Eksponential- og logaritmelikninger

Prosent- og vekstfaktor

vet at $13\% = 0.13 = \frac{13}{100}$

vekstfaktor for $13\% = 1 + 0.13 = 1.13$.

Idé: Om noe ~~øke~~ med 13%, gang med 1.13. $a \cdot 1.13$.
Om noe øker med 13% flere ganger, gang med 1.13^x.

Eks: Har 100kr på konto, det er 3% årlig rente, hvor lenge må jeg vente før jeg har 150kr på konto.

$$100 \cdot 1.03^x = 150$$
$$1.03^x = 1.5$$
$$\log(1.03^x) = \log(1.5)$$
$$x \cdot \log(1.03) = \log(1.5)$$
$$x = \frac{\log(1.5)}{\log(1.03)} = 13.72 \text{ år.}$$

Sneaky eksponentiallikning:

Triks: $25 = 5^2$
$$25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$$
$$y = 5^x$$

$$25^x - 10 \cdot 5^x + 21 = 0$$
$$(5^x)^2 - 10 \cdot 5^x + 21 = 0$$
$$y^2 - 10y + 21 = 0 \Rightarrow y = 3 \lor y = 7.$$

$y = 5^x$ Løsninga $y = 3$ og $y = 7$.

Løser: $5^x = 3$ $\qquad$ $5^x = 7$.

$x \cdot \log 5 = \log 3$ $\qquad$ $x \cdot \log 5 = \log 7$

$x = \frac{\log 3}{\log 5} = 0.6826$ $\qquad$ $x = \frac{\log 7}{\log 5} = 1.2091$

Eks:

$$4^x - 2^x - 2 = 0$$

$4 = 2^2$

$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

$$(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$$

$y = 2^x$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$y = -1 \qquad y = 2$

Vil løse $2^x = -1$ $\qquad$ $2^x = 2$

Ingen løsning. $\qquad$ $x = 1$

Eks:

$$4^x + 4 \cdot 2^x + 3 = 0$$

$$(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x + 3 = 0$$

$y = 2^x$

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

$y = -1 \qquad y = -3$

$2^x = -1$ $\qquad$ $2^x = -3$

Ingen løsning $\qquad$ Ingen løsning.

Ikke vanskelig å ende opp med eksponentiallikninger som vi ikke kan løse.

$$3^x - 2^x + 1 = 0$$

Prøve: $3^x + 1 = 2^x$

$$\log(3^x + 1) = \log(2^x)$$

$$\log(3^x + 1) = x \cdot \log(2)$$

Dette går ikke.

Logaritme reglene:

$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

Logaritmelikningen En likning som har logaritmen i seg.

Eks: $3 \cdot \log x + 1 = 7$

Løser for $\log x$.

$3 \log x = 6$

$\log x = 2$

Definisjon av log:

$\boxed{10^{\log x} = x}$ $\boxed{\text{for alle } x > 0}$

$10^{\log x} = 10^2$

$x = 100$

Idé: 10^x og $\log x$ er motsatt av hverandre.

$$\boxed{\log(10^x) = x \quad \text{for alle } x}$$

Liknende eksempel:

$(\sqrt{x})^2 = x$

$\sqrt{x^2} = x$

for $x \geq 0$

Eks:

$$\log(5x-1) = 2\cdot\log 7$$

$$10^{\log(5x-1)} = 10^{2\cdot\log 7} = \left(10^{\log 7}\right)^2$$

$$5x-1 = 49$$

$$5x = 50$$

$$x = 10$$

Kan ha samme for eksponentiallikninger:

$$4\cdot 2^{3x-2} = 12$$

$$2^{3x-2} = 3$$

$$\log\left(2^{3x-2}\right) = \log 3$$

$$(3x-2)\cdot\log 2 = \log 3$$

$$3x-2 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$3x = \frac{\log 3}{\log 2} + 2$$

$$x = \frac{\log 3}{3\log 2} + \frac{2}{3}$$

Naturlige logaritmer

Briggsk logaritme: $10^{\log x} = x$

Generelle logaritmer: $a^{\log_a x} = x$

Har tidligere lært om Eulertallet $e = 2.718\ldots$,

En slik at $(e^x)' = e^x$

Er interessant: $\log_e(x) = \ln(x)$, den naturlige logaritmen.

Tidligere sett at $(2^x)' = 0.6931 \cdot 2^x$

$$(3^x)' = 1.0986 \cdot 3^x$$

$$(a^x)' = k_a \cdot a^x \qquad k_a = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Nytt triks: $2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{(\ln 2) \cdot x}$ $\qquad 2 = e^{\ln 2} = 10^{\log 2}$

Ser nå at: $(2^x)' = \left(e^{(\ln 2) \cdot x}\right)' = \ln(2) e^{(\ln 2) \cdot x}$

$$= \boxed{\ln 2}\, 2^x$$

Generelt: $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

Kan nå derivere 2^x, 3^x, 5^x, 9^{2x-1}, osv.

Eks: $\left(9^{2x-1}\right)' = \ln(9)\cdot 9^u \cdot 2 = \underline{\ln(9)\cdot 2\cdot 9^{2x-1}}$

$u = 2x-1$ $\quad (9^u)' = \ln(9)\cdot 9^u$ $\quad \boxed{e^{\ln x} = x}$

$u' = 2$

Hva med logaritmeregler?

Alle tre reglene gjelder fremdeles.

Har: ① $\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

② $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

③ $\ln(a^x) = x\cdot\ln(a)$

Eks: $3^x = 12$

$\ln(3^x) = \ln 12$

$x\cdot\ln(3) = \ln 12$

$x = \frac{\ln 12}{\ln 3}$

$\ln 12 \approx 2.48$

$\ln 3 \approx 1.099$

$x \approx 2.26$

$3^x = 12$

$x\cdot\log 3 = \log 12$

$x = \frac{\log 12}{\log 3}$

$\log 12 \approx 1.079$

$\log 3 = 0.477$

$x \approx 2.26$

Eks:

$$\ln(3x-1) = 5$$

$$e^{\ln(3x-1)} = e^5$$

$$3x - 1 = 148.41$$

$$3x = 149.41$$

$$x = \frac{149.41}{3} = 49.80.$$

Har lært om en ny funksjon, $\ln(x)$. Kan vi derivere denne? Hva er $(\ln(x))'$?

$$e^{\ln x} = x$$ Deriver begge sider.

$$e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Formel:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \iff \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

Har også at:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \Rightarrow (\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

Oppsummering:

Har ~~to~~ to typer „viktige" logaritmer.

$\log$: $10^{\log x} = x$ Briggsk logaritme

$\ln$: $e^{\ln x} = x$ Naturlig logaritme.

Nye derivasjonsregler:

$$(a^x)' = \ln(a)\cdot a^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x\cdot \ln(10)}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln(a)}$$

$$a^x = e^{\ln(a)\cdot x}$$

Nye integralregler:

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Eks:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{\cancel{e^x}}{u}\cdot\frac{du}{\cancel{e^x}} = \int \frac{1}{u}\,du$$

$u = e^x+1$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln(e^x+1) + C$$

Fra tidligere: $\int x^n\,dx$ løselig for alle $n \neq \underline{-1}$.