Kapittel 5: Bevis, formodninger og moteksempler

Nettkurs

Boka

Bevis

- Et **bevis** (*proof*) for en påstand fra en mengde gitte antakelser er en rekke logiske slutninger som viser hvordan vi kommer fra antakelsene til påstanden.
- For hvert steg må konklusjonen være en *logisk konsekvens* av antakelsene.
- Hvis vi har en bevis, så har vi en garanti at noe er sann.
- Hva som kan bevises, avhenger direkte fra hva vi antar.

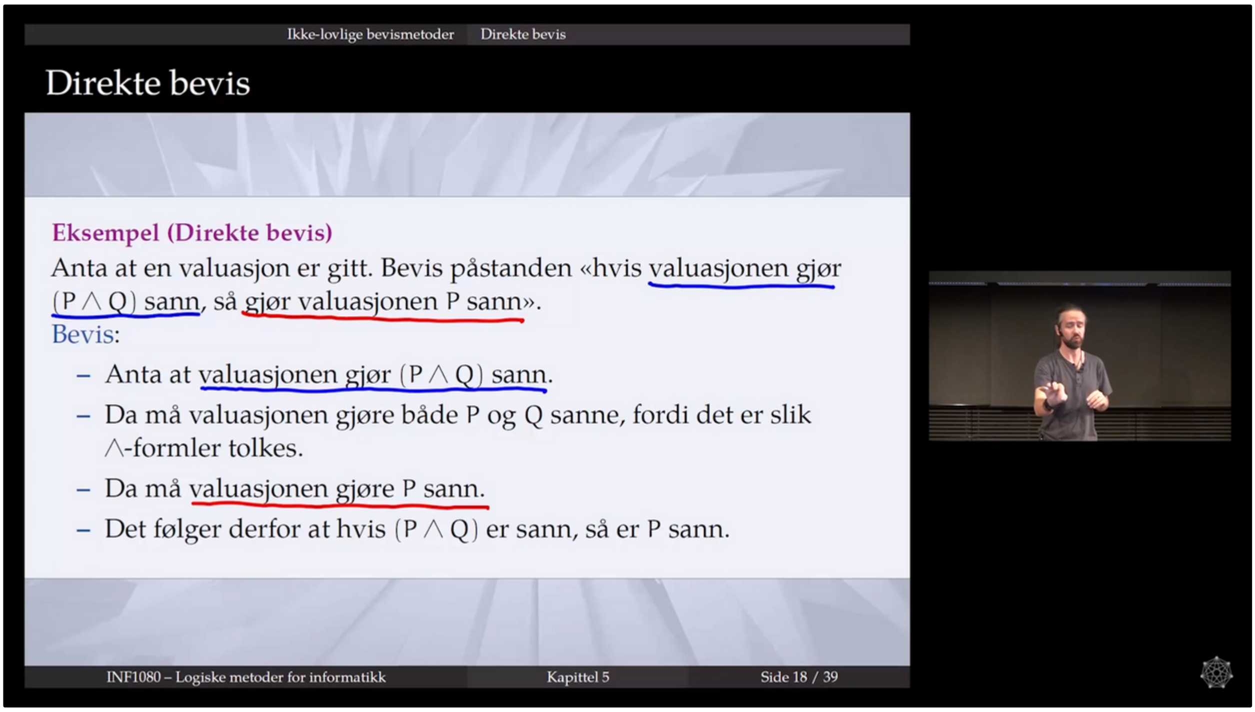
Formodninger

- En **formodning** (*conjecture*) er en påstand som vi tror, eller har god grunn til å tro, er sann, men som vi ikke har bevist eller motbevist.
- Eksempler er **Goldbachs formodning** (ethvert partall større enn to kan uttrykkes som summen av to primtall)...
- ... og **Collatz' formodning** (vi definerer en talesekvens; hvis det siste tallet er et partall, så neste tall er en halvpart av det; hvis det siste tallet er et oddetall, så ganger vi det med tre og plusser med en og legger det til som et neste tall; vi ender alltid med 1).

Bevismetoder

Direkte bevis

- Et **direkte bevis** (*direct proof*) for en påstand på formen "hvis F, så G" er et logisk gyldig resonnement som begynner med antakelsen om at F er sann, og som ender med konklusjonen om at G er sann.
    - Bare brukes med implikasjoner (hvis$\rightarrow$så-setninger)
    - Eksempel



- Vi bruker ikke "$\neg$" eller "usann" i eksempler, fordi det er kun ett tilfellet hvor en påstand på formen $(F \rightarrow G)$ blir usann, og det er når F er **sann**, og G er **usann**. Vi må anta at F er sann - ellers gjør beviset ingen mening.

Eksistensbevis

- En **eksistenspåstand** (*existential statement*) er en påstand som sier at noe eksisterer.

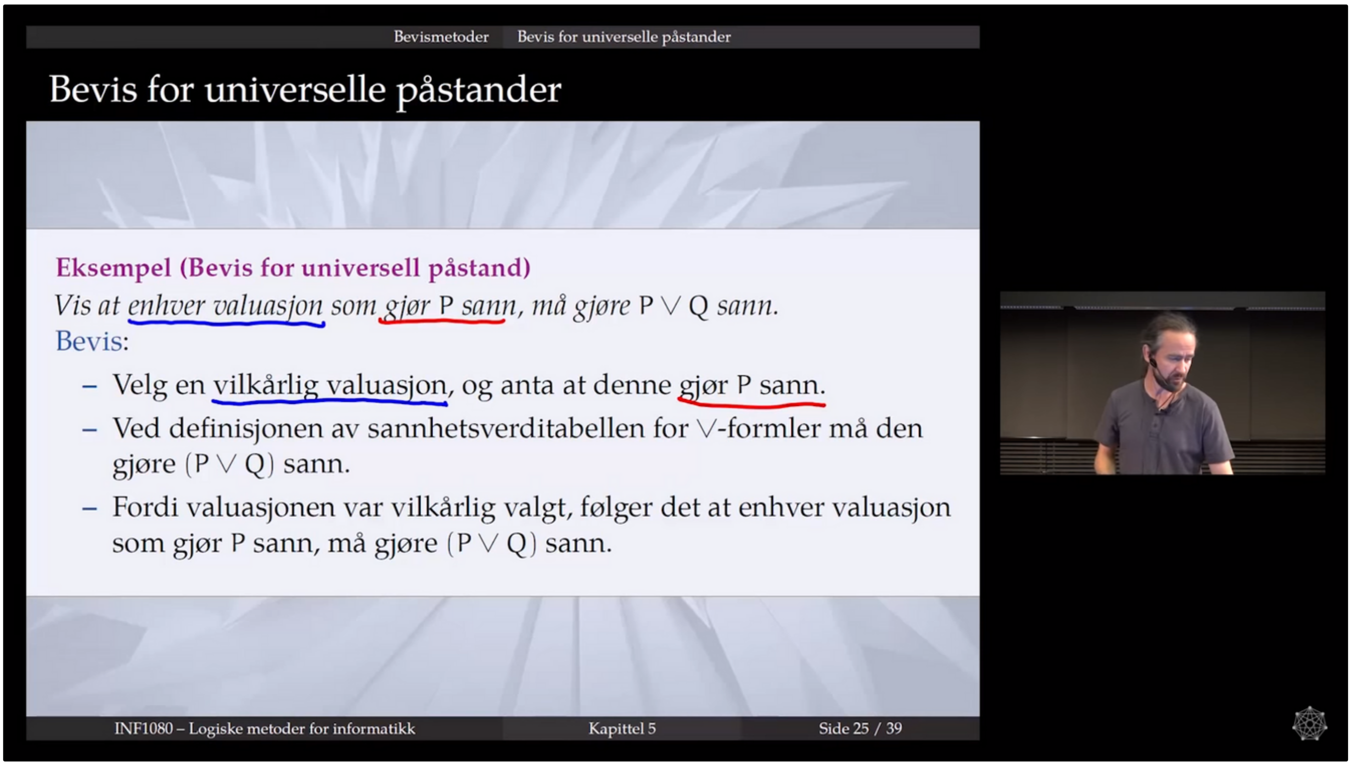
- Vi beviser eksistenspåstander ved å helt enkelt finne objektet som gjør påstanden sann. Slike bevis kalles **eksistensbevis** (*existential proof*).

Bevis ved tilfeller

- **Bevis ved tilfeller** (*proof by cases*), eller **bevis ved uttømmelse** (*proof by exhaustion*). Her deles et bevis i mindre deler, som til sammen dekker det vi skal bevise, og hver enkelt del blir bevist hver for seg.
- Typisk brukes når vi har noe disjunktivt ($\vee$-formler) eller konjunktivt ($\wedge$-formler).

Bevis for universelle påstander

- En universell påstand er en påstand som sier noe om alle objekter av en bestemt type.
- F.eks. "alle partall er delelige med to", eller "enhver valuasjon som gjør P sann, må gjøre $(P \vee Q)$ sann."
- En vanlig måte å bevise disse påstander er ved å velge et **vilkårlig** (*arbitrary*), men ikke **tilfeldig**(!) objekt og vise at *dette objektet* har den ønskede egenskapen.
- Hvis vi velger et vilkårlig objekt, så må vi ikke anta noe som helst om objektet. Det kunne like gjerne ha vært et annet objekt.



- *Hvorfor er det slik at dette alltid fungerer?*

- Grunnen er at når vi velger et vilkårlig element, kan det være et hvilken som helst element. Dette elementet blir en *plassholder* for et hvilket som helst av de andre elementene.

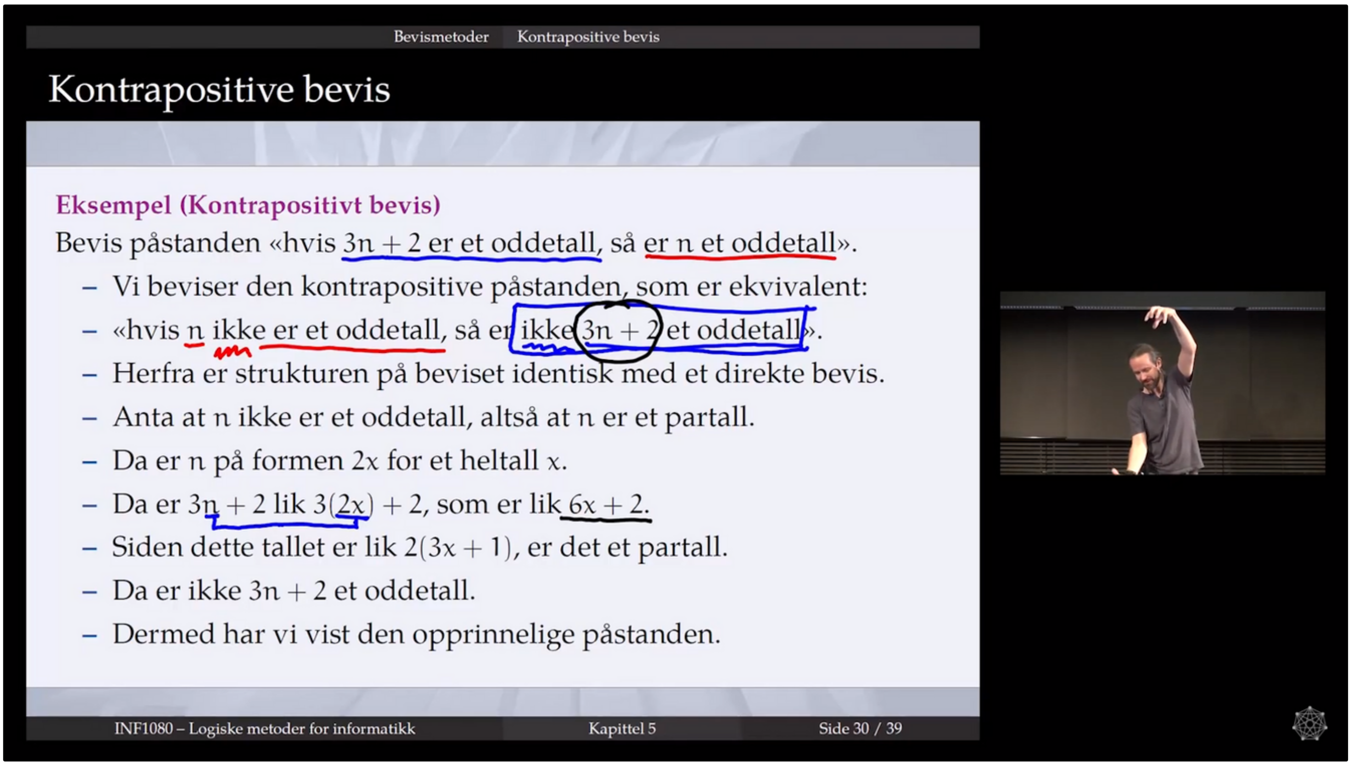
- Hvis argumentet holder for dette elementet, så holder det for alle elementene.

Moteksempler

- Hvis en påstand ikke er sann, så er det umulig å bevise den.
- Hvis påstand er *universell*, så er det i prinsippet mulig å finne **moteksempler** *(counter examples)* til den.
- Er en form for eksistensbevis; det er et bevis for at *det finnes* et tilfellet som gjør det usann.

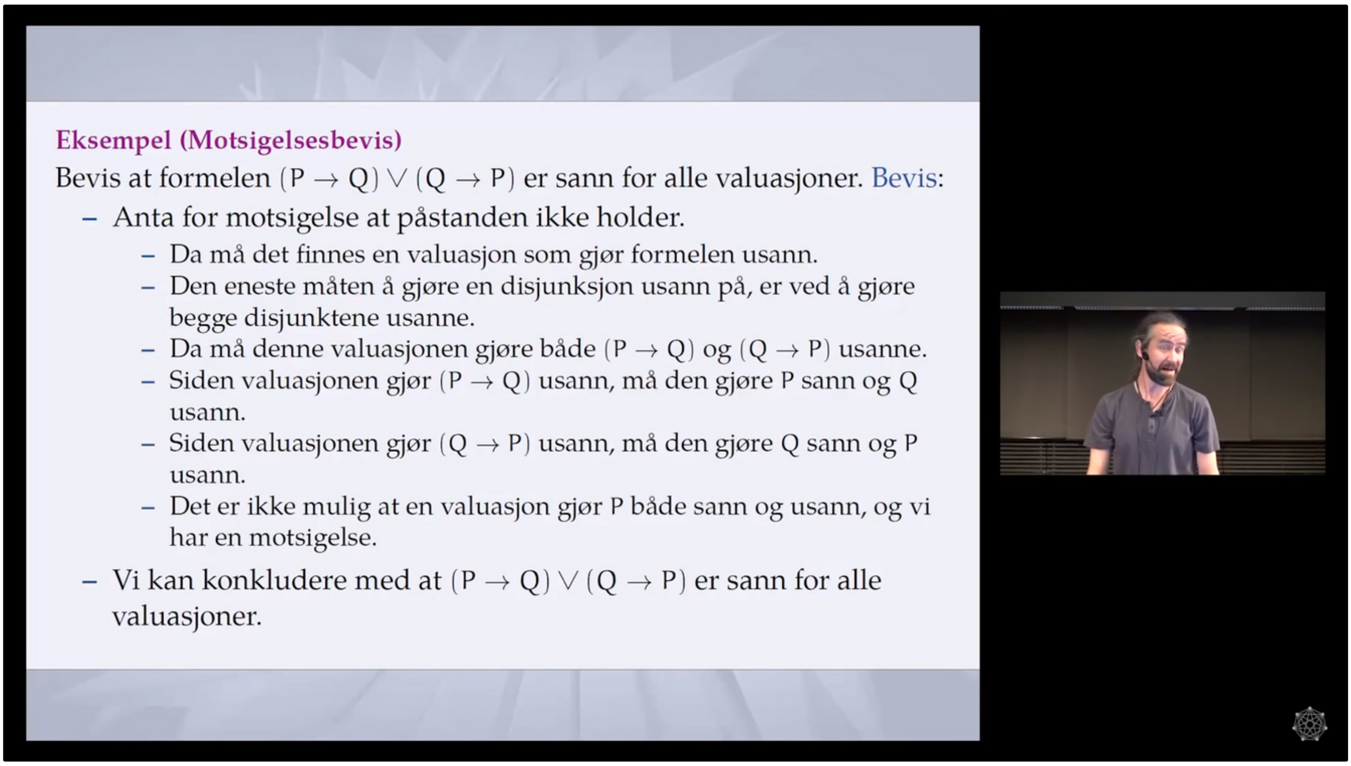
Kontrapositivt bevis

- Et **kontrapositivt bevis** (*contrapositive proof*) for en påstand på formen "hvis F, så G", er et logisk gyldig resonnement som begynner med antakelsen om at G er usann, og som konkluderer med at F er usann.
- Den **kontrapositive** (*contrapositive*) av formelen $(F \rightarrow G)$ er formelen $(\neg G \rightarrow \neg F)$. Disse to formlene er ekvivalente med hverandre.
- Eksempel



Motsigelsesbevis

- Et **motsigelsesbevis** (*proof by contradiction*) for en påstand er et bevis som begynner med antakelsen om at påstanden er usann og som viser hvordan denne antakelsen fører til en motsigelse. Beviset konkluderer med at påstanden må være sann.
- Legg merke til at konklusjonen er positiv; den sier at påstanden er sann.
- I et motsigelsesbevis antar vi det motsatte av hva vi vil bevise.
- Eksempel



- Dette forutsetter riktignok at en påstand er sann hvis og bare hvis den ikke er usann.
- Starter oftest med "anta for motsigelse at påstanden ikke holder"
- Dette prinsippet kalles **Reductio ad Absurdum**

Konstruktive vs. ikke-konstruktive bevis

- Hvis beviset viser frem eller gir en metode for å finne objektet, er det **konstruktivt** (*constructive*).
- Eksistensbevis er konstruktivt.
- **Ikke-konstruktive** bevis gjør ikke det.
- Motsigelsesbevis er ikke-konstruktivt.

Bevis for at noe ikke er sant

- Hvis vi vil bevise at en påstand er ikke sann, kan vi begynne med å anta at den er sann, og hvordan det leder til en motsigelse.

- Dette er *ikke* det samme som et motsigelsesbevis, men et direkte bevis på at noe er usant.
- Dette kan vi illustrere med utsagnslogikk:
    - et motsigelsesbevis for at P er sann, er et bevis for at $\neg P$ leder til en motsigelse
    - et bevis for at P er ikke sann, er et bevis for at antakelsen om at P er sann leder til en motsigelse
- Med motsigelsesbevis, slutter vi på noe positivt, mens med et bevis for at påstand er ikke sann, slutter vi med noe negativt.