Grenser

Brukes overalt:

- Kontinuitet
- Derivasjon
- Integrasjon

Idé: Hva ser det ut som vi får ~~at~~ som svar når vi er veldig nærme en verdi.

Eks: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Hva er $f(3)$? Ubestemt. Får ikke lov til å sette inn 3.

Hva „burde" $f(3)$ være? Vil sette inn verdier veldig nærme 3, se hva vi får:

$$f(2.99) = \frac{2.99^2 - 2\cdot 2.99 - 3}{2.99 - 3} = \frac{8.9401 - 5.98 - 3}{-0.01}$$

$$= \frac{-0.0399}{-0.01} = +3.99$$

$$f(3.01) = \frac{3.01^2 - 2\cdot 3.01 - 3}{3.01 - 3} = \frac{9.0601 - 6.02 - 3}{0.01}$$

$$= \frac{0.0401}{0.01} = 4.01$$

Viktig idé:

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig i a, så må $f(x)$ være nærme $f(a)$ når x er nærme a.

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)} \text{ "="} \ x+1$$

$g(x) = x+1$ $\qquad$ $f(x) = g(x)$ for alle x bortsett fra $x = 3$.

Sette inn en x veldig nær 3, kan jeg bruke formelen $f(x) = x+1$

Siden $x+1$ er kontinuerlig, om x er nær 3, må $f(x)$ være nær $3+1 = 4$.

Skriver

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4.$$

Vi kan komme så nærme 4 vi vil ved å bare sette inn verdier nær 3.

Alternativ utregning, litt mer nittygritty, sett inn et tall vilkårlig nærme 3. $x = 3+h$, h lite tall.

$$f(3+h) = \frac{(3+h)^2 - 2\cdot(3+h) - 3}{3+h-3} = \frac{9+6h+h^2-6-2h-3}{h}$$

$$= \frac{4h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4+h$$

En viktig regel som dere bruker når dere regner grenser:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{hvis } f(x) \text{ er kontinuerlig i } a.}$$

<u>Eks:</u> $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 20}$ Vil vite $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Er $f(x)$ kontinuerlig i 4?

Nei, $f(x)$ er ikke <u>definert</u> i 4.

$4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0$

$4^2 + 4 - 20 = 0$

Skriver om $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+5)} = \frac{x-1}{x+5}$$

Ny funksjon $g(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$

Viktig for meg: $g(x) = f(x)$ når $x \neq 4$.

Men $f(4)$ udefinert, $g(4)$ er definert. g er kontinuerlig i 4.

Betyr:

$$\lim_{x \to 4} g(x) = g(4) = \frac{4-1}{4+5} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$

Reiteeren definisjon av grense:

Hvis vi er nærme nok a, vil svaret være nærme nok b.
men ikke lik a

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Vi sier at om $\lim_{x \to a} f(x) = b$, så

konvegeren $f(x)$ mot b når x går mot a.

Og $\lim_{x \to a} f(x)$ divergeren om det ikke finnes en slik b.

Kan også snakke om grensa

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Hvis vi setter inn store nok x vil svaret være nærme nok b.

Finnes en (ikkestandard) måte å gjøre matte på hvor vi faktisk setter inn vendelig store tall.

Ikkestandard kalkulus

Påstand: Det finnes uendelig store tall.

Påstand: De oppfører seg akkurat som vanlige tall.

Eks: Hvis N er uendelig stort, så er også

- $N+1$ uendelig stort
- $N-1$ uendelig stort
- N^2 uendelig stort,
- $2N$ uendelig stort

osv.

N kan være både positiv og negativ.

Det må da også finnes uendelig små tall.

Eks: Hvis N er uendelig stort, må $\frac{1}{N}$ være uendelig lite.

Eks: $\frac{\cancel{N}}{\cancel{N}} = 1$ Så en brøk av uendelig store tall kan bli endelig.

Eks: $\frac{N^2}{N} = N$ Så en brøk av uendelig store tall kan bli uendelig.

Eks: $\frac{N}{M}$, N og M er uendelig store, Har ikke nok info til å si noe om denne brøken.

Vi kan da også lage et tall som er uendelig nærme 7:

$$7 + \frac{1}{N}$$

Hvis to tall er uendelig nærme hverandre skriver vi

$$a \approx b$$

Kan nå definere:

$$\lim_{x \to a} f(a) = b$$

hvis $f(x) \approx b$ når $x \approx a$, men $x \neq a$.

Eks: $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 20}$ Vil finne $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Hva e $f(x)$ når x er vendelig nærme 4.

$$x = 4 + dx$$

dx et vendelig lite tall.

$$f(x) = \frac{(4+dx)^2 - 5(4+dx) + 4}{(4+dx)^2 + (4+dx) - 20} = \frac{16 + 8dx + dx^2 - 20 - 5dx + 4}{16 + 8dx + dx^2 + 4 + dx - 20}$$

$$= \frac{3dx + dx^2}{9dx + dx^2} = \frac{\cancel{dx}(3 + dx)}{\cancel{dx}(9 + dx)} = \frac{3 + dx}{9 + dx} \approx \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\approx \frac{1}{3}$$

Dette var den „vanskelige" måten, det vi faktisk gjør, blir likt som tidligere,

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 20} = \frac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{\cancel{(x-4)}(x+5)} = \frac{x-1}{x+5}$$

$$x = 4 + dx \qquad \frac{4 + dx - 1}{4 + dx + 5} = \frac{3 + dx}{9 + dx} \approx \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Definerer nå at

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

hvis $f(x) \approx b$ for alle vendelig store x.

Eks: $f(x) = \frac{7x+1}{x}$, la N være vendelig stor,

$$f(N) = \frac{7N+1}{N} = \frac{7\cancel{N}}{\cancel{N}} + \frac{1}{N} = 7 + \frac{1}{N} \approx 7.$$

$$\lim_{N \to \infty} 7 + \frac{1}{N} = 7 + 0 = 7$$

Regnereglene vi da bruker er:
Hvis dx og dy er uendelig små tall (infinitesimale),
a og b er endelige tall,
N og M er vendelige tall, har vi:

- $dx + dy$ og $dx \cdot dy$ og $dx \cdot a$, er vendelig lite
  $\frac{dx}{N}$, og $\frac{a}{N}$, $\frac{dx}{a}$

- $\frac{a}{dx}$, $N \cdot M$, $N+M$ hvis de har samme fortegn, er uendelige
  $a \cdot N$, $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{dx}$, $a+N$, $dx+N$

- $a+b$, $a+dx$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, er endelig

- Andre kombinasjoner avhenger av relative størrelser.

Eks: N er et vendelig stort tall (positivt)

$M = 7 - N$ er et vendelig stort negativt tall.

$N + M = N + 7 - N = 7$. Er endelig.

Eks: N vendelig stort tall (positivt)

$M = -2N$ vendelig stort negativt tall ~~nega~~

$N + M = N - 2N = -N$ vendelig stort negativt.

Eks: N vendelig stort, $0 \cdot N = 0$

Hvis $\frac{1}{N}$ vendelig lite, $N \cdot \frac{1}{N} = 1$

N^2 vendelig stort $\boxed{N^2} \cdot \boxed{\frac{1}{N}} = N$ vendelig stort

---

Eks: $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(2x-1) - \ln(x+2)$

<u>Har:</u> Om N vendelig stor, er både $\ln(2N-1)$ og $\ln(N+2)$ vendelig store.

Har at $\ln(2N-1) - \ln(N+2)$

$$= \ln\left(\frac{2N-1}{N+2}\right) = \ln\left(\frac{2-\frac{1}{N}}{1+\frac{2}{N}}\right) \approx \ln\left(\frac{2}{1}\right)$$

$$= \ln 2$$