

Kapittel 18: Kombinatorikk

Nettkurs

Boka

Inklusjon-og-eksklusjonsprinsippet for to mengder

Definisjon (Inklusjon-og-eksklusjonsprinsippet for to mengder)

Når A og B er to endelige mengder, sier

inklusjon-og-eksklusjonsprinsippet (eng: *inclusion–exclusion principle*):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Inklusjon-og-eksklusjonsprinsippet for tre og flere mengder

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Multiplikasjonsprinsippet

- Hvis vi skal treffe en rekke uavhengige valg, er det totale antallet muligheter produktet av antall muligheter ved hvert valg. Dette kalles **multiplikasjonsprinsippet** (*rule of product / multiplication principle*).

Permutasjon

- En **permutasjon** (*permutation*) av en mengde er en ordning av elementene i den.
- Hvis vi allerede har en ordning, er en permutasjon en endring av rekkefølgen.

- Funksjonene som representerer forskjellige permutasjoner er alle bijektive funksjoner.
- For å regne ut antall permutasjoner for en mengde med gitt antall elementer n , må vi ta fakultet av n , altså $n!$.

Ordnet utvalg, eller k -permutasjon

- Hvis en mengde med n elementer er gitt, og vi ønsker å velge k av disse i rekkefølge, er det $n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))$ måter å gjøre det på. Dette kalles et **ordnet utvalg** (*ordered selection*), eller en **k -permutasjon**, av n elementer.
- Notasjon: ${}^nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. En annen skrivemåte for dette tallet er $n^{\underline{k}}$.

Kombinasjon

- En **kombinasjon** (*combination*) er et utvalg av elementer fra en mengde hvor rekkefølgen ikke spiller ingen rolle. En k -kombinasjon av en mengde A er en delmengde av A med k elementer.
- Hvis antall måter å velge tre elementer av fem i rekkefølge på er ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$, så for å regne ut antall kombinasjoner, må vi dele dette med antall permutasjoner av en mengde med tre elementer, altså $3! = 6$.
- Så antall kombinasjoner av tre elementer i en mengde av fem elementer er ${}^nC_k = 60/6 = 10$ (C står for *combination*).
- En annen måte å skrive dette på er $\binom{n}{k}$, som leses " n velg k ".
- Tallet $\binom{n}{k}$ angir hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det er av en mengde med n elementer.

Binomialkoeffisient

- Hvis n og k er naturlige tall slik at $k \leq n$, defineres som $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Slikt tallet kalles **binomialkoeffisient** (*binomial coefficient*).
- Legg merke til at $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Gjentakelser og overtelling

- Noen ganger teller vi for mye (overcounting) og da må vi kompensere for det på riktig måte.
- Vi har allerede sett dette i inklusjon-og-eksklusjonsprinsippet (se øverst).

- Men vi kan også telle for mye når vi teller permutasjoner.

Gjentakelser og overtelling
Å telle for mye

Å telle for mye

Hvor mange strenger kan vi få ved å stokke om på tegnene i strengen **pappa**?

¹ ²³ <u>pappa</u>	² ¹³ <u>pappa</u>	¹ ³² <u>pappa</u>	² ³¹ <u>pappa</u>	³ ¹² <u>pappa</u>	³ ²¹ <u>pappa</u>
¹ ²³ <u>pappa</u>	² ¹³ <u>pappa</u>	¹ ³² <u>pappa</u>	² ³¹ <u>pappa</u>	³ ¹² <u>pappa</u>	³ ²¹ <u>pappa</u>

- Hver streng blir altså telt $2! \cdot 3! = 12$ ganger.
- Vi må derfor *dele* antallet permutasjoner av fem tegn, på dette tallet.
Vi får $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ mulige strenger:

aapp	apapp	appap	apppa	paapp
papap	pappa	ppaap	ppapa	pppaa

INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 19
Side 5 / 24

Generelle formelen

