Kap 19 Sannsynlighetsregning.

19.1 Sannsynlighet

Eksempler på et *stokastisk* (tilfeldig) forsøk er et kast en mynt og se om vi får mynt eller kron.
Vi oppfatter det som tilfeldig om den ene eller den andre siden kommer opp.

En annen type forsøk er *deterministiske* forsøk, dette er forsøk der resultatet er gitt av betingelsene. Slipper vi en stein mot jorda, kan vi ut ifra fysikkens lover bestemme fart og akselerasjon, eller når steinen treffer bakken.

Når vi skal regne på *stokastiske forsøk*, trenger vi en modell der vi definerer mulige utfall, utfallsrommet, S. Og hvor sannsynlige hvert av de ulike utfallene er, notasjon: $P(utfall)$.

Merk For alle sannsynlighetsmodeller gjelder:

$$P(S) = 1$$
$$0 \le P(utfall) \le 1$$

En vanlig, og enkel sannsynlighetsmodell er

Uniform sannsynlighetsmodell

Utfallsrom: mengden av alle mulige utfall, $S = \{u_1, u_2, ...u_N\}$

Hvert utfall <u>er like</u> sannsynlig. $P(utfall) = \frac{1}{N}$

Eksempel: Kast med vanlig terning

Utfallsrom: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(1) = P(2) = ...P(6) = \frac{1}{6}$$

En annen viktig sannsynlighetsmodell er

Ikke -uniform sannsynlighetsmodell

Sannsynligheten for hvert utfall er <u>ikke</u> like

Eksempel: Tegnestift P (spiss opp) er forskjellig fra P (spiss ned)
Her kan vi ut fra den geometriske formen anta at sannsynligheten vil være ulik (ikke uniform modell). Her må en derfor kaste en god del ganger for slik at den relative andelen gir en god pekepinn på sannsynlighetene i dette forsøket.

Hvordan kan sannsynlighet bestemmes?

- Geometrisk form (eksempler: terning mynt)
- Relativ hyppighet / frekvens basert på mange gjentak av samme " forsøk".
- Anvende en kjent modell som passer. (Noen få eksempler på dette er binomisk-, hypergeometrisk- og normalfordeling, men det finne flere ☺) Mer om dette i eget fag senere i studiet.

19.2 Hendelser (boka bruker hendinger)

Sannsynligheten for en hendelse er lik summen av sannsynligheter for de utfallene som inngår i hendelsen. (utfall som gjør at hendelsen inntreffer, kaller vi gjerne gunstige utfall)

Forsøk 1: Kast med vanlig terning.

Vi definerer hendelsene:

A: får et partall	gunstige utfall er 2,4,6
B: får et oddetall	gunstige utfall er 1,3,5
C: får en 6-er	gunstig utfall er 6

$$P(A) = \frac{gunstige\,utfall}{mulige\,utfall} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{g}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{g}{m} = \frac{1}{6}$$

Forsøk 2: Kast med to vanlige terninger, der vi registrerer sum øyne

Utfallsrom: $S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Her er ikke hvert av utfallene like sannsynlige (2 og 12 er vanskeligere å oppnå enn for eksempel 6 eller 7), slik at dette gir en *ikke uniform modell.*

<u>MEN</u> tar vi hensyn til rekkefølgen og tenker oss utfallene slik som under, får vi inn symmetri i forsøket, slik at hvert utfall blir like sannsynlig ($p = \frac{1}{36}$). Dette kan være en fordel, da det gjør regningen enklere.

Nå blir det å regne ut sannsynligheten for de ulike hendelsene, redusert til å telle antall gunstige utfall.

For å korte ned skrivemåten kan vi innføre noe vi kaller en *Stokastisk variabel*. (Stokastisk = tilfeldig)

Lar vi X = sum øyne <u>kan</u> vi enkelt skrive:

$$P(X = 2) = P(\text{sum øyne lik 2}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{sum øyne lik ti}) = P(X = 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Osv

Merk at siden sum øyne er heltall vil størren enn 9, bety sum øyne lik 10 eller flere.

$$
\begin{aligned}
P(\text{sum øyne større enn } 9) &= P(X > 9) = P\left(X \geq 10\right) \\
&= P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \\
&= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

I noen tilfeller er det enklere å se på komplement mengden /den" motsatte" hendelsen.

Husk $\overline{A} = S \setminus A$ som gir at $\boxed{P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)}$ (**Komplement setningen**)

Sum øyne mindre enn 10, blir alle resultat med sum øyne fra 2 til og med 9.

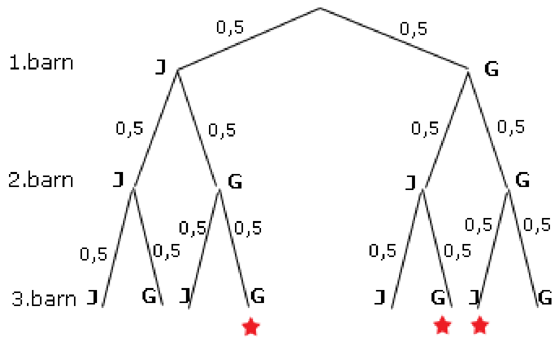
$$
\begin{aligned}
P(\text{sum øyne mindre enn } 10) &= P(X < 10) \\
&= 1 - P(X \geq 10) \\
&= 1 - P(X = 10) - P(X = 11) - P(X = 12) \\
&= 1 - \frac{3}{36} - \frac{2}{36} - \frac{1}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Merk I vår modell antar den stokastiske variabelen bare antar heltallsverdier, det vil ikke være tilfelle i andre situasjoner. (For eksempel om vi måler levetid for et produkt, bremselengde eller liknende.)

Forsøk 3 Familie med 3 barn skiller mellom gutt og jente og setter $P(gutt) = P(jente) = 0,5$.

For å få oversikt over mulige valg kan det være en god ide å tegne et trediagram / valgtre:

Merk at sannsynligheten for hvert mulige "valg" er skrevet ved hver gren.



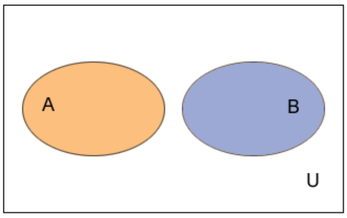
a) Antall mulige utfall.
Her er det 3 delforsøk med 2 ulike utfall i hver av dem så vi får $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

b) Sannsynlighet for at en tilfeldig trebarns familie har 3 gutter.

$$P(GGG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

c) Sannsynlighet for at en tilfeldig trebarns familie har 2 gutter og 1 jente. (tell alternativer i valgtreet)

$$P(2\,gutter, 1\,jente) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$



d) Sannsynligheten for at en tilfeldig trebarns familie har minst en jente.

$$P(\text{minst en jente}) = 1 - P(\text{bare gutter}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

19.3 Sum av sannsynligheter

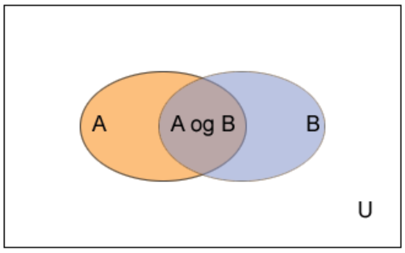
Hvis to hendelser ikke har noe felles utfall er $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B)$

Bruker vi venndiagrammet til høyre ser vi begrunnelsen for

Addisjonssetningen

$$P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right)$$

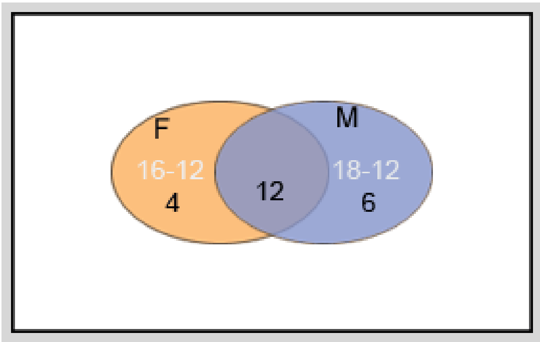
Vi trekker fra slik at hvert utfall telles kun en gang.



Eksempel Bruke Venn diagram for å sortere informasjon

I en klasse med det 28 elever er det 18 elever som har matematikk og 16 elever tar fysikk. Av disse har 12 elever begge fagene.

Vi definerer hendelsene:
M: matte
F: fysikk



Og tegner Venn diagram (**merk** at vi må begynne i felter som er felles, for å ikke telle noen dobbelt.)

$$P\left(M\right) = \frac{18}{28} = \underline{\underline{\frac{9}{14}}}$$

$$P(F) = \frac{16}{28} = \frac{8}{14} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$

$$P\left(M \cap F\right) = \frac{12}{28} = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

$$P(M \cup F) = P\left(M\right) + P(F) - P\left(M \cap F\right) = \frac{18+16-12}{28} = \frac{22}{28} = \underline{\underline{\frac{11}{14}}}$$

Merk, setningene er ment til å være til hjelp, ikke noen tvangstrøye. Dersom du finner svarene enklere ved telling / logikk eller lignende er det like bra. Men husk på at du trenger en begrunnelse dersom oppgaven ikke er helt" banal".

19.4 Betinget sannsynlighet

Med betinget sannsynlighet tar vi hensyn til informasjon som kommer underveis / tilleggsinformasjon. Dette istedenfor å lage en helt ny modell.

Betinget sannsynlighet: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Fortsettelse av forrige eksempel.

Hva om vi fikk vite at eleven som er valg ut har matematikk som fag, hva er nå sannsynligheten for at vedkommende har fysikk som fag?
I følge formelen får vi:

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{12}{28}}{\frac{18}{28}} = \frac{12}{18} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Eller, vi kan se det ut fra Venn diagrammet:

$$P(F|M) = \frac{12}{18} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

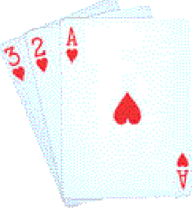
19.5 Produktsetningen

Formel for betinget sannsynlighet kan omformes til

Produktsetningen: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Eksempel: Forsøk der vi trekker 2 kort fra en vanlig kortstokk. (52 kort)

Hendelser:
A: 1. kort er hjerter
B: 2. kort er hjerter



$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{13}{52} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$P(B|A) = \frac{12}{51} = \underline{\underline{\frac{4}{17}}}$$ merk nå er det bare 51 kort og 12 er hjerter

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{17} = \underline{\underline{\frac{1}{17}}}$$

Bayes setning

Ved å kombinere produktregel og formel for betinget sannsynlighet kan vi utlede Bayes setning.

$$\boxed{P\left(A|B\right)=\frac{P(A)\cdot P\left(B|A\right)}{P(B)}}$$

Eksempel med sykefravær på en arbeidsplass.

Eksempel - Bayes setning

Her følger flere eksempler der vi bruker Bayes setning.

Betinget sannsynlighet	Produktsetningen
$P(B\|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\|A)$

Sammen med

$$P(B|A) = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Eksempel 1

På en arbeidsplass blir 1% av personalet skadet hvert år. 60% av de skadede er menn. Samtidig får vi opplyst at personalet består av 30% kvinner. For en tilfeldig ansatt blant personalet definerer vi hendelsene

S: Personen blir skadet i løpet av året.
M: Personen er en mann
K: Personen er en kvinne

a) Sett opp sannsynlighetene for hendelsene S, M og K.
b) Finn $P(S|M)$

Oppgave a

1% av personalet blir skadet, som gir $P(S) = 0{,}01$

Siden 30% av personalet er kvinner må det være 70% menn, det gir $P(M) = 0{,}70$

30% av personalet er kvinner, som gir $P(K) = 0{,}3$

Oppgave b

Vi vet at dersom en av personalet blir skadet i løpet av året er sannsynligheten for at det er en mann 60%.

Dette kan vi skrive som: $P(M|S) = 0{,}60$.

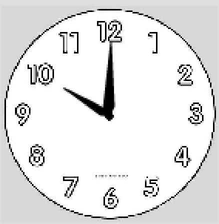
Bruker deretter Bayes setning og setter inn saynnsynlighetene

$$P(S|M) = \frac{P(S)\cdot P(M|S)}{P(M)} = \frac{0{,}01\cdot 0{,}60}{0{,}70} = 0{,}0086$$

Eksempel med låsing av to dører på en skole.

Eksempel - Bayes setning

På en skole låses dørene automatisk etter at skolen er slutt. Av og til oppstår det feil i systemet slik at dørene låses også i skoletiden. For å komme inn i klasserommet ditt må du igjennom to dører. Sannsynligheten for at den første døra er låst er 0,02. Sannsynligheten for at den andre døra er låst er 0,01. Sannsynligheten for at den andre døra er låst når den første døra er låst, er 0,3.



Finn sannsynligheten for at den første døra er stengt når vi vet at den andre døra er låst.

Løsning:

Vi innfører hendelsene
A: Den første døra er stengt
B: Den andre døra er stengt

Vi setter opp sannsynlighetene for disse hendelsene

$P(A) = 0{,}02$ og $P(B) = 0{,}01$

Vi har også den betingede sannsynligheten for at den andre døra er låst gitt at den første er låst
$P(B|A) = 0{,}3$

Bayes - setning gir oss da

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0{,}02\cdot 0{,}30}{0{,}01} = 0{,}60$$

Sannsynligheten for at den første døra er låst når vi vet at den andre døra er låst er 0,6

Begynn på nytt

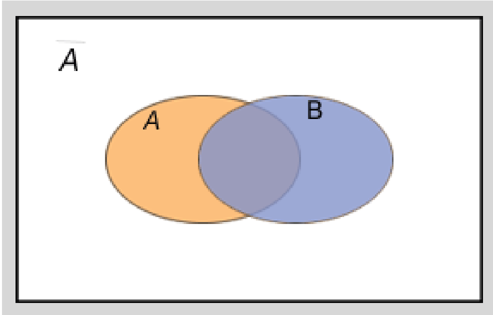
19.6 Total sannsynlighet

Mengden B kan vi dele opp slik:

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

Mengdene har ingen felles utfall slik at:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$



Ved hjelp av produktsetningen får vi:

Total sannsynlighet:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})$$

Setningen kan utvides, dersom utfallsrommet er delt i mer enn to deler.

Eksempel: Elever som røyker på en skole.

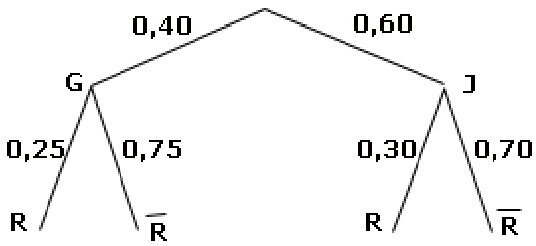
På en skole er 60 % av elevene jenter. 30 % av jentene og 25 % av guttene røyker. Finn sannsynligheten for at en tilfeldig elev røyker.

Løsning:

Vi kan finne svaret ved å bruke setning om total sannsynlighet.

$$P(R) = P(G) \cdot P(R|G) + P(J) \cdot P(R|J) = 0,40 \cdot 0,25 + 0,60 \cdot 0,30 = \underline{\underline{0,28}}$$

Eller ved å tegne et valgtre:



Følger vi de (2) grenene som endrer opp med R og legger sammen sannsynlighetene får vi tilsvarende:
$P(R) = 0,40 \cdot 0,25 + 0,60 \cdot 0,30 = \underline{\underline{0,28}}$

19.7 Uavhengige hendelser

Vi sier A og B uavhengige hendelser dersom informasjon om at A er inntruffet, ikke påvirker sannsynligheten for B. Dvs. $P(B|A) = P(B)$

Test på om A og B er uavhengige hendelser:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

NB, opplysning om at hendelser er uavhengige kan også være gitt i oppgaven.

Eksempel 3 kast med en terning

Det bør være lett å overbevise seg om at en terning, ikke husker forrige resultat, og at gjentatte kast med en terning er uavhengig av hverandre.

$$P(3\ \ 6-ere)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{216}}}$$

$$P(ingen\,6-ere)=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\underline{\underline{\frac{125}{216}}}$$

$$P(3\ \ 6-ere)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{216}}}$$

$$P(ingen\,6-ere)=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\underline{\underline{\frac{125}{216}}}$$

$$P(2\ \ 6-ere)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}=\underline{\underline{\frac{7}{72}}}$$

Merk faktor 3,

fordi vi kan ha 3 ulike rekkefølge/permutasjoner.

Eksempel: 2 vei tunneler

A: 1. tunnel er stengt
B: 2. tunnel er stengt

$P(A)=0,04$

$P(B)=0,05$ Er tunnelene stengt uavhengig av hverandre?

$P(A\cap B)=0,003$

Sjekker: $P(A)\cdot P(B)=0,04\cdot 0,05=0,0020\neq P(A\cap B)$

Det betyr at hendelsene A og B ikke er uavhengige. (Noe som er naturlig, dersom vær e.l gjør at en av tunnelene er stengt, på virker dette gjerne forholdene for den andre).

19.8 Binomiske forsøk *ikke eksamensstoff.*