

Eksamen, Matematikk forkurs, 24. mai 2017

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\frac{\sqrt{a^3} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt[6]{a})^2} = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{6}}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{6}} = a^{\frac{9}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = a^{\frac{6}{6}} = \underline{\underline{a}}$$

b) Løs ulikheten:

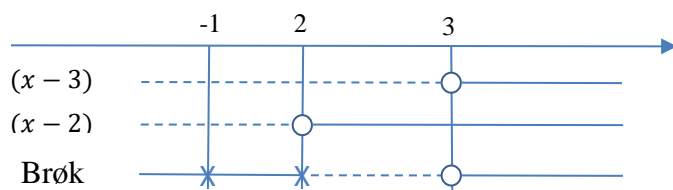
$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x^2+4x}{x^2-x-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} - \frac{x^2+4x}{x^2-x-2} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+1)} + \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \frac{x^2+4x}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{(x^2+2x+1) + (x^2-4) - (x^2+4x)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2+2x+1+x^2-4-x^2-4x}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-2)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

Ser at $x = 2$ og $x = -1$ gir nevner lik 0 og kan dermed ikke være en del av løsningen.Løsning: $x \in (2, 3]$

Løs likningene ved regning:

c)

$$2\sqrt{3} \sin(2x) - 3 = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

$$\sin(2x) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$1) \quad 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$2) \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

Innenfor definisjonsområdet $x \in [0, 2\pi)$ kan vi velge $k = 0$ og $k = 1$. Dermed:

$$x = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$d) \quad \ln(x^2) - \ln(3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{3x-2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3x-2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Ved å sette prøve på svaret ser vi at begge passer i opprinnelig likning, dermed:

$$x = \underline{\underline{\{1, 2\}}}$$

e) En rekke er gitt som:

$$2 + 4e^x + 8e^{2x} + 16e^{3x} + \dots$$

For hvilke verdier av kvotienten k er rekken konvergent?

Vi gjenkjenner dette som en geometrisk rekke som konvergerer når $-1 < k < 1$.

Pga. formuleringen i oppgaveteksten vil ovenstående være et fullgodt svar.

Nedenfor er vist hva x må være for at rekka skal konvergere:

Vi finner k som forholdet mellom etterfølgende ledd:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4e^x}{2} = 2e^x \Rightarrow -1 < 2e^x < 1$$

Venstre ulikhet er oppfylt for alle x . Siden \ln er en monotont voksende funksjon, vil høyre ulikhet fortsatt være gyldig når vi tar \ln på begge sider av ulikheten:

$$\ln(2e^x) < \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 + \ln e^x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln e^x < \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow x < -\ln 2$$

Rekken konvergerer for $x < -\ln 2$.

Deriver funksjonene:

f)

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^3 + 1) - x \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{1 - 2x^3}{\underline{\underline{(x^3 + 1)^2}}}$$

g)

$$g(x) = \ln \sqrt{\cos 2x} = \ln(\cos 2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln(\cos 2x) \Rightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \underline{\underline{-\tan 2x}}$$

Regn ut integralene:

h)

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2}{xx^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{xx^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x} dx = 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \ln|x| + C = \underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{x}} + \ln|x| + C}} \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{1-x^2} dx \quad & u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{-2x} \\ \int_0^\infty x e^{1-x^2} dx &= \int_0^\infty x e^u \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^u du = -\frac{1}{2} [e^{1-x^2}]_0^\infty = -\frac{1}{2} (0 - e) = \underline{\underline{\frac{e}{2}}} \end{aligned}$$

j) Løs differensiallikningen:

$$y' + x^2 y = x^2$$

med randkravet $y(0) = 0$.

$$y' = x^2(1 - y) \Leftrightarrow \frac{y'}{1 - y} = x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - y} dy = x^2 dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{1 - y} dy = \int x^2 dx \Rightarrow$$

$$-\ln|1 - y| = \frac{1}{3} x^3 + C_1 \Rightarrow |1 - y| = e^{-\frac{1}{3}x^3} \cdot e^{-C_1} \Leftrightarrow$$

$$1 - y = \pm e^{-c_1} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = C e^{-\frac{1}{3}x^3} \Leftrightarrow y = 1 - C e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - C \cdot 1 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow y = \underline{\underline{1 - e^{-\frac{1}{3}x^3}}}$$

Oppgave 2

Gitt funksjonen f ved funksjonsuttrykket $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$.

a) Vis at:

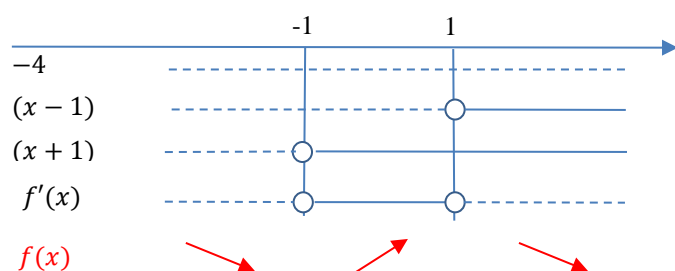
$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{q. e. d.}$$

b) Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .

$$-4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Fortegnsdrøfting av $f'(x)$ (alternativt kan $f''(x)$ brukes):



$$f(1) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2, \quad f(-1) = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow$$

Toppunkt: $(1, 2)$ Bunnpunkt: $(-1, -2)$

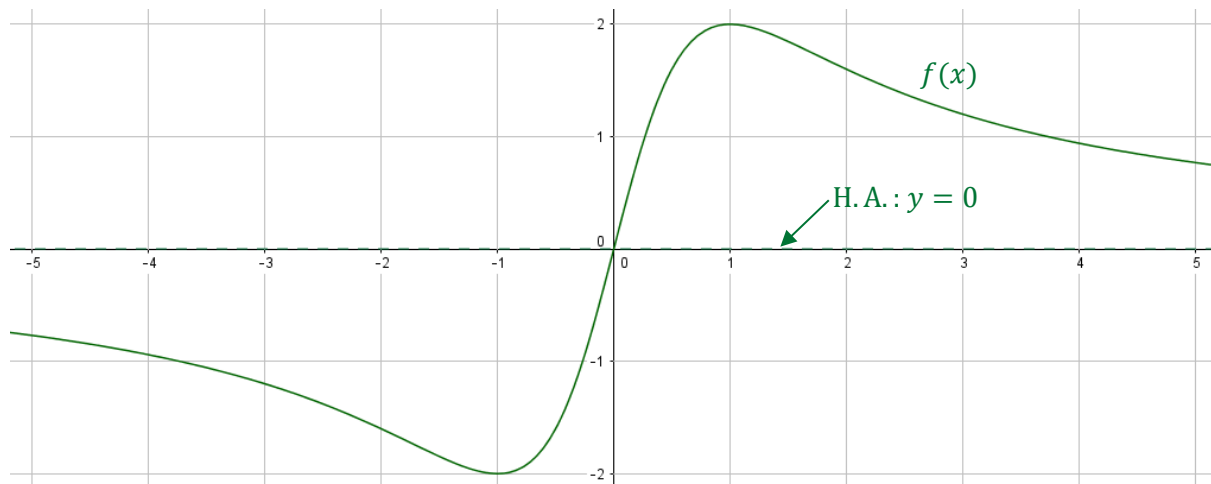
c) Finn eventuelle asymptoter til funksjonen $f(x)$ og skisser grafen med eventuelle asymptoter i intervallet $x \in \langle -5, 5 \rangle$.

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

Ingen vertikal asymptote, siden $x^2 + 1 \neq 0$ for alle verdier av x .

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \text{ dvs. horisontal asymptote: } \underline{\underline{y = 0}}$$

Grafen i intervallet $x \in \langle -5, 5 \rangle$:



- d) Finn tangenten til funksjonsgrafen for $x = 0,40$.

$$f(0,40) = \frac{4 \cdot 0,40}{0,40^2 + 1} \approx 1,38, \text{ dvs. } (0,40, 1,38) \text{ er et punkt på tangenten.}$$

$$\text{Stigningstallet til tangenten: } a = f'(0,40) = \frac{-4 \cdot 0,40^2 + 4}{(0,4^2 + 1)^2} \approx 2,50$$

$$\text{Ettpunktsformelen gir: } y - 1,38 = 2,50(x - 0,40) \Leftrightarrow y = 2,5x - 2,5 \cdot 0,4 + 1,38$$

$$\underline{\underline{y = 2,50x + 0,38}}$$

- e) Grafen til f og den rette linja $g(x) = \frac{4}{5}x$ avgrenser et flatestykke i første kvadrant. Beregn arealet av flatestykket.

Finner grensene for $f(x) = g(x)$:

$$\frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}x \quad | \cdot 5(x^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 20x = 4x(x^2 + 1) \quad | :4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x - 5x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 2)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm 2$$

Kun i 1. kvadrant, dvs. $x = 0$ og $x = 2$ er hhv. nedre og øvre grense.

Bør også vise at $f(x) > g(x)$ i intervallet.

$$A = \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 \frac{4x}{x^2 + 1} - \frac{4}{5}x dx = \int_0^2 \frac{4x}{x^2 + 1} dx - \frac{4}{5} \int_0^2 x dx$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{4x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{4x}{u} \frac{du}{2x} = 2 \int \frac{1}{u} du = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x^2 + 1| + C$$

$$\frac{4}{5} \int x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{2}{5} x^2 + C$$

$$A = \left[2 \ln|x^2 + 1| - \frac{2}{5}x^2 \right]_0^2 = (2 \ln(4 + 1) - \frac{2}{5} \cdot 4) - 0 = \underline{\underline{2 \ln 5 - \frac{8}{5}}} \approx 1,62$$

Oppgave 3

Gitt punktene $A(6, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$ og $C(0, 0, 3)$.

a) Finn arealet av trekanten ABC .

$$\overrightarrow{AB} = [0 - 6, -2 - 0, 0 - 0] = [-6, -2, 0], \quad \overrightarrow{AC} = [0 - 6, 0 - 0, 3 - 0] = [-6, 0, 3]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -6 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \right] = [-6, 18, -12]$$

$$= 6[-1, 3, -2]$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} 6 \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \underline{\underline{3\sqrt{14}}} \approx 11,2$$

b) En linje l gjennom C står vinkelrett på $\triangle ABC$. Finn en parameterframstilling for denne linjen.

Retningsvektor (fra $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$): $\vec{v} = [-1, 3, -2]$. Punkt på linja: $(0, 0, 3) \Rightarrow$

$$l: \begin{cases} x = 0 + (-1)t & = -t \\ y = 0 + 3t & = 3t \\ z = 3 + (-2)t & = 3 - 2t \end{cases}$$

c) Finn koordinatene til linjen l fra punkt b) sitt skjæringspunkt med xy -planet.

$$z = 0 \Rightarrow 3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, \quad y = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Skjæringspunktet med xy -planet er $\underline{\underline{\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)}}$

d) Finn likningen for planet gjennom de tre punktene A , B og C .

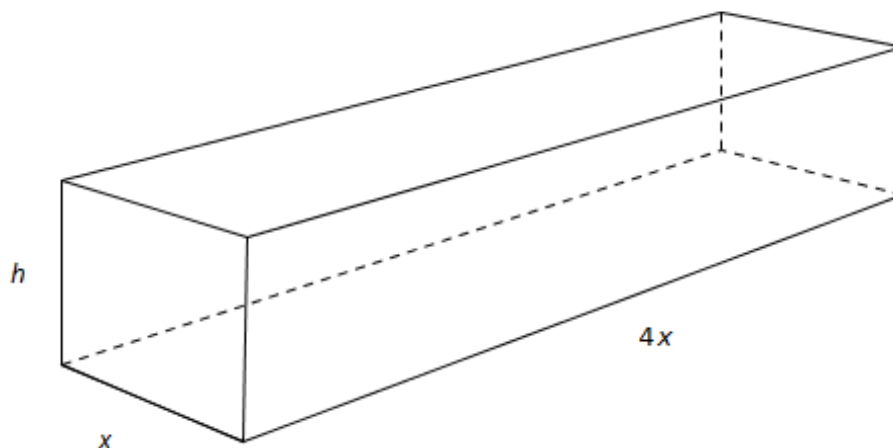
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\text{der } [a, b, c] = [-1, 3, -2] \text{ og } (x_0, y_0, z_0) = A(6, 0, 0) \Rightarrow$$

$$-1 \cdot (x - 6) + 3(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-x + 3y - 2z + 6 = 0}}$$

Oppgave 4

Vi har et rett prisme der lengden av grunnflaten er fire ganger så stor som bredden. Volumet er 200 cm^3 . Vi setter bredden lik $x \text{ cm}$. Se skissen.



a) Vis at $h = \frac{50}{x^2}$

Volumet av et rett prisme er produktet av lengden, bredden og høyden.

Det gir:

$$200 = 4x \cdot x \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{200}{4x^2} = \frac{50}{x^2} \quad \text{q. e. d.}$$

b) Vis at overflaten O av prismet kan skrives:

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2$$

Overflaten av et rett prisme består av seks rektangler, hvorav to og to har samme areal.

$$O(x) = 2 \cdot (x \cdot 4x + x \cdot h + 4x \cdot h) = 8x^2 + 10x \cdot \frac{50}{x^2} = \frac{500}{x} + 8x^2 \quad \text{q. e. d.}$$

- c) Vis at $O'(x) = \frac{-500+16x^3}{x^2}$ og bruk dette til å finne den minste overflaten O som prismet kan ha.

Hva er lengden, bredden og høyden nå?

$$O(x) = \frac{500}{x} + 8x^2 \Rightarrow O'(x) = 500 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 8 \cdot 2x = -\frac{500}{x^2} + 16x$$

$$O'(x) = \frac{-500 + 16x^3}{x^2} \quad \text{q. e. d.}$$

Vi setter den deriverte lik null for å finne verdier av x som gir ekstremalpunkter.

$$O'(x) = 0$$

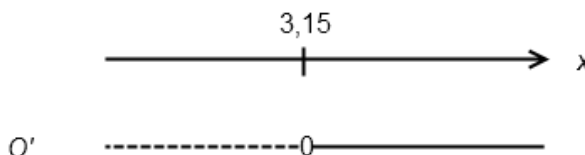
$$\frac{-500 + 16x^3}{x^2} = 0$$

$$-500 + 16x^3 = 0$$

$$x^3 = \frac{500}{16}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{500}{16}} = \sqrt[3]{\frac{125}{4}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \approx 3,15$$



Vi ser av fortegnslinja for $O'(x)$ at vi har med et bunnpunkt å gjøre (kreves ikke). Den tilhørende overflaten er:

$$O(3,15) = \frac{500}{3,15} + 8 \cdot 3,15^2 = 238,11$$

$$h = \frac{50}{3,15^2} \approx 5,04$$

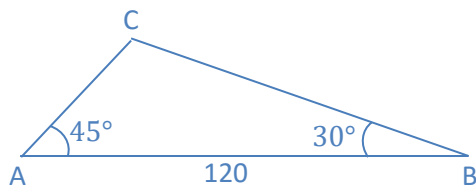
Den minste overflaten prismet kan ha, er omtrent 238 cm².

I dette tilfellet er bredden (x) 3,15 cm, lengden ($4x$) 12,6 cm og høyden (h) 5,04 cm.

Oppgave 5

Et tomteareal har form av en trekant ABC der $AB = 120$ m, $\angle A = 45^\circ$ og $\angle B = 30^\circ$.

- a) Finn de manglende sidene og vinklene i trekanten. Hvis mulig, vis utregning med eksakte verdier.



$$\angle C = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = \underline{\underline{105^\circ}}$$

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 105^\circ} \Leftrightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot 4}$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{240 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{240 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{240 \cdot (\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3 - 2)}{6 - 2} = \frac{240 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1)}{4} \\ &= \underline{\underline{120(\sqrt{3} - 1) \approx 87,8}} \end{aligned}$$

Hvis kalkulator ikke gir eksakt at $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, kan man benytte at:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow AC = \frac{120(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \underline{\underline{60\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 62,1}}$$

b) Beregn arealet av tomta (med eksakte verdier hvis mulig).

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \underline{\underline{3600(\sqrt{3} - 1) \approx 2635,4}}$$

c) Anta at ei rett linje CD fra C ned på AB (D ligger på AB) deler tomta i to. Arealet av trekanten ADC skal utgjøre en tredjedel av hele tomtas areal. Hvor lang blir AD ?

$$A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC} \Rightarrow$$

$$AD = \frac{2A_{\triangle ABC}}{3AC \cdot \sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 3600(\sqrt{3} - 1)}{3 \cdot 60\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{40}}$$

Oppgave 6

To personer a og b skyter annenhver gang på en ballong. Den som treffer ballongen først har vunnet spillet. La A og B være begivenhetene at henholdsvis a og b treffer ballongen i et enkelt skudd. Anta at disse begivenhetene er uavhengige. Anta at $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ og at a skyter først.

a) Regn ut følgende sannsynligheter:

- Sannsynligheten for at a bommer i et enkelt skudd (dvs. $P(\bar{A})$).

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- Sannsynligheten for at a bommer på første forsøk og b treffer (dvs. $P(\bar{A} \cap B)$).

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

- Sannsynligheten for at det blir skutt tre ganger og at a vinner spillet.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

- Sannsynligheten for at det blir skutt fem ganger og at a vinner spillet.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap \bar{B} \cap A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

- Den totale sannsynligheten for at det blir skutt en, tre eller fem ganger og at a vinner.

$$P(\text{en, tre eller fem ganger og at } a \text{ vinner}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \approx 0,4815$$

b) Hva er sannsynligheten for at a vinner spillet?

a vinner hvis det må skytes én, tre, fem, sju, osv., dvs et odde antall ganger for å få en vinner. Fra resultatet i a) ser vi da at:

$$P(a \text{ vinner spillet}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$$

Dette er ei konvergent, uendelig geometrisk rekke med $a_1 = \frac{1}{3}$, $k = \frac{1}{3}$ og sum $s = \frac{a_1}{1-k}$.

$$P(a \text{ vinner spillet}) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$