Løsningsforslag   4. Innlevering (kap. 10 og 11) i Ma-017   2022

***Oppgave 1**   Løs likningene ved regning. Svar om mulig med eksakte svar.

a)

$$3\cos x + 2 = 0 \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\cos x = -\frac{2}{3}$$ tegn enhetssirkel, så ser du at det er løsninger i 2. og 3. kvadrant.

$$x_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \approx \underline{\underline{2,30}} \qquad x_2 = 2\pi - 2,30 \approx \underline{\underline{3,98}}$$

Merk at begge svar bør ha like mange desimaler.

b)

$$\sin 2x = -1 \qquad x \in [0, 2\pi]$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} + n2\pi \,\Big|\cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$$

$n = 0$ *gir* $\qquad x_1 = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$

$n = 1$ *gir* $\qquad x_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{7\pi}{4}}}$ øker vi n går vi utenfor def.

Pass på at metoden du velger gir deg begge svarene.

c) $\cos x + \sin x = 0 \quad x \in [0, 3\pi]$

$$\cos x + \sin x = 0 \qquad x \in [0, 3\pi]$$

$$\cos x + \sin x = 0 \,\Big|\cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$1 + \tan x = 0$$

$$\tan x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}} \qquad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \underline{\underline{\frac{7\pi}{4}}}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{4} + 3\pi = \underline{\underline{\frac{11\pi}{4}}}$$

Her er det tre rette svar, pass på at du får med alle tre– men ikke flere.

***Oppgave 2**

En funksjon er definert ved $f(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Til denne funksjonen skal du (basert på funksjonsuttrykket) bestemme:

a) Amplitude $A = |-2| = 2$

b) Likevektslinjen $d = 3$

c) Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

d) Faseforskyvningen $\frac{\varphi}{-c} = \frac{-\frac{\pi}{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$

Tegn gjerne grafen og sjekk at svarene dine stemmer med den.

***Oppgave 3**

a) Finn toppunktet (ene) til $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ ved regning når $x \in [0, \pi]$.

Maksimum oppnås når «sinus uttrykket» er lik 1.

$f_{maks} = 1 + 1 = 2 \qquad \textit{oppnås når}$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n2\pi \qquad$ forenkler

$2x = \pi + n2\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ eneste løsning innen def. $\qquad \underline{\underline{\textit{Toppunkt}\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)}}$

Denne oppgaven kan også løses med derivasjon, men da må det vises at *x*- verdi gir et toppunkt. (fortegnskjema eller andrederivert test)

b) Bestem bruddpunktene(asymptotene) til $g(x) = \tan(\pi x)$ når $x \in [0, 2]$ ved regning.

$g(x) = \tan(\pi x) \qquad$, når $x \in [0, 2]$

$\textit{Med "vinkel"} = \pi x \qquad \textit{får vi brudd når}$

$\pi x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x = \frac{1}{2} + n$

$\underline{\underline{x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{og} \qquad x_2 = \frac{3}{2}}}$

***Oppgave 4** Deriver funksjonene (Husk på derivasjonsreglene, «gamle og nye»)

a) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ gir $f'(x) = \underline{\underline{2\cos x + \sin x}}$

b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ gir $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) = \underline{\underline{\cos^2 x - \sin^2 x}}$

c) $f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2$ gir $f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = \underline{\underline{-2\cos x \sin x}}$

d) $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ gir $g'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \underline{\underline{\dfrac{-1}{\sin^2 x}}}$

Pass på at du bruker derivasjonsreglene rett, og at fortegn blir riktige. I tillegg er det bra å forsøke å se etter muligheter for å skrive om svar slik at det ville være lettere å finne ekstremalverdier. + at det ser penere ut. Får du en negativ faktor underveis, skal denne ha parentes rundt + at vi til slutt setter fortegn foran.

***Oppgave 5**

I et område med tidevann regner en med at vannstanden i perioder er bestemt ved

$V(t) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 7$ med $t \in [0, 24\rangle$ $V(t)$ er målt i meter og t er i timer.

a) Kjerneregel gir $V'(t) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \cdot \dfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)}}$

Merk at konstante faktorer bør foran i uttrykket, der ser mer ryddig ut og forhindrer at vi «ganger inn» i funksjonens argument.

b) $V''(t) = -\dfrac{\pi}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \cdot \dfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{-\dfrac{\pi^2}{18}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)}}.$

c) Regn ut når vannstanden høyest.

$V_{maks} = 2 \cdot 1 + 7 = 9$

Oppnås når: $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) = 1$

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{2} + n2\pi \quad \Big| \cdot \frac{6}{\pi}$$

$$t = 3 + 12n$$

$$t_1 = 3 \quad t_2 = 15$$

$\underline{\underline{\text{Vannstanden er høyest etter 3 og 15 timer.}}}$

Oppgave c og d kan også løses ved hjelp av den deriverte, men sjekk hva som blir topp- og bunnpunkt.

d) Regn ut når vannstanden er lavest.

$$V_{\min} = 2\cdot(-1)+7=5$$

Oppnås når: $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)=-1$

$$\frac{\pi}{6}t=\frac{3\pi}{2}+n2\pi \qquad \left|\cdot\frac{6}{\pi}\right.$$

$$t=9+12n$$

$$t_1=9 \qquad t_2=\underline{21}$$

$\underline{\underline{\text{Vannstanden er lavest etter 9 og 21 timer.}}}$

e) Regn ut når vannet stiger raskest. Det vil si når den deriverte er størst mulig.

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$V'_{maks}=\frac{\pi}{3}\cdot 1=\frac{\pi}{3}$$

Oppnås når $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)=1$

$$\frac{\pi}{6}t=0+n2\pi \left|\cdot\frac{6}{\pi}\right.$$

$$t=0+12n$$

$$t_1=0 \quad t_2=12$$

$\underline{\underline{\text{Vannstanden øker mest ved t = 0 og t = 12.}}}$