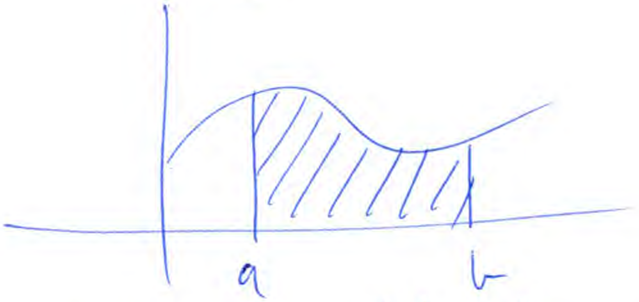
Integrasjon og volum

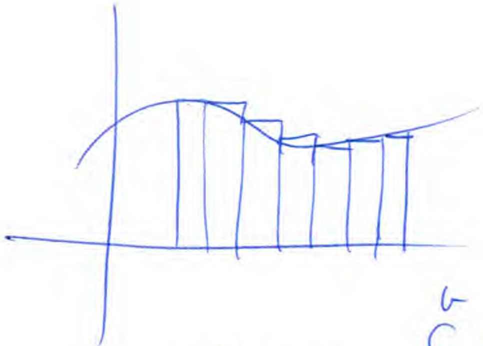
Hva er integrasjon? Spesifikt bestemt integral.

Ene tolkning: Areal under graf:



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Spesifikt fant arealet under grafen ved å kutte opp i små tynne biter.



Arealet av alle slike firkanter, gjør bredden mindre.

Alternativ tolkning: $\int_a^b f(x)\,dx$ "=" En sum av verdier ganger bredder, lar breddene bli veldig små.

Eks: Fra fysikk: Strekning er fart ganget tid når fart er konstant.

På et lite tidsintervall Δt er farten nesten konstant.

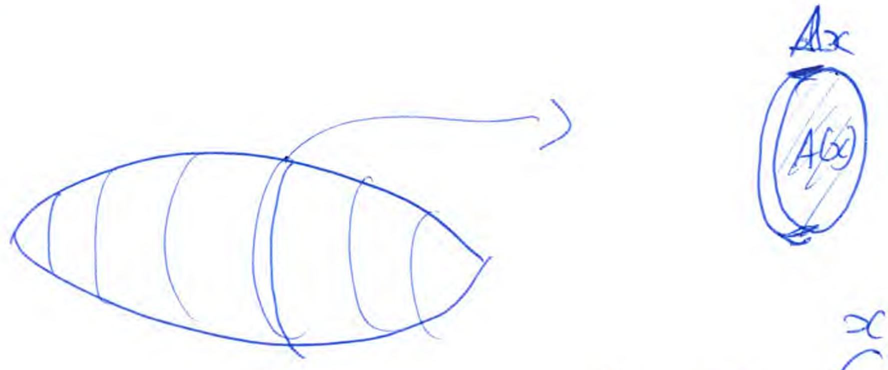
$\Delta s \approx v \cdot \Delta t$

Endringa i strekning over et stort tidsintervall må da bli omtrent

$$S = \sum \Delta s = \sum v \cdot \Delta t$$

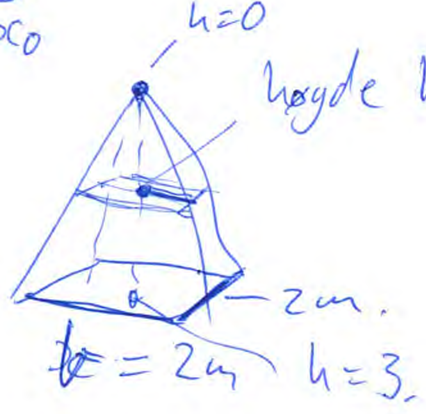
$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

Idé: Et volum kan deles opp i „arealer".



Ser at volumet er gitt ved $V = \int_{x_0}^{x_1} A(x)\,dx$

Eks: Kvadratisk pyramide:



Det jeg må vite er, hva er A(x) her.

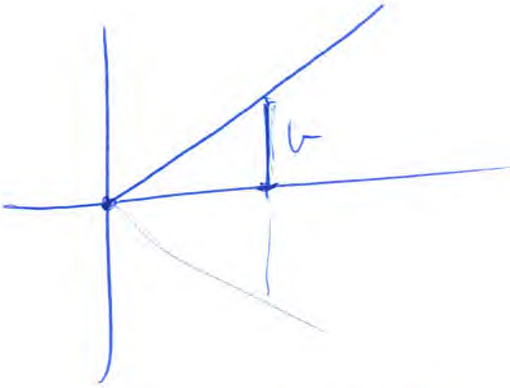
$$\cancel{\frac{3}{2} = \frac{x}{b}}$$

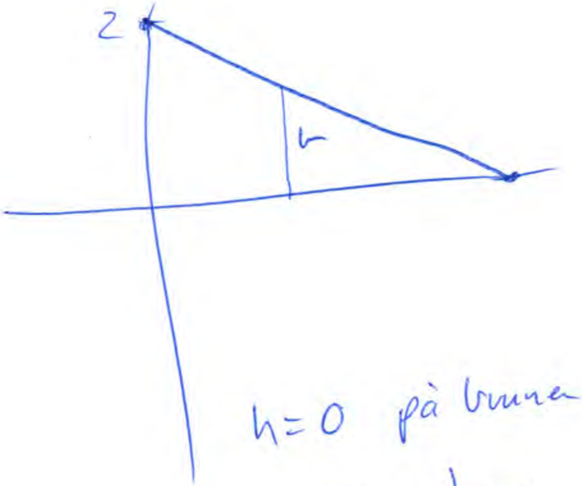
$$\frac{2}{3} = \frac{b}{x} \qquad b = \frac{2}{3}x$$

Får at $A(x) = b^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{4}{9}x^2$

$$V = \int_0^3 \frac{4}{9}x^2\,dx = \left[\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 4 - 0 = \underline{4}.$$

Formel for volum av pyramide: $\frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3 = \underline{4}.$





h=0 på bunnen

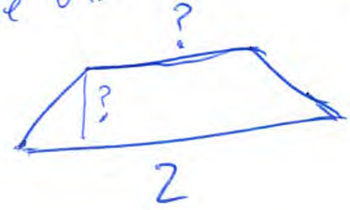
$r = 2 - \frac{1}{3}x$

h=0 på toppen

$r = \frac{1}{3}x$

Kunne delt opp pyramiden på langs i stedet

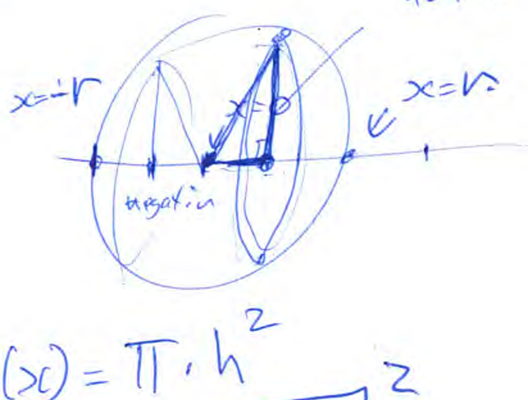
Hver slice blir da seende ut som



Gitt at vi klarer finne denne $A(x)$, areal av en „slice", så kan vi skrive opp et integral som gir oss volumet.

Eks: Formel for volum av kule:

hva er høgden til dette, det er radien til denne sirkelen.



Pythagoras:

$r^2 = h^2 + x^2$

Vil løse for h.

$h^2 = r^2 - x^2$

$h = \sqrt{r^2 - x^2}$

$A(x) = \pi \cdot h^2$

$= \pi \cdot \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2}$

$= \pi \cdot (r^2 - x^2)$

Volum av kula $= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - x^2)\,dx$

Liten digresjon:

$$2(x+y) = 2\cdot(x+y) = 2\cdot x + 2\cdot y = 2x + 2y$$

$$\ln(x+y) \neq \ln(x) + \ln(y)$$

$$e^{x+y} = e^{x}\cdot e^{y} \qquad \ln(x)+\ln(y) = \ln(x\cdot y)$$

Volum av kula $= \displaystyle\int_{-r}^{r} \pi\cdot(r^2 - x^2)\,dx$

$$= \int_{-r}^{r} \pi r^2\,dx - \int_{-r}^{r} \pi x^2\,dx$$

$$= \Big[\pi r^2 x\Big]_{-r}^{r} - \Big[\frac{\pi}{3}x^3\Big]_{-r}^{r}$$

$$= \pi r^3 + \pi r^3 - \left(\frac{\pi}{3}\cdot r^3 + \frac{\pi}{3} r^3\right)$$

$$= \frac{2\pi}{1} r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3$$

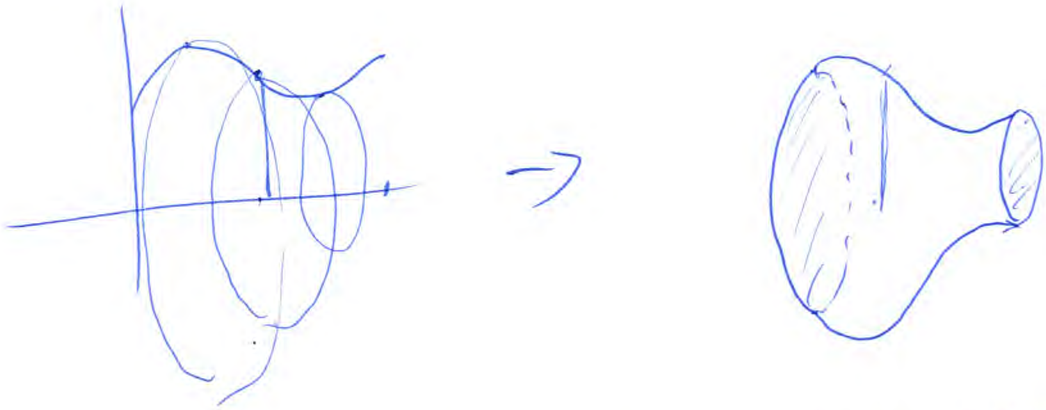
$$= \frac{6\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\pi r^2\cdot r - \pi\cdot r^2\cdot(-r)$$

$$\frac{\pi}{3} r^3 - \frac{\pi}{3}(-r)^3$$

Omdreiningslegeme

Idé:



Ha en funksjon $f(x)$, se for oss at vi „spinner" f rundt x-aksen, får da en 3D-form. I hvert punkt på x-aksen er $f(x)$ radien til en sirkel med sentrum i x-aksen.

Hva er volumet til denne figuren?

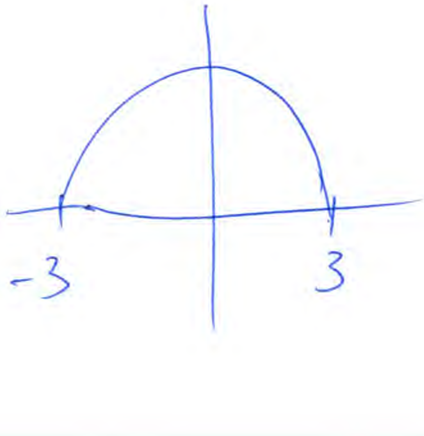
Bruker $V = \int A(x)\,dx$ - formelen,

Vet at $A(x) = \pi \cdot (f(x))^2$.

Volumet er da gitt ved

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \pi \cdot (f(x))^2\,dx$$

Eks fra oblig ish: $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ formel for halvsirkel.



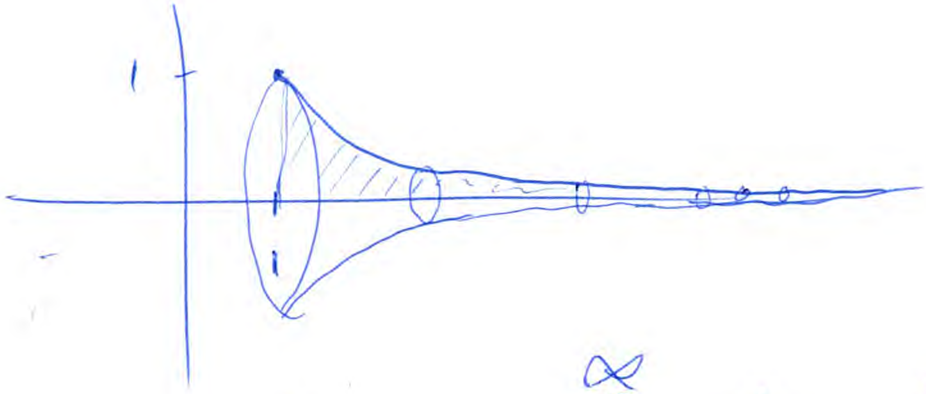
Spinner vi denne rundt x-aksen får vi en kule. Volumet av denne kula blir

$$V = \int_{-3}^{3} \pi \cdot \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx = \int_{-3}^{3} \pi (9-x^2)\,dx$$

Gabriels trompet:

Se på grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$, fra 1 til ∞.

Finn omdreiningslegemet til denne.



Arealet under $\frac{1}{x}$: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_1^\infty$

"=" $\ln\infty - \ln 1 = \infty$

Impliserer at overflaten til trompeten er uendelig.

Hva er volumet til trompeten?

$$V = \int_1^\infty \pi \cdot (f(x))^2\,dx = \int_1^\infty \pi \cdot \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \int_1^\infty x^{-2}\,dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{-1} x^{-1}\right]_1^\infty = \pi \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$

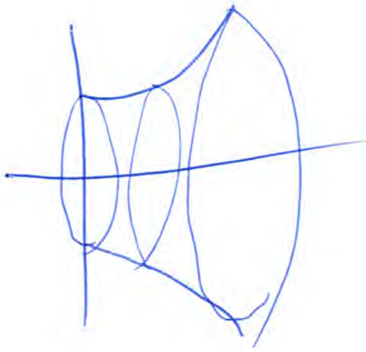
$$= \pi \cdot (-0 + 1) = \pi.$$

2D eksempel:

"Brett ut"

Areal endelig   Lengde uendelig

Eks: Se på grafen til $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ fra $x=0$ til $x=3$.
Finn volum av omdreiningslegemet.



Plugger inn i formelen:

$$V=\int_0^3 \pi\cdot(1+x^2)\,dx$$

$$=\pi\left(\int_0^3 1\,dx+\int_0^3 x^2\,dx\right)$$

$$=\pi\left(\left[x\right]_0^3+\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 dx\right)$$

$$=\pi(3-0+9-0)$$

$$=\underline{12\pi}$$

Eks: Se på grafen til $f(x)=1+x^2$ fra $x=0$ til $x=3$.
Finn volum av omdreiningslegemet.

$$(1+x^2)^2=1+2x^2+x^4$$

$$V=\int_0^3 \pi\cdot(1+x^2)^2\,dx=\pi\int_0^3 1+2x^2+x^4\,dx$$

$$=\pi\left(\left[x\right]_0^3+\left[\tfrac{2}{3}x^3\right]_0^3+\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^3\right)$$

$$=\pi\left(3-0+18-0+\frac{243}{5}-0\right)$$

$$=\frac{348}{5}\pi$$