IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2019 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 24. mai 2019

Om eksamen: Eksamen består av to deler som er verdt omtrent like mye. Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Et korrekt svar er her verdt ett poeng, et feil svar er verdt minus ett poeng, og en ubesvart oppgave er også verdt minus ett poeng. Det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Den andre delen består av litt større oppgaver, hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Dersom det ikke er oppgitt i oppgaven, trenger du ikke å begrunne svaret. Oppgave 15 og 16 skal besvares på egne ark; bruk nøyaktig ett ark for oppgave 15 og ett ark for oppgave 16.

Om sensur og karaktergivning: Det som er utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen på Universitetet i Oslos nettsider. Den totale poengsummen brukes som veiledning for karakteren. En grov tommelfingerregel for karakteren er følgende.

Ca. 120 poeng (ca. 86 %): A

Ca. 100 poeng (ca. 71 %): B

Ca. 80 poeng (ca. 57 %): C

Ca. 60 poeng (ca. 43 %): D

Ca. 40 poeng (ca. 29 %): E

Merk at dette er *omtrentlige* grenser som vurderes og justeres i lys av oppgavesettets vanskelighetsgrad og form.

En kommentar om minuspoeng: Det å få -1 for feil svar og +1 for riktig svar, er ekvivalent med å få 0 for feil svar og +2 for riktig svar, men det gjør det enklere å korrigere for gjetning. Hvis man gjetter helt tilfeldig på alle oppgavene får man i snitt null poeng. En gjetning er riktignok ofte ledet av en trent intuisjon, og det vil derfor som regel lønne seg å "gjette". Fordi man får like mange pluss-poeng som minus-poeng for de oppgavene man gjetter på, vil antall poeng etter 70 sant/usant-oppgaver på den måten representere hvor mange spørsmål man faktisk vet det riktige svaret på.

Kommentar: For oppgavene i den andre delen, med større oppgaver, er en mer detaljert poenggivning angitt i bokser som denne. I den første delen av eksamen er poenggivningen slik som angitt over.

Små oppgaver [70 poeng]

1 Mengdelære [8 poeng]

(a) Når vi regner ut $\{\emptyset\} \cup (\{1,2,3\} \setminus (\{2,3\} \cap \{3\}))$ får vi $\{\emptyset, 1, 2\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\{\emptyset\} \cup (\{1,2,3\} \setminus (\{2,3\} \cap \{3\})) = \{\emptyset\} \cup (\{1,2,3\} \setminus \{3\}) = \{\emptyset\} \cup \{1,2\} = \{\emptyset, 1, 2\}$.

(b) Hvis A og B er mengder, er det alltid slik at $A \cap B$ er lik $A \cap (B \cap A)$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi begge mengdene inneholder nøyaktig de elementene som er i både A og B

(c) Hvis A og B er mengder, er det alltid slik at $A \subseteq B$ eller $B \subseteq A$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis $A = \{1\}$ og $B = \{2\}$, vil hverken $A \subseteq B$ eller $B \subseteq A$.

(d) Hvis A og B er mengder, er det alltid slik at $(A \setminus B) \cup B$ er lik $A \cup B$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant, og det kan lett sees ved hjelp av et Venn-diagram.

(e) Potensmengden til den tomme mengden er lik den tomme mengden. (Sant / **Usant**)

Potensmengden til den tomme mengden er lik mengden av den tomme mengden, det vil si $\{\emptyset\}$, og den er ikke tom.

(f) Hvis A og B er mengder, er det alltid slik at $|A \cup B| = |A| + |B|$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi A og B kan ha elementer til felles. Da blir $|A \cup B| < |A| + |B|$.

(g) Mengden av funksjoner $f : \mathbb{N} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ er tellbar. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hver slik funksjon svarer til en uendelig sekvens hvor hvert element enten er $\mathbf{0}$ eller $\mathbf{1}$, og vi vet at mengden av slike sekvenser ikke er tellbar.

(h) Mengden av endelige bitstrenger er tellbar. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi vi kan "telle opp", lage en en-til-en korrespondanse, mellom mengden av bitstrenger og de naturlige tallene.

2 Utsagnslogikk [6 poeng]

(a) Hvis P er usann og Q er usann, blir $(P \to Q)$ sann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant på grunn av hvordan utsagnslogiske formler tolkes.

(b) Hvis P og Q er sanne, blir $(P \lor R) \land (Q \land \neg R)$ sann, uansett om R er sann eller usann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis R er sann, blir hele formelen usann.

(c) En valuasjon som gjør P sann, Q usann og R sann, gjør $(P \lor R) \to (R \to Q)$ sann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi formelen blir usann. Vi får at $(P \lor R)$ blir sann og at $(R \to Q)$ blir usann. Da får vi at hele formelen blir usann.

(d) Formelen $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ er ekvivalent med $(P \land Q)$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis P og Q er usanne, blir $(P \to Q) \lor (Q \to P)$ sann, men $(P \land Q)$ blir usann.

(e) En utsagnslogisk formel er alltid ekvivalent med seg selv. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi to formler ekvivalente dersom de alltid har samme sannhetsverdi, uansett valuasjon.

(f) Det er slik at $\neg(P \land \neg Q) \Leftrightarrow (P \to Q)$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $P \to Q$ er usann nøyaktig når P er sann og Q er usann, og det er også tilfellet for $\neg(P \land \neg Q)$.

3 Mer utsagnslogikk [6 poeng]

(a) Alle gyldige formler er oppfyllbare og umulige å falsifisere. (**Sant** / Usant)

Dette er sant på grunn av definisjonen av gyldighet, oppfyllbarhet og falsifiserbarhet. Dersom en formel er gyldig, er den alltid sann, og da må det finnes en valuasjon som gjør den sann (den er oppfyllbar), og det finnes ingen valuasjonen som gjør den usann (den er ikke falsifiserbar).

(b) Det finnes en utsagnslogisk formel som hverken er oppfyllbar eller falsifiserbar. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi enhver utsagnslogisk formel må enten kunne gjøres sann eller usann.

(c) Formelen $(P \to Q) \vee (Q \to R)$ er gyldig. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis Q er sann, blir $(P \to Q)$ sann; hvis Q er usann, blir $(Q \to R)$ sann. I begge tilfeller blir $(P \to Q) \vee (Q \to R)$ sann.

(d) Formelen $\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ er gyldig. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis P og Q er usanne, blir hele formelen usann.

(e) Formelen $(P \vee R)$ er en logisk konsekvens av $(P \vee Q) \wedge (Q \to R)$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis $(P \vee Q) \wedge (Q \to R)$ er sann, må både $(P \vee Q)$ og $(Q \to R)$ være sanne. Dersom $(P \vee Q)$ er sann, må P eller Q være sann. Dersom P er sann, blir $(P \vee R)$ sann. Dersom Q er sann, følger det fra at $(Q \to R)$, at R er sann. Da må $(P \vee R)$ være sann.

(f) Formelen R er uavhengig av mengden $\{P \vee Q, R \to P, Q \to R\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hverken R eller $\neg R$ er en logisk konsekvens av mengden. Dersom vi gjør P sann og Q usann, vil alle formlene i mengden bli sanne, og da kan vi, helt uavhengig, velge hvorvidt R skal være sann eller usann. Da er hverken R eller $\neg R$ en logiske konsekvens av mengden.

4 Relasjoner [5 poeng]

La relasjonen R på $\{1, 2, 3, 4\}$ være definert på følgende måte:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[rrr, bend right] & 2 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] \arrow[loop above] & 3 \arrow[r] \arrow[loop above] & 4 \arrow[loop above]
\end{tikzcd}
$$

(a) R er refleksiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi vi ikke har at $\langle x, x \rangle$ er i R for alle $x \in \{1, 2, 3, 4\}$: Vi har *ikke* at $\langle 1, 1 \rangle$ er i R.

(b) R er transitiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi vi har at $\langle 1, 2 \rangle$ og $\langle 2, 3 \rangle$ er i R, men vi har ikke at $\langle 1, 3 \rangle$ er i R.

(c) R er anti-symmetrisk. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi for alle forekomster av $\langle x, y \rangle$ og $\langle y, x \rangle$ i R, har vi også $\langle x, x \rangle$.

(d) $R \cup \{\langle 1, 1\rangle\}$ er en partiell ordning. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi den ikke er både refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk: Den er ikke transitiv.

(e) $R \setminus \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er irrefleksiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\langle 4, 4\rangle$ er et tuppel i $R \setminus \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, og da er ikke R irrefleksiv.

5 Funksjoner [5 poeng]

(a) Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 3 \cdot x$, er surjektiv. (**Sant** / Usant)

Dette er sant. Funksjonen er surjektiv fordi for ethvert element $y \in \mathbb{R}$ finnes det en x, nemlig $\frac{y}{3}$, slik at $f(x) = y$.

(b) Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 3 \cdot x$, er injektiv. (**Sant** / Usant)

Dette er sant. Funksjonen er injektiv fordi dersom $f(x) = f(y)$, får vi $3 \cdot x = 3 \cdot y$, og dermed at $x = y$.

(c) Funksjonen $\textsc{and}$ på utsagnslogiske formler slik at $\textsc{and}(F) = (F \land F)$, er injektiv. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis F og G er forskjellige, vil også $\textsc{and}(F) = (F \land F)$ og $\textsc{and}(G) = (G \land G)$ være forskjellige.

(d) Hvis både f og g er unære operasjoner på en mengde A, vil også $(f \circ g)$ være en unær operasjon på A. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, og det betyr at $(f \circ g)$ også er en funksjon på A.

(e) Det finnes en delmengde f av $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$ slik at f er en operasjon på mengden $\{1, 2, 3, 4\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det ikke finnes noe tuppel på formen $\langle 4, x\rangle$.

6 Induktivt definerte mengder og rekursjon [8 poeng]

La M være den minste mengden av strenger over alfabetet $\{0, 1\}$ slik at $\Lambda \in M$ og hvis $s \in M$, så er $0s \in M$ og $s1 \in M$.

(a) Det er slik at $000111 \in M$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi $\Lambda \in M$, og da vil $0\Lambda = 0 \in M$. Da vil $00 \in M$ og $000 \in M$. Og så vil $0001 \in M$, og $00011 \in M$, og til slutt $000111 \in M$.

(b) Det er slik at $1110 \in M$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det ikke går an å legge til 0 lengst til høyre og det ikke går an å legge til 1 lengst til venstre, for en ikke-tom streng.

(c) M er lukket under funksjonen g som er slik at $g(s) = 00s11$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi dersom $s \in M$, må $0s$, og dermed også $00s$, og dermed også $00s1$, og til slutt også $00s11$, være med i M.

(d) Den transitive og symmetriske tillukningen av en binær relasjon er alltid refleksiv. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi den transitive og symmetriske tillukningen av relasjonen $\{\langle 1, 2\rangle\}$ på mengden $\{1, 2, 3\}$ ikke inneholder $\langle 3, 3\rangle$.

La f være en funksjon på de naturlige tallene definert rekursivt ved $f(0) = 1$ og $f(n + 1) = f(n) \cdot 2 + 1$. La B være bildemengden til f.

(e) Det er slik at $f(f(2)) = 15$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi $f(2) = f(1)\cdot 2+1 = (f(0)\cdot 2+1)\cdot 2+1 = (1\cdot 2+1)\cdot 2+1 = (2+1)\cdot 2+1 = 3\cdot 2+1 = 6+1 = 7$, og $f(f(2)) = f(7) = 255$. Her er de første verdiene: $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 7$, $f(3) = 15$, $f(4) = 31$, $f(5) = 63$, $f(6) = 127$ og $f(7) = 255$.

(f) Det er slik at $9 \in B$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det ikke finnes noen n slik at $f(n) = 9$.

(g) Alle tallene i B er oddetall. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi $f(0) = 1$ er et oddetall og fordi $f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 1$ alltid er et oddetall (som er fordi $2 \cdot f(n)$ alltid er et partall).

(h) La g være en funksjon på de naturlige tallene definert slik at $g(n) = 2^{n+1} - 1$. Da vil $f(n) = g(n)$ for alle naturlige tall n. (**Sant** / Usant)

Dette er sant og vi kan vise det ved matematisk induksjon. Basissteget er å vise at påstanden holder for 0. Det ser vi ved at $f(0) = 1$ og $g(0) = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Vi antar at påstanden holder for n, det vil si at $f(n) = g(n)$. Dette er induksjonshypotesen (IH) vår. Vi forsøker å vise at påstanden holder for $n + 1$ ved å sette inn for både f og g. Definisjonen av f gir at $f(n + 1) = f(n) \cdot 2 + 1$. Induksjonshypotesen gir at $f(n) = g(n)$ og vi vet at $g(n) = 2^{n+1} - 1$. Ved å sette inn får vi dermed at $f(n + 1) = g(n) \cdot 2 + 1 = (2^{n+1} - 1) \cdot 2 + 1 = (2^{n+2} - 2) + 1 = 2^{n+2} - 1$. Vi har dermed kommet frem til $g(n + 1)$, som er lik $2^{n+2} - 1$. Ved matematisk induksjon følger det at $f(n) = g(n)$ for alle naturlige tall n.

7 Representasjon av kvantifiserte utsagn [6 poeng]

Anta at K, S og E er relasjonssymboler slik at

Kx tolkes som «x *er er en katt*»,
Sx tolkes som «x *er søt*» og
Exy tolkes som «x *eier* y».

(a) $\forall x(Kx \land Sx)$ representerer «*alle katter er søte*» (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi formelen $\forall x(Kx \land Sx)$ representerer «*alle er katter **og** er søte*».

(b) $\neg\exists x(Kx \land Sx)$ representerer «*ingen katter er søte*» (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen $\neg\exists x(Kx \land Sx)$ representerer «*det finnes ikke en* x *slik at* x *er katt **og*** x *er søte*», det vil si det samme som «*det finnes ikke noe som både er katt og er søt*».

(c) $\forall x Exx$ representerer «*alle eier seg selv*» (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen $\forall x Exx$ representerer «*for alle* x *er det slik at* x *eier* x», som betyr det samme som at «x *eier seg selv*».

(d) $\forall x\exists y(Exy \land Ky \land Sy)$ representerer «*alle eier en søt katt*» (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen $\forall x\exists y(Exy \land Ky \land Sy$ representerer «*for alle* x *finnes det en* y *slik at* x *eier* y *og* y *er en katt og* y *er søt*».

(e) $\exists x\neg(Kx \land Sx)$ representerer «*det finnes en katt som ikke er søt*» (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi setningen i oppgaven, «*det finnes en katt som ikke er søt*», blir representert av formelen $\exists x(Kx \land \neg Sx)$. Formelen $\exists x\neg(Kx \land Sx)$ representerer «*det finnes noe som ikke både er katt og søt*».

(f) $\exists x(Kx \land Sx \land \forall y\neg Eyx)$ representerer «*det finnes en søt katt som ikke har en eier*» (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen $\forall y\neg Eyx$ representerer «*for alle* y *er det slik at* y *eier ikke* x», som betyr det samme som at «x *har ikke noen eier*».

8 Tolkning i modeller [7 poeng]

La $\mathcal{M}$ være en førsteordens modell med domene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ slik at $R^{\mathcal{M}}$ er mengden

$$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}.$$

(a) $\mathcal{M} \models \forall x Rxx$ (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\langle 1, 1\rangle$ mangler i $R^{\mathcal{M}}$. Det er også slik at $\langle 5, 5\rangle$ mangler i $R^{\mathcal{M}}$.

(b) $\mathcal{M} \models \forall x \forall y(Rxy \to Ryy)$ (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi for alle $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ har vi at hvis $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$, så $\langle b, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$. Det eneste mulige moteksemplet ville ha vært når $b = 1$, fordi $\langle 1, 1\rangle \notin R^{\mathcal{M}}$, men det finnes ikke noe tuppel i $R^{\mathcal{M}}$ på formen $\langle a, 1\rangle$.

(c) $\mathcal{M} \models \exists x \exists y(Rxy \land Ryx)$ (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\{\langle 2, 2\rangle\} \in R$.

(d) $\mathcal{M} \models \neg\exists x \forall y Rxy$ (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\exists x \forall y Rxy$ er usant, og det er fordi det ikke finnes en $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ slik at $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$ for alle b. Sagt på en annen måte: Formelen er ekvivalent med $\forall x \exists y \neg Rxy$, og dette er sant fordi det for alle $a \in R^{\mathcal{M}}$ finnes et element b slik at $\langle a, b\rangle$ *ikke* er med i $R^{\mathcal{M}}$.

(e) Det finnes en modell som falsifiserer formelen $\forall x Px \to \exists x Px$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi formelen $\forall x Px \to \exists x Px$ er gyldig.

(f) Formelen $\exists x \neg Px \lor \forall x Px$ er gyldig. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen $\exists x \neg Px$ er ekvivalent med $\neg\forall x Px$ som er negasjonen av $\forall x Px$.

(g) Hvis F er en gyldig formel, må $\forall x F$ være en gyldig formel. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis F er gyldig, må den per definisjon være lukket, og da har det ingen effekt å sett $\forall x$ foran.

9 Kombinatorikk [7 poeng]

(a) Det finnes $\binom{5}{3} = 10$ forskjellige delmengder av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ med tre elementer. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ måter å velge tre forskjellige elementer i rekkefølge på. Det er $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner av disse tre elementene. Det betyr at det er $60/6 = 10$ måter å velge tre elementer *uavhengig av rekkefølge* på.

(b) Det finnes $2^5 = 32$ forskjellige tupler på formen $\langle a, b\rangle$, hvor a og b er i $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det finnes $5 \cdot 5 = 25$ forskjellige slike tupler.

(c) Det finnes $2^5 = 32$ forskjellige delmengder av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi for hver delmengde svarer til å ta et valg for hvert av de fem elementene: Vi har to muligheter for hvert element.

(d) Det er $n!$ forskjellige bijeksjoner på $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hver bijeksjon svarer til en permutasjon av mengden.

Vi skal nå se på figurer av følgende type. Hver figur har seks ruter, fordelt på tre kolonner og to rader. I hver enkelt rute står det et naturlig tall. En n-figur er en figur hvor hvert av tallene er ekte mindre enn n. Her er altså åtte forskjellige 3-figurer.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&0\\\hline 0&2&2\\\hline\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 1&1&1\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&2\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&0&2\\\hline 1&2&0\\\hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline 1&2&1\\\hline\end{array}$$

(e) Det finnes mer enn 70 forskjellige 2-figurer. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det finnes $2^6 = 64$ forskjellige 2-figurer.

(f) Det finnes nøyaktig n^6 forskjellige n-figurer. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi i hver rute kan det være n forskjellige tall, og alle rutene er uavhengige av hverandre. Da gir multiplikasjonsprinsippet at antallet mulige figurer er n^6.

(g) Vi sier at en figur er *tillatt* dersom hver kolonne har to forskjellige tall. Det er kun de fire figurene lengst til høyre i eksempelet over som er tillatte.
Det finnes mer enn 200 forskjellige tillatte 3-figurer. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det finnes $6^3 = 216$ forskjellige tillatte 3-figurer. Her er to måter å se dette på: (1) Det er $3^3 = 27$ forskjellige måter å velge den øverste raden i en figur på. For hver av disse teller vi opp hvor mange måter vi kan lage den siste raden på: For hver kolonne er det 2 muligheter for det nederste tallet; det vil si $2^3 = 8$ mulige rader. Multiplikasjonsprinsippet gir $3^3 \cdot 2^3 = 27 \cdot 8 = 216$ muligheter. (2) For hver kolonne i en figur kan vi velge det øverste tallet på 3 forskjellige måter; for hver av disse er det 2 muligheter for det nederste tallet. Det blir $2 \cdot 3 = 6$ muligheter for hver kolonne. Fordi det er tre kolonner som er uavhengige av hverandre, gir multiplikasjonsprinsippet at det er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ muligheter.

10 Bevis, moteksempler og abstraksjon [6 poeng]

(a) Et moteksempel til påstanden «F er logisk konsekvens av G» er en valuasjon som gjør F sann og G usann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi et moteksempel vil være en valuasjon som gjør G sann og F usann, altså det motsatte av det som er oppgitt.

(b) Et moteksempel til påstanden «alle naturlige tall som er delelige med 3, er oddetall» er tallet 9. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi 9 er et oddetall. Et moteksempel er et naturlig tall som er delelig med 3, men som ikke er et oddetall, det vil si, et partall. To eksempler er 6 eller 12.

(c) Dersom vi har bevist at noe er sant for et *vilkårlig* element i en mengde, har vi også bevist at det holder for *alle* elementer i mengden. (**Sant** / Usant)

Dette er sant, og det er slik vi ofte beviser universelle påstander.

Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på mengden M. Husk at $[x]$, hvor $x \in M$, står for ekvivalensklassen til x.

(d) Det finnes en $x \in M$ slik at $[x]$ er den tomme mengden. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $[x]$ alltid inneholder x.

(e) $M/\sim$ er en partisjon. (**Sant** / Usant)

Dette er sant på grunn av hvordan partisjoner er definert. En partisjon kan sees på som mengden av alle ekvivalensklasser for en gitt ekvivalensrelasjon og vice versa.

(f) Hvis $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, må det være slik at $[x] = [y]$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis to ekvivalensklasser inneholder et felles element, må de være identiske.

11 Abstrakt algebra [6 poeng]

(a) Operasjonen $\textsc{neg}$ på utsagnslogiske formler slik at $\textsc{neg}(F) = \neg F$, har en invers. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det ikke finnes en F slik at $\textsc{neg}(F) = P$, hvor P er en utsagnsvariabel.

(b) En bijektiv funksjon er både en-til-en og på. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi det er slik en bijektiv funksjon er definert: Som en funksjon som er både injektiv (en-til-en) og surjektiv (på).

(c) Hvis $\langle G, \circ \rangle$ er en gruppe, må $\circ$ være en assosiativ operasjon på G. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi det er slik en gruppe er definert. Operasjonen $\circ$ må være assosiativ, det må finnes et identitetselement og alle elementer må ha en invers.

(d) Hvis $\langle G, \circ \rangle$ er en gruppe og $a \in G$, så må det finnes $b \in G$ slik at $a \circ b = b \circ a$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi hvis dette er en gruppe, må gruppen ha et identitetselement e, og a må ha en invers b, slik at $a \circ b = e$. Men, da vil også $b \circ a = e$, og da har vi at $a \circ b = b \circ a$.

(e) Tallet 1 er identitetselementet til addisjonsfunksjonen på naturlige tall. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det er 0 som er identitetselementet til addisjonsfunksjonen.

(f) Den tomme strengen, Λ, er identitetselementet til konkateneringsfunksjonen på strenger. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi $\Lambda s = s\Lambda = s$ for alle strenger s.

Større oppgaver [70 poeng]

12 Mengdelære [10 poeng]

La A være mengden $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(a) [2 poeng] Hva er $\mathcal{P}(A)$?

$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(b) [2 poeng] Gi alle partisjonene av A.
(*Angi svarene på én linje med ordet «og» mellom hvert svar.*)

$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ og $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(c) [2 poeng] Hva kardinaliteten til $A \cup \mathcal{P}(A)$?

4

(d) [2 poeng] Er det slik at $\emptyset \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$?

Ja.

(e) [2 poeng] Anta at X er en partisjon av Y. Hva er $X \cap \mathcal{P}(Y)$?

X

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar, bortsett fra (b), hvor det gis ett poeng for hver korrekt partisjon.

13 Relasjoner [10 poeng]

La relasjonene R og S, begge på mengden $\{1, 2, 3, 4\}$, være definert på følgende måte:

$$R: \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[loop above] & 3 \arrow[r] \arrow[loop above] & 4 \arrow[loop above] \end{tikzcd} \qquad\qquad S: \quad \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] \arrow[loop above] & 3 \arrow[l] \arrow[loop above] & 4 \arrow[l] \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

La $T = R \cup S$.

(a) [2 poeng] Er R en partiell ordning?

Nei. Det er fordi R ikke har de tre egenskapene som trengs (refleksiv, anti-symmetrisk, transitiv). Den er hverken refleksiv eller transitiv.

(b) [2 poeng] Er T transitiv?

Nei. Vi har for eksempel at $\langle 1, 2 \rangle$ og $\langle 2, 3 \rangle$ er i T, men $\langle 1, 3 \rangle$ er *ikke* med i T.

(c) [2 poeng] Er T symmetrisk?

Ja.

(d) [2 poeng] Er T anti-symmetrisk?

Nei. Vi har for eksempel at $\langle 1, 2 \rangle$ og $\langle 2, 1 \rangle$ er i T, men $1 \neq 2$.

(e) [2 poeng] Er den transitive tillukningen av T refleksiv?

Ja.

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

14 Førsteordens logikk [10 poeng]

Anta at P, O, D og M er relasjonssymboler slik at

Px tolkes som «x *er et partall*»,
Ox tolkes som «x *er et oddetall*»,
Dxy tolkes som «*det dobbelte av* x *er* y» (eller «$2x$ *er lik* y») og
Mxy tolkes som «x *er mindre enn* y» («y *er større enn* x»).

Vi antar at alt handler om tall. Finn førsteordens formler for følgende setninger:

(a) [2 poeng] Alle tall er oddetall eller partall.

$\forall x(Ox \lor Px)$

(b) [2 poeng] Det finnes et tall som er det dobbelte av seg selv.

$\exists x Dxx$

(c) [2 poeng] For alle partall finnes det et oddetall som er større.

$\forall x(Px \to \exists y(Oy \land Mxy))$

Finn *gode* og *naturlige* setninger for følgende førsteordens formler:

(d) [2 poeng] $\forall x \forall y(Px \land Oy \to Mxy)$

«alle partall er mindre enn alle oddetall»

(e) [2 poeng] $\exists x \neg(Px \lor Ox)$

«det finnes et tall som hverken er et partall eller et oddetall»

Kommentar: For **(a)**, **(b)** og **(c)** gis det full uttelling for svar som er ekvivalente med løsningsforslaget. For **(d)** og **(e)** gis det i utgangspunktet full uttelling så lenge setningene betyr det samme som løsningsforslagene og ikke er tvetydige. Dersom setningene er entydige og korrekte, men unødvendig vanskelige å lese, trekkes det ett poeng.

15 Grafteori [10 poeng]

I denne oppgaven skal du tegne på eget ark. Du skal tegne fem grafer, og alle grafene skal tegnes ved siden av hverandre på den samme siden. Forsøk å gjøre grafene så pene og enkle å lese som mulig. Du trenger ikke å begrunne hvorfor grafene har de aktuelle egenskapene, og du trenger ikke å sette navn på nodene eller kantene. Forsøk å bruke så få noder og kanter som mulig.

Tegn en enkel, sammenhengende graf

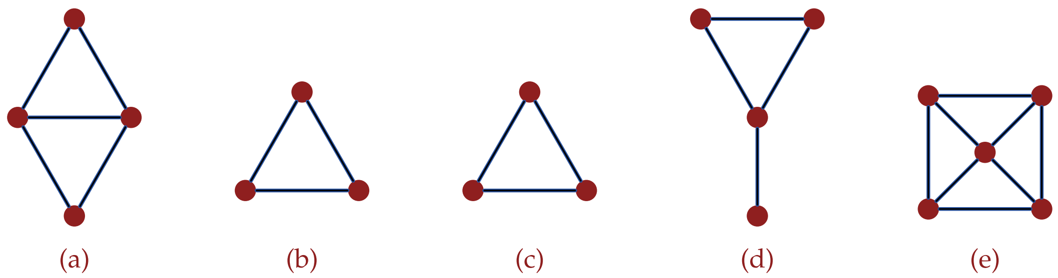
(a) [2 poeng] …som har flere kanter enn noder.

(b) [2 poeng] …hvor alle noder har grad to.

(c) [2 poeng] …som ikke er et tre.

(d) [2 poeng] …med fire noder og fire kanter og som ikke har en eulerkrets.

(e) [2 poeng] …med fem noder, en hamiltonsti, men ingen eulervei.



Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen dersom grafene oppfyller de angitte egenskapene og null poeng ellers. For noen av deloppgavene er det flere korrekte grafer.

16 Naturlig deduksjon [10 poeng]

I denne oppgaven skal du føre bevis og utledninger i naturlig deduksjon, og du skal føre disse på et eget ark. Alle bevisene og utledningene skal gjøres på ett og samme ark. Forsøk å være så nøyaktig som mulig, og gjør bevisene og utledningene så enkle å lese og forstå som mulig.

(a) [2 poeng] Gi et *bevis* for $(P \land Q) \to (P \lor R)$ i naturlig deduksjon.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{P}\,{\scriptstyle \land\mathrm{E}}}{P \lor R}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}}}{(P \land Q) \to (P \lor R)}\,{\scriptstyle \to\mathrm{I}_1}$$

(b) [4 poeng] Gi en *utledning* av $(\neg A \lor \neg B)$ med $\neg(A \lor B)$ som eneste åpne antakelse.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \lor B}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}} \qquad \neg(A \lor B)}{\bot}\,{\scriptstyle \to\mathrm{E}}}{\neg A}\,{\scriptstyle \to\mathrm{I}_1}}{\neg A \lor \neg B}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{I}}$$

(c) [4 poeng] Gi en *utledning* av $((A \lor B) \to B)$ med $\neg A$ som eneste åpne antakelse.

$$\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad \neg A}{\bot}\,{\scriptstyle \to\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \bot} \qquad [B]^1}{B}\,{\scriptstyle \lor\mathrm{E}_1}}{(A \lor B) \to B}\,{\scriptstyle \to\mathrm{I}_2}$$

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen dersom bevisene og utledningene er korrekte, det vil si, i prioritert rekkefølge, at reglene er anvendt på en korrekt måte (ca. 70%), at konklusjonen samsvarer med oppgaven (ca. 10%), at mengden av åpne og lukkede antakelser samsvarer med oppgaven (ca. 10%), og at reglene er angitt med korrekte navn (ca. 10%). Dersom noen av disse ikke er oppfylt kan det trekkes poeng proporsjonalt med de angitte prosentene. Det trekkes ikke poeng dersom kandidaten har tatt unødvendige "omveier".

17 Formelle språk og rekursive funksjoner [10 poeng]

La M være den minste mengden slik at

$0 \in M$ og $1 \in M$,
og hvis $s \in M$ og $t \in M$, så vil $+st \in M$ og $*st \in M$.

(a) [1 poeng] Er ++0+0+0 i M?

Nei.

(b) [1 poeng] Er +*01+0*11 i M?

Ja. Vi kan se det på følgende måte: $+\underbrace{*\underbrace{0}_{s}\underbrace{1}_{t}}_{s}\underbrace{+\underbrace{0}_{s}\underbrace{*\underbrace{1}_{s}\underbrace{1}_{t}}_{t}}_{t}$

Kommentar: For **(a)** og **(b)** gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

(c) [4 poeng] Definer funksjonene $\# : M \to \mathbb{N}$ og $\% : M \to \mathbb{N}$ rekursivt slik at

$\#(s)$ gir antall forekomster av tegnene + og * i s, og
$\%(s)$ gir antall forekomster av tegnene 0 og 1 i s.

For eksempel vil $\#(*0+01) = 2$ og $\%(*0+01) = 3$.

La # være definert på følgende måte:

$$\#(0) = 0$$
$$\#(1) = 0$$
$$\#(+st) = 1 + \#(s) + \#(t)$$
$$\#(*st) = 1 + \#(s) + \#(t)$$

La % være definert på følgende måte:

$$\%(0) = 1$$
$$\%(1) = 1$$
$$\%(+st) = \%(s) + \%(t)$$
$$\%(*st) = \%(s) + \%(t)$$

Kommentar: For å få full uttelling for **(c)** må de to rekursive funksjonene være definert korrekt, med korrekte basissteg (1 poeng for hver funksjon) og korrekte rekursjonssteg (1 poeng for hver funksjon).

(d) [4 poeng] Vis ved strukturell induksjon at $\%(s) - \#(s) = 1$ for alle $s \in M$. Du trenger ikke å gjøre *basissteget*, som er å vise at påstanden holder for `0` og `1`. Beviset for basissteget er følgende:

$$\%(0) - \#(0) = 1 - 0 = 1$$
$$\%(1) - \#(1) = 1 - 0 = 1$$

Anta at at påstanden holder for s og t, det vil si at $\%(s) - \#(s) = 1$ og $\%(t) - \#(t) = 1$ Dette er vår *induksjonshypotese* (IH). Vi må nå vise at påstanden holder for både $+st$ og $*st$. Anta at $\bullet$ er enten $+$ eller $*$. Da får vi følgende:

$$\begin{aligned}
\%(\bullet st) - \#(\bullet st) &= (\%(s) + \%(t)) - (1 + \#(s) + \#(t)) && \text{(ved definsjonene av \# og \%)}\\
&= \%(s) + \%(t) - 1 - \#(s) - \#(t) && \text{(ved vanlig regning)}\\
&= (\%(s) - \#(s)) + (\%(t) - \#(t)) - 1 && \text{(ved vanlig regning)}\\
&= 1 + 1 - 1 && \text{(ved induksjonshypotesen)}\\
&= 1 && \text{(ved vanlig regning)}
\end{aligned}$$

Ved strukturell induksjon på M kan vi konkludere med at påstanden $\%(s) - \#(s) = 1$ holder for alle $s \in M$.

Kommentar: For å få full uttelling for **(d)** må induksjonssteget være korrekt utført. Grovt sett er poengene fordelt slik: formulering og antakelse av induksjonshypotesen er verdt omtrent ett poeng og selve gjennomføringen av induksjonssteget er verdt omtrent tre poeng. Det må fremkomme på en tydelig måte hvordan induksjonshypotesen er anvendt.

18 Formelle språk og strukturell induksjon [10 poeng]

La M være definert som i forrige oppgave. La $e : M \to \mathbb{N}$ være definert slik at

$e(0) = 0$ og $e(1) = 1$, og
$e(+st) = \max(e(s), e(t))$ og $e(*st) = \min(e(s), e(t))$.

(a) [1 poeng] Hva blir $e(+0+01)$?

$e(+0+01) = 1$. Her er en utregning:

$$\begin{aligned} e(+0+01) &= \max(e(0), e(+01)) \\ &= \max(e(0), \max(e(0), e(1))) \\ &= \max(0, \max(0, 1)) \\ &= \max(0, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) [1 poeng] Hva blir $e(+0*1+01)$?

$e(+0*1+01) = 1$. Her er en utregning:

$$\begin{aligned} e(+0*1+01) &= \max(e(0), e(*1+01)) \\ &= \max(e(0), \min(e(1), e(+01))) \\ &= \max(e(0), \min(e(1), \max(e(0), e(1)))) \\ &= \max(0, \min(1, \max(0, 1))) \\ &= \max(0, \min(1, 1)) \\ &= \max(0, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Kommentar: For **(a)** og **(b)** gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

La $\mathbb{F}$ være mengden av utsagnslogiske formler hvor de eneste atomære formlene er $\top$ og $\bot$ og de eneste konnektivene er $\wedge$ og $\vee$. For eksempel vil $(\top \vee \bot) \in \mathbb{F}$. Hver formel i $\mathbb{F}$ er enten sann eller usann. La $f : M \to \mathbb{F}$ være definert slik at

$f(0) = \bot$ og $f(1) = \top$, og

$f(+st) = (f(s) \vee f(t))$ og $f(*st) = (f(s) \wedge f(t))$.

(c) [8 poeng] Vis ved strukturell induksjon at $f(s)$ er sann *hvis og bare hvis* $e(s) = 1$, for alle $s \in M$.

Basissteget er å vise at påstanden holder for 0 og 1:

Vi må først vise at $f(0)$ er sann hvis og bare hvis $e(0) = 1$: Det holder fordi $f(0) = \bot$ og $e(0) = 0$, og fordi begge sidene av *hvis-og-bare-hvis*-påstanden blir usanne.

Vi må deretter vise at $f(1)$ er sann hvis og bare hvis $e(1) = 1$: Det holder fordi $f(1) = \top$ og $e(1) = 1$, og fordi begge sider av *hvis-og-bare-hvis*-påstanden blir sanne.

For å vise induksjonssteget, anta at påstanden holder for s og t, det vil si at

$f(s)$ er sann hvis og bare hvis $e(s) = 1$ og
$f(t)$ er sann hvis og bare hvis $e(t) = 1$.

Dette er *induksjonshypotesen*. Vi må nå vise at påstanden holder for både $+st$ og $*st$:

$f(+st)$ er sann	hviss	$(f(s) \vee f(t))$ er sann	(ved definisjonen av f)
	hviss	$f(s)$ er sann **eller** f(t) er sann	(ved definisjonen av $\vee$)
	hviss	$e(s) = 1$ **eller** e(t)=1	(ved induksjonshypotesen)
	hviss	$\max(e(s), e(t)) = 1$	(ved egenskapen til max)
	hviss	$e(+st) = 1$	(ved definisjonen av e)

$f(*st)$ er sann	hviss	$(f(s) \wedge f(t))$ er sann	(ved definisjonen av f)
	hviss	$f(s)$ er sann **og** f(t) er sann	(ved definisjonen av $\vee$)
	hviss	$e(s) = 1$ **og** e(t)=1	(ved induksjonshypotesen)
	hviss	$\min(e(s), e(t)) = 1$	(ved egenskapen til min)
	hviss	$e(*st) = 1$	(ved definisjonen av e)

Ved strukturell induksjon på M kan vi konkludere med at påstanden, $f(s)$ er sann hvis og bare hvis $e(s) = 1$, er sann for alle $s \in M$.

Kommentar: For å få full uttelling må alle delene av induksjonsbeviset være på plass. Grovt sett er poengene fordelt slik: basisstegene er verdt omtrent to poeng (ett poeng per basissteg), formulering og antakelse av induksjonshypotesen er verdt omtrent ett poeng, induksjonsstegene er verdt omtrent fire poeng (to poeng per induksjonssteg), og konklusjon og helhetsinntrykk er verdt omtrent ett poeng.