Kapittel 8: Mer mengdelære

Nettkurs

Boka

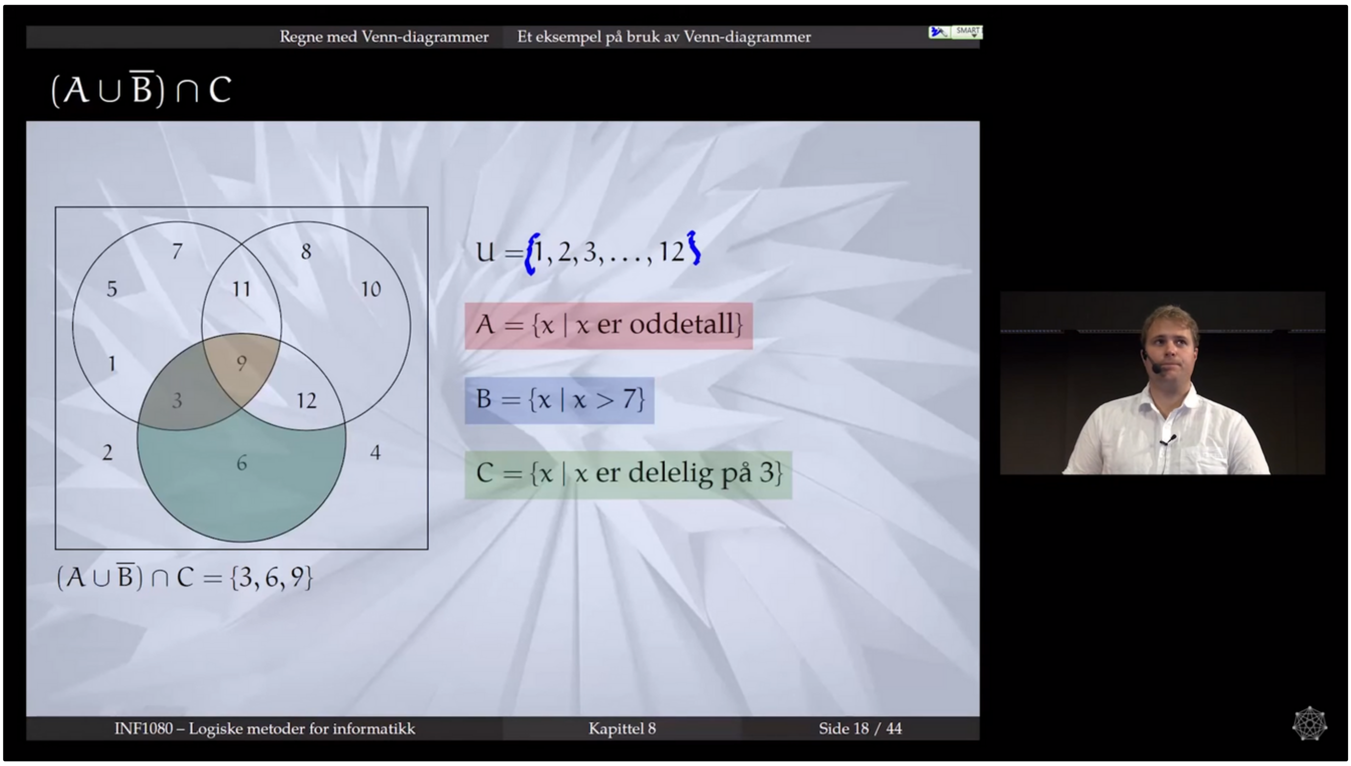
Den universelle mengden

- Vi antar at det i alle kontekster er en underliggende **universell mengde** (*universal set*) og at
  U står for denne mengden. Hvis ingenting annet er spesifisert, antar vi at U står for en *vilkårlig* universell mengde.
- Hva som er den universelle mengden varierer fra sammenheng til sammenheng
- I definisjonene av de andre operasjonene på mengder er den universelle mengden ikke nødvendig.

Mengdekomplementet

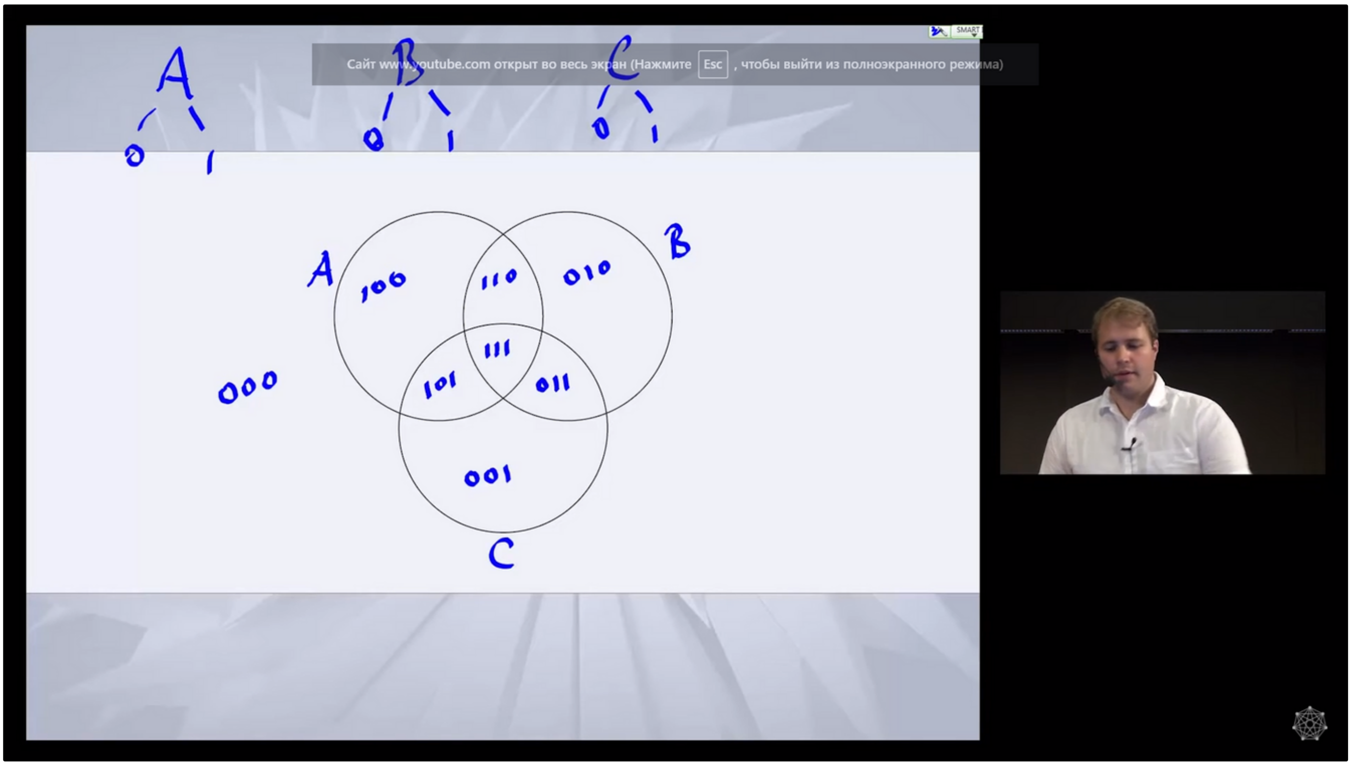
- Hvis M er en mengde, og U er den universelle mengden, er **komplementet** (*complement*) til M mengden av alle elementer i U som ikke er med i M. Komplementet til M skrives som $\overline{M}$.
- $\overline{M} = U \setminus M$
- Når vi skriver $\overline{M}$, må den universelle mengden være kjent eller vi må anta at det finnes en vilkårlig universell mengde.

Regne med Venn-diagrammer

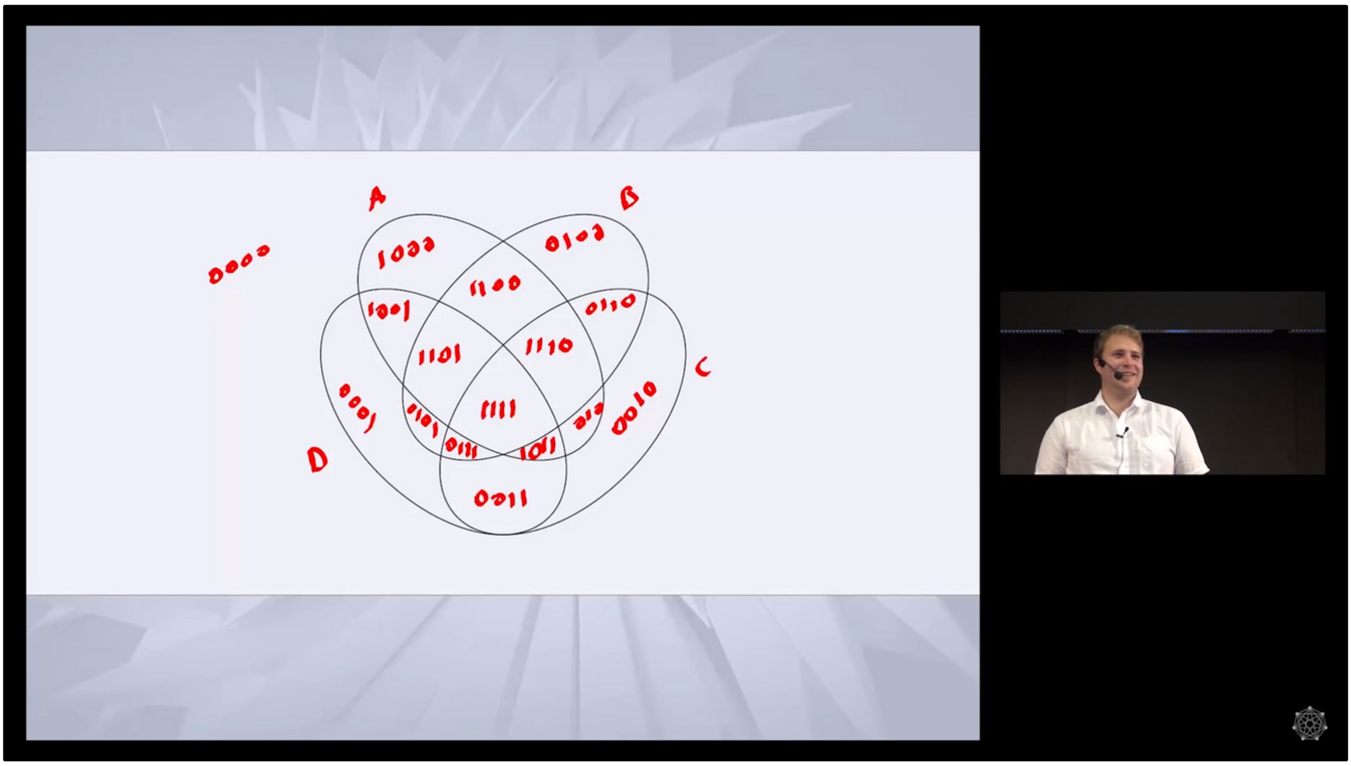


Venn-diagrammer for flere mengder

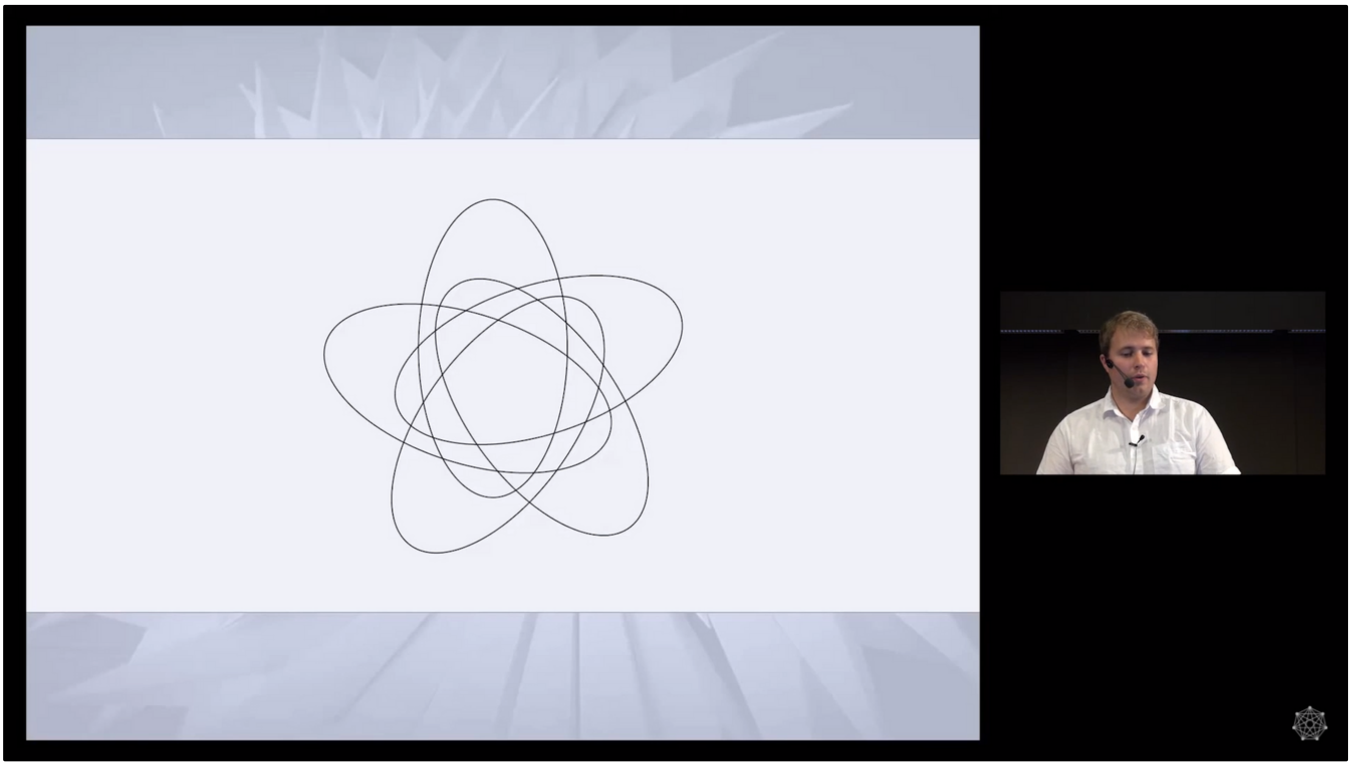
- Tre mengder



- Fire mengder



- Fem mengder



Potensmengder

- Hvis M er en mengde, er **potensmengden** (*power set*) til M mengden av alle delmengder av M.
- Vi skriver $\mathcal{P}(M)$ for potensmengden til M.

- Hvis en endelig mengde har n elementer, så har potensmengden alltid 2^n elementer.

- Eksempler:
  - Potensmengden til $\varnothing$ er $\{\varnothing\}$.
  - Potensmengden til $\{1\}$ er $\{\varnothing, \{1\}\}$.
  - Potensmengden til $\{1, 2\}$ er $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
  - Potensmengden til $\{1, 2, 3\}$ er $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Kardinalitet

- To mengder M og N har lik **kardinalitet** (*same cardinality*) hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom elementene i M og N.
- Det skrives som $|M| = |N|$.
- Mengden M har **kardinalitet mindre eller lik** N hvis det finnes en en-til-en korrespondanse mellom M og en delmengde av N.
- Det skrives som $|M| \leqslant |N|$.
- $|M|$ står for antall elementer i M, fordi hvis M er en endelig mengde, så er kardinalitet til M lik antall elementer i M.

Tellbarhet

- En uendelig mengde M er **tellbar** (*countable*) hvis det er en en-til-en korrespondanse mellom elementene i M og de naturlige tallene. Hvis ikke, er M **overtellbar** (*uncountable*).
- Alle endelige mengder er tellbare.
- Mengden av heltall, $\mathbb{Z}$, er tellbar. For å bevise dette, må vi lage en en-til-en korrespondanse mellom $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$:
-

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f(x)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	6	-7	7

Overtellbarhet

- Det finnes mengder så store at de er ikke tellbare
- Cantors diagonalbevis er en måte å bevise dette på.

- Generelt er det slik at potensmengden til en mengde alltid har større kardinalitet enn mengden selv.

- Potensmengder er også definert for uendelige mengder, og vi kan bevise at det aldri eksisterer en surjektiv funksjon fra en mengde til dens potensmengden.