

INF1080 – Logiske metoder for informatikk

Digital eksamen (med løsningsforslag)

Dette er et utkast til løsningsforslag til eksamen i INF1080, og feil kan forekomme. Hvis du finner noen feil, si ifra til Roger på rantonse@ifi.uio.no.

1 Små oppgaver [70 poeng]

1.1 Grunnleggende mengdelære [3 poeng]

Anta at $A = \{1, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

- Er det slik at $2 \in A$? (Ja / Nei)
- Er det slik at $\{1\} \in A$? (Ja / Nei)
- Er det slik at $\{1\} \subseteq A$? (Ja / Nei)

1.2 Utsagnslogikk [3 poeng]

Anta at G står for «lyden er god» og at H står for utsagnet «lyden er harmonisk».

- Formelen $(H \rightarrow G)$ representerer utsagnet «lyden er god hvis lyden er harmonisk». (Sant / Usant)
- Formelen $\neg(H \rightarrow G)$ representerer utsagnet «lyden er ikke god hvis lyden er harmonisk». (Sant / Usant)
- Formelen $(\neg G \wedge \neg H)$ representerer utsagnet «lyden er hverken god eller harmonisk». (Sant / Usant)

1.3 Sannhetsverdier og valuasjoner [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $(P \vee \neg Q)$ er sann for alle valuasjoner. (Sant / Usant)
- $(P \wedge \neg P)$ kan gjøres sann. (Sant / Usant)
- Hvis $(P \rightarrow Q)$ er sann, så må Q være sann. (Sant / Usant)

1.4 Utsagnslogiske begreper [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes en utsagnslogisk formel som både falsifiserbar og oppfylldbar. (Sant / Usant)
- Det finnes to forskjellige kontradiksjoner som er ekvivalente med hverandre. (Sant / Usant)
- Formelen $(P \rightarrow R)$ er en logisk konsekvens av $\{(P \rightarrow Q), (\neg Q \vee R)\}$. (Sant / Usant)

1.5 Bevis og moteksempler [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- En formel som ikke er falsifiserbar, må være kontradiktorisk. (Sant / Usant)
- Et moteksempel til påstanden «hvis $x \in A$, så $x \in (A \cap B)$ » er to mengder, A og B , slik at $A \setminus B$ er ikke-tom. (Sant / Usant)
- Et moteksempel til påstanden « F er en gyldig formel» er en valuasjon som gjør F usann. (Sant / Usant)

1.6 Relasjoner [3 poeng]

La $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ være en relasjon på $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Er R refleksiv? (Ja / Nei)
- Er R symmetrisk? (Ja / Nei)
- Er R transitiv? (Ja / Nei)

1.7 Funksjoner [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Alle funksjoner er relasjoner. (Sant / Usant)
- Alle rekursive funksjoner er injektive. (Sant / Usant)
- Det finnes funksjoner som er injektive, men ikke surjektive. (Sant / Usant)

1.8 Litt mer mengdelære [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes en endelig mengde A slik at potensmengden til A er uendelig. (Sant / Usant)
- Mengdene $\{1, 2, 3, 4\}$ og $\{2, 3, 4, 5\}$ har lik kardinalitet. (Sant / Usant)
- Mengden av heltall, $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, og mengden av de naturlige tallene, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, har lik kardinalitet. (Sant / Usant)

1.9 Induktivt definerte mengder [3 poeng]

La M være den minste mengden slik at $1 \in M$, og hvis $x \in M$, så er $3x \in M$ og $3x + 1 \in M$.

- Det er slik at $0 \in M$. (Sant / Usant)
- M inneholder alle oddetall. (Sant / Usant)
- M har uendelig mange elementer. (Sant / Usant)

1.10 Rekursive funksjoner [3 poeng]

La f være en funksjon på naturlige tall definert rekursivt på følgende måte:

- (1) $f(0) = 0$
- (2) $f(n + 1) = f(n) + 4$

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det er slik at $f(f(4)) = 16$. (Sant / Usant)
- Bildemengden til f er lik mengden av alle positive partall. (Sant / Usant)
- Funksjonen f er identisk med funksjonen g som er slik at $g(n) = n + 4$. (Sant / Usant)

1.11 Strukturell induksjon [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Strukturell induksjon er en bevismetode som passer for alle uendelige mengder. (Sant / Usant)
- Ethvert bevis ved matematisk induksjon er også et bevis ved strukturell induksjon. (Sant / Usant)
- For å gjennomføre et bevis ved strukturell induksjon på mengden av utsagnslogiske formler, består basissteget av å bevise at en påstand er sann for alle utsagnsvariabler. (Sant / Usant)

1.12 Førsteordens språk [4 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- $P(\forall xRx \rightarrow \exists xRx)$ er en formel. (Sant / Usant)
- Px er en formel. (Sant / Usant)
- $(Px \rightarrow (\forall x \wedge \exists yRxy))$ er en formel. (Sant / Usant)
- $(Qx \neg \forall xPx)$ er en formel. (Sant / Usant)

1.13 Representasjon av kvantifiserte utsagn [3 poeng]

Anta at P er et relasjonssymbol slik at Px tolkes som « x er et perfekt tall».

Anta at M er et relasjonssymbol slik at Mx tolkes som « x er et merkelig tall».

Anta at R er et relasjonssymbol slik at Rxy tolkes som «tallet x er relatert til tallet y ».

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $(\exists xPx \wedge \exists yMy)$ representerer utsagnet «det finnes et tall som er både merkelig og perfekt». (Sant / Usant)
- Formelen $\exists x(Mx \rightarrow \exists yRxy)$ representerer utsagnet «det finnes et merkelig tall som er relatert til et tall». (Sant / Usant)
- Formelen $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Rxy \wedge My))$ representerer utsagnet «alle perfekte tall er relatert til et merkelig tall». (Sant / Usant)

1.14 Tolkning i modeller [4 poeng]

La \mathcal{M} være en modell med domene $\{1, 2, 3\}$, slik at

- $P^{\mathcal{M}} = \{1, 3\}$ og
- $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$.

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x Px$. (Sant / Usant)
- Det er slik at $\mathcal{M} \models \exists x \forall y Rxy$. (Sant / Usant)
- Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x \exists y (Px \vee Rxy)$. (Sant / Usant)
- Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x \exists y (Py \vee Rxy)$. (Sant / Usant)

1.15 Resonnering om modeller [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $\forall x (Px \vee Qx)$ er en logisk konsekvens av $(\forall x Px \vee \forall x Qx)$. (Sant / Usant)
- Enhver modell som gjør $\forall x Px \wedge \forall x (Px \rightarrow \neg Qx)$ sann, må også gjøre $\neg \exists x Qx$ sann. (Sant / Usant)
- Enhver modell som gjør $\exists y \forall x Rxy$ sann, må også gjøre $\forall x \exists y Rxy$ sann. (Sant / Usant)

1.16 Ekvivalensrelasjoner [4 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$. (Sant / Usant)
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$. (Sant / Usant)
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$. (Sant / Usant)
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$. (Sant / Usant)

1.17 Kombinatorikk [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes nøyaktig 12 permutasjoner av mengden $\{1, 2, 3, 4\}$. (Sant / Usant)
- Det finnes nøyaktig 120 delmengder av mengden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Sant / Usant)
- Det finnes nøyaktig 64 funksjoner fra $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ til $\{1, 2\}$. (Sant / Usant)

1.18 Litt mer kombinatorikk [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

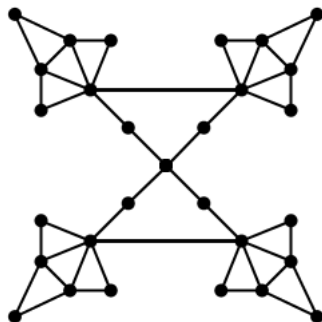
- Antall permutasjoner av en mengde med n elementer er n^n . (Sant / Usant)
- Antall strenger av lengde k over et alfabet med s tegn er s^k . (Sant / Usant)
- Antall måter å trekke 7 lottotal (av totalt 34) er $34!/7!$. (Sant / Usant)

1.19 Litt abstrakt algebra [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Funksjonen $f(x) = x + 1$ på de naturlige tallene har en invers funksjon. (Sant / Usant)
- Operasjonen $+$ (addisjon) på de rasjonale tallene er en idempotent operasjon. (Sant / Usant)
- Den algebraiske strukturen $(\mathbb{R}, +)$, hvor \mathbb{R} står for de reelle tallene, er en gruppe. (Sant / Usant)

1.20 Vandringer i grafer [3 poeng]



Se på grafen over. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Grafen har en Eulerkrets, det vil si en krets som inneholder hver kant fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)
- Grafen har en Hamiltonsti, det vil si en sti som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / Usant)
- Grafen har flere enn fem sykler. (Sant / Usant)

1.21 Regulære språk [4 poeng]

La L være språket definert av det regulære uttrykket $(0|1)(00|1)(000|1)^*$.

- Det er slik at $1001 \in L$. (**Sant** / Usant)
- Det er slik at $0100011 \in L$. (**Sant** / Usant)
- Det er slik at $\{0^{2n} \mid n \geq 0\} \subseteq L$. (Sant / **Usant**)
- Det er slik at $\{1^n \mid n > 1\} \subseteq L$. (**Sant** / Usant)

1.22 Naturlig deduksjon 1 [1 poeng]

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P \wedge Q]^1}{Q} \wedge E \quad \frac{\frac{[P \wedge Q]^1}{P} \wedge E \quad [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]^2}{Q \rightarrow R} \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{Q \quad Q \rightarrow R}{R} \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{R}{\boxed{F}} \rightarrow I_1 \\
 \hline
 \frac{\boxed{F}}{(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)} \rightarrow I_2
 \end{array}$$

Hva er formelen F i denne utledningen?

- $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
- $((P \wedge Q) \rightarrow R)$ **Riktig**

1.23 Naturlig deduksjon 2 [1 poeng]

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^1}{Q} \quad \frac{[P \rightarrow Q]^2}{Q} \rightarrow E \quad [\neg Q]^3 \\
 \hline
 \frac{Q \quad [\neg Q]^3}{\boxed{F}} \rightarrow E \\
 \hline
 \frac{\boxed{F}}{\neg P} \rightarrow I_1 \\
 \hline
 \frac{\neg P}{\neg Q \rightarrow \neg P} \rightarrow I_3 \\
 \hline
 \frac{\neg Q \rightarrow \neg P}{(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P} \rightarrow I_2
 \end{array}$$

Hva er formelen F i denne utledningen?

- $\neg P$
- \perp **Riktig**

1.24 Naturlig deduksjon 3 [1 poeng]

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^1 \quad [Q]^2}{P \wedge Q} \wedge I \\
 \frac{\quad}{\boxed{F}} \rightarrow I_2 \\
 \hline
 P \rightarrow Q \rightarrow (P \wedge Q) \rightarrow I_1
 \end{array}$$

Hva er formelen F i denne utledningen?

- $(Q \rightarrow (P \wedge Q))$ **Riktig**
- $(P \rightarrow Q)$

2 Større oppgaver [70 poeng]

2.1 Ekvivalensklasser [5 poeng]

Forklar hva en ekvivalensklasse er ved å bruke definisjonen av en ekvivalensrelasjon.

Hvis R er en ekvivalensrelasjon, er ekvivalensklassen til et element x mengden av alle elementer som relatert til x ved R . Med symboler: $[x] = \{y \mid xRy\}$

2.2 Ekvivalensklasser og partisjoner [5 poeng]

Forklar kort hva som er sammenhengen mellom ekvivalensklasser og partisjoner.

Mengden av alle slike ekvivalensklasser er en partisjon. Det er også slik at vi kan begynne med en partisjon og definere en ekvivalensrelasjon slik at partisjonen er identisk med mengden av ekvivalensklasser.

2.3 Førsteordens modeller [7 poeng]

Spesifiser en førsteordens modell \mathcal{M} for signaturen $\langle ; R, Q \rangle$ slik at følgende egenskaper holder:

- (1) Både R og Q har aritet 2.
- (2) Domenet til modellen er $\{1, 2, 3\}$.
- (3) Formelen $\forall x \forall y (Rxy \vee Qxy)$ er sann i \mathcal{M} .
- (4) R tolkes som en anti-symmetrisk relasjon.
- (5) Q tolkes som en irrefleksiv relasjon.

Her er én løsning:

La R tolkes slik: $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

La Q tolkes slik: $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$

2.4 Rekursiv funksjon på naturlige tall [7 poeng]

Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $f(x) = x^2$ på naturlige tall.

La f være definert rekursivt på følgende måte:

- $f(0) = 0$
- $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$

2.5 Rekursiv funksjon på strenger [7 poeng]

La $A = \{0, 1, x\}$. Definer en rekursiv funksjon r på A^* som *reverserer* strenger. For eksempel vil $r(001) = 100$ og $r(01x01) = 10x10$.

La r være definert rekursivt på følgende måte:

- $r(e) = e$, hvor e står for den tomme strengen.
- $r(sa) = ar(s)$, hvor s er en streng og a er i $\{0, 1, x\}$.

2.6 Bevis ved strukturell induksjon [12 poeng]

La $A = \{0, 1, x\}$. Anta at r er en rekursiv funksjon på A^* som *reverserer* strenger, akkurat som i forrige oppgave. For eksempel vil $r(001) = 100$ og $r(01x01) = 10x10$. Bevis ved strukturell induksjon på mengden A^* at for alle strenger s , er det slik at lengden til s er lik lengden til $r(s)$.

Påstanden vi skal bevise at er sann for alle strenger s i A^* er: «lengden til s er lik lengden til $r(s)$ ».

Basissteget er å bevise at påstanden holder for den tomme strengen, Λ . Siden $r(\Lambda) = \Lambda$, får vi at påstanden holder fordi lengden til den tomme strengen er lik lengden til den tomme strengen.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for s , det vil si at lengden til s er lik lengden til $r(s)$. Dette er induksjonshypotesen (IH). Fra denne må vi vise at påstanden også holder for sa , hvor $a \in \{0, 1, x\}$, det vil si at lengden til sa er lik lengden til $r(sa)$. Per definisjon av r er $r(sa)$ lik $ar(s)$, og det vil si at lengden til $r(sa)$ er nøyaktig én mer enn lengden til $r(s)$. Siden lengden til sa er nøyaktig én mer enn lengden til s , følger det at lengden til sa er lik lengden til $r(sa)$.

Ved strukturell induksjon på A^* følger det at påstanden holder for alle strenger s i A^* .

Alternativ løsning:

La $|s|$ stå for antall tegn i strengen s .

Påstanden vi skal bevise at er sann for alle strenger s i A^* er: $|s| = |r(s)|$.

Basissteget er å bevise at påstanden holder for den tomme strengen, Λ . Siden $r(\Lambda) = \Lambda$, får vi at $0 = |\Lambda| = |r(\Lambda)|$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at $|s| = |r(s)|$. Dette er induksjonshypotesen (IH). Fra denne må vi vise at påstanden også holder for sa , hvor $a \in \{0, 1, x\}$, det vil si at $|sa| = |r(sa)|$. Vi får $|sa| = |s| + 1 = |r(s)| + 1 = |ar(s)| = |r(sa)|$.

Ved strukturell induksjon på A^* følger det at påstanden holder for alle strenger s i A^* .

2.7 Mer om rekursive funksjoner [7 poeng]

Vi lar fortsatt $A = \{0, 1, x\}$.

Du skal nå definere funksjonen f på A^* som er slik at den reverser nøyaktig den delen av strengen som følger etter den første forekomsten av x .

For eksempel har vi:

$$f(x10) = x01$$

$$f(101x) = 101x$$

$$f(001x0101) = 001x1010$$

$$f(01x01x01) = 01x10x10$$

Definerer f rekursivt. (Hint: Bruk funksjonen r som reverserer en streng.)

La f være definert rekursivt på følgende måte:

- $f(e) = e$, hvor e står for den tomme strengen
- $f(0s) = 0f(s)$
- $f(1s) = 1f(s)$
- $f(xs) = xr(s)$

2.8 Definisjon og utregning [3 poeng]

La $+$ være funksjonen på endelige mengder av naturlige tall definert ved

$$X + Y = \{a + b \mid a \in X \text{ og } b \in Y\}$$

hvor X og Y er endelige mengder av naturlige tall.

For eksempel har vi følgende:

$$\{5, 10\} + \{1000\} = \{1005, 1010\}$$

$$\{1, 2\} + \{100, 200\} = \{101, 102, 201, 202\}$$

$$\{1, 2, 3\} + \{1, 2, 3\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Regn ut $\{0, 2, 4\} + \{1, 3, 5\}$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

2.9 Definisjon og kommutativitet [3 poeng]

Er dette en kommutativ operasjon?

Ja.

2.10 Definisjon og bevis 1 [7 poeng]

Bevis at $\{0\} + X = X$ for alle endelige mengder X av naturlige tall.

La X være en endelige mengde med naturlige tall. Da vil $\{0\} + X$ være lik $\{0 + b \mid b \in X\}$ per definisjon. Fordi $0 + b = b$, er denne mengden er lik X .

2.11 Definisjon og bevis 2 [7 poeng]

Bevis at $|X + Y| \leq |X| \cdot |Y|$.

Antall elementer i $X + Y$, $|X + Y|$, er lik antall forskjellige summer $a + b$ hvor $a \in X$ og $b \in Y$. Hvis alle slike summer er forskjellige, får vi én sum for hvert par $\langle a, b \rangle$ hvor $a \in X$ og $b \in Y$. Det er nøyaktig $|X| \cdot |Y|$ slike par. Hvis noen slike summer blir like, får vi færre summer. Derfor er $|X + Y| \leq |X| \cdot |Y|$.