3. Innlevering løsningsforslag

Merk at 4 av 5 innleveringer i løpet av året må være bestått. En innlevering som ikke er levert regnes som ikke bestått!

Oppgave 1

a) Utfør polynomdivisjonen:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - x^2 - 4x + 4 : (x-1) = x^2 - 4 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -4x + 4 \\
\underline{-(-4x+4)} \\
\quad 0
\end{array}
$$

b) Faktoriser polynomet mest mulig:
Bruker resultat fra a) + 3. kvadratsetning.

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = \underline{\underline{(x-1)(x+2)(x-2)}}$$

Oppgave 2 Bestem grenseverdiene

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+7}{4x^3+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{4x} = \underline{\underline{0}}$$

b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x = \underline{\underline{3}}$$

Kan også løses ved å dele på høyeste potens.

c) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-5)}{x+2} = -2-5 = \underline{\underline{-7}}$$

Oppgave 3 Bestem asymptotene til $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$

a) Vertikal asymptote (nevner = 0)

$x = 3$

b) Horisontal asymptote:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Oppgave 4 Deriver funksjonene

a)

$$f(x) = 2x^2 + x + 2$$
$$f'(x) = 4x + 1$$

b)

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$
$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

c)

$$h(x) = \frac{2x}{x+1} = \frac{u}{v}$$
$$h'(x) = \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

d)

$$k(x) = (x^2-3)^3 = u^3$$
$$k'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(x^2-3)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-3)^2$$

e)

$$l(x) = (3x+5)(x^2-2) = u \cdot v$$
$$l(x) = 3(x^2-2) + (3x+5) \cdot 2x$$
$$= 3x^2 - 6 + 6x^2 + 10x = 9x^2 + 10x - 6$$

f)

$$g(x) = x^2 \cdot e^{2x} \quad \text{Bruker produktregel + kjerneregel}$$
$$g'(x) = 2xe^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$$
$$= 2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x}$$
$$= 2xe^{2x}(1+x) = \underline{\underline{2xe^{2x}(x+1)}}$$

g)

$$h(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2x}\right) = \ln x^2 - \ln 2x = 2\ln x - (\ln 2 + \ln x) = \ln x - \ln 2$$
$$h'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

Oppgave 5 Funksjonen er gitt ved $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-4}{2x-4}$

a) $D_f = R \setminus \{2\}$

b) Nullpunktene:

$$f(x) = 0$$
$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$
$$x_1 = 0{,}85 \qquad x_2 = -2{,}35$$
$$\underline{\underline{L = \{-2{,}35 \, , \, 0{,}85\}}}$$

c) Bestem asymptotene
   i. Vertikal asymptote (nevner = 0) $x = 2$
   ii. Skrå asymptote (teller har en grad høyere enn nevner) Bestemmer asymptoten ved hjelp av polynomdivisjon

$$y = x + \frac{7}{2}$$

b) Tegn grafen Bruk kalkulator for å finne punkter, merk husk på parenteser eller rett brøkstrek på nye Casio kalkulatorer. Tegn grafen

Oppgave 6 Funksjonen er gitt ved $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

b) $f''(x) = 6x - 6$

c) Ekstremalpunkter når:

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

+ **Tegn fortegnsskjema, for å avgjøre hva som er topp- og bunnpunkt.**

Toppunkt: $(-1, f(-1)) = (-1, 11)$

Bunnpunkt: $(3, f(3)) = (3, -21)$

d) Vendepunkt der

$f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0$ + **Tegn fortegnsskjema, for å vise fortegnsbytte**

$x = 1$

Vendepunkt $\left(1, f(1)\right) = (1, -5)$

e) Tangent i punktet (1,-5)(bruker ettpunkts formelen)

$y - y_1 = a\left(x - x_1\right)$ $f'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$

$y - (-5) = -12(x - 1)$

$y = -12x + 12 - 5$

$\underline{\underline{y = -12x + 7}}$

Oppgave 7 Funksjonen f er gitt ved $f\left(x\right) = \dfrac{12\ln x}{x^2}$ $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

a) Løs likningen ved regning

$$f\left(x\right) = 0$$
$$12\ln x = 0$$
$$\ln x = 0$$
$$x = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

b) Bestem uttrykkene for $f'\left(x\right)$ og $f''\left(x\right)$.

$$f\left(x\right) = \frac{12\ln x}{x^2} = \frac{u}{v} \quad gir \quad f'\left(x\right) = \frac{\frac{12}{x}\cdot x^2 - 12\ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{12x - 24x\ln x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{12 - 24\ln x}{x^3}}}$$

$$f''\left(x\right) = \frac{-\frac{24}{x}\cdot x^3 - \left(12 - 24\ln x\right)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-24x^2 - 36x^2 + 72x^2\ln x}{x^6} = \underline{\underline{\frac{72\ln x - 60}{x^4}}}$$

c) Bestem ved regning koordinatene til eventuelle ekstremalpunkter til grafen til *f*.

$$f'(x) = 0$$

$$12 - 24\ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{-12}{-24} = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$f''\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{72\ln e^{\frac{1}{2}} - 60}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^4} = \frac{36-60}{e^2} < 0 \qquad x = e^{\frac{1}{2}} \text{ gir TP}$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{12\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{12\cdot\frac{1}{2}}{e} = \frac{6}{e}$$

$$\underline{\underline{Toppunkt\left(e^{\frac{1}{2}}, \frac{6}{e}\right)}} \approx (1{,}65\ ,\ 2{,}21)$$

d) Graf