Fakultet for informasjonsteknologi og elektroteknikk

Løsningsforslag til

Prøveeksamen i TFOR0101 Matematikk

(Arbeidskrav M7)

Eksamensdato: 15. desember 2020

Eksamenstid: 09:00-14:00

Tillatte hjelpemidler:

1) Alle hjelpemidler er tillatt.

2) Hjemmeeksamen er en individuell eksamen, og det er derfor ikke tillatt å gi hjelp til andre, og det er ikke tillatt å motta hjelp fra andre.

Språk: Norsk bokmål

Antall sider (uten forside): 3

Antall sider vedlegg: Ingen

Oppgave 1

a) Løs likningssettet.

$$y + 2 = 4x$$
$$y = 6x$$

Innsettingsmetoden:

$$6x + 2 = 4x$$

$$2x = -2$$

$$\underline{\underline{x = -1}}$$

Det gir for y:

$$\underline{\underline{y = -6.}}$$

b) Gitt elementene i mengde A:

$$A = \{\, (-2)\,, \frac{1}{3}\,, 2.27\,, e\,, \frac{4\pi}{3}\,, 666\,, 1.33 \cdot 10^4 \,\}$$

Hvilke av elementene i mengden A hører hjemme i mengdene $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\; og\; \mathbb{R}$?

Svar: $\{\ 666\,, 1.33 \cdot 10^4 \,\} \subset \mathbb{N}$

$\{\,(-2)\,, 666\,, 1.33 \cdot 10^4 \,\} \subset \mathbb{Z}$

$\left\{\,(-2)\,, \frac{1}{3}\,, 2.27\,, 666\,, 1.33 \cdot 10^4 \,\right\} \subset \mathbb{Q}$

$\left\{\,(-2)\,, \frac{1}{3}\,, 2.27\,, e\,, \frac{4\pi}{3}\,, 666\,, 1.33 \cdot 10^4 \,\right\} \subset \mathbb{R}$

c) Motstanden i en parallellkoblet strømkrets kan uttrykkes

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Finn et uttrykk for R i en slik krets. Og hva blir R når $R_1 = 3{,}0\Omega$ og $R_2 = 7{,}0\Omega$?

Svar:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

Flipper brøkene.

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Innsatt oppgitte verdier:

$$R = \frac{3\Omega \cdot 7\Omega}{3\Omega + 7\Omega} = 2{,}1\Omega$$

d) Løs likningen $(\sin x)^2 - \frac{9}{2}\sin x + 2 = 0$ når $x \in [0, 2\pi\rangle$

$$a = 1, b = -\frac{9}{2} \wedge c = 2$$

$$\sin x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-\frac{9}{2}) \pm \sqrt{(-\frac{9}{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = 4 \quad \textit{Den siste har ingen løsning.}$$

Kalkulator: $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

Alternativt: $x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$

e) Vis at $(x + 3)$ er en faktor i $f(x) = x^3 - 2x^2 - 21x - 18$, og bruk dette til å faktorisere funksjonen $f(x)$ så mye som mulig.

Polynomdivisjonen under går opp, noe som viser at $(x + 3)$ er faktor i uttrykket.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 21x - 18) : (x + 3) = x^2 - 5x - 6 \\
\underline{x^3 + 3x^2} \\
\quad -5x^2 - 21x \\
\quad \underline{-5x^2 - 15x} \\
\qquad\quad -6x - 18 \\
\qquad\quad \underline{-6x - 18} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Videre ser vi av polynomdivisjonen at

$$x^3 - 2x^2 - 21x - 18 = (x + 3)(x^2 - 5x - 6).$$

Andregradsfaktoren har nullpunkter $x = -1$ og $x = 6$, så

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6).$$

Totalt får vi

$$x^3 - 2x^2 - 21x - 18 = (x + 3)(x + 1)(x - 6).$$

f) Hvor vil tangenten til $f(x) = e^x \; i \; punktet \; (1, f(1))$ krysse 2.aksen? Begrunn svaret.

Tangent: $y - y_0 = a(x - x_0)$

der $x_0 = 1, y_0 = f(1) = e \; \wedge a = f'(1) =$ e (e^x er sin egen deriverte)

$y - e = e(x - 1)$

$y = ex$

Kryssing av 2. akse skjer når x = 0. Dvs y = 0.

Svar: <u>Tangenten vil krysse 2.aksen i origo.</u>

g) Bestem den deriverte til funksjonen

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{e^{2x-1}}\right)$$

Svar:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{e^{2x-1}}\right) = \ln x^3 - \ln e^{2x-1} = 3 \cdot \ln x - (2x - 1)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 = \frac{3}{x} - 2$$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x) = 3x^2 - 12$.

a) Vis at $f'(2) = 12$. Forklar hva dette tallet forteller om funksjonen $f(x)$ i punktet $(2, f(2))$.

Deriverer: $f'(x) = 6x$

Da er $f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$.

Dette tallet er stigningstallet til tangenten til f i punktet $(2, f(2))$.

b) Finn likningen til tangenten til f i punktet $(2, f(2))$.

Vi har stigningstallet $a = 12$ fra a). Videre er $f(2) = 3 \cdot 4 - 12 = 0$.

Ettpunktsformelen:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - 0 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 24$$

c) Drøft monotoniegenskapene til f og finn ekstremalpunktet til funksjonen.

$f(x)$ er en parabel (som alle andregradsfunksjoner) og $f''(x) > 0$, så f har <u>bunnpunkt</u> når $f'(x) = 0$, som er for $x = 0$.

Funksjonsverdien til bunnpunktet er $f(0) = -12$.

$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt: } (0, -12).}}$

Monotoniegenskaper: «Blid» parabel, så:

$\underline{\underline{f \text{ minker for } x < 0 \text{ og vokser for } x > 0.}}$

d) Finn definisjonsmengden og verdimengden til $f(x)$.

Definisjonsmengde:

Polynomer er definert for alle x.

$$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$$

Verdimengde:

For en parabel markerer bunnpunktet nederste mulige funksjonsverdi.

$$\underline{\underline{V_f = [-12, \rightarrow\rangle}}$$

e) Finn x-verdien(e) som tilfredsstiller likningen $f(x) = g(x)$ når $g(x) = 3x$.
Oppgi svaret eksakt.

Likningen blir

$$3x^2 - 12 = 3x$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

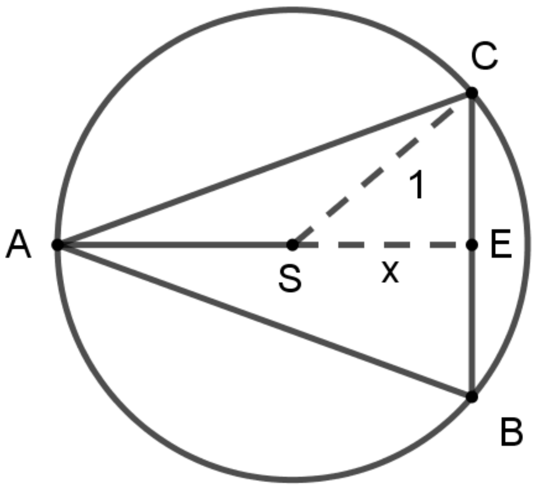
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

f) Kan $f(x)$ faktoriseres på formen $a(x - x_1)(x - x_2)$? Hvorfor / hvorfor ikke?
Hvis $f(x)$ kan faktoriseres, oppgi verdiene av a, x_1 og x_2.

$f(x)$ kan skrives om ved konjugatsetningen: $f(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$

Da kan vi skrive $\underline{\underline{a = 3, x_1 = 2 \text{ og } x_2 = -2.}}$

Oppgave 3

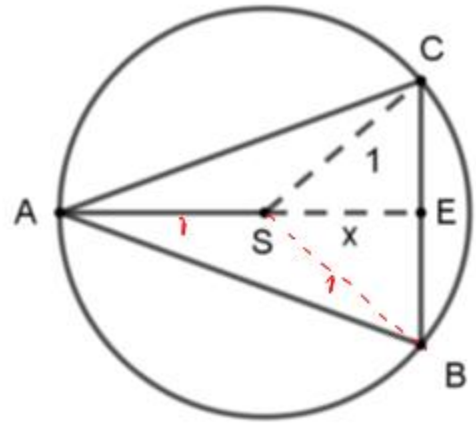


Ovenfor er det vist en trekant ABC, hvor sidene AB og AC er like lange. Alle hjørnene ligger på en sirkellinje. Sirkelen har sentrum i S og radius lik 1. Linjestykket AE faller vinkelrett ned på linjestykket BC. Vi lar $SE = x$.

a) Vis at arealet av trekanten ABC kan skrives som:

$$A_{\Delta ABC}(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$$

Svar:



$x = SE$

$r = SC = SA = SB = 1$

$AB = AC \Rightarrow \angle B = \angle C$

$A_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{BC \cdot AE}{2} = \frac{BC \cdot (1+x)}{2}$

Finner BC fra $\Delta BCS. SB = SC \ \Rightarrow BC = 2EC$

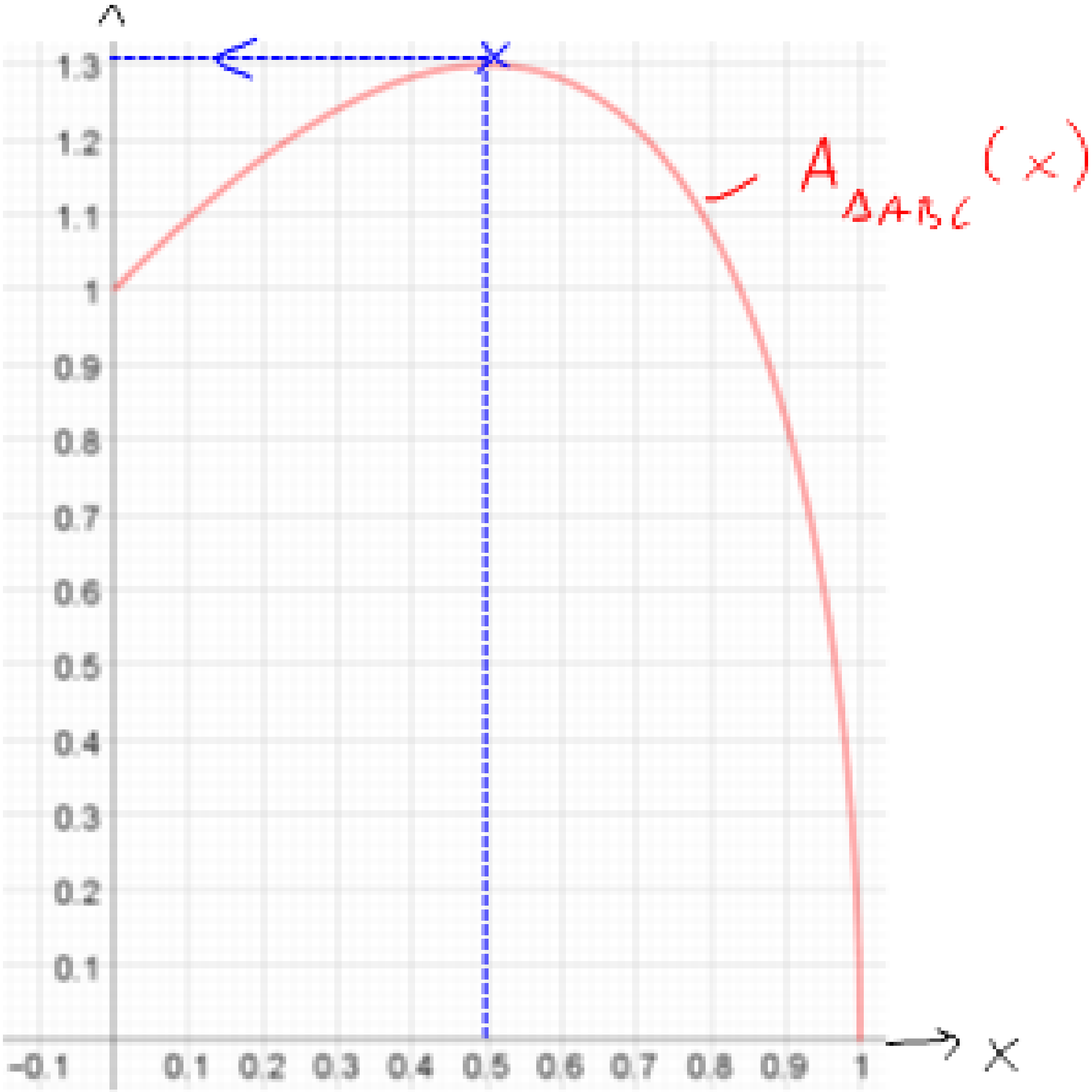
Betrakter ΔECS: Pythagoras gir $x^2 + EC^2 = 1$

$\Leftrightarrow EC^2 = 1 - x^2. EC > 0: EC = \sqrt{1 - x^2}$

$BC = 2EC = 2\sqrt{1 - x^2} \ \Rightarrow$

$A_{\Delta\mathrm{ABC}}(x) = \frac{BC \cdot (1+x)}{2} = \frac{2\sqrt{1-x^2} \cdot (1+x)}{2} = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$ *q.e.d.*

b) Tegn grafen til $A_{\Delta ABC}(x)$ og finn grafisk det maksimale arealet til trekant ABC.



Avlest fra grafen: Toppunkt for x = 0,5 ⇒ $A_{maks} = A_{\Delta \mathrm{ABC}}(0{,}5) = 1{,}3$

c) Vis ved regning at $x = \frac{1}{2}$ gir et stasjonært punkt for arealfunksjonen $A_{\Delta ABC}(x)$ og forklar hva slags stasjonært punkt vi har i dette tilfellet.

Svar:

Ekstremalpunkt når $A_{\Delta\text{ABC}}{}'(x) = 0$

$$A_{\Delta\text{ABC}}(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$

$$A_{\Delta\text{ABC}}{}'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + (1+x) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$$

$$A_{\Delta\text{ABC}}{}'(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - (1+x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-x^2)-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

A’ = 0 når teller = 0 og nevner $\neq$ 0

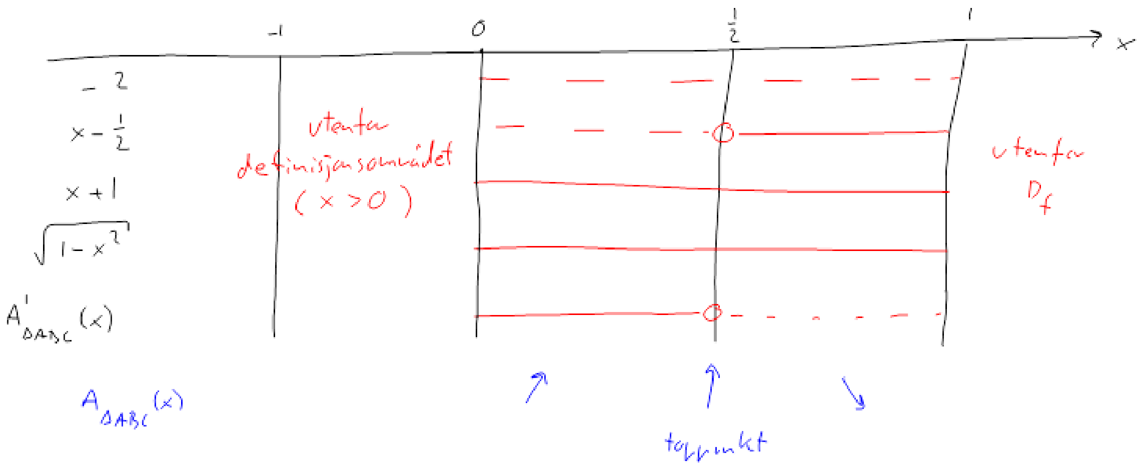
$$-2x^2 - x + 1 = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0{,}5 \;\vee\; x_2 = -1$$

Den siste må vi forkaste da dette gir nevner = 0.

Faktorisering av teller:

$$-2x^2 - x + 1 = (-2)(x - \frac{1}{2})(x+1)$$

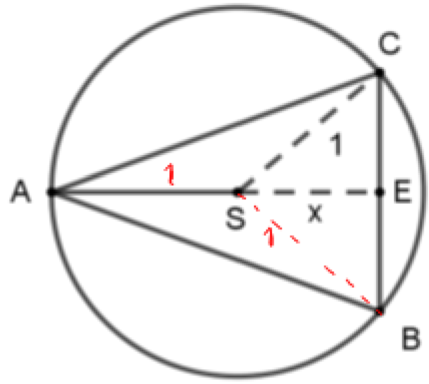
Fortegnsskjema:



$\Rightarrow x = 0{,}5$ gir det eneste stasjonære punktet.

d) Sett $x = \frac{1}{2}$ og finn ved regning sidene i trekanten ABC. Hva slags trekant har vi nå?

Fra a)



$$BC = 2\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$AE = 1 + x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$EC = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

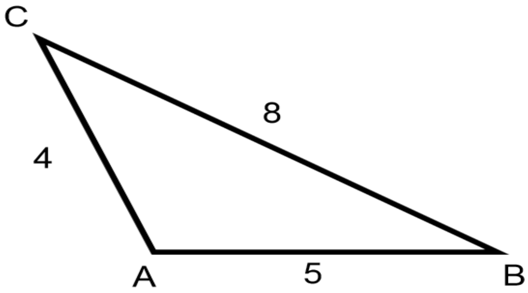
$$AC^2 = AE^2 + EC^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = AC = BC = \sqrt{3}$$

Alle sidekantene er like lange. Vi har en likesidet trekant.

Oppgave 4



a) Beregn alle vinklene i trekanten over.

$$A = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 5}\right) = \cos^{-1} -0{,}575 \approx \underline{\underline{125{,}1^\circ}}$$

De to neste vinklene må begge være mindre enn 90°:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\sin A\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{8}\sin 125{,}099^\circ\right) \approx \underline{\underline{24{,}1^\circ}}$$

$$C \approx 180^\circ - (125{,}1^\circ + 24{,}1^\circ) = \underline{\underline{30{,}8^\circ}}$$

b) Finn arealet til trekanten over.

Arealet = $\frac{1}{2}ab \sin C \approx \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin 30{,}8^\circ \approx \underline{\underline{8{,}2}}$

Oppgave 5

Gitt funksjonen $h(t) = 3 + \frac{t-5}{t+2}$.

a) Løs ulikheten $h(t) \geq 0$.

Ulikheten blir

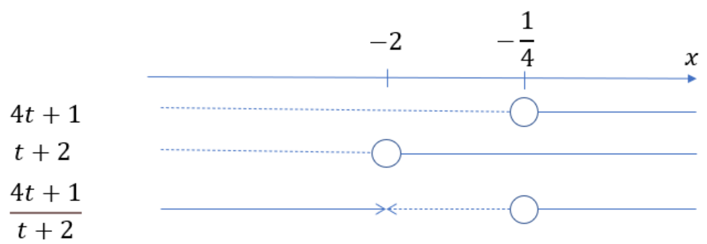
$$3 + \frac{t-5}{t+2} \geq 0$$

Vi kan ikke multiplisere med $t + 2$. Vi må i stedet samle på én brøkstrek og tegne fortegnsskjema:

$$\frac{3(t+2)}{t+2} + \frac{t-5}{t+2} \geq 0$$

$$\frac{4t+1}{t+2} \geq 0$$

Fortegnsskjema:



Vi ser at $\frac{4t+1}{t+2} \geq 0$ for $x < -2$ og $x \geq -\frac{1}{4}$.

b) Det er mulig å skrive $h(t) = A + \frac{B}{t+2}$. Hva er verdiene av konstantene A og B?

Polynomdivisjon av $\frac{t-5}{t+2}$:

$$\begin{array}{l} t - 5 \ : \ t + 2 = 1 - \dfrac{7}{t+2} \\ \underline{t + 2} \\ \quad -7 \end{array}$$

Da er $h(t) = 3 + 1 - \frac{7}{t+2} = 4 - \frac{7}{t+2}$, så $\underline{\underline{A = 4 \text{ og } B = -7.}}$

c) Finn asymptotene til $h(t)$.

Vertikal asymptote har vi der nevner er 0 og teller er ulik 0. Vi har funnet at $h(t) = \frac{4t+1}{t+2}$, så

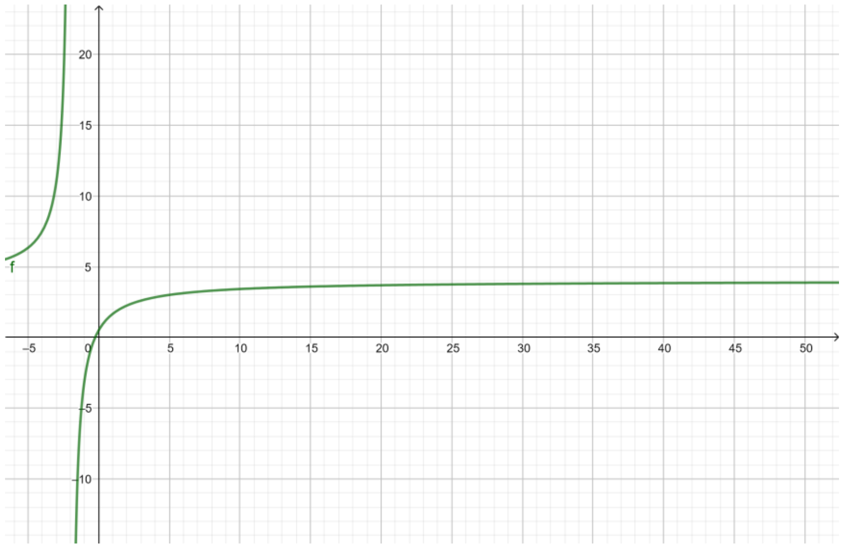
$t = -2$ er vertikal asymptote.

$h(t)$ har horisontal asymptote (ikke skrå), siden graden er lik i teller og nevner. Polynomdivisjonen ga oss at $h(t) = 4 - \frac{7}{t+2}$. Når $t \to \pm\infty$ vil derfor $h(t) \to 4$.

Altså: Horisontal asymptote $y = 4$.

I et eksperiment utvikles det hydrogengass gjennom en kjemisk likevektsreaksjon mellom to væsker. Antall mol utviklet hydrogen til sammen etter t sekunder er gitt ved funksjonen $h(t)$ for $t \geq 0$.

d) Bruk grafen til $h(t)$ til å forklare at reaksjonen går mot likevekt når $t \to \infty$, og at den teoretiske grensen er på 4 mol.



Vi har funnet ved regning at $h(t)$ har horisontal asymptote $y = 4$. Siden funksjonsverdien her uttrykker antall mol, ser vi av grafen at asymptoten gir en likevekt som reaksjonen går mot når $t \to \infty$, med en øvre teoretisk grense på 4 mol.

e) Hvor lang tid tar det før utviklet hydrogenmengde er 99 % av den teoretiske grensen?

Vi må løse likningen

$$h(t) = 0{,}99 \cdot 4$$

$$3 + \frac{t-5}{t+2} = 3{,}96$$

$$\frac{t-5}{t+2} = 0{,}96$$

$$t - 5 = 0{,}96(t+2)$$

$$t(1 - 0{,}96) = 0{,}96 \cdot 2 + 5$$

$$0{,}04t = 6{,}92$$

$$t = \frac{6{,}92}{0{,}04} = 173$$

Vi når 99% av teoretisk grense etter 173 sekunder, dvs. 2 minutter og 53 sekunder.

f) Hvor fort utvikles det hydrogengass idet eksperimentet starter ($t = 0$), målt i mol/sekund?

Vi må finne funksjonens vekstfart:

$$h'(t) = \frac{1 \cdot (t+2) - (t-5) \cdot 1}{(t+2)^2} = \frac{7}{(t+2)^2}$$

Idet eksperimentet starter utvikles hydrogen med en fart på $h'(0) = \frac{7}{4}$ mol/sekund.