IN1150 Hjemmeeksamen våren 2020

Made by Anonymous dolphin

Om besvarelsen:

- For å løse denne oppgaven har jeg tatt utgangspunkt i boka: «Logiske metoder – Kunsten å tenke abstrakt og matematisk» av Roger Antonsen.
- Har valgt å kalle meg for «Anonymous dolphin» for å dokumentere at alle bilder jeg har brukt er mine og at jeg har skannet dem.
- Jeg har valgt å dele oppgaven hver for seg (hvis du ser en side som er halvt blank, kan du gå ned arket for å gå videre til neste oppgave. Alle oppgaver er løst).
- På noen av oppgavene har jeg gitt er mer grundig forklaring for å vise at jeg har forstått den.

1 Førsteordens logikk og modeller

Oppgave 1.1 Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene {a, b, c, d} slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$$

og hvor R^M ikke er en symmetrisk relasjon.

Svar:

Vi kan tenke oss ut ifra informasjonen som er gitt at vi skal finne en førsteordensmodell $\mathcal{M}$ med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. Det første vi burde tenke på er om det finnes noen funksjonssymboler eller konstantsymboler. Som vi ser på oppgaven, forekommer ikke disse, så vi kan gå videre i oppgaven.

Modellen vår vil oppfylle kravet dersom modellen vår er sånn ved $\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$ og dersom $R^{\mathcal{M}}$ ikke er symmetrisk relasjon. Med tanke på dette, kan vi sette opp alt informasjonen vi har så langt:

$\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$ $\qquad$ $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$

Vi vet at relasjonen vår er refleksiv, men for å oppfylle kravet om at $R^{\mathcal{M}}$ ikke skal være symmetrisk, må vi ha følgende tuppler i $R^{\mathcal{M}}$:

$$R^{\mathcal{M}} = \{<a, a>, <b, b>. <c, c>, <d, d>, <a, b>\}$$

Da vil modellen vår være sann ved $\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$ hvis R^M ikke er en symmetrisk relasjon.

Oppgave 1.2 Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene {a, b, c, d} slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$$

og hvor f^M er en bijektiv funksjon og S^M er en asymmetrisk relasjon.

Svar:

Vi kan tenke oss ut ifra informasjonen som er gitt at vi skal finne en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$.

Modellen vår oppfyller kravet dersom modellen vår er sann ved $\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$ og dersom S^M er en asymmetrisk relasjon og hvor f^M er en bijektiv funksjon. Med tanke på dette, kan vi sette opp alt informasjonen vi har så langt:

$\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$ $\qquad$ $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$

Nå som vi vet at f bør være en bijektiv funksjon, kan vi sette f til å være en mengde på {a, b, c, d}. Denne bijektive funksjonen vil da ha 1 som aritet. Vi kan tolke dette i modellen vår på følgende måte:

$$f^{\mathcal{M}}(a) = b \qquad f^{\mathcal{M}}(b) = c \qquad f^{\mathcal{M}}(c) = d \qquad f^{\mathcal{M}}(d) = a$$

Dersom vi skal oppfylle kravet hvor f^M er en bijektiv funksjon og hvor S^M er en asymmetrisk relasjon, vil S^M relasjonen se slik ut:

$$S^M = \{<b, a>, <c, b>, <d, c>, <a, d>\}$$

Da vil modellen vår være sann ved $\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$ hvis f^M er en bijektiv funksjon og S^M er en asymmetrisk relasjon.

Oppgave 1.3 Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene {a, b, c, d} slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x \exists y T(x, y),$$
$$\mathcal{M} \models \neg \exists x \forall y T(x, y),$$
$$\mathcal{M} \models \neg \exists y \forall x T(x, y),$$

Og hvor T^M er en transitiv relasjon.

Svar:

Vi kan tenke oss ut ifra informasjonen som er gitt at vi skal finne en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$.

Modellen vår oppfyller kravet dersom modellen vår er sann ved $\mathcal{M} \models \forall x \exists y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg \exists x \forall y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg \exists y \forall x T(x, y)$ og dersom T^M er en transitiv relasjon. Med tanke på dette, kan vi sette opp alt informasjonen vi har så langt:

$\mathcal{M} \models \forall x \exists y T(x, y)$ $\quad$ $\mathcal{M} \models \neg \exists x \forall y T(x, y)$ $\quad$ $\mathcal{M} \models \neg \exists y \forall x T(x, y)$ $\quad$ $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$.

Nå som vi vet at T^M skal være en transitivt relasjon for å gjøre modellen sann, kan vi sette T^M til å være en refleksiv relasjon med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. Dette vil da se ut som følgende:

$$T^{\mathcal{M}} = \{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>\}$$

Da vil modellen vår være sann ved $\mathcal{M} \models \forall x \exists y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg \exists x \forall y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg \exists y \forall x T(x, y)$ hvis T^M er en transitiv relasjon.

Oppgave 1.4 Finn en førsteordens modell M med domene {a, b, c, d} slik at

$$\mathcal{M} \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge R(\bar{b}, \bar{a}) \wedge \neg Q(\bar{d}), \quad (1)$$
$$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x)), \quad (2)$$
$$\mathcal{M} \models \forall x(R(x, x) \to P(x)), \quad (3)$$
$$\mathcal{M} \models \forall x \exists y R(x, y), \quad (4)$$

og hvor R^M er en transitiv relasjon. Legg merke til at konstantsymbolene er $\bar{a}$, $\bar{b}$ og $\bar{d}$ her, og ikke a, b og d.

Svar:

Vi kan tenke oss ut ifra informasjonen som er gitt at vi skal finne en førsteordens modell M med domene $|M| = \{a, b, c, d\}$.

Modellen vår oppfyller kravet dersom modellen vår er sann ved formel (1), formel (2), formel (3), formel(4) og dersom R^M er en transitiv relasjon. Konstantsymbolene i dette tilfelle er $\bar{a}$, $\bar{b}$ og $\bar{d}$. Med tanke på dette, kan vi sette opp alt informasjonen vi har så langt:

$$M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge R(\bar{b}, \bar{a}) \wedge \neg Q(\bar{d}) \qquad (1)$$

$$M \models \forall x(P(x) \to Q(x)) \qquad (2)$$

$$M \models \forall x(R(x, x) \to P(x)) \qquad (3)$$

$$M \models \forall x \exists y R(x, y) \qquad (4)$$

Nå som vi har sett på de ulike formlene, kan vi tolke konstantsymbolene. Vi skal tolke konstantsymbolene for å kunne oppfyllet krevet slik at modellen vår blir sann for alle formler, derfor kan vi tolke symbolene slik:

$$\bar{a}^M = c \qquad \bar{b}^M = d \qquad \bar{d}^M = b$$

Nå som vi har tolket konstantsymbolene, er vi i stand til å anvende dem på formlene og kan derfor konkludere med definisjonen på relasjonssymbolene våre, Q^M og P^M. Vi kan tolke relasjonssymbolene på følgende måte:

$$Q^M = \{c, d\} \qquad P^M = \{c, d\}$$

Nå som vi vet at R^M skal være en transitivt relasjon for å gjøre modellen sann, kan vi sette R^M til å være:

$$R^M = \{<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>, <d, c>, <c, c>, <d, d>\}$$

Modellen R^M vil oppfylle formlene (1), (2), (3) og (4).

Oppgave 1.5 Forklar hvorfor modellen du fant i forrige oppgave gjør at (1), (2), (3) og (4) holder.

Svar:

Det vi skal gjøre i denne oppgaven er å bruke modellen vi fant i forrige oppgave, altså:

$$R^M = \{<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>, <d, c>, <c, c>, <d, d>\}$$

(1) Vi kan starte med å se på første formelen $M \models R(\bar{a}, \bar{b}) \land R(\bar{b}, \bar{a}) \land \neg Q(\bar{d})$.
Det første vi merker ved denne funksjonen er at den består av 3 funksjon i seg selv som er bundet sammen med $\land$-konnektivet.
Hvis vi ser på $R(\bar{a}, \bar{b})$, kan vi med andre ord si at den består av <c, d> nettopp fordi vi definerte konstantsymbolene til å være $\bar{a}^M = c$ og $\bar{b}^M = d$. Det samme vil gjelde for $R(\bar{b}, \bar{a})$, men istedenfor skriver at det består av <d, c>.
Vi kan da konkludere med at siste delen i formelen, nemlig $\neg Q(\bar{d})$, kan tolkes som at det vil ikke finnes en relasjon hvor elementet $\bar{d}$ (b) ikke vil finnes i Q^M.
Vi kan se at alle disse 3 «funksjoner» blir oppfylt samtidig, og kan derfor konkludere med at det er sann.

(2) Vi kan ta utgangspunkt i formelen $M \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. For å bevise at dette stemmer, kan vi med andre ord tolke formelen som om den første delen i formelen vår $(P(\bar{a}))$ impliserer den andre delen av formelen $(Q(\bar{a}))$. Dette vil da oppfylles dersom vi anvender denne for alle a som er et element i domene vårt. Vi kan representere dette som følgende:

$$M \models P(\bar{a}) \quad \rightarrow \quad Q(\bar{a}), \quad a \in |M|$$

Vi kan se at dette blir oppfylt dersom vi bruker det vi satt til å være Q^M og P^M, som i dette tilfelle vil da være {c, d}. Vi kan konkludere ut i fra representasjonen at dersom vi bruker et element a fra domene vårt |M| som vil gjøre første delen av formelen vårt sann $(P(\bar{a}))$, så vil automatisk sett gjøre den andre delen av formelen sann $(Q(\bar{a}))$.

(3) Tredje formel vil da se ut som følgende: $M \models \forall x(R(x, x) \rightarrow P(x))$. For å bevise at dette stemmer, kan vi med andre ord tolke formelen som om den første delen av formelen $(R(\bar{a}, \bar{a}))$ impliserer den andre delen av formelen $(P(\bar{a}))$. Dette vil da

oppfylles dersom vi anvende denne for alle a som er et element i domene vårt. Vi kan representere dette som følgende:

$$\mathcal{M} \models R(\bar{a}, \bar{a}) \quad \rightarrow \quad P(\bar{a}), \quad a \in |\mathcal{M}|$$

Vi kan konkludere ut ifra representasjon at dersom vi bruker et element a fra domene vårt |M| som vil gjøre R(ā, ā) sann, så vil automatisk sett gjøre den andre delen av formelen sann (P(ā)).

(4) Den siste formel kan representere som: $\mathcal{M} \models \forall x \exists y R(x, y)$.For å bevise at dette stemmer, kan vi med andre ord tolke formelen som om dersom funksjonen ∃yR(ā, y) blir oppfylt for alle a som er et element i domene vårt |M|, så betyr det at for hver a vi har, så vil det også finnes en b som er også et element i domene vårt. Vi kan representere dette ved å skrive det følgende:

$$R(\bar{a}, \bar{b})$$

For å kunne oppfylle dette, og for å gjøre denne sant, kan vi tenke at følgende tupler vil være disse. Disse tuplene er selvfølgelig et element i modellen vår R^M:

<c, d>, <d, c>, <a, b> og <b, c>

Oppgave 1.6 Forklar hvorfor det ikke finnes noen førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene {a, b, c, d} slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x P(f(x)), \tag{1}$$
$$\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x), \tag{2}$$

og hvor f^M er en injektiv funksjon.

Svar:

Vi kan tenke oss ut ifra informasjonen som er gitt at vi forklare hvorfor det ikke finnes noen førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene {a, b, c, d} slik at:

$$M \models \forall x(Pf(x)) \quad (1) \qquad M \models \exists x \neg P(x) \quad (2)$$

Vi kan tenke oss at det ikke finnes en forsteordens modell M som ikke oppfyller (1) og (2) samtidig. Det kan hende at den oppfyller (1) men ikke (2), eller at den oppfyller (2) men ikke (1). Vi kan tenke oss at så lenge f^M er en injektiv funksjon, så vil vi ikke kunne oppfylle dem samtidig. Vi kan la P^M være en relasjon med aritet 1.

Vi kan tenke at M |= ∀x(Pf(x)) blir oppfylt, altså det blir sann dersom M |= ∀x(Pf(ā)). ā vil da gjelde for alle a som er et element i domene M. Med dette i tankene kan vi da stille oss et spørsmål? Hvordan kan dette oppfylles, altså at det blir sann. Svaret ligger i det at vi fikk vite at f^M er en injekftiv funksjon. Vi kan da konkludere at dersom dette skulle være oppfylt, altså at f^M er en injekftiv funksjon, må hver eneste verdi i domenet vårt som vi sender inn til funksjonen, skal gi oss et svar som er ulikt den vi sendte inn.

Alt tatt i betraktning, kan vi da vurdere at dersom funksjonen går fra en mengde til samme mengde og vi har bestemt et krav om at funksjonen skal være injektivt, vil vi konkludere med at denne funksjonen blir i tillegg surjektiv.

Konklusjonen vår i dette tilfelle vil da føre til at P^M inneholder alle mulige verdier fra domenet til selve modellen. Som en konsekvens, vil da den andre formelen,

$$M \models \exists x \neg P(x)$$

ikke kunne være oppfylt. Grunnen til dette vil da være at x som er et element i domene vårt, altså

$$x \in |M|$$

vil ikke være i stand til å oppfylle ($\neg P(x)$) den følgende delen (markert med rød) fra den andre formelen;

$$M \models \exists x \neg P(x)$$

Den endelige konklusjonen i dette tilfelle er at det ikke vil finnes en førsteordens modell *M* med den følgende domene, {a, b, c, d} som oppfyller formlene samtidig.

(Oppgave 2 lengre ned)

2 Mengder, partielle ordninger og grafer

Oppgave 2.1 La M være en mengde som er lukket under union, det vil si at hvis $A \in M$ og $B \in M$, så er $A \cup B \in M$. Bevis følgende påstand med matematisk induksjon:

$$\text{Hvis } A_1, A_2, \ldots, A_n \in M, \text{ så } (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \in M, \text{ for alle naturlige tall } n \geqslant 2.$$

Svar:

Vi kan tenke at for å bevise påstanden med matematisk induksjon må vi beviset at påstanden holder for alle elementer i basismengden (altså basissteget). I tillegg, hvis mengden er lukket under en operasjon som gjør at x fremkommer fra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og påstanden holder for alle disse, så vil den også for x. Dermed har vi også bevist induksjonssteget, noe som vil fullføre vårt bevis.

Basissteget

I prinsippet vil basissteget gjelder for tallet 0. I vårt tilfelle må påstanden holde for alle naturlige tall n som er større eller lik 2, altså

$$n \geqslant 2.$$

Nå som vi har basissteget kan vi gå videre til induksjonssteget.

Induksjonshypotesen

Vi kan starte med å se litt på de ulike alternativene vi har. Vi kan anta at n vil holde for et vilkårlig tall. Hvis vi da starter med å anta at t A1, A2 ∈ M, så kan vi også si at dette vil da være det samme som A1 ∪ A2 ∈ M siden mengden M er lukket under unionen.

Nå som vi vet at påstanden vår vil holde for et vilkårlig tall *n,* kan vi anta at:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in M$ som vil igjen føre til at $(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) \in M$.

Induksjonssteget

Nå som vi har induksjonshypotesen vår på plass kan vi anta at

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in M$$

Oppgaven vår i dette tilfelle vil da være å bevise at dette vil føre til at

$$(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) \in M.$$

Konklusjon

Hvis vi ser på induksjonssteget vårt vil vi se at vi har $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$. Noe som er merkelig at dersom det siste elementet finnes, så vil det være fordi den kom etter elementet som er før den, osv. Med andre ord kan vi at $(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}$.
Dette vil da også for induksjonshypotesen vår, altså dersom vi har det følgende:

$$(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) \in M$$

Og siden vi også har antatt at $A_{n+1} \in M$, så vil dette innebære det følgende:

$$(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1} \in M$$

Nå som vi har vist at bassisteget og induksjonssteget holder, så har vi ved matematisk induksjon bevist at hvis $A_1, A_2, \ldots, A_n \in M$, så er $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \in M$ for alle naturlig tall n som er større eller lik 2, altså:

$$n \geqslant 2.$$

Oppgave 2.2 La $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ og la L være A^*, det vil si mengden av alle strenger over A. La $x \prec y$ bety at det finnes en streng $s \in L$ slik at $xs = y$. For eksempel vil $aaa \prec aaabbb$ (fordi vi kan velge $s = bbb$), men $b \nprec aab$ (fordi det ikke finnes noen s slik at $bs = aab$). Bevis at $\prec$ er en partiell ordning.

Svar:

Oppgaven vår er å bevise at $\prec$ er en partiell ordning. For å kunne bevise må vi ha i bakhodet at en binær relasjon på mengden S er en partiell ordning hvis den er anti-symmetrisk, refleksiv og transitivt.

Anti-symmetrisk

For å bevise at $\prec$ er en partiell ordning ved hjelp av anti-symmetri, må vi kunne bevise at det ikke finnes to forskjellige elementer som er relatert til hverandre. For å kunne nå dette, kan vi for eksempel anta at vi har en vilkårlig x og y som er et element i L. Med andre ord:

$$x, y \in L$$

Nå som vi har antatt at x og y er vilkårlig elementer i L ($x, y \in L$) kan vi konkludere med at for alle x, y vil være sånn at:

$$<x, y> \in L \quad \text{og} \quad <x, y> \in L$$

Vi kan da anta at $x \prec y$, i tillegg til at $y \prec x$. Nå som vi har dette kan vi da konkludere med at det vil finnes en $\boldsymbol{s}$ som er et element i L, sånn at $xs = y$ og omvendt, altså at det vil finnes en $\boldsymbol{t}$ som er et element i L, sånn at $yt = x$.

Nå som vi har dette kan vi da konkludere med at dette vil føre til at $xst = x$. Dette vil skje hvis og bare hvis $st = \Lambda$. Dette vil føre da at når vi har $x \prec y$ og det motsatte, $y \prec x$, at vi ender opp med å ha at $x = y$.

Refleksivitet

For å bevise at $\prec$ er en partiell ordning ved hjelp av refleksivitet, må vi kunne bevise at i en relasjon alt er relatert til seg selv. For å kunne nå dette, kan vi for eksempel anta at vi har en vilkårlig x som er et element i L:

$$x \in L$$

Ut i fra denne antakelsen kan vi også anta at $x \prec x$. Dette innebærer at det mulig finnes en s som er et element i L (samme som x):

$$s \in L$$

slik at hvis setter det etter x, så vil vi fortsatt få x. Vi kan representere dette som det følgende:

$$x\mathbf{s} = x$$

Hvis vi prøver å finne dette elementet ender vi opp med at s vil være lik den tomme strengen. Grunnen til dette er fordi vi allerede vet at den tomme strenger er et element i L, $\Lambda \in L$. Hvis vi setter den tomme strengen til å være s, får vi at:

$$x\,\boldsymbol{\Lambda} = x.$$

Nå som vi vet at x var et vilkårlig tall, kan vi da konkludere med at dette vil gjelde for alle x som er elementer i L.

Transitivitet

For å bevise at $\prec$ er en partiell ordning ved hjelp av transitivitet, kan vi anta at vi velger 3 vilkårlig elementer, (x, y, z) som er elementer i L. Vi kan skrive dette som:

$$x, y, z \in L$$

Nå som vi har valgt 3 vilkårlig elementer kan vi også anta $x \prec y$ og anta at $y \prec z$. Nå som vi har antatt dette, kan vi da konkludere med at vi har s som er et element i L:

$$s \in L$$

Nå som vi har at s er et element i L, kan vi da at dette vil føre til:

$$xs = y \Rightarrow y = xs$$

I tillegg til å ha en s som er et element i L, har vi en t som er et element i L ($s \in L$) slik at:

$$yt = z$$

Hvis vi da klarer å vise at $x \prec z$, har vi da klart å vise at relasjonen er transitivt. For å gjøre dette, kan vi da finne en streng k som er et element i L ($k \in L$) som vil gi oss følgende resultat:

$$xk = z$$

Hvis vi da kommer tilbake til den tidligere antagelsen vår, vil vi da finne raskt ut at vi hadde at $xs = y \Rightarrow y = xs$. Hvis vi da bruker den og setter den til å være sånn:

$$yt = z \Rightarrow xst = z$$

så har vi klart å bevise at $yt = z \Rightarrow xst = z$, noe som betyr at vi har en streng $k = st \in L$ som vil da føre til $x \prec z$.

Konklusjonen

Ved hjelp av antakelser og eksempler har vi nå klart å bevise at relasjonen $\prec$ er anti-symmetrisk, refleksiv og transitiv, noe som betyr at den er en partiell ordning.

Oppgave 2.3 La G være grafen hvor $V = \{a, b\}$ og $E = \{\{a, b\}\}$. Spesifiser grafen G_C.

Svar:

Vi har fått informasjon som sier at V vil da være nodene i grafen vår, mens E vil være kantene i den. Hvis vi da teller antall noder i V, kan vi da komme frem at vi har 2 noder.

Oppgaven vår er å spesifisere grafen G_C. Nå som vi vet hva V og E står for, kan vi konkludere med at a inneholder 2 ulike relasjoner til b. Hvis vi da tar utgangspunkt i det vi allerede vet vil vi da kunne komme frem til følgende tupler:

$$\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$$

Nå som vi har disse to relasjoner, må vi finne ut om nodene kan være naboer i G_C. For å komme oss frem til dette svaret må en av de følgende utsagn være sann:

$$x = z \text{ og } \{y, w\} \in E \qquad \text{eller} \qquad x = z \text{ og } \{y, w\} \in E$$

Nå som vi har 2 «utsagn» vi kan ta utgangspunkt i, kan vi erstatte de med a og b. Det vil da se ut som følgende:

Dersom vi erstatter <x, y> med <a, b> og erstatter <y, x> med <b, a> kan vi fort merke til at a ikke tilsvarer b, altså at a ikke er lik b. I tillegg vil {b, a} ikke være et element i b. Nå som vi har gjort dette, kan vi anvende det samme prinsippet i det andre utsagnet ($x = z$ og $\{y, w\} \in E$) og ender likevel med å få at b ikke tilsvarer a, altså at b ikke er lik a og at {ab} er et element i b.

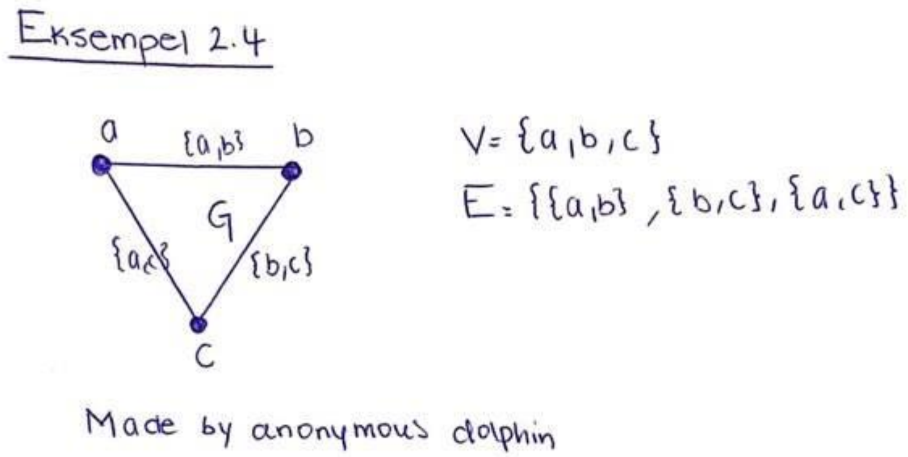
Konklusjon

Konklusjonen vår vil være at nodene vi har, ikke oppfyller kravet for å bli naboer og ender opp med at G_C blir en tom graf. Denne grafen vil da inneholde nodene <a, b>, <b, a>, men har dessverre ingen kanter.

Oppgave 2.4 Anta at G er en grad med n noder. Finn en formel som uttrykker antall noder i grafen G_C. Gi en forklaring på hvorfor denne formelen gir antall noder i G_C.

Svar:

La oss anta at vi har en graf med n noder. Hovedsakelig så består en graf av en endelig ikke tom mengde **V** av noder. I tillegg så har vi en mengde E av kanter. La oss se på følgende eksempel:



Ut ifra det eksemplet som er gitt, kan vi konkludere med at en tuppel på formen <x, y> består av to 2 forskjellige noder. Grunnen til at det må være 2 forskjellige noder (x og y) er fordi x ikke kan være lik y, for da hadde vi hatt for eksempel en løkke <x, x>.

Nå som vi har satt et krav på at x ikke kan være lik y ($x \neq y$), kan vi ha dette i bakhodet og komme oss frem til neste steg. Vi kan da anta at på første plassen vår kan vi ha n muligheter. Dette vil da føre til at vi har n – 1 muligheter på andre plassen vår.

Hvis vi da skal representere dette som en formel som utrykker antall noder i grafen G_C, kunne vi da representere dette som det følgende:

$$G_C = n * (n - 1)$$

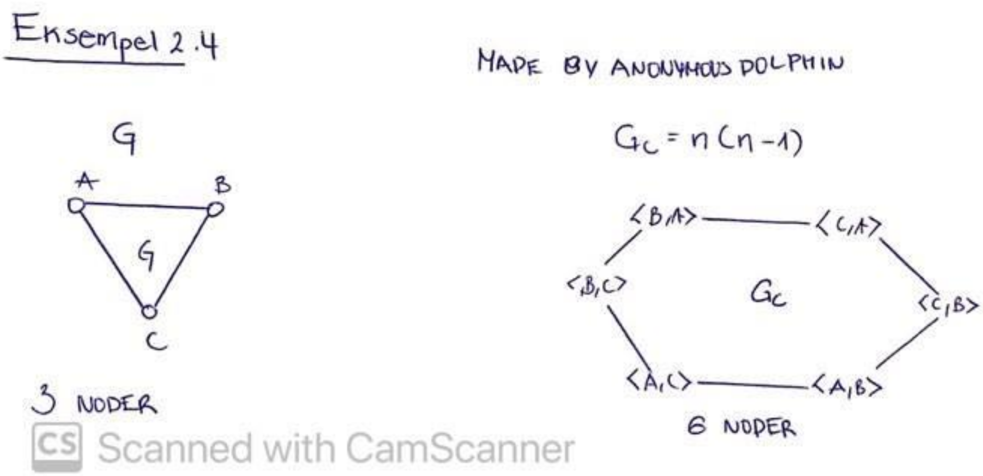
Hvis vi da henter antall noder i V fra første eksemplet, som er lik 3 noder (V = {a, b, c}) og anvender den på formelen vil vi da få følgende resultat:

$G_c = n * (n - 1)$

$G_c = 3 * (3 - 1)$

$G_c = 3 * (2)$

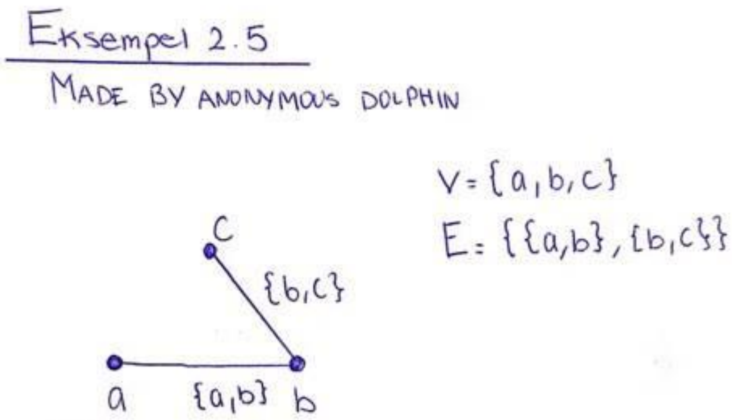
$G_c = 6$



Vi kan se på følgende eksempel for å bevise at formelen vår stemmer.

Oppgave 2.5 La nå G være grafen med nodene V = {a, b, c} og kantene E = {[a, b}, {b, c}}. Vis at dette er et *moteksempel* til påstanden som sier «for alle G, hvis G er sammenhengende, så er G_C sammenhengende.

Svar:



Det vi har gjort i eksemplet over er å representere nodene V og kantene E. Oppgaven vår er å bevise at dette er et *moteksempel* til påstanden som ligger lengre oppe.

Vi kan tenke oss at denne grafen er sammenhengende fordi det finnes en sti mellom alle par av nodene i grafen, altså at vi kan komme oss frem fra enhver node til enhver annen node ved å følge kantene.

Hvis vi skulle gjøre dette med grafen G_C, hadde vi tatt utgangspunkt i den informasjonen vi har allerede, som er antall noder i grafen vår og de kantene den har. Hvis vi skulle bruke formelen fra forrige oppgave hadde vi fått at:

$$G_c = n * (n - 1)$$

$$G_c = 3 * (3 - 1)$$

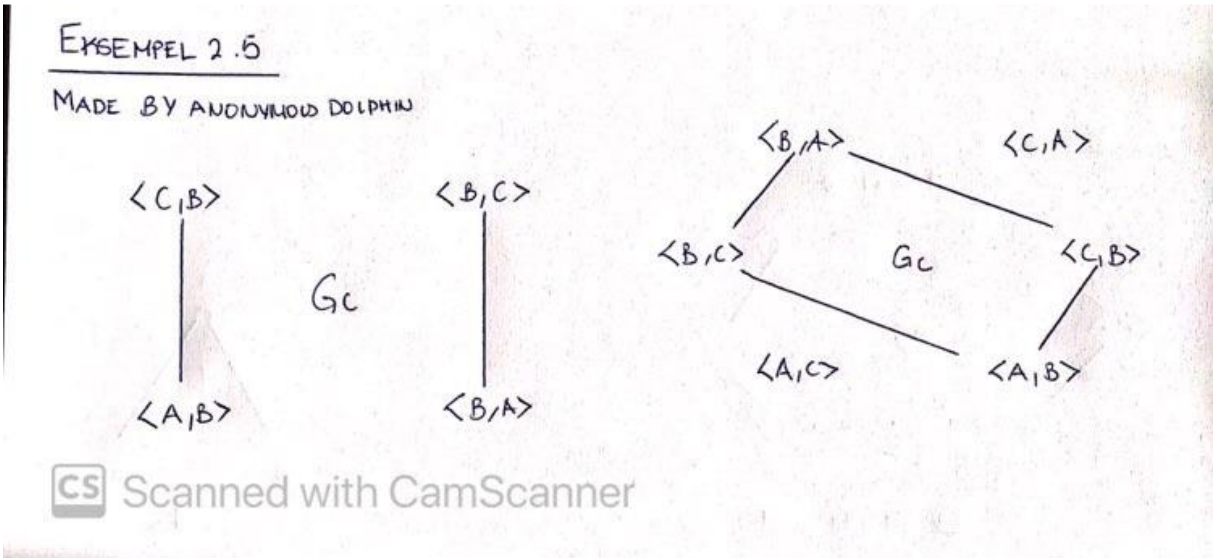
$$G_c = 3 * (2)$$

$$G_c = 6$$

Vi hadde da kommet frem at vi hadde fått 6 ulike noder, noe som betyr at i prinsippet den hadde hatt 6 kanter. Men, hvis vi ser på de kantene E, altså grafen E, kan si se at vi har 2 kanter. Vi kan finne andre noder med relasjoner til nodene fra forrige graf, altså graf G, for å finne kantene (tuplene) til grafen G_C:

$$G_c = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

Vi kan representere det følgende visuelt:



Vi kan konkludere med at tuplene til G_c er $G_c = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$. Svaret vi fikk er ikke i samsvar med kravene til funksjonen vår om at $G_c = n * (n - 1)$, siden vi får bare 4 og ikke 6. Vi kan derfor konkludere med at G_c ikke er sammenhengende med graf G. Vi har dermed bevist at dette vil da være et *moteksempel*.

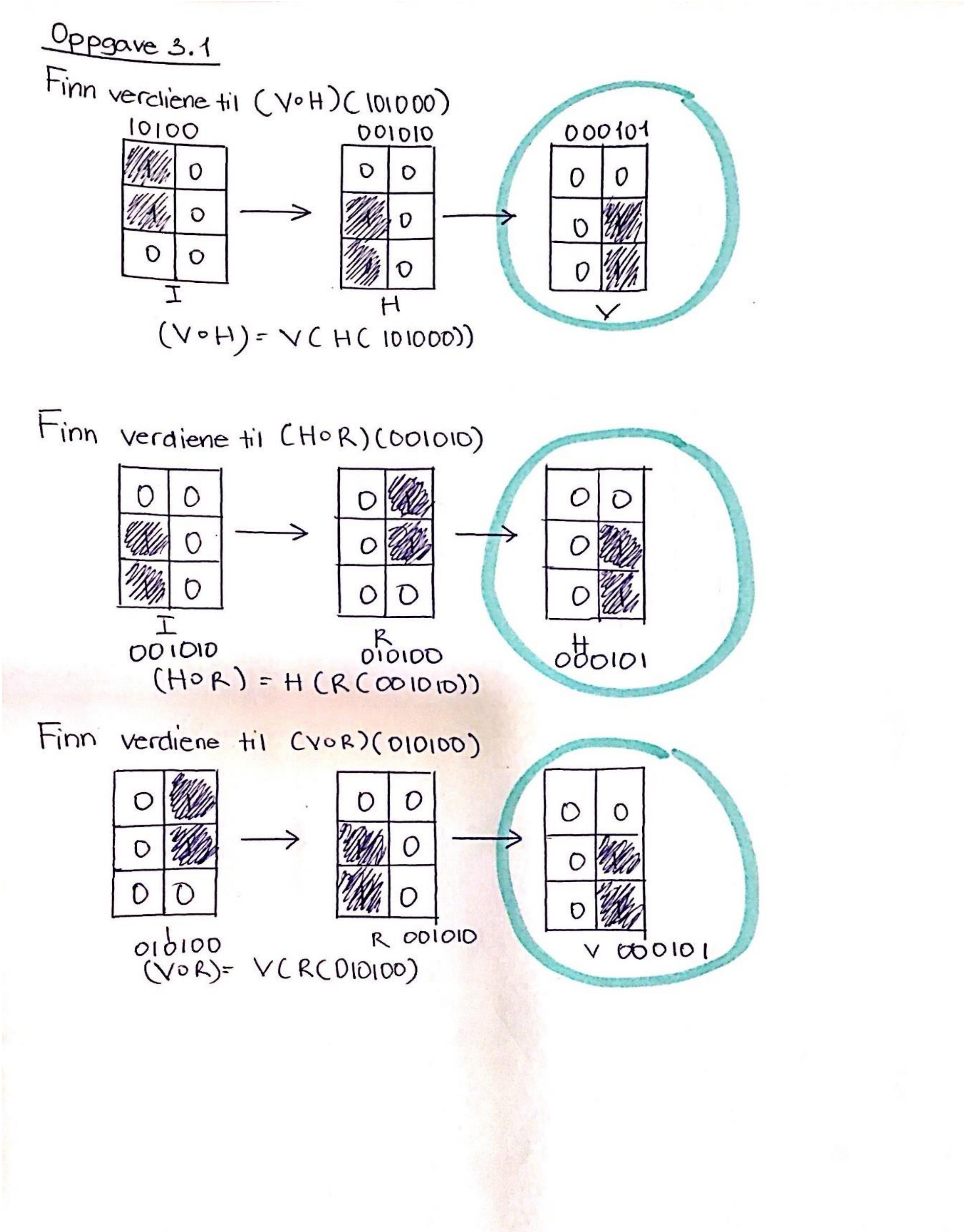
(Oppgave 3 lengre ned)

3 Figurer og funksjoner

Oppgave 3.1

Finn verdiene t (V ∘ H) (101000), (H ∘ R) (001010) og (V ∘ R) (010100).

For å løse denne oppgaven kan vi tenke at vi starter med å plassere bitstrengene på funksjonen I, altså identiteten, og ut i fra denne, bygge oss videre på de neste funksjonene.



Etter å ha representert de som bitstrenger i rutenett, ender vi opp med samme resultatet i alle tilfeller. For å være mer nøyaktig, er det dette vi har gjort for å komme oss til svaret:

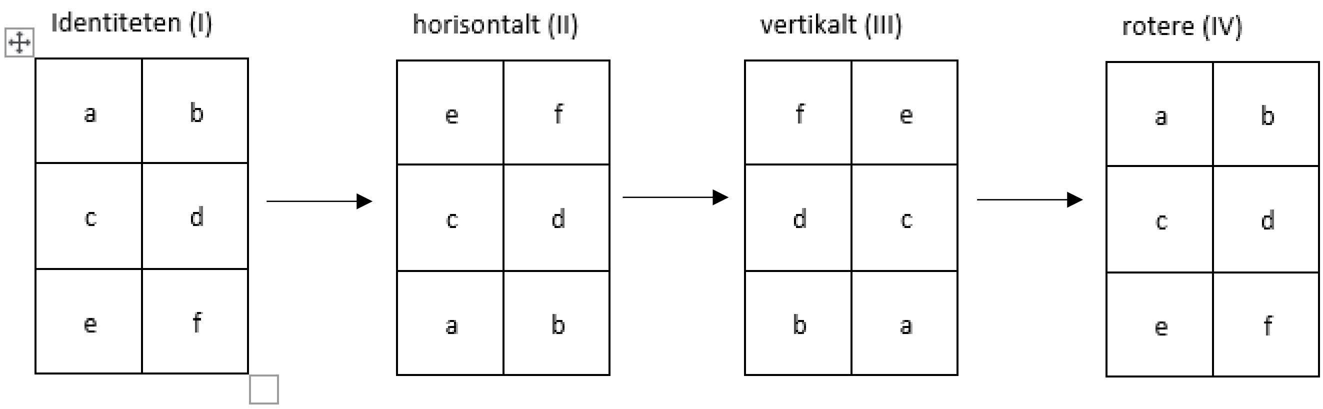
1. (V ∘ H) (101000) = V (H (101000)) = V (001010) = **000101**
2. (H ∘ R) (001010) = H (R (001010)) = H (010100) = **000101**
3. (V ∘ R) (010100) = V (R (010100)) = V (001010) = **000101**

Oppgave 3.2 Spesifiser funksjonen (R ∘ (V ∘ H)).

Svar:

Siden vi skal spesifisere funksjonen, kan vi tenke oss at vi skal følge trinnene som er gitt på funksjonen. Med andre ord, vi skal starte med funksjonen *identiteten.* Deretter skal vi speile figuren vår *horisontalt* (H), deretter *vertikalt* (H) og til slutt *rotere* (R) figuren. Vi kan forestille oss dette som det følgende. Vi har (R ∘ (V ∘ H)) og vi skal starte med identiteten, så vi kan si at R (V (H(abcdef)) og ender til slutt med å fa det samme resultatet altså I(abcdef).

Vi kan representere dette som følgende:



I. Vi først tar utgangspunkt i identitet funksjonen.
II. Deretter anvender vi *horisontalt-funksjonen* på identiteten, altså (I).
III. Når vi er ferdig med det, anvender vi resultatet fra (II) med *vertikalt-funksjonen* (III)
IV. Sist, men ikke minst, anvender vi resultatet fra (III) med *rotere-funksjonen*. Vi ender opp med samme resultat som i begynnelsen, altså *identiteten*. Vi kan da konkludere med at (R ∘ (V ∘ H)) = I

Oppgave 3.3 La $G_1 = \{I, R, V, H\}$. Bevis at $(G_1, \circ)$ er en gruppe.

Svar:

Hvis vi ser på G_1 kan vi se at det tilsvarer $G_1 = \{I, R, V, H\}$. Oppgaven vår er å kunne bevise at $(G_1, \circ)$ er en gruppe. For at vi skal kunne beviset dette må vi se om disse oppfyller reglene for gruppeaksiomene.

Ut ifra eksemplene som er gitt i eksamen kan vi konkludere med at identitetselementet for den binære operasjonen ∘ tilsvarer **I** (*identiteten*). Grunnen til dette er fordi uansett om vi anvender **I** med ∘ så kommer ingenting til å forandres.

En annen ting å merke seg er at operasjonen som er gitt, ∘, er assosiativ. Vi kan anta at $f: M \rightarrow M$, at $g: M \rightarrow M$ og at $h: M \rightarrow M$. Når vi har dette i tankene vil da disse, altså f, g og h være et element i G_1 ($f, g, h \in G1$). Vi kan anta ut fra definisjonen at:

$$f \circ g = f \circ g(x) = f(g(x))$$

Dette innebærer at parantessene ikke vil påvirke resultatet. Dette betyr da $(f \circ g) \circ h$ er det samme som vi hadde skrevet $f \circ (g \circ h)$. Hvis vi nå har dette i tankene og bruker definisjonen for operasjonen:

1. $f \circ (g \circ h)\ (x) = (f)\ (g \circ (h(x)) = (f) \circ (g\ (h(x))) = (f\ (g\ (h\ (x))))$
2. $(f \circ g) \circ h\ (x) = f \circ g \circ (h(x)) = f \circ (g\ (h(x))) = (f\ (g\ (h\ (x))))$

for alle x der x er et element i M ($x \in M$).

Vi kan se at rekkefølgen på parantessene ikke spiller noen viktig rolle.

Sist, men ikke minst vil alle elementer ha en invers. Det som er viktig å merke seg er at alle elementer i G_1 har en invers. Hvis vi anvender invers til hvert element vil vi raskt finne ut at hvis vi tar en operasjon og bruker invers, vil vi da få det samme. La oss se på følgende eksempel for å se dette visuelt:

1. $R \circ R = I$
2. $H \circ H = I$
3. $V \circ V = I$

Konklusjonen her er at $(G_1, \circ)$ er en gruppe fordi **1. alle elementer har en invers**, **2. det finnes et identitetselement for ∘ (I = identiten)** og **3. operasjonen er assosiativ** siden parantessetingen ikke spiller noen roller og får samme resultat.

Oppgave 3.4 Avgjør om (G_1, $\circ$) i forrige oppgave er en abelsk gruppe. Begrunn svaret ditt.

Svar:

En veldig viktig ting å ha i bakhodet er at for å avgjøre om noe tilhører en abelsk gruppe, så må vi sørge for at operasjonen $\circ$ er kommutativ. Alle gruppeaksiomene vi jobbet med i forrige oppgave er riktig og dermed bevist. Det eneste vi trenger å gjøre nå er å sjekke om rekkefølgen på våre argumenter spiller en rolle.

Etter å ha testet med forskjellige rekkefølger på funksjonene (Eks: V $\circ$ H, R $\circ$ V, ...) har jeg kommet til konklusjonen på at dette vil ikke påvirket resultatet, altså at rekkefølgen ikke spiller noen rolle. Derfor kan vi konkludere med at (G_1, $\circ$) er en abelsk gruppe.

Oppgave 3.5 Finn alle elementer som er fikspunkter for funksjonen V

Svar:

Vi skal finne alle elementer som er fikspunkter for funksjonen V. Hvis vi tar utgangspunkt i alle elementer fra mengden M og tar i bruk følgende forme

$$f(x) = x$$

med funksjonen V, vil vi da få alle elementer som er fikspunkter:

1. 111111
2. 111100
3. 110000
4. 110011
5. 000000
6. 001100
7. 000011
8. 001111

Vi kan konkludere med at det finnes 8 elementer som er fikspunkter for funksjonen (V).

Oppgave 3.6 Vis at ~ er en ekvivalensrelasjon.

Svar:

Før vi begynner med å vise at ~ er en ekvivalensrelasjon, kan vi ha i bakhodet at for en binær relasjon på mengde S skal være en ekvivalensrelasjon, må den være symmetrisk, transitivt og refleksivt.

For å kunne løse denne oppgaven kan vi da si at ~ vil da være relasjonen på M. Deretter dersom $x \sim y$ og det finnes en funksjon som er et element i G_1:

$$f \in G_1$$

så vil dette føre til at $f(x) = y$ og dermed har vi bevist at ~ er en ekvivalensrelasjon. Vi kan starte med å se på beviset.

Symmetrisk

Vi kan starte med å vise at ekvivalensrelasjonen er symmetrisk. For dette kan vi starte med å anta at vi har en x og y som er vilkårlige elementer i M, med andre ord:

$$x, y \in M$$

Nå som vi har antatt at x er et element i M og at y også er et element i M, kan vi også anta at:

$$x \sim y$$

Dette betyr at vi må ha en funksjon som er et element i G_1 som vil da føre til at når vi setter inn en x i denne funksjonen, så vil dette være lik y. Dette vil da betyr det samme som om vi hadde y og hadde fått at den er lik x settet inn i funksjonen. Vi kan representere dette som følgende:

$$f \in G_1 \qquad \text{-->} \qquad f(x) = y \Rightarrow y = f(x)$$

Når vi har tatt alt i betraktning, kan vi konkludere at dette vil føre til at $y \sim x$. Hvis vi da fusker at for $x \sim y$ hadde vi en funksjon, så vil $y \sim x$ ha også en funksjon for seg. Funksjonen vil da ha samme prinsipper som den forrige funksjon, men istedenfor for å sette enn x inn i funksjon, bytter vi x med y og y med x for noe som likner på dette her:

$$f(y) = x$$

Nå som vi har alle disse funksjoner, kan vi da ta $f(y) = x$ og $f(x) = y$ og sette det sammen på følgende måte:

$$f(f(x))$$

Hvis vi regner ut svaret, vil vi da få noe liknende:

$$f(f(x)) = x$$

Hvis vi da tar utgangspunkt i forrige oppgave, der vi måtte bevise at $(G_1, \circ)$ er en gruppe, så konkluderte vi med at alle funksjoner i G_1 har en invers. Dette betyr at dersom for alle funksjoner i G_1 så vil det være slik at:

$$f(f(x)) = x$$

I begynnelsen av forklaringen erklærte vi at x og y var vilkårlige elementer i M. Derfor kan vi konkludere at dette vil gjelde for alle elementer i M og kan derfor konkludere med at relasjonen er symmetrisk.

Refleksiv

Vi skal nå vise at ekvivalensrelasjonen er refleksiv. For dette kan vi starte med å anta at vi har en x som er et vilkårlig element i M, med andre ord;

$$x \in M$$

Nå som vi har antatt at x er et element i M, kan vi også anta det følgende:

$$x \sim x$$

Dette betyr at vi må ha en funksjon som er et element i G_1 som vil da føre til at når vi setter inn en x i denne funksjonen så, så vil vi få ut det samme x vi satt inn. Viktig å merke seg at dette må gjelde for alle x som er et element i M. Vi kan representere dette som det følgende:

$$f \in G_1 \quad\quad --> \quad f(x) = x$$

Hvis vi da ser etter funksjoner på forrige oppgaven der vi måtte beviset at $(G_1, \circ)$ er en gruppe, kan vi fort se at det finnes en funksjon som oppfyller disse kravene. Det er funksjonen som identiteten (I). Viktig å nevne at $I \in G_1$.

Hvis vi da tar utgangspunkt i I (identiten) og anvender den på funksjonen vi fant, får vi dette her:

$$I(x) = x$$

I begynnelsen av forklaringen erklærte vi at x var et vilkårlig element i M, kan vi da konkludere med at dette vil gjelde for alle x (elementer) i M. Vi kan representere dette som følgende:

$$\forall x, x \in M$$

Vi kan konkludere med at relasjonen er refleksivt.

Transitivt

Vi skal nå vise at ekvivalensrelasjonen er transitivt. For dette kan vi starte med å anta at x, y og z er vilkårlige elementer i M. Vi kan representere dette som følgende:

$$x, y, z \in M$$

Nå som vi har antatt at x er et element i M, at y er et element i M og at z også er et element i M, kan vi også anta at:

$$x \sim y \quad\quad \text{og} \quad\quad y \sim z$$

Vi kan tolke dette som om vi har samlet to forskjellige steg inn i ett steg. Nå som vi har dette i tankene, kan vi da dedusere det følgende:

$$f(x) = y \Rightarrow y = f(x) \qquad \text{og} \qquad g(y) = z$$

Oppgaven vår er å vise at to steg kan samles i ett, altså istedenfor å utføre noe i 2 steg, at vi gjør det i ett. Vi vil da kunne komme frem til det følgende:

$$x \sim z \ (1 \text{ steg})$$

Dette vil da kunne oppfylles dersom vi klarer å finne en funksjon som i de tidligere eksemplene som innebærer at h er et element i G_1, som igjen vil gi oss muligheten til å skrive det følgende funksjonen:

$$h(x) = z$$

Nå som vi har denne informasjonen tilgjengelig kan vi konkludere med at dersom vi har følgende funksjoner kan vi komme oss frem til siste steg:

$$g(y) = z \Rightarrow g(f(x)) = z$$

Konklusjonen vår i dette tilfelle vil da være at dersom sammensetning av hvilken som helst funksjon i G_1 er en lukke operasjon, så har vi at formelen som er oppe (g(f(x))) vil være et element i G_1.

I begynnelsen av forklaringen erklærte vi at x, y og z var vilkårlige elementer i M, kan vi da konkludere med at dette vil gjelde for alle elementer i M. Vi kan konkludere med at relasjonen er transitivt.

Konklusjonen

Nå som vi har bevist at ~ er en ekvivalensrelasjon, kan vi konkludere med at den er symmetrisk, refleksiv og transitivt.

Oppgave 3.7 Hva er [101000], det vil si ekvivalensklassen til 101000?

Svar:

For å kunne løse oppgaven burde vi anta at vi har en evkivalensrelasjon ~ på mengden M. Ut i fra den, er vi i stand til å løse oppgaven.

Vi kan tenke oss at ekvivalensklassen til 101000 er mengden av alle elementer i M som er relatert til 101000. [101000] vil da være denne mengden som vi har skrevet i forrige setning. Dette kan representeres på følgende måte:

$$\{y \in M \mid y \sim 101000\}$$

Hvis vi da prøver å finne alle elementer som er relatert til 101000 får vi da følgende mengde:

{

101000,

010100,

001010,

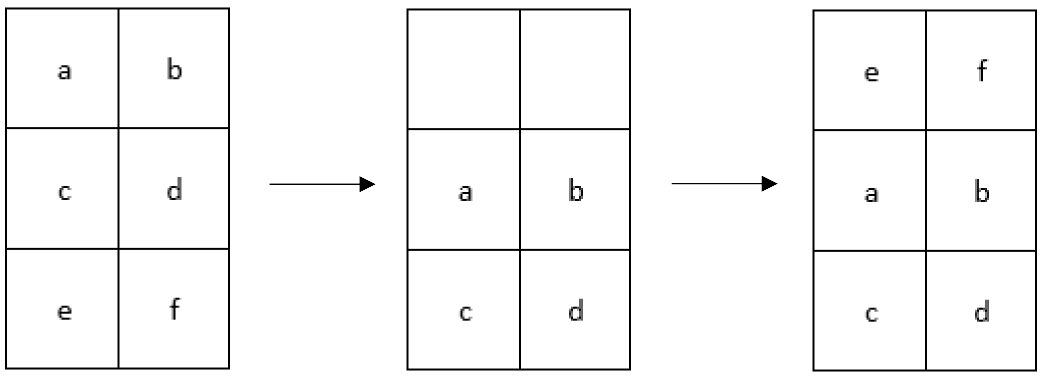
000101

}

Oppgave 3.8 Forklar meg egne ord hva D gjør.

Svar:

Hvis vi ser på definisjonen av oppgave 3.8, så ser vi fort at funksjonen D gjør noe merkelig. Vi kan starte med å si at x er et element i vår mengde M. Vi kan tenke at hvis vi setter x inn i funksjonen D, det vil si D(x), så vil radene gå et hakk ned. Hvis vi formulerer med andre ord så vil elementene i første rad gå til andre rad, elementene som var i andre rad vil flyttes til rad nummer tre, og elementene som lo i det tredje radet vil flyttes opp til det første radet. Vi kan tenke på dette som en slags loop. Hvis vi startet med D(abcdef) vil vi ende opp med D(efabcd)

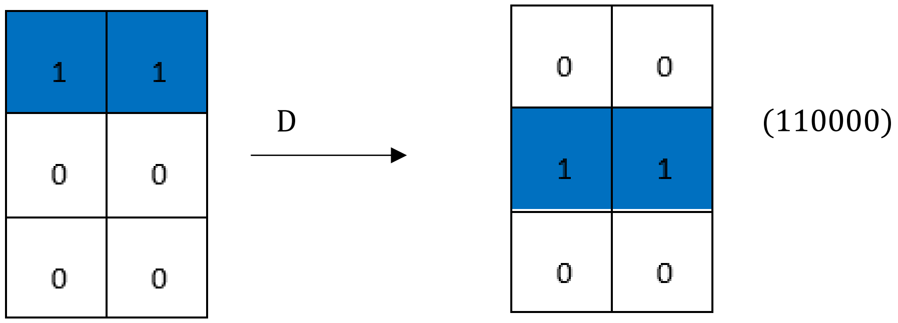


Oppgave 3.9 Finn verdiene til D (110000), D (D (110000)), og D (D (D (110000))).

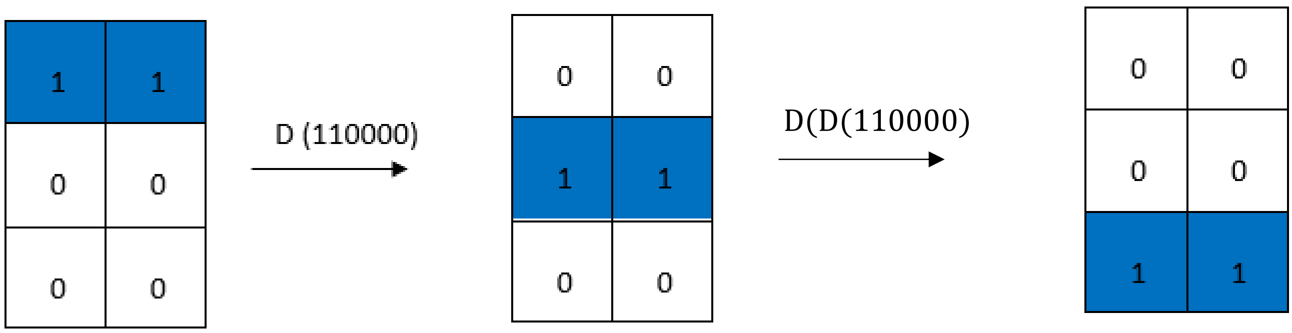
Svar:

I denne oppgaven skal vi finne verdiene som er oppgitt over. Det vi kan gjøre for å finne de er å bruke funksjonen D(x). For å gjøre dette lettere og mer visuelt, kan vi sette disse inn i et rutenett for å komme oss frem til svaret.

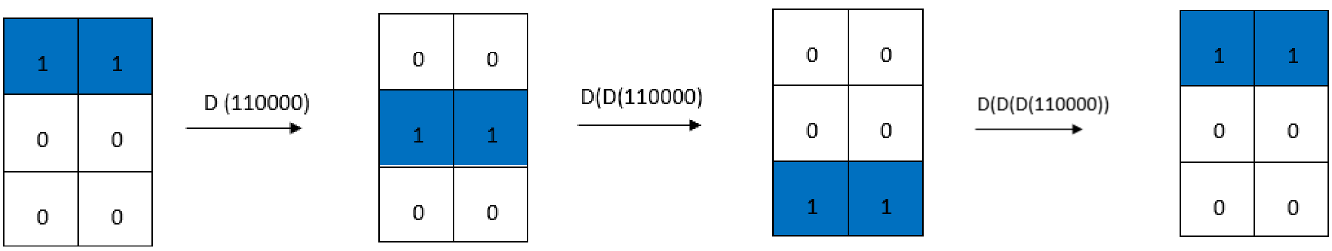
D (110000) = Siden vi skal flytte verdiene / elementene fra første rad til andre, osv. kan vi bare si at D (110000) er lik **001100**



D (D (110000)) = Siden vi vet at D (110000) ga oss 001100 så kan vi bruke det og flytte en gang til verdiene et hakk ned, så får vi at resultatet er **000011**.



D (D (D (110000))) = Siden vi vet at D(D(110000)) ga oss 000011 så kan vi bruke det og flytte en gang til verdiene et hakk ned (i dette tilfelle vil 11 gå til første rad) og ender med å få 110000, altså det vi startet med.



Oppgave 3.10 La $G_2 = \{I, D, H\}$ og G^*_2 være tillukningen av G_2 under $\circ$, det vil si den minste mengden som inneholder {I, D, H} og som er lukket under $\circ$. Finn ut om G^*_2 skiller seg fra G_2. Er de identiske? Inneholder G^*_2 flere elementer enn G_2? I så fall, hvilke elementer?

Svar:

Hvis vi tar utgangspunkt i oppgaven, kan vi si at G_2 tilsvarer {I, D, H}, altså at $G_2 = \{I, D, H\}$. Deretter har vi at G_{*2} er tillukningen av G_2 under $\circ$. Vi kan derfor anta eller bestemme at denne vil være den minste mengde som inneholder G_2, altså {I, D, H} og som er dermed lukket under $\circ$. Hvis vi tar da utgangspunkt i dette kan vi gjøre som følgende:

$$I \circ I = I$$

$$I \circ D = D$$

$$I \circ H = H$$

Når vi har kommet frem til disse, legger vi de i tillukningen vår. Vi kan konkludere med at tillukningen vår inneholder disse {I, D, H}. Men, i tillegg til å legge disse i tillukningen vår kan vi danne «flere elementer» ut ifra disse, men operasjon $\circ$. Vi kan for eksempel danne operasjoner som uansett hvor mange ganger du bruker dem, kommer til å gi alltid samme resultat;

$$I \circ I \circ D = D$$

$$D \circ D \circ D = D$$

Disse trenger vi ikke å legge inn i tillukninger vår, fordi de vil gi samme resultat. Derimot, hvis vi anvender de følgende operasjoner, kommer vi til å nye resultater som kan legges inn i tillukningen vår, som for eksempel:

$D \circ D$ $\qquad$ $D \circ H$ $\qquad$ $D \circ D \circ H$

Ved å prøve oss frem med ulike kombinasjoner, ender vi opp med at disse gir oss ulike resultater dersom vi anvender, dem og derfor bør vi legge dem i tillukningen vår.

Hvis vi setter disse i tillukningen vår:

$$G_{*2} = \{I, D, H, D \circ D, D \circ H, D \circ D \circ H\}$$

Vi kan nå svare på spørsmålene som er stilt i begynnelsen av oppgaven. G^*_2 tillukningen inneholder de følgende elementer:

$$G_{*2} = \{I, D, H, D \circ D, D \circ H, D \circ D \circ H\}$$

Hvis vi sammenligner denne tillukningen med G_2 ender vi opp med at disse ikke er identiske:

$G_2 = \{I, D, H\}$ $\qquad$ ikke er lik $\qquad$ $G_{*2} = \{I, D, H, D \circ D, D \circ H, D \circ D \circ H\}$

(Oppgave 4 lengre ned)

4 Induksjon og rekursjon for trær med rot

Oppgave 4.1 Gi en induktiv definisjon av mengden T av alle endelige trær med rot, representert som lister. For eksempel vil (ø ø ø) ∈ T. Forklar hvorfor den induktive definisjonen er korrekt og fanger inn *alle* og *bare* endelige trær med rot.

Svar:

Det vi skal prøve å gjøre i følgende oppgave er å gi en induktiv definisjon av mengde T av alle endelige trær med rot, representert som lister. For å kunne definere induktivt mengden T, kan vi definere den på følgende måte:

- Ø er et element i T
- Dersom x er et element i T, så vil dette innebære at x + Ø også er et element i T i tillegg til at x + () vil også være et element i T.

For å være mer presist, vil det som ble uttrykt oppover være representert som det følgende:

- Ø ∈ T
- Dersom x ∈ T --> x + Ø ∈ T og x + () ∈ T

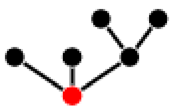
Nå som vi har denne informasjonen tilgjengelig for oss kan vi tenke at ved hjelp av basissteget og ved hjelp av induksjonssteget kan vi komme oss frem til tillukningen. La oss se på hva disse innebærer:

Basissteget

Hvis vi ser på at det vi har skrevet tidligere, kan vi fort se at Ø er det minste elementet fra alle i vår mengde T. Vi kan tenke oss at basismengden vår vil alltid være et element i delmengden. I tillegg vil den være lukket under operasjonen. Vi kan da konkludere med at basissteget vårt vil være Ø.

Induksjonssteget

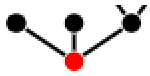
Nå som vi vet at basissteget vårt er Ø og vet at hver gang vi legger til noe i treet vårt, så er det en () eller en Ø. Vi kan tenke at vi alltid starter med Ø som en røttnode og at hver gang vi legger til disse (ø, ()) så vil det være løvnoder til den. Vi kan se på følgende eksempel:



(c)

(ø ø (ø ø))

Vi kan se først tenke oss at dette her vil da ha 3 løvnoder.



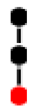
(c)

Og når vi legger til de Ø inn i parantesen, at vi får treet vi så i begynnelse av eksemplet.

Vi kan se på hvordan setting av noder fungerer hvis vi ser nøye på følgende prosess, som vil da representere mulighetene vi har dersom vi legger til disse i vårt tre:

Basissteget: Ø
Neste steget etter basissteget: (Ø)
(Vi kan tenke oss at vi ikke kan ha 2 rotnoder, siden vi kan bare ha en rotnode)

Neste steg: (Ø Ø) eller ((Ø))

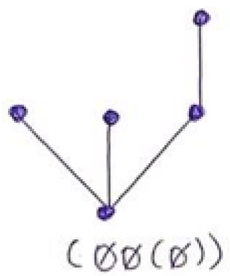


Neste steg: (Ø Ø Ø) eller ((Ø Ø)) eller ((Ø) Ø) eller (Ø (Ø)) eller (((Ø)))

Tillukningen:

Ut i fra det vi har bevist og fant ut, kan vi konkludere med at tillukningen av T under operasjonen, vil da være Ø, som vil da være den minste lukkede delmengden i T.

Vi kan tenke oss at vi vil alltid starte med en rotnode som base, og utledde den med utgangspunkt. Vi kan tenke at vi ikke kan ha to rotnoder, at vi kan ha flere noder dersom disse ligger inn i parantesdr og at Ø kombinert med paranteser vil representere løvnoder. Vi kan tenke at dersom Ø ligger uten paranteser, vil det være en node med ingen fortsettelser, men en parantes vil sannsynligvis ha Ø inn i seg.
Eksempel:



(Ø Ø (Ø))

Dette innebærer at treet har 3 løvnoder (Ø Ø ()) og 5 noder til sammen.

Oppgave 4.2 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen N og bruk definisjonen til å vise utregningen av N(((ø) ø)).
Svar:
Det vi skal prøve å gjøre i følgende oppgave er å gi en rekursiv definisjon av funksjonen N og bruke den til å vise utregningen av N(((ø) ø)). Vi kan la N(t) være en rekursiv funksjon definert på alle t ∈ T. U i fra dette kan vi definere basissteget og det rekursive steget.

Hvis vi starter med å oppgi basissteget til den kan vi være i stand til å bruke den til å vise utregningen.

Basissteget
Vi kan tenke at Ø og () representerer en node. Vi kan tenke dette som det følgende:

$$N(ø) = 1$$

$$N(()) = 1$$

Nå som vi vet basissteget og at listen *inneholder et binært tre* skal vi prøve å finne det rekursive steget som vil hjelpe oss å finne funksjonen til å regne N(((ø) ø)).
Det rekursive steget som vi skal bruke ser ut som dette:

$$N(t :: (L)) = N(t) + N((L))$$

Nå som vi har en definisjon av en rekursiv funksjon, kan vi bruke den til å regne oss frem til resultatet:

Oppgave 4.2

$$N(((\emptyset)\emptyset)) = N((\emptyset)) + N((\emptyset))$$
$$= \underbrace{N(\emptyset)}_{1} + \underbrace{N(())}_{1} + \underbrace{N(\emptyset)}_{1} + \underbrace{N(())}_{1}$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= \underline{\underline{4}}$$

$N(\emptyset) = 1$

$N(()) = 1$

Made by anonymous dolphin

Oppgave 4.3 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen L og bruk definisjonen til å vise utregningen av L ((ø ø ø)).
Svar:

Det vi skal prøve å gjøre i følgende oppgave er å gi en rekursiv definisjon av funksjonen L og bruke den til å vise utregningen av L ((ø ø ø)). Vi kan la N(t) være en rekursiv funksjon definert på alle t ∈ T. Ut i fra dette kan vi definere basissteget og det rekursive steget.

Hvis vi starter med å oppgi basissteget til den kan vi være i stand til å bruke den til å vise utregningen.

Basissteget
Vi kan tenke oss at siden treet vi har ikke er binært, kan vi konkludere med at basissteget vårt ser ut som følgende:

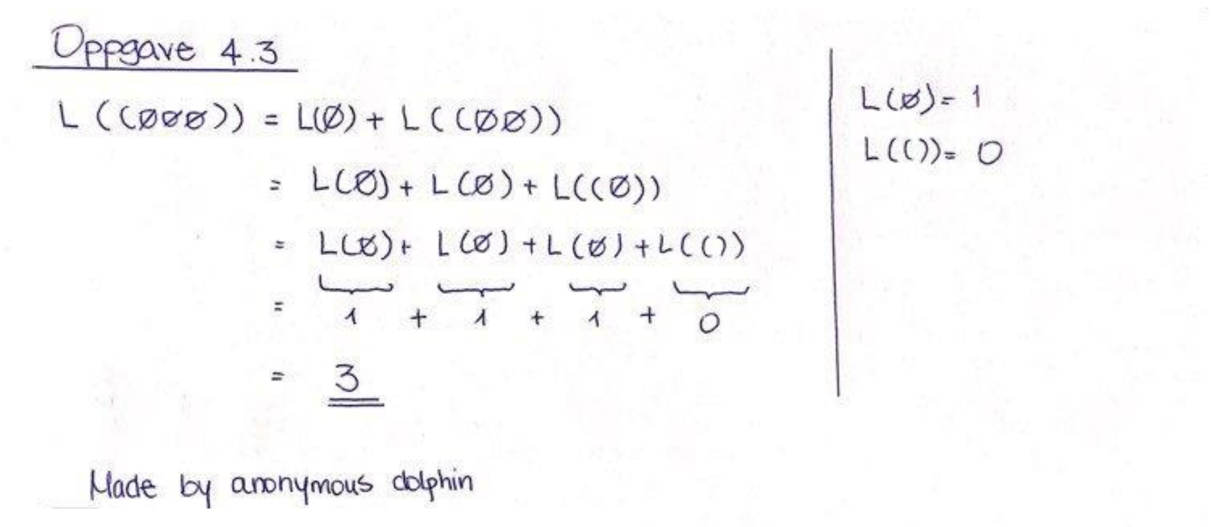
$$L(\varnothing) = 1$$

$$L(()) = 0$$

Nå som vi har funnet basissteget og vet at listen *ikke inneholder et binært tre* skal vi prøve å finne det rekursive steget som vil hjelpe oss å finne funksjonen til å regne L ((ø ø ø)). Det rekursive steget som vi skal bruke ser ut som følgende:

$$L(t :: (L)) = L(t) + L((L))$$

Nå som vi har en definisjon av en rekursiv funksjon, kan vi bruke den til å regne oss frem til resultatet:


Oppgave 4.3

$$L((\varnothing\varnothing\varnothing)) = L(\varnothing) + L((\varnothing\varnothing))$$
$$= L(\varnothing) + L(\varnothing) + L((\varnothing))$$
$$= L(\varnothing) + L(\varnothing) + L(\varnothing) + L(())$$
$$= \underbrace{1} + \underbrace{1} + \underbrace{1} + \underbrace{0}$$
$$= \underline{\underline{3}}$$

$L(\varnothing) = 1$

$L(()) = 0$

Made by anonymous dolphin

Oppgave 4.4 Gi en rekursiv definisjon av funksjonen H og bruk definisjonen til å viseutregningen av H ((ø (ø ø) ø)).
Svar:

Det vi skal prøve å gjøre i følgende oppgave er å gi en rekursiv definisjon av funksjonen H og bruke den til å vise utregningen H ((ø (ø ø) ø)). Vi kan la H(t) være en rekursiv funksjon definert på alle $t \in T$. Ut i fra dette kan vi definere basissteget og det rekursive steget.

Hvis vi starter med å oppgi basissteget til den kan vi være i stand til å bruke den til å vise utregningen.

Basissteget

Vi kan tenke oss at siden treet vårt ikke er binært, kan vi konkludere med at basissteget vårt ser ut som følgende:

$$H(\emptyset) = 0$$

$$H(()) = 1$$

Nå som vi har funnet basissteget og vet at listen *ikke inneholder et binært tre* skal vi prøve å finne det rekursive steget som vil hjelpe oss å finne funksjonen til å regne $H\ ((ø\ (ø\ ø)\ ø))$. Det rekursive steget som vi skal bruke ser ut som følgende:

$$H(t :: (L)) = H(t) + H((L))$$

Nå som vi har en definisjon av en rekursiv funksjon, kan vi bruke den til å regne oss frem til resultatet:

Oppgave 4.4

$H(\emptyset) = 0$

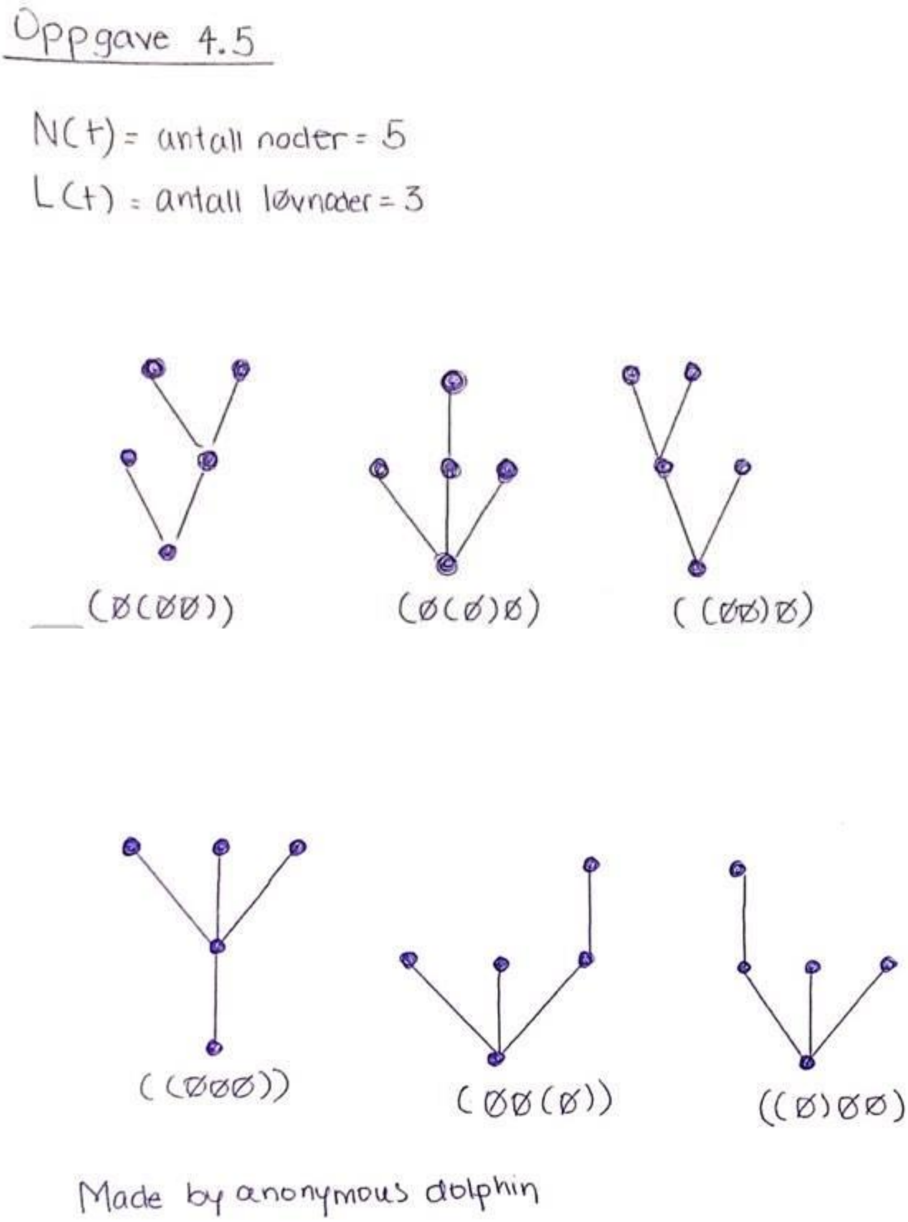
$H(()) = 1$

$$
\begin{aligned}
H((\emptyset(\emptyset\emptyset)\emptyset)) &= H(\emptyset) + H(((\emptyset\emptyset)\emptyset)) \\
&= H(\emptyset) + H((\emptyset\emptyset)) + H((\emptyset)) \\
&= H(\emptyset) + H(\emptyset) + H((\emptyset)) + H((\emptyset)) \\
&= H(\emptyset) + H(\emptyset) + H(\emptyset) + H(()) + H(\emptyset) + H(()) \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Made by anonymous dolphin

Oppgave 4.5 Finn alle trær $t \in T$ slik at $N(t) = 5$ og $L(t) = 3$.
Svar:
Det vi skal gjøre i følgende oppgave er å finne alle trær t som er elementer i T slik at $N(t) = 5$ og $L(t) = 3$. Dette innebærer at treet vårt skal ha 3 *løvnoder*, siden vi lar $L(t)$ være *antall løvnoder* i t ($L(t) = 3$ løvnoder). Det innebærer også at vi har 5 noder til

sammen, siden vi lar N(t) være *antall noder* i t. Vi kan representere dette med følgende figurer:



Vi kan konkludere med at vi får 6 ulike trær med tanke på at det skal være *5 noder* total, med *3 løvnoder:* (ø (ø ø)), (ø (ø) ø), ((ø ø) ø), ((ø ø ø)), (ø ø (ø)) og ((ø) ø ø).

Oppgave 4.6 Bevis ved strukturell induksjon at $L(t) < N(t)$ for alle trær $t \in T$. Pass på at alle delene av beviset er på plass.
***Obs!:* Kunne ikke sette forfining av partisjon- tegnet i word, så bruker < istedenfor!**
Svar:
Vi kan tenke oss at i denne oppgaven skal vi ved hjelp av strukturell induksjon bevise at $L(t) < N(t)$ for alle trær t som er et element i T, eller med andre ord:

$$t \in T$$

Vi kan tenke oss at for å kunne bevise dette trenger vi et basissteg og en induksjonshypotese. Vi kan starte med å se på basissteget vårt:

Basissteget
Vi kan starte med å definere basissteget vårt. Vi kan tenke at basissteget vårt skal bevise at denne holder for alle elementer i basismengden vi har. Vi kan tenke at vi starte med den tømme mengden: {Ø}

Ut i fra dette her kan vi da definere t til å være Ø, vi kan tenke også at L(Ø) i dette tilfelle vil tilsvare 1 og at N(Ø) vil være lik 1. (Vi da tar utgangspunkt i det vi allerede vet fra trær og lister og bruker ulike formler). For å gjøre dette mer visuelt og ha en bedre forståelse av dette, kan vi representere dette som det følgende:

$$t = \emptyset$$

$$N(\emptyset) = 1 \qquad\qquad L(\emptyset) = 1$$

Ut i fra det vi har gjort nå, kan vi da konkludere med at for alle elementer som finnes i basismengden til den induktive definerte mengden av T, at påstanden vi ble utdelt i begynnelsen av oppgaven ($L(t) < N(t)$) er sann.

Nå som vi har definert disse, kan vi da gå videre til induksjonshypotesen vår.

Induksjonshypotesen

Hvis vi tar i betraktning alt vi har nå, kan vi da prøve å komme frem til en induksjonshypotese ved å bevise at påstanden er sann for alle trær, noe som vil da føre til antall mengden løvnoder i t er en forfining i treet. Oppgaven vår nå er komme frem til et svar. Dette kan vi gjøre ved å først anta at påstanden vil holde for element i som er et element i T. Vi kan representere dette som følgende:

$$i \in T$$

Denne påstanden må holde for at $L(i) < N(i)$. Neste steg i induksjonshypotesen vår vil være å vise at dette vil føre til at $L((i)) < N((i))$. Vi kan også tenke at vi må kunne bevise det følgende for å komme frem til et svar:

$$L(i :: (L)) < N(i :: (L))$$

For å avklare dette, kan vi tenke at L (som vist over) vil da være den samme listen vi bruker. Tatt alt i betraktning kan vi konkludere med at:

$$L(i :: (L)) = L((i)) + L((L)) = L(i) + L((L)) = L(i) + L(L)$$

$$N(i :: (L)) = N((i)) + N((L)) = N(i) + 1 + N((L)) = N(i) + 1 + N(L)$$

Konklusjonen

Nå som vi har funnet basissteget og induksjonshypotesen, kan vi konkludere med at $L(t) < N(t)$. Ut i fra induksjonshypotesen, kan vi da skrive $L(t) < N(t)$ som:

$$L(i) + L(L) < N(i) +1 + N(L)$$

Nå som vi har funnet dette kan vi konkludere at vi har bevist, ved hjelp av strukturell induksjon at $L(t) < N(t)$ for alle trær $t \in T$.

(Oppgave 5 lengre ned)

5 Naturlig deduksjon

Oppgave 5.1 I naturlig deduksjon har vi ⊥-regelen som ser slik ut:

$$\frac{\bot}{F}\ \bot$$

Forklart kort hvordan denne regelen fungerer og hva er det som gjør at den er spesiell.

Svar:

Vi har regelen av bottom, eller med andre ord, ⊥-regelen. Vi kan tenke oss at hvis det usanne er premisset ditt, altså det som står lengst oppe, kan man konkludere med hva som helst, så lenge man starter med å anta at det usanne er sann.

En viktig ting å merke seg er at denne formelen representerer at alt er logisk konsekvens av det usanne, fordi i dette usanne er aldri sann. Hvis vi kan utledde det usanne, så kan vi egentlig sette hva som helst som konklusjonen under (Altså konkludere med hva som helst). Dette betyr at «alt kan utledes fra ⊥. Vi kan si at denne regelen er en form for eliminasjonsregel, fordi ⊥- tegnet over strekken elimineres.

Det som gjør denne regelen spesiell er at den også er en viktig støttespiller (altså at den har en viktig rolle i Reductio ad Absurdum -formelen (RAA)

Oppgave 5.2 Gi et bevis for formelen (P→¬P) →(P→Q) i naturlig deduksjon.

Svar:

Nå som vi har fått formelen (P→¬P) →(P→Q) er vår oppgave å gi et bevis ved hjelp av naturlig deduksjon. Vi kan løse denne oppgaven ved å «bygge oss» nedenfra og opp. Det som jeg mener her er at vi kan starte fra «slutten» av beviset og bygge os opp steg for steg. Her er beviset mitt for formelen.

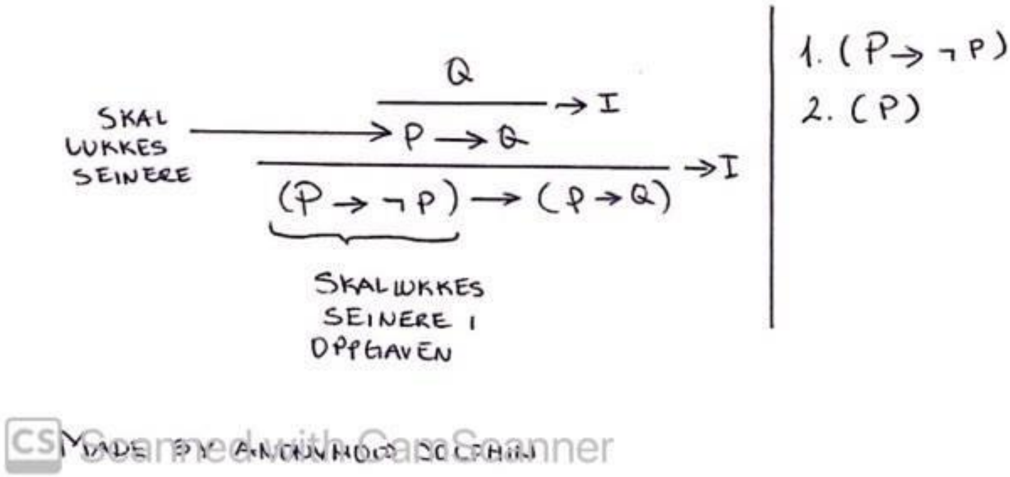
Hvis vi skal bygge oss videre: Det er «impliseringspilen» vi må først gjøre noe med. Derfor kan vi starte med steg 1, nemlig ta den første impliseringen. Vi tar det som ligger helt til høyre for impliseringspiler og setter det over strekken. Vi kan tenke at det som står helt til venstre blir noe som vi kommer til å lukke seinere i beviset.

$$\frac{P \to Q}{\underbrace{(P \to \neg P)}_{\text{SKAL LUKKES SEINERE I OPPGAVEN}} \to (P \to Q)} \to I$$

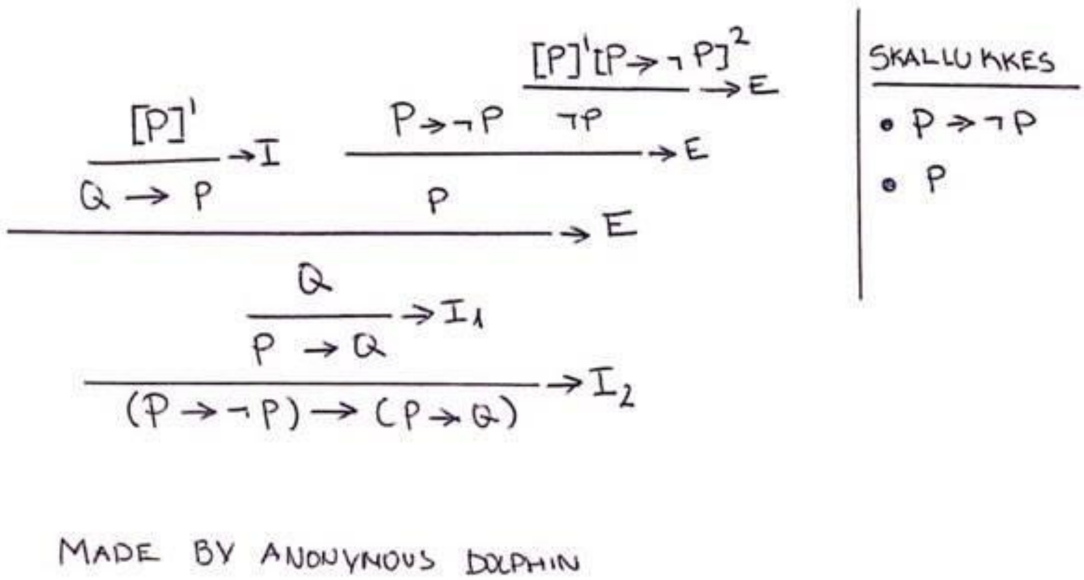
1. $P \to \neg P$

MADE BY ANONYMOUS DOLPHIN

Nå som vi har noe som ligger over strekken, kan vi gjøre det samme med P --> Q. Vi kan representere dette som følgende:



Siste steget vil da være se hva vi har så langt. Vi kan se at vi skrev de ulike delene fra den opprinnelige formelen som skal lukkes i beviset. Vi kan nå anvende alle regler i naturlig deduksjon og bruke fantasien vår for å finne en måte å bevise formelen. Etter å ha teste ulike resultatet, har vi kommet frem til dette:



Vi har nå klart å lukke det vi skulle og komme frem til et bevis som stemmer og er riktig.

Oppgave 5.3 Trenger vi $\perp$-regelen? Hva tror du skjer i naturlig deduksjon dersom den fjernes? Forklar. (Denne oppgaven er noe vanskeligere, og du anbefales ikke å begynne på denne før du er ferdig med alt annet).

Svar:

Dette er et spørsmål som har vært diskutert tidligere. Vi kan ikke si med stor sikkerhet si at vi ikke trenger den, fordi man bruker den ganske mye i naturlig deduksjon. Vi kan for eksempel utrykket at $\neg P$ ved hjelp av $\perp$-regelen, så i dette tilfelle ville det bli representert som det følgende:

$$P \rightarrow \perp$$

På den andre siden er $\perp$-regelen et veldig nyttig verktøy innenfor logikk, siden det lar oss gjøre ekstremt mye med denne. Uten den ville logikken vi kjenner i in1010 være mer komplisert og mer abstrakt. Hvis vi da fjerner denne, ville vi ikke være i stand til å bruke naturlig deduksjon som vi kjenner.

Et annet viktig ting å nevne er at $\perp$-regelen blir brukt i forskjellige regler vi kjenner. Et eksempel kan være er at denne regelen spesiell er at den også er en viktig støttespiller (altså at den har en viktig rolle i Reductio ad Absurdum -formelen (RAA)). Denne er en formel som vi kjenner til i naturlig deduksjon og som er ganske viktig. **Et eksempel** som beviser hvor viktig $\perp$-regelen er, er at uten RAA-regelen ville vi ikke være i stand til å bevise at $\neg\neg P \rightarrow P$. Da hadde vi kommet vi et annet felt innenfor logikk som ikke er så nyttig for i dette kurset, siden poenget med naturlig deduksjon er at vi skal bevise ting.

Konklusjonen er at $\perp$-regelen er en veldig viktig faktor i naturlig deduksjon og vi trenger derfor den. Vi faktisk trenger kun $\rightarrow$ og $\perp$ for å være i stand til å utrykke alt vi trenger.

(Slutt)