IN1150 – Høst 2017

Logiske metoder for informatikk

Digital eksamen

Tid: *Torsdag 23. november 2017 kl. 14.30–18.30 (4 timer)*

Tillatte hjelpemidler: *Ingen*

Eksamen består av to deler som er verdt omtrent like mye. Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant» som alle må besvares. (Ubesvarte oppgaver teller som feil.) Den andre delen består av litt større oppgaver, hvor du må skrive og resonnere. Det er mange oppgaver, så pass på at du bruker tiden din godt. Sørg for at det du skriver er klart, tydelig og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold, og sjekk at begrunnelsene dine er gode. En faglærer kommer til eksamenslokalet etter at eksamen har startet. Lykke til!

Oppgave 1: Grunnleggende mengdelære

Anta at A = {0, {0}, {0,{}}}.

Hvor mange elementer har A?

- 3 ✔
- 4

Det er 3 elementer: 0 er et element. {0} er et element. Og {0,{0}} er et element.

Er det slik at {} ∈ A ?

- Ja
- Nei ✔

{} (den tomme mengden) kan være element i en mengde. Men ikke i denne, det er kun de tre elementene nevnt før.

Er det slik at {} ⊆ A ?

- Ja ✔
- Nei

Den tomme mengden er en delmengde av alle mengder. Hvert element i den tomme mengden er med i A.

Maks poeng: 3

Oppgave 2: Utsagnslogikk

Anta at P står for «det snør» og at Q står for utsagnet «toget går».

Formelen $(\neg P \to Q)$ representerer utsagnet «toget går med mindre det snør».

- Sant ✓
- Usant

Utsagnet er en annen måte å si «hvis det ikke snør, så går toget,» altså $(\neg P \to Q)$.

Formelen $\neg(P \to Q)$ representerer utsagnet «toget går ikke hvis det snør».

- Sant
- Usant ✓

Utsagnet sier «det er ikke tilfelle at hvis det snør så går toget.» En korrekt formel hadde vært $(P \to \neg Q)$.

Formelen $(P \to \neg Q)$ representerer utsagnet «toget går ikke fordi det snør».

- Sant
- Usant ✓

Formelen sier «hvis det snør så går ikke toget.» Det er ikke mulig å uttrykke i utsagnslogikk at noe er tilfelle fordi *noe annet er tilfelle, s.k. kausalitet.*

Maks poeng: 3

Oppgave 3: Sannhetsverdier og valuasjoner

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Formelen $(P \vee Q \vee \neg P)$ er sann for alle valuasjoner.

- Sant ✓
- Usant

Enten P eller $\neg P$ er sann i enhver valuasjon. Da blir hele den formelen sann.

(P → ¬P) kan gjøres sann.

- Sant ✓
- Usant

Ifølge sannhetstabellen til → holder det at P blir valuert til å være usann.

Hvis (P → Q) og ¬Q er sanne, må ¬P være sann.

- Sant ✓
- Usant

I følgende sannhetstabell ser vi at (P → Q) og ¬Q kun blir sanne samtidig hvis P og Q begge er usanne. Og da er ¬P sann.

P	*Q*	*(P → Q)*	*¬Q*	*¬P*
F	*F*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*
T	*T*	*T*	*F*	*F*

Maks poeng: 3

Oppgave 4: Utsagnslogiske begrep

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Alle utsagnslogiske tautologier er oppfyllbare.

- Sant ✓
- Usant

For at en formel skal være oppfyllbar må det finnes en *valuasjon som gjør den sann. Tautologier blir til og med sanne under* hver *valuasjon.*

Det finnes en oppfyllbar formel som er kontradiktorisk

- Sant
- Usant ✓

En formel er kontradiktorisk hvis det ikke *finnes en valuasjon som oppfyller den. Det er altså det som å være ikke oppfyllbar.*

Formelen $((P \to Q) \lor (Q \to P))$ er en tautologi.

- Sant ✓
- Usant

Følgende tabell viser at formelen er sann uansett valuasjonen til P og Q.

P	Q	*(P → Q)*	*(Q → P)*	((P → Q) ∨ (Q → P))
F	*F*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*T*
T	*T*	*T*	*T*	*T*

Maks poeng: 3

Oppgave 5: Bevis og moteksempel

Velg ett alternativ:

Et moteksempel til påstanden «G er en logisk konsekvens av F»...

Velg ett alternativ

- gjør G sann og F usann.
- gjør G og F usanne.
- gjør F sann og G usann. ✓

«G er en logisk konsekvens av F» betyr at enhver valuasjon som gjør F sann også gjør G sann. Da er et moteksempel til det en valusjon som ikke gjør det. D.v.s. Den gjør F sann men ikke G.

Er en påstand bevist, kan det ikke finnes et moteksempel til den.

Velg ett alternativ

- Sant ™✓
- Usant

Det er sant. Et moteksempel viser at en påstand er usann, og da kan det ikke finnes et bevis for den.

Hvilket av disse tallene er et moteksempel til påstanden «alle oddetall er primtall»

Velg ett alternativ

- 6
- 7
- 8
- 9 ™✓

*Her må vi finne et tall som a) er oddetall, men b) ikke er primtall. 6 og 8 er ikke oddetal, så de er ikke brukbare som moteksempler. 7 er et primtall. Men 9 er altså oddetall og ikke primtall (9=3*3)*

Maks poeng: 3

Oppgave 6: Relasjoner

La R = {⟨1,1⟩, ⟨1,2⟩, ⟨2,1⟩, ⟨2,2⟩, ⟨2,3⟩, ⟨3,2⟩} være en relasjon på A = {1, 2, 3}.

Er R refleksiv?

- Ja
- Nei ™✓

Ikke refleksiv fordi paret ⟨3,3⟩ ikke er element av R.

Er R symmetrisk?

- Ja ™✓
- Nei

For hvert par ⟨x,y⟩ er også paret ⟨y,x⟩ med.

Er R transitiv?

- Ja
- Nei ™✓

⟨1,2⟩ og ⟨2,3⟩ er med i R men ikke ⟨1,3⟩.

Maks poeng: 3

Oppgave 7: Funksjoner

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

En «funksjon» er definert som en injektiv relasjon.

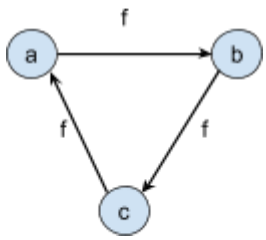
- Sant
- Usant ✔

En relasjon R (fra A til B) er en funksjon hvis den er slik at for hvert x∈A finnes nøyaktig ett element y∈B med ⟨x,y⟩. Denne egenskapen er noe annet enn å være injektiv.

Enhver bijektiv funksjon f:{a,b,c}→{a,b,c}, er en symmetrisk relasjon

Velg ett alternativ

- Sant
- Usant ✔

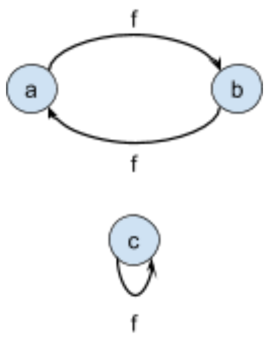


Funksjonen definert ved f(a)=b, f(b)=c, f(c)=a er bijektiv. Men siden f(a)=b og ikke f(b)=a, er den ikke en symmetrisk relasjon

Det finnes en bijektiv funksjon f:{a,b,c}→{a,b,c}, som er en symmetrisk relasjon

Velg ett alternativ

- Sant ✔
- Usant



Funksjonen definert ved f(a)=b, f(b)=a, f(c)=c er bijektiv og en symmetrisk relasjon.

Maks poeng: 3

Oppgave 8: Litt mer mengdelære

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Den tomme mengden har ikke en potensmengde

- Sant
- Usant ✓

Alle mengder har en potensmengde. Den tomme mengden har nøyaktig én delmengde, som er den tomme mengden selv: $\{\} \subseteq \{\}$*. Dermed er potensmengden av den tomme mengden* $\{\{\}\}$*, mengden som inneholder den tomme mengden som eneste element.*

Alle uendelige mengder har lik kardinalitet

- Sant
- Usant ✓

Det ble forklart i forelesningen at mengden av reelle tall er «overtellbar,» d.v.s. den har en høyre kardinalitet enn mengden av de naturlige tallene.

Mengden av primtall, {2, 3, 5, 7, 11...}, har kardinalitet mindre eller lik mengden av de naturlige tallene, {0, 1, 2, 3, ...}.

- Sant ✓
- Usant

Funksjonen $f\colon \mathbf{P} \to \mathbf{N}$*,* $f(n) := n$ *som sender hvert primtall til seg selv er injektiv. Dermed har* $\mathbf{P}$ *kardinalitet mindre eller lik* $\mathbf{N}$*. I det hele tatt har en delmengde alltid kardinalitet mindre eller lik den hele mengden.*

Maks poeng: 3

Oppgave 9: Tillukning

La $P=\{q \in Q \mid q>0\}$ være mengden av *positive rasjonale tall*.

P er lukket under divisjon («delt med»)

- Sant ✓
- Usant

Ethvert positivt brøktall x kan deles med ethvert positivt brøktall y. Resultatet er igjen et positivt brøktall. Dermed er mengden lukket under divisjon.

P er lukket under subtraksjon («minus»)

- Sant
- Usant ✓

$\frac{1}{1} - \frac{2}{1} = -\frac{1}{1}$*, resultatet er altså ikke i P.*

Den refleksive tillukningen av relasjonen «<» på P er relasjonen «≤» på P.

- Sant ✓
- Usant

Vi får den refleksive tillukningen ved å legge til ⟨x,x⟩ for alle x∈P. Og da får vi relasjonen

{⟨x,y⟩ | x<y for x,y∈P} ∪ {⟨x,x⟩ for alle x∈P}
= {⟨x,y⟩ | x<y eller x=y for x,y∈P}
= {⟨x,y⟩ | x≤y for x,y∈P}

Maks poeng: 3

Oppgave 10: Rekursive funksjoner

La f være en funksjon fra naturlige tall til strenger over alfabetet {a,b} definert rekursivt på følgende måte:

1. f(0) = a
2. f(n+1) = f(n) b f(n)

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Det er slik at f(2) = ababa

- Sant
- Usant ✓

f(0) = a. f(1) = f(0)bf(0) = aba. f(2) = f(1)bf(1) = abababa.

Det første tegnet i f(23) er en a.

- Sant ✓
- Usant

f(0) begynner på en a. Men for alle n så begynner f(n+1) på samme tegn som f(n), siden f(n) åpenbart aldri er den tomme strengen. Da er det lett å se (offisielt: ved et veldig enkelt induksjonsbevis) at f(n) begynner på en a for alle *n, også for n=23.*

Lengden (antall tegn) av f(n) er et oddetall for alle naturlige tall n.

- Sant ™✓
- Usant

$|f(0)| = |a| = 1$, *et oddetall.*

For $n \geq 0$:

$|f(n+1)| = |f(n)bf(n)| = |f(n)| + |b| + |f(n)| = 2*|f(n)| + 1$

$2*|f(n)|$ *er et partall, så* $2*|f(n)| + 1$ *er et oddetall.*

Maks poeng: 3

Oppgave 11: Strukturell induksjon

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Anta at påstanden P holder for 23 men ikke for 22. F.eks. P(x)=«x er primtall». Da vil P(x) ikke være egnet som induksjonshypotese i et bevis ved matematisk induksjon.

- Sant ™✓
- Usant

Hvis induksjonsbeviset lykkes, har vi bevist at induksjonshypotesen er sann for alle tall. Så hvis vi starter med en hypotese som ikke er det, kan ikke beviset lykkes.

Induksjonssteget i et bevis ved matematisk induksjon består i å vise at det finnes et tall n slik at P(n+1) følger av P(n).

- Sant
- Usant ™✓

Induksjonssteget består i å vise dette for alle *tall n. Det holder ikke med at det finnes ett.*

I et bevis ved strukturell induksjon på mengden av bitstrenger er induksjonshypotesen at påstanden holder for strengene «0» og «1»

- Sant
- Usant ™✓

Dette er induksjonsbasene, ikke induksjonshypotesen.

Maks poeng: 3

Oppgave 12: Førsteordens språk

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

$(\forall xRx,Qx)$ er en formel.

- Sant
- Usant ✓

Ingenting i definisjonen av syntaksen til førsteordens logikk tillater en konstruksjon (…,…)

$(Px \land \neg Px)$ er en formel.

- Sant ✓
- Usant

En uoppfyllbar formel, men en formel.

$(\forall xPxy \land \forall yQxy)$ er en formel.

- Sant ✓
- Usant

Det har ingenting å si at noen variabler er bundet og andre ikke.

$((\forall x \land \forall y)\ Pxy)$ er en formel.

- Sant
- Usant ✓

Her står tegnet «$\land$» mellom to kvantorer, det er ikke tillatt av syntaksen.

Maks poeng: 4

Oppgave 13: Representasjon av kvantifiserte utsagn

Anta at H er et relasjonssymbol slik at Hx tolkes som «x er en hund».

Anta at K er et relasjonssymbol slik at Kx tolkes som «x er en katt».

Anta at L er et relasjonssymbol slik at Lxy tolkes som «x liker y».

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Formelen $\forall x(\exists y(Hy \land Lxy) \rightarrow Hx)$ representerer utsagnet «Enhver som liker en hund er selv en hund.»

- Sant ✓
- Usant

Alle x som er slik at det finnes en y som er en hund, og x liker y, er hunder.

Formelen $\forall x \forall y((Kx \land Ky) \land Lxy)$ representerer utsagnet «Enhver katt liker alle katter».

- Sant
- Usant ✓

Denne sier at for alle x og y, så er x og y katter og x liker y. En mulig formel for utsagnet hadde vært $\forall x \forall y((Kx \land Ky) \rightarrow Lxy)$.

Formelen $\exists x \forall y(Hx \land (Ky \rightarrow Lxy))$ representerer utsagnet «Det finnes en hund som liker alle katter».

- Sant ✓
- Usant

Det kan være forvirrende at kvantoren « $\forall y$*» for alle katter står utenfor utsagnet at x er en hund – men det er ingenting galt med den måten å skrive det på.*

Maks poeng: 3

Oppgave 14: Tolkning i modeller

La M være en modell med domene {1, 2, 3, 4}, slik at

- $P^M = \{1, 3\}$ og
- $Q^M = \{2, 4\}$ og
- $R^M = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$.

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Det er slik at M $\models \forall x(Px \lor Qx)$.

- Sant ✓
- Usant

Hvert element i domenet gjør enten P eller Q sann.

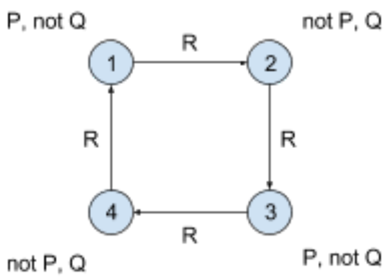
Det er slik at M $\models \exists x \forall y Rxy$.

- Sant
- Usant ✓

Tolkningen av R relaterer hvert element i denne modellen til kun ett annet element. Det finnes ikke ett element som blir relatert til alle andre.

Det er slik at M ⊧ $\forall x(Px \lor \exists y(Rxy \land Px))$.

- Sant ✓
- Usant



For alle domeneelementer er enten P sann, eller man kommer ved hjelp av R^M til et element som gjør det.

Det er slik at M ⊧ $\forall x \exists y(Px \lor Qy)$.

- Sant ✓
- Usant

For alle x kan det samme y brukes, for eksempel 2. Da blir formelen ekvivalent med $\forall x(Px \lor Q\bar{2})$ og $Q\bar{2}$ er oppfyllt uansett hva verdien til x er.

Maks poeng: 4

Oppgave 15: Resonnering om modeller

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Formelen $\exists x(Px \lor Q)$ er en logisk konsekvens av $(\exists xPx \lor Q)$.

- Sant ✓
- Usant

En modell som gjør $(\exists xPx \lor Q)$ sann gjør enten $\exists xPx$ sann, eller Q sann. I første tilfelle så finnes d i domenet slik at den gjør $P\bar{d}$ sann. Da er også $P\bar{d} \lor Q$ sann. Og dermed $\exists x(Px \lor Q)$.

Enhver modell som gjør $\forall x(Px \lor Qx)$ sann, må også gjøre $\exists x \neg Qx$ sann.

- Sant
- Usant ✓

Ta for eksempel en modell hvor P og Q er sanne på hele domenet.

Enhver modell som gjør $\forall x(Px \to \neg Px)$ sann, må også gjøre $\neg\exists xPx$ sann.

- Sant ✓
- Usant

Formelen $(Px \to \neg Px)$ er sann kun hvis Px er usann. Da er $\forall x(Px \to \neg Px)$ sann i en modell hvor P ikke holder for noe domenelement. Og da er altså også $\neg\exists xPx$ sann.

Maks poeng: 3

Oppgave 16: Ekvivalensrelasjoner

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

$\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3, 4\}$.

- Sant ✓
- Usant

Relasjonen er refleksiv, symmetrisk, og transitiv.

$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3, 4\}$.

- Sant
- Usant ✓

Relasjonen er ikke refleksiv, for eksempel er ikke $\langle 1,1\rangle$ med. Heller ikke symmetrisk siden $\langle 1,2\rangle$ er med, men ikke $\langle 2,1\rangle$. Og ikke transitiv heller siden $\langle 1,2\rangle$ og $\langle 2,3\rangle$ er med, men ikke $\langle 1,3\rangle$.

$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2\}$.

- Sant ✓
- Usant

Denne relaterer hvert element til hvert annet element. Dermed er den åpenbart refleksiv, symmetrisk og transitiv.

$\{ 1 \}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{ 1 \}$.

- Sant
- Usant ✓

Denne mengden er ikke en relajson en gang.

Maks poeng: 4

Oppgave 17: Kombinatorikk

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Det finnes nøyaktig 12 måter å velge to elementer fra mengden {1, 2, 3, 4} på.

- Sant
- Usant ✓

Med «valg» mener vi at rekkefølgen mellom de valgte elementene ikke har noe å si. Da blir det {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, altså 6 muligheter. Noen spurte om de to elementene kunne være like — nei, fordi ellers hadde jo bare vært ett element, og ikke to!

Det finnes nøyaktig 32 delmengder av mengden {0, 1, 2, 3, 4}.

- Sant ✓
- Usant

Hvert element kan enten være med eller ikke, og det er uavhengig av om de andre elmentene er med. Dermed har vi 2^5=32 delmengder.

Det finnes nøyaktig 8 bijektive funksjoner fra {1, 2, 3} til {a, b, c}.

- Sant
- Usant ✓

En bijektiv funksjon f fra {1,2,3} til {a,b,c} tilsvarer en permutasjon ⟨f(1)f,(2)f(3)⟩ av ⟨a,b,c⟩. Vi vet at det finnes 3!=6 forskjellige permutasjoner av 3 elementer.

Maks poeng: 3

Oppgave 18: Litt mer kombinatorikk

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Antall måter å velge to elementer i rekkefølge (2-permutasjoner) av en mengde med n elementer er n(n-1)(n-2).

- Sant
- Usant ✓

Antallet 2-permutasjoner er n(n-1): n måter å velge det første elementet på, og n-1 muligheter å velge det andre elementet bland de resterende. n(n-1)(n-2) er antallet 3-permutasjoner.

Antall funksjoner fra {1, 2} til {1, 2,…, k} er 2^k

- Sant
- Usant ✓

Antall funksjoner fra {1, 2} til {1, 2,…, k} er k^2. Det er antallet funksjoner fra {1, 2,…, k} til {1,2} som er 2^k.

Antall måter å dele opp 22 spillere i to fotballag à 11 er 22!/(2 · 11! · 11!).

- Sant ✓
- Usant

Det er 22!/(11! · 11!) måter å velge 11 spiller til "det ene" laget. De resterende spillerne kommer da til det andre laget. Men siden lagene ikke har noe navn, er det den samme inndelingen hvis spillerne A … K kommer i det "ene" og L … V til det "andre" laget, eller omvendt. For eksempel kan vi dele 4 spillere i to lag på tre måter: 1,2:3,4; 1,3:2,4; 1,4:2,3 altså 4!(2 · 2! · 2!).

Maks poeng: 3

Oppgave 19: Litt abstrakt algebra

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Funksjonen f(x)=3x på de reelle tallene har en invers funksjon.

- Sant ✓
- Usant

Inverset er funksjonen g definert ved g(x)= x/3. Den er definert på alle reelle tall. På de naturlige tallene hadde ikke den funksjonen hatt en invers funksjon.

Operasjonen «konkatenering» på strenger er assosiativ.

- Sant ✓
- Usant

For eksempel er (abc def)ghi = abcdefghi = abc (def ghi).

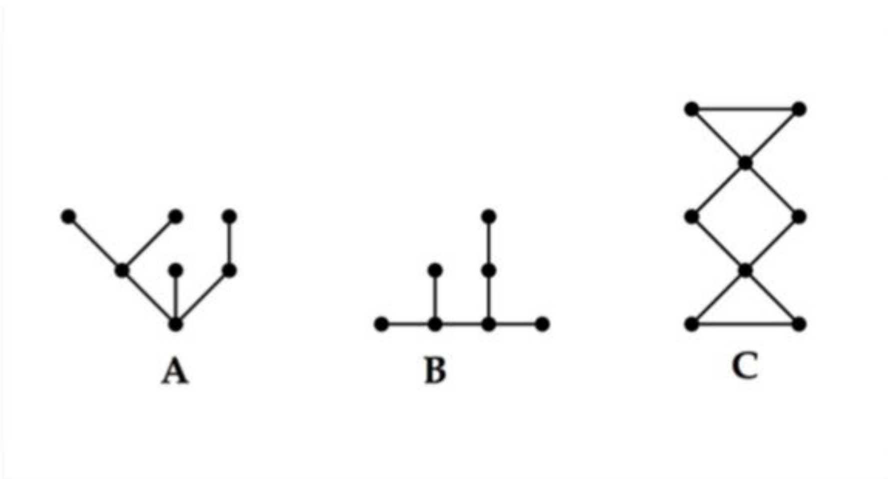
Den algebraiske strukturen ⟨S,·⟩, hvor S står for strengene over {a,b,c}, og · for konkatenering, er en gruppe.

- Sant
- Usant ✓

Det finnes et identitetselement, den tomme strengen. Og konkatenering er assosiativ. Men det finnes ikke inverse elementer for konkatenering. For eksempel finnes det ikke en streng s slik at "abc" konkatenert med s blir den tomme strengen. (Dette kalles en monoid*).*

Maks poeng: 3

Oppgave 20: Grafteori



Se på grafene over. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Grafene A og B er isomorfe.

- Sant ✓
- Usant

Den nederste noden i A tilsvarer andre noden fra høyre, nederst i B.

Grafen C har en eulerkrets, det vil si en krets som inneholder hver kant fra grafen nøyaktig én gang.

- Sant ✓
- Usant

Alle noder har partall grad, og grafen er sammenhengende. Derfor finnes det en eulerkrets.

Grafen C har en hamiltonsti, det vil si en sti som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang.

- Sant
- Usant ✓

Skal man komme innom hver node må man forbi nodene i midten, de med grad 4, flere ganger.

Maks poeng: 3

Oppgave 21: Regulære språk

La L være språket definert av det regulære uttrykket (a|b) (a*b*)* (a|b). Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

Det er slik at baaab ∈ L.

- Sant ✓
- Usant

*For eksempel kan den første b matche (a|b), så matcher aaa uttrykket (a*b*) og derfor (a*b*)*. Og den siste b matcher den siste (a|b)*

Det er slik at babbab ∈ L.

- Sant ✓
- Usant

*For eksempel matcher abb (tegn 2–4) uttrykket a*b*, og a (tegn 5) matcher også a*b*. Derfor matcher tilsammen abba (tegn 2–5) uttrykket (a*b*)*. Merk at hvis en strenger matcher r* for et regulært uttrykk r, så trenger ikke matchene for r være like.*

Det er slik at det regulære uttrykket (a|b) (a|b) (a|b)* definerer det samme språket.

- Sant ✓
- Usant

*Uttrykket (a*b*)* matcher alle strenger over {a,b}. Alle strenger kan deles opp i biter med noen (eller 0) a-er, fulgt av noen (eller 0) b-er, fulgt av a-er, og så b-er, osv. Uttrykket (a|b) (a*b*)* (a|b) krever et ekstra tegn i starten og i slutten. Dermed består språket av alle strenger med lengde større eller lik 2.*

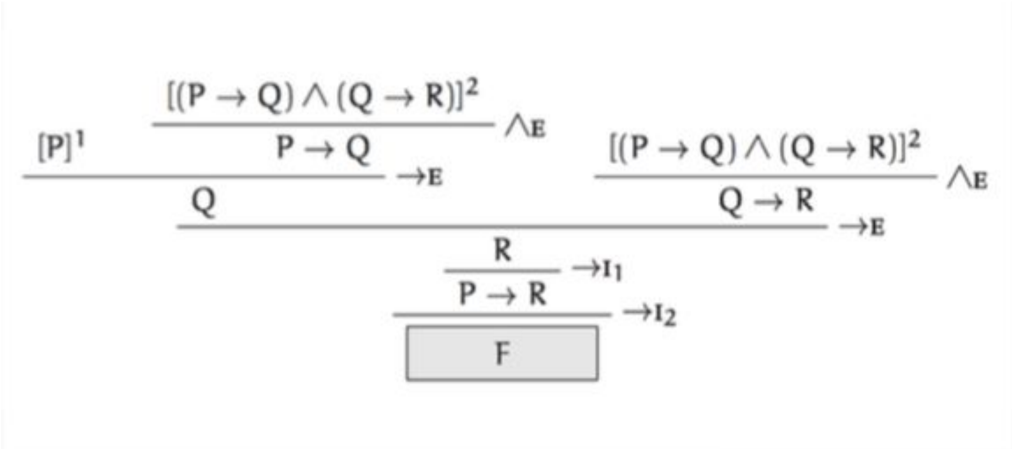
Det er slik at {$(ab)^n$ | n > 0} ⊆ L.

- Sant ✓
- Usant

Se forklaringen over. $(ab)^n$ er en string med lengde 2n, og derfor lengde ≥2 for n>0.

Maks poeng: 4

Oppgave 22: Naturlig deduksjon 1

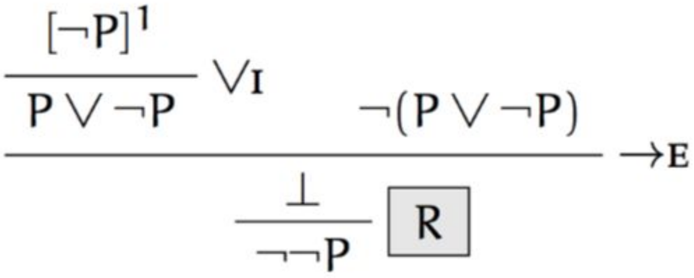


Hva er formelen F i dette beviset?

- (P→Q)∧((Q→R)→(P→R))
- ((P→Q)∧(Q→R))→(P→R) ™✓

Maks poeng: 1

Oppgave 23: Naturlig deduksjon 2



Hva er regelen R i denne utledningen?

- RAA_1
- $\rightarrow I_1$ ™✓

Husk at ¬P er en forkortelse for P → ⊥.

Maks poeng: 1

Oppgave 24: Naturlig deduksjon 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land \neg P]^1}{\neg P}{\scriptstyle \land E} \qquad \dfrac{[P \land \neg P]^1}{P}{\scriptstyle \land E}}{\bot}{\scriptstyle \to E}}{Q}{\scriptstyle \bot}}{(P \land \neg P) \to Q}{\scriptstyle \to I_1}$$

Er dette et gyldig bevis i naturlig deduksjon?

- Ja ✔
- Nei

Maks poeng: 1

Oppgave 25: Potensmengden

Forklar hva potensmengden til en mengde er, ved å bruke definisjonen av potensmengden.

Potensmengden P(M) av en mengde M er mengden av alle delmengder av M. Dvs P(M) = {A | A ⊆ M}. Eller: for en mengde A gjelder A∈P(M) hvis og bare hvis A ⊆ M.

For eksempel er P({A,B}) = {∅, {A}, {B}, {A,B}}.

Maks poeng: 5

Oppgave 26: Kardinalitet av potensmengden

Forklar hvorfor potensmengden P(M) til en (endelig eller uendelig) mengde M alltid har kardinalitet større eller lik M.

Hint: beskriv en injektiv funksjon f:M→P(M)

Ifølge definisjonen av "kardinalitet større eller lik" må vi vise at det finnes en injektiv funksjon fra M til potensmengden P(M). D.v.s., for hvert element $x \in M$ må f velge en delmengde $f(x) \subseteq M$ som er forskjellig fra delmengdene valgt for alle andre elementer av M.

Dette gjør vi ved å definere f(x) := {x}. Dette er åpenbart en funksjon fra M til P(M) siden $\{x\} \subseteq M$, altså $\{x\} \in P(M)$. Dessuten er f injektiv: anta at f(x)=f(y). Det betyr at {x}={y}. For to mengder å være like må alle elementer i dene ene være elementer i den andre, og omvendt. Her er det bare et element i hver mengde, og derfor følger x = y.

Maks poeng: 7

Oppgave 27: Førsteordens modeller

Spesifiser en førsteordens modell M for signaturen ⟨ ; P ; R ⟩ slik at følgende egenskaper holder:

1. P har aritet 1 og R har aritet 2.
2. Domenet til modellen er {1, 2, 3}.
3. $\langle 1,2 \rangle \in R^M$.
4. Formelen $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Py)$ er sann i M.
5. Formelen $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$ er sann i M.
6. $P^M \neq \{1,2,3\}$

Her var det en skrivefeil i signaturen: begge P og R skulle være relasjoner, av aritet 1 og 2, respektive. Ingen funksjonssymboler.

|M| = {1,2,3} er gitt.

Hvis $\langle 1,2 \rangle \in R^M$ gjelder også $\langle 2,1 \rangle \in R^M$, ellers blir ikke formelen i 5. sann. Dessuten må vi ha $1 \in P^M$ og $2 \in P^M$ for å oppfylle formelen i 4.

Hvis vi setter $R^M=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$ og $P^M=\{1,2\}$ er alle kravene oppfylt.

Maks poeng: 5

Oppgave 28: Rekursiv funksjon på naturlige tall

Gi en rekursiv definisjon av funksjonen «fakultet» $f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ på de naturlige tallene.

f(1) = 1

f(n+1) = (n+1) · f(n)

Maks poeng: 5

Oppgave 29: Rekursiv funksjon på strenger

La A = {a,b,c}. Definer en rekursiv funksjon f på A^* som bytter ut hver c med tre b-er og hver b med to a-er. For eksempel vil f(c) = bbb og f(cba) = bbbaaa.

f(Λ) = Λ
f(as) = a f(s)
f(bs) = aa f(s)
f(cs) = bbb f(s)

Maks poeng: 5

Oppgave 30: Bevis ved strukturell induksjon

La A = {a, b, c}. Anta at f er en rekursiv funksjon på A^* som bytter ut hver c med tre b-er og hver b med to a-er, akkurat som i forrige oppgave. For eksempel vil f(c) = bbb og f(cba) = bbbaaa.

La nå g være en funksjon fra A^* til N definert ved

g(Λ) = 0

g(as) = 1 + g(s)

g(bs) = 2 + g(s)

g(cs) = 3 + g(s)

Bevis ved strukturell induksjon på mengden A^* at for alle strenger s, er det slik at lengden til strengen f(s) er lik g(s).

Induksjonsbasis: for den tomme strengen gjelder |f(Λ)| = 0 = g(Λ).

Induksjonssteg: Anta at |f(s)| = g(s). Vi viser påstanden for alle mulige første tegn i strengen:

|f(as)| = |a f(s)| = 1 +|f(s)| = 1 + g(s) = g(as)
|f(bs)| = |aa f(s)| = 2 +|f(s)| = 2 + g(s) = g(bs)
|f(cs)| = |ccc f(s)| = 3 +|f(s)| = 3 + g(s) = g(cs)

Maks poeng: 10

Oppgave 31: Mer om rekursive funksjoner

La f(n) = n^n for naturlige tall n.

For eksempel:

- f(2) = 2^2 = 4
- f(3) = 3^3 = 27

Lag en definisjon for f ved å først lage en rekursiv definisjon for g(m,n) = m^n for vilkårlige tall m, n, ved rekursjon på n)

Vi definerer en «hjelpefunksjon» g(m,n) slik:

g(m,0) = 1
g(m,n+1) = m · g(m,n)

Så definerer vi:

f(n) = g(n,n)

Maks poeng: 8

Oppgave 32: Definisjon og utregning

La max være funksjonen på naturlige tall som gir det største av de to tallene:

x max y =	{	x	Hvis x>y
		y	ellers

Og la min være funksjonen på naturlige tall som gir det minste av de to tallene:

x min y =	{	x	Hvis x<y
		y	ellers

For eksempel har vi følgende:

- 5 max 3 = 5
- 10 min 1 = 1

Regn ut (12 max 13) min (5 max 10) : *10*

12 max 13 = 13. 5 max 10 = 10. 13 min 10 = 10.

Maks poeng: 3

Oppgave 33: Definisjon og idempotens

La max være definert som i forrige oppgave…

For eksempel har vi følgende:

- 5 max 3 = 5
- 1 max 10 = 10

Er dette en idempotent operasjon?

- Ja
- Nei

Den er idempotent hvis x max $x = x$. Siden ikke $x < x$, kommer vi til "ellers" tilfellet. Uansett blir svaret x.

Maks poeng: 4

Oppgave 34: Definisjon og bevis 1

La max være definert som i forrige oppgave…

For eksempel har vi følgende:

- 5 max 3 = 5
- 1 max 10 = 10

Bevis at max er kommutativ: x max $y = y$ max x for alle naturlige tall x, y.

Vi ser på tre tilfeller:

1. ***$x<y$.*** *Da er* ikke *$x>y$, og derfor er x max $y = y$ (andre tilfelle i definisjonen). Men $y > x$ og y max $x = y$ (første tilfelle i definisjonen). Tilsammen x max $y = y$ max x.*
2. ***$x=y$.*** *Da er ikke $x>y$, og derfor x max $y = y$. Men heller ikke $y>x$, og derfor y max $x = x$. Men siden $x=y$ gjelder allikevel x max $y = y = x = y$ max x.*
3. ***$x>y$.*** *Da er x max $y = x$. Men ikke $y>x$, så y max $x = x$. Tilsammen x max $y = y$ max x.*

Påstanden holder altså i alle 3 tilfeller.

Maks poeng: 7

Oppgave 35: Definisjon og bevis 2

La min være definert som før …

For eksempel har vi følgende:

- $5 \min 3 = 3$
- $1 \min 10 = 1$

Bevis at min er assosiativ: $(x \min y) \min z = x \min (y \min z)$ for alle naturlige tall x, y, z.

Vi ser først på forholdet mellom x og y, og så på undertilfeller avhengig av hvor z ligger i forhold til x og y.

1. **$x < y$.** Da er $x \min y = x$.
    a. **$x < z$**. Da er $(x \min y) \min z = x$
        i. **$y < z$.** Da er $y \min z = y$. Men siden $x < y$ er $x \min (y \min z) = x$
        ii. **$y >= z$**. Da er $y \min z = z$. Men siden $x < z$ er $x \min (y \min z) = x$.
    b. **$x >= z$**. Da er $(x \min y) \min z = z$. Det følger også at $y >= z$. Dermed $y \min z = z$ og $x \min (y \min z) = z$.
2. **$x >= y$.** Da er $x \min y = y$.
    a. **$y < z$.** Da er $(x \min y) \min z = y$. Og $y \min z = y$ og $x \min (y \min z) = y$
    b. **$y >= z$.** Da er $(x \min y) \min z = z$. Det følger også at $x >= z$, og dermed $y \min z = z$ og $x \min (y \min z) = z$.

Alternativt bevis:

Vi ser på alle mulige ordninger mellom x, y, og z. Det er 6 forskjellige, en for hver permutasjon.

1. ***$x <= y <= z$.*** *Da er $(x \min y) \min z = x \min z = x = x \min y = x \min (y \min z)$*
2. ***$x <= z <= y$.*** *Da er $(x \min y) \min z = x \min z = x = x \min z = x \min (y \min z)$*
3. ***$y <= x <= z$.*** *Da er $(x \min y) \min z = y \min z = y = x \min y = x \min (y \min z)$*
4. ***$y <= z <= x$.*** *Da er $(x \min y) \min z = y \min z = y = x \min y = x \min (y \min z)$*
5. ***$z <= x <= y$.*** *Da er $(x \min y) \min z = x \min z = z = x \min z = x \min (y \min z)$*
6. ***$z <= y <= x$.*** *Da er $(x \min y) \min z = y \min z = z = x \min z = x \min (y \min z)$*

(Hvorfor er det bare 5 tilfeller i det første beviset? Jo, fordi tilfelle 2a har y <= x og y < z. Dermed kan resultatet y utregnes uten å vite om x>z eller ikke. Dett er tilfellene 3 og 4 i det andre beviset, som er identiske.)

Maks poeng: 11