UNIVERSITETET I AGDER

PÅSKETENTAMEN 2015 MA-005
LØSNING

Oppgave 1

a) Vis at $x^2+2xy-3y^2=(x+3y)(x-y)=x^2-xy+3xy-3y^2=\underline{x^2+2xy-3y^2}$

og trekk sammen utrykket

$$\frac{x-y}{x^2+2xy-3y^2}-\frac{2}{x-y}-\frac{7}{x+3y}=\frac{x-y}{(x+3y)(x-y)}-\frac{2}{x-y}-\frac{7}{x+3y}=$$

$$\frac{(x-y)-2(x+3y)-7(x-y)}{(x+3y)(x-y)}=\frac{x-y-2x-6y-7x+7y}{(x+3y)(x-y)}=$$

$$\underline{\underline{\frac{-8x}{(x+3y)(x-y)}=\frac{-8x}{x^2+2xy-3y^2}}}$$

Løs likningene ved regning. Bruk eksaktverdier der det er naturlig:

$$2x-\sqrt{x+1}=13 \Rightarrow \sqrt{x+1}=2x-13$$

$$x+1=4x^2-52x+169 \Rightarrow 4x^2-53x+168=0$$

b) $x=\begin{cases}8\\5,25\end{cases}$ $\underline{\text{Prøve}}:$ $x=8:$ $V.S.=16-\sqrt{9}=16-3=13=H.S.\ OK$

$x=5,25:$ $V.S.=10,5-\sqrt{6,25}=10,5-2,5=8\neq H.S.\ Ikke\ OK$

$\underline{\underline{\text{Svar}: x=8}}$

$$\left(\sin x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(\tan x+1)=0 \qquad x\in[0,2\pi\rangle$$

1) $\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0 \Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{x=\begin{cases}\frac{5\pi}{4}\\\frac{7\pi}{4}\end{cases}}$

c) 2) $\tan x+1=0 \Rightarrow \tan x=-1 \Rightarrow \underline{x=\begin{cases}\frac{3\pi}{4}\\\frac{7\pi}{4}\end{cases}}$

$\underline{\underline{\text{Svar}: x=\begin{cases}\frac{3\pi}{4}\\\frac{5\pi}{4}\\\frac{7\pi}{4}\end{cases}}}$

$$4\ln(x)^2-3(\ln x)^2+3=0 \Rightarrow -3(\ln x)^2+8\ln x+3=0$$

d) $\ln x=\begin{cases}3\\-\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x=\begin{cases}e^3\\\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\end{cases}}}$

Oppgave 2

Deriver funksjonene:

a)
$$f(x) = x^5 e^{5x}$$
$$\underline{\underline{f'(x)}} = 5x^4 e^{5x} + x^5 \cdot 5e^{5x} = \underline{\underline{5x^4 e^{5x}(x+1)}}$$

b)
$$f(x) = \ln\left(2x^2 + 2x\right)$$
$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{4x+2}{2x^2+2x} = \underline{\underline{\frac{2x+1}{x(x+1)}}}$$

c)
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{2x}$$
$$\underline{\underline{f'(x)}} = \frac{2\cos 2x \cdot 2x - \sin 2x \cdot 2}{4x^2} = \underline{\underline{\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{2x^2}}}$$

Oppgave 3

Løs integralene ved regning

a) $$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \underline{\underline{\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C}}$$

b) $\int \cos^2 x\, dx$ Tips: Enklest å løse integralet ved å bruke en omskriving av $\cos 2x$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int dx$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C}} = \frac{1}{4} 2\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C}}$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx \qquad \text{ny variabel:} \quad u = \sin x + 1 \qquad \text{nye grenser:} \quad x = \tfrac{\pi}{2} \ gir \ u = 2$$

$$du = \cos x dx \qquad\qquad x = 0 \ gir \ u = 1$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx}} = \int_1^2 \frac{1}{u} du = \Big[\ln|u| \Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \underline{\underline{\ln 2}}$$

Oppgave 4

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x) = 3 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x \in [0, 2\pi]$

a) Finn amplituden, likevektslinja og perioden

$$\underline{\underline{amplituden = 2}} \qquad \underline{\underline{likevektslinjen = 3}} \qquad \underline{\underline{perioden = \pi}}$$

b) Finn ved regning funksjonens 2 toppunkter og 2 bunnpunkter

Toppunkt = 5 når

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \;\Rightarrow\; 2x - \frac{\pi}{2} = \pi \;\Rightarrow\; x = \frac{3\pi}{4}$$

$$Toppunkt: \underline{\underline{\left(\frac{3\pi}{4}, 5\right) og \left(\frac{7\pi}{4}, 5\right)}}$$

Bunnpunktene = 1 en halv periode fra toppunktene

$$Bunnpunkt: \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) og \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)}}$$

c) Tegn grafen til *f* sammen med linja $y = 4$ i et koordinatsystem, og løs likningen $f(x) = 4$ grafisk

d) Løs likningen $f(x) = 4$ ved regning. Bruk eksaktverdier

$$f(x) = 3 - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$-2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$(1) \qquad 2x - \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} \end{cases} \;\Rightarrow\; 2x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \\ \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = \begin{cases} \frac{7\pi}{12} \\ \frac{11\pi}{12} \end{cases}}}$$

$$(2) \qquad 2x - \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \end{cases} \;\Rightarrow\; 2x = \begin{cases} \frac{8\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{6} \\ \frac{10\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{23\pi}{6} \end{cases} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = \begin{cases} \frac{19\pi}{12} \\ \frac{23\pi}{12} \end{cases}}}$$

Oppgave 5

Punktene $A(1,2,4)$, $B(2.-3,1)$, $D(5,3,1)$ og $T(5,10,6)$ er gitt.

a) Punktene *A*, *B* og *D* er tre av hjørnene i et trapes *ABCD* der $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$
Finn koordinatene til hjørnet C i trapeset

$$\overrightarrow{AB} = [1, -5, -3] \;\Rightarrow\; \overrightarrow{DC} = [2, -10, -6] = [x-5, y-3, z-1]$$

$x - 5 = 2 \qquad y - 3 = -10 \qquad z - 1 = -6$

$\underline{x = 7} \qquad \underline{y = -7} \qquad 5$

$$\underline{\underline{C(7, -7, -5)}}$$

b) Regn ut $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB}=[1,-5,-3] \qquad \overrightarrow{AD}=[4,1,-3]$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}}=1\cdot 4+(-5)\cdot 1+(-3)\cdot(-3)\ \underline{\underline{=8}}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}}}=\left[\begin{vmatrix}-5 & -3\\ 1 & -3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -5\\ 4 & 1\end{vmatrix}\right]=\underline{\underline{[18,-9,\ 21]}}$$

c) Finn $\angle BAD$ og arealet av ΔABD ved regning

$$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{8}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{26}}$$

$$\cos\angle BAD=0,265$$

$$\underline{\underline{\angle BAD=74,6^\circ}}$$

$$Areal\ \ \Delta ABD=A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{35}\cdot\sqrt{26}\cdot\sin 74,6^\circ$$

$$\underline{\underline{A=14,5}}$$

eller

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{18^2+9^2+21^2}=\frac{3}{2}\sqrt{94}$$

$$\underline{\underline{A=14,5}}$$

d) Punktene *A, B, D* og *T* er hjørnene i en trekantet pyramide
Finn ved regning volumet av pyramiden

$$\overrightarrow{AT}=[4,8,2]$$

$$Volumet=V=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AT}=\frac{1}{6}\cdot[18,-9,21]\cdot[4,8,2]$$

$$V=\frac{1}{6}\left(18\cdot 4+(-9)\cdot 8+21\cdot 2\right)=\frac{1}{6}\cdot 42$$

$$\underline{\underline{V=7}}$$

Oppgave 6

Funksjonen *f* er gitt ved $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$

a) Finn funksjonens nullpunkter og vertikalasymptoter

$$Nullpunkter\ \ når\ \ x^2-x-6=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=\begin{cases}3\\-2\end{cases}}}$$

$$Vertikalasymptoter\ \ når\ \ x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x=\begin{cases}2\\-1\end{cases}}}$$

b) Vis at $f'(x)=\dfrac{4(2x-1)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$ og finn eventuelle topp- og bunnpunkter

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}$$

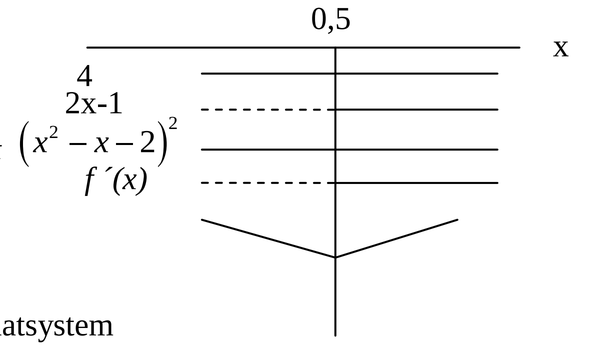
$$f'(x)=\frac{(2x-1)\left(x^2-x-2\right)-\left(x^2-x-6\right)(2x-1)}{\left(x^2-x-2\right)^2}=\frac{(2x-1)\left(\cancel{x^2}-\cancel{x}-2-\cancel{x^2}+\cancel{x}+6\right)}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

$$\underline{\underline{f'(x)=\frac{4(2x-1)}{\left(x^2-x-2\right)^2}}}$$

Kun ett topp – eller bunnpunkt når $x=0,5$

Av fortegnslinjen ser vi at det *er et bunnpunkt*

med koordinatene $\underline{\underline{\left(\tfrac{1}{2},\, f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)=\left(\tfrac{1}{2},2{,}8\right)}}$



c) Tegn grafen til *f* med vertikalasymptoter i et koordinatsystem

d) Vis at $\int f(x)\,dx = x+\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{4}{3}\ln|x-2|+C$

$$\int\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}\,dx \quad \textit{Teller har samme grad som nevner}$$

Vi polynomdividerer og får : $\quad x^2-x-6 : x^2-x-2 = \underline{1-\dfrac{4}{x^2-x-2}}$

$$\underline{-\left(x^2-x-2\right)}$$
$$-4$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}=1-\frac{4}{(x-2)(x+1)} \quad\Rightarrow\quad \frac{-4}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$\underline{x=-1:}\qquad -4=B(-3)\ \Rightarrow\ \underline{B=\dfrac{4}{3}}$

$\underline{x=2:}\qquad -4=A\cdot 3\ \Rightarrow\ \underline{A=-\dfrac{4}{3}}$

$$\int\frac{x^2-x-6}{x^2-x-2}\,dx=\int\left(1-\frac{4}{3(x-2)}+\frac{4}{3(x+1)}\right)dx=\underline{\underline{x-\frac{4}{3}\ln|x-2|+\frac{4}{3}\ln|x+1|+C}}$$

e) Finn arealet avgrenset av grafen til *f*, $x-$aksen og linja $x=4$ ved regning

$$A=\left[x-\frac{4}{3}\ln|x-2|+\frac{4}{3}\ln|x+1|\right]_3^4=4-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 5-\left(3-\frac{4}{3}\ln 1+\frac{4}{3}\ln 4\right)$$

$$\underline{\underline{A}}=4-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 5-3-\frac{8}{3}\ln 2=\underline{\underline{1+\frac{4}{3}\ln 5-\frac{12}{3}\ln 2}}$$

Eksakte verdier i trigonometri

$\angle u$, °	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\angle u$, rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin u$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos u$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan u$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ikke def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ikke def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Vektorformler

Vektor produkt $[x_1, y_1, z_1] \times [x_2, y_2, z_2] = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right]$

Lengden av vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ er $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin v$

Arealet av et parallellogram er $\quad A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Arealet av en trekant er $\quad A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Trippelprodukt $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Volum av parallellepiped $\quad V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av firkantet pyramide $\quad V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Volum av trekantet pyramide $\quad V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$