# Kapittel 15: Tolkning i modeller

Skrevet av Mohammad Fadel Al Khafaji

ʕ つ ◕_◕ ʔつ

Nettkurs

Boka

## Semantikk for førsteordens logikk

Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?

Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.

I utsagnslogikken er det valuasjoner som gir oss semantikken.

I førsteordens logikk er det modellene som gir oss semantikken

## En modell består intuitivt av:

(1) en mengde, kalt domenet til modellen, og

(2) en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at

- et konstantsymbol tolkes som et element i mengden
- et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
- et relasjonssymbolet tolkes som en relasjon på mengden.

En modell forteller oss hvilke førsteordens formler som er sanne og hvilke som er usanne.

En gitt førsteordens formel kan være sann eller usann, og det avhenger av modellen den tolkes i.

## Eksempel (sannhet avhenger av tolkning)

Se på formelen $\forall x P x$ (det leses som for alle $x$, så er $Px$ sann").

Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av hvordan relasjonssymbolet $P$ tolkes i en modell.

Hvis $P$ tolkes som mengden av alle elementer, så er formelen sann. Hvis ikke, er den usann.

# Eksempel: sannhet avhenger av tolkning

Se på formelen $\forall x \exists y(x < y)$(Leses som for alle $x$, så finnes det en $y$ slik at $x < y$.

Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av hvordan relasjonssymbolet $<$ tolkes i en modell.

Hvis $<$ tolkes som mindre enn-relasjonen over de naturlige tallene, er den sann.

Grunnen er at for alle naturlige tall så finnes det et tall som er større.

Hvis $<$ tolkes som mindre enn-relasjonen over mengden {1,2,3,4,5,6,7} er den usann.

Grunnen er at det finnes et tall, nemlig 7, slik at det ikke finnes noe større tall.

# Modeller

Hva betyr det å gi en modell for et språk?

Det er å spesifisere et domene, samt å si hvordan alle de ikke-logiske symbolene skal tolkes.

Vi bruker så en modell til å tolke førsteordens termer og formler.

Hvis språket for eksempel kun består av ett relasjonssymbol $R$, er det nok å spesifisere domenet, som er en mengde, og tolkningen av $R$, som er en relasjon på denne mengden.

Hvis domenet er de naturlige tallene, og har aritet to, må tolkningen av $R$ være en binær relasjon på de naturlige tallene.

En modell (eng: model) $M$ for et gitt førsteordens språk består av en ikke-tom mengde $D$, kalt domenet til modellen, og en funksjon som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis $k$ er et konstantsymbol, er $k^M \in D$. ( $k^M$ leses som $k$ tolket i $M$)
- Hvis $f$ er et funksjonssymbol med aritet $n$, er $f^M$ en funksjon fra $D^n$ til $D$.
- Hvis $R$ er et relasjonssymbol med aritet $n$, er $R^M$ en $n$-ær relasjon på $D$, det vil si en delmengde av .

Vi skriver $|M|$ for domenet $D$ til modellen $M$.

# Tolkning av termer

Lukket term: En term kalles lukket (eng: closed) hvis den ikke inneholder noen variabler.

Tolkning av termer: La et førsteordens språk være gitt, og la M være en modell for dette språket. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, ..., t_n)$på følgende måte:
$f(t_1, ..., t_n)^M = f^M(t_1^M, ..., t_n^M)$

## Eksempel: Tolkning av termer

La $M$ være en modell med domene {0,1,2,3,4} slik at:

- Konstantsymbolet $a$ tolkes som 3, og vi skriver dette som $a^M = 3$
- Konstantsymbolet $b$ tolkes som 4, og vi skriver dette som $b^M = 4$

Funskjonssymbolet f med aritet en tolkes som en funksjon på {0,1,2,3,4} som gir 0 hvis argumentet er et partall og 1 hvis argumentet er et oddetall.

Nå kan vi tolke alle termer som inneholder disse symbolene.

- Tolkningen av $f(a)$ skriver vi som $f(a)^M$. Ved å regne oss innover får vi:

$f(a)^M = f^M(a^M) = f^M(3) = 1$

- Tolkningen av $f(b)$ skriver vi som $f(b)^M$. Ved å regne oss innover får vi:

$f(b)^M = f^M(b^M) = f^M(4) = 0$

## Tolkning av en lukket atomær formel

Anta at $M$ er en modell for et førsteordens språk, og la $R(t_1, ..., t_n)$ være en lukket atomær formel.

Vi sier at $R(t_1, ...t_n)$ er sann i $M$ og skriver $M \vDash R(t_1, ..., t_n)$ hvis følgende holder: $\langle t_1^M, ..., t_2^M \rangle \in R^M$

**Eksempel:**

Anta at $M$ er en modell med de naturlige tallene som domene.

Anta at $a^M = 3$, $b^M = 4$ og at$R^M$ er mindre enn relasjonen på de naturlige tallene.

Da er $Rab$ sann i $M$, fordi $a^M$, som er lik 3, er mindre enn $b^M$, som er lik 4.

Her er det samsvar mellom den lukkede atomære formelen Rab, som er noe syntaktisk, og den binære relasjonen som utgjør tolkningen av R.

Vi ser at Rab er sann i modellen M fordi $\langle a^M, b^M \rangle \in R^M$.

# Substitusjon i termer

La $s$ og $t$ være termer og $x$ en variabel.

Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte, eller substituere, alle forekomster av $x$ i $s$ med $t$.

**Eksempler:**

$$f(x,y)[x/a] = f(a,y)$$

$$\exists x(x+y=100)[y/25] = \exists(x+25)=100$$

# Kommentarer

Symbolet $M$ som representer modeller her, er ikke det riktig symbolet. Modeller skal egentlig representeres av en annen type M som ser mer “fancy” og løkkete og skrives egentlig som \mathcal{M} i Latex.

⊨ skrives som \models i Latex

Skrivemåten $M \vDash \varphi$ betyr at $\varphi$ er sann i modellen $M$.