Sist: Antiderivasjon:

$F(x)$ er ~~den~~ en antiderivert til $f(x)$, om

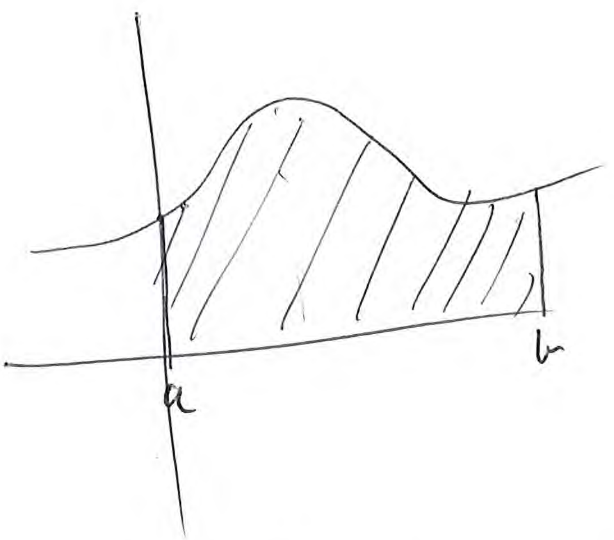
$F'(x) = f(x)$.

Finnes uendelig mange antideriverte til $f(x)$, siden vi alltid kan plusse på en konstant.

Skriver $\int f(x)\,dx$ for alle antideriverte.

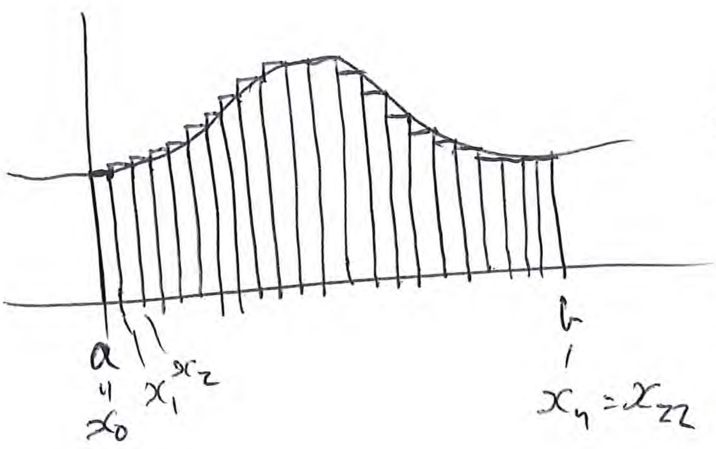
Kaller dette for det ubestemte integralet til $f(x)$.

Areal under graf.



Vil vite arealet under grafen til f mellom to verdier a og b.

Idé: Kutte denne figuren opp i mindre, enklere, biter.



~~Hva blir~~.

$$
\begin{aligned}
& f(x_1)\cdot(x_1 - x_0) \\
+\ & f(x_2)\cdot(x_2 - x_1) \\
+\ & f(x_3)\cdot(x_3 - x_2) \\
+\ & \vdots \\
+\ & f(x_{22})\cdot(x_{22} - x_{21})
\end{aligned}
$$

En ting vi kan gjøre: La hver av breddene $x_i - x_{i-1}$ være like store, kall avstanden Δx.

Vår sum blir da:

$$f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + \dots + f(x_{22})\Delta x.$$

Merk: $x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_3 = a + 3\Delta x$

$\vdots$

$x_i = a + i\cdot\Delta x$

Kan også se at

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

(Hos oss: $n=22$)

Sidesprang: Relativt ofte vil vi skrive opp lange summer:

$$1+2+3+4+5+6+7+\dots+99+100.$$

Summenotasjon:

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

$\sum$ ← Gresk stor s, „Sigma"

Start når i er 1

Slutt når i er 100

Formel for hvert ledd.

$$= 1+2+3+4+\dots+99+100$$

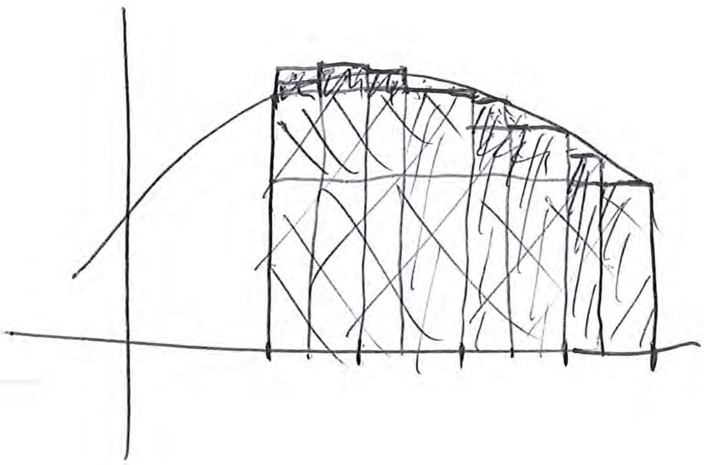
$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1+4+9+16+\dots+99^2+100^2$$

Vi kan skrive arealet under grafen via slik summenotasjon:

$$\text{Arealet} \approx \sum_{i=1}^{n} f(a+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Idé: Jo større n vi velger, jo mer nøyaktig blir svaret.

Enkelt eksempel:



$n=1$

$n=2$

$n=4$

$n=8$

Hva om vi ser på dette som en grense.

Definerer det bestemte integralet til grafen til å være det vi får når n går mot vendelig. Kaller da Δx for dx i grensen.

Skriver summetegnet $\sum$ som et glattere summetegn $\int$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

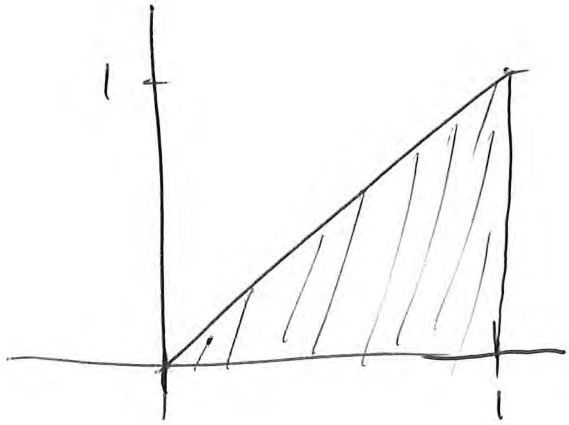
Eks:

$f(x) = x.$

Regn ut arealet fra $a=0$ til $b=1$

Vet at svaret skal bli:

$$\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

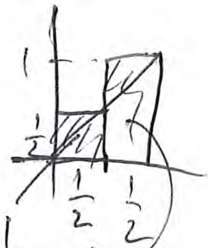


$$\sum_{i=1}^{n} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$

Eks: $n=2$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\frac{i}{4} = \frac{1}{4}+\frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$$= \frac{1}{4}\cdot(1+2)$$



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Vi får bruk til å skrive

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i$$

Nå må jeg vite hva $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Eks: $1+2+3+4+5+6 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$

$(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$

$11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 11\cdot 5$

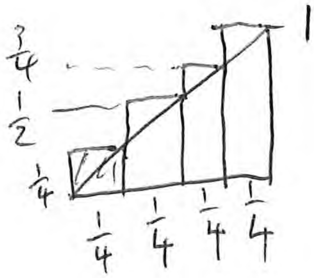
Summen burde være $(n+1)\cdot\frac{n}{2}$

Arealet av tilnærminga når vi har n bite blir

$$\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Eks: Om vi deler trekanten opp i 4 biter får vi at arealet blir

$$\frac{4\cdot(4+1)}{2\cdot 4^2} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$



$$\text{Areal} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4} = \frac{10}{16} = \underline{\frac{5}{8}}$$

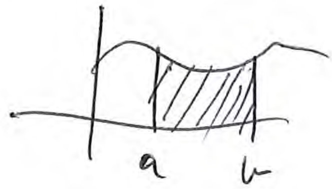
Formel kan forenkles:

$$\frac{\cancel{n}(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n}+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

Ser at når n blir større og større, vil $\frac{1}{2n}$ gå mot 0. og vi sitter igjen med at arealet er ca $\frac{1}{2}$.

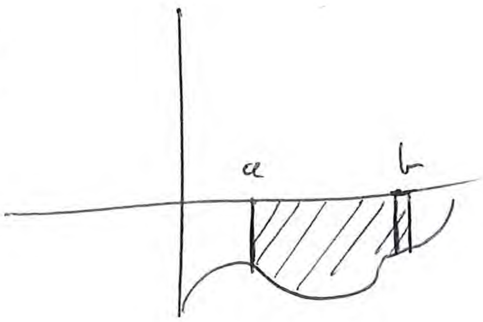
Denne måten å regne areal på er kun for teori og datamaskiner.

Idé: Vi har definert ~~integralet~~ det bestemte integralet til en funksjon, $\int_a^b f(x)dx$, som <u>arealet</u> under grafen fra a til b



Dette „funker" kun om grafen er positiv.

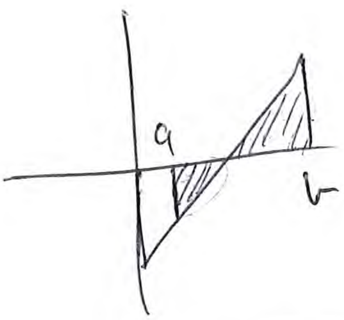
<u>Eks:</u>



Alle „høydene" blir nå negative.

Det gjør at $\int_a^b f(x)dx$ blir negativ.

<u>Eks:</u>



$\int_a^b f(x)dx$ blir positivt, men ikke like stort som arealet ville vært.

<u>Fundamentalsetningen</u>

Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon, vil

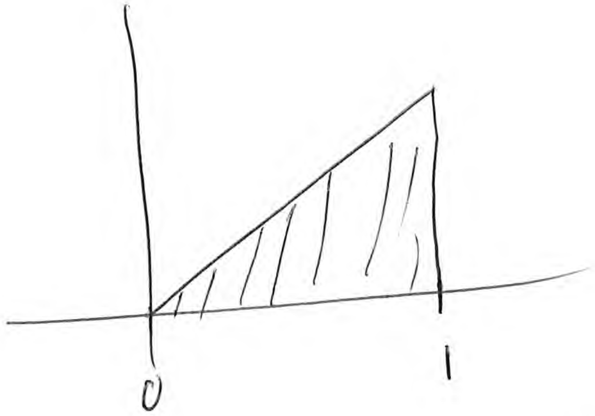
$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

være en antiderivert.

Hvis $F(x)$ er en antiderivert av $f(x)$, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Eks: Finn arealet av trekanten ~~gitt ved~~ under grafen $f(x)=x$, fra $a=0$ til $b=1$, ved integrasjon.

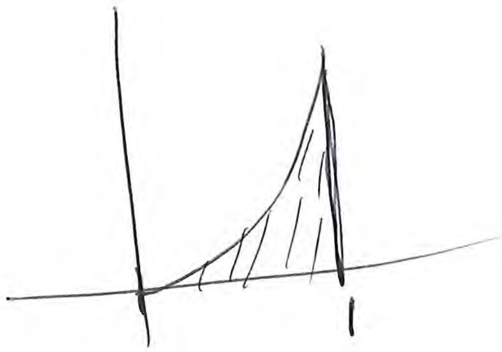


$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

Eks: Finn arealet under grafen $f(x)=x^2$ fra $x=0$ til $x=1$.

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

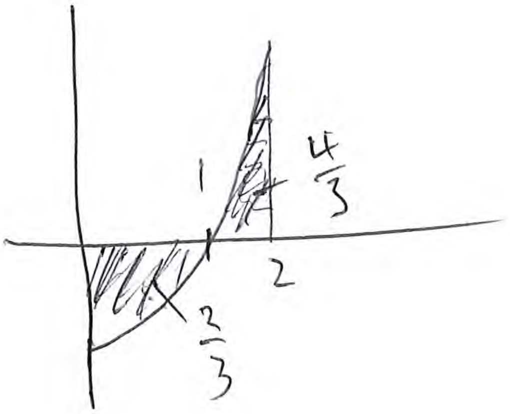


$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3$$

$$= \frac{1}{3}$$

Finn arealet mellom grafen og x-aksen til funksjonen

$f(x) = x^2 - 1$, i området fra $x = 0$ til $x = 2$.



Integralet:

$$\int_0^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 8 - 2 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Når treffer $f(x)$ x-aksen? Når $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Vi trenger kun $x = +1$.

Vi regner ut:

$$\int_0^1 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0\right)$$

$$= -\frac{2}{3}.$$ Arealet blir $+\frac{2}{3}$.

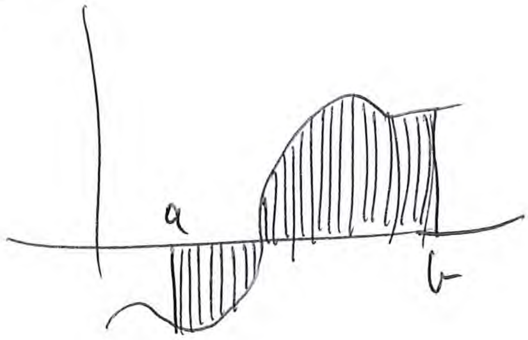
$$\int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$ Arealet her blir $\frac{4}{3}$.

Hele arealet blir $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = \underline{\underline{2}}$

Dagens idéer:

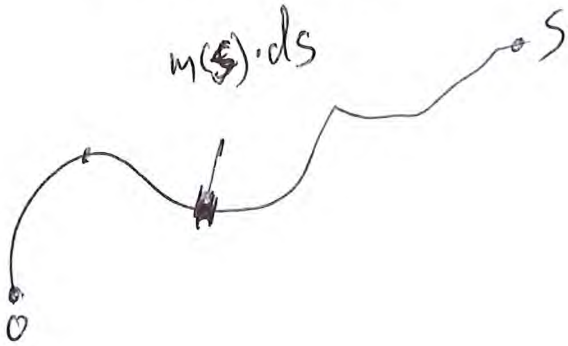
Kan regne ut integralet til en funksjon ved å „kutte" den opp i mange små biter, og summere „arealet"



Skrives

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Eks: Tråd med varierende massetetthet:

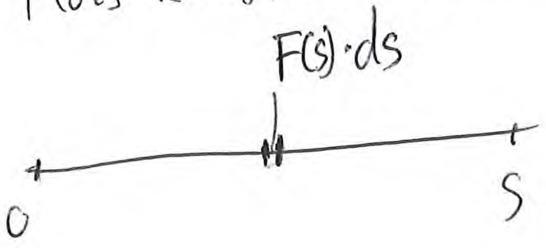


Vekten til tråden blir

$$\int_0^S m(s)\,ds$$

Eks: Arbeid utført er $F \cdot s$.

Hvis kraften endrer seg over strekninga, $F(s)$,



Arbeid utført over hele strekninga blir en sum av slike små biter,

$$\int_0^S F(s)\,ds$$

Fundamentalteoremet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

hvor F er en antiderivert av f.