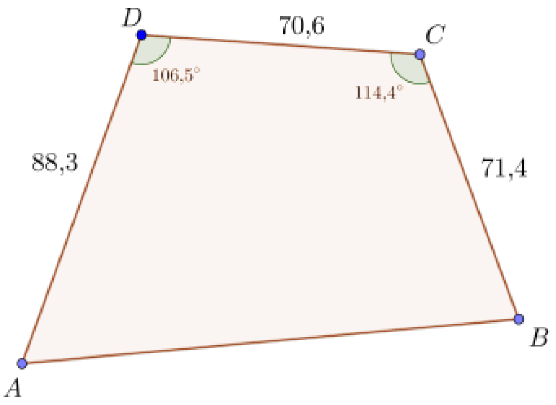
$$A'(x) = \frac{1}{2}(3 - 2x) = \frac{3}{2} - x$$

$$A'(x) = 0$$

$x = \frac{3}{2}$ $A(x)$ gir en parabel som krummer ned, gir derfor TP

Arealet blir størst når $x = \frac{3}{2}$.

Oppgave 6 En tomt har form som vist i figuren under, merk at alle lengder er i meter.



a) Avstand fra A til C: Bruker cosinussetningen:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle D$$

$$= 88,3^2 + 70,6^2 - 2 \cdot 88,3 \cdot 70,6 \cdot \cos 106,5° \approx 16322,34...$$

$$\underline{\underline{|AC| \approx 127,8 \text{ m}}}$$

b) Lenden av gjerdet er lik omkretsen. Vi må derfor finne lengden av siden AB. Finner først

$\angle ACD$ med sinussetningen (for så bruke vinkelen til å finne $\angle ACB$) :

$$\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle D} = \frac{AD}{AC}$$

$$\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} \cdot \sin \angle D = \frac{88,3}{127,8} \cdot \sin 106,5° \approx 0,6625...$$

$$\underline{\angle ACD = 41,5°}$$

$$\angle ACB = 114,4° - 41,5° = \underline{72,9°}$$

Kan nå finne siden AB med cosinussetningen:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$AB^2 = 127,8^2 + 71,4^2 - 2 \cdot 127,8 \cdot 71,4 \cdot \cos 72,9° \approx 16064,6...$$

$$\underline{AB = 126,7 \,\text{m}}$$

$$\underline{\underline{\text{Lengden på gjerdet} = 88,3\text{m} + 70,6\text{m} + 71,4\text{m} + 126,7\text{m} = 357\text{m}}}$$

c) Arealet av tomten, kan deles i to trekanter trekant ACD og trekant ABC.

$$A_{tomt} = A_{\vartriangle ACD} + A_{\vartriangle ABC}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 88,3\text{m} \cdot 70,6\text{m} \cdot \sin 106,5° + \frac{1}{2} \cdot 127,8\text{m} \cdot 71,4\text{m} \cdot \sin 72,9° \approx \underline{\underline{7349,4\text{m}^2}}$$

Oppgave 7 I et koordinatsystem har vi punktene $A(-2,2), B(2,-1)$ og $D(-1,1)$.

a)

$$\overrightarrow{AB}=\left[2-(-2),-1-2\right]=\underline{\underline{[4,-3]}}$$

$$\overrightarrow{AD}=\underline{\underline{[1,-1]}}$$

b) Bestemmer $\angle BAD$ ved hjelp av skalarprodukt:

$$\overrightarrow{AB}=[4,-3] \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\underline{5}$$

$$\overrightarrow{AD}=[1,-1] \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{1+1}=\underline{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\cdot1+(-3)\cdot(-1)=4+3=\underline{7}$$

$$\cos(\angle BAD)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}$$

$$\angle BAD=\cos^{-1}\left(\frac{7}{5\cdot\sqrt{2}}\right)\approx\underline{\underline{8{,}13^\circ}}$$

c) Areal av trekant ABD. Kan løses med arealsetningen eller determinantmetoden.

i) $$A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 8{,}13^\circ\approx0{,}499...\approx\underline{\underline{0{,}5}}$$

ii) $$\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4\cdot(-1)-(-3)\cdot1=-4+3=-1$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\right|=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Et punkt C er bestem ved at $DC \parallel AB$ og $\angle ABC=90^\circ$.

d) Regn ut koordinatene til C.

Bruker de 2 opplysningene til å finne to likninger med 2 ukjente.

La $C(x,y)$

$DC \parallel AB$ og $\angle ABC=90^\circ$ gir at:

$$\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{DC}\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}4 & -3\\ (x+1) & (y-1)\end{vmatrix}=4(y-1)-(-3)(x+1)=0$$

$$4y-4+3x+3=0$$

$$\underline{3x+4y=1}$$

$\angle ABC=90^\circ$ gir at

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$[-4,3]\cdot[x-2,y+1]=0$$

$$-4x+8+3y+3=0$$

$$\underline{-4x+3y=-11}$$

Løser så ligningssystemet:

$I: \quad 3x + 4y = 1$

$II: \quad -4x + 3y = -11$

I gir $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y \qquad$,setter inn for x i II.

$$-4\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}y\right) + 3y = -11 \,\Big|\cdot 3$$

$$-4 + 16y + 9y = -33$$

$$25y = -29$$

$$\underline{y = -\frac{29}{25}} \qquad , \qquad x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{29}{25}\right) = \underline{\frac{47}{25}}$$

$$\underline{\underline{C\left(\frac{47}{25}, -\frac{29}{25}\right)}} \approx (1{,}88\ , -1{,}16)$$