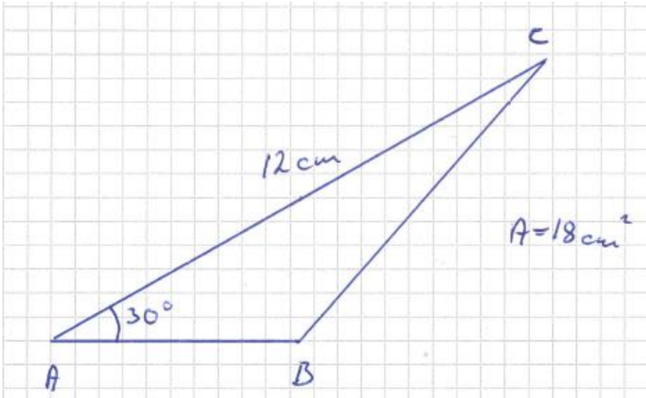
Løsningsforslag til påsketentamen 2021.

Oppgave1

I en trekant ABC er $\angle A = 30°$, siden $AC =$ 12 cm og arealet er lik 18 cm^2.

a) Tegn en figur og regn ut lengden til de ukjente sidene.



$$Areal = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = 18\text{cm}^2$$

$$AB = \frac{2 \cdot 18\text{cm}^2}{12\text{cm} \cdot \sin 30°} = \underline{\underline{6\text{cm}}} \qquad \text{(eksakt siden } \sin 30° = \frac{1}{2}\text{)}$$

Bruker cosinus-setningen for å finne siste side.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC = \sqrt{(6\text{cm})^2 + (12\text{cm})^2 - 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 12\text{cm} \cos 30°} \approx \underline{\underline{7,4\text{cm}}}$$

b) Beregn de ukjente vinklene i trekanten.

Siden vi kjenner tre sider og en av vinklene, kan du velge mellom cosinus eller sinussetning. (Velger du sinus, må du vurdere, basert på figur hvilken av vinklene som passer. v eller / 180 – v), men cosinus gir vinkelen entydig.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{6^2 + 7,4^2 - 12^2}{2 \cdot 6 \cdot 7,4}\right) \approx \underline{\underline{126,8°}}$$

$$\angle C = 180° - 30° - 126,8° \approx \underline{\underline{23,2°}}$$

Oppgave 2

a)

$$\left(x^2 + x - 3\right) : \left(x^2 - 4\right) = \underline{\underline{1 + \frac{x+1}{x^2 - 4}}}$$

$$\frac{-\left(x^2 \quad - 4\right)}{x + 1}$$

b)

Bruker resultat fra a)

$$\int \frac{x^2+x-3}{x^2-4}dx = \int 1dx + \int \frac{x+1}{x^2-4}dx$$
$$= x + \int \frac{x+1}{x^2-4}dx$$

Delbrøk

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Big| \cdot (x+2)(x-2)$$
$$x+1 = A(x-2) + B(x+2)$$
$$x\_ledd: \quad 1 = A + B \quad \Leftrightarrow \quad A = 1 - B$$
$$\text{konstanter}: 1 = -2A + 2B$$
$$\text{Innsetting i II: } 1 = -2(1-B) + 2B \quad :$$
$$1 = -2 + 2B + 2B$$
$$4B = 3 \qquad \underline{B = \frac{3}{4}} \ ,$$
$$\underline{A} = 1 - \frac{3}{4} = \underline{\frac{1}{4}}$$

$$= x + \int \frac{\frac{1}{4}}{x+2}dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x-2}dx$$
$$\underline{\underline{= x + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + C}}$$

c)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx \qquad u = \tan x \qquad du = \left(1+\tan^2 x\right)dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u}du = \left[\ln|u|\right]_1^{\sqrt{3}} = \ln 3^{\frac{1}{2}} - \ln 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 3}} \approx 0,55$$

d) Vil vise at formel: $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(C\frac{x-1}{x+1}\right)$, holder ved derivasjon av *«svaret»*..

Vil vise at $\left(\frac{1}{2}\ln\left(C\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{x^2-1}$

Starter med å forenkle med logaritmeregler :

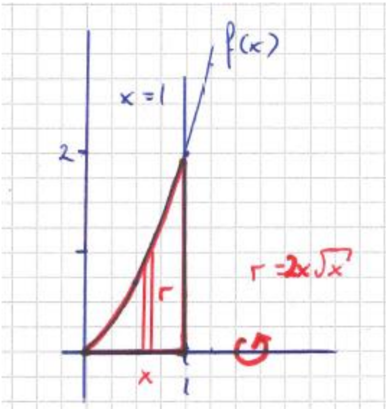
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(C\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln C + \ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{x-1}\cdot 1 - \frac{1}{x+1}\cdot 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} \quad Q.E.D.$$

Oppgave 3

a) En flate er avgrenset av $f(x)=2x\sqrt{x}$, $x-$aksen og linjen $x=1$. Beregn volumet av rotasjonslegemet som fremkommer når flaten dreies $360°$ om x-aksen.

Starter med en skisse av flaten.



$$f(x)=2x\sqrt{x}=r \qquad dV=\pi r^2 dx$$

$$V=\pi\int_0^1\left(2x\sqrt{x}\right)^2 dx=\pi\int_0^1 4x^3 dx=\pi\left[x^4\right]_0^1=\underline{\underline{\pi}}$$

b) Gitt differensiallikningen $y'=6y^2x$ og at $y(1)=-\frac{1}{5}$. Bestem $y(x)$.

$$y'=6y^2x$$

$$\frac{dy}{dx}=6y^2x \,\Big|\, \frac{dx}{y^2}$$

$$\frac{dy}{y^2}=6xdx$$

$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int 6xdx \qquad \frac{1}{y^2}=y^{-2}$$

$$-\frac{1}{y}=6\cdot\frac{1}{2}x^2+C$$

$$-\frac{1}{y}=3x^2+C \,\Big|\cdot\frac{y}{3x^2+C}$$

$$-\frac{1}{3x^2+C}=y \qquad \text{Generell løsning: } \underline{y=-\frac{1}{3x^2+C}}$$

Bruker nå $y(1)=-\frac{1}{5}$ til å bestemme verdien til C; den spesielle løsningen:

$$y(x)=-\frac{1}{3x^2+C} \qquad y(1)=-\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{5}=\frac{-1}{3+C}\,\Big|\cdot-\frac{3+C}{5}$$

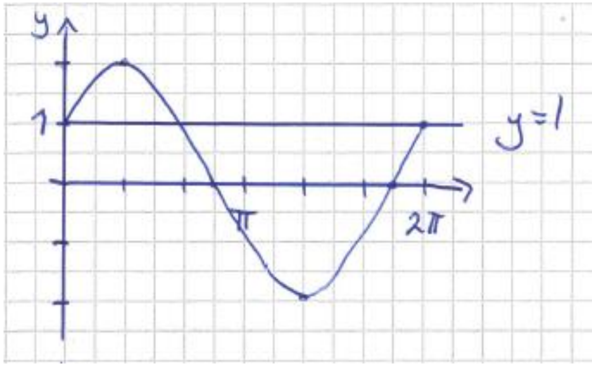
$$3+C=5$$

$$C=2 \qquad \underline{\underline{y(x)=-\frac{1}{3x^2+2}}}$$

Oppgave 4

En funksjon er definert ved uttrykket

$$f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad , \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$



a) Grafen til $f(x)$ og $y = 1$

b) Finn ved regning løsningen på likningen

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad \text{når} \qquad x \in [0, 2\pi\rangle .$$

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad \text{når} \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + n2\pi \qquad x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + n2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi \quad x = \frac{6\pi}{3} + n2\pi$$

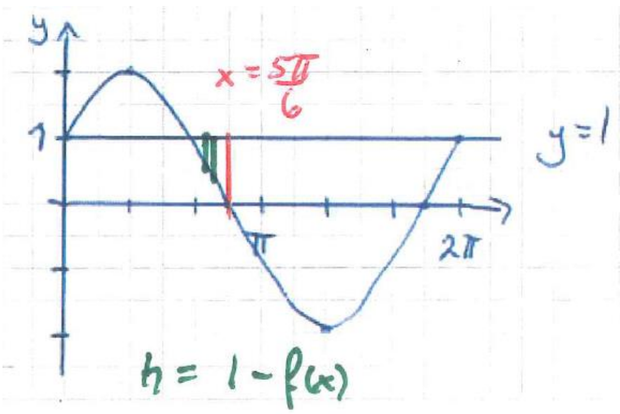
$$x_1 = \frac{2\pi}{3} \qquad , x_2 = 0 \qquad \underline{\underline{L = \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}}}$$

c) Vis ved regning at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

$$f(x) = 2\cos\left(\overset{u}{x} - \overset{v}{\frac{\pi}{3}}\right) = 2\left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

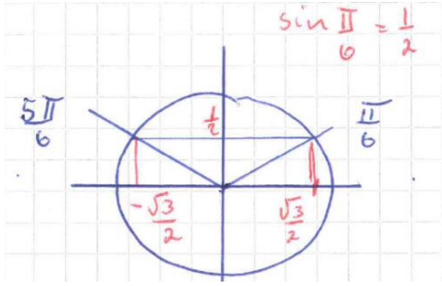
$$= 2\left(\cos x \cdot \frac{1}{2} + \sin \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\sin x + \cos x \quad Q.E.D.$$

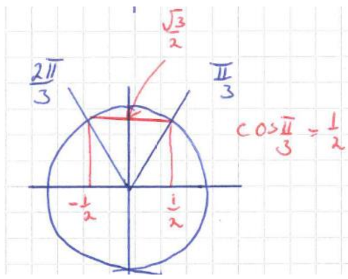
d) Skisser arealet som er avgrenset av $f(x)$ og linjene $y = 1$ og $x = \frac{5\pi}{6}$.



Bestem dette arealet ved regning. (helst eksakt svar)

$$h = øvre - nedre = 1 - f(x) = 1 - (\sqrt{3}\sin x + \cos x)$$
$$= 1 - \sqrt{3}\sin x - \cos x$$
$$A = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(1 - \sqrt{3}\sin x - \cos x\right) dx$$
$$= \Big[x + \sqrt{3}\cos x - \sin x \Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}$$
$$= \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6} - \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{5\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} - \left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6} - 2 + \sqrt{3}}} \approx 0,256$$





Oppgave 5 Punktene $A(1,1,0)$, $B(0,3,1)$ og $C(0,0,2)$ danner hjørnene i en trekant.

a) Finn koordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [0-1, 3-1, 1-0] = \underline{\underline{[-1, 2, 1]}}$$
$$\overrightarrow{BC} = [0, -3, 1]$$
$$3\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 3[-1,2,1] - \frac{1}{2}[0,-3,1] = \left[-3, 6 + \frac{3}{2}, 3 - \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{\left[-3, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right]}}$$

b) Regn ut $\angle B$ i $\triangle ABC$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = [1, -2, -1]$$
$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = [1,-2,-1]\cdot[0,-3,1] = 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 = 6 - 1 = 5$$
$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{5}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}$$
$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{60}}\right) \approx \underline{\underline{49,8^\circ}}$$

c) Finn en likning for planet gjennom punktene *A*, *B* og *C*.

Trenger å regne ut en normalvektor til planet:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\left[4+1,-(-2+1),1+2\right]=[5,1,3]=\vec{n}$$

Likning til planet:

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \qquad A(1,1,0)$$
$$5(x-1)+1(y-1)+3(z-0)=0$$
$$5x-5+y-1+3z=0$$
$$\underline{\underline{5x+y+3z-6=0}}$$

Gitt et punkt D som ligger på *z*-aksen.

d) Koordinatene til D slik at $\vec{AB}$ står vinkelrett på $\vec{BD}$:

D må ha koordinater $D(0,0,z)$ når det ligger på z-aksen $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ når $\vec{a}\perp\vec{b}$

$$\vec{BD}=[0-0,0-3,z-1]=[0,-3,z-1]$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{BD}=[-1,2,1]\cdot[0,-3,z-1]=-6+z-1=0$$
$$\underline{z=7} \qquad \underline{\underline{D(0,0,7)}} \text{ gir at } \vec{AB}\perp\vec{BD}$$

Punktene *A*, *B*, *C* og origo danner en trekantpyramide.

e) Volumet til pyramiden. (velger å bruke $\vec{AB}\times\vec{AC}=[5,1,3]$ funnet tidligere som del av utregning)

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\cdot\vec{AO}\right|=\frac{1}{6}\left|[5,1,3]\cdot[-1,-1,0]\right|=\frac{|-5-1+0|}{6}=\underline{\underline{1}}(enhet^3)$$

Alternativ utregning:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\vec{OA}\\ \vec{OB}\\ \vec{OC}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(1(3\cdot 2-0\cdot 1)-1(0\cdot 2-0\cdot 1)+0(0\cdot 0-0\cdot 3)\underline{\underline{=1}}$$

Oppgave 6

Bestem formlene for det generelle leddet a_n og bestem summen av de 50 første leddene til hver av rekkene i a) og b)

a) Rekke I:

$$2+4+6+8+10+\ldots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)2 = \underline{\underline{2n}}$$

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{2+100}{2} \cdot 50 = \underline{\underline{2550}}$$

b) Rekke II:

$$27+9+3+1+\ldots$$

$$a_n = a_1 k^{n-1} = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3^3}{3^{n-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{3^{n-4}}}}$$

$$S_{50} = \frac{a_1\left(k^{50}-1\right)}{k-1} = \frac{27\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{50}-1\right)}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3^3\left(\frac{1}{3^{50}}-1\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{3^4\left(\frac{1}{3^{50}}-1\right)}{-2} = \frac{\frac{1}{3^{46}}-81}{-2} \approx \underline{\underline{40{,}5}}$$

c) En av rekkene ovenfor konvergerer. Bestem summen av denne rekken.

Rekke I er aritmetisk og derfor ikke konvergent.

Rekke II er en konvergent, geometrisk rekke med $k = \frac{1}{3}$.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{81}{2}}}$$

Oppgave 7

I en uendelig geometrisk rekke er første leddet lik $\frac{x}{1-x}$ og andre ledd lik $\frac{1-x}{x}$.

a) For hvilke verdier av x er denne rekken konvergent?

For konvergens må -1 < k < 1, så starter med å finne uttrykket for k:

$$k = \frac{\frac{1-x}{x} \cdot x(1-x)}{\frac{x}{x-1} \cdot x(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{x^2}$$

$$-1 < \frac{(1-x)^2}{x^2} < 1 \qquad \text{Merk at } \frac{(1-x)^2}{x^2} \geq 0 \text{ for alle verdier av } x$$

Deler i to ulikheter:

$$-1<\frac{(1-x)^2}{x^2} \quad \wedge \quad \frac{(1-x)^2}{x^2}<1 \qquad x^2>0$$

alltid oppfylt

$$(1-x)^2<x^2$$

$$1-2x+x^2<x^2$$

$$1<2x$$

$$x>\frac{1}{2} \qquad \textit{Merk}: x\neq 0, x\neq 1 \text{ Kan ikke ha 0 i nevner i leddene.}$$

$$\underline{\underline{x\in\left\langle \frac{1}{2},\rightarrow\right\rangle \setminus\{1\}}}$$

NB kan også tegne graf og løse oppgaven grafisk.

b) Bestem ett enklest mulig uttrykk for summen, $S(x)$ i intervallet der rekken konvergerer.

$$S(x)=\frac{a_1}{1-k}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{(1-x)^2}{x^2}}=\frac{\frac{x}{1-x}\cdot x^2(1-x)}{\left(1-\frac{(1-x)^2}{x^2}\right)\cdot x^2(1-x)}=\frac{x^3}{x^2(1-x)-(1-x)^3}$$

$$=\frac{x^3}{(1-x)\left[x^2-(1-x)^2\right]}$$

$$=\frac{x^3}{(1-x)\left[x^2-\left(1-2x+x^2\right)\right]}=\underline{\underline{\frac{x^3}{(1-x)(2x-1)}}}$$