12. Vektorer

Her har skal vi jobbe med vektorer i planet. Vektorer er nyttige til å beskrive avstander og retning til f. eks en bevegelse. I fysikk er det gjerne sentralt å fortelle om hvilken retning kraften virker. Derfor blir beregninger med vektorer nyttige i fysikk og en del tekniske fag.

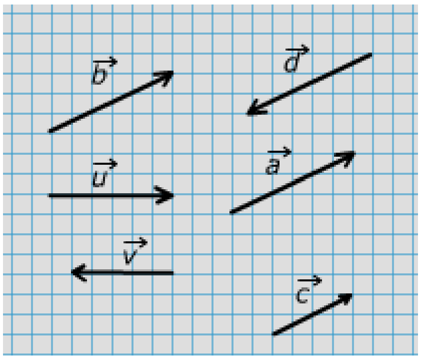
12.1. Vektorer og skalar

Vi skiller mellom størrelser med eller uten retning:

Skalar: størrelser uten retning; tid lengde, areal, temperatur osv.

Vektorer: størrelser med retning; kraftvektor, fartsvektor osv.

Eksempler:



To vektorer er like dersom vektorene har samme retning og er like lange.

Eksempel $\vec{a} = \vec{b}$ (merk vektorene er like selv om de ikke er tegnet på samme plass)

To vektorer er parallelle dersom vektorene har samme eller motsatt retning.

Eksempel: Se $\vec{u}$ og $\vec{v}$, på bildet over.

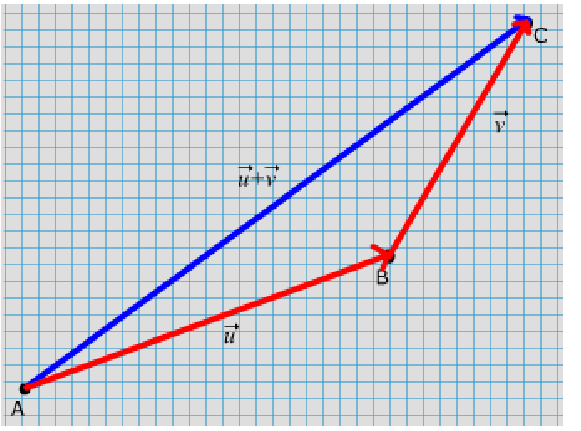
Vi kan også skrive $\overrightarrow{AB}$, dersom vi mener vektoren som går fra punkt A til punkt B.

En vektor med lengde 0, kaller vi *nullvektor:* $\vec{0}$.

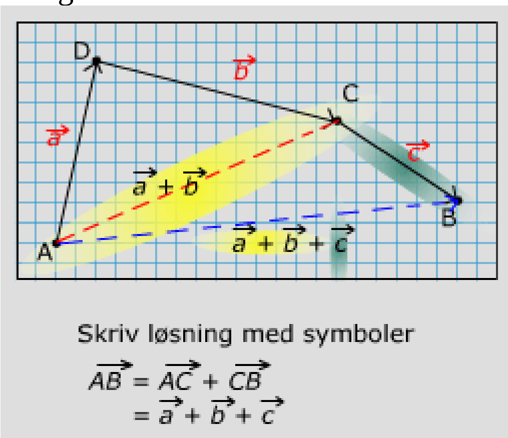
12.2. Sum og differanse av vektorer

Addisjon:

Når vi skal addere to vektorer $\vec{u} + \vec{v}$, parallell forskyver vi den siste vektoren; $\vec{v}$ slik at den starter der $\vec{u}$ slutter. Summen er da vektoren som går fra startpunktet til $\vec{u}$, og slutter i endepunktet til $\vec{v}$. (blå vektor på figuren)

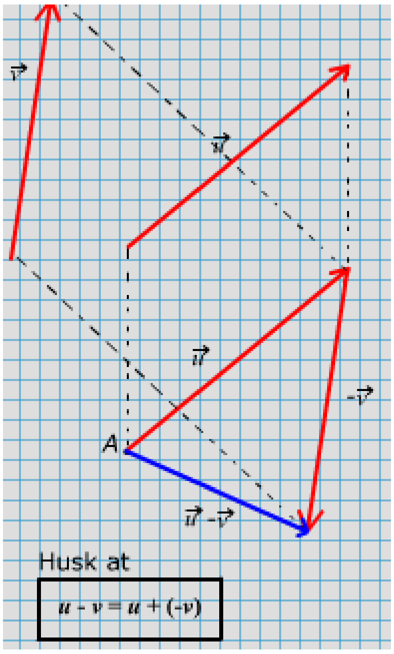


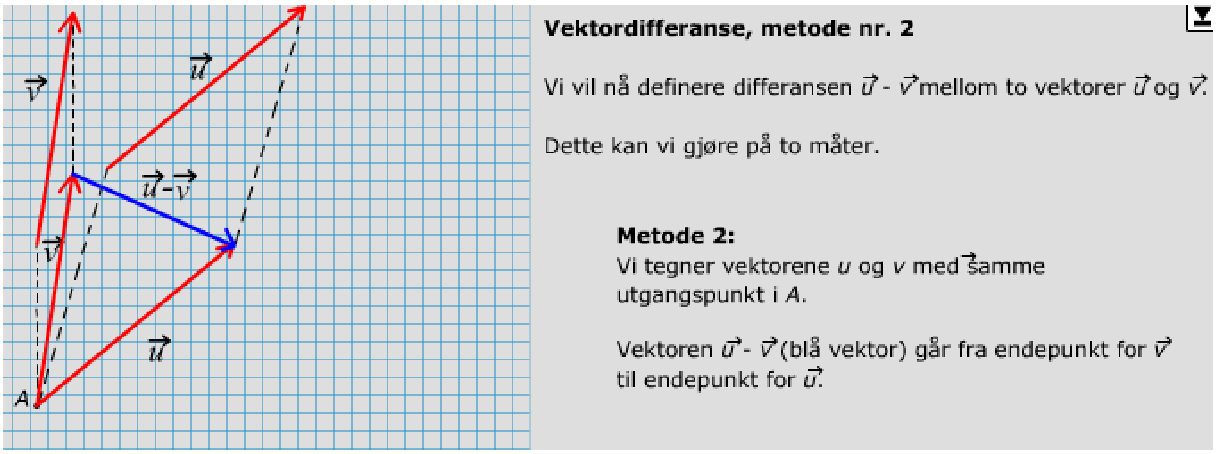
Addisjon av flere vektorer, gjør vi tilsvarende ved å knytte neste vektor i endepunktet til den forrige.



Vektor differanse

Subtraksjon: Er det samme som addisjon med $-\vec{v}$. Dvs vektoren som er like lang som $\vec{v}$, men som har motsatt retning.





Produkt av tall og vektor

Skrivemåte for lengden til en vektor: $\left|\vec{a}\right|$ - absoluttverdien til vektoren

Merk $\left|\vec{a}\right| = \left|-\vec{a}\right|$

Multiplikasjon med skalar

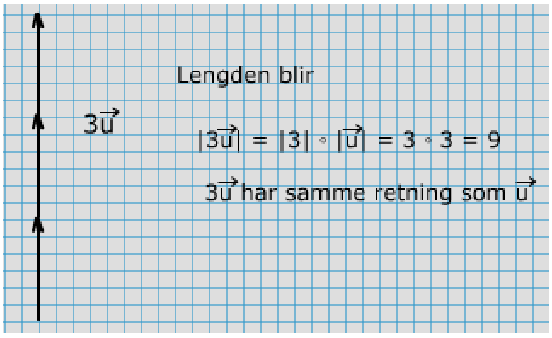
$t \cdot \vec{a}$ $\quad \left|t \cdot \vec{a}\right| = |t| \cdot \left|\vec{a}\right|$

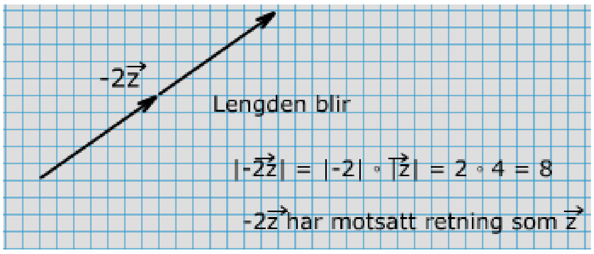
har samme retning som $\vec{a}$, $t > 0$

har motsatt retning av $\vec{a}$, $t < 0$

$t\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Eksempler:





Regneregler for vektorer

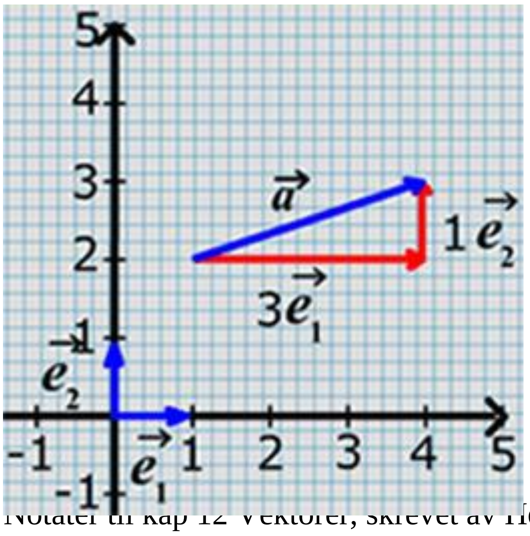
$$t\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$$

$$s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} = (s + t) \cdot \vec{a}$$

$$s\left(t \cdot \vec{a}\right) = (s \cdot t)\vec{a}$$

Eksempel: $\quad 3\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = 6\vec{a} + 3\vec{b}$

12.3. Vektorer på koordinatform



Enhetsvektorer i planet skriver vi gjerne som

$\vec{e}_1$ $\quad x-$retning $\quad \vec{e}_2$ $\quad y-$retning

I andre læreverk finner dere også enhetsvektorer skrevet med x og y som indeks, men betydningen er den samme. Kjært barn – mange navn.

Vi skriver $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 = [3,1]$

Skrivemåten $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ kaller vi <u>komponentform</u>

Skrivemåten $\vec{a} = [3,1]$ kaller vi vektor på koordinatform. Den er kort og grei, når vi vet hva som menes.

NB Det er viktig å bruke rett parentes.
Skriver vi $(3,1)$ betyr det ett punkt, mens skriver vi $[3,1]$ betyr dette en vektor.

Når du skal tegne en vektor i koordinatsystemet, velger du fritt startpunktet. (husk vektorer kan flyttes – uten å endre verdi). Men tegner du vektoren med start i origo vil endepunktet til vektoren komme i punktet med samme koordinater.
Tegner du vektoren $[3,1]$ med start i origo vil endepunktet være $(3,1)$.

Merk at to vektorer er like, dersom <u>både</u> *x*- koordinat og *y*- koordinat er like!

12.4. Regning med vektorkoordinater

<u>Regneregler:</u>

$$\vec{a}+\vec{b} = \left[a_x, a_y\right] + \left[b_x, b_y\right] = \left[a_x + b_x, a_y + b_y\right]$$
$$\vec{a}-\vec{b} = \left[a_x, a_y\right] - \left[b_x, b_y\right] = \left[a_x - b_x, a_y - b_y\right]$$
$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \left[a_x, a_y\right] = \left[ta_x, ta_y\right]$$

<u>Eksempler:</u>

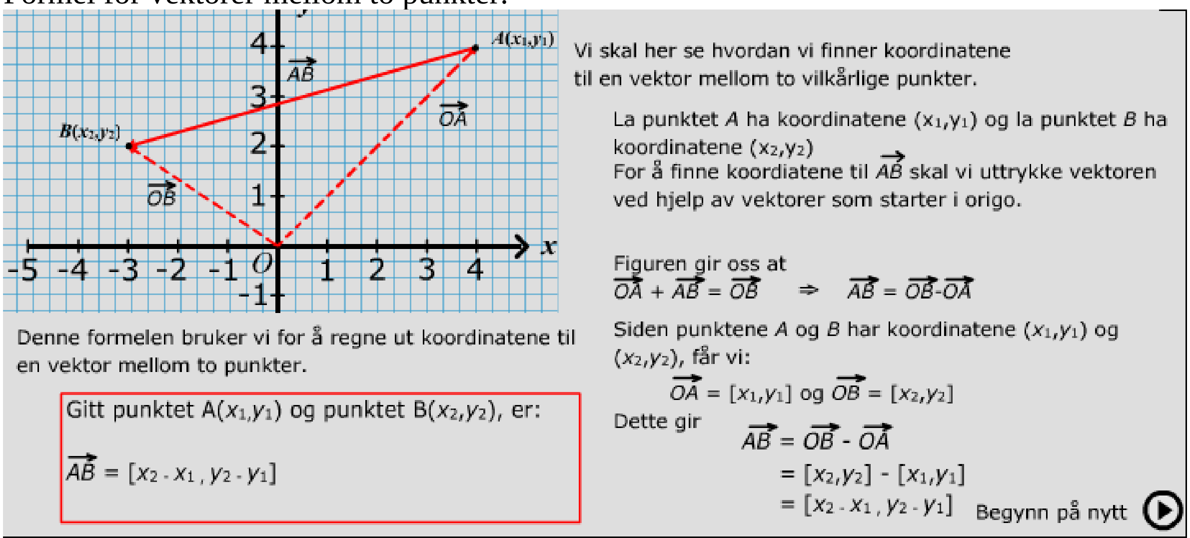
$$\vec{a} = [1,-3] \qquad \vec{b} = [-2,3]$$
$$\vec{a}+\vec{b} = [1,-3]+[-2,3] = [-1,0]$$
$$\vec{a}-b = [1,-3]-[-2,3] == [3,-6]$$
$$2\cdot\vec{a} = 2\cdot[1,-3] = [2,-6]$$

Sjekk gjerne selv ved å tegne figur.

12.5. Vektoren mellom to punkter

Vektoren fra origo ut til et punkt $P(x, y)$ er gitt ved $\overrightarrow{OP} = [x, y]$

Rekkefølgen på bokstavene sier noe om retning, starter i Origo slutter i P. Tegn pil i enden!
Formel for vektorer mellom to punkter:

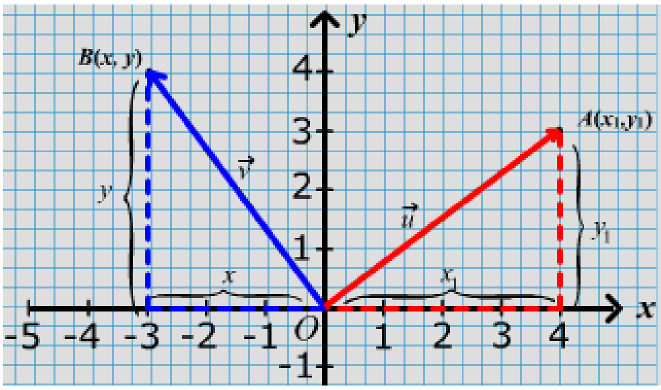


Eksempel: Finn koordinatene til vektoren mellom punktene $P(1,2)$ $\qquad Q(-1,3)$

$\overrightarrow{PQ} = [-1-1, 3-2] = [-2,1]$ Sjekk gjerne på figur ved å telle!

12.6. Lengde og avstand

Lengde – absoluttverdi til en vektor: $|\vec{v}|$ Husk Pytagoras setning …



$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ for $\vec{v} = [x, y]$

Eksempler:

$\vec{u} = [3, 2]$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$

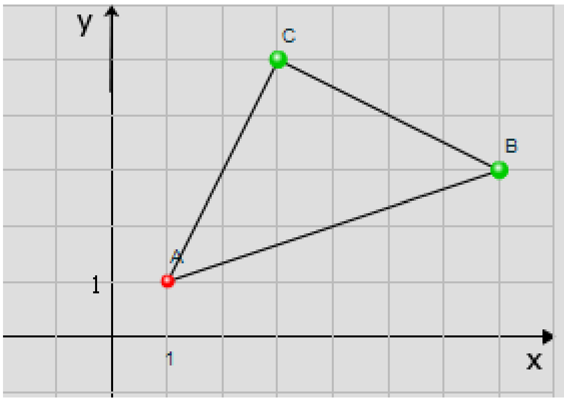
$\vec{v} = [-3, 7]$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \underline{\underline{\sqrt{58}}}$

$\vec{w} = [a, 3a]$ $\quad |\vec{w}| = \sqrt{a^2 + 9a^2} = \sqrt{10a^2} = \underline{\underline{|a|\sqrt{10}}}$

Pass på at "tall" vi "tar ut av rottegnet" må være positivt.

Eksempel: Bestem vektorer mellom hjørnene og lengder i en trekant, gitt ved.

Regner her uten benevning, men pass på at alle lengder har samme benevning – bestemt av koordinatsystemet.



A(1,1) , B(7,3) og C(3,5)

a) Bestem koordinatene til $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ og $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = [7-1, 3-1] = [6, 2]$

$\overrightarrow{BC} = [3-7, 5-3] = [-4, 2]$

$\overrightarrow{CA} = [1-3, 1-5] = [-2, -4]$

(Test $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = [6, 2] + [-4, 2] + [-2, -4] = [0, 0]$ √

Stemmer! Vi er tilbake til A.)

b) Lengder

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

12.7. Parallelle vektorer

Parallelle vektorer $\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \text{dersom} \quad \text{det finnes en } t \neq 0 \text{ slik at} \quad \vec{u} = t \cdot \vec{v}}$

<u>Eksempel</u>

La $\vec{u} = [4,-2]$ $\quad \vec{v} = [-6,3]$, er de parallelle?

$\vec{u} = t \cdot \vec{v}$

$[4,-2] = t[-6,3]$ $\quad$ må stemme både i x- og y-retning

$4 = -6t \quad \wedge \quad -2 = 3t$

$t = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad t = -\frac{2}{3}$ $\quad$ *dvs* $\quad$ *parallelle*

Vi kan bruke idéen parallelle vektorer for å bestemme om tre punkter ligger på linje.

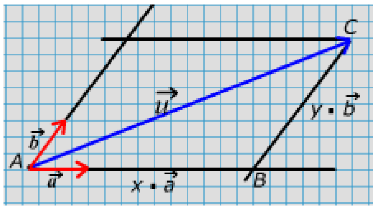
Oppg. Finn ut om punktene $A(-1,-1)$, $B(1,3)$ *og* $C(4,9)$ ligger på en linje.
Dersom punktene ligger på en linje, må vektoren fra A til B og vektoren fra A til C være parallell. <u>Tegn gjerne en figur på kladd for å se ide bak løsningen.</u>

$\overrightarrow{AB} = [1-(-1), 3-(-1)] = [2,4]$

$\overrightarrow{AC} = [4-(-1), 9-(-1)] = [5,10]$

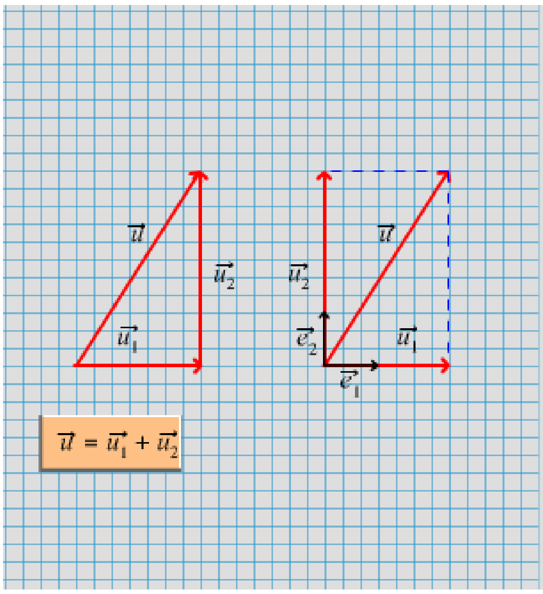
Ser at $\frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ $\quad$ Med andre ord kan vi si at punktene ligger på samme linje.

12.8. Parallelle vektorer uten koordinater Dekomponering



Med dekomponering, mener vi å skrive en vektor som en sum av to <u>ikke</u> parallelle vektorer. Se figur.

Det er alltid mulig å dekomponere på en entydig måte dersom de to vektorene ikke er parallelle.



Dekomponering, horisontal og vertikal komponent

Ofte er det hensiktsmessig å dekomponere en vektor i en horisontal komponent og en vertikal komponent (se figur).

$\vec{u}_1$ er horisontal komponent til $\vec{u}$.
$\vec{u}_2$ er vertikal komponent til $\vec{u}$.
Fra figuren ser vi også at $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Komponentene i horisontal og vertikal retning uttrykker vi gjerne ved hjelp av en enhetsvektor i horisontal retning $\vec{e}_1$, og en enhetsvektor i vertikal retning $\vec{e}_2$ slik figuren viser.

Vi kan da skrive;

Siden $\vec{u}$ er parallell med $\vec{e}_1$, fins det et tall x slik at $\vec{u}_1 = x \cdot \vec{e}_1$, og siden $\vec{u}_2$ er parallell med $\vec{e}_2$, fins det et tall y slik at $\vec{u}_2 = y \cdot \vec{e}_2$
Generelt for en fritt valgt vektor $\vec{u}$ fins det et tall x og y slik at $\boxed{\vec{u} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2}$

$\boxed{\text{Parallelle vektorer:} \quad \vec{u} \parallel \vec{v} \quad \text{dersom} \quad \vec{u} = t \cdot \vec{v}}$

Parallelle vektorer har samme (eller motsatt) retning, men kan gjerne ha ulik lengde.

Eksempel:

La $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ være to vektorer som ikke er parallelle.

Er $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ $\quad \vec{v} = -6\vec{a} + 9\vec{b}$ parallelle?

$$t\vec{u} = \vec{v}$$

$$t\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) = -6\vec{a} + 9\vec{b}$$

$$2t\vec{a} - 3t\vec{b} = -6\vec{a} + 9\vec{b}$$ Vektorene er like om

$$2t = -6 \quad \wedge \quad -3t = 9$$

$$t = -3 \quad \wedge \quad t = \frac{9}{-3} = -3$$

Vi ser at $-3 \cdot \vec{u} = \vec{v}$ $\quad \vec{u} \parallel \vec{v}$

Finner vi ikke en felles t – verdi, er vektorene ikke parallelle.