# 8 Logaritmer og eksponentialfunksjoner

I dette kapittelet møter du nye varianter av likninger og 2-3 nye derivasjonsregler. I tillegg skal du lære å drøfte eksponential- og logaritmefunksjoner.

## 8.1 Logaritmer

*Briggske logaritmer lg x eller log x (kalkulator tast)*

Logaritmer brukes i en del skalaer som spenner over et stort område.

f. eks pH, dB (desibel) Richters skala for jordskjelv osv

Opprinnelig var logaritmer et verktøy for å forenkle beregninger som krevde multiplikasjon/divisjon av store tall i forbindelse med bla bevegelse til stjerner og planetene på himmelen. Logaritmer har den egenskap at multiplikasjon blir til addisjon, divisjon til subtraksjon.

I dag anvendes logaritmeskalaer + at logaritmer er nyttige i forbindelse med å løse likninger samt i forbindelse med modellering. (gjerne også sammen med eksponentialfunksjoner som $e^x$)

**Definisjon:**
For et positivt tall *a* er logaritmen til *a* (lg *a*) det tallet vi må opphøye 10 i for å få tallet *a*.

$$10^{\lg a} = a$$

Eksempler:

$\lg 100 = 2$ *fordi* $10^2 = 100$ Vi kan regne $\lg 100 = \lg 10^2 = \underline{\underline{2}}$

$\lg 1000 = 3$ *fordi* $10^3 = 1000$

$\lg 0{,}1 = -1$ *fordi* $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0{,}1$ Vi kan regne $\lg 0{,}1 = \lg \frac{1}{10^1} = \lg 10^{-1} = \underline{\underline{-1}}$

$\lg \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$ *fordi* $\sqrt[3]{100} = 10^{\frac{2}{3}}$ Vi kan regne $\lg \sqrt[3]{100} = \lg 100^{\frac{1}{3}} = \lg(10^2)^{\frac{1}{3}} = \lg 10^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Skal vi finne eksakte logaritmeverdier går vi veien om 10-er potenser, ellers bruker vi log - tast på kalkulatoren. <u>NB husk de generelle potensreglene.</u>
**Regneregler for logaritmer** (merk disse finner du også i formelsamlingen)

<u>Potensregel:</u> $\lg a^x = x \lg a$

<u>Produktregel:</u> $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$

<u>Brøkregel:</u> $\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$

<u>Bevis potensregel:</u> (for bevis av andre logaritme regler se læreboka)
Husk at

$$10^{m \cdot n} = \left(10^m\right)^n$$

$$10^{x \cdot \lg a} = \left(10^{\lg a}\right)^x = a^x$$ som så gir

$$\lg a^x = \lg 10^{x \cdot \lg a} = x \cdot \lg a$$

Eksempler: Logaritmereglene og potensregler kan brukes til å trekke sammen / forenkle uttrykk

$$\lg 4 = \lg 2^2 = 2\lg 2$$

$$\lg 2 + \lg 3 = \lg(2 \cdot 3) = \lg 6$$

$$\lg \sqrt[4]{16} = \lg 16^{\frac{1}{4}} = \lg\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = \lg 2$$

### 8.2 Eksponentiallikninger

Disse likningene kjennetegnes med at den ukjente er i en eksponent.

<u>Eksempel 1</u>

$5^x = 7$

$\lg 5^x = \lg 7$ bruker lg funksjon på begge sider

$x \lg 5 = \lg 7$ bruker potensregel på venstre side.

$x = \dfrac{\lg 7}{\lg 5} \approx 1,209$ deler begge sider med tallet foran $x$

<u>Eksempel 2</u>

Sparing med 4 % per år. Hvor lang tid tar det før et beløp har doblet seg?

$K \cdot 1,04^x = 2K$ K for kapital, kan deles bort

$1,04^x = 2$

$\lg 1,04^x = \lg 2$

$x \lg 1,04 = \lg 2$

$x = \dfrac{\lg 2}{\lg 1,04} \approx 17,7$ år

### 8.3 Logaritmelikninger

I tillegg til logaritmereglene bruker vi også denne egenskapen ved logaritmer:

Merk, vi sier de er inverse funksjoner av hverandre – de opphever virkning av den første …

$f(x) = \lg x$ $\quad g(x) = 10^x$

$f \circ g(x) = \lg\left(10^x\right) = x$ og $g \circ f(x) = 10^{\lg x} = x$

Eksempel 1

$2\lg x + \lg 9 = 0$ ønsker to "rene" lg uttykk, og bruker potensregel baklengs

$\lg x^2 + \lg 9 = 0$ kan nå bruke produktregel

$\lg\left(x^2 \cdot 9\right) = 0$

$10^{\lg\left(x^2 \cdot 9\right)} = 10^0$ opphever lg, ved def. $10^{\lg x} = x$

$9x^2 = 1$ "vanlig" likning

$x^2 = \frac{1}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$ $\underline{\underline{L = \left\{\frac{1}{3}\right\}}}$ velger positiv x-verdi da lg kun er definert for positive tall.

Nb $\lg x$ er bare definert for $x > 0$

Eksempel 2

$(\lg x)^2 = 1$ Likning på form $u^2 = 1$

$\lg x = -1 \quad \vee \quad \lg x = 1$

$x = 10^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{10}}} \quad \vee \quad x = 10^1 = \underline{\underline{10}}$

Eksempel 3

$2(\lg x)^2 - 5\lg x + 2 = 0$ La $u = \lg x$

$2u^2 - 5u + 2 = 0$

$u_1 = 2$

$u_2 = \frac{1}{2}$

$\lg x = 2 \quad \vee \quad \lg x = \frac{1}{2}$ Bruker $10^{vs} = 10^{hs}$ for å oppheve/ fjerne lg

$x = 10^2 = \underline{\underline{100}} \quad \vee \quad x = 10^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{10}}}$

Eksempel 4 ** Her kan vi bruk lg på begge sider, for å forenkle likningen.

$$x^{\lg x} = 1000x^2$$
$$\lg\left(x^{\lg x}\right) = \lg\left(1000x^2\right)$$
$$\lg x \cdot \lg x = \lg 10^3 + \lg x^2$$
$$\left(\lg x\right)^2 - 2\lg x - 3\lg 10 = 0$$
$$\left(\lg x\right)^2 - 2\lg x - 3 = 0 \qquad u = \lg x$$
$$u_1 = 3 \qquad u_2 = -1$$
$$\lg x = 3 \quad \vee \quad \lg x = -1$$
$$\underline{\underline{x = 1000}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{10}}}$$

Eksempel 5

$$\lg\left(x+2\right) = 2\lg x \qquad x > 0$$
$$\lg\left(x+2\right) = \lg x^2$$
$$x + 2 = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1 \qquad \text{utenfor def.området}$$
$$\underline{\underline{L = \left\{2\right\}}}$$

**8.4 Tallet *e* og den naturlige logaritmen**

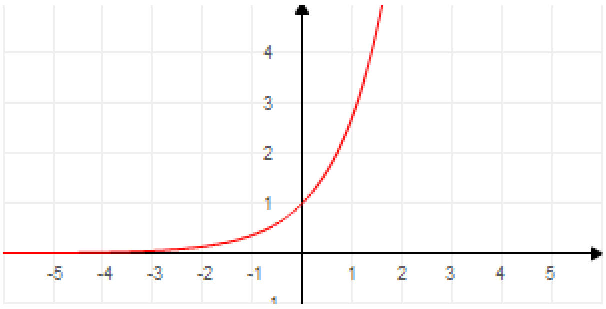
*Euler - tallet e*

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828$ (Huskeregel 2,7 Ibsen Ibsen, siden Ibsen ble født 1828)

Eller $e = \lim\limits_{t\to 0}\left(1 + t\right)^{\frac{1}{t}} = 2,718281828$

Eksponentialfunksjoner

$$f\left(x\right) = 5 \cdot 3^x$$
$$K\left(x\right) = 1000 \cdot 1,04^x \qquad (4\%\ \text{rente})$$
$$f\left(x\right) = e^x \qquad\qquad g(x) = 3e^{-2x}$$




Merk $e^x > 0$ for alle $x$-verdier.

**Naturlig logaritme**

ln*x* er definert som det tallet vi må opphøye *e* i for å få *x*. $e^{\ln x} = x$

Definisjonen gir også at

$\ln 1 = 0$ fordi $e^0 = 1$

$\ln e = 1$ fordi $e^1 = e$

videre er

$\ln e^x = x$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Funksjons par: | $e^x$ | – | $\ln x$ | naturlig logaritme |
| Tilsvarende som | $10^x$ | – | $\lg x$ | 10-er logaritme |

NB $\ln x$ har samme regneregler som $\lg x$.

**8.5 Bruk av den naturlige logaritme** (løs likninger med ln *x*)

Eksempel 1

$$e^{2x} = 3$$
$$\ln e^{2x} = \ln 3$$
$$2x \ln e = \ln 3$$
$$2x = \ln 3$$
$$x = \frac{\ln 3}{2} \approx 0,55$$

Eksempel 2

$$3 \cdot 2^x = 48$$
$$2^x = 16$$
$$\ln 2^x = \ln 16$$
$$x \ln 2 = 4 \ln 2 \qquad \textit{siden} \quad 16 = 4 \cdot 4 = 2^4$$
$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Eksempel 3

$$
\begin{aligned}
2\ln x &= 4 \\
\ln x &= 2 \\
e^{\ln x} &= e^2 \\
\underline{\underline{x = e^2}}
\end{aligned}
$$

Eksempel 4

$$\ln(x-3) = 2\ln 3$$

$$\ln(x-3) = \ln 9 \qquad \text{bruker at ln er entydig}$$

$$x-3=9$$

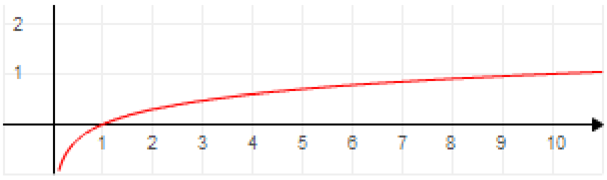
$$x = 9+3 = \underline{\underline{12}}$$

Eksempel 5

$$
\begin{aligned}
\ln x^2 + \ln x - 3 &= 0 \\
2\ln x + \ln x - 3 &= 0 \\
3\ln x &= 3 \\
\ln x &= 1 \\
x = e^1 &= \underline{\underline{e}}
\end{aligned}
$$

**8.6 Logaritmefunksjonen**

$f(x) = \lg x \qquad D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$




Legg merke til at funksjonen er voksende for alle verdier av $x$. Tegn gjerne grafen til ln$x$ for å sammenligne.

**Den deriverte til logaritmefunksjonen.**

Kan vise at:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Denne nye derivasjonregelen kan kombineres med de reglene du allerede kjenner.

Eksempler :

$$f(x) = 5x + \ln x \qquad f'(x) = 5 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \ln\left(x^3+1\right) = \ln(u)$$

$$g'(x) = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{x^3+1}\cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3+1}}}$$

## 8.7 Drøfting av logaritmefunksjoner

(som tidligere funksjonsdrøfting, men med nye derivasjonsregler og «andre» likninger)

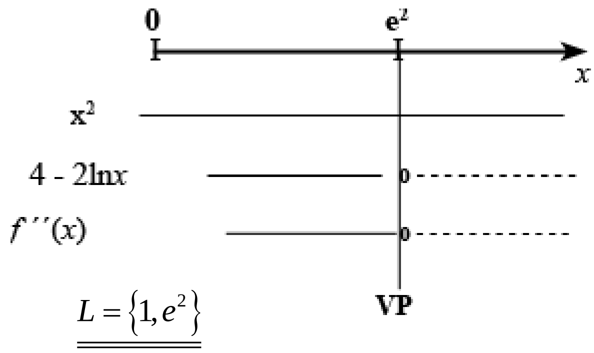
Vi skal nå studere funksjonen $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$

a) Definisjonsmengde: $D_f=\langle 0,\rightarrow\rangle$

b) Nullpunkt:

$$f(x)=0$$
$$(\ln x)^2-2\ln x=0$$
$$\ln x(\ln x-2)=0$$
$$\ln x=0 \quad \vee \quad \ln x=2$$
$$x=e^0=1 \quad \vee \quad x=e^2$$

$$\underline{\underline{L=\{1,e^2\}}}$$

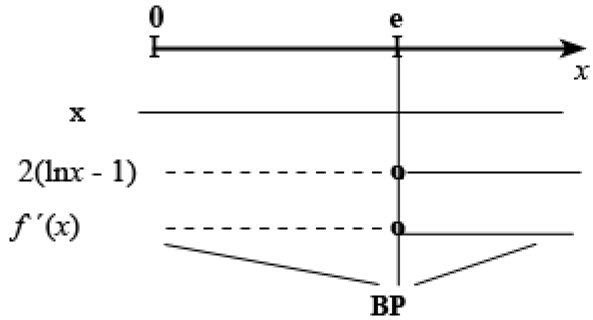



c) Ekstremalpunkt (toppunkt/bunnpunkt)

Plan:

Deriverer funksjonsuttrykket, ser på nullpunktene til den deriverte og tegner fortegnsskjema

$$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$$
$$f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-2}{x}=\frac{2(\ln x-1)}{x}$$
$$f'(x)=0$$
$$\ln x-1=0$$
$$\ln x=1$$
$$x=e$$




Vi ser at $f$ har et bunnpunkt for $x = e$

$$f(e)=(\ln e)^2-2\ln e=1-2=-1$$

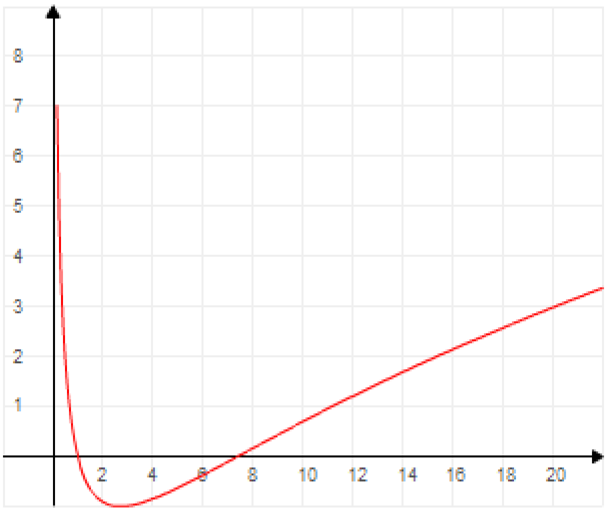
$$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt:}(e,-1)}}$$

d) Vendepunkt; her må vi sjekke nullpunktet til den dobbeltderiverte.

$$f'(x)=\frac{2\ln x-2}{x}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x-2)\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{2-2\ln x+2}{x^2}=\frac{4-2\ln x}{x^2}$$
$$f''(x)=0$$
$$4-2\ln x=0$$
$$2\ln x=4$$
$$\ln x=2$$
$$x=e^2$$

Vendepunkt: $(e^2, f(e^2))=(e^2,0)$ (y verdi fant vi i a))

e) Graf




## 8.8 Eksponentialfunksjoner

**Den deriverte til eksponentialfunksjoner**

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Eksempler:

$$i)\ f\left(x\right) = 2x^3 + 2e^x \qquad f'\left(x\right) = 6x^2 + 2e^x$$

$$ii)\ g(x) = e^{2x} = e^u \qquad g'(x) = e^u \cdot u' = e^{2x} \cdot 2 = \underline{\underline{2e^{2x}}}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$$

*Bevis* :

Vi kan skrive $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}$

Dette gir $\left(a^x\right)' = \left(e^{\ln a \cdot x}\right)' = e^u \cdot u' = e^{\ln a \cdot x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \qquad QED$

Eksempel: $f(x) = 2^x \qquad f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

Bruker vi vekstfaktor, ser vi at %-vi vekst gir en eksponentialfunksjon. Derfor kommer disse funksjonene til nytte i mange modeller for dyrebestander, vekt i priser mm.

## 8.9 Drøfting av eksponentialfunksjoner

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) Skjæring med koordinataksene:

<u>y-aksen</u>:

$$f(0) = \frac{1}{2}e^0 - e^0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Skjærer y-aksen i punktet } \left(0, -\frac{1}{2}\right)}}$$

<u>Skjæring med *x*-aksen:</u>

$$f(x)=0$$

$$\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}=0$$

$$e^{x}\left(\frac{1}{2}e^{x}-1\right)=0 \qquad \text{husk } e^{x}>0$$

$$\frac{1}{2}e^{x}-1=0$$

$$e^{x}=2$$

$$x=\ln 2 \qquad \underline{\underline{\text{Skjæringspunkt med } x\text{-aksen } (\ln 2, 0)}}$$

b) Ekstremalpunkter

Deriverer, og finner nullpunkt:

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2-e^{x}=e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$$

$$f'(x)=0$$

$$e^{x}-1=0$$

$$e^{x}=1$$

$$x=0$$

| |
|---|
| 2.derivert test: Dersom $f'(x)=0$ og dersom $f''<0$ krummer graf ned og $x$ gir et toppunkt<br>dersom $f''>0$ krummer graf opp og $x$ gir et bunnpunkt |

Bruker 2. derivert test: (kan eventuelt tegne fortegns-skjema i stedet)

$$f'(x)=e^{2x}-e^{x}$$

$$f''(x)=2e^{2x}-e^{x}$$

$$f''(0)=2e^{0}-e^{0}=2-1=1 \quad pos \quad \Rightarrow \underline{\underline{\left(0,-\frac{1}{2}\right)\text{er et bunnpunkt}}}$$

c) Vendepunkt (ser etter $x$-verdier slik at den andrederiverte er lik 0 + fortegnsbytte)

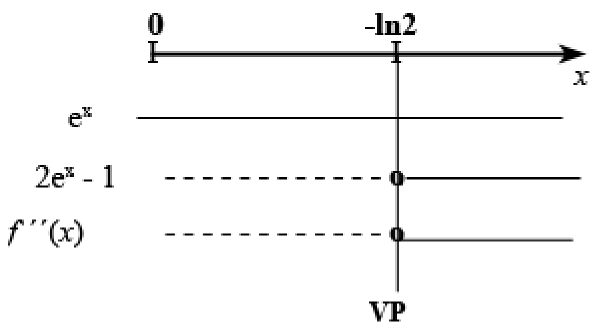
$$f''(x)=0$$

$$2e^{2x}-e^{x}=0$$

$$e^{x}\left(2e^{x}-1\right)=0$$

$$e^{x}=\frac{1}{2}$$

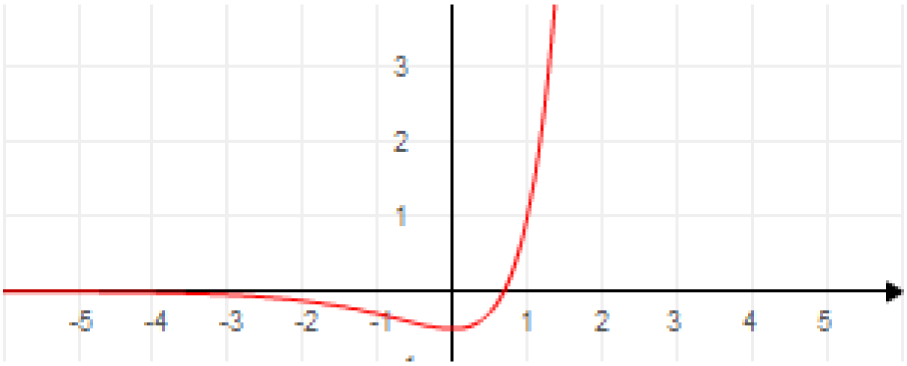
$$x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$$



$$f(-\ln 2) = \frac{1}{2}e^{2(-\ln 2)} - e^{-\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}e^{\ln 2^{-2}} - e^{\ln 2^{-1}}$$
$$= \frac{1}{2}2^{-2} - 2^{-1} = \frac{1}{8} - \frac{4}{8} = -\frac{3}{8}$$
$$\underline{\underline{\text{Vendepunkt:}\left(-\ln 2, -\frac{3}{8}\right)}}$$

d)

Husk på at hver akse har <u>minst</u> 1 tall, slik at vi ser hvilken skala som brukes. Marker de punktene du har regnet ut med en liten prikk, så nøyaktig som mulig. Inklusive punkter som nullpunkt, topp eller bunnpunkt, vendepunkt. Synes du at du trenger flere punkter bruk gjerne tabell på kalkulatoren. Trekk deretter en pen kurve gjennom punktene. NB linjal for aksene og andre rette linjer, ellers frihånd.




**Ekstra** Finn tangent i punktet $(1, f(1))$

Finner y- koordinat $f(1) = \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - e^{1} = \frac{1}{2}e^{2} - e \approx 0,98$

Stigningstall: $a = f'(1) = e^{2} - e^{1} \approx 4,67$

Likning til tangent

$$(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}e^{2} - e\right) \approx (1,\ 0,98)$$
$$y - \left(\frac{1}{2}e^{2} - e\right) = \left(e^{2} - e\right)(x-1)$$
$$y = \left(e^{2} - e\right)x - e^{2} + e + \frac{1}{2}e^{2} - e$$
$$\underline{\underline{y = \left(e^{2} - e\right)x - \frac{1}{2}e^{2}}}$$

Tilnærmet (helst med eksakte verdier):

$$\text{Punkt}: (1,\ 0,98)$$
$$y - 0,98 = 4,67(x-1)$$
$$y = 4,67x - 4,67 + 0,98$$
$$\underline{\underline{y = 4,67x - 3,69}}$$