Kapittel 11: Matematisk induksjon

Nettkurs

Boka

Matematisk induksjon

- For å bevise at en påstand er sann for alle naturlige tall, er det tilstrekkelig å bevise:
    - **Basissteget** (*base case*): at påstanden holder for tallet 0.
    - **Induksjonssteget** (*induction step*): at *hvis* påstanden holder for et vilkårlig naturlig tall n, *så* holder den også for $n + 1$. Antagelsen om at påstanden er sann for n, kalles **induksjonshypotesen** (*induction hypothesis*).
- Hvis begge disse holder, kan vi ved **matematisk induksjon** (*mathematical induction*) konkludere med at påstanden er sann for *alle* naturlige tall.
- Hvis P er en påstand, er det vanlig å skrive $P(x)$ for å indikere at x forekommer i P.
- **NB**: induksjonssteget i seg selv beviser ikke at for alle x, $P(x)$ er sann - det er en kombinasjon av basissteget og induksjonssteget som gjør dette.

Sterk induksjon

- I den såkalt **sterk**, eller **komplett** (*complete*) induksjon, antar vi i *induksjonssteget* at påstanden holder for alle naturlige tall mindre eller lik n, og ikke bare n, og fra det viser vi at påstanden holder for $n + 1$.

Egenskaper ved rekursive funksjoner

- Matematisk induksjon kan brukes til å vise at rekursive funksjoner har bestemte egenskaper

- Altså, vi kan gå fra en induktiv funksjon til ikke-unduktiv funksjon. $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 4$, blir til $f(n) = 4n$, , for alle $n \in \mathbb{N}$.
  - Med andre ord, $P(n)$ står for $f(n) = 4n$.
  - **Basissteget:** $P(0)$ må være sann. $P(0) = f(0) = 4 \cdot 0 = 0$.
  - **Induksjonssteget:** $P(n) \to P(n+1)$.
  - Derfor, **induksjonshypotesen** er at $P(n)$ er sann for et vilkårlig n.
  - **Regninger:** $$\begin{aligned} P(n+1) = f(n+1) &= 4(n+1) \\ &= 4n + 4 = f(n) + 4 \end{aligned}$$
  - Nå har vi bevisst hypotesen.