

Eksempel på funksjonsanalyse av et 3. gradspolynom

Oppgave: La $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

- Bestem nullpunktene f ved regning.
- Finn $f'(x)$.
- Bestem ekstremalpunktene til f ved regning.
- Bestem monotoni egenskapene til f .
- Bestem vendepunktet og vendetangenten til f .

Løsning:

- a) Her jobber vi med et tredjegradspolynom (som ikke lar seg faktorisere ved å sette x -utenfor parentes). Alternativet er da forsøkepolynomdivisjon. Vi starter med å lete etter et nullpunkt, blant faktorene til 4. (alternativene er $\pm 4, \pm 2, \pm 1$)

Her det om å gjøre å ha flaks, men jeg har fusket litt og prøver derfor

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) + 4 \\ &= -1 + 6 - 9 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Dette betyr at divisjon med $(x+1)$ vil gå opp. Viser ikke divisjonen her.

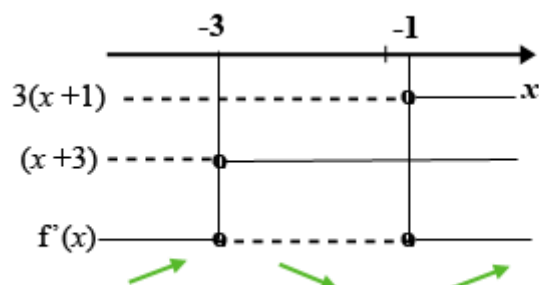
Resultat er et andregrads uttrykk som har nullpunktene $x = -1$ og $x = -4$

Nullpunktene er altså gitt ved: $\underline{\underline{L = \{-4, -1\}}}$

b) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

- c) For å finne ekstremalpunktene må vi finne de x -verdier som gir $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3)$ finn gjerne nullpunktene på kalkulatoren, og faktorerer ved hjelp av disse. Deretter må vi tegne fortegnsskjema:



Vi ser at vi trenger funksjonsverdiene for $x = -1$ og $x = -4$.

$$f(-1) = 0 \text{ og}$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) + 4 \\ &= -27 + 54 - 27 + 4 = 4 \end{aligned}$$

Grafen har toppunkt $(-3, 4)$ og bunnpunkt $(-1, 0)$

d) Monotoniegenskapene (= hvor grafen vokser og avtar) vises i fortegnsskjemaet.

$$f \text{ vokser når } x \in \langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$$

$$f \text{ avtar når: } x \in \langle -3, -1 \rangle$$

e) Vi finner vendepunkt der den dobbeltderiverte er lik 0.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2)$$

$$f''(x) = 0$$

$$6(x + 2) = 0$$

$$x = -2$$

Her bør dere tegne fortegnsskjema for $f''(x)$, for å vise at det virkelig er et vendepunkt

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 9(-2) + 4 \\ &= -8 + 24 - 18 + 4 = 2 \end{aligned}$$

f har vendepunkt lik $(-2, 2)$

Vendetangenten har stigningstall lik

$$\begin{aligned} a &= f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 \\ &= 12 - 24 + 9 = -3 \end{aligned}$$

Likning for tangenten er:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - 2 = -3(x + 2)$$

$$y = -3x - 6 + 2$$

$$\underline{\underline{y = -3x - 4}}$$

Graf:

