Repetisjonsuke

Fra sommeren: <u>Polynomdivisjon</u>.

Oppgaven er:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - \overset{3}{\cancel{12}} : x - 3 = \_\_\_\_$$

<u>Idé:</u>

$$(x-3)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 6x^2 + 10x - \overset{3}{\cancel{12}}$$

$$x^3 - \boxed{3x^2}$$

$$-3x^2 + 9x$$

$$+ x - 3$$

$$(x-3)(x^2 + \square) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$$

$$x^3 - 3x^2 + (x-3)(\quad) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$$

$$(x-3)(-3x + \square) = -3x^2 + 10x - 3$$

$$-3x^2 + 9x + (x-3)(\quad) = -3x^2 + 10x - 3$$

$$(x-3)(1) = x - 3$$

Måten vi gjør polynomdivisjon!

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 : x - 3 = x^2 - 3x + 1$$

$$-(x^3 - 3x^2)$$

$$-3x^2 + 10x - 3$$

$$-(-3x^2 + 9x)$$

$$x - 3$$

$$-(x - 3)$$

$$0$$

Ruffinis metode! Kun når vi deler på $x - a$

	1	-6	10	-3
3		3	-9	3
	1	-3	1	0

Svaret e

$x^2 - 3x + 1$

Ruffinis, nytt eksempel:

$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 : x - 2 = x^3 - 3x^2 + 0x + 1$

$= x^3 - 3x^2 + 1$

	1	-5	6	1	-2
2		2	-6	0	2
	1	-3	0	1	0

Regn nå ut $x^3 - 3x^2 + 1 : x + 2 = x^2 - 5x + 10 - \frac{19}{(x+2)}$

	1	-3	0	1
-2		-2	10	-20
	1	-5	10	-19

Mer avansert Ruffinis:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 3 : x^2 - 3x + 1 = x - 3$$

	1	-6	10	-3
-1			-1	3
3		3	-9	
	1	-3	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

Funky måte å løse andregradspolynom:

$$\boxed{1}x^2 - \boxed{7}x + \boxed{12} = 0$$

Vil finne to tall a og b slik at

• $a \cdot b = 12$	$1 \cdot 12$	$2 \cdot 6$	$\boxed{3 \cdot 4}$
• $a + b = 7$	13	8	$\boxed{7}$

Løsning: $x = 3$ og $x = 4$.

Tilsvarende regel for tredjegradspolynom:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Vil finne <u>tre tall</u> x_1, x_2, x_3 slik at

- $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c$ $\longleftarrow$ Bruker ofte kun denne til å gjette på løsningen.
- $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = +b$
- $x_1 + x_2 + x_3 = -a$

Eks:

$$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0.$$

Må finne tre tall, x_1, x_2, x_3 slik at:

- $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 15$
- $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = -13$
- $x_1 + x_2 + x_3 = -3$

Kan være: $\cancel{1 \cdot 1 \cdot 15}$, $\cancel{(-1)(-1) \cdot 15}$, $\cancel{(-1) \cdot 1 \cdot (-15)}$ eller $\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5}$, $\cancel{(-1) \cdot (-3) \cdot 5}$, $\boxed{(-1) \cdot 3 \cdot (-5)}$ ✓, $\cancel{1 \cdot (-3) \cdot (-5)}$

$$(-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-5) = -3 - 15 + 5 = -13$$

Vanligvis i stedet: Konstantleddet er -15, anta at minst én løsning deler -15:

$$1,\ -1,\ 3,\ -3,\ 5,\ -5,\ 15,\ -15.$$

$p(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$:

$x = 1 \longrightarrow p(x) < 0$ $\qquad$ $x = -1 :\ p(x) = 0$

Kunne sjekke $x = 3$ og $x = -5$ også gir 0.

Kan også regne ut $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 : x + 1 = x^2 + 2x - 15$

$$\swarrow$$

$x = 3 \quad x = -5.$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -13 & -15 \\ -1 & & -1 & -2 & 15 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array}$$

Parametrisering av kurve

La både x-koordinat og y-koordinat ~~være~~ være bestemt av en parameter:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$l: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Eks: $r(t) = (3t^3 - 5t^2 + 7t - 1,\ t^2 + 2t - 5)$

Verd å nevne: Finne fart til en parametrisert kurve er enkelt.

$$r'(t) = (9t^2 - 10t + 7,\ 2t + 2)$$

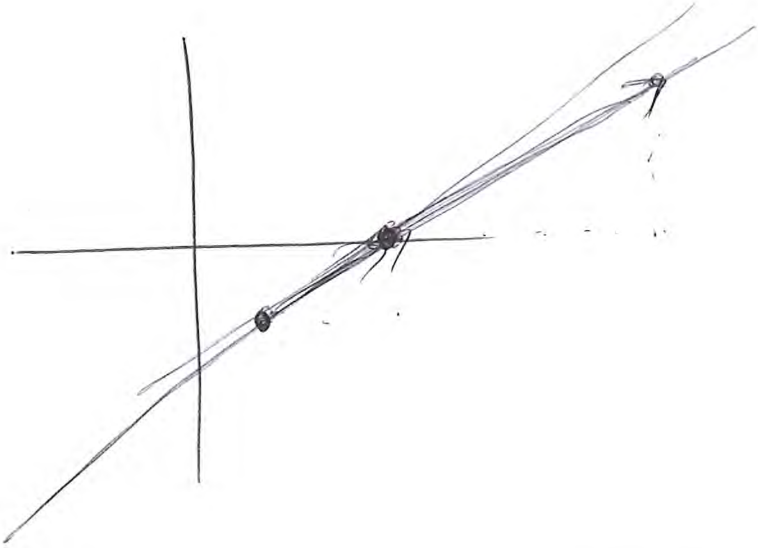
Vi skal kun parametrisere rette linjer i dette kurset.

$$l: \begin{cases} x = \boxed{a_1} t + \boxed{b_1} \\ y = \boxed{a_2} t + \boxed{b_2} \end{cases}$$

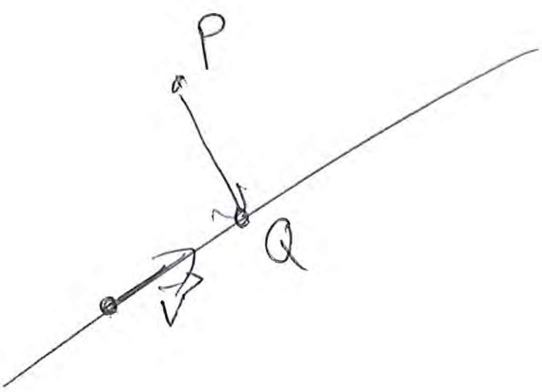
Idé: (b_1, b_2) er et punkt linja går gjennom. $[a_1, a_2]$ er retninga linja går i.

$$l: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2t - 0 \end{cases}$$

Samme linja skrevet opp på to måter.



Punkt til linje:



Finn avstand fra punkt til linje.

ved hjelp av

Beskriv Q vha parameterfremstilling.

null

Finn Q slik at $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$.

Alternativ metode fra boka:

Fremdeles beskriv Q vha parameterfremstilling.
Regn ut formel for $|\vec{PQ}|^2$. Deriver denne, finn bunnpunkt.

Eks:

Linje: $l: \begin{cases} x = 3 + \boxed{2}t \\ y = 1 + \boxed{1}t \end{cases}$ Punkt $P = (3, 6)$.

Finn avstand fra punkt til linje.

$Q(t) = (3 + 2t, 1 + t)$ $\vec{v} = [2, 1]$

$\vec{PQ} = [2t, t - 5]$

Vil finne en t slik at $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

$$[2t, t-5] \cdot [2, 1] = 0$$

$$4t + t - 5 = 0$$

$$5t = 5$$

$$t = \underline{1}.$$

$\vec{PQ}$ er minst når $t = 1$, $\vec{PQ} = [2, -4]$

$|\vec{PQ}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$.

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(2t)^2 + (t-5)^2} = \sqrt{5t^2 - 10t + 25}$$

Triks: Finn når $5t^2 - 10t + 25$ er minst.

Deriverte: $10t - 10$,   Derivert lik 0: $10t - 10 = 0$
$t = 1$

Minste verdi $\sqrt{5 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 25} = \underline{\sqrt{20}}$