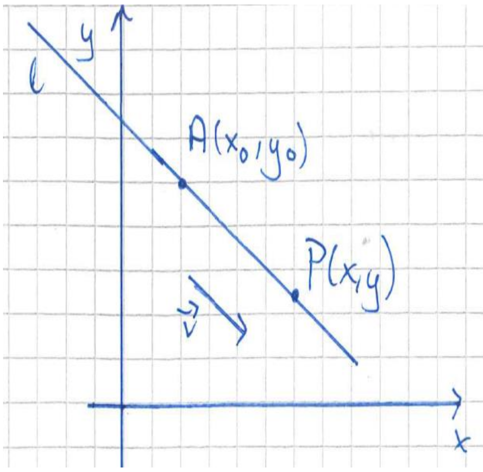
13. Vektorregning 13.1-13.7

13.1 Parameterfremstillinger



En linje *l* går gjennom punktet $A(x_0, y_0)$ og er parallell med vektoren $\vec{v} = [a, b]$. Vi kan si at vektor v er retningsvektor til linjen.

La $P(x, y)$ være et punkt på linjen *l*.
Da vil $\overrightarrow{AP}$ være parallell med $\vec{v}$, slik at:

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

$[x - x_0, y - y_0] = t \cdot [a, b]$

$[x - x_0, y - y_0] = [ta, tb]$ Husk to vektorer er like,

$x - x_0 = ta \quad og \quad y - y_0 = tb$ når koordinatene er parvis like.

$x = x_0 + ta \quad og \quad y = y_0 + tb$

Linjen har dermed parameterfremstillingen: $l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

Der *t* kalles en parameter, for hver verdi av *t* får vi et punkt på linjen.

Merk at parameterfremstillingen ikke er entydig. Velger vi å ta utgangspunkt i et annet punkt på linjen, får vi en annen parameterfremstilling som beskriver samme linje.

Oppgave:

En rett linje i *xy*-planet går gjennom punktet $(-1, 3)$ og er parallell med linjen gitt ved likningen $y = \frac{1}{2}x - 5$.

a) Finn en parameterfremstilling for *l*.
b) Finn ved regning skjæringspunktene mellom *l* og koordinataksene.

Løsning:

a) Linjen har stigningstall $a = \frac{1}{2}$, vi kan derfor velge retningsvektor $\vec{v} = [2, 1]$.

En parameterfremstilling for linjen er $l: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

b) Linjen skjærer x-aksen når $y = 0$

Det vil si når $\begin{matrix} 3+t=0 & \Rightarrow t=-3 \\ x=-1+2t\big|_{t=-3} & =-1-6=-7 \end{matrix}$ Skjæringspunkt med x- aksen er (-7,0)

Linjen skjærer y – aksen når $x = 0$.

Det vil si når

$-1+2t=0 \qquad \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

$y=3+t\big|_{t=\frac{1}{2}}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ Skjæringspunkt med y-aksen er $\left(0,\frac{7}{2}\right)$

Oppgave

En rett linje l går gjennom punktene $A(-2,3)$ og $B(6,-1)$.

a) Finn en parameterfremstilling for linjen.

b) En annen linje m er gitt ved $2x-2y+1=0$ Finn ved regning skjæringspunktet mellom linjene l og m.

Løsning:

a) Linjen l har stigningstall

$$a=\frac{6+2}{-1-3}=-\frac{8}{4}=-\frac{1}{2}$$

Velger derfor $\vec{v}=[2,-1]$ og parameterfremstilling.

$$l:\begin{cases} x=6+2t \\ y=-1-t \end{cases}$$

b) Linjen m er gitt ved $2x-2y+1=0$, da kan vi starte med å løse likningen mhp y: $y=x+\frac{1}{2}$ $\quad \vec{v}_m=[1,1]$ og et punkt på linjen. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

Parameterfremstilling for m (merk at her bør vi velge en annen bokstav for parameteren)

$$m:\begin{cases} x=s \\ y=\frac{1}{2}+s \end{cases}$$

Skjæringspunktet kan vi bestemme ved å bestemme når koordinatene er like.

$$l:\begin{cases} x=6+2t \\ y=-1-t \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x=s \\ y=\frac{1}{2}+s \end{cases}$$

$6+2t=s \qquad og \qquad -1-t=\frac{1}{2}+s$ To likninger med 2 ukjente!

Her kan vi sette inn uttrykket for s inn i likning II.

$$-1-t=\frac{1}{2}+6+2t$$

$$-3t=\frac{1+12+2}{2}=\frac{15}{2}$$

$$t=-\frac{5}{2} \qquad s=6+2t\big|_{t=-\frac{5}{2}}=6-5=1$$

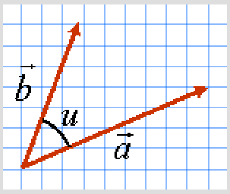
Setter inn og finner skjæringspunktet $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

13.2 Skalarproduktet

Skalarprodukt / prikk produkt

Adderer vi to vektorer, finner differansen mellom vektorer eller multipliserer en vektor med et tall er svaret en vektor.

Dersom vi regner ut $\vec{a}\cdot\vec{b}$ får vi derimot ingen ny vektor, men en skalar. En slik multiplikasjon kaller vi et *skalarprodukt*.



Skalarprodukt

Vi har to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Tegner vi vektorene med felles utgangspunkt er vinkelen mellom dem u, slik som på figuren. Vinkelen er definert slik at $u \in [0°, 180°]$

Skalarproduktet av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$, med mellomliggende vinkel u er gitt ved formelen:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u}$$

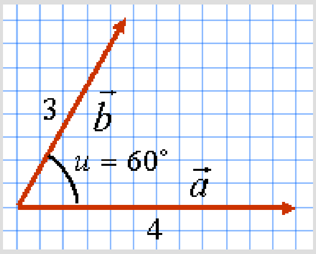
Vi leser skalarproduktet som $\vec{a}$ ***prikk*** $\vec{b}$. Husk at et skalarprodukt gir et tall (skalar) som svar.

Merk Siden $\cos 90°=0$ gir definisjonen av skalarproduktet oss følgene nyttige setning:

Dersom $|\vec{a}|\neq 0$ og $|\vec{b}|\neq 0$ gjelder:
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Eksempler:

Beregne skalarprodukt



Regn ut skalarproduktene

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{a}$

c) $\vec{b}\cdot\vec{b}$

Løsning

a)
Vi bruker definisjonen på skalarproduktet.
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u=4\cdot 3\cdot\cos 60°=6$

b)
Vi bruker definisjonen på skalarproduktet.
Samtidig vet vi at vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{a}$ er $0°$.
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0°$
$=4\cdot 4\cdot\cos 0°=4\cdot 4\cdot 1=16$

c)
Vi bruker definisjonen på skalarproduktet.
Samtidig vet vi at vinkelen mellom $\vec{b}$ og $\vec{b}$ er $0°$.
$\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0°$
$=3\cdot 3\cdot\cos 0°=3\cdot 3\cdot 1=9$

Skalarprodukt vil vi siden bruke til å bestemme vinkler, dette er enkelt for vektorer med koordinater.

13.3 Skalarprodukt i koordinatsystemet

Koordinatformel for skalarprodukt: $[x_1, y_1]\cdot[x_2, y_2] = x_1x_2 + y_1y_2$

Skalarprodukt er definert som $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos u \qquad u = \angle(\vec{a},\vec{b})$

*Et spesialtilfelle er når $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \qquad \Rightarrow \ \vec{a}\perp\vec{b}$ dette gir oss en enkel måte å sjekke om to vektorer står normalt på hverandre. Det vil si sjekke om vinkelen er 90 grader.

(Vi sier da at vektorene er ortogonale.)

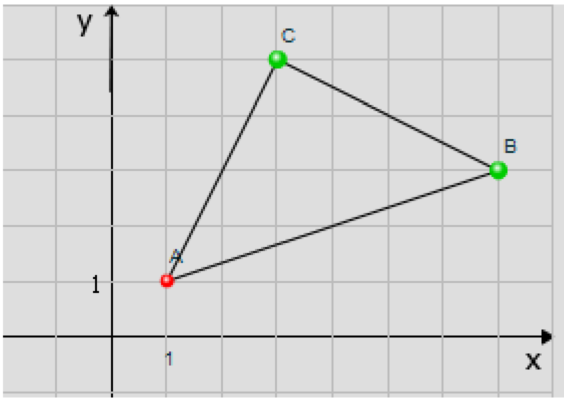
Eksempel på utregning

La $\vec{a} = [2,3]$ og $\vec{b} = [-1,4]$. Finn $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Løsning $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-1)+3\cdot 4 = -2+12 = 10$

13.4 Bruk av skalarproduktet

Forts tidligere trekant eksempel med hjørnene A(1,1) B(7,3) C(3,5)



Da fant vi:

$\overrightarrow{AB} = [7-1, 3-1] = [6,2]$

$\overrightarrow{BC} = [3-7, 5-3] = [-4,2]$

$\overrightarrow{CA} = [1-3, 1-5] = [-2,-4]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; likebeint.

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Vi skal nå bruke skalarprodukt til å finne vinkel A

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos u$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{5}\cos A = 6\cdot 2 + 2\cdot 4$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{50}\cos A = 20$$

$$\cos A = \frac{20}{4\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \underline{\angle A = 45^\circ}$$

Vi vet dermed at $\angle B = \angle A = 45^\circ$ *og* $\angle C = 90^\circ$ (Sjekk gjerne at $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$)

(Merk det er viktig å velge de to vektorene som utspenner vinkelen.)

13.5 Regneregler for skalarproduktet

Merk Når vi finner skalarproduktet av to vektorer har rekkefølgen ikke noe å si
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos u=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos u=\vec{b}\cdot\vec{a}$

Regneregler

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$\left(x\vec{a}\right)\cdot\left(y\vec{b}\right)=(xy)\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Vi kan med andre ord regne ut parenteser slik vi gjør med tall.

Merk at vi skriver $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot 1=|\vec{a}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$ dette gir oss en enkel måte å sjekke om to vektorer står normalt på hverandre.

13.6 Mer om lengder og vinkler

Les gjerne eksemplene og se hvordan regneregler for vektorer kan brukes til å regne ut lengder eller vinkler til vektorer som ikke er angitt med koordinater.

13.7 Determinanter

Determinant er navnet på et uttrykk vi har behov for å regne ut i flere sammenhenger (derfor har de fått et eget navn).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

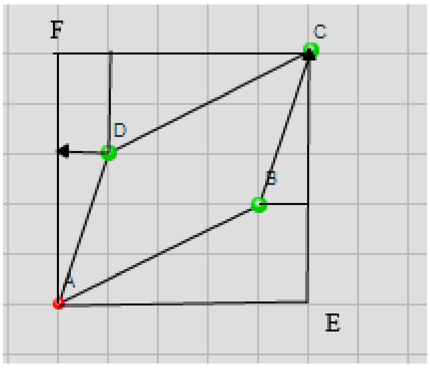
Eksempler, regne ut determinant:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot(-1)=6+1=7$

b) $\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=2x\cdot x-(-1)\cdot 2=2x^2+2$

Nå skal vi snart se på eksempler på hvordan vi kan ha nytte av å bruke determinanter.

Areal av parallellogram og geometrisk tolkning av determinant



se tilsvarende, og bedre figur i læreboka s 484.

Parallellogrammet er utspent av vektorene:

$\overrightarrow{AB} = [x_1, y_1]$

$\overrightarrow{AD} = [x_2, y_2]$

Arealet av den store firkanten er

$Areal\square AECF = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

Fra denne trekker vi nå fra de "ekstra" feltene som ikke skal være med i parallellogrammet:

$$Areal\square ABCD =$$

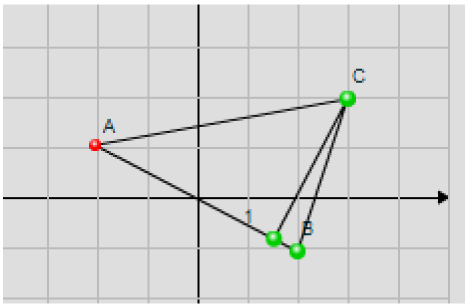
$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2\cdot\frac{1}{2}x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2\cdot\frac{1}{2}x_2y_2$$

$$= x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Regel 1:	Arealet av et parallellogram er lik absoluttverdien av determinanten til 2 vektorer som utspenner parallellogrammet.

Regel 2	Arealet av en trekant er lik halve determinanten.

Eksempel En trekant har hjørnene $A(-2,1)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$



a)**: Finn arealet av trekanten.**

Trekanten er utspent av vektorene:

$\overrightarrow{AB} = [2-(-2), -1-1] = [4,-2]$ *og*

$\overrightarrow{AC} = [5,1]$

$$Areal = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|4-(-10)| = \frac{1}{2}|14| = \underline{\underline{7}}$$

b) Finn avstanden fra C til AB:

Bruker at

$$A = \frac{g \cdot h}{2} \qquad g = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$7 = \frac{\cancel{2}\sqrt{5} \cdot h}{\cancel{2}} \qquad \Leftrightarrow h = \underline{\underline{\frac{7}{\sqrt{5}}}}$$

c) Bestem koordinatene til et punkt D, slik at ABCD danner et parallellogram.

Det vil si at to og to sider er like lange og parallelle.

Vi lar

$D(x, y)$ dette gir

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *og*

$[4, -2] = [3 - x, 2 - y]$ som gir oss likningene

$4 = 3 - x \quad \wedge \quad -2 = 2 - y$

$x = -1 \quad \wedge \quad y = 4$

$$\underline{\underline{D(-1, 4)}}$$

Hva er sammenhengen med determinant og parallelle vektorer?

La $\vec{u} = [x_1, y_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2]$ og anta at de er parallelle.

Da er $\vec{u} = t\vec{v}$ slik at: $[x_1, y_1] = t[x_2, y_2]$ som gir likningene

$x_1 = tx_2 \quad \wedge \quad y_1 = ty_2$ løser mhp *t*

$t = \frac{x_1}{x_2} \quad \wedge \quad t = \frac{y_1}{y_2}$ disse må være like, siden $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \qquad | \cdot x_2 y_2$$

$$x_1 y_2 = y_1 x_2$$

$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$ Venstre side her er lik $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$

Regel:

To vektorer er parallelle dersom determinanten er lik 0

Eksempel:

La $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [7, 10]$, $\vec{c} = [7, y]$

a) Er $\vec{a} \parallel \vec{b}$?

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$ **Svar:** $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke parallelle

b) Velg y slik at $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er parallelle.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & y \end{vmatrix} = 2y - 21 = 0$$

$y = \frac{21}{2} \qquad \underline{\underline{\vec{c} = \left[7, \frac{21}{2}\right]}}$