1. Tall og variabler

I dette kapittelet møter du emner som har stått på pensum tidligere. Men regneferdighet er så viktig at vi tar en (kjapp) gjennomgang her også. Bruk gjerne litt tid på oppgavene i slutten av hvert underkapittel (og eventuelt også oppgaver fra cosinus.)

1.1. Tall

Mengder og intervaller

Tallmengder du bør kjenne til navnet på:
$\mathbb{N}$ – Naturlige tall, eksempler er 1,2 og 3 …
$\mathbb{Z}$ – hele tall; både positive og negative, samt 0, eksempler -2, -2,0,1,2 …
$\mathbb{Q}$ - Rasjonale tall; hele tall og tall som kan skrives som en brøk

Eksempel 12,5 er rasjonalt siden $12,5=\frac{125}{10}$

$\mathbb{R}$ – Reelle tall; det vil si alle tallene på tallinjen. Inkl irrasjonale tall som π, $\sqrt{2}$ osv.

Vi skriver $2\in\mathbb{N}$ 2 er element i $\mathbb{N}$, men $\frac{1}{2}$ er ikke element i $\mathbb{N}$, og vi skriver $\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

Mengdene over har vi navn på, mens andre mengder ønsker vi å liste opp. Da skriver vi $Partall=\{2,4,6,8,10,...\}$

Intervaller, brukes når vi ønsker å angi deler av tallinjen, det kan vi gjøre slik:

Lukket intervall: $[2,10]$ her er tallene fra og med 2 til og med 10 med i intervallet.

Åpent intervall: $\langle 2,10\rangle$ består av samme tall som over, men endepunktene 2 og 10 er ikke med i mengden.

Halvåpent intervall: $\langle 2,10]$ her er det ene endepunktet med

Absoluttverdi til et tall. $$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

Eksempler: $|2|=2$ $\quad|-2|=2$

Merk vi kan si at absoluttverdi «fjerner» minusfortegn, eller vi kan se på absoluttverdi av et tall som avstanden (alltid positiv) tallet har til 0 på tallinjen.

Fortegnsregler og regnerekkefølge

Fortegnsregler for multiplikasjon **(to minus gir +)**

Eksempler:

$a)\quad 2\cdot 3=6$

$b)\quad 2\cdot(-4)=-8$

$c)\quad -2\cdot(-2)=4$

$d)\quad -2\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

Her kan det være lurt å telle minustegn, partall gir + og odde antall vil gi minus.

Regnerekkefølge (ikke absolutt, men rådgivende)

1. Regn først ut parentesuttrykkene ( )
2. Regn så ut potensene 2^3
3. Utfør så multiplikasjon og divisjon · eller :
4. Utfør så addisjon og subtraksjonene + eller –

Eksempel

$$-1\cdot(4-1)-(10+2):3+2\cdot 3^2$$

$= -1\cdot 3 - 12:3+2\cdot 3^2$ regner ut regnestykkene inne i parentesene

$= -1\cdot 3-12:3+2\cdot 9$ regner så ut potenser

$= -3-4+18$ regner ut gange og dele (multiplikasjon eller divisjon)

$= -7+18=\underline{\underline{11}}$

Tips:

Det er fint å regne i hodet, men ikke regn fortere enn at du har kontroll. Du trenger ikke skrive mer enn du trenger for å løse oppgaven, men løsningen skal vise hvordan du har gått fram.

Kalkulator

Merk deg hvordan du regner med fortegn, bruk parenteser om du er i tvil. Merk at kalkulatoren gjerne bruker ^ for potenser 2 ^3 leser vi som 2 opphøyd i 3 (=8).

1.2. Brøkregning

Utvide en brøk:

Vi utvider ved å multiplisere (gange) teller og nevner med samme tall $\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{15}{20}}}$

Forkorte en brøk:

Vi forkorter, ved å dividere (dele) teller og nevner med samme tall $\frac{12}{15}=\frac{12:3}{15:3}=\underline{\underline{\frac{4}{5}}}$

Husk: Brøker i svar skal forkortes mest mulig.

Addisjon (pluss) **(og tilsvarende for subtraksjon** (minus)**):**

$2+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ Må ha felles nevner (fn=6)

$=\frac{2\cdot 6}{1\cdot 6}+\frac{1}{6}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}$

$=\frac{12+1+2}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$ Merk, forkorter svaret, men skriv ikke som blandet tall!

Blandet tall, bør unngås (Kan lett misforstås pga skrivemåten som vi bruker i algebra, regn om til brøk dersom de står slike tall i en oppgave – ellers er det lurt å «glemme» slike «ungdomsskole kunster» for å unngå feil.)

$$Omregning:\quad 2\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3}$$

Multiplikasjon (Vi multipliserer teller med teller og nevner med nevner)

To brøker: $\frac{14}{15}\cdot\frac{6}{49}=\frac{\cancel{14}^{2}\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{49}^{7}}=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 7}=\underline{\underline{\frac{4}{35}}}$ NB Smart å forkorte underveis

Helt tall og brøk: $3\cdot\frac{17}{18}=\frac{3\cdot 17}{18}=\frac{\cancel{3}\cdot 17}{\cancel{18}^{6}}=\underline{\underline{\frac{17}{6}}}$

Divisjon (= multiplikasjon med den omvendte brøk):

$$\frac{3}{7}:\frac{5}{49}=\frac{3}{7}\cdot\frac{49}{5}=\frac{3\cdot\cancel{49}^{7}}{\cancel{7}\cdot 5}=\underline{\underline{\frac{21}{5}}}$$

også når du regner med bokstaver: $\frac{x^2}{4y}:\frac{3x}{2y^2}=\frac{x^2\cdot 2y^2}{4y\cdot 3x}=\frac{\cancel{x^2}\cdot\cancel{2}y^{\cancel{2}}}{\cancel{4}^{2}\cancel{y}\cdot 3\cancel{x}}=\frac{xy}{6}$

Bruddenbrøk

<u>Metode 1 (anbefalt)</u> utvider med fellesnevner til små-nevnerne her 5 og 15

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{15}}=\frac{\frac{6}{\cancel{5}}\cdot\cancel{15}^{3}}{\frac{4}{\cancel{15}}\cdot\cancel{15}}=\frac{\cancel{6}^{3}\cdot 3}{\cancel{4}^{2}}=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

<u>Metode 2</u> utnytter at brøkstrek er det samme som divisjon

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{15}}=\frac{6}{5}:\frac{4}{15}=\frac{\cancel{6}^{3}\cdot\cancel{15}^{3}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}^{2}}=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

1.3. Bokstavregning og parenteser

(Nb det er viktig å passe på fortegn og å multiplisere <u>alle</u> ledd)

a) $2(x+4)=\underline{\underline{2x+8}}$

b) $-3(2a-b)=\underline{\underline{-6a+3b}}$

Hovedregelen er at vi skriver ukjente i alfabetisk rekkefølge, men det gjøres iblant unntak for å unngå å starte med et minustegn. Vi kunne derfor like gjerne ha skrevet svaret slik: 3b – 6a.

c)

$2y^2-(y+3)(2y-1)$

$=2y^2-(2y^2-y+6y-3)$ multipliserer ledd for ledd

$=2y^2-2y^2-5y+3$ NB Pass på fortegn

$\underline{\underline{=-5y+3}}$

d)

$$2(t-5)\left(t+\frac{1}{2}\right)=(t-5)(2t+1)$$
$$=2t^2+t-10t-5$$
$$\underline{\underline{=2t^2-9t-5}}$$

Velger å multiplisere 2-tallet inn i den andre parentesen for å unngå brøk

1.4. Rasjonale uttrykk

Brøker der vi har bokstavuttrykk. Merk at de samme brøkreglene gjelder. Men vær mer forsiktig når du forkorter.. vi kommer innom dette mer utover i kurset.

1.5. Potenser (nyttig å kunne på fingrene)

En potens kan vi tenke på som gjentatt multiplikasjon $2^3=2\cdot 2\cdot 2$, men å basere regningen på dette blir tungvint / umulig etter hvert videre i studiet.

Potensregler: (sjekk i formelsamling du bruker)

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$
$$a^0\overset{def}{=}1$$
$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

Noen eksempler

$$2^3\cdot 2^2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5\,(=32)$$
$$\frac{3^5}{3^3}=\frac{3\cdot 3\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{3}}=3^2\,(=9)$$
$$1=\frac{8}{8}=\frac{2^3}{2^3}=2^{3-3}=2^0\quad\Rightarrow \text{logisk å definere}\quad a^0=1$$
$$a^{-4}=a^{0-4}=\frac{a^0}{a^4}=\frac{1}{a^4}$$

Eksempel på oppgave: Skriv enklest mulig:

$$\frac{5^2\cdot 5^4}{5^3}=\frac{5^{2+4}}{5^3}=\frac{5^6}{5^3}=5^{6-3}=\underline{\underline{5^3}}=125$$

1.6. Flere potensregler

Kan vise ved hjelp av potensreglene over at

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$
$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$$

Eksempler Skriv enklest mulig

$$a)\quad (2x)^3 = 2x\cdot 2x\cdot 2x = 2^3x^3 = 8x^3$$

$$b)\quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$ øv på å droppe mellomregningen

$$c)\quad \left(2^3\right)^3 = 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3 = 2^9$$

Og et større eksempel:

$$d)\quad \frac{2^3\cdot(2a)^{-2}}{2a^{-4}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}} = \frac{2^3\cdot a^4}{2\cdot a^1\cdot(2a)^2} = \frac{\cancel{2^3}\cdot a^4}{\cancel{2}\cdot a^1\cdot\cancel{2^2}a^2} = \frac{a^4}{a^3} = \underline{\underline{a}}$$

Tips Regn sammen deler av uttrykket, litt etter litt. Flere angrepsmåter kan fungere, men pass på at du bruker regnereglene.

1.7. Tall på standardform

$$\boxed{a = \pm k\cdot 10^n \qquad 1\le k<10 \qquad \text{der } n \text{ er et heltall}}$$

Eksempel:

Eksempler: Regn ut:

a) $\left(5\cdot 10^3\right)\cdot\left(3\cdot 10^{-6}\right) = 15\cdot 10^{3-6} = 15\cdot 10^{-3} = 1{,}5\cdot 10^{1-3} = \underline{\underline{1{,}5\cdot 10^{-2}}} = \underline{\underline{0{,}015}}$

Regner sammen «små-tallene» først, og deretter 10- er potensene.

b) $\dfrac{0{,}00045\cdot 0{,}0012}{27000000} = \dfrac{4{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3}}{2{,}7\cdot 10^7} = \dfrac{4{,}5\cdot 1{,}2}{2{,}7}\cdot 10^{-4-3-7} = \underline{\underline{2\cdot 10^{-14}}}$

Nb Du kan velge ulikt format på tallene som vises på kalkulatoren. **SCI** gir tall på standardform. Merk at du kan ha nytte av å lese bruksanvisning til din kalkulator eller bruk tipsene i læreboka. I starten må du gjerne investere litt innsats for å gjøre deg kjent med både muligheter og begrensningene kalkulatoren setter. Dette er DITT ansvar, du kan få hjelp underveis, men <u>ikke</u> på eksamen.

1.8. Kvadratrøtter og røtter av høyere orden

Kvadratrot	$\sqrt{x} = a$	dersom	$a \ge 0 \quad \wedge$	$a^2 = x$

Eksempel: $\sqrt{9} = 3$ $\qquad\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

Tredje rot	$\sqrt[3]{x} = a$	dersom	$a^3 = x$

Eksempel: $\sqrt[3]{-8} = -2$ siden $(-2)^3 = -8$

n-te rot defineres tilsvarende. Når n er partall, velges a positiv.

Forenkle rot uttrykk / sette størst mulig tall utenfor rottegnet.

Her er ideen å faktorisere og se etter kvadrattall (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 …)

i. $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

ii. $\sqrt{96} = \sqrt{2\cdot 48} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 24} = \sqrt{4\cdot 4\cdot 6} = \sqrt{4^2}\cdot\sqrt{6} = \underline{\underline{4\sqrt{6}}}$

1.9. Potenser med brøk som eksponent

Hvordan forstår vi $8^{\frac{1}{3}} = ?$ Hva gir regelen $\left(a^m\right)^n$ **?**

$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 8^1 = 8$ samtidig vet vi at

$\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$

$\Rightarrow 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

Regel: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dersom $a \geq 0$ og $n \in \mathbb{N}$ (naturlig tall)

Merk $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

Og mer generelt

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

Merk! I oppgaver der n-te røtter inngår er det gjerne enklest å gjøre om til potenser, før vi regner ut svaret.

Eksempler Skriv enklest mulig:

a) $\sqrt[3]{8^4} = 8^{\frac{4}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{3\cdot\frac{4}{3}} = 2^4 = \underline{\underline{16}}$

b) $32^{-\frac{2}{5}} = \left(2^5\right)^{-\frac{2}{5}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

c) $\frac{5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}}{5^{-\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2+1+3}{6}} = 5^{\frac{6}{6}} = \underline{\underline{5}}$

d) $\frac{\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{9+4-1}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = \underline{\underline{a^2}}$