Oppgave 1

Deriver funksjonene

(a) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 7x + e^x$

(b) $g(x) = (2x)^3\pi^{5x}$

(c) $h(x) = \sin(3x\cos 2x)$

Løsning.

(a) Denne deriverer vi rett frem, ingen lure triks trengs. Vi får:

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^3 + 2 \cdot 2x - 7 + e^x = 12x^3 + 4x - 7 + e^x. \tag{L1}$$

(b) Her må vi bruke produktregelen, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, og litt kjerneregel. Vi må nok antagelig også slå opp regelen $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$. Vi får:

$$\begin{aligned} g'(x) &= ((2x)^3)'\pi^{5x} + (2x)^3(\pi^{5x})' && \text{(L2)}\\ &= (3 \cdot (2x)^2 \cdot 2) \cdot \pi^{5x} + (2x)^3 \cdot (5\ln(\pi) \cdot \pi^{5x}) && \text{(L3)}\\ &= 6 \cdot (2x)^2\pi^{5x} + 5 \cdot (2x)^3 \ln(\pi) \cdot \pi^{5x} && \text{(L4)}\\ &= 24x^2\pi^{5x} + 40x^3 \ln(\pi) \cdot \pi^{5x}. && \text{(L5)} \end{aligned}$$

Vi kunne gjort det litt enklere ved å skrive $(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$ først, og da få $(8x^3)' = 3 \cdot 8x^2 = 24x^2$.

(c) Her må vi både bruke kjerneregelen og produktregelen. Vi får

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos(3x\cos 2x) \cdot (3x\cos 2x)' && \text{(L6)}\\ &= \cos(3x\cos 2x) \cdot (3\cos 2x - 3x \cdot 2\sin 2x) && \text{(L7)}\\ &= \cos(3x\cos 2x) \cdot (3\cos 2x - 6x\sin 2x). && \text{(L8)} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Regn ut integralene

(a) $\displaystyle\int x^5 - \sin x + e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int 2x\ln 3x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x\,\mathrm{d}x$

Løsning.

(a) Denne integreres rett frem. Vi får

$$\int x^5 - \sin x + e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 + \cos x + \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

(b) Her må vi bruke delvis integrasjon, og vi må velge $u = \ln 3x$ og $v' = 2x$. Vi får da

$$u' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x} \quad \text{og} \quad v = x^2, \tag{L9}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
\int 2x \ln 3x \, \mathrm{d}x &= \int u v' \, \mathrm{d}x && \text{(L10)}\\
&= uv - \int u' v \, \mathrm{d}x && \text{(L11)}\\
&= x^2 \ln 3x - \int \frac{x^2}{x} \, \mathrm{d}x && \text{(L12)}\\
&= x^2 \ln 3x - \int x \, \mathrm{d}x && \text{(L13)}\\
&= x^2 \ln 3x - \frac{1}{2}x^2 + C. && \text{(L14)}
\end{aligned}$$

(c) Dette er et bestemt integral, så vi må huske å sette inn grensene til slutt. Trikset i dette integralet er å skrive $\tan x = {}^{\sin x}/_{\cos x}$, og så gjøre et variabelskifte med $u = \cos x$. Vi får derfor $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$, og integralet blir:

$$\begin{aligned}
\int \tan x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x && \text{(L15)}\\
&= -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x \, \mathrm{d}x) && \text{(L16)}\\
&= -\int \frac{1}{u} \mathrm{d}u && \text{(L17)}\\
&= -\ln|u| + C && \text{(L18)}\\
&= -\ln|\cos x| + C. && \text{(L19)}
\end{aligned}$$

Setter vi inn grensene får vi da

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \tan x &= [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/3} && \text{(L20)}\\
&= \left(-\ln\left|\cos \frac{\pi}{3}\right|\right) - (-\ln|\cos 0|) && \text{(L21)}\\
&= -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + \ln|1| && \text{(L22)}\\
&= -\ln \frac{1}{2} = \ln 2. && \text{(L23)}
\end{aligned}$$

I slutten har jeg brukt at $\ln {}^{a}/_{b} = \ln a - \ln b$ og at $\ln 1 = 0$.

Oppgave 3

Løs likningene og ulikhetene

(a) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+x-6} \geq 0$

(b) $x-3-\sqrt{14-2x} > 0$

(c) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$

Løsning.

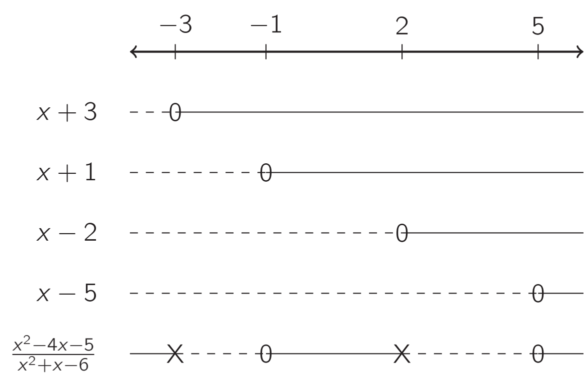
(a) For å vite når ulikheten er større enn eller lik null, finner vi først ut når telleren er lik null og når nevneren er lik null.. Vi vil derfor løse både

$$x^2-4x-5=0 \quad \text{og} \quad x^2+x-6=0. \tag{L24}$$

Disse kan vi for eksempel løse på kalkulator eller ved hjelp av andregradsformelen. Uavhengig av hvordan vi finner ut av det, finner vi ut at løsningene av den første er $x=-1$ og $x=5$, og løsningene av den andre er $x=-3$ og $x=2$. Dette betyr at vi kan faktorisere

$$x^2-4x-5=(x+1)(x-5) \quad \text{og} \quad x^2+x-6=(x+3)(x-2). \tag{L25}$$

Nå som vi har faktorisert både teller og nevner, kan vi finne ut når funksjonen er større enn null ved å tegne en fortegnslinje:



Vi ser av fortegnslinjen at funksjonen er større enn eller lik null når $x<-3$, når $-1 \leq x < 2$, og eller når $x \geq 5$. Har vi lyst til å skrive dette litt mer fancy kan vi skrive det som

$$x \in \langle \leftarrow, -3\rangle \cup [-1, 2\rangle \cup [5, \rightarrow\rangle. \tag{L26}$$

(b) Før vi løser denne likningen burde vi finne ut hvilke x-verdier som er *lovlige*. Siden vi tar kvadratroten av $14-2x$ får vi at vi må ha $14-2x \geq 0$, som videre betyr at $x \leq 7$. Vi bryr oss derfor kun om x-verdier mindre enn 7. For å nå finne ut av når uttrykket er større enn null, finner vi først ut når det er lik null. Vi løser derfor.

$$x-3-\sqrt{14-2x}=0. \tag{L27}$$

For å løse denne likningen vil vi først bli kvitt kvadratroten. Det gjør vi ved å flytte kvadratroten over på andre siden, og så opphøye i 2.

$$
\begin{aligned}
x - 3 - \sqrt{14 - 2x} &= 0 && \text{(L28)} \\
x - 3 &= \sqrt{14 - 2x} && \text{(L29)} \\
(x - 3)^2 &= \left(\sqrt{14 - 2x}\right)^2 && \text{(L30)} \\
x^2 - 6x + 9 &= 14 - 2x. && \text{(L31)}
\end{aligned}
$$

Vi flytter så alt over på venstresiden av likhetstegnet, og får

$$x^2 - 6x + 9 - 14 + 2x = x^2 - 4x - 5 = 0. \tag{L32}$$

Denne andregradslikningen var en av dem vi løste i forrige oppgave, og fikk da $x = -1$ og $x = 5$. Dette er våre to forslag til løsninger, men vi må nå huske at når vi opphøyet begge sidene i to så kan vi ha laget falske løsninger. Vi må derfor sette prøve på begge disse. Vi setter inn $x = -1$ i den originale likningen og får

$$
\begin{aligned}
x - 3 - \sqrt{14 - 2x} &= (-1) - 3 - \sqrt{14 - 2(-1)} && \text{(L33)} \\
&= -4 - \sqrt{16} && \text{(L34)} \\
&= -8 \neq 0. && \text{(L35)}
\end{aligned}
$$

Denne løsningen stemmer derfor ikke. Om vi setter inn $x = 5$ i den originale likningen får vi

$$
\begin{aligned}
x - 3 - \sqrt{14 - 2x} &= 5 - 3 - \sqrt{14 - 2 \cdot 5} && \text{(L36)} \\
&= 2 - \sqrt{4} && \text{(L37)} \\
&= 0. && \text{(L38)}
\end{aligned}
$$

Løsningen $x = 5$ er derfor en løsning av likheten. Vi sitter kun igjen med løsningen $x = 5$.

Det originale uttrykket er derfor *lik* null når $x = 5$, og vi må vite om uttrykket er større enn eller mindre enn null på hver side. Vi har allerede sett at det er mindre enn null når vi satt inn $x = -1$. Vi tester også med for eksempel $x = 7$, og ser at vi da får

$$
\begin{aligned}
x - 3 - \sqrt{14 - 2x} &= 7 - 3 - \sqrt{14 - 2 \cdot 7} && \text{(L39)} \\
&= 4 - \sqrt{0} && \text{(L40)} \\
&= 4. && \text{(L41)}
\end{aligned}
$$

Vi får derfor at uttrykket er større enn null når $5 < x \leq 7$, og mindre enn null når $x < 5$. Svaret blir derfor $5 < x \leq 7$. Øverste grensen her er siden vi ikke får lov til å sette inn større x-verdier.

(c) For å løse denne likningen starter vi med å dele begge sider på $\cos^2 x$, og får da

$$0 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 4\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 5\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \tag{L42}$$
$$= \tan^2 x - 4\tan x - 5. \tag{L43}$$

Here setter vi $u = \tan x$ og ser at vi da må løse

$$u^2 - 4u - 5 = 0. \tag{L44}$$

Denne andregradslikningen har vi allerede løst, og vi vet at svaret er $u = -1$ og $u = 5$. Men oppgaven er ikke over, da vi må finne x. Vi må derfor løse

$$\tan x = -1 \tag{L45}$$
$$\tan x = 5. \tag{L46}$$

For den øverste får vi at $\tan x = -1$ gir $x = \frac{3\pi}{4}$ som en løsning, og vi vet at for tangens finner vi alle løsninger ved å plusse på π så mange ganger vi vil. Vi får derfor

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \tag{L47}$$

hvor k er et vilkårlig heltall.

For den nederste får vi ikke en eksakt løsning, men kalkulatoren vår gir oss $x = \tan^{-1} 5 = 1{,}3734$. Igjen kan vi plusse på π så mange ganger vi ønsker, og vi får derfor

$$x = 1{,}3734 + \pi k \tag{L48}$$

hvor igjen k er et vilkårlig heltall.

Oppgave 4

Regn ut grensene

(a) $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

(b) $\lim\limits_{x\to(-2)} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

Løsning. Det første vi burde sjekke når vi skal regne ut grenser er om vi bare får lov til å sette verdien vi skal la x gå mot. Dette er fordi alle funksjonene vi har her er kontinuerlige, så om man ikke støter på noen problemer, får man riktig svar ved å bare sette inn. Om vi prøver de tre grenseverdiene i disse oppgavene, ser vi at:

$$(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0 \tag{L49}$$
$$(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0 \tag{L50}$$
$$0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2. \tag{L51}$$

I oppgave (a) og (b) vil vi derfor dele på 0 og vi må gjøre noe mer, men i oppgave (c) kan vi bare sette inn $x = 0$.

Siden alle tre funksjonene vi skal sette grensen inn i er like, kan vi også faktorisere både teller og nevner før vi begynner på noen av oppgavene. Vi finner nullpunktene til polynomet i telleren, og nullpunktene til polynomet i nevneren, og får at

$$x^2 - 9x - 10 = 0 \text{ når } x = -1 \vee x = 10 \tag{L52}$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ når } x = -1 \vee x = -2. \tag{L53}$$

Vi kan derfor faktorisere dem som

$$x^2 - 9x - 10 = (x+1)(x-10) \tag{L54}$$
$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2). \tag{L55}$$

(a) Vi har allerede faktorisert teller og nevner, og kan nå regne grensen som følger:

$$\lim_{x\to(-1)} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to(-1)} \frac{\cancel{(x+1)}(x-10)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} \tag{L56}$$
$$= \lim_{x\to(-1)} \frac{x-10}{x+2} \tag{L57}$$
$$= \frac{-1-10}{-1+2} \tag{L58}$$
$$= -11. \tag{L59}$$

(b) Vi har allerede faktorisert teller og nevner, og kan nå prøve å regne grensen som følger:

$$\lim_{x\to(-2)} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to(-2)} \frac{\cancel{(x+1)}(x-10)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} \tag{L60}$$
$$= \lim_{x\to(-2)} \frac{x-10}{x+2} \tag{L61}$$

Her ser vi at vi *fremdeles* deler på null om vi setter inn $x = -2$, og det er ikke lenger noe i telleren som kan «redde oss». I slike tilfeller sier vi derfor at grensen ikke eksisterer.

(c) Som nevnt tidligere har vi sett at vi her bare kan sette inn $x = 0$ uten at noe går galt allerede fra starten av, så vi gjør det, og får

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0^2 - 9\cdot 0 - 10}{0^2 + 3\cdot 0 + 2} \tag{L62}$$
$$= \frac{-10}{2} = -5. \tag{L63}$$

Oppgave 5

Herons formel er en formel som gir arealet av en trekant dersom man kan sidene. Om en trekant har sidelengder a, b, og c, sier Herons formel at arealet er gitt ved

$$\text{Areal} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}. \tag{1}$$

(a) Bruk Herons formel til å finne arealet av en trekant med sidelengder 3, 4, og 5. Finn også arealet til trekanten *uten* å bruke Herons formel.

Løsning. Det er ikke viktig hvilken av sidene vi kaller a, b, og c, så vi setter $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Vi setter inn i Herons formel og får

$$\begin{aligned}
\text{Areal} &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} && \text{(L64)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(3+4+5)(3+4-5)(3+5-4)(4+5-3)} && \text{(L65)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{12\cdot 2\cdot 4\cdot 6} && \text{(L66)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{576} && \text{(L67)}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 24 && \text{(L68)}\\
&= 6. && \text{(L69)}
\end{aligned}$$

Den absolutt raskeste måten å finne arealet *uten* Herons formel er å kjenne igjen at en trekant med sidelengder 3, 4, og 5 må være rettvinklet, og 5 er hypotenusen. Vi kan derfor finne arealet ved å gange katetene sammen og dele på to, og vi får ${}^{3\cdot 4}/_{2} = 6$.

Om vi ikke kjenner igjen dette, vil vi bruke arealsetningen til å finne arealet. Da trenger vi en av vinklene inni trekanten, og om vi har alle tre sidene må vi bruke cosinussetningen til å finne en av disse. Vi velger for eksempel å finne vinkelen mellom sidene med lengde 3 og 5, og cosinussetningen gir oss da

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B && \text{(L70)}\\
16 &= 9 + 25 - 2\cdot 3\cdot 5\cos\angle B && \text{(L71)}\\
30\cos\angle B &= 25 + 9 - 16 && \text{(L72)}\\
\cos\angle B &= \frac{18}{30} = \frac{3}{5}. && \text{(L73)}
\end{aligned}$$

Vi får derfor at $\angle B = \cos^{-1} {}^{3}/_{5} = 0{,}9273$. Vi bruker denne vinkelen til å finne arealet ved hjelp av arealsetningen, og får

$$\begin{aligned} \text{Areal} &= \frac{1}{2} ac \sin \angle B && \text{(L74)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 0{,}9273 && \text{(L75)} \\ &= \frac{15}{2} \cdot 0{,}8000 && \text{(L76)} \\ &= 6{,}00. && \text{(L77)} \end{aligned}$$

De neste oppgavene er til sammen *for store* til at jeg ville gitt den på en faktisk eksamen, men er god trening i bokstavregning.

Vi skal nå vise at Herons formel stemmer, ved å bruke cosinussetningen og arealsetningen.

(b) Om $\angle C$ er vinkelen mellom sidene a og b, vis at vi har

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{2}$$

Løsning. Cosinussetningen gir oss at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C. \tag{L78}$$

Om vi løser denne for $\cos \angle C$ får vi

$$\begin{aligned} c^2 + 2ab \cos \angle C &= a^2 + b^2 && \text{(L79)} \\ 2ab \cos \angle C &= a^2 + b^2 - c^2 && \text{(L80)} \\ \cos \angle C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{(L81)} \end{aligned}$$

som vi ønsket.

(c) Bruk likningen $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$, arealsetningen, og resultatet fra forrige deloppgave til å vise at vi har

$$\text{Areal}^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} \tag{3}$$

Løsning. Arealsetningen forteller oss at

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} ab \sin \angle C. \tag{L82}$$

Siden oppgaven ber oss om å vise et resultat om arealet opphøyd i 2, velger vi å opphøye hele denne formelen i 2, og får

$$\text{Areal}^2 = \frac{1}{4} a^2 b^2 \sin^2 \angle C. \tag{L83}$$

Nå bruker vi at $\sin^2 \angle C = 1 - \cos^2 \angle C$, og får da

$$\text{Areal}^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\big(1 - \cos^2 \angle C\big). \tag{L84}$$

Fra forrige oppgave har vi at

$$\cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{L85}$$

og derfor at

$$\cos^2 \angle C = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}. \tag{L86}$$

Setter vi dette inn i formel (L84) får vi

$$\begin{aligned}
\text{Areal}^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2\big(1 - \cos^2 \angle C\big) && \text{(L87)}\\
&= \frac{1}{4}a^2b^2\left(1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}\right) && \text{(L88)}\\
&= \frac{a^2b^2}{4} - \frac{a^2b^2}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2} && \text{(L89)}\\
&= \frac{a^2b^2}{4} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} && \text{(L90)}\\
&= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} && \text{(L91)}
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket.

(d) Vis at

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \tag{4}$$

og bruk dette til å vise at Herons formel stemmer.

Info: Dette er den biten av oppgaven som ville vært for mye å gjøre på en faktisk eksamen. Hold tunga rett i munnen!

Løsning. Jeg begynner med å vise at om likheten (4) gjelder, så vil Herons formel stemme. Vi kjenner igjen høyresiden av likheten som telleren i formelen vi har for arealet opphøyd i 2, så fra det vi viste i forrige oppgave har vi da

$$\begin{aligned}
\text{Areal}^2 &= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16} && \text{(L92)}\\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{16}. && \text{(L93)}
\end{aligned}$$

Vi tar kvadratroten av begge sider, og får at

$$\begin{aligned}
\text{Areal} &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{16}} && \text{(L94)}\\
&= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{\sqrt{16}} && \text{(L95)}\\
&= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4} && \text{(L96)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} && \text{(L97)}
\end{aligned}$$

Dette er jo nettopp Herons formel for areal, så om (4) gjelder, så vil også Herons formel gjelde. Vi må nå vise denne likheten. Beklageligvis er den letteste måten å vise likheten å rett og slett bare åpne alle parentesene på venstresiden og høyresiden, og se at vi får det samme.

For høyresiden, la oss først regne ut $(a^2+b^2-c^2)^2$. Vi får

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2-c^2)^2 &= (a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2) && \text{(L98)}\\
&= a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 + b^2a^2 + b^4 && \text{(L99)}\\
&\quad - b^2c^2 - c^2a^2 - c^2b^2 + c^4 &&\\
&= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2. && \text{(L100)}
\end{aligned}$$

Vi får derfor at høyresiden blir

$$\begin{aligned}
4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 &= 4a^2b^2 && \text{(L101)}\\
&\quad - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) &&\\
&= 4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 && \text{(L102)}\\
&\quad - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 &&\\
&= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. && \text{(L103)}
\end{aligned}$$

Vi må nå regne ut venstresiden. Vi ganger sammen to og to parenteser, og får da at

$$\begin{aligned}
(a+b+c)(a+b-c) &= a^2 + ab - ac + ba + b^2 && \text{(L104)}\\
&\quad - bc + ca + cb - c^2 &&\\
&= a^2 + b^2 - c^2 + 2ab, && \text{(L105)}
\end{aligned}$$

og at

$$\begin{aligned}
(a+c-b)(b+c-a) &= ab + ac - a^2 + cb + c^2 && \text{(L106)}\\
&\quad - ca - b^2 - bc + ba &&\\
&= c^2 - a^2 - b^2 + 2ab && \text{(L107)}
\end{aligned}$$

Til sammen får vi da at venstresiden blir

$$(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab) \tag{L108}$$

som ganget ut blir

$$a^2c^2 - a^4 - a^2b^2 - 2a^3b + b^2c^2 - b^2a^2 - b^4 \tag{L109}$$

$$+2ab^3 - c^4 + c^2a^2 + c^2b^2 - 2abc^2 + 2abc^2 \tag{L110}$$

$$-2a^3b - 2a^3b + 4a^2b^2 \tag{L111}$$

som forenkles til

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4. \tag{L112}$$

Vi ser da at vi fikk det samme på venstresiden som på høyresiden. Og det viser da at Herons formel stemmer, ved hjelp av cosinussetningen og arealsetningen.

En god video om Herons formel, som også går gjennom mer geometrisk bevis, for spesielt interesserte: https://www.youtube.com/watch?v=IguNXoCjBEk

Oppgave 6

En differensiallikning er gitt ved

$$y' = y^2 \tag{5}$$

(a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.

Løsning. Vi vil skrive om problemet til en separabel differensiallikning,

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{L113}$$

Dette gjør vi ved å skrive $y' = {}^{\mathrm{d}y}/_{\mathrm{d}x}$, dele begge sider på y^2, gange begge sider med $\mathrm{d}x$. Vi får da

$$\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x. \tag{L114}$$

Vi integrerer begge sider, og får

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x \tag{L115}$$

$$-\frac{1}{y} = x + C \tag{L116}$$

$$-1 = (x + C)y \tag{L117}$$

$$-\frac{1}{x + C} = y. \tag{L118}$$

Vi får derfor at $y(x) = {}^{-1}/_{(x+C)}$.

(b) Finn asymptotene til den generelle løsningen.

Løsning. Vi finner de vertikale asymptotene ved å se når vi deler på 0. Siden vi har $y = -1/x+C$ må vi da ha at $x = -C$ for å dele på null, og vi har én vertikal asymptote i $x = -C$. Nøyaktig hvor den er, avhenger av hva C er valgt til å være.

Vi finner de horisontale asymptotene ved å se hva som skjer når $x \to \pm\infty$. Vi ser at når x blir større og større, vil også $x + C$ bli større og større, så vi deler på noe «uendelig stort», og får derfor 0. Sagt på en annen måte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{x+C} = 0. \tag{L119}$$

Vi har derfor én horisontal asymptote i $y = 0$.

(c) Finn løsningen som er slik at $y(0) = 1/2$.

Løsning. Vi setter inn $x = 0$ i den generelle løsningen, og ser hva C må være.

$$y(x) = -\frac{1}{x+C} \tag{L120}$$
$$y(0) = -\frac{1}{0+C} \tag{L121}$$
$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{C} \tag{L122}$$
$$C = -2. \tag{L123}$$

Vi får derfor at $C = -2$, som gir oss

$$y(x) = -\frac{1}{-2+x} = \frac{1}{2-x}. \tag{L124}$$

Oppgave 7

Vi har gitt tre punkter

$$A = (3, 1, 1), \tag{6}$$
$$B = (2, 2, 2), \text{ og} \tag{7}$$
$$C = (-2, -2, 3). \tag{8}$$

(a) Finn vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og bestem arealet til $\triangle ABC$.

Løsning. Vi finner først vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, ved å regne ut $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ og $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{AB} = [2, 2, 2] - [3, 1, 1] \tag{L125}$$
$$= [-1, 1, 1] \tag{L126}$$
$$\overrightarrow{AC} = [-2, -2, 3] - [3, 1, 1] \tag{L127}$$
$$= [-5, -3, 2]. \tag{L128}$$

Vi finner nå kryssproduktet på hvilken enn måte vi liker best, jeg ser på det som en «determinant».

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \quad & \vec{e}_x(1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)) \\
& - \vec{e}_y((-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-5)) && \text{(L129)} \\
& + \vec{e}_z((-1) \cdot (-3) - 1 \cdot (-5)) \\
= {} & 5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 8\vec{e}_z && \text{(L130)} \\
= {} & [5, -3, 8]. && \text{(L131)}
\end{aligned}$$

Vi vet nå at arealet av *parallellogrammet* utspent av $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er gitt ved *lengden* til $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Siden $\triangle ABC$ er halvparten av dette parallellogrammet, så regner vi ut

$$\begin{aligned}
\text{Areal} &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| && \text{(L132)} \\
&= \frac{1}{2}\|[5, -3, 8]\| && \text{(L133)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 8^2} && \text{(L134)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{25 + 9 + 64} && \text{(L135)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{98} && \text{(L136)} \\
&= \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4{,}9497. && \text{(L137)}
\end{aligned}$$

(b) Finn en likning for planet α som A, B, og C ligger i.

Løsning. Likningen for et plan med normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ gjennom et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad \text{(L138)}$$

Vi bruker normalvektoren $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ og går for eksempel gjennom $P = A$. Vi får da

$$\begin{aligned}
5(x - 3) - 3(y - 1) + 8(z - 1) &= 0 && \text{(L139)} \\
5x - 15 - 3y + 3 + 8z - 8 &= 0 && \text{(L140)} \\
5x - 3y + 8z &= 15 - 3 + 8 && \text{(L141)} \\
5x - 3y + 8z &= 20. && \text{(L142)}
\end{aligned}$$

En mulig likning for planet α er derfor

$$5x - 3y + 8z = 20. \qquad \text{(L143)}$$

Alle andre likninger for planet vil være et multippel av denne formelen.

(c) Finn en parameterfremstilling til ei linje ℓ som går gjennom B og er normal på planet α.

Løsning. Parameterfremstillinga til ei linje gjennom et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ med retningsvektor $\vec{v} = [a, b, c]$ er gitt ved

$$\ell : \begin{cases} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct. \end{cases} \tag{L144}$$

Siden linja er normal på α så vil *retningsvektoren* til linja være det samme som normalvektoren til planet. Vi bruker derfor $\vec{v} = [5, -3, 8]$ som retningsvektor. Siden linja skal gå gjennom B bruker vi da $P = B$. Vi får at parameterfremstillingen blir

$$\ell : \begin{cases} x &= 2 + 5t, \\ y &= 2 - 3t, \\ z &= 2 + 8t. \end{cases} \tag{L145}$$

Oppgave 8

I denne oppgaven skal vi løse integralet

$$\int x^5 \sqrt{2 - x^3}\, \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Prøv gjerne litt på integralet først, før du leser «trikset» under!

(a) Løs integralet over ved hjelp av delvis integrasjon, hvor vi velger $u = x^3$ og $v' = x^2\sqrt{2 - x^3}$.

Løsning. Vi bruker det gitte tipset, og velger $u = x^3$ og $v' = x^2\sqrt{2 - x^3}$. For å utføre delvis integrasjon må vi da finne u' og v. Å finne u' er enkelt, da vi bare deriverer u, og får $u' = 3x^2$. For å finne v må vi integrere v'. Vi må her bruke variabelskifte, og setter $w = 2 - x^3$, som gir $\mathrm{d}w = -3x^2\,\mathrm{d}x$. Vi får:

$$\begin{aligned}
v &= \int v'\,\mathrm{d}x && \text{(L146)}\\
&= \int x^2\sqrt{2-x^3}\,\mathrm{d}x && \text{(L147)}\\
&= \int -\frac{1}{3}\sqrt{w}\,\mathrm{d}w && \text{(L148)}\\
&= -\frac{1}{3}\int w^{1/2}\,\mathrm{d}w && \text{(L149)}\\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+1/2}w^{1+1/2} + C && \text{(L150)}\\
&= -\frac{2}{9}w^{3/2} + C && \text{(L151)}\\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{w^3} + C && \text{(L152)}\\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{(2-x^3)^3} + C. && \text{(L153)}
\end{aligned}$$

For vår v velger vi $C = 0$, og vi kan utføre den delvise integrasjonen. Vi får at

$$\begin{aligned}
\int x^5\sqrt{2-x^3}\,\mathrm{d}x &= \int uv'\,\mathrm{d}x && \text{(L154)}\\
&= uv - \int u'v\,\mathrm{d}x && \text{(L155)}\\
&= -\frac{2}{9}x^3\sqrt{(2-x^3)^3} + \int \frac{2}{9}3x^2\sqrt{(2-x^3)^3}\,\mathrm{d}x && \text{(L156)}\\
&= -\frac{2}{9}x^3\sqrt{(2-x^3)^3} + \frac{2}{3}\int x^2\sqrt{(2-x^3)^3}\,\mathrm{d}x. && \text{(L157)}
\end{aligned}$$

For å løse dette siste integralet setter vi *igjen* $w = 2 - x^3$, og da $\mathrm{d}w = -3x^2$. Vi får da

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{(2-x^3)^3}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{1}{3}\sqrt{w^3}\,\mathrm{d}w && \text{(L158)}\\
&= -\frac{1}{3}\int w^{3/2}\,\mathrm{d}w && \text{(L159)}\\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1+3/2}w^{1+3/2} + C && \text{(L160)}\\
&= -\frac{2}{15}w^{5/2} + C && \text{(L161)}\\
&= -\frac{2}{15}\sqrt{w^5} + C && \text{(L162)}\\
&= -\frac{2}{15}\sqrt{(2-x^3)^5} + C. && \text{(L163)}
\end{aligned}$$

Vi setter inn dette svaret og nøster opp:

$$\int x^5\sqrt{2-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9}x^3\sqrt{(2-x^3)^3} + \frac{2}{3}\int x^2\sqrt{(2-x^3)^3}\,\mathrm{d}x \tag{L164}$$

$$= -\frac{2}{9}x^3\sqrt{(2-x^3)^3} - \frac{4}{45}\sqrt{(2-x^3)^5} + C \tag{L165}$$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{(2-x^3)^3}\left(x^2 - \frac{2}{5}(2-x^3)\right) + C \tag{L166}$$

Oppgave 9

Et andregradspolynom p er gitt ved

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20. \tag{10}$$

(a) Vis at $x-5$ deler p.

Løsning. En rask måte å sjekke at $x-5$ deler p på er å sjekke at $p(5)=0$. Vi setter inn og får

$$p(5) = 5^3 - 5\cdot 5^2 + 4\cdot 5 - 20 \tag{L167}$$

$$= 5^3 - 5^3 + 20 - 20 \tag{L168}$$

$$= 0. \tag{L169}$$

Vi har derfor at $x-5$ deler p.

En litt tregere måte å sjekke det på er ved å utføre polynomdivisjonen. I dette tilfellet trenger vi å utføre polynomdivisjonen senere uansett, så vi taper ikke noe *faktisk* tid på å gjøre det på denne måten i stedet. Om vi utfører polynomdivisjonen får vi

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 5x^2 + 4x - 20\big) : \big(x-5\big) = x^2 + 4 \\
\underline{-\,x^3 + 5x^2} \\
\qquad\qquad 4x - 20 \\
\qquad\quad \underline{-\,4x + 20} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Så vi ser at $p(x) = (x-5)(x^2+4)$, og er derfor delelig med $x-5$.

Et integral som ikke står i boka, men som jeg har nevnt en eller to ganger i forelesning er

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1}x + C. \tag{11}$$

(b) Løs integralet

$$\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-5x^2+4x-20}\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Hint: Sjekk at $x^2+4 = 4((x/2)^2+1)$.

Løsning. Vi kjenner igjen nevneren som $p(x)$, og kan derfor faktorisere den. Vi vil videre prøve å delbrøksoppspalte. Vi får

$$\frac{3x^2+2x+2}{x^3-5x^2+4x-20} = \int \frac{3x^2+2x+2}{(x-5)(x^2+4)} \tag{L170}$$

$$= \frac{A}{x-5} + \frac{Bx+C}{x^2+4}. \tag{L171}$$

Det er nevnt i obligatorisk oppgave 4 at for delbrøksoppspalting i tilfellet hvor nevneren er et andregradspolynom, vil telleren være et førstegradspolynom. Dette er ikke *helt* pensum, så jeg ville ikke gitt en slik oppgave på eksamen uten å også informere om dette. Om noen har glemt dette og antar at telleren bare skal være et tall, vil det i dette tilfellet fremdeles bli riktig, da svaret viser seg å være et tall her.

Vi prøver å finne A, B, og C, og må derfor ha at

$$\frac{3x^2+2x+2}{x^3-5x^2+4x-20} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x-5)}{(x-5)(x^2+4)} \tag{L172}$$

som gir oss

$$3x^2+2x+2 = A(x^2+4)+(Bx+C)(x-5). \tag{L173}$$

Om vi her tester ved å sette inn $x = 5$ får vi at

$$3\cdot 5^2+2\cdot 5+2 = A(5^2+4)+(5B+C)(5-5) \tag{L174}$$

$$75+10+2 = 29A \tag{L175}$$

$$\frac{87}{29} = A \tag{L176}$$

$$3 = A. \tag{L177}$$

Vi kan beklageligvis ikke finne en passende x-verdi for å finne B og C på samme måte (med mindre vi begynner å sette inn komplekse tall), så vi har to valg

- Vi velger to vilkårlige x-verdier, setter inn på venstre og høyre side, og får da to formler for B og C
- Vi nøster opp polynomene på venstre og høyre side av likhetstegnet, og ser hvilke koeffisienter som må være like.

La meg gjøre det på *begge* måter.

Velger to vilkårlige verdier Om vi setter inn $x = 0$ og $A = 3$ i (L173) får vi

$$3\cdot 0^2+2\cdot 0+2 = 3(0^2+4)+(B\cdot 0+C)(0-5) \tag{L178}$$

$$2 = 12-5C \tag{L179}$$

$$5C = 10 \tag{L180}$$

$$C = 2. \tag{L181}$$

Om vi setter inn $x = 1$, $A = 3$ og $C = 2$ i (L173) får vi

$$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 3(1^2 + 4) + (B + 2)(1 - 5) \tag{L182}$$
$$7 = 15 - 4B - 8 \tag{L183}$$
$$4B = 15 - 8 - 7 \tag{L184}$$
$$B = 0. \tag{L185}$$

Vi har derfor $A = 3$, $B = 0$, og $C = 2$.

Nøster opp polynom Om vi åpner alle parenteser i (L173) får vi

$$3x^2 + 2x + 2 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 5) \tag{L186}$$
$$= Ax^2 + 4A + Bx^2 - 5B + Cx - 5C \tag{L187}$$
$$= (A + B)x^2 + Cx + (4A - 5B - 5C). \tag{L188}$$

For at dette skal være likt for *alle* x må koeffisientene foran x^2, x, og konstantleddet være like, og vi får at

$$3 = A + B, \tag{L189}$$
$$2 = C, \tag{L190}$$
$$2 = 4A - 5B - 5C. \tag{L191}$$

Om vi her setter inn at vi allerede vet $A = 3$, ser vi av de første to likningene at vi får $B = 0$ og $C = 2$. Vi kan sette alle tre verdiene inn i den nederste likningen for å dobbeltsjekke, og får da

$$2 = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 0 - 5 \cdot 2, \tag{L192}$$

og dette stemmer. Vi har derfor $A = 3$, $B = 0$, og $C = 2$.

Merk at denne metoden kunne vi også brukt om vi *ikke* hadde funnet A tidligere, men måtte da løst tre likninger med tre ukjente for å finne A, B, og C.

Uansett metode vet vi nå at

$$\frac{3x^2 + 2x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x - 20} = \frac{3}{x - 5} + \frac{2}{x^2 + 4}, \tag{L193}$$

og kan bruke dette til å løse integralet. Vi får

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x - 5} + \frac{2}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x \tag{L194}$$
$$= \int \frac{3}{x - 5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x. \tag{L195}$$

Det første integralet her er rett frem å løse, og vi får

$$\int \frac{3}{x-5}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-5| + C. \tag{L196}$$

For å løse det andre integralet må vi omforme det slik at vi kan bruke (11). Vi sjekker hintet, og ser at

$$\begin{aligned} 4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1\right) &= 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\cdot 1 && \text{(L197)} \\ &= 4\frac{x^2}{4} + 4 && \text{(L198)} \\ &= x^2 + 4. && \text{(L199)} \end{aligned}$$

Vi bruker dette, og variabelskiftet $u = {}^{x}\!/_{2}$, $\mathrm{d}u = {}^{1}\!/_{2}\,\mathrm{d}x$, og får

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^4+4}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{4((^x/_2)^2+1)}\,\mathrm{d}x && \text{(L200)} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(^x/_2)^2+1}\,\mathrm{d}x && \text{(L201)} \\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u && \text{(L202)} \\ &= \tan^{-1} u + C && \text{(L203)} \\ &= \tan^{-1}\frac{x}{2} + C. && \text{(L204)} \end{aligned}$$

Vi kan nå *endelig* løse integralet, og vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-5x^2+4x-20} &= \int \frac{3}{x-5}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x && \text{(L205)} \\ &= 3\ln|x-5| + \tan^{-1}\frac{x}{2} + C. && \text{(L206)} \end{aligned}$$

Komplekse tall (for spesielt interesserte)

En muligens fristende ting å gjøre i denne oppgaven, siden vi ikke kan faktorisere x^2+4 uten komplekse tall, er å begynne å bruke komplekse tall. Vi har da at $x^2+4 = (x+2i)(x-2i)$. Hva skjer om vi bruker dette?

Delbrøksoppspaltingen blir da i stedet

$$\frac{3x^2+2x+2}{x^3-5x^2+4x-20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2i} + \frac{C}{x+2i} \tag{L207}$$

og høyresiden her blir

$$\frac{A(x+2i)(x-2i) + B(x-5)(x+2i) + C(x-5)(x-2i)}{(x-5)(x+2i)(x-2i)} \tag{L208}$$

som gir oss at

$$3x^2+2x+2 = A(x+2i)(x-2i)+B(x-5)(x+2i)+C(x-5)(x-2i). \quad \text{(L209)}$$

Her kan vi sette inn tre forskjellige verdier for x for å finne hva A, B, og C må være, og vi får

$\boldsymbol{x = 5}$ Setter vi inn $x = 5$ på begge sider, får vi

$$\begin{aligned}
3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 2 = {} & A(5+2i)(5-2i) \\
& + B(5-5)(5+2i) && \text{(L210)} \\
& + C(5-5)(5-2i) \\
75 + 10 + 2 = {} & A(25 - 10i + 10i + 4) && \text{(L211)} \\
\frac{87}{29} = {} & A && \text{(L212)} \\
3 = {} & A. && \text{(L213)}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x = 2i}$ Setter vi inn $x = 2i$ på begge sider, får vi

$$\begin{aligned}
3 \cdot (2i)^2 + 2 \cdot 2i + 2 = {} & A(2i+2i)(2i-2i) \\
& + B(2i-5)(2i+2i) && \text{(L214)} \\
& + C(2i-5)(2i-2i) \\
-12 + 4i + 2 = {} & 4i(2i-5)B && \text{(L215)} \\
4i - 10 = {} & 4i(2i-5)B && \text{(L216)} \\
\frac{4i-10}{2i(4i-10)} = {} & B && \text{(L217)} \\
\frac{1}{2i} = {} & B && \text{(L218)} \\
-\frac{1}{2}i = {} & B. && \text{(L219)}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x = -2i}$ Setter vi inn $x = -2i$ på begge sider, får vi

$$\begin{aligned}
3 \cdot (-2i)^2 + 2 \cdot (-2i) + 2 = {} & A(-2i+2i)(-2i-2i) \\
& + B(-2i-5)(-2i+2i) && \text{(L220)} \\
& + C(-2i-5)(-2i-2i) \\
-12 - 4i + 2 = {} & 4i(5+2i)C && \text{(L221)} \\
-(10+4i) = {} & 2i(10+4i)C && \text{(L222)} \\
\frac{-(10+4i)}{2i(10+4i)} = {} & C && \text{(L223)} \\
-\frac{1}{2i} = {} & C && \text{(L224)} \\
\frac{1}{2}i = {} & C. && \text{(L225)}
\end{aligned}$$

Vi har derfor fått $A = 3$, $B = -{}^{i}\!/_{2}$, og $C = {}^{i}\!/_{2}$, og integralet vårt blir derfor

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x - 20}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-{}^{i}\!/_{2}}{x-2i}\,\mathrm{d}x + \int \frac{{}^{i}\!/_{2}}{x+2i}\,\mathrm{d}x \tag{L226}$$

$$= 3\ln|x-5| - \frac{i}{2}\ln(x-2i) + \frac{i}{2}\ln(x+2i) + C \tag{L227}$$

hvor jeg har «jukset» litt ved å bare anta at formelen for integralet av logaritmen til et *komplekst* tall essensielt er den samme som for reelle tall (men merk at jeg har *fjernet* absoluttverditegnet).

Om dere på et senere tidspunkt tar ACIT4330 (Matematisk analyse), så vil dere lære om den *komplekse logaritmen*, og kan da vise at dette faktisk *også* blir riktig svar. Det viser seg nemlig at

$$\frac{i}{2}\ln(x+2i) - \frac{i}{2}\ln(x-2i) = \tan^{-1}(x/2) + C. \tag{L228}$$