IN1150 – Logiske metoder

Eksamen høsten 2018 (med løsningsforslag)

Dette er et utkast til løsningsforslag til eksamen i IN1150 høsten 2018, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Dette er et første utkast til løsningsforslag, og det vil bli oppdatert i løpet av noen uker.

Sist oppdatert: 19. desember 2018

Om eksamen: Eksamen består av to deler som er verdt omtrent like mye. Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Et korrekt svar er her verdt ett poeng, et feil svar er verdt minus ett poeng, og en ubesvart oppgave er også verdt minus ett poeng. Det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Den andre delen består av litt større oppgaver, hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave.

Om sensur og karaktergivning: Det som er utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen på Universitetet i Oslos nettsider. Den totale poengsummen brukes som veiledning for karakteren. En grov tommelfingerregel for karakteren er følgende.

Ca. 120 poeng (ca. 86 %): A

Ca. 100 poeng (ca. 71 %): B

Ca. 80 poeng (ca. 57 %): C

Ca. 60 poeng (ca. 43 %): D

Ca. 40 poeng (ca. 29 %): E

Merk at dette er *omtrentlige* grenser som vurderes og justeres i lys av oppgavesettets vanskelighetsgrad og form.

En kommentar om minuspoeng: Det å få -1 for feil svar og +1 for riktig svar, er ekvivalent med å få 0 for feil svar og +2 for riktig svar, men det gjør det enklere å korrigere for gjetting. Hvis man gjetter helt tilfeldig på alle oppgavene får man i snitt null poeng. En gjetting er riktignok ofte er ledet av en trent intuisjon, og det derfor som regel lønne seg å "gjette". Fordi man får like mange pluss-poeng som minus-poeng for de oppgavene man gjetter på, vil antall poeng etter 70 sant/usant-oppgaver på den måten representere hvor mange spørsmål man faktisk vet det riktige svaret på.

> **Kommentar:** For oppgavene i den andre delen, med større oppgaver, er en mer detaljert poenggivning angitt i bokser som denne. I den første delen av eksamen er poenggivningen slik som angitt over.

Små oppgaver [70 poeng]

1 Grunnleggende mengdelære [3 poeng]

Anta at $A = \{\texttt{a}, \texttt{ab}, \texttt{ac}, \texttt{aaa}\}$ og $B = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{ab}, \texttt{ac}, \texttt{bc}\}$

(a) Det er slik at $A \subseteq B$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\texttt{aaa} \in A$, men $\texttt{aaa} \notin B$.

(b) Det er slik at $A \cap B = \{\texttt{a}, \texttt{ab}, \texttt{ac}\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\{\texttt{a}, \texttt{ab}, \texttt{ac}\}$ er mengden av strenger som er *både* i A og B.

(c) Det er slik at $B \setminus A = \{\texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{bc}\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\{\texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{bc}\}$ er mengden av strenger som er i B, men ikke i A.

2 Utsagnslogikk [3 poeng]

Anta at S står for utsagnet «jeg spiser» og at D står for «jeg drikker»

(a) Formelen $\neg(S \land D)$ representerer utsagnet «jeg hverken spiser eller drikker» (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi formelen representerer utsagnet «det er ikke slik at jeg både spiser og drikker». For å representere utsagnet «jeg hverken spiser eller drikker» kan vi bruke formelen $\neg(S \lor D)$.

(b) Formelen $(S \to D)$ representerer utsagnet «jeg spiser bare hvis jeg drikker». (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen representerer at «jeg drikker» er en nødvendig betingelse for «jeg spiser».

(c) Formelen $\neg(S \land \neg D)$ representerer utsagnet «det er ikke slik at jeg spiser og drikker». (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi formelen representerer utsagnet «det er ikke slik at jeg spiser og *ikke* drikker». For å representere utsagnet «det er ikke slik at jeg spiser og drikker» kan vi bruke formelen $\neg(S \land D)$.

3 Semantikk for utsagnslogikk [3 poeng]

(a) Hvis Q er sann, så er også $P \to (Q \lor R)$ sann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis Q er sann, så er også $(Q \lor R)$ sann, ved definisjonen av tolkning av $\lor$, og da er også $P \to (Q \lor R)$ sann, ved definisjonen av tolkning av $\to$.

(b) Formelen $(P \land \neg Q) \lor (P \to Q)$ er sann for alle valuasjoner. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi enten vil P være sann *og* Q være usann, som er tilfellet dersom $(P \land \neg Q)$ er sann, eller så vil P være usann eller Q være sann, og i begge disse to tilfellene vil $(P \to Q)$ være sann. Sagt på en annen måte, det er er umulig å gjøre formelen usann, for da må $(P \to Q)$ være usann, noe som betyr at P må være sann og Q må være usann, men da må $(P \land \neg Q)$ være sann, som gjør hele formelen sann.

(c) Hvis $(P \to Q)$ og $(Q \to R)$ er sanne, så er også $(P \land R)$ sann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis P er usann og R er sann, så vil både $(P \to Q)$ og $(Q \to R)$ bli sanne (uavhengig av sannhetsverdien til Q) og $(P \land R)$ bli usann.

4 Utsagnslogiske begreper [3 poeng]

(a) Hvis F og G er kontradiktoriske, så er $(\neg F \land \neg G)$ gyldig. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis F og G er kontradiktoriske, så vil de alltid være usann, og da vil både $\neg F$ og $\neg G$ alltid være sanne, og da vil $(\neg F \land \neg G)$ alltid være sann.

(b) Hvis F og G er oppfyllbare, så er også $(F \land G)$ oppfyllbar. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi F og G kan være motsetninger, for eksempel dersom F er formelen P og G er formelen $\neg P$. Da er både F og G oppfyllbare, men konjunksjonen $(P \land \neg P)$ er *ikke* oppfyllbar.

(c) Hvis F og G er ekvivalente, så er $(F \to G)$ og $(G \to F)$ ekvivalente. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis F og G er ekvivalente, så blir både $(F \to G)$ og $(G \to F)$ alltid sanne, og da er de per definisjon ekvivalente.

5 Bevis, formodninger og moteksempler [3 poeng]

(a) For å bevise at $(F \to G)$ er sann er det tilstrekkelig å bevise at $(\neg G \to \neg F)$ er sann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $(\neg G \to \neg F)$ er den kontrapositive av $(F \to G)$, og de er ekvivalente. Dersom vi har et bevis for den kontrapositive, kan vi gjøre om dette til et bevis for $(F \to G)$.

(b) Et moteksempel til påstanden «alle partall er delelig med 4» er tallet 8. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi tallet 8 *er* delelig med 4. Et moteksempel ville ha vært tallet 6 som *ikke* er delelig med 4.

(c) En sannhetsverditabell kan alltid brukes til å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er en tautologi. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi vi kan alltid lage en sannhetsverditabell for en formel, og vi kan alltid sjekke kolonnen under hovedkonnektivet for å finne ut om formelen er en tautologi.

6 Relasjoner [3 poeng]

La $R = \{\langle \mathtt{a}, \mathtt{a}\rangle, \langle \mathtt{b}, \mathtt{a}\rangle, \langle \mathtt{c}, \mathtt{a}\rangle, \langle \mathtt{b}, \mathtt{b}\rangle, \langle \mathtt{c}, \mathtt{c}\rangle\}$ være en relasjon på mengden $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$.

(a) Relasjonen R er refleksiv. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi $\langle \mathtt{d}, \mathtt{d}\rangle$ mangler.

(b) Relasjonen R er symmetrisk. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi $\langle \mathtt{b}, \mathtt{a}\rangle$ er med, men $\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}\rangle$ mangler.

(c) Relasjonen R er transitiv. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi når $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, z\rangle$ er med, så er også $\langle x, z\rangle$ med.

7 Funksjoner [3 poeng]

(a) Hvis en funksjon er både surjektiv og injektiv, så er den bijektiv. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi dette er definisjonen av en bijektiv funksjon.

(b) Det finnes en surjektiv funksjon på $\{1, 2, 3\}$ som *ikke* er injektiv. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi enhver surjektiv funksjon på en endelig mengde nødvendigvis også må være injektiv. Merk at ordet *på* her betyr at funksjonen må ha $\{1, 2, 3\}$ både som definisjons- og verdiområde.

(c) Mengden $\{f(x) \mid x \in X\}$ kalles bildet av X under f. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi dette er definisjonen av «bildet av X under f». Det er mengden av alle $f(x)$ slik at $x \in X$.

8 Litt mer mengdelære [3 poeng]

(a) Det finnes to forskjellige uendelige mengder A og B slik at $A \setminus B$ er tom. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis A og B er to forskjellige uendelige mengder slik at A er inneholdt i B, blir $A \setminus B$ tom. Det skjer for eksempel dersom A er mengden av partall og B er mengden av heltall.

(b) Hvis $\overline{A}$ er komplementet til mengden A, så er $A \cap \overline{A}$ den tomme mengden. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi A og $\overline{A}$ ikke har noen elementer til felles. Mengden $A \cap \overline{A}$ er per definisjon mengden av alle elementer som er *både* i A og $\overline{A}$. Det finnes ingen slike elementer, og derfor er $A \cap \overline{A}$ alltid lik den tomme mengden.

(c) Det finnes en endelig mengde A slik at potensmengden til A er uendelig. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi dersom A er endelig, finnes det kun endelig mange delmenger av A.

9 Tillukninger og induktivt definerte mengder [3 poeng]

La $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ være mengden av positive oddetall.

(a) O er lukket under addisjon. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $1 + 3 = 4$, som ikke er et element i O.

(b) O er lukket under multiplikasjon. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi når to oddetall ganges sammen, får vi alltid et nytt oddetall.

(c) La M være den minste mengden som inneholder 1 og som er lukket under funksjonen $f(x) = x + 2$. Da er O og M identitiske. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi M inneholder alle og bare de positive oddetallene.

10 Rekursive funksjoner [3 poeng]

La f være en funksjon på $A = \{a, b, c\}$ slik at $f(a) = b$, $f(b) = c$ og $f(c) = a$. La g være en funksjon på A^* definert rekursivt på følgende måte, hvor x står for ett av tegnene i A og s står for en streng i A^*:

$$g(\Lambda) = \Lambda$$

$$g(xs) = x\, g(s) f(x)$$

(a) Det er slik at $g(\mathtt{abc}) = \mathtt{abcacb}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant, og vi kan se det ved følgende utregning:

$$\begin{aligned} g(\mathtt{abc}) &= \mathtt{a}\, g(\mathtt{bc})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{ab}\, g(\mathtt{c})\, f(\mathtt{b})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abc}\, g(\Lambda) f(\mathtt{c})\, f(\mathtt{b})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abc}\, \Lambda\, f(\mathtt{c})\, f(\mathtt{b})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abc}\, f(\mathtt{c})\, f(\mathtt{b})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abca}\, f(\mathtt{b})\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abcac}\, f(\mathtt{a}) \\ &= \mathtt{abcacb} \end{aligned}$$

(b) Det siste tegnet i $g(\mathtt{abccbaabccba})$ er $\mathtt{b}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $g(\mathtt{a}s) = \mathtt{a}\, g(s)\, f(\mathtt{a})$ og $f(\mathtt{a}) = \mathtt{b}$.

(c) Funksjonen g er surjektiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det for eksempel ikke finnes noen $s \in A^*$ slik at $g(s) = \mathtt{a}$. Alle strenger i bildemengden til g har et partall antall tegn, men det finnes elementer i A^*, som for eksempel $\mathtt{a}$, som har et oddetall antall tegn.

11 Matematisk induksjon [3 poeng]

(a) Anta at $P(n)$ står for en påstand om tallet n. Påstanden «for alle n, hvis $P(n)$, så $P(n+1)$» uttrykker *induksjonshypotesen* i et bevis ved matematisk induksjon. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi induksjonshypotesen refererer til antakelsen om at $P(n)$ er sann. Påstanden i oppgaven kalles for *induksjonssteget* i et induksjonsbevis.

(b) Anta at $P(n)$ står for en påstand om tallet n. Påstanden «for alle n, $P(n)$» uttrykker *induksjonssteget* i et bevis ved matematisk induksjon. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi påstanden i oppgaven refererer til det som *bevises* i et induksjonsbevis. Induksjonssteget er påstaden «for alle n, hvis $P(n)$, så $P(n+1)$».

(c) Et bevis ved matematisk induksjon kan alltid formuleres som et bevis ved strukturell induksjon. (<u>**Sant**</u> / Usant)

Dette er sant fordi strukturell induksjon er en generalisering av matematsk induksjon. Ved å ta utgangspunkt i den induktive definisjonen av naturlige tall, får man automatisk et bevis ved strukturell induksjon fra et bevis ved matematisk induksjon.

12 Strukturell induksjon [3 poeng]

(a) I et bevis ved strukturell induksjon på mengden av utsagnslogiske formler, får vi ett induksjonssteg for hvert av konnektivene. (<u>**Sant**</u> / Usant)

Dette er sant fordi det er slik bevis ved strukturell induksjon er definert, og fordi når vi definerer mengden av utsagnslogiske formler induktivt, får vi ett steg for hvert konnektiv. Da må vi følge den samme strukturen i beviset.

(b) I induksjonssteget antar vi alltid at induksjonshypotesen er sann, og induksjonshypotesen er alltid et universelt utsagn. (Sant / <u>**Usant**</u>)

Dette er usant fordi induksjonshypotesen ikke trenger å være et universelt utsagn.

(c) Det går an å bruke bevis ved strukturell induksjon for alle induktivt definerte mengder. (<u>**Sant**</u> / Usant)

Dette er sant fordi det er slik bevis ved strukturell induksjon er definert.

13 Førsteordens språk [3 poeng]

Vi ser her på språket for mengdelære med signaturen $\langle \emptyset\,; \cap, \cup\,;\, =, \in \rangle$, Ariteten til alle funksjons- og relasjonssymboler er to, og vi bruker infiksnotasjon.

(a) $(\emptyset \cap (\emptyset \in x))$ er en *term* i dette språket. (Sant / <u>**Usant**</u>)

Dette er usant fordi $(\emptyset \in x)$ *ikke* er en term, og det er igjen fordi dette er en *atomær formel*.

(b) $(x \cup y) \in x$ er en *atomær formel* i dette språket. (<u>**Sant**</u> / Usant)

Dette er sant fordi $(x \cup y)$ og x er termer og $\in$ er et relasjonssymbol.

(c) $\forall x(x \cup \emptyset = \emptyset)$ er en *sammensatt formel* i dette språket. (<u>**Sant**</u> / Usant)

Dette er sant fordi $x \cup \emptyset = \emptyset$ er en atomær formel, og fordi vi kan sette en universell kvantor foran.

14 Representasjon av kvantifiserte utsagn [3 poeng]

Anta at S er et relasjonssymbol slik at Sxy tolkes som «x stoler på y».

(a) Formelen $\forall x \exists y Sxy$ representerer utsagnet «alle stoler på noen». (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi formelen uttrykker «for enhver x finnes det en y slik at x stoler på y». Det betyr at alle har noen de stoler på, eller med andre ord at alle stoler på noen.

(b) Formelen $\neg\exists x Sxx$ representerer utsagnet «det finnes noen som ikke stoler på seg selv». (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi $\neg\exists x Sxx$ representerer utsagnet «det finnes ingen som stoler på seg selv». For å representer «det finnes noen som ikke stoler på seg selv» må vi skrive $\exists x \neg Sxx$.

(c) Formelen $\forall x(\exists y Sxy \to Sxx)$ representerer utsagnet «alle som stoler på noen, stoler på seg selv». (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi formelen uttrykker at «for enhver x er det slik at at hvis det finnes en y som er slik at x stoler på y, så stoler x på seg selv». Det kan skrives om til at «for alle x, hvis x stoler på noen, så stoler x på seg selv».

15 Tolkning i modeller [3 poeng]

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\mathbb{N}$ hvor $\langle x, y\rangle \in R^{\mathcal{M}}$ holder dersom x er mindre enn eller lik y.

(a) Det er slik at $\mathcal{M} \models \exists x \neg Rxx$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det ikke finnes et naturlig tall n slik at ikke $n \leqslant n$. Det er fordi det for alle naturlige tall er slik at $n \leqslant n$. Formelen i oppgaven, $\exists x \neg Rxx$, uttrykker at det finnes et tall som *ikke* er mindre eller lik seg selv, men alle tall er lik seg selv.

(b) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi når $x = y$, vil Rxy bli sann og $\neg Ryx$ bli usann. Da blir formelen i oppgaven usann. Sagt på en annen måte, det er ikke slik at $a \leqslant b$ impliserer $\neg b \leqslant a$. Det er fordi a og b kan være like.

(c) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$. (**Sant** / Usant)

> Formelen $\forall x \forall y \forall z(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$ uttrykker at R er transitiv, og dette er sant fordi $\leqslant$-relasjonen er transitiv: Dersom a er mindre enn eller lik b, og b er mindre enn eller lik c, må a være mindre enn eller lik c.

16 Resonnering om modeller [3 poeng]

(a) Enhver modell som gjør $\forall x(Px \to Qx)$ sann, må gjøre $\exists x Qx$ sann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\forall x(Px \to Qx)$ kan være sann samtidig som $\exists x Qx$ er usann. Det skjer for eksempel dersom $\exists x Px$ er usann. Det vil si at vi har en modell $\mathcal{M}$ som er slik at både $P^{\mathcal{M}}$ og $Q^{\mathcal{M}}$ er den tomme mengden.

(b) Enhver modell som gjør $\forall x(Px \to Qx)$ usann, må gjøre $\exists x \neg Qx$ sann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis $\forall x(Px \to Qx)$ er usann i en modell $\mathcal{M}$, må det finnes et element a slik at $a \in P^{\mathcal{M}}$ og $a \notin Q^{\mathcal{M}}$. Da følger det at $\exists x \neg Qx$ er sann i $\mathcal{M}$.

(c) Enhver modell som gjør $\forall x \forall y Rxy$ sann, må gjøre $\exists x \exists y Rxy$ sann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi enhver modell $\mathcal{M}$ må ha minst ett element a i sitt domene. Da må $\langle a, a \rangle \in R^{\mathcal{M}}$, og da følger det at $\exists x \exists y Rxy$.

17 Abstraksjon med ekvivalenser og relasjoner [3 poeng]

(a) $\{\langle \mathtt{a}, \mathtt{a} \rangle, \langle \mathtt{b}, \mathtt{b} \rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på mengden $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi relasjonen ikke er refleksiv, og det er fordi $\langle \mathtt{c}, \mathtt{c} \rangle$ mangler.

(b) Det finnes en partisjon av de naturlige tallene slik at mengden av primtall er et *element* i partisjonen. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det finnes en partisjon $\{P, Q\}$ av $\mathbb{N}$ slik at P er mengden av alle primtall og Q er mengden av alle de andre naturlige tallene.

(c) Det finnes kun én ekvivalensrelasjon på mengden $\{1, 2\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det finnes to, og det er $\{\{1\}, \{2\}\}$ og $\{\{1, 2\}\}$.

18 Kombinatorikk [3 poeng]

(a) Det er nøyaktig tre permutasjoner av mengden $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det finnes seks permutasjoner, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, av en mengde med tre elementer.

(b) Antall k-kombinasjoner av en mengde med n elementer er lik $\binom{n}{k}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er slik $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ er definert.

(c) Det er slik at $\binom{n}{k}$ er lik $\binom{n}{n-k}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er like mange måter å velge k elementer fra n på som det er måter å velge $n-k$ elementer fra n på.

19 Litt mer kombinatorikk [3 poeng]

(a) Det er nøyaktig 52! stokkinger av en kortstokk med 52 kort. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.

(b) Det er nøyaktig n^n bijeksjoner på en mengde med n elementer. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det er $n!$ bijeksjoner på en mengde med n elementer.

(c) Vi kan få 30 forskjellige strenger ved å stokke om på tegnene i strengen `aaabbb`. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi vi kan kun få 20 forskjellige strenger. Det er fordi $\frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

20 Litt abstrakt algebra [3 poeng]

(a) Identitetselementet for konkatenering er den tomme strengen. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $s\Lambda = \Lambda s = \Lambda$.

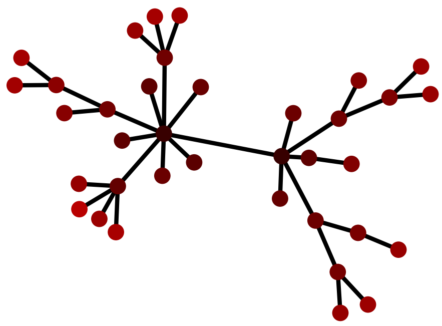
(b) Mengdeoperasjonen union, $\cup$, har en invers. (Sant / **Usant**)

Dette er usant for inverser er kun definert for funksjoner som er bijeksjoner. Det finnes to forskjellige mengder A og B slik at $A \cup B = B \cup A$, og det viser at funksjonen ikke er injektiv. En annen grunn er at inverse funksjoner i dette kurset kun er definert for unære operasjoner (som er bijeksjoner).

(c) For at $\langle G, \bullet \rangle$ skal være en *gruppe*, må $\bullet$ være kommutativ. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi definisjonen av en gruppe ikke sier noe om hvorvidt operasjonen er kommutativ.

21 Grafteori [3 poeng]



(a) Denne grafen er et tre. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi grafen er en sammhengende asyklisk graf.

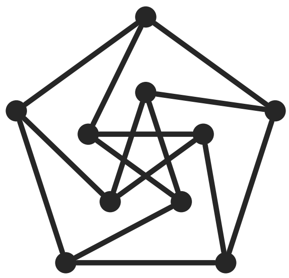
(b) Enhver komplett graf med minst tre noder har en sykel. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis grafen inneholder nodene a, b og c, og grafen er komplett, må det finnes kanter mellom disse tre, og da finnes det per definisjon en sykel.

(c) En graf har alltid minst én kant. (Sant / **Usant**)

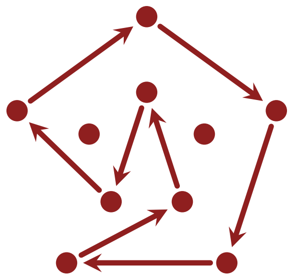
Dette er usant fordi det finnes tomme grafer. En graf må derimot alltid innehold minst én node.

22 Vandringer i grafer [3 poeng]



(a) Denne grafen har en sykel av lengde åtte. (**<u>Sant</u>** / Usant)

Dette er sant. Her er en slik sykel:

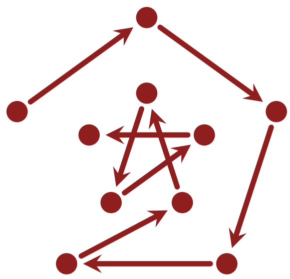


(b) Denne grafen har en eulervei. (Sant / **<u>Usant</u>**)

Dette er usant fordi det finnes flere enn to noder av odde grad; da kan det ikke finnes en eulervei.

(c) Denne grafen har en hamiltonsti. (**<u>Sant</u>** / Usant)

Dette er sant. Her er en hamiltonsti:



23 Formelle språk og grammatikker [2 poeng]

(a) De regulære uttrykkene `000|10` og `0(0|1)0` representerer det samme språket. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det regulære uttrykket `000|10` representerer språket {`000`, `10`}, og det regulære uttrykket `0(0|1)0` representerer språket {`000`, `010`}.

(b) Ethvert regulært uttrykk består av endelig mange tegn. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant på grunn av hvordan regulære uttrykk er induktivt definert som endelige strenger.

24 Naturlig deduksjon [2 poeng]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land \neg P]^1}{P}{\scriptstyle \land E} \qquad \dfrac{[P \land \neg P]^1}{\neg P}{\scriptstyle \land E}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{Q}{\scriptstyle \bot}}{(P \land \neg P) \to Q}{\scriptstyle \to I_1}$$

(a) Her er reglene i naturlig deduksjon anvendt på riktig måte. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi hver enkelt anvendelse av en regel er anvendt på korrekt måte.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(P \lor Q)]^3 \qquad \dfrac{[P]^1}{P \lor Q}{\scriptstyle \lor I}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\neg P}{\scriptstyle \to I_1} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(P \lor Q)]^3 \qquad \dfrac{[Q]^2}{P \lor Q}{\scriptstyle \lor I}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{\neg Q}{\scriptstyle \to I_2}}{\neg P \land \neg Q}{\scriptstyle \land I}}{(\neg P \land \neg Q) \to \neg(P \lor Q)}{\scriptstyle \to I_3}$$

(b) Her er reglene i naturlig deduksjon anvendt på riktig måte. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi den nederste regelanvendelsen ikke er korrekt. Her skulle konklusjonen ha vært $\neg(P \lor Q) \to (\neg P \land \neg Q)$.

Større oppgaver [70 poeng]

25 Logisk resonnering [10 poeng]

Anta at formelen $\neg P \land (P \lor \neg Q)$ er sann.

(a) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til Q? (sann / **usann** / ubestemt)

Formelen Q er usann fordi hvis $\neg P \land (P \lor \neg Q)$ er sann, må både $\neg P$ og $(P \lor \neg Q)$ være sanne. Det at $\neg P$ er sann betyr at P er usann. Og det at $(P \lor \neg Q)$ er sann, betyr dermed at $\neg Q$ må være sann. Da må Q være usann.

Anta at formelen $\neg(P \to (Q \to R))$ er sann.

(b) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til R? (sann / **usann** / ubestemt)

Formelen R er usann fordi hvis $\neg(P \to (Q \to R))$ er sann, må $(P \to (Q \to R))$ være usann. Da må P være sann og $(Q \to R)$ være usann. Da må Q være sann og R være usann.

Anta at formelen $\neg(P \lor Q) \lor \neg((P \to R) \land (Q \to R))$ er usann.

(c) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til P? (sann / usann / **ubestemt**)

Sannhetsverdien til P er ubestemt. Det eneste vi kan avgjøre fra antakelsen om at $\neg(P \lor Q) \lor \neg((P \to R) \land (Q \to R))$ er usann, er at både $\neg(P \lor Q)$ og $\neg((P \to R) \land (Q \to R))$ er usann. Da må $(P \lor Q)$ og $((P \to R) \land (Q \to R))$ være sanne. Da må enten P eller Q være sann, men vi har ingen måte å finne ut hvilken på.

(d) [1 poeng] Hva er sannhetsverdien til R? (**sann** / usann / ubestemt)

Ved resonnementet over vet vi at enten P eller Q er sann. Vi vet også at både $(P \to R)$ og $(Q \to R)$ er sanne. Dersom P er sann, får vi at R er sann. Dersom Q er sann, får vi også at R er sann. I begge tilfeller følger det at R er sann, og derfor kan vi konkludere med at R er sann.

Anta at formlene $\forall x \forall y(Rxy \to (Px \lor Qy))$ og $(Rab \land \neg Pa)$ er sanne.

(e) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til Qb? (**sann** / usann / ubestemt)

Formelen Qb må være sann. Det at $(Rab \land \neg Pa)$ er sann betyr at Rab er sann og at Pa er usann. Det at $\forall x \forall y(Rxy \to (Px \lor Qy))$ er sann betyr at også $(Rab \to (Pa \lor Qb))$ må være sann. Fordi vi allerede vet at Rab er sann, må $(Pa \lor Qb)$ være sann. Fordi vi allerede vet at Pa er usann, kan vi konkludere med at Qb må være sann.

(f) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til Pb? (sann / usann / **ubestemt**)

Sannhetsverdien til Pb er ubestemt. Det finnes en modell som gjør formlene i oppgavene sanne og Pb sann, og det finnes en modell som gjør formlene i oppgavene sanne og Pb usann.

(g) [2 poeng] Hva er sannhetsverdien til $\neg Raa \lor Qa$? (**sann** / usann / ubestemt)

Formelen $\neg Raa \lor Qa$ må være sann. Ved antakelsen er $\forall x \forall y(Rxy \to (Px \lor Qy))$ sann, og da får vi at $(Raa \to (Pa \lor Qa))$ er sann. Ved antakelsen får vi at Pa er usann, og da får vi at $Raa \to Qa$ er sann.

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

26 Utsagnslogikk [10 poeng]

- La S stå for påstanden «F er sann hvis og bare hvis G er sann». (Dette betyr at enhver valuasjon som gjør F sann, gjør G sann, og vice versa.)
- La T stå for påstanden «F er gyldig hvis og bare hvis G er gyldig».

Du kan anta at F og G er utsagnslogiske formler.

(a) [5 poeng] Bevis at T er en logisk konsekvens av S.

Anta at S holder. Da er F og G sanne for de samme valuasjonene, det vil si at de er ekvivalente. Hvis F er gyldig, er F sann for *alle* valuasjoner. Da må G også være sann for *alle* valuasjoner, og dermed være gyldig. Og vica versa, dersom G er gyldig. Da følger det at T.

(b) [5 poeng] Bevis at S ikke er en logisk konsekvens av T.

Her er et moteksempel: La F være formelen P og G være formelen Q. Ingen av dem er gyldige, og dermed blir T sann. Men, S blir usann fordi formlene *ikke* er ekvivalente. Det er mulig å gjøre F sann og G usann.

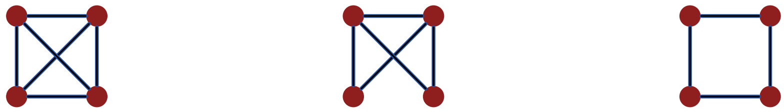
Kommentar: I denne oppgaven må kandidaten gi bevis. Dersom det ikke er noe bevis i besvarelsen, har vi valgt å gi ett poeng for å kunne definisjonen av logisk konsekvens, ett poeng for å kunne definisjonen av gyldig formel, og ett poeng per deloppgave for å skissere en hovedidé. For å få full uttelling, derimot, må kandidaten i **(a)** begynne med antakelsen om at S er sann, og fra denne antakelsen vise at T er sann, og **(b)** forklare hvordan T kan gjøres sann *og* hvordan S kan gjøres usann. I **(b)** trekkes ett til to poeng dersom argumentet mangler et konkret eksempel.

27 Grafteori [10 poeng]

(a) [3 poeng] Hvor mange forskjellige (ikke-isomorfe) grafer har *alle* av følgende egenskaper:

- Grafen har nøyaktig fire noder.
- Grafen er enkel.
- Grafen er sammenhengende.
- Alle nodene i grafen har minst grad 2.

Det er tre slike grafer.



(b) [3 poeng] Finnes det en enkel, sammenhengende graf med fire noder som har gradene 1, 2, 3 og 4? Gi en begrunnelse for svaret.

Nei, det finnes ingen slik graf. Hvis nodene skal ha gradene 1, 2, 3 og 4, må noden med grad 4 være relatert til *alle* de andre nodene, inkludert seg selv, og da er ikke grafen lenger enkel. En alternativ begrunnelse er at det må være totalt $(1+2+3+4)/2 = 5$ kanter i grafen. Men, én av nodene har grad 1, og derfor må de fire resterende kantene gå mellom de tre resterende nodene. Det er ikke mulig uten løkker eller parallele kanter.

(c) [4 poeng] Hva betyr det at en graf har en eulervei, men ikke en eulerkrets?

Det at en sammenhengende graf G har en eulervei betyr at det finnes en vandring, det vil si en sekvens av noder og kanter, som inneholder hver kant fra G nøyaktig én gang. Det at det ikke finnes en eulerkrets i grafen betyr at det ikke finnes en eulervei hvor den første og den siste noden sammenfaller. En konsekvens av dette er at det er nøyaktig to noder i G som har grader som er oddetall, og at enhver eulervei må begynne og slutte i disse to.

Kommentar: I **(a)** må kandidaten ha riktig antall for å få full uttelling. Dersom kandidaten er én forskjellig fra et korrekt svar gis ett poeng. I **(b)** må kandidaten gi en overbevisende begrunnelse som reflekterer forståelsen for begrepene *grad*, *enkel*, *sammenhengende*, etc. Det er for eksempel ikke tilstrekkelig å kun gjenta oppgaveteksten eller kun si at det er umulig. For å få full uttelling i **(c)** må kandiaten påpeke (1) at *det eksisterer* en vandring, (2) at denne *går over alle kanter*, (3) at den *ikke gjentar* noen av kantene og (4) at det *ikke finnes noen slik* vandring som begynner og slutter i samme node. Det er for eksempel ikke tilstrekkelig å kun si at det finnes nøyaktig to noder av odde grad.

28 Kombinatorikk [10 poeng]

La M være mengden $\{1, 2, 3\}$.

(a) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har M?

Det er 7 ikke-tomme delmengder av M. Det er $2^3 = 8$ delmengder totalt, men én av disse er den tomme mengden.

(b) [2,5 poeng] Hvor mange ikke-tomme delmengder har potensmengden til M?

Det er 255 ikke-tomme delmengder av potensmengden til M. Det er $2^8 = 256$ delmengder totalt, fordi potensmengden har $2^3 = 8$ elementer, men én av disse er den tomme mengden.

(c) [2,5 poeng] Hvor mange irrefleksive relasjoner finnes det på M?

Det er $2^6 = 64$ irrefleksive relasjoner på M. På en mengde med tre elementer er det ni forskjellige mulige tupler som kan være med å utgjøre en relasjon, men tre av disse er på formen $\langle x, x\rangle$. Da er det seks elementer som kan være med eller ikke. Dette er $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$ og $\langle 3, 2\rangle$. Vi får dermed 2^6 mulige *irrefleksive* relasjoner. For eksempel dersom *ingen* av tuplene er med, får vi den tomme relasjonen. Dersom *alle* tuplene er med, får vi relasjonen hvor ethvert tall er relatert til ethvert *annet* tall.

(d) [2,5 poeng] Hvor mange bijeksjoner f på M, slik at $f(x) \neq x$ for alle x, finnes det?

Det er kun to slike. Dersom $f(\mathtt{a}) = \mathtt{b}$, får vi at $f(\mathtt{b}) = \mathtt{c}$ og $f(\mathtt{c}) = \mathtt{a}$. Dersom $f(\mathtt{a}) = \mathtt{c}$, får vi at $f(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$ og $f(\mathtt{c}) = \mathtt{b}$.

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

29 Relasjoner og tillukninger [10 poeng]

La M være en mengde. La R være relasjonen på potensmengden til M som er slik at $\langle A, B\rangle \in R$ hvis og bare hvis $A = B$ eller $A \cap B \neq \emptyset$. La R^* være den transitive tillukningen av R.

(a) [2 poeng] Bevis at R er refleksiv og symmetrisk.

R er refleksiv: For enhver mengde $A \subseteq M$ vil $A = A$ og dermed $\langle A, A\rangle \in R$.

R er symmetrisk: La A og B være delmengder av M slik at $\langle A, B\rangle \in R$. Da vil enten $A = B$ eller $A \cap B \neq \emptyset$. Hvis $A = B$, vil $B = A$ og dermed $\langle B, A\rangle \in R$. Hvis $A \cap B \neq \emptyset$, vil $B \cap A \neq \emptyset$, og dermed $\langle B, A\rangle \in R$.

(b) [6 poeng] Anta at A og B er to ikke-tomme delmengder av M. Bevis at $\langle A, B\rangle \in R^*$.

Anta at A og B er to ikke-tomme delmengder av M. For å vise at $\langle A, B\rangle \in R^*$ er det tilstrekkelig å finne en delmengde X slik at $\langle A, X\rangle \in R^*$ og $\langle X, B\rangle \in R^*$, for da vil det følge av transitivitet av R^* at $\langle A, B\rangle \in R^*$. Ved å la X være mengden M, får vi dette til. Da får vi at $\langle A, M\rangle \in R$ og $\langle M, B\rangle \in R$, og dermed at $\langle A, B\rangle \in R^*$.

(c) [2 poeng] Hvor mange ekvivalensklasser gir R^* opphav til? Begrunn svaret.

R^* gir opphav til nøyaktig to ekvivalensklasser. Den ene ekvivalensklassen er $\{\emptyset\}$, og den andre består av alle de andre delmengdene av M. Vi får at $\langle \emptyset, \emptyset\rangle \in R$ fordi $\emptyset = \emptyset$. Ved (b) er alle ikke-tomme delmengder relatert til hverandre. Og den tomme mengden kan ikke være relatert noen annen mengde A fordi $\emptyset \cap A = \emptyset$. (Ett unntak her er dersom M er den tomme mengden. Da finnes kun én ekvivalensklasse.)

Kommentar: For å få full uttelling i **(a)**, **(b)** og **(c)** må kandidaten gi fullstendige bevis. Dersom kandidaten definerer refleksiv og symmetrisk og forsøker å bruke dette på en fornuftig måte, gis ett poeng. Dersom idéen i **(b)** er på plass, får kandidaten fra ett til tre poeng, avhengig av hvor godt det er forklart.

30 Strukturell induksjon [10 poeng]

La M være den minste mengden slik at $\Lambda \in M$ og hvis $s \in M$, så $s0 \in M$ og $s1 \in M$. La f og g være rekursive funksjoner på M definert på følgende måte:

$$
\begin{aligned}
f(\Lambda) &= \Lambda & \qquad g(\Lambda) &= \Lambda \\
f(s0) &= f(s) & \qquad g(s0) &= g(s)0 \\
f(s1) &= f(s)1 & \qquad g(s1) &= g(s)
\end{aligned}
$$

La $F(x) = f(g(x))$. Bevis ved strukturell induksjon på M at $F(s) = \Lambda$ for alle $s \in M$.

Basisteget er å vise at påstanden holder for Λ. Det er tilfellet: $F(\Lambda) = f(g(\Lambda)) = f(\Lambda) = \Lambda$.

Induksjonssteget er å vise at hvis påstanden holder for $s \in M$, så holder den også for $s0$ og $s1$. Vi antar derfor at påstanden holder for $s \in M$, det vil si at $F(s) = \Lambda$. Dette er **induksjonshypotesen**. Vi får to tilfeller; ett for $F(s0)$ og ett for $F(s1)$:

$$
\begin{aligned}
F(s0) &= f(g(s0)) && \text{(ved definisjonen av } F) \\
&= f(g(s)0) && \text{(ved definisjonen av } g) \\
&= f(g(s)) && \text{(ved definisjonen av } f) \\
&= F(s) && \text{(ved definisjonen av } F) \\
&= \Lambda && \text{(ved induksjonshypotesen)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s1) &= f(g(s1)) && \text{(ved definisjonen av } F) \\
&= f(g(s)) && \text{(ved definisjonen av } g) \\
&= F(s) && \text{(ved definisjonen av } F) \\
&= \Lambda && \text{(ved induksjonshypotesen)}
\end{aligned}
$$

Ved strukturell induksjon følger det at $F(s) = \Lambda$ for alle $s \in M$.

Kommentar: For å få full uttelling må alle delene av induksjonsbeviset være på plass. Grovt sett er poengene fordelt slik: basissteget to poeng, formulering og bruk av induksjonshypotesen to poeng, induksjonssteget fem poeng, konklusjon og helhet ett poeng.

31 Formelle språk [10 poeng]

La $A = \{0, 1, 2\}$ og M være den minste mengden slik at følgende holder. Her står t står for et vilkårlig element i A^*.

$\Lambda \in M$	Hvis $t0 \in M$, så $t01 \in M$.
$0 \in M$	Hvis $t1 \in M$, så $t10 \in M$.
$1 \in M$	Hvis $t1 \in M$, så $t12 \in M$.
$2 \in M$	Hvis $t2 \in M$, så $t21 \in M$.

(a) [1 poeng] Er det slik at $101 \in M$?

Ja. Vi får at $1 \in M$, som gir at $10 \in M$, som gir at $101 \in M$.

(b) [1 poeng] Er det slik at $0120 \in M$?

Nei. Dersom 2 er tegnet lengst til høyre i en streng, kan vi kun legge til 1, ikke 0, til høyre. Da kan ikke noen streng inneholde 20.

(c) [2 poeng] La L være språket som representeres av det regulære uttrykket $(01|21)^*(0|2)$. Er det slik at $L \subseteq M$?

Ja. Enhver streng som representeres av $(01|21)^*(0|2)$ må inneholde en endelig sekvens av 01 og 21 etter hverandre. Fordi begge disse har 1 lengst til høyre, og 0 eller 2 lengst til venstre, vil vi alltid få strenger i M som har 1 lengst til høyre. Det å legge til 0 eller 2 helt til slutt gir oss også en streng i M.

(d) [3 poeng] Forklar hvorfor det ikke er slik at det regulære uttrykket $(0|2)(10|12)^*(\Lambda|1)$ representerer M, og gi et moteksempel.

Dette regulære uttrykket krever at en streng begynner med 0 eller 2, og ingen strenger som begynner med 1 blir representeret. For eksempel er strengen 10 med i M, men ikke representert av det regulære uttrykket. Et regulært uttrykk som representerer M er $(\Lambda|0|2)(10|12)^*(\Lambda|1)$.

(e) [3 poeng] Definer en rekursiv funksjon f på M som er slik at f teller antall forekomster av strengen 12. For eksempel vil $f(2) = 0$, $f(12) = 1$ og $f(2121210) = 2$.

La f være definert rekursivt på følgende måte.

$f(\Lambda) = 0$	$f(t01) = f(t0)$
$f(0) = 0$	$f(t10) = f(t1)$
$f(1) = 0$	$f(t12) = f(t1) + 1$
$f(2) = 0$	$f(t21) = f(t2)$

Kommentar: For å få full uttelling, kreves kun et korrekt svar for **(a)**, **(b)** og **(c)**. For **(d)** kreves både et argument og et moteksempel. For å få full uttelling for **(e)** må den rekursive funksjonen være definert korrekt, med korrekt basissteg og korrekt rekursjonssteg. I tillegg må definisjonsområdet til funksjonen være M, slik som den er definert i oppgaveteksten. (Merk: Dersom ett av tilfellene er $\mathtt{f}(\mathtt{t01}) = \mathtt{f}(\mathtt{t})$ eller $\mathtt{f}(\mathtt{t21}) = \mathtt{f}(\mathtt{t})$, vil ikke funksjonen være korrekt, fordi den kan "hoppe over" etterfølgende forekomster av $\mathtt{2}$.)