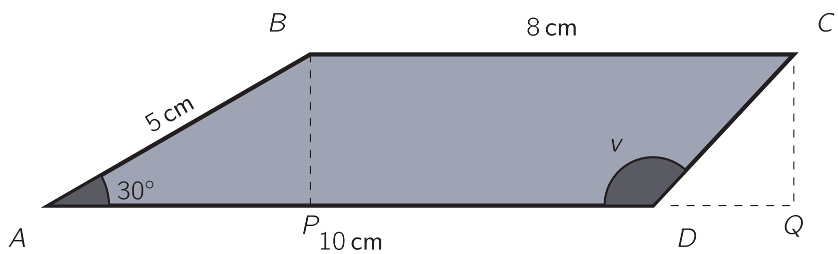
Informasjon

Oppgaven skal leveres inn som en .pdf-fil via Canvas. Dere kan godt skrive for hånd og scanne det dere har gjort. Dere må ha minst 50 % riktig for å få godkjent, og må ha prøvd på alle deloppgavene. Innleveringsfrist står på Canvas.

Oppgave 1



Et trapes $\square ABCD$ har følgende mål:

- Sidelengde AD er $10\,\text{cm}$.
- Sidelengde AB er $5\,\text{cm}$.
- Sidelengde BC er $8\,\text{cm}$.
- Vinkel $\angle DAB$ er $30°$.

Sidelengdene AD og BC er parallelle. Punkt P ligger på AB slik at BP er høyden til trapeset. Punkt Q ligger på forlengelsen av AB slik at CQ er høyden til trapeset. Vinkel v er vinkelen $\angle ADC$.

(a) Finn lengdene AP og BP ved hjelp av trekanten APB.

Løsning. Vi kan bruke sinus på trekant APB for å finne BP og får

$$\sin 30° = \frac{BP}{5\,\text{cm}} \tag{L1}$$
$$0.5 = \frac{BP}{5\,\text{cm}} \tag{L2}$$
$$0.5 \cdot 5\,\text{cm} = BP \tag{L3}$$
$$2.5\,\text{cm} = BP. \tag{L4}$$

Tilsvarende kan vi bruke cosinus på trekanten for å finne AP, og får

$$\cos 30^\circ = \frac{AP}{5\,\mathrm{cm}} \tag{L5}$$

$$0.8660 = \frac{AP}{5\,\mathrm{cm}} \tag{L6}$$

$$0.8660 \cdot 5\,\mathrm{cm} = AP \tag{L7}$$

$$4.33\,\mathrm{cm} = AP. \tag{L8}$$

Vi har derfor $AP = 4.33\,\mathrm{cm}$ og $BP = 2.5\,\mathrm{cm}$.

(b) Finn lengdene DQ og CQ.

Hint: Firkanten $BPQC$ er et rektangel, og vi kan finne lengden PD ved hjelp av svaret fra forrige oppgave.

Løsning. Siden både BP og CQ er høydene til trapesen, må $BP = CQ$, og derfor $CQ = 2.5\,\mathrm{cm}$.

Siden $AD = 10\,\mathrm{cm}$ og $AP = 4.33\,\mathrm{cm}$ må vi ha

$$PD = AD - AP \tag{L9}$$

$$= 10\,\mathrm{cm} - 4.33\,\mathrm{cm} \tag{L10}$$

$$= 5.67\,\mathrm{cm}. \tag{L11}$$

Vi ser også at PQ og BC er like lange, så vi har $PQ = 8\,\mathrm{cm}$. Vi kan da finne DQ ved å ta differansen.

$$DQ = PQ - PD \tag{L12}$$

$$= 8\,\mathrm{cm} - 5.67\,\mathrm{cm} \tag{L13}$$

$$= 2.33\,\mathrm{cm}. \tag{L14}$$

(c) Finn vinkel v.

Løsning. Vi kan finne vinkel $\angle QDC$ ved help av trekanten QDC og tangens.

$$\tan \angle QDC = \frac{CQ}{DQ} \tag{L15}$$

$$= \frac{2.5\,\mathrm{cm}}{2.33\,\mathrm{cm}} \tag{L16}$$

$$= 1.0729 \tag{L17}$$

$$\angle QDC = \tan^{-1}(1.0729) \tag{L18}$$

$$= 47.01^\circ. \tag{L19}$$

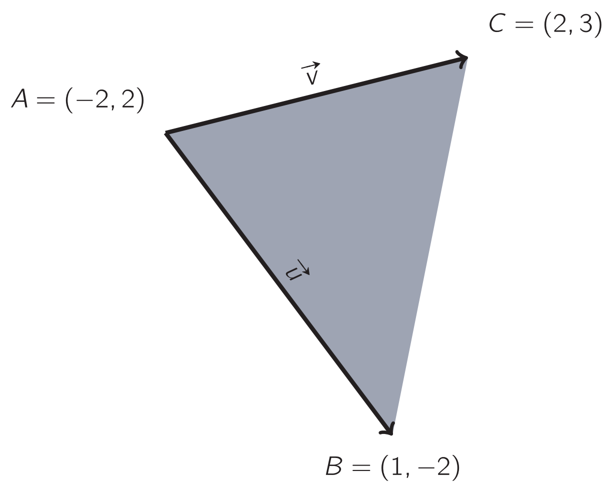
Vi har at $v + \angle QDC = 180^\circ$, så vi får

$$v = 180^\circ - \angle QDC \tag{L20}$$

$$= 180^\circ - 47.01^\circ \tag{L21}$$

$$= 132.99^\circ. \tag{L22}$$

Oppgave 2



En trekant $\triangle ABC$ har hjørner gitt som punkter i et koordinatsystem. Koordinatene er gitt i tegningen.

(a) Finn koordinatform til vektoren $\vec{u}$ som går fra A til B, og koordinatform til vektoren $\vec{v}$ som går fra A til C.

Løsning. For å finne vektoren $\overrightarrow{AB}$ som går mellom to punkter A og B, bruker vi at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Vi får derfor at

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} && \text{(L23)}\\
&= [1, -2] - [-2, 2] && \text{(L24)}\\
&= [1 - (-2), -2 - 2] && \text{(L25)}\\
&= [3, -4], && \text{(L26)}\\
\vec{v} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} && \text{(L27)}\\
&= [2, 3] - [-2, 2] && \text{(L28)}\\
&= [2 - (-2), 3 - 2] && \text{(L29)}\\
&= [4, 1]. && \text{(L30)}
\end{aligned}
$$

(b) Finn lengdene til sidene i trekanten.

Løsning. Vi kan finne lengdene til to av sidene i trekanten nå ved å regne lengden til vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, ved hjelp av formelen

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \tag{L31}$$

Vi får da

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} \tag{L32}$$
$$= \sqrt{9 + 16} \tag{L33}$$
$$= \sqrt{25} \tag{L34}$$
$$= 5, \tag{L35}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2} \tag{L36}$$
$$= \sqrt{16 + 1} \tag{L37}$$
$$= \sqrt{17} \approx 4.12. \tag{L38}$$

For den siste siden kan vi enten bruke formelen fra boka for avstanden mellom to punkt,

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{L39}$$

eller regne ut vektoren fra B til C og så regne ut lengden på denne. Jeg kommer til å gjøre sistnevnte, siden vi kan bruke denne nye vektoren i siste oppgave.

Vi finner vektoren $\vec{w}$ fra B til C, og får

$$\vec{w} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \tag{L40}$$
$$= [2, 3] - [1, -2] \tag{L41}$$
$$= [2 - 1, 3 - (-2)] \tag{L42}$$
$$= [1, 5]. \tag{L43}$$

Lengden av denne blir da

$$|\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 5^2} \tag{L44}$$
$$= \sqrt{1 + 25} \tag{L45}$$
$$= \sqrt{26} \approx 5.10. \tag{L46}$$

(c) Finn alle vinklene i trekanten.

Hint: Bruk skalarprodukt.

Løsning. Vi har lært at skalarproduktet til to vektorer er gitt ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha, \tag{L47}$$

hvor α er vinkelen mellom dem. Vi har også lært at skalarproduktet til to vektorer på koordinatform er gitt ved

$$[x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{L48}$$

Vi kan derfor regne ut skalarproduktet til $\vec{u}$ og $\vec{v}$, og får

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= [3, -4] \cdot [4, 1] && \text{(L49)} \\ &= 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 && \text{(L50)} \\ &= 12 - 4 && \text{(L51)} \\ &= 8. && \text{(L52)} \end{aligned}$$

Vi får derfor at

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \angle A && \text{(L53)} \\ 8 &= 5\sqrt{17} \cos \angle A && \text{(L54)} \\ \frac{8}{5\sqrt{17}} &= \cos \angle A. && \text{(L55)} \end{aligned}$$

Så $\cos \angle A \approx 0.3881$, som gir oss

$$\begin{aligned} \angle A &= \cos^{-1} 0.3881 && \text{(L56)} \\ &= 67.17^\circ. && \text{(L57)} \end{aligned}$$

For å finne $\angle B$ vil vi gjøre det samme, men merk at om vi regner ut $\vec{u} \cdot \vec{w}$ vil vi ikke regne ut den vinkelen vi er interessert i. For at vinkelen mellom vektorene skal være lik $\angle B$, må den ene vektoren gå fra B til C, og den andre gå fra B til A. Og $\vec{w}$ går fra B til C, men $\vec{u}$ går fra A til B. Dette kan enkelt løses ved å bruke $-\vec{u}$ i stedet. Vi får da

$$\begin{aligned} -\vec{u} \cdot \vec{w} &= [-3, 4] \cdot [1, 5] && \text{(L58)} \\ &= -3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 && \text{(L59)} \\ &= -3 + 20 && \text{(L60)} \\ &= 17. && \text{(L61)} \end{aligned}$$

Vi får nå at

$$\begin{aligned} -\vec{u} \cdot \vec{w} &= |-\vec{u}||\vec{w}| \cos \angle B && \text{(L62)} \\ 17 &= 5\sqrt{26} \cos \angle B && \text{(L63)} \\ \frac{17}{5\sqrt{26}} &= \cos \angle B. && \text{(L64)} \end{aligned}$$

Dette gir oss at $\cos \angle B \approx 0.6668$, og derfor at

$$\begin{aligned} \angle B &= \cos^{-1} 0.6668 && \text{(L65)} \\ &= 48.18^\circ. && \text{(L66)} \end{aligned}$$

Den siste vinkelen kan vi nå finne ved at summen av vinkler i en trekant skal være 180°, så vi får at

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B \tag{L67}$$
$$= 180^\circ - 67.17^\circ - 48.18^\circ \tag{L68}$$
$$= 64.65^\circ. \tag{L69}$$