Fakultet for teknologi, kunst og design
Teknologiske fag

Eksamen i: Matematikk – 3 – terminsordning

Målform: Bokmål

Dato: 27. mai 2020

Tid: 3 timer

Antall sider (inkl. forside): 6

Antall oppgaver: 5 (27 deloppgaver)

Tillatte hjelpemidler:

Alle trykte og skrevne hjelpemidler tillatt. Du må jobbe alene om din besvarelse, og ikke på noen måte har samarbeidet med andre. Samarbeid med andre er å betrakte som fusk / medvirkning til forsøk på fusk.

Merknad:

Alle svar må begrunnes og mellomutregninger må inkluderes som en del av løsningen til oppgavene. Det kan derfor ikke forventes å få full uttelling for en oppgave hvis oppgaven i helhet løses ved hjelp av et digitalt verktøy og hvis løsningen kun består av en referanse til verktøyet og svaret.
Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig.
Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen.

Besvarelsen skal merkes med kandidatnummer, ikke navn.
Bruk blå eller sort kulepenn på innføringsarket.

Faglig veileder:

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Instituttleders/ Studieleders underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Instituttleder/ Studieleder	
Nadezda Ravneng	Leiv Øyehaug			

Emnekode: TRE1100

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi se på polynomet
$P(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab-1)x^2 - (a+b)x - ab$

a) Avgjør om $(x^2 - 1)$ er en faktor i polynomet $P(x)$ uten å utføre en polynomdivisjon.

b) Utfør polynomdivisjonen $P(x) : (x^2 - 1)$

c) Vis at uttrykket under kan forkortes uten å faktorisere nevneren.

$$\frac{x^2 + ax}{x^2 + (a+b)x + ab}$$

d) Bruk metoden med fullstendige kvadrater til å vise at:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

e) Forkort brøken fra oppgave c.

f) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer.

g) La $a > 1$ og $b < -1$. Løs ulikheten:

$$\frac{x}{P(x)} \geq 0$$

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi vise at

$$\int \frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab}\, dx = \frac{1}{a-b} \cdot \ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$$

a) Kontroller integralformelen ved hjelp av derivasjon. Du kan anta at $\frac{x+b}{x+a} > 0$.

b) Bruk delbrøkoppspalting til å vise at:

$$\frac{1}{x^2 + (a+b)x + ab} = \frac{1}{a - b} \cdot \left(\frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a}\right)$$

c) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{a - b} \cdot \left(\frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a}\right) dx$$

d) Vis at

$$\int_5^9 \frac{2}{-x^2 + 4x - 3}\, dx = \ln 2 - \ln 3$$

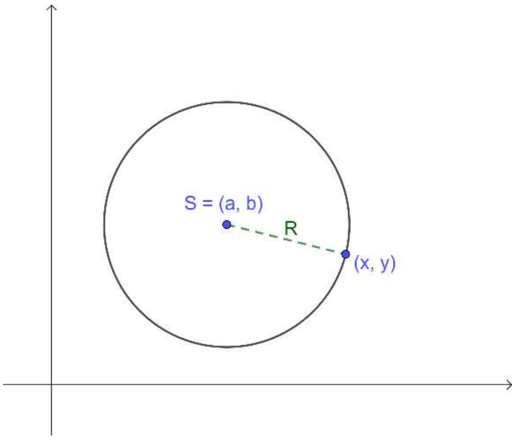
e) Løs differensiallikningen.

$$y' = y^2 - 1$$

Oppgave 3

I et koordinatsystem tegner vi en sirkel med sentrum i $S = (a, b)$ og radius $r = R$. Sirkelen er en lukket kurve som består av alle punkter med samme ***avstand*** fra et fast punkt. Sirkelens likning er:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$



a) Bruk vektorregning til å vise at hvert punkt (x, y) som ligger på sirkelen oppfyller denne likningen.

b) Forklar hvorfor sirkelens likning ikke fremstiller en funksjon.

c) Vis at kurven til en sirkel består av to funksjoner:

$f(x) = \sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b \quad D_f = [a - R, a + R]$ og

$g(x) = -\sqrt{R^2 - (x - a)^2} + b \quad D_g = (a - R, a + R)$

d) Ved å derivere $f(x)$ vis at $(a, R + b)$ er toppunkt for $f(x)$.

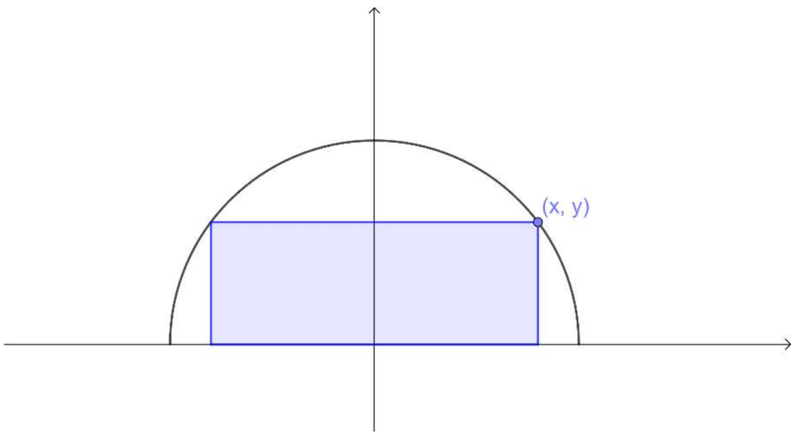
e) Forklar hvorfor $f(x)$ ikke er deriverbar i $x = a - R$ og i $x = a + R$.

f) Vi skal jobbe videre med en sirkel med likningen $x^2 + y^2 = 1$. Vis at punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ligger på sirkelen og finn likningen til tangenten i dette punktet. Oppgaven skal regnes eksakt!

g) Finn koordinater til tangeringspunktet for tangenten til sirkelen som er parallell med tangenten du fant i oppgave f. Oppgaven skal regnes eksakt!

Oppgave 4

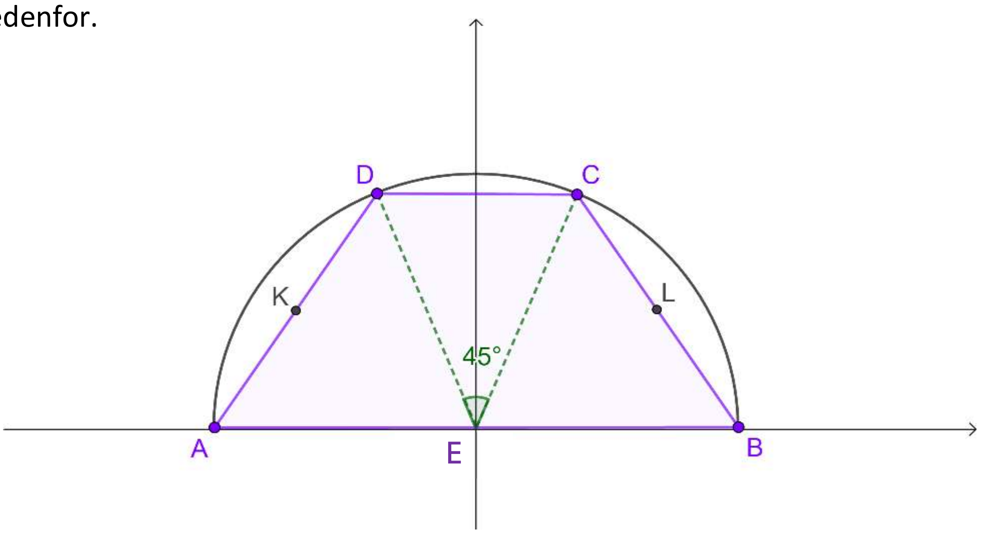
a) Inni en halvsirkel med radius $r = 1$ er det en firkant som vist i figuren.



i. Vis at firkantens areal er $A(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

ii. Finn lengden og bredden til den største firkanten vi kan ha i halvsirkelen.

b) I den samme halvsirkelen med radius $r = 1$ tegner vi et trapes $ABCD$ som vist i figuren nedenfor.



i. Vis at $CD = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

ii. Vis at den eksakte verdien til $\sin\frac{3\pi}{8}$ er dobbelt så stor som arealet til trekanten AED.

iii. Vi lar K være midtpunktet på AD og L være midtpunktet på BC. Vis at $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

iv. Forklar hvorfor $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Oppgave 5

a) Sett opp to ulike bestemte integraler som kan brukes til å regne ut arealet til en sirkel med radius $r = 3$. Integralene må ha forskjellige integrander og forskjellige integrasjonsgrenser. Du skal ikke regne ut disse to integralene.

b) Bruk et bestemt integral til å regne ut volumet til en kule med radius $r = 4$. Oppgaven skal regnes eksakt!