EKSAMENSSAMARBEIDENDE FORKURSINSTITUSJONER
Forkurs for ingeniørutdanning og maritim høgskoleutdanning
Universitetet i Stavanger, Universitetet i Tromsø, Høgskolen i Buskerud og Vestfold,
Høgskulen i Sogn og Fjordane, Høgskolen i Sør-Trøndelag, Høgskolen i Telemark,
Høgskolen i Østfold, Høgskolen i Ålesund, Sjøkrigsskolen, Rogaland kurs- og kompetansesenter,
Høgskolen i Oslo og Akershus

Eksamensoppgave

2. juni 2014

MATEMATIKK

Bokmål

Eksamenstid:
5 timer

Hjelpemidler:
Godkjent tabell og kalkulator.

Andre opplysninger:
Dette oppgavesettet inneholder seks oppgaver med deloppgaver.
Du skal svare på alle oppgavene og deloppgavene.

Oppgavesettet har fire tekstsider medregnet forsiden.

OPPGAVE 1

Gjør uttrykkene så enkle som mulig:

a) $\frac{2x^2-8}{2x+8} : \frac{3x+6}{x+4} =$

b) $\left(\frac{a}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{6a^3}{a^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{2} =$

Løs likningene ved regning:

c) $e^{2x} - 3e^x = 18$

d) $(x-1)\sqrt{2} = \sqrt{x}$

e) $5\sin x - 1 = 0 \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

Løs integralene ved regning:

f) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2 - 7}\, dx$

g) $\int x \ln x\, dx$

OPPGAVE 2

En funksjon f er definert ved $f(x) = 2x^3 - 8x \qquad D_f = R$

a) Faktoriser funksjonsuttrykket så mye som mulig. Finn nullpunktene til f.

b) Regn ut likningen for tangenten i punktet $(1, f(1))$.

c) Bruk $f''(x)$ til å undersøke hvordan grafen til f krummer.
Tegn grafen og tangenten fra oppgave b) i samme koordinatsystem.

d) Grafen til f og den positive delen av x-aksen avgrenser en flate.
Finn ved regning arealet av denne flata.

OPPGAVE 3

Vi har funksjonen $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ $\qquad D_f = R\backslash\{3\}$

a) Finn ved regning eventuelle nullpunkt og asymptoter til funksjonen.

b) Deriver funksjonen og finn ved regning eventuelle topp- og bunnpunkter.

Vi trekker tilfeldig 5 kuler (uten å legge tilbake) fra en bolle med 8 hvite og 2 sorte kuler.

c) Finn sannsynligheten for at den første kula vi trekker er hvit.

Finn sannsynligheten for at alle de fem kulene vi trekker er hvite.

Finn sannsynligheten for at nøyaktig en av de fem kulene vi trekker er sort.

Gitt rekka:

$$1 + 2\ln x + (2\ln x)^2 + (2\ln x)^3 + \ldots\ldots$$

d) Hvilken type rekke er dette?

For hvilken verdi av x er summen av rekka lik 3.

OPPGAVE 4

Hjørnene i trekanten ABC har koordinatene A(3,0,0), B(0,3,2) og C(-2,0,4).

a) Regn ut $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$ og $\angle$A i trekanten.

b) Regn ut koordinatene til punkt D når $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Vis ved regning at likningen for planet α utspent av punktene A, B og C er

$$12x+2y+15z-36=0$$

Et punkt E har koordinatene (0, y, z)

d) Regn ut koordinatene til E når $\overrightarrow{AE}$ står vinkelrett på både $\overrightarrow{AB}$ $og\overrightarrow{AC}$.

Punktene A, B, C og origo danner en pyramide.

e) Regn ut volumet av denne pyramiden.

OPPGAVE 5

Norges utslipp av SO_2 målt i tusen tonn per år, utviklet seg i perioden 1980-1999 i godt samsvar med modellen:

$$S(x) = 140e^{-0,104x}$$

$S(x)$ er utslippet x år etter 1980.

a) Finn ved regning hva SO_2-utslippet var i 1996. Regn også ut hvilket år utslippet var ca. 67,6 tusen tonn.

b) Regn ut det tilnærmede samlede utslippet i perioden ved å regne ut et integral.

Hvilken annen metode kan benyttes for å regne ut det samlede utslippet? Hvorfor ville vi ikke fått helt samme svar med denne metoden? Du trenger ikke gjennomføre utregningen.

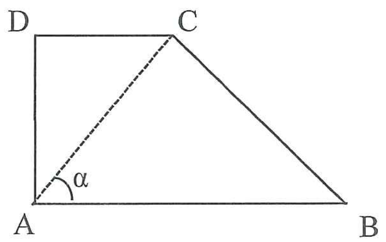
OPPGAVE 6

I trekanten ABC er $\angle A = 40°, AB = 6$ og $AC = 4$.

a) Regn ut arealet til trekanten, lengden av siden BC og $\angle C$.

I trapeset ABCD er AB og CD de parallelle linjene.

$AB = 6,\ AC = 4,\ \angle A = 90°$ og $\angle CAB = \alpha$



b) Vis at arealet til trapeset kan skrives som $A(\alpha) = 12\sin(\alpha) + 4\sin(2\alpha)$.

c) Bruk derivasjon til å finne den vinkelen som gir størst areal. Hva er arealet da?

OPPGAVE 1

a) $$\frac{2x^2-8}{2x+8}:\frac{3x+6}{x+4}=\frac{(2x^2-8)(x+4)}{(2x+8)(3x+6)}=\frac{2(x+2)(x-2)(x+4)}{2(x+4)3(x+2)}=\frac{x-2}{3}$$

b) $$\left(\frac{a}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{6a^3}{a^2}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{6a^3}{a^2}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{6a^{\frac{1}{3}+3+\frac{2}{3}-2}}{3\cdot 2}=a^2$$

c) $e^{2x}-3e^x=18 \Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x-18=0$

$$e^x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}-3 \text{ (ingen løsning)}\\ 6\end{cases}$$

$\Rightarrow e^x=6 \Rightarrow x=ln6$

d) $\sqrt{2}(x-1)=\sqrt{x} \Leftrightarrow x-1=\sqrt{\frac{x}{2}} \Rightarrow (x-1)^2=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2-\frac{5}{2}x+1=0$

$$x=\frac{-(-\frac{5}{2})\pm\sqrt{(-\frac{5}{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\begin{cases}\frac{1}{2}.\\ 2\end{cases}$$ Setter prøve og får x = 2.

e) $5sinx-1=0 \Leftrightarrow sinx=\frac{1}{5} \Rightarrow x=0{,}2 \; og \; x=\pi-0{,}2=2{,}9$

f) Variabelskifte med $u=x^2-7 \; og \; du=2x\,dx$ gir:

$$\int 2x\cdot\sqrt{x^2-7}\,dx=\int(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^2-7)^{\frac{3}{2}}+C$$

g) Delvis integrasjon:

$$\int xlnxdx=\frac{1}{2}x^2lnx-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2lnx-\int\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}x^2lnx-\frac{1}{4}x^2+C$$

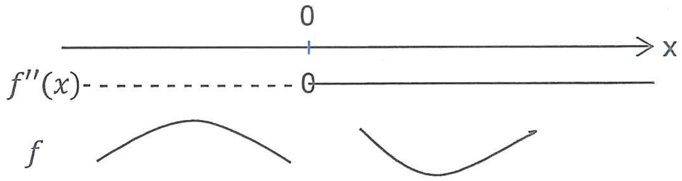
OPPGAVE 2

a) $2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$. Nullpunkt: $x=\begin{cases}0\\ \pm 2\end{cases}$

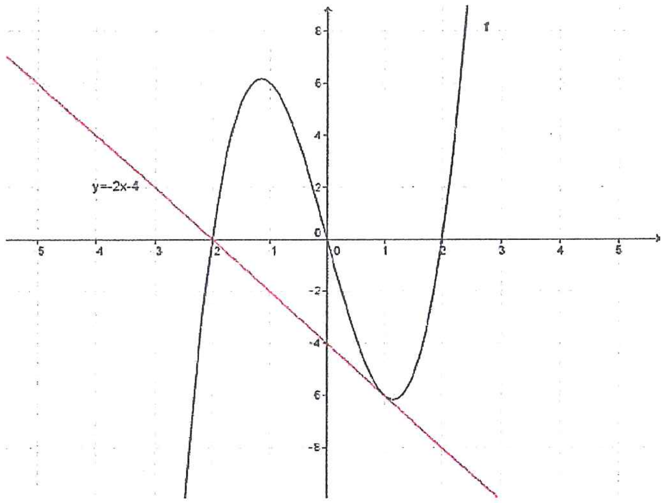
b) $y-f(1)=f'(1)(x-1) \; hvor \; f'(x)=6x^2-8 \; og \; f'(1)=-2$

$\Rightarrow y-(-6)=-2(x-1) \Leftrightarrow y=-2x-4$

c) $f''(x)=12x,\; f''(x)=0 \Rightarrow x=0$



Fortegnsskjema viser at f vender hul side ned når x < 0 og hul side opp når x > 0. (Vendepunkt i $(0, f(0)) = (0,0)$)



d) $\int_0^2 (2x^3 - 8x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 4x^2\right]_0^2 = -8.$ Areal $= 8$

OPPGAVE 3

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Vertikal asymptote:
$\lim_{x \to 3} f(x) \longrightarrow \infty$

x = 3 er vertikal asymptote.

Horisontal asymptote:
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

y =1 er horisontal asymptote

b) $f'(x) = \frac{1(x-3)-(x+2)1}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$. $f'(x)$ kan ikke bli 0. Ingen topp – eller bunnpunkt.

c) Vi kan definere hendingene:

H: Trekker en hvit kule. S: trekker en sort kule.

Finn sannsynligheten for at den første kula vi trekker er hvit.

$$P(H) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Finn sannsynligheten for at alle de fem kulene vi trekker er hvite.

$$P(HHHHH) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

Finn sannsynligheten for at nøyaktig en av de fem kulene vi trekker er sorte.

$$P(SHHHH) + P(HSHHH) + P(HHSHH) + P(HHHSH) + P(HHHHS)$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{9}$$

d) Hvilken type rekke? (uendelig) geometrisk rekke.

$a_1 = 1, k = 2lnx\ og\ S = 3$ settes inn i formelen $S = \frac{a_1}{1-k}$

$Får\ da\ lnx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}}$

OPPGAVE 4

a) $\overrightarrow{AB} = [-3, 3, 2], |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{22}\ og\ \cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{23}{\sqrt{22 \cdot 41}} \Rightarrow \angle A = 40°$

b) $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left[-7, \frac{9}{2}, 5\right], \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow D\left(-9, \frac{9}{2}, 9\right)$

c) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [12,2,15], A(3,0,0) \Rightarrow$

$$\alpha: 12(x-3) + 2(y-0) + 15(z-0) = 0 \Rightarrow 12x + 2y + 15z - 36 = 0$$

d) $\overrightarrow{AE} = [-3, y, z]. \overrightarrow{AE}\ og\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ er parallelle.
$Da\ er\ [-3, y, z] = t[12,2,15] \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\ og\ z = -\frac{15}{4} \Rightarrow E\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$

e) $\overrightarrow{AO} = [-3,0,0]$. $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AO} = -36. Volum = \frac{36}{6} = 6.$

OPPGAVE 5

a) Utslippet 1996: $S(16) = 140e^{-0,104 \cdot 16} = 26,513 \approx 26,5$ (tusen tonn).

$$S(x) = 67,6 \Rightarrow 140e^{-0,104x} = 67,6 \Leftrightarrow x = \frac{ln\frac{67,6}{140}}{-0,104} \approx 7$$

Utslippet var ca 67,6 tusen tonn i 1987.

b) Samlet utslipp: $\int_0^{20} S(x)dx = \left[-\frac{140}{0,104}e^{-0,104x}\right]_0^{20}$

$$= \left(-\frac{140}{0,104}e^{-0,104 \cdot 20}\right) - \left(-\frac{140}{0,104}e^{-0,104 \cdot 0}\right) = \frac{140}{0,104}(1 - e^{-0,104 \cdot 20}) = 1178$$

Samlet utslipp i perioden er på om lag 1,2 millioner tonn.

Kan løses som geometrisk rekke.

$\left(a_1 = 140, k = e^{-0,104}\ og\ S_{20} = 140 \cdot \frac{(e^{-0,104})^{20} - 1}{e^{-0,104} - 1} = 1240.\right)$

Forskjellige svar: Integral: kontinuerlig utslippsreduksjon forutsettes.
Rekke: trinnvis (en årlig) utslippsreduksjon.

OPPGAVE 6

a) $areal = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot sin 40° = 12 sin 40° = 7,7$

$$BC = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 40°} = 3,9$$

$$\angle C = \cos^{-1}\frac{4^2 + 3,9^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 3,9} = 98,8°$$

b) $areal = A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2}4 \cdot 6 sin\alpha + \frac{1}{2}(AD) \cdot (DC) =$

$$12 \sin\alpha + \frac{1}{2}4\sin\alpha \cdot 4\cos\alpha = 12\sin\alpha + 4(2\sin\alpha\cos\alpha) = 12\sin\alpha + 4\sin 2\alpha$$

c) $A'(\alpha) = 12\cos\alpha + 4 \cdot 2\cos 2\alpha = 12\cos\alpha + 8\cos 2\alpha = 12\cos\alpha +$
$8(2cos^2\alpha - 1) = 4(4cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2)$

$A'(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} == \begin{cases} -1,175\ (ingen\ løsning) \\ 0,425 \end{cases}$

$\cos\alpha = 0,425 \Rightarrow \alpha = 64,8°$

Fortegnsskjema viser toppunkt.
$A(64,8) = 13,94$

Størst areal = 13,94 når $\angle CAB = 64,8°$