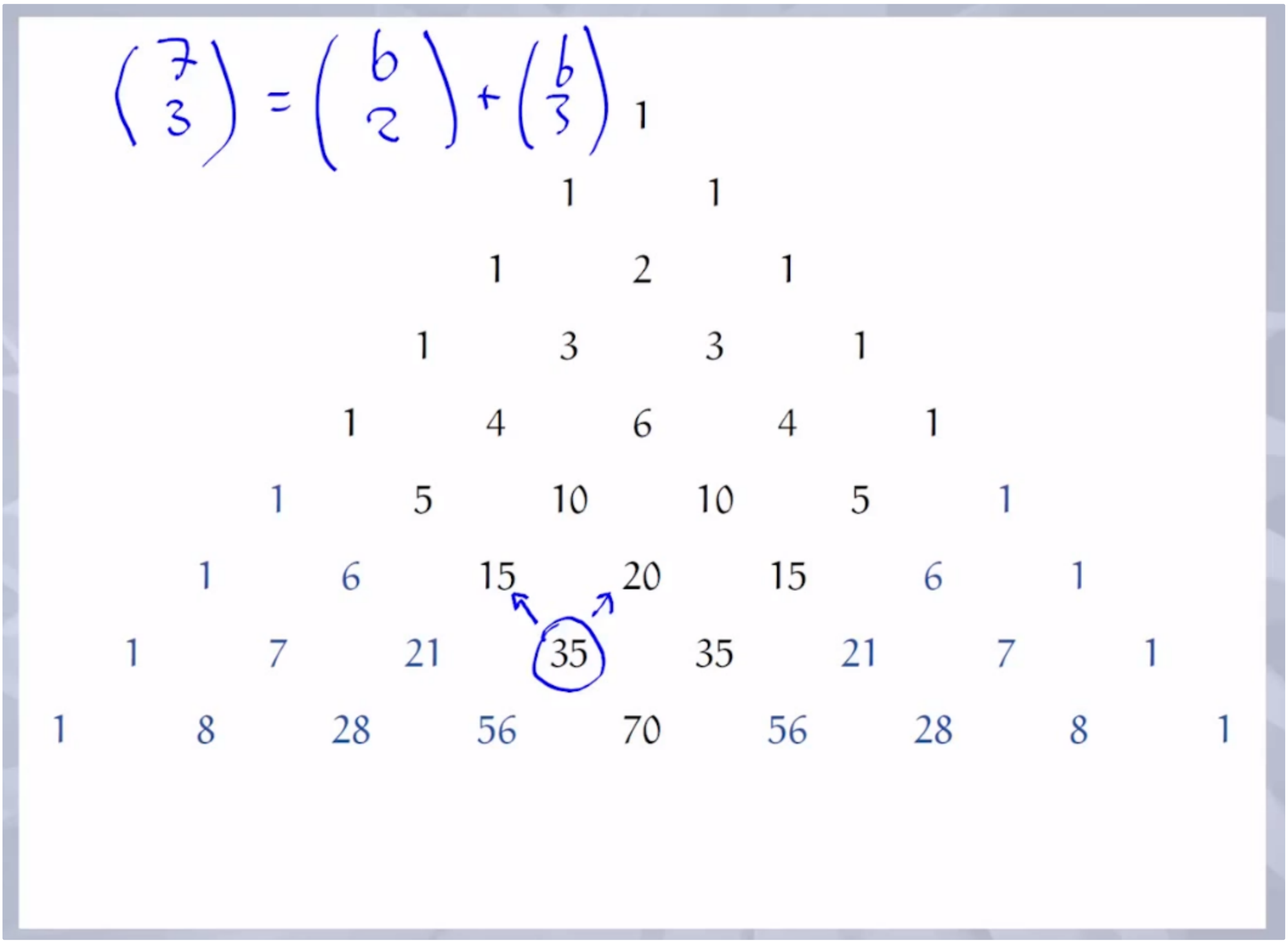
Kapittel 19: Litt mer kombinatorikk

Nettkurs

Boka

Pascals trekant



$$\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$

- Det at hvert tall i Pascals trekant er lik summen av de to tallene over, betyr at det går an å definere binomialkoeffisientene rekursivt, på følgende måte:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffisienter - hvorfor kalles de det?

For å svare på det, må vi kunne ekspandere uttrykk på formen $(x+y)^n$. Følgende er alle slike uttrykk opp til $n = 5$:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x^1 + 1y^1$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2x^1y^1 + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1y^5$$

Koeffisientene – tallene foran uttrykkene på formen $x^{n-k}y^k$ – er tallene $\binom{n}{k}$ fra Pascals trekant. Disse tallene kalles «binomialkoeffisienter» fordi uttrykk på formen $x + y$ kalles *binomer*, som er *polynomer* med to uttrykk.

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ forekomster}}$$

- Hvis vi multipliserer ut dette, får vi 2^n ledd.
- Hvert av disse leddene er på formen $f_1 f_2 \ldots f_n$.
- Hver faktor f_i enten er x eller y.
- Spørsmålet er hvor mange av disse leddene som er identiske.
- Svaret er at det er $\binom{n}{k}$ ledd hvor det er k forekomster av faktoren y.

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

Her får vi $\binom{4}{2} = 6$ ledd med 2 forekomster av y:

$$xxyy, xyxy, xyyx, yxxy, yxyx, yyxx$$

Alle disse er lik x^2y^2. Dette gjør av koeffisienten til x^2y^2 blir 6.

Systematisering av opptellingsproblemer

- Hvis man har 5 elementer i mengden og vil kun velge tre av dem, så er det flere måter å gjøre det på:

	ordnet utvalg	uordnet utvalg
med repetisjon	$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$	$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}$
uten repetisjon	${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$	$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}$

- Hvis vi har en mengde med fem elementer og skal gjøre et uordnet utvalg av tre elementer med repetisjon, er vi kun interessert i hvor mange ganger hvert element blir valgt.
- Her er generelle formlene for alle disse måter:

	ordnet utvalg	uordnet utvalg
med repetisjon	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
uten repetisjon	${}^nP_k$	$\binom{n}{k}$

Et annet perspektiv

- En annen måte å beskrive det samme på, er ved å telle antall funksjoner $f: K \to N$, hvor K har k elementer og N har n elementer.

	ikke identifisere K	identifisere K
alle funksjoner	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
injektive funksjoner	${}^nP_k$	$\binom{n}{k}$