Litt til Integral

Spesialtilfelle av variabelskifte:

$u = ax + b$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int f(u)\,du$$

Eks: $$\int (x-4)^3\,dx = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{4}(x-4)^4 + C$$

$$\int \sqrt{2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$$

Eksponensial funksjoner

$\boxed{a}^{\boxed{m}}$ ← Eksponent.

Grunntallet

Har allerede potensfunksjoner:

$$x^3$$

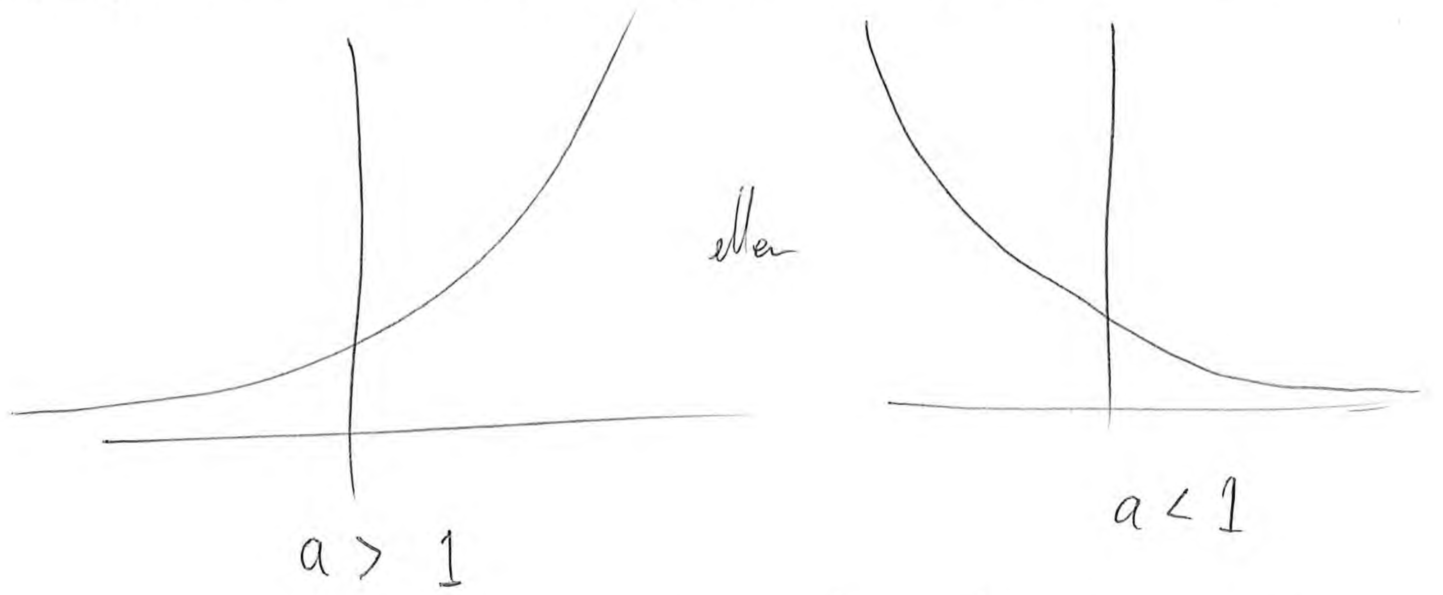
Eksponensialfunksjoner har den ukjente i eksponenten.

$$\boxed{3^x}$$

Generelt skriver vi da a^x, $a > 0$,

Om $a < 0$, får vi problem med f. eks $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Grafen til denne funksjonen vil se omtrent slik ut:



Denne grafen vokser generelt veldig raskt, for $a \geq 2$.

Noen må bytte bildekk, hvert dekk har 4 muttere som må skrus inn/ut, til sammen 16 muttere.

Vi inngår en avtale:

2^0 = Får betalt 1 kr for å skru inn/ut første mutter.

2^1 = Får betalt 2 kr for å skru inn/ut andre mutter

2^2 = Får betalt 4 kr for å skru inn/ut tredje mutter osv.

Er dette en god deal? Mutter nr 16: 2^{15} penger for.

$$2^{15} = 32768$$

Tar $2^{15} + 2^{14} + 2^{13} + \dots + 2^1 + 2^0 = 65535$ kr.

Alt av prosentvis vekst er ~~potens~~ eksponensialfunksjoner.

Minner om noen potensregler:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$$

$$a^x / a^y = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad 3^{3x-5} = \frac{3^{3x}}{3^5} = \frac{(3^3)^x}{3^5} = \frac{27^x}{243}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x b^x \qquad 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \frac{1^x}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\left(a/b\right)^x = a^x / b^x \qquad \| \qquad 3^{-1x} = (3^{-1})^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

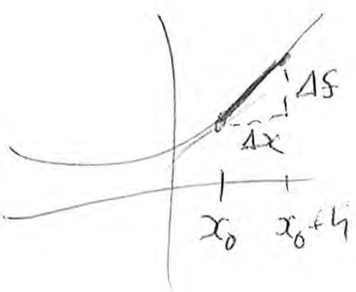
Husk også at

$$a^0 = \underline{1}.$$

Hva er den <u>deriverte</u> til funksjonen a^x?

Husk at definisjon av derivert til $f(x)$ er

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Eks: $f(x) = 2^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2^x \cdot 2^h - 2^x}{h} = 2^x \cdot \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}}$$

k

$$(2^x)' = k_2 \cdot 2^x$$

For 2 er konstanten ca 0.6931.

Eks: $f(x) = 3^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3^x 3^h - 3^x}{h} = 3^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h}$$

$$(3^x)' = k_3 \cdot 3^x \qquad k_3 \approx 1.0986.$$

Generelt er $(a^x)' = k_a \cdot a^x$

hvor $k_a = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Eks: $(2.5^x)' = k_{2.5} \cdot 2.5^x \qquad k_{2.5} = \lim_{h\to 0} \frac{2.5^h - 1}{h}$

≈ 0.9163

Hadde det ikke vært kult om det fantes et tall som er slik at

$$(a^x)' = a^x$$ Da må vi ha at $k_a = 1$.

Finnes det et tall (antagelig mellom 2,5 og 3) slik at dette stemmer?

$$k_a \approx \frac{a^{0.0000001} - 1}{0.0000001}$$, plott denne.

Ser ut som det finnes et tall på ca 2.72 hvor vi får dette.

Dette tallet er spesielt, og får et helt eget navn, e,

~~Eul~~ Euler-tallet e.

Funksjonen e^x dukker derfor ofte opp i matematikk.

$$e \approx 2.7182818 2846\ldots$$

Spesiell funksjon i derivasjon, $(e^x)' = e^x$

Gir oss da også: $$\int e^x dx = e^x + C$$

I mange programmeringsspråk skrive exp(x), for man e^x.

Vi er interessert i funksjonen e^x, ikke så interessert i tallet e.

Eksempel integrasjonsoppgave:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$$

$$\int \boxed{x} e^{x^2} \boxed{dx} \qquad \Bigg| \qquad \int x e^x dx$$

Variabelskifte

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2} = \boxed{x\,dx}$

$$\int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' = \frac{1}{2}(e^u)' \cdot u'$$

$u = x^2$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} e^u \cdot \cancel{2}x = e^{x^2} \cdot x$$

Delvis integrasjon.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

$u = x \qquad v = e^x$

$u' = \underline{1} \qquad v' = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$u = x^2 \qquad v = e^x$

$u' = 2x \qquad v' = e^x$

Hva med

$$\int e^{x^2}\,dx \;?$$ Har $\int x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Kan ikke løses.

Recap: Funksjoner av typen a^x kalles eksponentialfunksjoner

En spesiell eksponentialfunksjon er e^x, hvor

$$e \approx 2.718281828 46 \ldots$$

Spesiell fordi $(e^x)' = e^x$ (og da $\int e^x dx = e^x + C$)

Disse vokser prosentvis, og veldig fort.

For andre eksponensialfunksjoner, er deriverte gitt ved

$(a^x)' = k_a \cdot a^x$, hvor k_a er en konstant bestemt av a.

Kan finne k_a ved tilnærming, $k_a = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$.

Skal lære formel for k_a senere, etter vi har lært logaritmer.

Smakebit på logaritmer:

Vil løse likninger av typen $2^x = 5$.

Hvordan gjør vi det? Svaret må være mellom 2 og 3...