Kapittel 7: Funksjoner

Nettkurs

Boka

Hva er en funksjon?

- En **funksjon** (*function*) fra A til B er en binær relasjon f fra A til B slik at for enhver $x \in A$, er det *nøyaktig* ett element $y \in B$ (ikke mer eller mindre) slik at $\langle x, y \rangle \in f$.
- Vi skriver $f(x) = y$ når $\langle x, y \rangle \in f$. I dette tilfellet kaller vi x for **argumentet** og $f(x)$ for **verdien** til funksjonen.
- vi skriver $f : A \to B$ for funksjonen f når den er en funksjon fra A til B.
- Eksempler på mengder som er eller ikke er funksjoner:
    - $(\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle)$ er en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$.
    - $(\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle)$ er ikke en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{a, b\}$, fordi ikke alle argumentene er brukt.
    - $(\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle)$ er ikke en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$, fordi noe argumenter er brukt mer enn to ganger.

Intensjonal vs ekstensjonal

- En **intensjonal** måte å representere funksjoner: $f(x) = x + x$
- En **ekstensjonal** måte å representere funksjoner: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \ldots)$
  (vi bare ser på par av argumenter og verdier uten å vite mekanisme bak funksjonen)

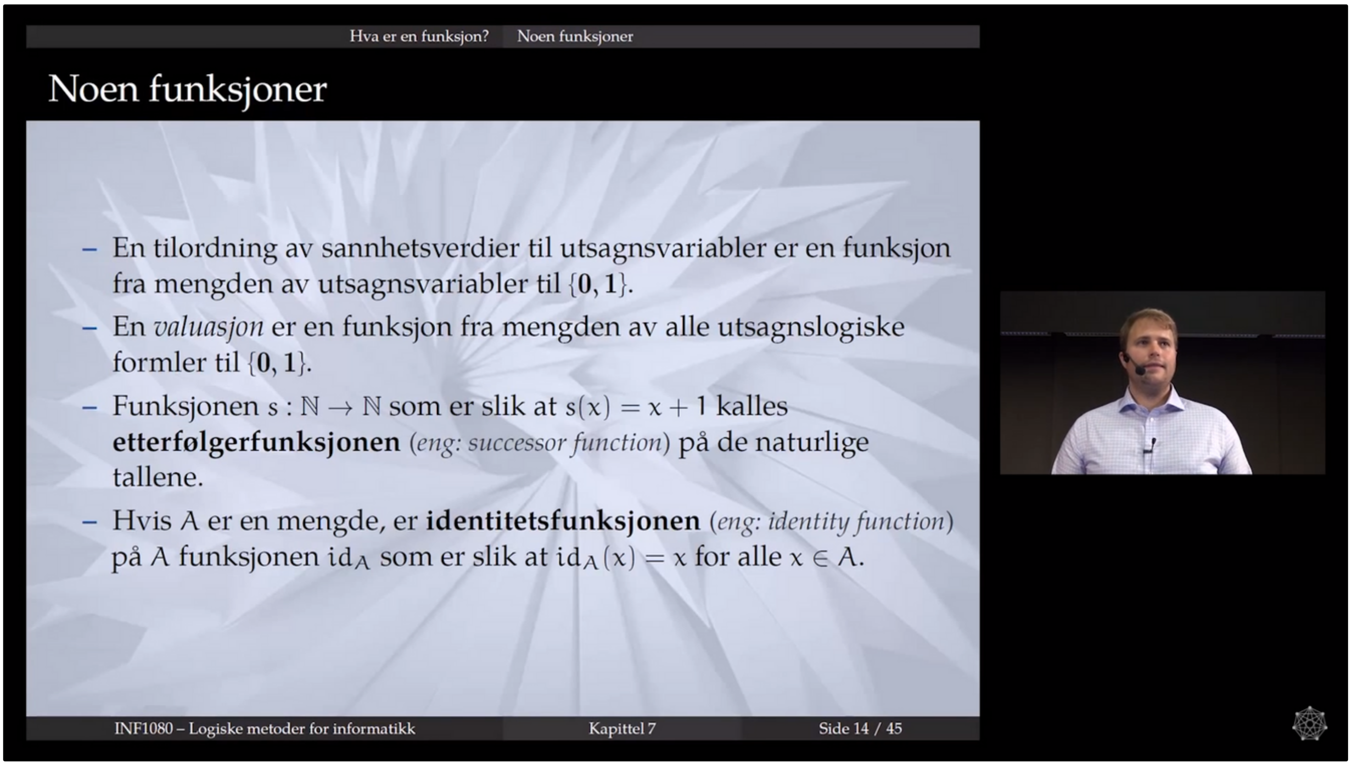
Andre skrivemåter

- $f(x) = 2x$ inneholder alle tupler på formen $\langle x, 2x \rangle$.
- Eller skrives det sånn: $x \mapsto 2x$.

Definisjons- og verdiområder

- La oss anta at $f : A \to B$
- Da er A et **definisjonsområde** (*domain*)
- Og B er et **verdiområde** (*codomain*)

Noen funksjoner



Injektiv funksjon

- En funksjon er **injektiv** (*injective*) hvis det for alle elementer x og y i A er slik at hvis $x \neq y$, så $f(x) \neq f(y)$.
- Injektiv betyr at to **forskjellige** argumenter sendes alltid til to **forskjellige** verdier.
- Vi sier at f er en **injeksjon** (*injection*) og **en-til-en** (*one-to-one*).

Surjektiv funksjon

- En funksjon er **surjektiv** (*surjective*) hvis det for alle $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$.
- Vi sier at f er en **surjeksjon** (*surjection*) og **på** (*onto*).

Bijektiv funksjon

- En funksjon er **bijektiv** (*bijective*) hvis den er injektiv og surjektiv.
- Vi sier også at funksjonen er en **bijeksjon** (*bijection*) og en **en-til-en korrespondanse**.

Bildemengden

- La f være en funksjon fra A til B, og la X være en delmengde av A.

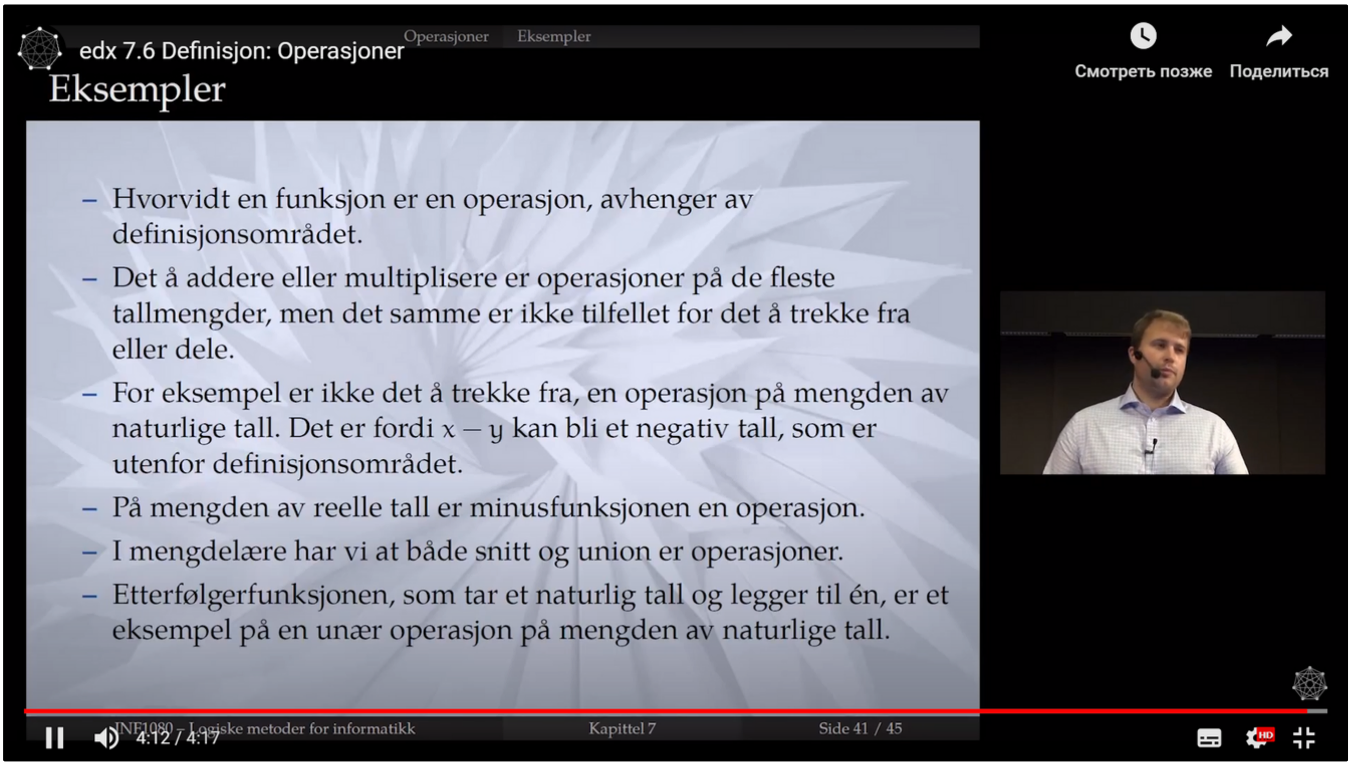
- Mengden $\{f(x) \mid x \in X\}$ kalles **bildet** (*image*) av X under f, og skrives $f[X]$.
- Bildet av hele A under f, $f[A]$, kalles **bildemengden** (*range*) til f.

Sammensetning av funksjoner

- Hvis $f : A \to B$ og $g : B \to C$ er funksjoner,
er funksjonen $g \circ f : A \to C$ definert som funksjonen vi får ved å første anvende f, deretter anvende g på verdien av dette, det vil si $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- Denne nye funksjonen kalles **sammensetningen** (*composition*) av f og g.

Operasjoner

- En **unær operasjon** (*unary operation*) på en mengde A er en funksjon fra A til A.
- En **binær operasjon** (*binary operation*) på en mengde A er en funksjon fra $A \times A$ til A.
- Mer generelt, en n-**ær operasjon** (n-*ary operation*) på en mengde A er en funksjon fra A^n til A.



Partielle funksjoner

- **Partielle funksjoner** er funksjoner som bruker bare en del av det hele definisjonsområdet, f.eks
  $\sqrt{} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- **Totale funksjoner** er funksjoner som bruker sitt hele definisjonsområdet (dvs at partielle funksjoner kan også bli totale om vi omdefinerer deres definisjonsområdet)