# Eksamen TRE 1100 – Vår 2021 – LØSNINGSFORSLAG

## Oppgave 1

a) $P(x)$ har faktoren $(x - x_0)$ hvis og bare hvis $P(x_0) = 0$.
$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$
For at $x^2 - 1$ er faktoren i $P(x)$, må $P(-1) = 0$ og $P(1) = 0$.

$$P(-1) = (-1)^4 + (a + b) \cdot (-1)^3 + (ab - 1) \cdot (-1)^2 - (a + b) \cdot (-1) - ab =$$
$$= 1 - a - b + ab - 1 + a + b - ab = 0$$

$$P(1) = 1^4 + (a + b) \cdot 1^3 + (ab - 1) \cdot 1^2 - (a + b) \cdot 1 - ab =$$
$$= 1 + a + b + ab - 1 - a - b - ab = 0$$

Siden $P(1) = 0$ og $P(-1) = 0$, så er $(x^2 - 1)$ er en faktor i polynomet $P(x)$.

b)
$$\begin{array}{l}
x^4 + (a+b)x^3 + (ab-1)x^2 - (a+b)x - ab : x^2 - 1 = \boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab} \\
\underline{-(x^4 + \quad 0x^3 \qquad\qquad - x^2)} \\
\qquad (a+b)x^3 + abx^2 - (a+b)x - ab \\
\qquad \underline{-\big((a+b)x^3 + \ 0x^2 \ - (a+b)x\big)} \\
\qquad\qquad\qquad abx^2 - ab \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(abx^2 - ab)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

c) $x^2 + ax = x(x + a)$
Vi kaller nevneren $Q(x)$.

$$\frac{x^2 + ax}{Q(x)}$$

Det er mulig å forkorte uttrykket bare hvis $x$ eller $(x + a)$ er en faktor i nevneren, altså bare hvis $Q(0) = 0$ eller $Q(-a) = 0$.

$$Q(0) = 0^2 + (a + b) \cdot 0 + ab = ab$$
$$Q(-a) = (-a)^2 + (a + b) \cdot (-a) + ab = a^2 - a^2 - ab + ab = 0$$

$(x + a)$ er en faktor i $Q(x)$, derfor uttrykket kan forkortes.

d) $$x^2+(a+b)x+ab = x^2+(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab =$$

$$= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + ab =$$

$$= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{4ab}{4}\right) =$$

$$= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} =$$

$$= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4} = \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(x+\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\left(x+\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right) =$$

$$= \left(x+\frac{a+b+a-b}{2}\right)\left(x+\frac{a+b-a+b}{2}\right) =$$

$$= \left(x+\frac{2a}{2}\right)\left(x+\frac{2b}{2}\right) = \boldsymbol{(x+a)(x+b)}$$

e) $$\frac{x^2+ax}{x^2+(a+b)x+ab} = \frac{x\cancel{(x+a)}}{\cancel{(x+a)}(x+b)} = \frac{x}{x+b}$$

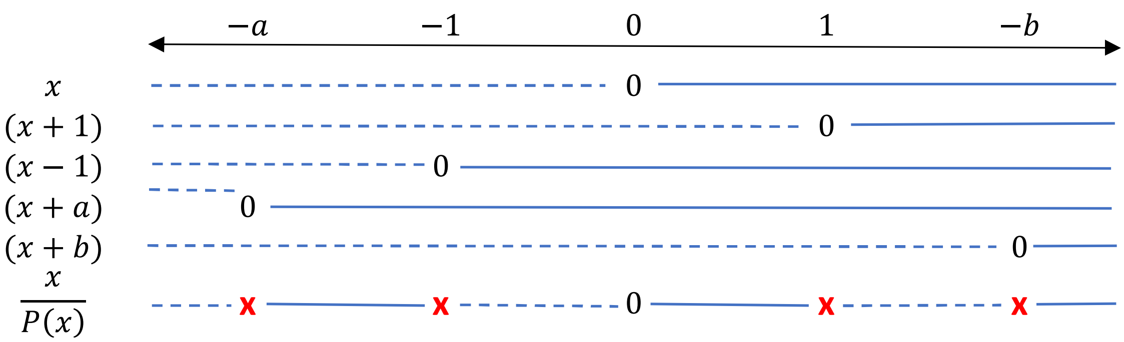
f) $P(x) = (x+1)(x-1)(x+a)(x+b)$

g) $$\frac{x}{P(x)} = \frac{x}{(x+1)(x-1)(x+a)(x+b)}$$

Vi har nullpunkter: $x=0, x=-1, x=1, x=-a, x=-b$

$a > 1 \Rightarrow -a < -1$

$b < -1 \Rightarrow -b > 1$




$\boldsymbol{-a < x < -1}$ **eller** $\boldsymbol{0 \le x < 1}$ **eller** $\boldsymbol{x > -b}$

$\boldsymbol{x \in (-a,-1) \cup [0,1) \cup (-b,\infty)}$

## Oppgave 2

a) Siden $\frac{x+b}{x+a} > 0$, kan vi jobbe videre med uttrykket $\frac{1}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{x+b}{x+a}\right) + C$

$$\left(\frac{1}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{x+b}{x+a}\right) + C\right)' = \frac{1}{a-b} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+b}{x+a}\right)\right)' = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{\frac{x+b}{x+a}} \cdot \left(\frac{x+b}{x+a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{\frac{x+b}{x+a}} \cdot \frac{x+a-(x+b)}{(x+a)^2} = \frac{\cancel{a-b}}{\cancel{(a-b)} \cdot \frac{x+b}{\cancel{x+a}} \cdot (x+a)^{\cancel{2}}} ==$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab}}$$

b) Fra oppgaven 2a har vi at:

$$\frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab} = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} \qquad /\cdot (x+a)(x+b)$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} \cdot (x+a)(x+b) = \frac{A}{\cancel{x+a}} \cdot (\cancel{x+a})(x+b) + \frac{B}{\cancel{x+b}} \cdot (x+a)(\cancel{x+b})$$

$$1 = A \cdot (x+b) + B \cdot (x+a)$$

$$1 = Ax + Ab + Bx + Ba$$

$$0x + 1 = (A+B)x + Ab + Ba$$

$$I.\, A + B = 0 \qquad \Rightarrow \quad A = -B$$

$$II.\, Ab + Ba = 1 \qquad \Rightarrow \; -Bb + Ba = 1$$

$$B(a-b) = 1$$

$$B = \frac{1}{a-b} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab} = \frac{\frac{1}{b-a}}{x+a} + \frac{\frac{1}{a-b}}{x+b} = -\frac{1}{(a-b)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(x+b)} =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a - b}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x + b}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x + a}}\right)$$

c) $\int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)\,dx = \frac{1}{a-b}\cdot\int\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)\,dx =$

$$= \frac{1}{a-b}\cdot(\ln|x+b|-\ln|x+a|)+C =$$

$$= \frac{1}{a-b}\cdot\ln\frac{|x+b|}{|x+a|}+C = \boldsymbol{\frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C}$$

d) $\int_5^9 \frac{2}{-x^2+4x-3}\,dx = \int_5^9 \frac{2}{-(x^2-4x+3)}\,dx = -2\cdot\int_5^9 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx =$

$$= -2\cdot\int_5^9 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx$$

Videre kan vi bruke at:

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C \qquad a=-1,\ \ b=-3$$

$$-2\cdot\int_5^9 \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx = -2\cdot\left[\frac{1}{-1-(-3)}\cdot\ln\left|\frac{x+(-3)}{x+(-1)}\right|\right]_5^9 =$$

$$= -2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right]_5^9 = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right]_5^9 = -\left(\ln\left|\frac{9-3}{9-1}\right|-\ln\left|\frac{5-3}{5-1}\right|\right) =$$

$$= -\left(\ln\left(\frac{6}{8}\right)-\ln\left(\frac{2}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 1-\ln 2-\ln 3+\ln 4 =$$

$$= -\ln 2-\ln 3+\ln 2^2 = -\ln 2-\ln 3+2\ln 2 = \mathbf{\ln 2-\ln 3}$$

e) $y' = y^2-1$

$$\frac{1}{y^2-1}\cdot y' = 1$$

$$\frac{1}{y^2-1}\cdot\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{y^2-1}\,dy = 1\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int 1\ dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1}{(y+1)(y-1)}\,dy$$

Videre kan vi bruke at:

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\cdot \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C \qquad a=1,\ \ b=-1$$

$$\int \frac{1}{(y+1)(y-1)}\,dy = \frac{1}{1-(-1)}\cdot \ln\left|\frac{y+(-1)}{y+1}\right| + C_1 = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C_1$$

$$\int 1\ dx = x + C_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C_1 = x + C_2 \qquad C_3 = 2\cdot(C_2 - C_1)$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2x + C_3$$

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2x+C_3}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{C_3}\cdot e^{2x} \qquad C = \pm e^{C_3}$$

$$\frac{y-1}{y+1} = Ce^{2x}$$

$$y-1 = Ce^{2x}(y+1)$$

$$y-1 = Ce^{2x}y + Ce^{2x}$$

$$y - Ce^{2x}y = Ce^{2x} + 1$$

$$y(1-Ce^{2x}) = Ce^{2x} + 1$$

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{Ce^{2x}+1}{1-Ce^{2x}}}$$

## Oppgave 3

a) La punktet $A = (x, y)$ ligge på sirkelen. Avstand mellom punktene $A$ og $S$ er lik lengen av vektoren $\overrightarrow{SA}$.

$|\overrightarrow{SA}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

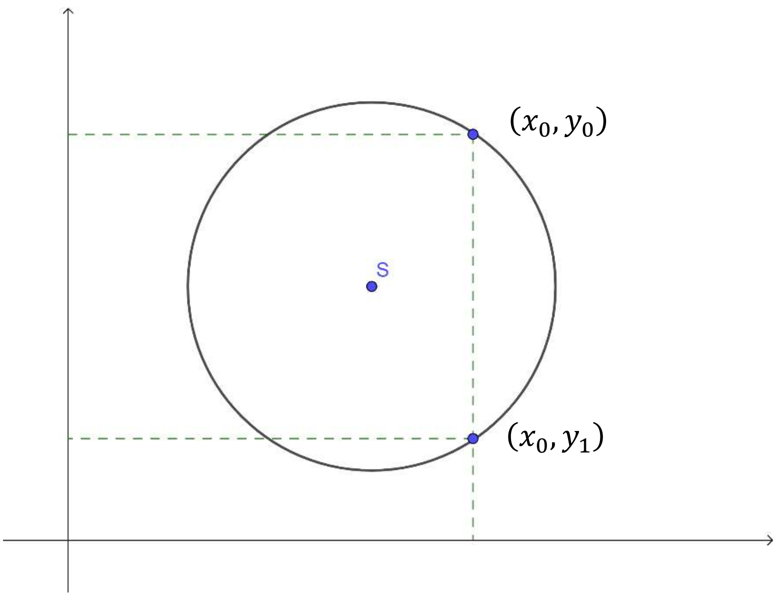
Samtidig har vi at: $|\overrightarrow{SA}| = R$

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}^2 = R^2$

$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$

b) Vi sier at $y$ er en funksjon av $x$ dersom hver mulig verdi av $x$ gir nøyaktig én verdi av $y$. Dette gjelder ikke sirkelens likning. Hvis punktet $(x_0, y_0)$ der $y_0 \neq b$ ligger på sirkelen, så finnes det et punkt $(x_1, y_1)$ der $x_1 = x_0$ og $y_1 \neq y_0$ . Dermed én verdi av $x$ gir to verdier av $y$.




c) Først finner vi uttrykk for $y$:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$(y-b)^2 = R^2 - (x-a)^2$

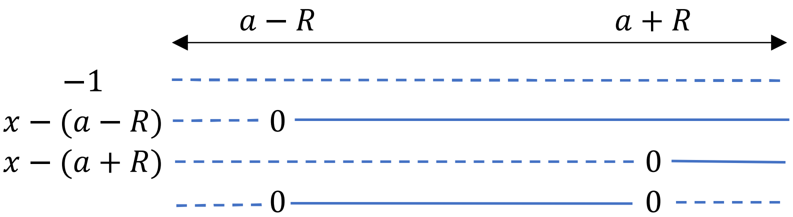
$y - b = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2}$

$y = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2} + b$

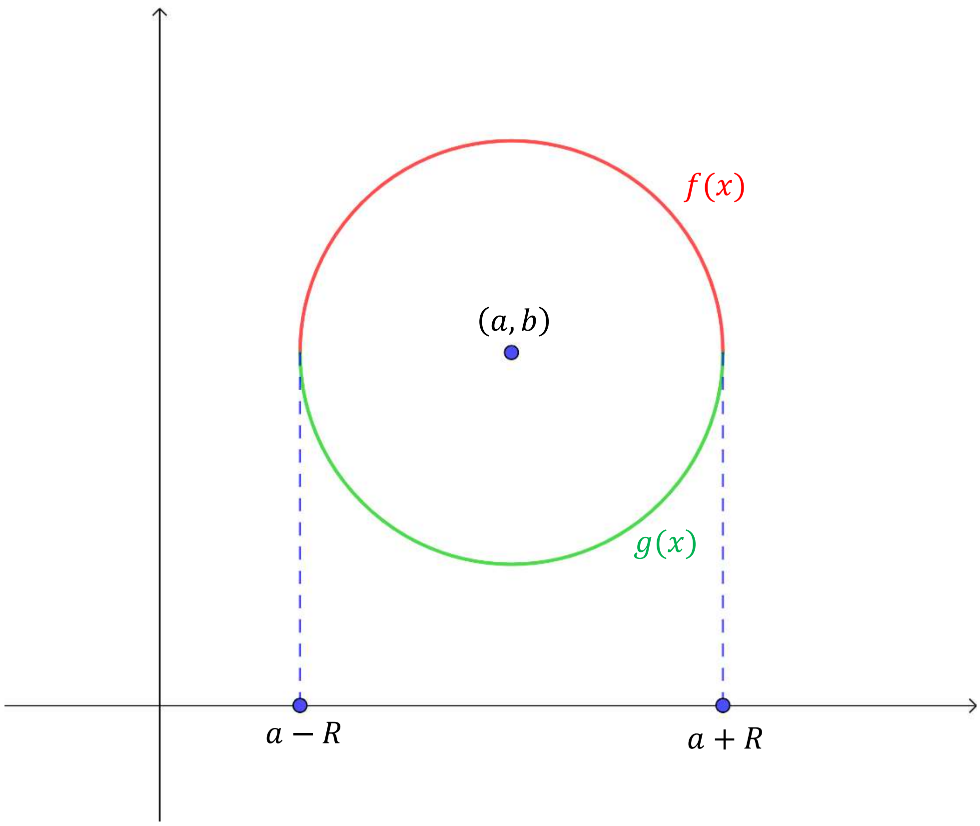
Vi setter $f(x) = \sqrt{R^2 - (x-a)^2} + b$ og $g(x) = -\sqrt{R^2 - (x-a)^2} + b$

Videre undersøker vi $D_f$ og $D_g$. For både $f(x)$ og $g(x)$ gjelder at $R^2 - (x-a)^2 \geq 0$

$R^2 - (x-a)^2 \geq 0$
$(R + x - a)(R - x + a) \geq 0$
$(x + R - a)(-x + R + a) \geq 0$
$-1 \cdot (x + R - a)(x - R - a) \geq 0$
$-1 \cdot (x - (a - R))(x - (a + R)) \geq 0$




Fra fortegnskjemaet ser vi at $a - R \leq x \leq \ a + R$.
For $f(x)$ velger vi $D_f \ = [a - R, a + R]$.
For $g(x)$ velger vi $D_g \ = (a - R, a + R)$.



d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2-(x-a)^2}} \cdot (R^2 - (x-a)^2)' = \frac{1}{2\sqrt{R^2-(x-a)^2}} \cdot (-2) \cdot (x-a) = \frac{a-x}{\sqrt{R^2-(x-a)^2}}$

$$f'(x) = \frac{a-x}{\sqrt{R^2-(x-a)^2}} = 0 \qquad /\cdot \sqrt{R^2-(x-a)^2} \qquad \sqrt{R^2-(x-a)^2} \neq 0$$

$$x \neq a \pm R$$

$a - x = 0$
$x = a$

$f(a) = \sqrt{R^2 - (a-a)^2} + b = R + b$
Vi har at $(a, R+b)$ er et ekstremalpunkt. For å vise at det er et toppunkt, må $f(x)$ være voksende på $[a-R, a]$ og avtagende på $[a, a+R]$

I tillegg har vi at $f'(x) > 0$ når $a - x > 0$ og $f'(x) < 0$ når $a - x < 0$

$x < a$ $\qquad$ $x > a$

$f(x)$ vokser $\qquad$ $f(x)$ avtar

Det betyr at $(a, R+b)$ er toppunktet til $f(x)$.

e) Fra oppgave d) ser vi at $f'(x)$ ikke er definert i $x = a + R$ og $x = a - R$. Derfor er $f(x)$ ikke deriverbar i disse punktene.
I tillegg er $f(x)$ ikke definer for $x < a - R$ og $x > a - R$. Det betyr at

$\lim\limits_{x \to a-R^-} \frac{f(a-R)-f(x)}{a-R-x}$ og $\lim\limits_{x \to a+R^+} \frac{f(a+R)-f(x)}{a+R-x}$ ikke eksisterer.

f) $x^2 + y^2 = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$1 = 1$ derfor ligger $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ på sirkelen.

Videre velger vi om vi skal jobbe med $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ eller $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Siden $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ og $\sqrt{1-x^2} > 0$, fortsetter vi å jobbe med $f(x)$.

Stigningstallet til tangenten er $a = f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad\qquad (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Videre bruker vi ettpunktsformel:

$(y - y_0) = a \cdot (x - x_0)$

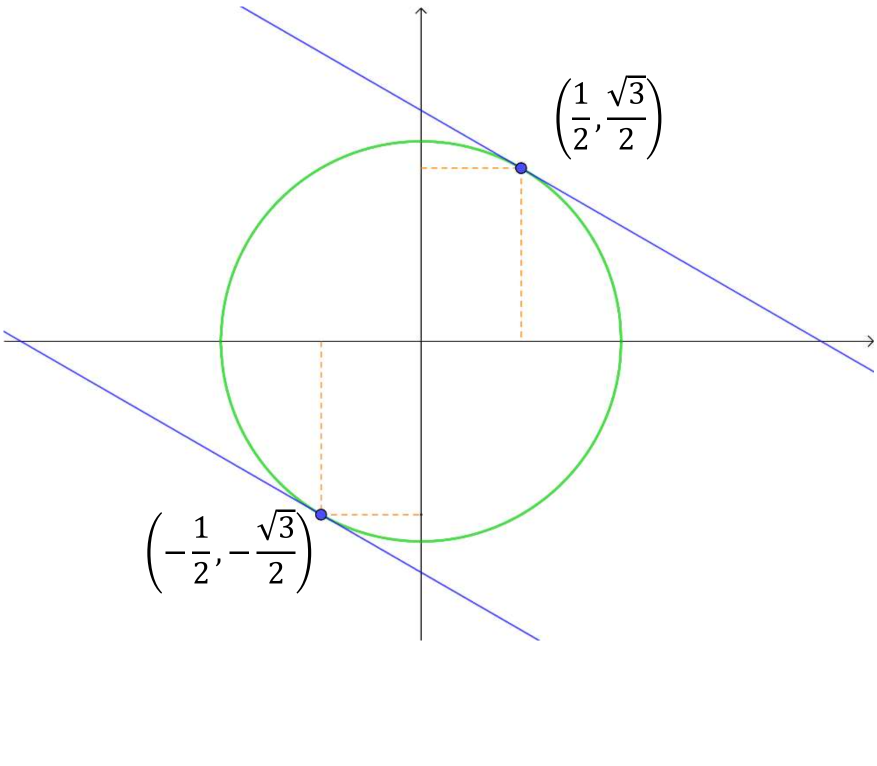
$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{6}$

$\boldsymbol{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

g) Vi kan utnytte symmetrien av sirkelen. Tangenter som er parallelle må ha samme stigningstallet. Fra figuren ser vi at koordinater til tangeringspunktet for tangenten som er parallell med $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ er $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.




Vi kan også regne ut koordinatene ved å bruke funksjonen $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad /\cdot \sqrt{1-x^2} \qquad\qquad x \neq 1 \quad x \neq -1$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}x = \sqrt{1-x^2}$$

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}x\right)^2 = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$3x^2 = 1 - x^2$$

$$4x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}$$

Dette er en irrasjonal likning derfor må vi sette prøve på svare. $x = \frac{1}{2}$ passer ikke i likningen.

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(-\boldsymbol{\frac{1}{2}}, -\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

## Oppgave 4

a) Punktet $(x, y)$ ligger på halvsirkelen med radius $r = 1$, derfor skal $y = \sqrt{1-x^2}$ .

i. lengde $= 2x$

bredde $= \sqrt{1-x^2}$

$A = lengde \cdot bredde$

$\boldsymbol{A(x) = 2x\sqrt{1-x^2}}$

ii. $A(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$$A'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2)x = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad /\cdot\sqrt{1-x^2} \qquad x \neq 1 \quad x \neq -1$$

$$2-4x^2 = 0$$
$$4x^2 = 2$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Siden $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ og $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$, så er $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ maksimalpunkt til $A(x)$.

lengde $= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

bredde $= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

b)

i. Vi har at $ED = EC = r = 1$. Videre $\angle DEC = 45° = \frac{\pi}{4}$. Vi bruker cosinussetningen:
$$CD^2 = ED^2 + EC^2 - 2\cdot ED\cdot EC\cdot\cos\angle DEC$$
$$CD = \sqrt{ED^2 + EC^2 - 2\cdot ED\cdot EC\cdot\cos\angle DEC}$$
$$CD = \sqrt{1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos 45°} = \sqrt{2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

ii. Vi har at $AE = ED = r = 1$. Videre $\angle AED = \frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$. For å regne ut arealet til trekanten $AED$ bruker vi arealsetningen:
$$A = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot\sin\angle AED = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}$$
$$\boldsymbol{\sin\frac{3\pi}{8} = 2\cdot A}$$

iii. $$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$$
$$\overrightarrow{KA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right) =$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)}$$

iv. Siden $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$Forklar hvorfor $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \left|\overrightarrow{\frac{1}{2}AB}\right| + \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{DC}\right| =$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right| + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}\right|$$

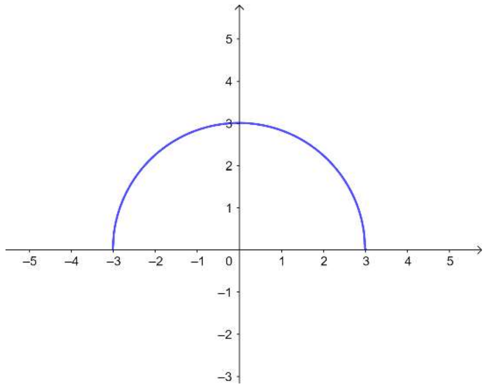
## Oppgave 5

a) Vi kan ta utgangspunktet i likningen til en sirkel med sentrum i punktet $(0, 0)$.

$x^2 + y^2 = 9$

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$A = 2 \cdot \int_{-3}^{3} f(x)\, dx = \int_{-3}^{3} \mathbf{2} \cdot \sqrt{\mathbf{9} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\, \boldsymbol{dx}$

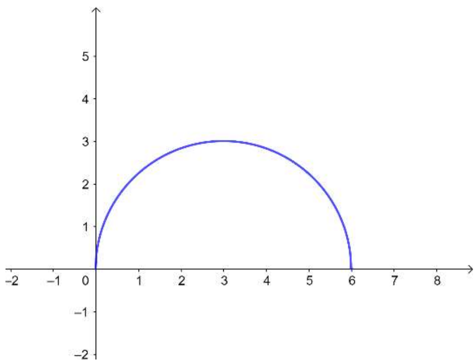


Videre kan vi flytte sirkelen langs x-aksen til venstre eller høyre. Vi velger sirkelen med sentrum i punktet $(3, 0)$.

$(x - 3)^2 + y^2 = 9$

$f(x) = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$

$A = 2 \cdot \int_{0}^{6} f(x)\, dx = \int_{0}^{6} \mathbf{2} \cdot \sqrt{\mathbf{9} - (\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^{\mathbf{2}}}\, \boldsymbol{dx}$



b) Vi kan ta utgangspunktet i likningen til en sirkel med sentrum i punktet $(0, 0)$.

$x^2 + y^2 = 16$

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$$V = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{4} (16 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \cdot \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \pi \cdot \left(16 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} - \left(16 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3}\right)\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(64 - \frac{64}{3} + 64 - \frac{64}{3}\right) = \pi \cdot \left(128 - \frac{128}{3}\right) = \pi \cdot \left(\frac{384}{3} - \frac{128}{3}\right) = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\pi}$$