Oppgave 1 2. gradsfunksjoner, faktorisering

a) Løs likningen $x^2 - px = 0 \qquad p \in \mathbb{R}$

b) Finn ett andregrads polynom som har røttene/ nullpunktene 0 og $-\dfrac{3}{4}$.

c) Bestem *a* slik at $x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6 = 0$ slik at $x = 0$ blir en rot / nullpunkt.

Oppgave 2 Enkle likninger Løs ved regning. Tenk også på definisjonsmengde.

a) $\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+1} = 0$

b) $\dfrac{x^2 - 4x - 3}{x-1} = -1$

c) $x + 2 = \dfrac{6}{x-3}$

d) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x(x-1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{18}$

Oppgave 3 Rette linjer, skjæringspunkt og bestemme vinkel.

a) En rett linje går gjennom punktene $(-2,-3)$ og $(3,4)$.Tegn linjen i et koordinatsystem med samme skala på begge akser. Finn likningen for linjen, og bestem vinkelen linjen danner med *x*-aksen.

b) En annen linje skjærer *y*-aksen i $(0,1)$ og har vinkel koeffisient lik 1. Hva blir likningen til denne linjen? Tegn linjen i samme koordinatsystem som linjen i a)

c) En kurve har likningen $y = 2x^2 - 6x + 4$ Finn likningens skjæringspunkt med koordinataksene og ekstremalpunktet (dvs. topp- eller bunnpunkt). Tegn inn kurven i koordinatsystemet sammen med de to rette linjene.

d) De tre kurvene har ett felles punkt. Les av dette punktet grafisk. Kontroller ved regning.

Oppgave 4 Geometri og trigonometri.

Et firkantet skogstykke *ABCD* er på 200 mål. Linjestykket
$AB = 400\,\text{m}$, $BC = 800\,\text{m}$ og $AD = 300\,\text{m}$. $\angle B = 90°$.

a) Kan skogstykket, med den informasjon som er gitt, ha mer enn en form? (Begrunn ved regning)

b) Skogstykket har en form slik at omkretsen blir minst mulig. Finn denne omkretsen og bestem vinklene *A*, *C* og *D*.

Oppgave 5 Geometrisk rekke

I en geometrisk rekke er det første leddet $2^{\frac{3}{4}}$. Det andre leddet er $2^{\frac{3}{8}}$.

a) Regn ut summen av de 10 første leddene i rekken.

b) Vil rekken konvergere når antall ledd går mot uendelig?

Oppgave 6 Geometrisk rekke med variabel kvotient

I en uendelig geometrisk rekke er det første leddet lik $x-1$ og det andre leddet x^2-2x+1

a) For hvilke verdier av *x* er rekken konvergent?

b) Regn ut summen av rekken når den konvergerer.

c) For hvilke verdier av x er summen av den uendelig, konvergente rekken mindre enn 0?

Oppgave 7 Vektor i rommet**.**

Gitt punktene $A(1,1,2)$, $B(-1,1,3)$, $C(2,-2,4)$ og $D(5,2,z)$

a) Bestem arealet og vinklene i trekanten, $\triangle ABC$.

b) Bestem den verdien *z* må ha for at *A*, *B*, *C* og *D* skal danne en trekantet pyramide med volum lik 2.

c) Bestem den verdien *z* må ha for at *A*, *B*, *C* og *D* skal ligge i samme plan.

Løsningsforslag:

Oppgave 1 2. gradsfunksjoner, faktorisering

a)

$x^2 - px = 0 \qquad p \in \mathbb{R}$

$x(x-p) = 0$ Bruker produktregel: $a \cdot b = 0...$

$x = 0 \quad \vee \quad x - p = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = p \qquad \underline{\underline{L = \{0, p\}}}$

b) Finn ett andregrads polynom som har røttene/ nullpunktene 0 og $-\frac{3}{4}$.

$p(x) = ax\left(x + \frac{3}{4}\right)$ $\quad a$ kan velges fritt bare a $\neq 0$

c) Bestem a slik at $x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6 = 0$ slik at $x = 0$ blir en rot / nullpunkt.
Vi må ha et konstantledd lik 0, her betyr det at

$2a^2 - a - 6 = 0$

$a = 2 \quad \vee \quad a = -\frac{3}{2}$

Oppgave 2 Enkle likninger Løs ved regning. Tenk også på definisjonsmengde.

a)

$\frac{(x+3)(x-2)}{x+1} = 0 \qquad x \neq -1$ Tenk gjerne brøk =0, når teller =0

$x = -3 \;\; , x = 2$ Fint at teller er faktorisert og høyre side lik 0.

b)

$\frac{x^2 - 4x - 3}{x-1} = -1 \qquad x \neq 1$

Likning med brøk, ganger med f.n.

$\frac{x^2 - 4x - 3}{x-1} = -1 \,\big|\, \cdot (x-1)$

$x^2 - 4x - 3 = -1(x-1)$

$x^2 - 4x - 3 == -x + 1$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 4}}$

$\underline{\underline{x_2 = -1}}$

c)

$$x+2=\frac{6}{x-3} \qquad x\neq 3$$

Likning med brøk, ganger med f.n.

$$x+2=\frac{6}{x-3}\Big|\cdot(x-3)$$
$$(x+2)(x-3)=6$$
$$x^2-3x+2x-6-6=0$$
$$x^2-x-12=0$$
$$\underline{\underline{x_1=4}}$$
$$\underline{\underline{x_2=-3}}$$

d)

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$$

Her kan vi bruke potensreglene til å omforme venstre side.

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{18}$$

Når grunntallet er likt, må også eksponent være lik for å likhet.

$$3x(x-1)=18\,|:3$$

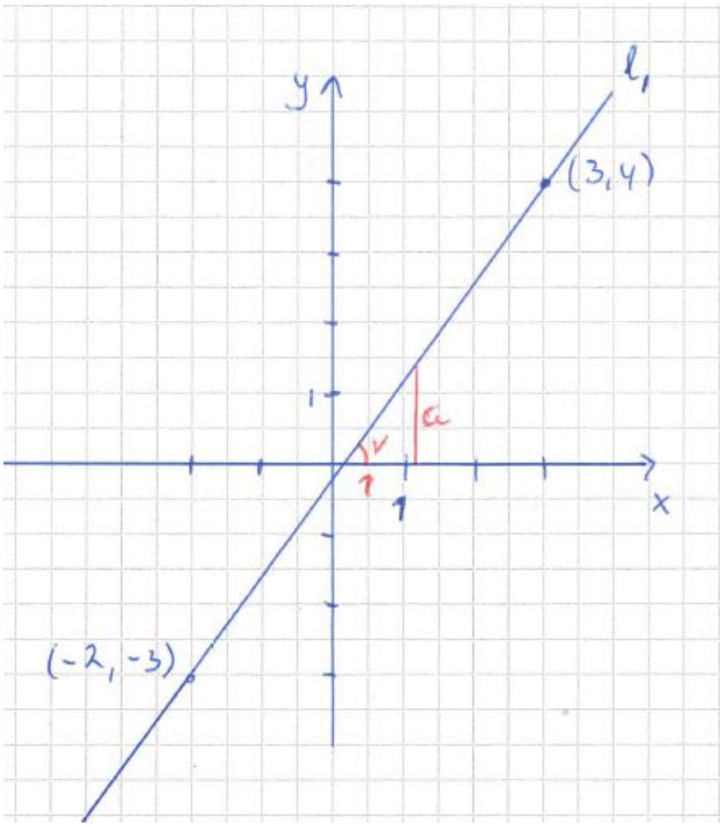
Deler / skalerer ned siden det er lettere å regne med små tall.

$$x(x-1)=6$$
$$x^2-x-6=0$$
$$\underline{\underline{x_1=3}}$$
$$\underline{\underline{x_2=-2}}$$

Oppgave 3 Rette linjer, skjæringspunkt og bestemme vinkel.

a) En rett linje går gjennom punktene $(-2,-3)$ og $(3,4)$.

Graf:



<u>Finn likningen for linjen</u>,

Her er det ikke enkelt å lese av skjæringspunkt og stigningstall, løser derfor oppgaven ved regning.

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4+3}{3+2}=\underline{\frac{7}{5}}$$

$$y-4=\frac{7}{5}(x-3)$$
$$y=\frac{7}{5}x-\frac{21}{5}+\frac{20}{5}$$
$$\underline{\underline{y=\frac{7}{5}x-\frac{1}{5}}}$$

Vinkelen linjen danner med *x*-aksen:

$$\tan v=\frac{mot}{hos}=\frac{\frac{7}{5}}{1}=\frac{7}{5}$$
$$v=\tan^{-1}\frac{7}{5}=\underline{\underline{54,46^\circ}}$$
$$\underline{\underline{\text{Linjen } l_1 \text{ danner en vinkel på } 54,46^\circ \text{ med } x\text{- aksen.}}}$$

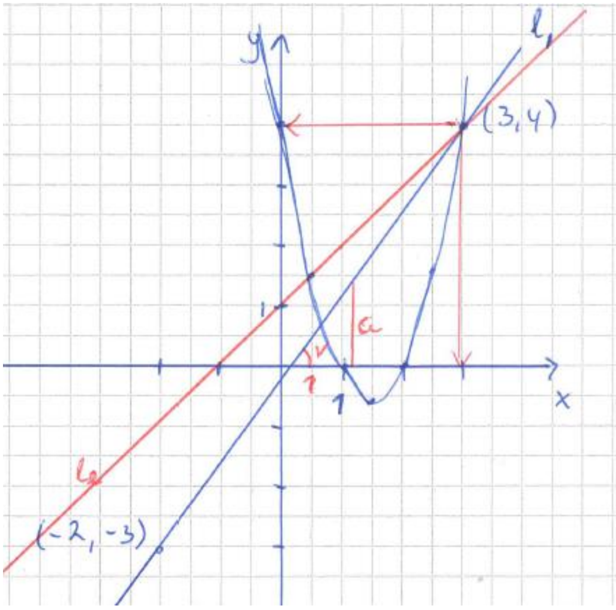
b) En annen linje skjærer *y*-aksen i $(0,1)$ og har vinkel koeffisient lik 1. Hva blir likningen til denne linjen?

Linjen har b = 1, og vil ha et stigningstall lik 1.

y = x+1.

c) En kurve har likningen $y=2x^2-6x+4$

Skjæringspunkt med *y*-akse: (når x =0) $\underline{\underline{(0,4)}}$.



Skjæringspunkt med *x*-akse: (når *y* =0)

$$2x^2-6x+4=0$$
$$x_1=1 \quad , \qquad x_2=2$$
$$\underline{\underline{\text{Skjærer } x-\text{akse i } (1,0) \text{ og } (2,0)}}$$

Ekstremalpunktet: Kurven har et bunnpunkt siden a > 0, dette finner vi midt mellom de to nullpunktene (eller der den deriverte er lik 0).

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\cdot\frac{9}{4}-6\cdot\frac{3}{2}+4$$
$$=\frac{9}{2}-9+4=\frac{9}{2}-\frac{10}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt:}\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)}}$$

d) De tre kurvene har ett felles punkt. Les av dette punktet grafisk. Kontroller ved regning.

Ser av graf at kurvene skjærer i punktet (3,4).

Regner ut skjæring mellom de to rette linjene:

$l_2 = l_2$

$\frac{7}{5}x - \frac{1}{5} = x + 1 \,\Big|\cdot 5$

$7x - 1 = 5x + 5$

$2x = 6$

$x = 3 \quad y = 3 + 1 = 4 \quad (\text{setter inn i } l_2)$

Sjekker så at $(3,4)$ er et punkt på parabelen:

$y = 2x^2 - 6x + 4$

$2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = 18 - 18 + 4 = 4 \qquad OK$

Alle tre kurver skjærer i samme punkt, nemlig (3,4).

Oppgave 4 Et firkantet skogstykke *ABCD* er på 200 mål.

Linjestykket $AB = 400\,\text{m}$, $BC = 800\,\text{m}$ og $AD = 300\,\text{m}$. $\angle B = 90°$.

a) Kan skogstykket, med den informasjon som er gitt, ha mer enn en form? (Begrunn ved regning og figur.)

Ser av skissen at vi kan ha flere valg, men må passe på at arealet stemmer

$A = 200\,\text{mål} = 200\,000 m^2$.

Regner ut areal av trekant ABC:

$$\text{Areal} \triangle ABC = \frac{400\,\text{m} \cdot 800\,\text{m}}{2} = \underline{160\ 000\,\text{m}^2} = A_1$$

$$\text{Areal } \triangle ACD = 200\ 000\,\text{m}^2 - 160\ 000\,\text{m}^2 = \underline{40\ 000\,\text{m}^2}$$

$$\text{Areal } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin v$$ Finner lengden til AC m/ Pytagoras:

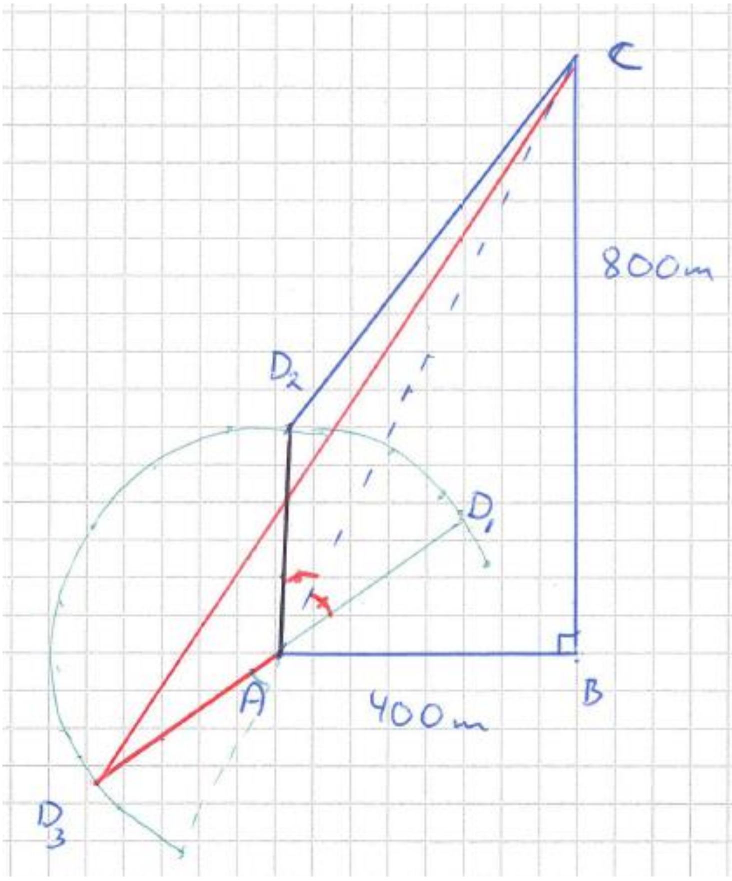
$$AC = \sqrt{(400\,\text{m})^2 + (800\,\text{m})^2} \approx \underline{894,4\text{m}}$$

$$\text{Kan finne finkel fra Areal } \triangle ACD = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin v = 40\ 000\,\text{m}^2$$

$$\sin v = \frac{2 \cdot 40\ 000\,\text{m}^2}{300\,\text{m} \cdot 894,4\text{m}} \approx 0,298$$ Tegner enhetssirkel og finner:

$v_1 = 17,3°$

$v_2 = 162,7°$



Det finnes to brukbare alternativer: $ABCD_2$ $ABCD_3$.

(når D kommer inn i trekant ABC blir arealet mindre enn angitt)

b) Skogstykket har en form slik at omkretsen blir minst mulig.

<u>Finn denne omkretsen</u>

Ser av figur at $ABCD_2$ har minst omkrets. Det er bare CD som varierer.

<u>Bruker cosinussetning for å finne CD</u>

$$CD^2 = (300\text{m})^2 + (894{,}4\text{m})^2 - 2 \cdot 300\text{m} \cdot 894{,}4\text{m} \cdot \cos 17{,}3°$$
$$\Rightarrow \qquad \underline{CD \approx 614{,}5\text{m}}$$
$$\text{Omkrets} = 400\text{m} + 800\text{m} + 300\text{m} + 614{,}5\text{m} = \underline{\underline{2114{,}5\text{m}}}$$

<u>og bestem vinklene *A*, *C* og *D*.</u>

1. Finner først vinklene i trekant ABC (rettvinklet):

$$\tan \angle BAC = \frac{800\text{m}}{400\text{m}} = 2$$
$$\angle BAC = \tan^{-1} 2 \approx \underline{63{,}4°}$$
$$\angle ACB = 180° - 90 - 63{,}4° = \underline{26{,}6°}$$

2. Finner vinklene i trekant ACD:

$$\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle CAD}=\frac{300\text{m}}{614,5\text{m}}$$

$$\sin\angle ACD=\frac{300\text{m}\cdot\sin 17,3^\circ}{614,5\text{m}}$$

$$\angle ACD = \underline{\underline{8,3^\circ}}$$

$$\angle D = 180^\circ - 8,3^\circ - 17,3^\circ = \underline{\underline{154,4^\circ}}$$

$$\angle A = 17,3^\circ + 63,4^\circ = \underline{\underline{80,7^\circ}}$$

$$\angle C = 26,6^\circ + 8,3^\circ = \underline{\underline{34,9^\circ}}$$

Oppgave 5 Geometrisk rekke

I en geometrisk rekke er det første leddet $2^{\frac{3}{4}}$. Det andre leddet er $2^{\frac{3}{8}}$.

a) S_{10} ?

Starter med å finne k:

$$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{4}-\frac{3}{8}}}=\underline{\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}} \qquad S_n = a_1\frac{1-k^n}{1-k}$$

$$S_{10}=2^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{\frac{30}{8}}}}{1-\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}}\approx\underline{\underline{6,80}}$$

b) Vil rekken konvergere når antall ledd går mot uendelig?

$$|k|<1$$

Rekken konvergerer dersom $\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}\approx 0,77$ Så rekken konvergerer.

$$\left(S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{2^{\frac{3}{4}}}{1-\frac{1}{2^{\frac{3}{8}}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{8}}}{2^{\frac{3}{8}}-1}=\frac{2^{\frac{9}{8}}}{2^{\frac{3}{8}}-1}\approx 7,35\right)$$

Oppgave 6 Geometrisk rekke med variabel kvotient

I en uendelig geometrisk rekke er det første leddet lik $x-1$ og det andre leddet x^2-2x+1

a) For hvilke verdier av *x* er rekken konvergent?

$a_1 = x-1 \qquad a_2 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$k = (x-1)$

Konvergent når:

$-1 < x - 1 < 1 \quad |+1$

$\underline{\underline{0 < x < 2}}$

b) Regn ut summen av rekken når den konvergerer.

$$S(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x} \qquad x \in \langle 0, 2 \rangle$$

c) For hvilke verdier av x er summen av den uendelig, konvergente rekken mindre enn 0?

$S(x)$ er bare definert for positive x-verdier $\quad x \in \langle 0, 2 \rangle$

$\frac{x-1}{2-x} < 0 \,|\cdot(2-x) \qquad$ (derfor er $2 - x$ positiv) Alernativ kan du tegne fortegnsskjema for brøken.

$x - 1 < 0$

$x > 1$

$\underline{\underline{L = \langle 1, 2 \rangle}}$

Oppgave 7 Vektor i rommet**.**

Gitt punktene $A(1,1,2)$, $\quad B(-1,1,3)$, $\quad C(2,-2,4)$ og $D(5,2,z)$

a) Bestem arealet og vinklene i trekanten, $\triangle ABC$.

$\overrightarrow{AB} = [-1-1, 1-1, 3-2] = [-2, 0, 1]$

$\overrightarrow{AC} = [1, -3, 2]$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = [0+3, -(-4-1), 6-0] = [3, 5, 6]$$

$$A = \frac{1}{2}\left|[3,5,6]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+25+36} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{70}}{2}}}$$

Bestemmer vinkel A med skalarprodukt:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [-2, 0, 1] \cdot [1, -3, 2] = -2 + 0 + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\angle A = 90^\circ}}$

Bestemmer vinkel B:

$\overrightarrow{BA} = [2, 0, -1]$

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{BC} = [3, -3, 1]$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = [2, 0, -1] \cdot [3, -3, 1] = 6 + 0 - 1 = 5$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \left(\frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{19}} \right)$$

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{19}} \right) = \underline{\underline{59{,}1^\circ}}$$

$$\angle C = 180^\circ - 90^\circ - 59{,}1^\circ = \underline{\underline{30{,}9^\circ}}$$

b) Bestem den verdien *z* må ha for at *A*, *B*, *C* og *D* skal danne en trekantet pyramide med volum lik 2.

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

$\overrightarrow{AD} = [4, 1, z-2]$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = [3, 5, 6] \cdot [4, 1, z-2] = 12 + 5 + 6(z-2) = 17 + 6z - 12 = 6z + 5$

Ønsker $V = 2$

$\frac{1}{6}|6z+5| = 2 \quad | \cdot 6$ Merk absoluttverdi!

$6z + 5 = 12 \quad \vee \quad 6z + 5 = -12$

$\underline{\underline{z = \frac{7}{6}}} \quad \vee \quad \underline{\underline{z = -\frac{17}{6}}}$

c) Bestem den verdien *z* må ha for at *A*, *B*, *C* og *D* skal ligge i samme plan.

Ligger punktene i samme plan blir V=0.

$$V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 6z + 5$

Ønsker $V = 0$

$\frac{1}{6}|6z+5| = 0 \quad | \cdot 6$ Betyr absoluttverdi her?

$6z + 5 = 0$

$\underline{\underline{z = \frac{-5}{6}}}$