2. Algebra

Formler og likninger er viktige verktøy for deg som ingeniørstudent, og som ferdig ingeniør. Det er derfor viktig at du øver på disse temaene.

2.1. Likninger

Hovedprinsipp: Ønsker å bestemme verdien til en (eller flere) ukjent (e) ved" å gjøre det samme" på begge sider av likningen.

Eksempel:

$$5x+3=-2x-11$$
$$5x+2x=-11-3$$
$$\frac{7x}{7}=\frac{-14}{7}$$
$$\underline{\underline{x=-2}}$$

Kontroll / Setter prøve på svaret:

Venstre side: $5x+3=5(-2)+3=-10+3=-7$

Høyre side: $-2x-11=-2(-2)-11=4-11=-7$

For $x=-2$ er Vs = Hs $\Rightarrow$ $x=-2$ er en løsning av likningen.

Dersom vi ikke får samme svar på venstre og høyre side, har vi en «falsk» løsning. Eksempel på dette senere i kurset.

Eksempel på likning med parenteser og brøker:

$$\frac{x}{2}-\left(1+\frac{x}{3}\right)=-x+\frac{1}{6}$$ løser opp parentesen, og passer på fortegnene

$$\frac{x}{2}-1-\frac{x}{3}=-x+\frac{1}{6} \quad |\cdot 6$$ multipliserer hvert ledd i likningen med fellesnevner, fn = 6.

$$3x-6-2x=-6x+1$$
$$3x-2x+6x=1+6$$
$$\frac{7x}{7}=\frac{7}{7}$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

Formler

Når vi finner en formel i formelsamlinger har vi ofte behov for å «snu på formelen», eller løse den med hensyn på en annen variabel. For å gjøre dette bruker vi samme regler som når vi løser likninger. Men de ukjente har gjerne andre navn enn *x* og *y*.

1 Eksempel: Arealformel for et trapes.

Skal vi finne areal av et trapes kan vi bruke formelen $A=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$,

Finn en formel for høyden:

$\frac{(a+b)\cdot h}{2}=A$ multiplisiere begge sider med $fn=2$ og får:

$(a+b)h=2A$ dividerer , for å få bort "tallet" foran h

$h=\frac{2A}{(a+b)}$

2 Eksempel: Snu på formel/ løs med hensyn på *x*

$y=\frac{13}{x}+18$ ganger med fn

$xy=13+18x$ flytter over ledd med x

$xy-18x=13$

$x(y-18)=13$

$\underline{\underline{x=\frac{13}{y-18}}}$

Enheter og omregning

Når vi har flere størrelser som inngår i en formel må enhetene harmonere, derfor har vi ofte bruk for å regne om fra meter til centimeter, minutter til sekunder osv.

Eksempel: Gjør om farten målt i $5\,\text{m/s}$ til km/h

Vi vet 1 km = 1000 m og at 1 h = 60 min = 60*60s=3600 s

Vi ser derfor at:

$5\,\text{m/s}=5\cdot\frac{1}{1000}\text{km}\ /\ \frac{1}{3600}\text{h}$ brøkregler gir oss videre

$=\frac{5\cdot\frac{1}{1000}\text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}}=5\cdot\frac{3600}{1000}\text{km/h}=5\cdot3{,}6\text{km/h}=\underline{\underline{18\,\text{km/h}}}$

Kvadratsetningene (**Bør pugges**, særlig nr 3 – brukes mye til faktorisering)

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	også kalt konjugatsetningen

Bevis for 2. kvadratsetning: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
De to andre kan vises på tilsvarende måte med å multiplisere ledd for ledd, prøv gjerne selv.

Eksempler:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$
$$(y-1)^2 = y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$(2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 1^1 = 4x^2 - 1$$

Skriv enklest mulig:

$$(x+2)^2 + (x-2)^2 - 2(x+2)(x-2)$$
$$= x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 - 2(x^2 - 4)$$
$$= \underline{\underline{16}}$$

2.2. Faktorisering («skrive som et produkt av enklest mulige faktorer»)

Faktorisere tall: $12 = 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 3 = \underline{\underline{2^2\cdot 3}}$

Faktorisere bokstavuttrykk ved å sette felles faktor utenfor:

$$2x + 4 = \underline{\underline{2(x+2)}}$$
$$3x^3 + 9x = 3(x^3 + 3x) = \underline{\underline{3x(x^2+3)}}$$
$$-3x^2 - 6x = -3(x^2 + 2x) = \underline{\underline{-3x(x+2)}}$$

Merk
Vi skriver ikke gangetegn mellom faktorene her, men du kan om du ønsker det.

Bruke kvadratsetningene baklengs for å faktorisere (særlig 3.):

Husk: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$
$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x+1)(2x-1)$$
$$x^2 - 2 = \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$
$$(x+1)^2 - 4 = \left(\overset{a}{x+1} + \overset{b}{2}\right)(x+1-2) = (x+3)(x-1)$$

2.3. Forkorting av rasjonale uttrykk (brøk uttrykk)

Eksempler

$a)$ $$\frac{x^2+2x}{3}\cdot\frac{27}{3x+6}=\frac{x\cancel{(x+2)}\cdot 27}{3\cdot 3\cancel{(x+2)}}=3x$$ Lurt å faktorisere og forkorte først!

$b)$ $$\frac{9x}{2x+6}+\frac{4}{3x+9}=$$ $fn=6(x+3)$

$$=\frac{9x\cdot 3+4\cdot 2}{6(x+3)}=\frac{27x+8}{6(x+3)}$$

2.4. Fullstendige kvadrater.

Et fullstendig kvadrat er et andregradsuttrykk vi kan faktoriser ved hjelp av 1. eller 2. kvadratsetning, lest baklengs.

$$\boxed{\begin{aligned}&1.\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\&2.\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{aligned}}$$

Hvordan kan vi sjekke om ax^2+bx+c er et fullstendig kvadrat?

Eksempel 1 $x^2-10x+25$, her bør vi sammenligne med 2. kvadratsetning.

$\overset{a^2}{x^2}-\overset{2ab}{10x}+\overset{b^2}{25}$ ser at her må $a=x$ og $b=5$

sjekker "midtleddet" $2ab=2\cdot x\cdot 5=10x$ ok

Vi har her et fullstendig kvadrat $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Eksempel 2

Hva med $4x^2+2x+1$, er det et fullstendig kvadrat. Vi har + og forsøker å «match» uttrykket med 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$\overset{a^2}{4x^2}-\overset{2ab}{2x}+\overset{b^2}{1}$ ser at her må $a=2x$ og $b=1$

sjekker "midtleddet" $2ab=2\cdot 2x\cdot 1=4x$ nei, dette stemmer ikke

Uttrykket er ikke et fullstendig kvadrat.

2.5. Andregradslikninger med to ledd

Generelle 2. gradsuttrykk er på formen: $ax^2 + bx + c = 0$

2. gradsuttrykk uten *x*-ledd (b = 0)

Eksempel 1:

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$ opphever ^{2} med $\sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x = -2 \vee x = 2$ Merk symbolet $\vee$ som betyr eller

Eksempel 2:

$3x^2 - 6 = 0$ "rydder" slik at x^2 kommer alene

$\frac{3x^2}{3} = \frac{6}{3}$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$ Merk, både + og -, pga partalls eksponent

$x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

Eksempel 3:

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$\mathrm{L} = \varnothing$ ingen løsning $\varnothing$ er symbol for den tomme mengde

2. gradsuttrykk uten konstant - ledd (c = 0)

Eksempel 1

$x^2 + 4x = 0$ faktoriserer

$x(x+4) = 0$ Bruker produktregel

$x = 0 \vee x + 4 = 0$ $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

$x = 0 \vee x = -4$

$\underline{\underline{L = \{-4, 0\}}}$

Eksempel 2

$3x^2 + x = 0$

$x(3x+1) = 0$

$x = 0 \vee 3x + 1 = 0$

$x = 0 \vee 3x = -1$

$x = 0 \vee x = -\frac{1}{3}$

$\underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}}}$

2.6. Andregradsformel

For et generelt andregradsuttrykk $ax^2+bx+c=0$, kan vi bruke den så kalte andregradsformelen for å løse:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

<u>Eksempel 1</u> $x^2-6x+9=0$

Her er a = 1, b = - 6 og c = 9 Nb vær nøye med fortegn!

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1} \\ &= \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} \\ &= \frac{6}{2}=3 \end{aligned}$$

Løsning: $\underline{\underline{x=3}}$

<u>Eksempel 2</u> $x^2+3x+2=0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \\ &= \frac{-3\pm1}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=\underline{-1} \\ \frac{-3-1}{2}=\frac{-4}{2}=\underline{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Løsning: $\underline{\underline{L=\{-2,-1\}}}$

<u>Eksempel 3</u> $2x^2+x+4=0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1-32}}{4} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{-31}}{4} \end{aligned}$$

Ingen løsning: $\underline{\underline{L=\varnothing}}$ siden vi har minus under rottegnet.

Andregradsformelen er standard på grafiske Casio kalkulatorer, men tilsvarende program kan legges inn for Texas. Bruk program fra nettside, eller overfør programmet via kabel fra en venn som har…/ last ned fra nettet.
For forståelsen er det lurt å <u>kunne</u> regne 2. likninger for hånd. Senere i kurset løser vi som regel generelle 2. gradslikninger ved hjelp av kalkulatoren, men det er også situasjoner er det er nødvendig å kunne regne forhånd.

Noen spesielle likninger ” Nesten” 2. gradslikninger

Eksempel 1 med 4. gradslikning uten 3. grads ledd.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ La $u = x^2$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$u_1 = 4 \quad \vee \quad u_2 = 1$$

$$x^2 = 4 \quad \vee \quad x^2 = 1 \qquad \underline{\underline{L = \{-2, -1, 1, 2\}}}$$

$$x = \pm 2 \quad \vee \quad x = \pm 1$$

Eksempel 2 med 3. gradslikning uten konstantledd

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ ser etter felles faktor, her x

$$x\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = 2$$

$$\underline{\underline{L = \{0, 2, 3\}}}$$

NB Det er <u>alltid lurt å vurdere om likningen kan forenkles ved faktorisering</u>, for når det er mulig kan vi enkelt løse likningen ved produktregelen.

2.7. Faktorisering av andregradsuttrykk

Multipliserer vi (Ganger vi ut)

$-2(x+1)(x-2)$ får vi

$$= -2\left(x^2 - 2x + x - 2\right) = -2x^2 + 2x + 4$$

<u>Spørsmålet er nå hvordan kan vi gå motsatt vei, det vil si faktorisere 2. gradsuttrykk?</u>

La oss se på nullpunktene til $-2x^2 + 2x + 4$.

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2(-2)} = \frac{-2 \pm 6}{-4} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

Ser du sammenhengen? Nullpunktene nøkkelen til faktorisering.

$-2x^2 + 2x - 4 = -2(x+1)(x-2)$ og nullpunktene er $x = -1$ og $x = 2$

Faktorisering av et 2. gradspolynom:

$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, der x_1 og x_2 er røttene / nullpunktene.

For å faktoriser 2. gradsuttrykk kan vi ha flere muligheter

- Sette utenfor felles faktor (uttrykk uten konstantledd)
- Faktorisere ved å se etter fullstendige kvadrat / bruke 1. eller 2. kvadratsetning
- Bruke nullpunkt/ røttene til å faktorisere. Husk faktoren a foran
  $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

  Merk at vi får to like parenteser dersom vi har en dobbelt rot.