Informasjon

Oppgaven skal leveres inn som en .pdf-fil via Canvas. Dere kan godt skrive for hånd og scanne det dere har gjort. Dere må ha minst 50 % riktig for å få godkjent, og må ha prøvd på alle deloppgavene. Innleveringsfrist står på Canvas.

Oppgave 1

En linje ℓ er gitt ved parameterfremstillinga

$$\ell : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \tag{1}$$

Punktet A er gitt ved $A = (4, 2)$.

Finn den korteste avstanden fra punktet A til linja ℓ.

Løsning. Vi definerer punktet $B(t) = (2t - 1, t + 3)$ som et vilkårlig punkt på linja, og merker oss at vektoren $\vec{v} = [2, 1]$ er en retningsvektor for linja. Vi vil finne en B som er slik at $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$, så vi ønsker derfor at $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$.

Vi ser at $\overrightarrow{AB}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} && \text{(L1)} \\ &= [2t - 1, t + 3] - [4, 2] && \text{(L2)} \\ &= [2t - 5, t + 1], && \text{(L3)} \end{aligned}$$

så vi vil derfor løse

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} && \text{(L4)} \\ &= [2t - 5, t + 1] \cdot \overrightarrow{2, 1} && \text{(L5)} \\ &= (2t - 5) \cdot 2 + (t + 1) \cdot 1 && \text{(L6)} \\ &= 4t - 10 + t + 1 && \text{(L7)} \\ &= 5t - 9 && \text{(L8)} \\ 9 &= 5t && \text{(L9)} \\ \frac{9}{5} &= t. && \text{(L10)} \end{aligned}$$

Vi får derfor at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \left[2 \cdot \frac{9}{5} - 5, \frac{9}{5} + 1\right] && \text{(L11)} \\ &= \left[-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right], && \text{(L12)} \end{aligned}$$

som gir oss

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5}\right)^2} && \text{(L13)} \\
&= \sqrt{\frac{245}{25}} && \text{(L14)} \\
&= \frac{7}{5}\sqrt{5}. && \text{(L15)}
\end{aligned}
$$

Korteste avstand fra punktet A til linja ℓ er derfor ${}^{7\sqrt{5}}/_{5}$.

Oppgave 2

To funksjoner, f og g, er gitt ved

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x - 1 && (2) \\
g(x) &= x^3 - x^2 - x + 1 && (3)
\end{aligned}
$$

Finn arealet avgrenset av grafen til f og grafen til g.

Løsning. For å finne arealet avgrenset av to grafer, må vi først vite hvor de to grafene møtes. Vi må derfor løse

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) && \text{(L16)} \\
x^3 - 2x - 1 &= x^3 - x^2 - x + 1 && \text{(L17)} \\
x^2 - x - 2 &= 0 && \text{(L18)}
\end{aligned}
$$

Denne andregradslikningen har to løsninger, $x = -1$ og $x = 2$. Grafene til f og g vil derfor møtes når $x = -1$ og når $x = 2$. Arealet mellom dem kan vi derfor regne ut ved å regne ut integralet fra -1 til 2,

$$
\int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{L19}
$$

Merk at vi allerede regnet ut $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$ tidligere i oppgaven, så vi ender derfor opp med

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} x^2 - x - 2\,\mathrm{d}x && \text{(L20)}\\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} && \text{(L21)}\\
&= \quad \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)\\
&\quad - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2\cdot(-1)\right) && \text{(L22)}\\
&= \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) && \text{(L23)}\\
&= \frac{9}{3} - 8 + \frac{1}{2} && \text{(L24)}\\
&= -5 + \frac{1}{2} && \text{(L25)}\\
&= -4.5. && \text{(L26)}
\end{aligned}
$$

Siden dette svaret ble negativt, betyr det at g ligger *over* f, så for å få arealet burde vi egentlig heller regnet ut

$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{L27}$$

men vi slipper gjøre utregningen på nytt, det holder å si at arealet mellom grafene blir $|-4.5| = 4.5$.

Oppgave 3

Vi kan tegne en halvsirkel med radius 3 ved å tegne grafen til funksjonen

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}. \tag{4}$$

Arealet av halvsirkelen er da gitt ved

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Finn en tilnærming til dette arealet ved å dele x-aksen opp i 3 like store biter, hvor hver bit har lengde 2. Det vil si, regn ut Riemann-summen

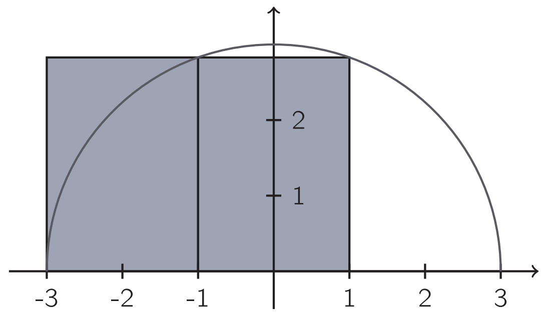
$$\sum_{-3}^{3} f(x)\Delta x, \tag{6}$$

hvor $\Delta x = 2$.

Sammenlikn svaret med det ekte arealet av halvsirkelen.

Løsning. Det forventes ikke at dere gjør det på tre forskjellige måter, slik jeg har gjort, det holder at dere har gjort det på én av disse måtene.

Grafisk ser tilnærmingen slik ut, dersom vi velger høyresidig Riemann-sum:



Merk at det siste rektangelet får høyde 0, siden $f(3) = 0$. Høyden til de to første rektanglene er $f(-1) = f(1) = \sqrt{8}$.

Tilnærmingen til arealet blir da

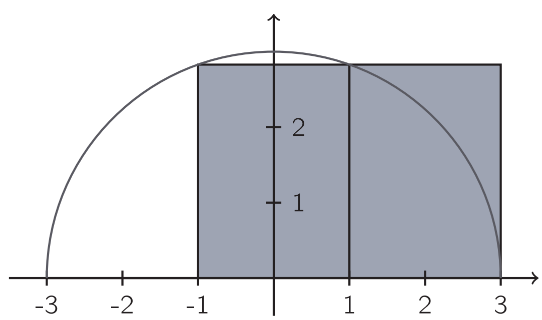
$$\sum_{-3}^{3} f(x) \cdot 2 = \sqrt{8} \cdot 2 + \sqrt{8} \cdot 2 + 0 \cdot 2 \tag{L28}$$

$$= 4\sqrt{8} \tag{L29}$$

$$= 8\sqrt{2} \approx 11.3137. \tag{L30}$$

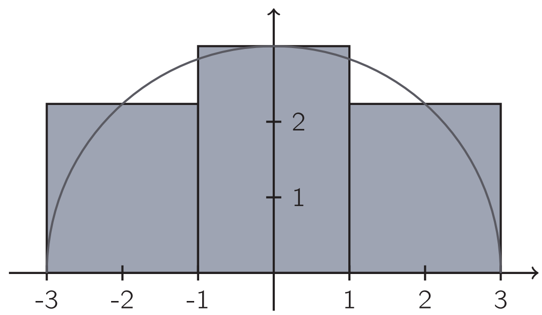
Arealet av en sirkel med radius 3 er gitt ved $\pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28.2743$, så arealet av en *halvsirkel* med radius 3 blir da $9\pi/2 \approx 14.1372$. Vi ser at vår tilnærming er sånn vagt i nærheten av riktig svar, men oppdelingen er for grov til at vi kommer veldig nærme.

Om vi i stedet hadde valgt en venstresidig Riemann-sum, ville oppdelingen sett slik ut i stedet:



Dette ville gitt akkurat samme svar for tilnærmingen.

Om vi hadde målt høyden i *midtpunktet* i hvert område (det boka kaller *midtmetoden*), ville oppdelingen sett slik ut:



Dette ville gitt en tilnærming på $6+4\sqrt{5} \approx 14.9443$, så en god del bedre tilnærming i dette tilfellet. Midtmetoden vil ofte gi et bedre svar enn høyresummer eller venstresummer.