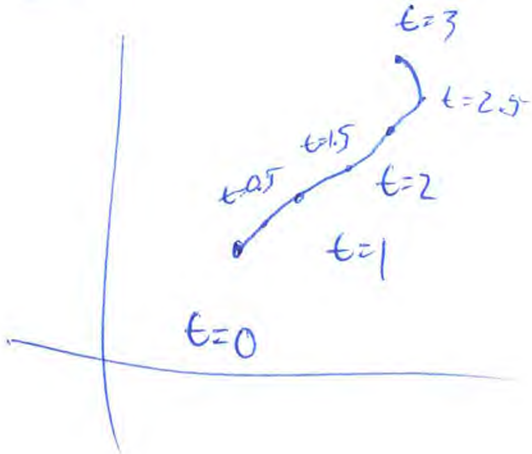
Parametrisering

Idé:

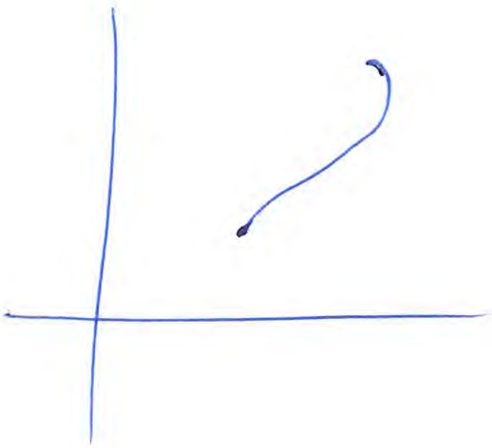


Hvert punkt

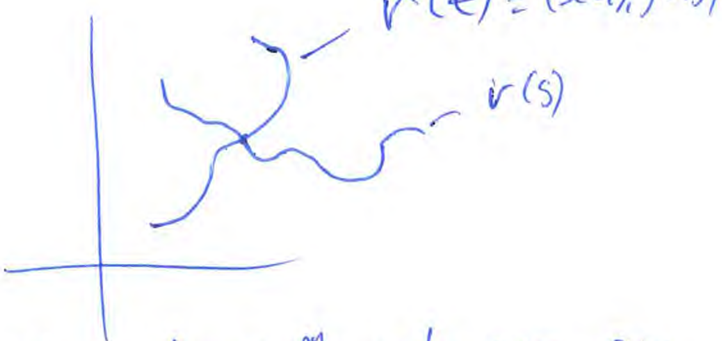
$$(x(t), y(t))$$

Denne t-en kalles en parameter, og dette er da en parametrisert kurve.

Om jeg bare hadde tegnet opp kurva, får mindre info.



Kunne hatt to kurver.



"Vil vi krasje?" avhenger av nøyaktig parametriseringen.

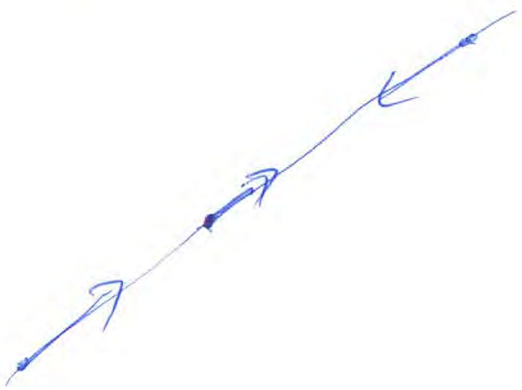
Vi skal se på parametrisering av linjer.
Spesifikt parametrisering av linjer med konstant fart.

To grunner til å ville gjøre dette:

- Representere noe som faktisk avhenger av parameteren.
- I 3D er linjer vanskeligere å skrive som formler, men fremdeles lette å parametrisere.

Idé: For å bestemme ~~p~~ en parametrisering av en linje, holder det å vite:

- Hvor starter vi (Hvor er vi når $t=0$),
- Hvilken retning går vi (og hvor fort)



Trenger to ting:

- Et punkt.
- En vektor.

Eks: Har linja $y = 2x - 3$.

Vi vil parametrisere denne.

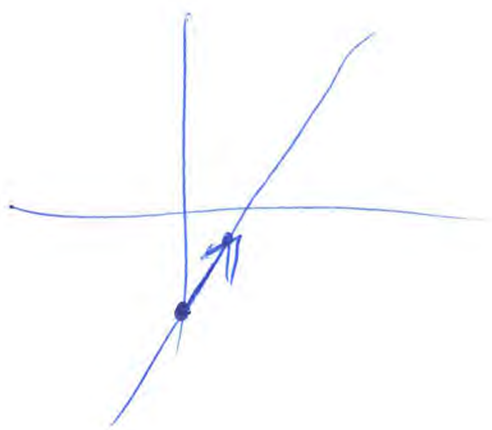
Velger $x=0$, får da $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$

Punktet $(0,-3)$ må ligge på linja.

Finner enda et punkt på linja. For eksempel $x=1$.

Får da $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, så $(1,-1)$ ligger også på linja. Vi kan finne vektoren mellom disse to punktene,

$$\vec{v} = [1-0, -1-(-3)] = [1, 2].$$



Idé:

Kan skalere denne vektoren for å få nye punkta på linja.

Alle punkta på linja kan skrives som

$$\vec{OP} + t \cdot \vec{v}.$$

Her har vi introdusert en parameter.

Eks:

$$[0,-3] + t[1,2] = [0,-3] + [t, 2t]$$
$$= [t, 2t-3]$$

Skrives ofte som

Punktet $(0,-3)$ vi startet i

$$l: \begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$$

vektoren $[1,2]$ vi fulgte.

Eks: Ei linje går gjennom punktet $P=(2,2)$ i retninga bestemt av vektoren $[2,1]$.

Metode 1: Husk:

$$l: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = \underline{1}\,t + 2 \end{cases} = \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t+2 \end{cases}$$

Metode 2:

$$l: \vec{OP} + t\vec{v} = [2,2] + t[2,1]$$
$$= [2+2t, 2+t]$$

Hva er formelen for linja? $\boxed{y = ax + b}$

$$x = 2t+2 \xrightarrow{\text{Løs for } t} x-2 = 2t \qquad \frac{x}{2} - 1 = t$$

$$y = t + 2$$

$$y = \frac{x}{2} - 1 + 2 = \underline{\frac{1}{2}x + 1}$$

stigningstallet

Metode 2: Ettpunktsformelen, $y - y_0 = a(x - x_0)$

Skal gå gjennom $P=(2,2)$. Følge vektoren $[2,1]$, som har stigningstall $\frac{1}{2}$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x-2) \qquad y - 2 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\underline{y = \frac{1}{2}x + 1}$$

Har to parametriserte linjer:

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}.$$

Spørsmål 1: Om disse linjene representer to partikler, og t representer tid, vil disse partiklene krasje.

Metode 1: Hvor møtes linjene, og er begge partiklene der samtidig?

Bytte „navn" på ene parameteren:

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 3 - 2s \end{cases}$$

Setter x-verdiene like og y-verdiene like:

To likninger, to ukjente.

$$1 + t = 1 + 3s$$
$$-1 + 2t = 3 - 2s$$

$$t = 3s$$
$$-1 + 2\cdot(3s) = 3 - 2s$$
$$-1 + 6s = 3 - 2s$$
$$8s = 4$$
$$s = \frac{1}{2} \qquad t = 3s = \frac{3}{2}$$

Hvor er møtepunktet? $\quad m: \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 3 - 2s \end{cases} \to \begin{matrix} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{matrix}$

Metode 2: Anta at de møtes, finn ut hva t da må være:

Beholder navnet t på begge, setter så $x=x$ og $y=y$

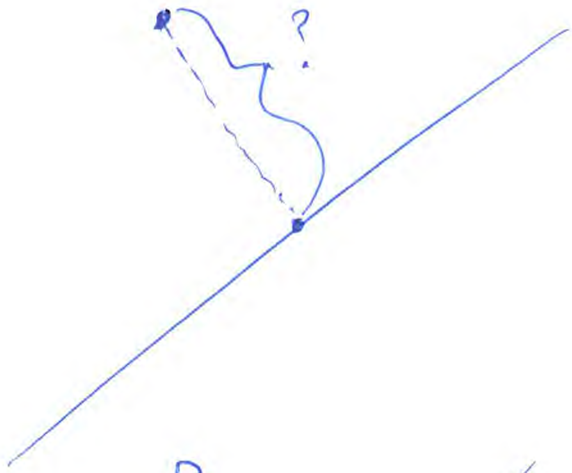
$$1+t=1+3t \Rightarrow 0=2t \Rightarrow t=0$$

$$-1+2t=3-2t \Rightarrow 4t=4 \Rightarrow t=1$$

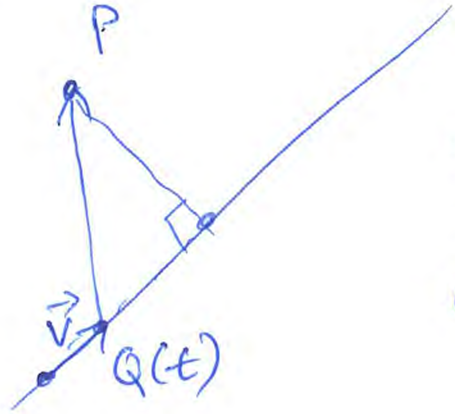
Kan også sette inn første t-verdi i andre likning, får $-1=3$.

Dette går ikke, og de to partiklene vil ikke møtes.

Gitt en linje og et punkt, hvor langt er det fra linja til punktet.



Idé:



Vi vil finne den Q-en som er slik at $\overrightarrow{PQ}$ er 90° på linja

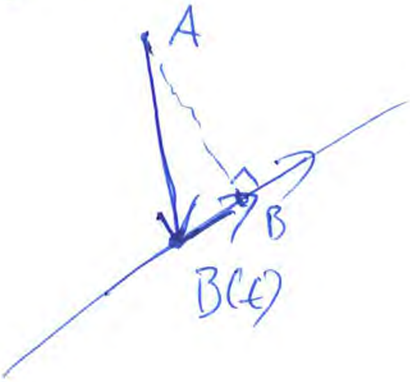
Litt notasjon:

Hvis to vektorer er 90° på hverandre, kalles de også for ortogonale, eller normale. skriver $\vec{u} \perp \vec{v}$

Eks: Linja $l: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+t \end{cases}$

og punktet $A = (3, 6)$. Finn avstanden fra punktet til linja, og punktet på linja som er nærmest A.

Triks: Definerer punktet $B = (3+2t, 1+t)$, og finner vektoren $\vec{AB} = [2t, -5+t]$



Linja peker samme retning som vektoren $\vec{v} = [2, 1]$

Vil finne en t-verdi slik at $\vec{v} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{AB} = 0$.

$$[2, 1] \cdot [2t, -5+t] = 0$$
$$4t + (-5+t) = 0$$
$$5t - 5 = 0$$
$$5t = 5$$
$$t = 1$$

$$B = (3+2\cdot 1, 1+1) = (5, 2)$$
$$\vec{AB} = [2, -4]$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \underline{\sqrt{20}}$$

I 3D må vi essensielt bruke denne metoden.

I 2D har vi et alternativ:

Siden linja peker samme retning som vektoren $\vec{v} = [2,1]$, vil vektoren $[-1,2]$ være 90° på linja.

Kan lage linja gjennom A med $[-1,2]$ som retning,

$$m: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 6 + 2t \end{cases}$$

Når vil disse to linjene (m, og l) møtes?

$$l: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x = 3 - s \\ y = 6 + 2s \end{cases}$$

Setter x og y like,

$$3 + 2t = 3 - s$$
$$1 + t = 6 + 2s$$

$$t = 5 + 2s \quad \Big| \quad 3 + 2(5 + 2s) = 3 - s$$

$$3 + 10 + 4s = 3 - s$$
$$5s = -10$$
$$s = -2$$

$$t = 5 + 2\cdot(-2) = \underline{1}$$

Punktet $B = (3 + 2\cdot 1,\ 1 + 1) = (5, 2)$