Høgskolen i Molde
Vitenskapelig høgskole i logistikk

1. Grunnleggende emner

Øving 1: Løsning

"*MAT100 Matematikk*", 2019
versjon 01

- Utlevering:
  - Mandag 2. sep. kl. 12:15.
  - Skriv ut oppgavene på papir, i farger, og ta med på øvingsdagen.

- Innlevering:
  - Individuelle oppgaver: senest kl. 14:00 tirsdag 3. sep.
  - Gruppeoppgaver: senest kl. 16:00 tirsdag 3. sep.

- FORarbeid:
  - Se videoene for uke 1.
  - Se intro-video for øving 1.
  - Les kompendiet.
  - Les gjennom øvingoppgave 1.

- ETTERarbeid:
  - Gå gjennom løsning 1 som legges ut tirsdag 3. sep. kl. 16:15.
  - Regn gjennom øving 1 på nytt før søndag 8. sep. kl. 23:59.

- 1. time og 2. time (tirsdag 3. sep. kl. 12:15 - 14:00)
  - Individuell oppgaveregning.
  - Faglærer og hjelpelærer er tilstede og veileder.

- 3. og 4. time (tirsdag 3. sep. kl. 14:30 - 16:00)
  - Inndeling i grupper (ca. 4-6 studenter) hvor oppgavene løses i fellesskap.
  - Faglærer og hjelpelærer er tilstede og veileder gruppene.

Individuelle oppgaver

1.1 Logikk

Problem 1.1 — Logiske utsagn og konnektiver

Anta vi har gitt følgende simple utsagn:

$$p: \text{ Bård er sterkere enn Per.} \tag{1.1}$$
$$q: \text{ Per er raskere enn Bård.} \tag{1.2}$$

a) Uttrykk følgende sammensatte uttrykk matematisk: [1]

$$i) \text{ Per er } \textit{ikke} \text{ raskere enn Bård.} \tag{1.3}$$
$$ii) \text{ Bård er sterkere enn Per og Per er } \textit{ikke} \text{ raskere enn Bård.} \tag{1.4}$$
$$iii) \text{ Bård er } \textit{ikke} \text{ sterkere enn Per eller Per er raskere enn Bård.} \tag{1.5}$$
$$iv) \text{ Hvis Bård er sterkere enn Per så Per er raskere enn Bård.} \tag{1.6}$$

Løsning:

$$i)\ \neg q \tag{1.7}$$
$$ii)\ p \wedge \neg q \tag{1.8}$$
$$iii)\ \neg p \vee q \tag{1.9}$$
$$iv)\ p \to q \tag{1.10}$$
$$\tag{1.11}$$

[1] Dvs. bruk p og q og konnektivene $\neg$ $\wedge$, $\vee$ eller $\rightarrow$.

b) Beskriv følgende matematiske uttrykk med ord:

$$i)\ \neg q \tag{1.12}$$
$$ii)\ p \wedge q \tag{1.13}$$
$$iii)\ p \vee q \tag{1.14}$$
$$iv)\ \neg q \rightarrow p \tag{1.15}$$
$$v)\ \neg q \vee \neg p \tag{1.16}$$
$$vi)\ ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q \tag{1.17}$$

Løsning:

i) Per er *ikke* raskere enn Bård. (1.18)

ii) Bård er sterkere enn Per *og* Per er raskere enn Bård. (1.19)

iii) Bård er sterkere enn Per *eller* Per er raskere enn Bård. (1.20)

iv) Hvis Per *ikke* er raskere enn Bård, så er Bård sterkere enn Per. (1.21)

v) Per er *ikke* raskere enn Bård *eller* Bård er *ikke* sterkere enn Per. (1.22)

vi) Hvis Bård er sterkere enn Per så er Per er raskere enn Bård (1.23)
og Bård er sterkere enn Per,
så er Per raskere enn Bård.

Anta nå at:

$$p \text{ er sann} \tag{1.24}$$
$$q \text{ er usann} \tag{1.25}$$

c) Avgjør om hvert av utsagnene er sant eller usant:

$$i)\ \neg q \tag{1.26}$$
$$ii)\ p \wedge q \tag{1.27}$$
$$iii)\ q \wedge p \tag{1.28}$$
$$iv)\ p \vee q \tag{1.29}$$
$$v)\ q \vee p \tag{1.30}$$
$$vi)\ \neg\neg q \tag{1.31}$$

Løsning:

$$i)\ \text{sann} \tag{1.32}$$
$$ii)\ \text{usann} \tag{1.33}$$
$$iii)\ \text{usann} \tag{1.34}$$
$$iv)\ \text{sann} \tag{1.35}$$
$$v)\ \text{sann} \tag{1.36}$$
$$vi)\ \text{usann} \tag{1.37}$$

■

Problem 1.2 — Kvantorer

La x representere alle mulige personer, og definer følgende simple utsagn:

$$Student(x): \text{ person } x \text{ er en student} \tag{1.38}$$
$$Smart(x): \text{ person } x \text{ er smart} \tag{1.39}$$

a) Uttrykk følgende utsagn på matematisk form: [2]

$$i) \text{ Alle personer er studenter.} \tag{1.40}$$
$$ii) \text{ Det finnes en person som er student.} \tag{1.41}$$
$$iii) \text{ Det finnes ingen studenter.} \tag{1.42}$$
$$iv) \text{ Det finnes en person som ikke er student.} \tag{1.43}$$
$$v) \text{ Alle studenter er smarte.} \tag{1.44}$$

Løsning:

$$i)\ \forall x\ Student(x) \tag{1.45}$$
$$ii)\ \exists x\ Student(x) \tag{1.46}$$
$$iii)\ \neg\exists x\ Student(x) \text{ kan også skrives } \forall x\ \neg Student(x) \tag{1.47}$$
$$iv)\ \exists x\ \neg Student(x) \tag{1.48}$$
$$v)\ \forall x\ Student(x) \to Smart(x) \tag{1.49}$$

[2] Dvs. bruk x og konnektivene $\neg$ $\wedge$, $\vee$ eller $\to$ og kvantorene $\forall$ og $\exists$.

b) Beskriv følgende matematiske uttrykk med ord:

$$i)\ \exists x\ (Student(x) \wedge Smart(x)) \tag{1.50}$$
$$ii)\ \forall x\ (Student(x) \rightarrow Smart(x)) \tag{1.51}$$
$$iii)\ \neg\forall x\ (Smart(x) \rightarrow Student(x)) \tag{1.52}$$

Løsning:

i) Det finnes peroner som er smarte og som er studenter. (1.53)
ii) Alle studenter er smarte. (1.54)
iii) Ikke alle smarte personer er studenter. (1.55)

Vi har gitt følgende setning (dvs. teorem) om uendelig store naturlige tall:

For ethvert positivt reelt tall $x \in \mathbb{R}$ finnes et naturlig tall $n \in \mathbb{N}$ slik at $x < n$. (1.56)

c) Beskriv setningen lign.(1.56) matematisk. [3]

Løsning:

Setningen kan uttrykkes logisk ved:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\ x < n \tag{1.57}$$

■

[3] Dvs. bruk x og konnektivene $\neg$ $\wedge$, $\vee$ eller $\rightarrow$ og kvantorene $\forall$ og $\exists$.

1.2 Mengdelære

Problem 1.3 — Konstruksjon av delmengder

Vi skal i denne oppgaven jobbe med konstruksjon av delmengder av de vanlige tallmengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$.

a) Konstruer delmengdene: [4] [5] [6]

$$\begin{aligned}
&i)\ \text{Delmengden av } \mathbb{N} \text{ bestående av alle partall.} && (1.58)\\
&ii)\ \text{Delmengden av } \mathbb{N} \text{ bestående av alle partall mindre enn 100.} && (1.59)\\
&iii)\ \text{Delmengden av } \mathbb{Z} \text{ bestående av alle negative heltall.} && (1.60)\\
&iv)\ \text{Delmengden av } \mathbb{Q} \text{ bestående av alle brøker hvor telleren er} && (1.61)\\
&\quad\ \text{et partall.} && (1.62)\\
&iii)\ \text{Delmengden av } \mathbb{Q} \text{ bestående av alle brøker mellom 0 og 1.} && (1.63)
\end{aligned}$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
&i)\ A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\ n = 2m\} && (1.64)\\
&ii)\ B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\ n = 2m \wedge n < 100\} && (1.65)\\
&iii)\ C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z < 0\} && (1.66)\\
&iv)\ D = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \exists m \in \mathbb{N}\ a = 2m\right\} && (1.67)\\
&iii)\ E = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q < 1\right\} && (1.68)
\end{aligned}$$

[4] Dere skal bruke formen $A = \{x \in A \mid p(x)\}$ hvor $p(x)$ er en logisk formel som er oppfylt for alle elementene x i mengden. Her må dere altså finne de korrekte logiske formlene.

[5] Et naturlig tall n er et partall dersom det finnes et heltall m slik at $n = 2m$.

[6] I en brøk $\frac{a}{b}$, kalles a *telleren* og b *nevneren*

b) Konstruer løsningsmengden $\mathscr{L}$ av Pythagoras ligning, dvs. lign.(1.69), som mengden av alle tupler (a,b,c) slik at ligningen

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.69}$$

hvor $a,b,c \in \mathbb{N}$.

Løsning:

Løsningsmengden $\mathscr{L}$ er definert ved:

$$\mathscr{L} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{N} \;\middle|\; a^2 + b^2 = c^2 \right\} \tag{1.70}$$

■

Problem 1.4 — Snitt, union og differanse mellom intervaller

Vi har gitt intervallene:

$$I_1 = [-1,\ 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\} \tag{1.71}$$
$$I_2 = [0,\ 4\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\} \tag{1.72}$$
$$I_3 = [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\} \tag{1.73}$$
$$I_4 = \langle 0.9,\ 1.1\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid 0.9 < x < 1.1\} \tag{1.74}$$

a) Finn mengdene: [7]

$$i)\ \ I_1 \cap I_2 \tag{1.75}$$
$$ii)\ \ I_1 \cup I_2 \tag{1.76}$$
$$iii)\ \ I_1 - I_4 \tag{1.77}$$
$$iv)\ \ I_2 \cap I_3 \tag{1.78}$$
$$iii)\ \ (I_2 \cap I_3) - I_1 \tag{1.79}$$

Løsning:

Tegn gjerne oppe en tallinje på kladd. Da er det lettere å innse følgende:

$$i)\ \ I_1 \cap I_2 = [-1,\ 3] \cap [0,\ 4\rangle = [0,\ 3] \tag{1.80}$$
$$ii)\ \ I_1 \cup I_2 = [-1,\ 3] \cup [0,\ 4\rangle = [-1,\ 4\rangle \tag{1.81}$$
$$iii)\ \ I_1 - I_4 = [-1,\ 3] - \langle 0.9,\ 1.1\rangle = [-1,\ 0.9] \cup [1.1,\ 3] \tag{1.82}$$
$$iv)\ \ I_2 \cap I_3 = [0,\ 4\rangle \cap [2, \infty) = [2,\ 4\rangle \tag{1.83}$$
$$iii)\ \ (I_2 \cap I_4) - I_1 = [2,\ 4\rangle - [-1,\ 3] = [3,\ 4\rangle \tag{1.84}$$

■

[7] Tegn gjerne intervallene langs tallinjen.

Problem 1.5 — Disjunkte delmengder - partisjoner

En 3-partisjon av en mengde A, er 3 *disjunkte* delmengder A_1, A_2 og A_3 slik at

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3. \tag{1.85}$$

se figur 1.1. [8]

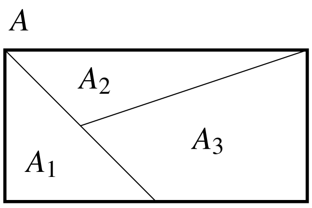

Figure 1.1: Venn-diagram av en 3-partisjon.

Anta vi har gitt mengden

$$A = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}. \tag{1.86}$$

a) Finn alle mulige 3-partisjoner av mengden A.

Løsning:

Vi må finne alle mulige måter vi kan gruppere tallene 1, 2, 3 og 4 i tre delmengder.

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3, 4\} \tag{1.87}$$
$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{3\},\ A_3 = \{2, 4\} \tag{1.88}$$
$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{4\},\ A_3 = \{2, 3\} \tag{1.89}$$
$$A_1 = \{2\},\ A_2 = \{3\},\ A_3 = \{1, 4\} \tag{1.90}$$
$$A_1 = \{2\},\ A_2 = \{4\},\ A_3 = \{1, 3\} \tag{1.91}$$
$$A_1 = \{3\},\ A_2 = \{4\},\ A_3 = \{1, 2\} \tag{1.92}$$

■

[8] Ingen av delmengdene A_1, A_2 og A_3 kan være den tomme mengden $\emptyset$.

Gruppeoppgave

Problem 1.6 — Mengde, løsningsmengde

Vi har lært at mengder hvor *rekkefølgen* spiller en rolle, uttrykkes som n-tupler

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{1.93}$$

hvor $a_1, a_2, \dots, a_n$ er elementene i mengden.

Et klassisk eksempel på bruk av n-tupler er når vi trenger *koordinater* for å spesifisere en posisjon i planet.

Et typisk eksempel er *arealplanlegging*. Anta du har kjøpt en eiendom og ønsker å definere nøyaktig hvilket *areal* som er ditt i forhold til dine naboer. Her er ikke bare *størrelsen* på arealet viktig, men også *formen* på området som arealet omspenner.

Anta du har eier et stykke rektangulært land med bredde a og lengde b som vist i figur 1.2. Denne oppgaven handler om hvordan vi spesifiserer slik områder i planet.

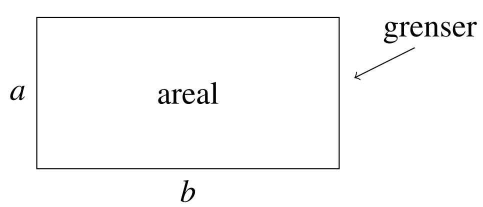

Figure 1.2: Areal og grenser.

Prosessen for å definere området har to steg:

1. Du plasserer et (x,y)-koordinatsystem på en hensiktsmessig plass i planet, som vist i figur 1.3. Ethvert punkt i planet kan da representeres som en 2-tuppel: (x,y).

   Punktet $(0,0)$ kalles origo og bestemmer hvor koordinatsystemet er plassert.

2. Du definerer en *mengde*

$$A = \{(x,y) \mid R(x,y)\} \tag{1.94}$$

   som representerer arealet du eier. Uttrykket $R(x,y)$ restrikterer de punktene (x,y) som akkurat faller inn under området du eier og er derfor avhengig av grensene.

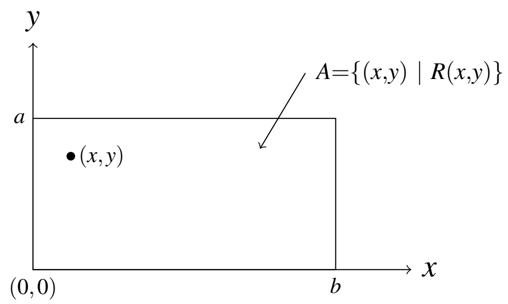

Figure 1.3: Koordinatsystem og mengden A definerer området du eier.

La oss definere arealet A for det rektangulære området vist i figur 1.3. Vi spør oss selv: Hvilke verdier kan koordinatene x og y ta henholdsvis?

x-aksen: Siden rektangelet spenner seg fra 0 til b langs x-aksen, må

$$0 \leq x \leq b \tag{1.95}$$

y-aksen: Siden rektangelet spenner seg fra 0 til a langs y-aksen, må

$$0 \leq y \leq a \tag{1.96}$$

Restriksjonen $R(x,y)$ er dermed gitt ved det logiske utsagnet:

$$R(x,y) = 0 \leq x \leq b \ \land \ 0 \leq y \leq a \tag{1.97}$$

Arealet A kan dermed defineres ved:

$$A = \{\ (x,y) \mid \overbrace{0 \leq x \leq b \ \land \ 0 \leq y \leq a}^{R(x,y)}\ \} \tag{1.98}$$

a) Anta du er eier et *sirkulært* område A med radius r. Plasser et (x,y)-koordinatsystem midt i sirkelen, som vist i figur 1.4.[9]

Bestem mengden $A = \{(x,y) \mid R(x,y)\}$ som definerer det sirkulære området i figur 1.4.

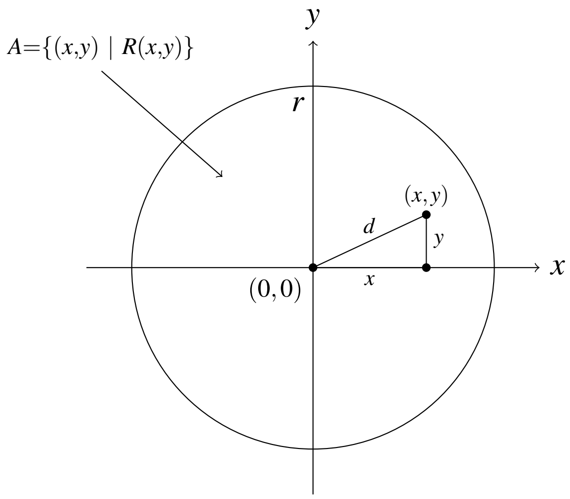

Figure 1.4: Sirkulært område.

Løsning:

Hvilke verdier kan koordinatene x og y ta hhv.?

For å være på *innsiden* av sirkelen, må avstanden $d = \sqrt{x^2+y^2}$ fra origo til punktet (x,y), være mindre enn radiusen r, som vist i figur 1.4.

Restriksjonen $R(x,y)$ er dermed gitt ved det logiske utsagnet:

$$R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leq r \tag{1.100}$$

Arealet A kan dermed defineres ved:

$$A = \{\ (x,y) \mid \overbrace{\sqrt{x^2+y^2} \leq r}^{R(x,y)}\ \}. \tag{1.101}$$

[9]Bruk at avstanden d mellom origo og et punkt (x,y) er gitt ved

$$d = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.99}$$

b) Anta du eier et *triangulært* område A som utgjør en rettvinklet likebeint trekant hvor katetene (de korte sidene) har lengde a. Plasser (x,y)-koordinatsystemet hvor origo ligger i hjørnet hvor katetene krysser, som vist i figur 1.5.

Definer mengden $A = \{(x,y) \mid R(x,y)\}$. [10]

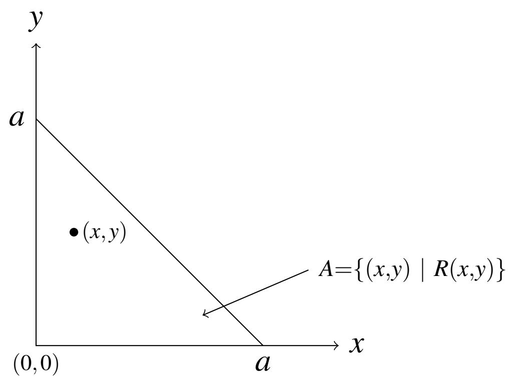

Figure 1.5: Triangulært område.

Løsning:

Hvilke verdier kan koordinatene x og y ta hhv?

x-aksen: Siden trekanten spenner seg fra 0 til a langs x-aksen, må

$$0 \leq x \leq a. \tag{1.103}$$

y-aksen: Siden rektangelet spenner seg fra 0 til a langs y-aksen, må

$$0 \leq y \leq a. \tag{1.104}$$

I tillegg må vi holde oss innenfor hypotenusen som er beskrevet som alle punkter (x,y) som oppfyller $y = -x + a$.

For å være på *innsiden* av trekanten, viser figur 1.6 at

$$y \leq -x + a. \tag{1.105}$$

[10] Bruk at den lengste siden (hypotenusen) er gitt ved punktene (x,y) som oppfyller ligningen

$$y = -x + a \tag{1.102}$$

.

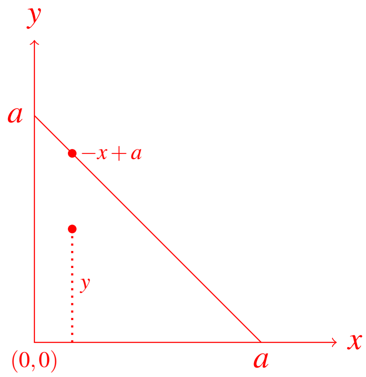

Figure 1.6: Triangulært område.

Restriksjonen $R(x,y)$ er dermed gitt ved det logiske utsagnet:

$$R(x,y) = 0 \leq x \leq a \ \wedge \ 0 \leq y \leq a \ \wedge y \leq -x+a \tag{1.106}$$

Arealet A kan dermed defineres ved:

$$A = \{ \ (x,y) \mid \overbrace{0 \leq x \leq a \ \wedge \ 0 \leq y \leq a \ \wedge y \leq -x+a}^{R(x,y)} \}. \tag{1.107}$$

■