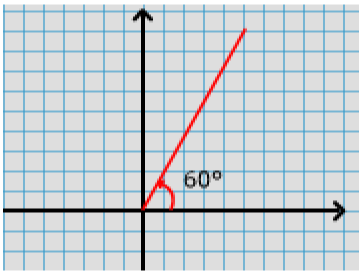
10. Trigonometriske likninger

Studenten kunne:

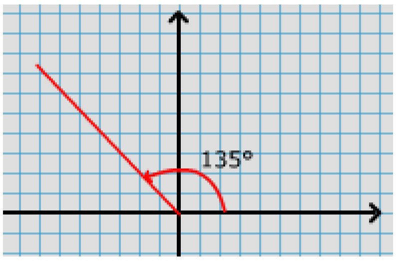
- Gjøre rede for og anvende det generelle vinkelbegrepet
- Løse enkle trigonometriske første- og andregradslikninger og ulikheter
- Gjøre rede for de generelle definisjonene av trigonometriske funksjoner og gi grafisk framstilling av disse
- Benytte sammenhengene mellom de trigonometriske funksjonene i beregninger
- Regne ut eksakte sinus-, cosinus- og tangensverdier til en del vinkler.

10.1. Vinkelmål

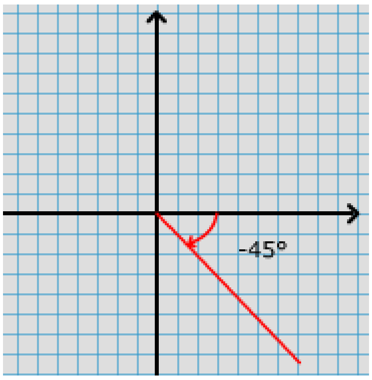
De trigonometriske funksjonene kan brukes til mer enn vinkler i trekanter, da har vi gjerne behov for generelle vinkler (ikke bare 0 -90 som i en rettvinklet trekant)



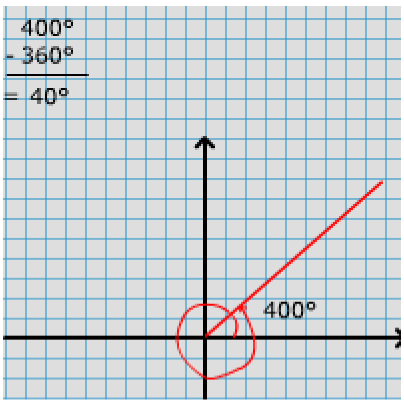
Her er en vinkel på 60 grader tegnet inn i et koordinatsystem. Merk at vi tenker oss at 1. vinkel - ben ligger langs *x*- aksen. (grunnstilling)
Og at positiv retning er MOT urviseren på klokka.



Her en noe større vinkel, merk at her er 2. vinkel-ben i 2. kvadrant.



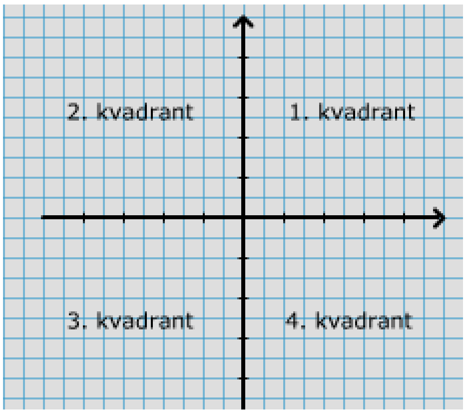
Her ser du en negativ vinkel. Da er retningen med klokka …



Noen vinkler er så store at 1 runde ikke er nok. Et eksempel på dette ser du her.

Vi sier at denne vinkelen ligger i 2. omløp.

Når vi skal beskrive ca. hvor en vinkel eller hvor et punkt ligger kan det være greit å bruke begrepet *kvadranter*. Slik du ser på figuren til høyre.

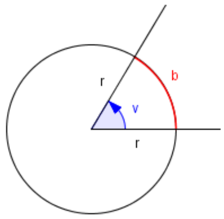


Merk at i noen sammenhenger brukes romertall, det vil si I, II, III eller IV kvadrant.

Til nå har vi målt vinkelen i grader (*deg* på kalkulatoren), men i matematikken er det mer vanlig å bruke et absolutt vinkelmål radianer (*rad* på kalkulatoren).

Det absolutte vinkelmål er uten benevning og en vinkel målt i radianer er definert som

$$v = \frac{buelengde}{radius} = \frac{b}{r} \ .$$



Bruker vi at omkretsen av en sirkel er $2\pi r$, får vi at

$2\pi = 360°$ eller

$\pi = 180°$

Dette kan vi bruke når vi skal regne om mellom grader og radianer

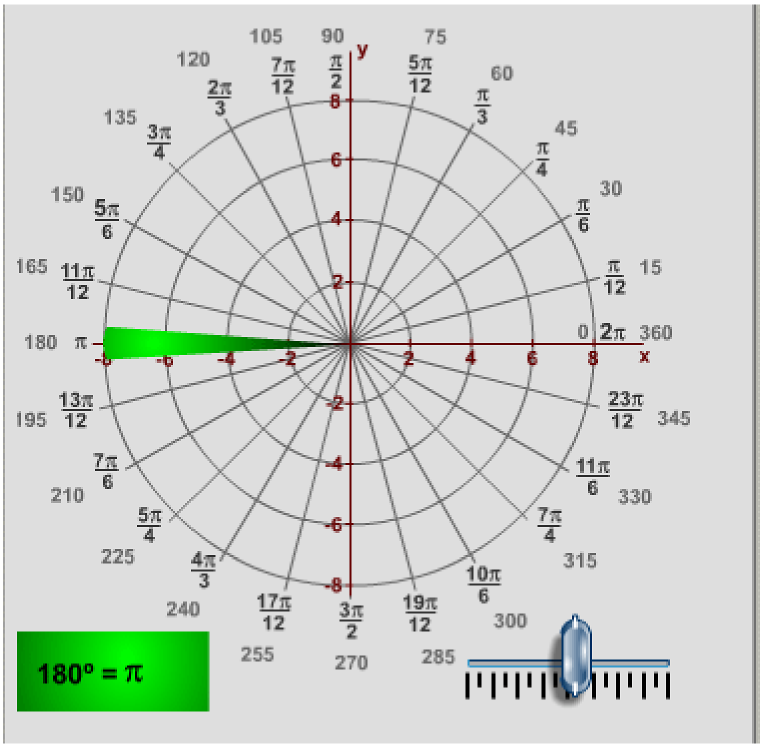
i) Fra radiander til grader: $\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = \underline{\underline{30°}}$

ii) Fra grader til radiander: $22° = 22 \cdot 1° = 22 \cdot \frac{\pi}{180} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{90} \approx 0,384}}$

De vinklene vi bruker mest er det etter hvert greit å huske:

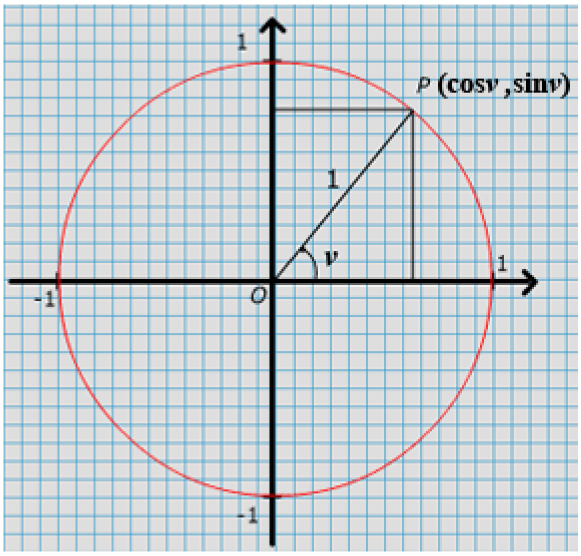
Grader	0°	30°	45°	60°	90°
Radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Figuren viser sammenheng mellom vinkler målt i grader og i radianer.



10.2. sinus og cosinus

De trigonometriske funksjonene kan brukes til mer enn vinkler i trekanter, da har vi gjerne behov for generelle vinkler (ikke bare 0 -90 som i en rettvinklet trekant)



Når vi skal bestemme sinus eller cosinus til en vinkel, kan vi tegne den i enhetssirkelen. Det vil si en sirkel med radius lik 1. Lar vi P være et punkt på randa til sirkelen vil P alltid ha koordinater gitt ved $P\left(\cos v, \sin v\right)$, når vinkel v er tegnet i grunnstilling.

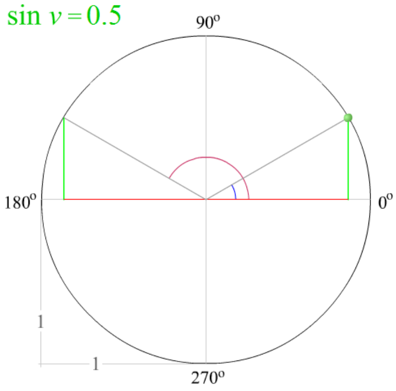
Merk spesielt at

$$\sin(v + n \cdot 360°) = \sin v$$
$$\cos(v + n \cdot 360°) = \cos v$$

Sin og cosinus til generelle vinkler definerer vi altså ut fra enhetssirkelen, mens tangens defineres ut fra forholdet mellom sinus og cosinus.

Enhetssirkelen er nyttig når vi skal løse trigonometriske likninger.

10.3. Sinuslikninger



a) Løs likningen:

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x \in [0°, 360° >$$

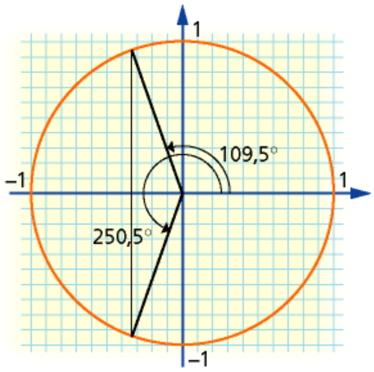
$$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{30^o}}$$

$$x_2 = 180 - 30^o = \underline{\underline{150^o}}$$

Kommentar: Vi starter med å finne de punktene med *y*-koordinat lik ½. Bruker deretter kalkulatoren til å finne den første løsningen, og finner så med hjelp av figuren, den andre løsningen.

10. 4 Cosinuslikninger

3 cos *v* + 1 = 0 Merk at her er ikke definisjonsområdet for *v* angitt. Må derfor finne en generell løsning.



$$3 \cos v = -1$$

$$\cos v = -\frac{1}{3}$$

Vi bruker lommeregneren og får svaret $v = 109{,}5°$.

Vi tegner enhetssirkelen for å se om det fins flere løsninger.

Vi ser at vi også får løsningen $v = 360° - 109{,}5° = 250{,}5°$.

Likningen har disse løsningene i første omløp: $v_1 = 109{,}5°$ og $v_2 = 250{,}5°$.

Den generelle løsningen blir $\underline{\underline{v_1 = 109{,}5 \pm n \cdot 360° \quad v_2 = 250{,}5 \pm n \cdot 360°}}$

Fra enhetssirkelen ser vi at <u>både</u> sinus og cosinus gjentar seg selv for hvert omløp - $360°$.

10.5 Tangens og tangenslikninger

Merk: Tangens funksjon har en periode på $\underline{180°}$.

Det betyr at:

$\tan(v) = \tan(v + 180°)$ når v måles i grader

eller

$\tan(v) = \tan(v + \pi)$ når v måles i radianer

Tangens definerer gjerne som forholdet mellom sinus og cosinus

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad , \cos v \neq 0$$

$$\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{motstående}{hypotenus} \cdot hypotenus}{\frac{hosliggende}{hypotenus} \cdot hypotenus} = \frac{motstående}{hosliggende} = \tan v$$

Eksempel:

Løs likningen $\tan v = 1$ bruker kalkulator og finner:

$$\tan v = 1$$

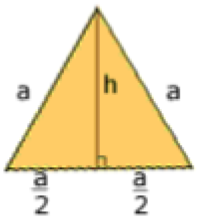
$$v = \tan^{-1}(1) = 45°$$

Generell løsning: $\underline{\underline{v = 45° \pm n \cdot 180°}}$

10.6 Eksakte trigonometriske verdier

Visse verdier kan det være nyttig å huske utenat. Dette gjelder for vinklene $0°, 30°, 45°, 60°$ og $90°$

Vi skal bruke egenskaper til «kjente» trekanter til å bestemme disse.



La oss nå se på en likesidet trekant (alle tre sider er like, og det samme gjelder for vinklene):

Siden trekanten er likesidet vet vi at vinklene er lik $60°$.

Vi ser derfor av fig at

$$\cos 60° = \frac{hos}{hyp} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30° = \frac{mots}{hyp} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

Så regner vi ut høyden m/ «Pytagoras»:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Og kan fortsette med å bestemme flere verdier:

$$\cos 30° = \frac{hos}{hyp} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{mots}{hyp} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bruker vi i tillegg at:

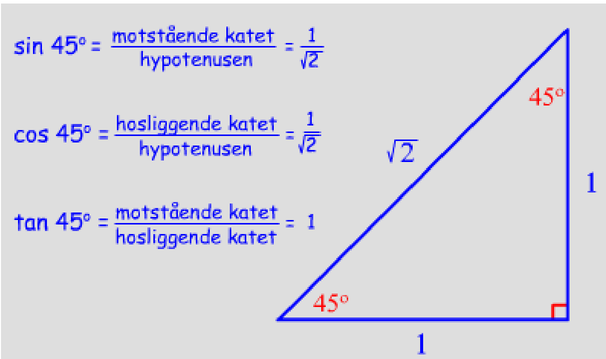
$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad \text{får vi også at}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

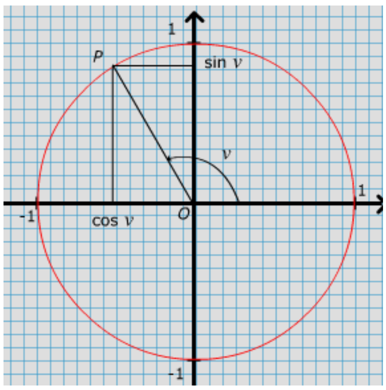
$$\tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Hvordan kan vi finne eksakte verdier for 45 grader?

Her kan vi bruke en rettvinklet, likesidet trekant. + vanlige definisjoner.



Når det gjelder eksakte verdier for $0°, 90°$ og $180°$... kan vi finne disse fra enhetssirkelen.



For eksempel ser vi at:

$$\cos 0° = 1 \qquad \sin 0° = 0$$
$$\cos 90° = 0 \qquad \sin 90° = 1$$

Oppsummerende tabell for eksakte verdier:

(sjekk også formelsamlingen din)

Vinkel *v* (Grader)	Vinkel i radianer	$\sin v$	$\cos v$	$\tan v$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Ikke definert

10.7 Eksakte løsninger

Eksempel Løs likningen: $2\sin x + 1 = 0$ $x \in [0, 2\pi\rangle$ merk her er vinkelen målt i rad.

På standardform: $\sin x = -\frac{1}{2}$

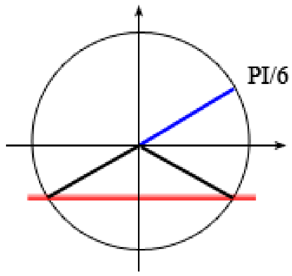
Tegner sirkel,

(og husker at $\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$)

Løsning:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi = \underline{\underline{\frac{7\pi}{6}}}$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{6}}}$$



Husk regn eksakt der det er mulig. Ellers er det lite forskjell mellom likninger med grader og radianer, men det er kanskje litt uvant i starten.

Så eksempel på en annen type likninger, nemlig likninger med multiple vinkler:

$$2\sin(4x) = 1 \qquad x \in [0, \pi\rangle$$

$$\sin(4x) = \frac{1}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \,\Big|\, \cdot \frac{1}{4} \qquad \wedge \qquad 4x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + n \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \,\Big|\, \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{2} \qquad \wedge \qquad x = \frac{5\pi}{24} + \frac{n\pi}{2} \qquad \text{lar } n = 0,1,2 \text{ til vinkel kommer utenfor def.}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{24} \wedge \qquad x_2 = \frac{5\pi}{24}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{24} \qquad \wedge \qquad x_4 = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{17\pi}{24}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24} \right\}}}$$

NB Husk å sjekke Def. Området slik at du finner <u>alle</u> løsningene, og <u>kun</u> dem.

10.8 Flere typer trigonometriske likninger

Eksempel 1

$$12\sin^2 x - 7\sin x + 1 = 0 \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

$$u = \sin x$$

$$12u^2 - 7u + 1 = 0$$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{24} = \frac{7 \pm 1}{24}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{4}$$

Dette gir oss to likninger: (som vi løser på vanlig måte)

$$\sin x = \frac{1}{3} \qquad\qquad \sin x = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 0,34 \qquad\qquad x_3 = 0,25$$

$$x_2 = \pi - 0,34 = 2,80 \qquad\qquad x_4 = \pi - 0,25 = 2,89$$

$$\underline{\underline{L = \{0,25\ ,\ 0,34\ ,\ 2,80\ ,\ 2,89\}}}$$

Eksempel 2

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \qquad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$
$$u = \cos x$$
$$2u^2 - u - 1 = 0$$
$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$
$$u_1 = \frac{4}{4} = 1$$
$$u_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Dette gir oss to likninger (tegn sirkel for å se sammenheng mellom løsningene):

$$\cos x = 1$$
$$x_1 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{husk } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$x_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}}}$$

Eksempel 3 Løs likningen $\sin x - 3\cos x = 0 \qquad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$

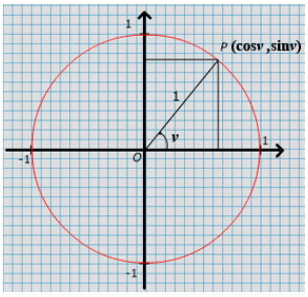
Løsning:

Her vil vi gjerne skrive om likningen slik at vi bare har en type trigonometrisk funksjon.

Husk derfor på at $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$! Det kan vi bruke her dersom vi ikke deler på 0, sjekk at de verdier av x som gir $\cos x = 0$ ikke passer i likningen!

$$\sin x - 3\cos x = 0 \left| \cdot \frac{1}{\cos x} \right. \qquad x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$
$$\tan x - 3 = 0$$
$$\tan x = 3$$
$$x = 1,25 + n\pi \quad \text{og husk at } x \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$
$$n = 0 \quad \Rightarrow x = 1,25 + 0 \cdot \pi = 1,25$$
$$n = 1 \quad \Rightarrow x = 1,25 + 1 \cdot \pi = 4,39$$
$$\underline{\underline{L = \{1,25\ ,\ 4,39\}}}$$

10.9 Enhetsformelen



Ser vi på trekanten vi finner i enhetssirkelen og bruker Pytagoras' setning, finner vi <u>Enhetsformelen</u> $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

Den er nyttig til å bestemme eksakte verdier, når vi kjenner verdien til en av de trigonometriske funksjonene.

Eksempel 1 Finn eksakte verdier for

$\cos v$ og $\tan v$ *når* $\sin v = \frac{3}{5}$, $v \in [90°, 180°]$

Her kan vi for eksempel bruke enhetsformelen: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$

$$= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos v = \pm\frac{4}{5}$$

Men vinkelen vi skal finne ligger i 2. kvadrant. Noe som betyr at cosinus er negativ.

$$\cos v = \underline{\underline{-\frac{4}{5}}}$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$$

Eksempel 2 Finn eksakte verdier for $\cos v$ og $\sin v$ *når* $\tan v = -2$, $v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Løsning: Starter med å skrive om tangens og vil deretter bruke enhetsformelen.

$$\frac{\sin v}{\cos v} = -2$$

$$\sin v = -2\cos v$$

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$$(-2\cos v)^2 + \cos^2 v = 1$$

$$5\cos^2 v = 1$$

$$\cos^2 v = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos v = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{5}}}} \qquad v \text{ ligger i 2. kvadrant}$$

$$\sin v = \text{-2cosv=-2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{5}}}} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

Til slutt en mer «kreativt bruk av enhetsformelen» + utnytte at $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

for likninger på formen: $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \quad \text{med}\, d \neq 0$

Eksempel 3

Vi skal løse likningen $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2 \qquad x \in [0, 2\pi]$.

Trikset her er å tenke at $2 = 2 \cdot 1$ + bruke enhetsformelen:

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2 \cdot 1 \quad x \in [0, 2\pi]$$
$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

Som vi kan ordne til

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

merk at $\cos x = 0$ ikke er en løsning

vi kan derfor dele på $\cos^2 x$.

$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$ som gir en andregradslikningen $u =$ $\tan x$

$u^2 - 4u + 3 = 0$

$u_1 = 1 \quad \vee \quad u_2 = 3$ som gir oss likningene

$\tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = 3 \qquad x \in [0, 2\pi]$

$x = \dfrac{\pi}{4} \ \vee\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} \quad \vee\ x = \tan^{-1} 3 = 1{,}25 \ \vee\ x = 1{,}25 + \pi = 4{,}39$

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{\pi}{4},\ 1{,}25,\ \frac{5\pi}{4},\ 4{,}39\right\}}}$$