

# Kapittel 6: Relasjoner

Nettkurs

Boka

## Definisjon

- En **binær relasjon** (*binary relation*) fra mengden  $S$  til mengden  $T$  er en delmengde av  $S \times T$ .
- En **binær relasjon** på mengden  $S$  er en delmengde av  $S^2 = S \times S$ .
- Mer generelt, en  **$n$ -ær relasjon** ( *$n$ -ary relation*) er en delmengde av  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

Abstraksjon over relasjoner    Eksempler

### Eksempler

**Eksempel (Binær relasjon)**  $\{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$

Følgende er en binær relasjon fra  $\{a, b\}$  til  $\{1, 2\}$ .

$\{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$

	1	2
a	1	1
b	0	1

Følgende er en binær relasjon på mengden  $\{1, 2, 3\}$ :

$\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

	1	2	3
1	0	1	1
2	0	0	1
3	0	0	1

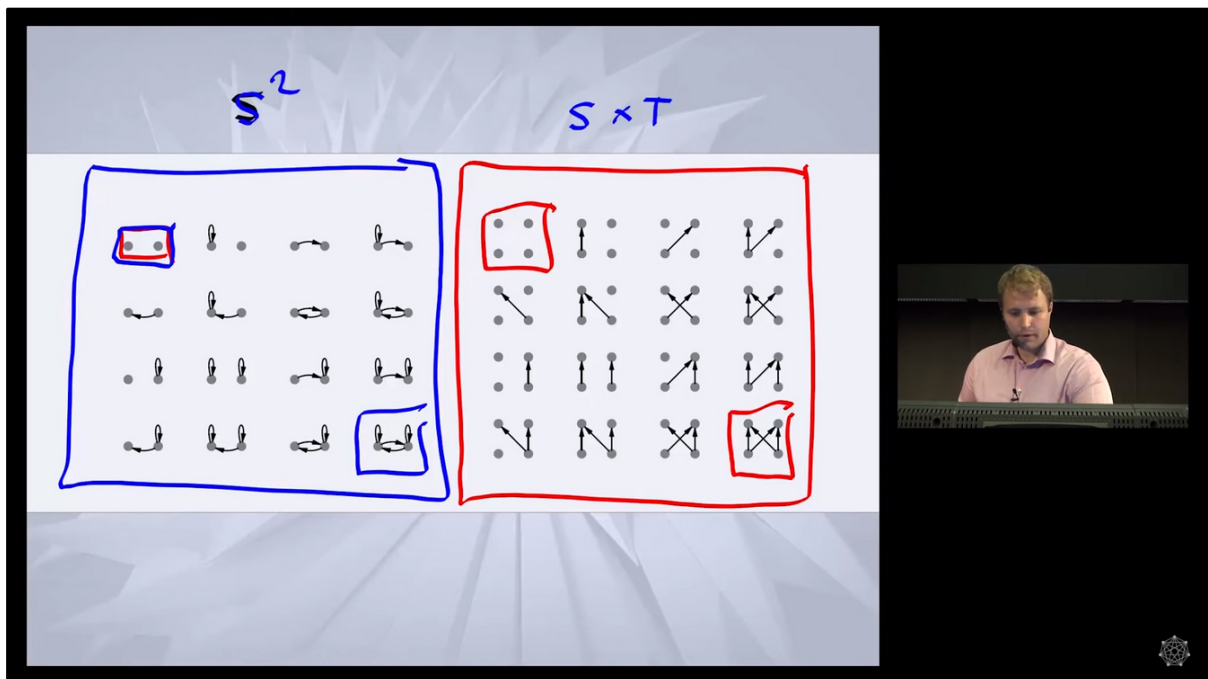
INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 6
Side 6 / 36

## Noen spesielle relasjoner

- **Identitetsrelasjonen** (*identity relation*) på  $S$ , eller **likhetsrelasjon**, som relaterer alle elementer til seg selv:  
 $\{ \langle x, x \rangle \mid x \in S \}$ 
  - Her er identitetsrelasjonen på mengden  $\{1, 2, 3\}$ :  
 $\{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$
  - Må alltid være på en mengde

- Den **tomme relasjonen** (*empty relation*) fra  $S$  til  $T$ , som ikke relaterer noe elementer til hverandre:  $\emptyset$ .
  - Den tomme relasjonen på mengden  $\{1, 2, 3\}$ :  $\emptyset$
- Den **universelle relasjonen** (*universal relation*) fra  $S$  til  $T$ , som relaterer alle elementer i  $S$  til alle elementer i  $T$ :  $S \times T$ .
  - Den universelle relasjonen på mengden  $\{1, 2, 3\}$ :  
 $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

## Universet av relasjoner



## Refleksivitet


- En binær relasjon  $R$  på mengden  $S$  er **refleksiv** (*reflexive*) hvis det for alle  $x$  i  $S$  er slik at  $\langle x, x \rangle \in R$ .
  - La  $S$  være mengden  $\{1, 2, 3\}$ . Da skal en refleksiv relasjon på den mengden inneholde  $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ .
  - $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$  er en refleksiv relasjon på  $S$ .
  - $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$  er ikke en refleksiv relasjon på  $S$ .
  - Eksempler på refleksive relasjoner:

Refleksivitet, symmetri og transitivitet
Refleksivitet

## Refleksivitet

**Eksempel (Refleksive relasjoner)**

- Likhetsrelasjonen på en mengde er alltid refleksiv.
- Delmengderelasjonen  $\subseteq$  er refleksiv.
- Mindre enn eller lik-relasjonen  $\leq$  på tall er refleksiv.
- Logisk konsekvens-relasjonen  $\Rightarrow$  på formuler er refleksiv.
- Den vanlige mindre enn-relasjonen  $<$  er *ikke* refleksiv.
- Den universelle relasjonen på en mengde er refleksiv.
- Forelder-relasjonen på mennesker er *ikke* refleksiv.
- Kjærestereelasjonen



INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 6
Side 17 / 36

## Symmetri

- En binær relasjon  $R$  på mengden  $S$  er **symmetrisk** (*symmetric*) hvis det for alle  $x, y$  er slik at hvis  $\langle x, y \rangle \in R$ , så  $\langle y, x \rangle \in R$ .
  - La  $S$  være mengden  $\{a, b, c\}$ .
  - Da er  $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$  en symmetrisk relasjon på  $S$ .
  - $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$  er ikke en symmetrisk relasjon på  $S$ .

Refleksivitet, symmetri og transitivitet

Symmetri

## Symmetri

- Likhetsrelasjonen på en mengde er alltid symmetrisk.
- Delmengderelasjonen  $\subseteq$  er *ikke* symmetrisk.
- Mindre enn eller lik-relasjonen  $\leq$  på tall er *ikke* symmetrisk.
- Logisk konsekvens-relasjonen  $\Rightarrow$  på formler er *ikke* symmetrisk.
- Logisk ekvivalens-relasjonen  $\Leftrightarrow$  på formler er symmetrisk.
- Den universelle relasjonen på en mengde er symmetrisk.
- Forelder-relasjonen på mennesker er *ikke* symmetrisk.
- Kjæresterelasjonen er symmetrisk.

INF1080 – Logiske metoder for informatikk

Kapittel 6

Side 20 / 36

## Transitivitet


- En binær relasjon  $R$  på mengden  $S$  er **transitiv** (*transitive*) hvis det for alle  $x, y, z$  er slik at hvis  $\langle x, y \rangle \in R$  og  $\langle y, z \rangle \in R$ , så  $\langle x, z \rangle \in R$ .
  - La  $S$  være mengden  $\{1, 2, 3\}$ .
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$  er transitiv relasjon på  $S$ .
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$  er ikke transitiv.
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$  er ikke transitiv heller, fordi den mangler  $\langle 1, 1 \rangle$  og  $\langle 2, 2 \rangle$ . Så hvis vi går fra 1 til 2 og tilbake, da burde vi ha den tredje steg fra 1 til 1.
  - Steg kan gå fremover og bak **bare** mellom to elementer i mengden, ikke mer. Hvis det er mer enn to, da er det alltid **en** direksjon.
  - Også, når du ser på en mengde, må du telle **alle** instanser av to-steg hopp, og hvis alle er transitive, **da og bare da** er hele mengden transitiv.

Refleksivitet, symmetri og transitivitet
Transitivitet

## Transitivitet

**Eksempel (Transitive relasjoner)**

- Likhetsrelasjonen på en mengde er alltid transitiv.
- Delmengderelasjonen  $\subseteq$  er transitiv.
- Mindre enn eller lik-relasjonen  $\leq$  på tall er transitiv.
- Logisk konsekvens-relasjonen  $\Rightarrow$  og ekvivalens-relasjonen  $\Leftrightarrow$  på formler er transitive.
- Forelder-relasjonen på mennesker er *ikke* transitiv, men etterkommer-relasjonen er transitiv.
- Vennerelasjonen er *ikke* transitiv.
- Den universelle relasjonen på en mengde er transitiv.
- Kjærestereelasjonen er *ikke* transitiv.



INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 6
Side 23 / 36

## Ekvivalens

- En binær relasjon på mengden  $S$  er en **ekvivalensrelasjon** (*equivalence relation*) hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
  - La  $S$  være mengden  $\{1, 2, 3\}$ .
  - Da er  $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$  en ekvivalensrelasjon på  $S$ .

## Anti-symmetri

- En binær relasjon  $R$  på mengden  $S$  er **anti-symmetrisk** (*anti-symmetric*) hvis det for alle  $x, y$  er slik at hvis  $\langle x, y \rangle \in R$  og  $\langle y, x \rangle \in R$ , så  $x = y$ .

- Anti-symmetriske relasjoner er de hvor det ikke finnes to forskjellige elementer som er relatert til hverandre.
  - La  $S$  være mengden  $\{1, 2, 3\}$ .
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$  er en anti-symmetrisk relasjon på  $S$ .
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$  er ikke anti-symmetrisk, fordi  $1 \neq 2$ .

## Irrefleksivitet

- En binær relasjon  $R$  på mengden  $S$  er **irrefleksiv** (*irreflexive*) hvis det ikke er noe  $x \in S$  slik at  $\langle x, x \rangle \in R$ .
- Irrefleksive relasjoner er de hvor ingenting er relatert til seg selv.
  - La  $S$  være mengden  $\{1, 2, 3\}$ .
  - $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$  er en irrefleksiv relasjon på  $S$ .
  - $\{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$  er ikke irrefleksiv pga  $\langle 3, 3 \rangle$ .

## Partielle ordninger

- En binær relasjon på mengden  $S$  er en **partiell ordning** (*partial order*) hvis den er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.
- Partielle ordninger er relasjoner med "retning".

## Totale ordninger

- En partiell ordning  $R$  på en mengde  $S$  kalles en **total ordning** (*total order*) eller en **lineær ordning** (*linear order*) hvis det for alle  $x$  og  $y$  i  $S$  er slik at  $xRy$  og  $yRx$ .
- Totale ordninger er relasjoner som ordner alle elementene i en mengde etter hverandre.
- Relasjonen  $\leq$  på reelle tall er en total ordning.
- Delmengderelasjonen trenger ikke å være en total ordning, fordi det er mulig å ha to mengder  $A$  og  $B$  uten at hverken  $A \subseteq B$  eller  $B \subseteq A$ .

