LF Tentamen H2019 MA015

18. Desember 2019

Oppgave 1

Forkort følgende uttrykk:

a) $\frac{x^2 \sqrt[3]{y^4} x^{-1} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{x^3}}{y^{-\frac{4}{3}}}} = \frac{x^2 x^{-1} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{3}{2}} y^{-(-\frac{4}{3})}} = x^{2-1+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} y^{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}} = x^0 y^0 = \underline{\underline{1}}$

b) $\frac{3x^3+27x}{3x+9} = \frac{3x(x^2+9)}{3(x+3)} = \frac{\cancel{3}x\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{3}\cancel{(x+3)}} = \underline{\underline{x(x-3)}}$

Oppgave 2

Løs for x:

a) $\sqrt{x+1} - x = 1$

$\sqrt{x+1} = 1 + x$
$(\sqrt{x+1})^2 = (1+x)^2$
$x + 1 = 1 + 2x + x^2$
$x^2 + x = 0$
$x(x+1) = 0$ Dette gir oss 2 muligheter: $x = -1$ og $x = 0$ Vi tester begge alternativene:

$x = -1$ gir:

$\sqrt{-1+1} - (-1) = 1$ Vi ser at v.s. = h.s., så $x = -1$ er en løsning.

$x = 0$ gir:

$\sqrt{0+1} - 0 = 1$ Dette stemmer også, og da er $x = 0$ også en løsning.

Løsning:

$\underline{\underline{x = 0 \text{ eller } x = -1}}$

b) $e^x = \frac{1}{2e^x}$

$e^x = \frac{1}{2e^x} \mid \cdot 2e^x$
$2e^{2x} = 1$
$e^{2x} = \frac{1}{2}$
$\ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2}$
$2x = \ln \frac{1}{2}$
$\underline{\underline{x = \frac{\ln \frac{1}{2}}{2}}}$

c) $\sin\theta = 1 - \sin\theta, \quad \theta \in [0, 3\pi]$

$\sin\theta + \sin\theta = 1$
$2\sin\theta = 1$
$\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\theta = \frac{\pi}{6}$

Det finnes flere løsninger:

$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Vi finner flere løsninger ved å sjekke:

$\theta = \theta + n \cdot 2\pi$ Dette gir oss:

$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$

og:

$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

Neste omløp $(\theta + 2 \cdot 2\pi)$ vil gi oss verdier utenfor vårt definisjonsområde $\theta \in [0, 3\pi]$.

Løsningene er da: $\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}, \theta_3 = \frac{13\pi}{6}, \theta_4 = \frac{17\pi}{6}}}$.

d) $\log x^2 - 3 = \log \frac{1}{x}$
$2\log x - 3 = \log x^{-1}$
$2\log x - 3 = -1 \cdot \log x$
$2\log x + \log x = 3$
$3\log x = 3$
$\log x = 1$
$\underline{\underline{x = 10}}$

Oppgave 3

Løs likningssettet:
$y^2 + x = 1$
$3x - y = 1$
Kaller første likning (1) og andre likning (2). Løser (1) for x og får:
$x = 1 - y^2$ (1)*
Putter dette inn i (2) og får:
$3(1 - y^2) - y = 1$
som gir en andregradslikning:
$3y^2 + y - 2$
Løser denne og får:
$y_1 = -1$ og $y_2 = \frac{2}{3}$
Setter disse verdiene inn i (1)* og får følgende x-verdier:
$x_1 = 0$ og $x_2 = \frac{5}{9}$
Svaret er da:
$\underline{\underline{x_1 = 0, y_1 = -1 \text{ eller } x_2 = \frac{5}{9}, y_2 = \frac{2}{3}}}$

Oppgave 4

Regn ut den førstederiverte til følgende uttrykk:

a) $f(x) = \frac{(3x+1)^2}{\ln x}$
Her må vi bruke kvotientregelen:
$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ der:
$u = (3x+1)^2$ og $u' = 6(3x+1) = 18x + 6$
$v = \ln x$ og $v' = \frac{1}{x}$
Innsatt gir dette:
$\underline{\underline{f'(x) = \frac{6(3x+1) \cdot \ln x - (3x+1)^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(3x+1)(6\ln x - \frac{(3x+1}{x})}{(\ln x)^2}}}$
Evnt.:
$\underline{\underline{f'(x) = \frac{(18x+6) \cdot \ln x - (3x+1)^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{18x \ln x + 6\ln x - (9x^2 + 6x + 1)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{18x \ln x + 6 \ln x - 9x - 6 - \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}}}$

b) $f(x) = xe^{2x}$
Benytter oss av produktregelen (og kjerneregelen på e^{2x}):
$f'(x) = uv' + u'v$ der
$u = x$ og $u' = 1$
$v = e^{2x}$ og $v' = 2e^{2x}$
Innsatt gir dette:
$x \cdot 2e^{2x} + 1 \cdot e^{2x} =$
$\underline{\underline{f'(x) = e^{2x}(1 + 2x)}}$

c) $g(x) = \frac{3}{x^2} + 3x^3 - 4$
$\underline{\underline{g'(x) = \frac{-6}{x^3} + 9x^2}}$

Oppgave 5

Gitt følgende funksjon:

$$G(x) = e^x x^2$$

a) Regn ut eventuelle nullpunkter til G(x).

Finner nullpunktene når G(x) = 0:

$G(x) = 0$
$e^x x^2 = 0$

Pga produktregelen kan dette kun stemme dersom enten $e^x = 0$ eller $x^2 = 0$

$e^x = 0$ går ikke an så vi løser $x^2 = 0$ som gir $x = 0$.

Nullpunkt i $\underline{\underline{x = 0}}$

b) Regn ut eventuelle ekstremalpunkter og bestem om disse er topp-/bunnpunkter.

Finner ekstremalpunkter når G'(x) = 0. Vi må regne ut G'(x):

$G'(x) = u \cdot v$ som via produktregelen blir:

$G'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' \quad$ der $u = e^x, u' = e^x$ og $v = x^2, v' = 2x$

$G'(x) = e^x x^2 + 2xe^x$

Løser nå G'(x) = 0 for å finne ekstremalpunkter:

$G'(x) = 0$
$x^2 e^x + 2xe^x = 0$
$x^2 \cancel{e^x} = -2x\cancel{e^x}$
$x^2 = -2x$
$x(x+2) = 0$ gir oss 2 nullpunkter (som er ekstremalpunktene til G(x)):

Nullpunkter til G'(x) i $x = 0$ og $x = -2$.

Dette er ekstermalpunktene til G(x), putter disse x-verdiene inn i G(x) og finner de tilsvarende y-verdiene:

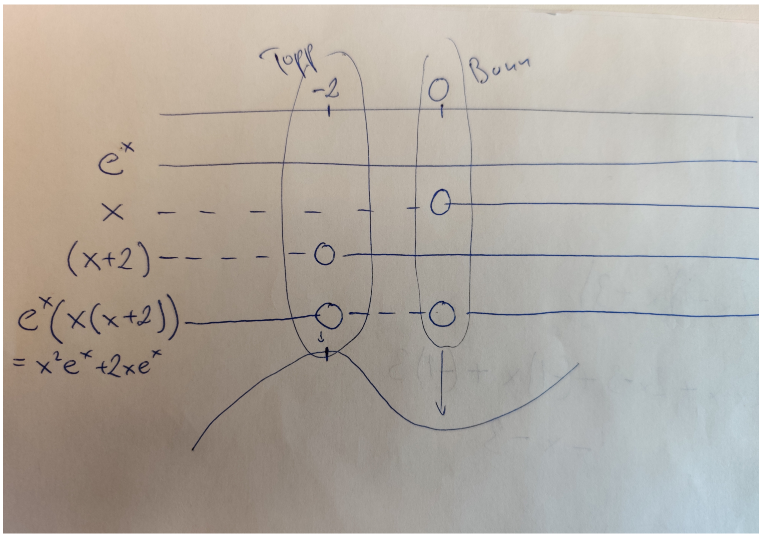
$G(0) = 0$

$G(-2) = e^{-2}(-2)^2 = \frac{4}{e^2}$

Ekstremalpunktene er: $(0, 0)$ og $(-2, \frac{4}{e^2})$

Må bestemme om disse er topp- eller bunnpunkter:

Setter opp fortegnslinje for G'(x):



Ser herfra at G(x) har følgende ekstremalpunkter:

$\underline{\underline{\text{Toppunkt i } (-2, \frac{4}{e^2})}}$.

$\underline{\underline{\text{Bunnpunkt i } (0,0)}}$.

c) Finn likningen til tangenten i (-1, G(-1)).

Denne finner vi ved formelen:

$y - y_1 = a(x - x_1)$

der y_1 = y-koordinat til et gitt punkt, i dette tilfellet G(-1), x_1 = x-verdien til et gitt punkt, i dette tilfellet x_1 = -1 og a er stigningstallet som man får i punktet - altså G'(-1):

$x_1 = -1$

$y_1 = G(-1) = e^{-1}(-1)^2 = e^{-1}$

$a = G'(-1) = e^{-1}(-1)^2 + 2 \cdot (-1)e^{-1} = e^{-1} - 2e^{-1} = -e^{-1}$

Setter inn i formelen og får:

$y - e^{-1} = -e^{-1}(x - (-1))$

Tangenten har likningen:

$\underline{\underline{y = -xe^{-1} = -\frac{x}{e}}}$

Oppgave 6

I en trekant Δ ABC er lengden AB = 4, lengden AC = 7, og vinkel $\angle A = 38^o$

a) Finn arealet til trekanten.

Arealet til trekanten kan vi finne ved arealsetningen: $A = \frac{1}{2}bc\sin\theta$

$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 38$
$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot sin38$

$\underline{\underline{\text{Arealet } A = 8.6}}$

b) Finn lengden BC.

Denne kan bestemmes på flere måter, her finner vi den v.h.a. cosinussetningen:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cosA$

$BC^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos 38$

$BC = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cos 38} = \sqrt{20.87139}$

$\underline{\underline{BC = 4.6}}$

c) Regn ut $\angle B$ og $\angle C$.

Regner først ut en av vinklene - bruker deretter kunnskapen om at summen av alle vinkler i en trekant er 180 grader og de to kjente vinklene for å finne tredje vinkel.

Bruker sinussetningen for å bestemme vinkel $\angle B$:

$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}$

$\sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{7 \cdot \sin 38}{4.56}$

$\angle B = \sin^{-1}(\frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{7 \cdot \sin 38}{4.56}) = \sin^{-1}(0.945094..)$

$\angle B = 70.9^o$

Det finnes en mulighet til og det er vinkelen $180^o - 70.9^o = 109.1^o$ (den andre vinkelen som svarer til $\sin B = 0.945094$):

Når vi bruker vinkelen 70.9^o så ser vi at dette ikke kan samsvare med lengden BC vi fant i deloppgave 6a. $\underline{\underline{\angle B = 109.1^o \text{ er da eneste riktige mulighet.}}}$

$\underline{\underline{\angle C = 180^o - 109.1^o - 38^o = 32.9^o}}$

Vi kunne også brukt sinussetningen til å finne $\angle C$ og sett at $\angle C = 32.9^o$ er eneste riktige alternativ.

Oppgave 7

Gitt funksjonen:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 2}$$

a) Regn ut nullpunktene til funksjonen.

Nullpunktene der teller $= 0$:

$2x^2 - 1 = 0$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{\text{f(x) har nullpunkter i } x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.}}$

b) Regn ut alle eventuelle asymptoter.

Finner vertikal asymptote der nevner $= 0$, såfremt teller $\neq 0$ i samme punkt.

Nevner $= 0$ når:

$x + 2 = 0 \to x = -2$ Tester teller i $x = -2$ og ser at dette er vertikal asymptote.

$\underline{\underline{\text{V.A. i } x = -2}}$

Telleren er 1 grad høyere enn nevner - det vil dermed også være en skrå asymptote (kan også se dette på kalkulator), finner denne ved å utføre polynomdivisjon:

$(2x^2 - 1) : (x + 2) = 2x - 4 + \frac{7}{x+2}$

Når $x \to \infty$ så får vi:

$\underline{\underline{\text{Skrå asymptote i } y = 2x - 4.}}$

Oppgave 8

Gitt funksjonen:

$$F(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$$

a) Vis at x-5 er en faktor i F(x).

Viser dette ved å teste om F(5) $= 0$. Hvis ja, så er x-5 en faktor i F(x):

$F(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

$\underline{\underline{\text{x-5 er en faktor i F(x).}}}$

b) Faktoriser F(x) til førstegradsfaktorer.

Da x-5 er en faktor i F(x), utfører vi polynomdivisjon på F(x) og faktoriserer uttrykket vi får:

$\frac{x^3-4x^2-7x+10}{x-5} = x^2 + x - 2$

Vi ganger opp x-5 og får:

$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 + x - 2)(x - 5)$

Vi faktoriserer så $x^2 + x - 2$ og får at:

$\underline{\underline{F(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 1)(x + 2)(x - 5)}}$

Oppgave 9

Gitt punktene: A(1,1), B(4,-2) og C(5,4)

a) Regn ut $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$.

$\underline{\underline{\vec{AB} = [4 - 1, -2 - 1] = [3, -3]}}$

$\underline{\underline{\vec{AC} = [5 - 1, 4 - 1] = [4, 3]}}$

b) Regn ut vinkelen $\angle BAC$

Vinkelen $\angle BAC$ er tilsvarende vinkel $\angle A$ og finnes v.h.a. skalarprodukt:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\theta$

Når man gjør om dette for vinkelen mellom de to vektorene så finner vi vinkel $\angle BAC$:

$\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$ der $\theta = \angle BAC$

Behøver $|\vec{AB}|$ og $|\vec{AC}|$:

$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Har da:

$\cos\angle BAC = \frac{[3,-3]\cdot[4,3]}{5\cdot\sqrt{18}} = \frac{3\cdot4+((-3)\cdot3)}{5\cdot\sqrt{18}} = \frac{3}{5\cdot\sqrt{18}}$

$\underline{\underline{\angle BAC = \cos^{-1} = \frac{3}{5\cdot\sqrt{18}} = 81.9^o}}$

c) Punktet P(x,y) er et punkt midt på $\vec{AC}$, regn ut koordinatene til punktet P.

Koordinatene til en vektor $\vec{OP}$ fra origo ut til punktet P vil ha samme koordinater som punktet P.

Vektoren $\vec{OP}$ finner vi f.eks ved å komme frem fra O til P v.h.a av andre, kjente, vektorer:

$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ der $\vec{OA} = [1,1]$

$\vec{OA} = [1,1] + \frac{1}{2}[4,3] = [3, \frac{5}{2}$

Punktet P(x,y) har koordinatene $P(3, \frac{5}{2})$