Løsningsforslag matematikk 3-termin våren 2017

Oppgave 1

Innsetting av koordinatene til punktene i likningen for linjen gir:

$-3a=-7+b,\ 2a=8+b$. Innsetting av $b=2a-8$ i den første likningen gir $-3a=-7+2a-8$ eller $5a=15$, dvs. $\underline{a=3,\ b=-2}$.

Oppgave 2

a) Ved å bruke regelen for å derivere en potensfunksjon finnes $\underline{y'=\frac{2}{3}x^{-2/3}-\frac{2}{3}x^{-5/3}=\frac{2}{3}x^{-5/3}\left(x-1\right)}$.

b) Ved minimumspunktet er $y'=0$ som gir $x=1$. Innsetting i uttrykket for y gir $y=3$. Det betyr at minimumspunktet er $\left(1,3\right)$.

Oppgave 3

I tangeringspunktet har linjen og parabelen samme verdi både av y og y' . Den deriverte av funksjonen for linjen er $y'=6$, og den deriverte av funksjonen for parabelen er: $y'=2x$. I tangeringspunktet må da $2x=6$, dvs. $x=3$. Innsetting i likningen for linjen gir $y=6\cdot 3+4=22$ i tangeringspunktet. Det betyr at linjen tangerer parabelen i punktet $\left(3,22\right)$. Innsetting i parabellikningen gir $22=9+k$, dvs. $\underline{k=13}$.

Oppgave 4

a) $I_1=\int\left(x+2\right)e^{x^2+4x}dx$. Her innføres ny variabel $u=x^2+4x$ som gir $du=2\left(x+2\right)dx$. Dermed kan integralet skrives $I_1=\left(1/2\right)\int e^u du=\left(1/2\right)e^u+C=\underline{\left(1/2\right)e^{x^2+4x}+C}$.

b) $I_2=\int_0^1\frac{x^{1/2}}{1+x^{3/2}}dx$. Innfører ny variabel $u=x^{3/2}$, $du=\left(3/2\right)x^{1/2}dx$. Dermed tar integralet formen $I_2=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{du}{1+u}=\frac{2}{3}\Big[\ln\left(1+u\right)\Big]_0^1=\underline{\frac{2}{3}\ln 2}$.

c) $I_3 = \int x^2 \ln x\, dx$. Vi bruker delvis integrasjon og får:

$$I_3 = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C = \underline{\frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C} .$$

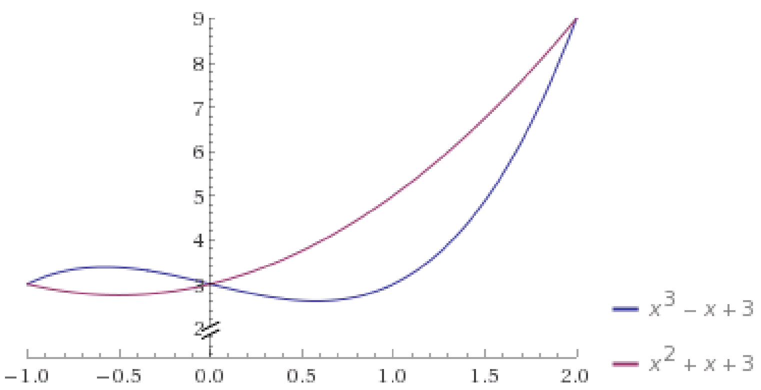
Oppgave 5

a) Derivasjon gir $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 2x + 1$. Ny derivasjon gir $f''(x) = 6x$, $g''(x) = 2$. Siden $f''(x) > 0$ for $x > 0$ og $f''(x) < 0$ for $x < 0$, krummer grafen til $f(x)$ oppover for $x > 0$ og nedover for $x < 0$. Grafen til $g(x)$ krummer oppover for alle verdier av *x*. I ekstremalpunktene er den deriverte lik null. $f'(x) = 0$ gir $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Det betyr at i x_1 er det maksimalpunkt og i x_2 er det minimalpunkt. Betingelsen $g'(x) = 0$ gir $x_3 = -\frac{1}{2}$. Her er det et minimalpunkt. Funksjonsverdiene i disse punktene er $f(x_1) = 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}4$ og $f(x_2) = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 2{,}6$ og $g(x_3) = \frac{11}{4} = 2{,}75$.

Dette betyr at $f(x)$ har maksimalpunkt i $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ og minimalpunkt i $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, og $g(x)$ har minimalpunkt i $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

Skjæringspunktene mellom kurvene er gitt ved $x^3 - x + 3 = x^2 + x + 3$, dvs. $x^3 - x^2 - 2x = 0$ eller $x\left(x^2 - x - 2\right) = 0$. En løsning er $x_4 = 0$. De to andre finnes av $x^2 - x - 2 = 0$ som gir $x_5 = -1$, $x_6 = 2$.

Grafene til funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er plottet nedenfor.



b) Arealet mellom grafene til venstre for *y*-aksen er

$$A_1 = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \underline{\frac{5}{12}} .$$

Arealet mellom grafene til høyre for *y*-aksen er

$$A_2 = \int_0^2 \left(x^2 + 2x - x^3\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{3}8 + 4 - \frac{1}{4}16 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}.$$

Oppgave 6

Volumet av rotasjonslegemet er $V = \pi \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx = \pi\left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$.

Kommentar. Det var ikke krevd å regne ut integralet, men til orientering viser jeg hvordan det enkelt kan finnes.

Vi bruker at integrasjon er antiderivert og at den deriverte av $\tan x$ står i formelarket: $\left(\tan x\right)' = 1 + \tan^2 x$.

Integrasjon gir: $\tan x = \int \left(1 + \tan^2 x\right)dx = x + \int \tan^2 x\, dx$ som gir $\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x$.

Oppgave 7

Linjen skjærer x-aksen i punktet $(-3,0)$ og y-aksen i $(0,4)$. Følgelig er vektoren $\underline{\underline{[3,4]}}$ parallell med linjen og har lengde $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Oppgave 8

Vi skal finne vinkelen mellom vektorene $\vec{A} = [-3,1,2]$ og $\vec{B} = [1,2,3]$. Fra formelen for skalarprodukt av to vektorer får vi $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ som gir

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{(-3)\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{5}{14}$$

som leder til $\underline{\underline{\theta = 69\, grader = 1{,}2\, radianer}}$.

Oppgave 9

Med de gitte vektorene er $t\vec{u} + 2\vec{v} = t[1,0,1] + 2[0,1,1] = [t,0,t] + [0,2,2] = [t,2,t+2]$.

a) Dersom denne vektoren er vinkelrett på $\vec{w} = [1,2,3]$ er skalarproduktet av vektoren og $\vec{w}$ lik null. Det gir likningen $t + 4 + 3(t+2) = 0$ eller $4t + 10 = 0$. Dvs. $\underline{\underline{t = -5/2}}$.

b) Metode 1: Hvis vektorene $t\vec{u} + 2\vec{v} = [t,2,t+2]$ og $\vec{w} = [1,2,3]$ er parallelle, kan vi sette dem lik hverandre. Det gir $\underline{\underline{t = 1}}$.

Metode 2: Dersom denne vektoren er parallell med $\vec{w}$ er vektorproduktet av vektoren og $\vec{w}$ lik null. Det gir vektorlikningen $\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ t & 2 & t+2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Dvs. $\begin{vmatrix} 2 & t+2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{e}_x - \begin{vmatrix} t & t+2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{e}_y + \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{e}_z = 0$ eller $2(1-t)\vec{e}_x - 2(t-1)\vec{e}_y + 2(t-1)\vec{e}_z = 0$. For at en vektor skal være lik null, må alle komponentene være lik null. Dette er her oppfylt for $\underline{t=1}$.