

# Kapittel 20: Litt abstrakt algebra

Skrevet av Mohammad Fadel Al Khafaji

( 🤖 ) > 🍔 -- 🍔 < 9 ( ^ ^ )

Nettkurs

Boka

## Algebraisk struktur

Abstrakt algebra regnes som den delen av algebraen som handler om såkalte algebraiske strukturer.

En algebraisk struktur betyr bare en mengde sammen med en eller flere operasjoner på denne mengden.

"Hvis du har en mengde og en operasjon på den mengden så har du det som kalles en algebraisk struktur."

Operasjoner er funksjoner. Noen binære funksjoner:  $+$ ,  $-$ ,  $/$ ,  $*$ , ...

Det at en mengde er lukket under en funksjon gjør funksjonen til en operasjon.

## Invers relasjon

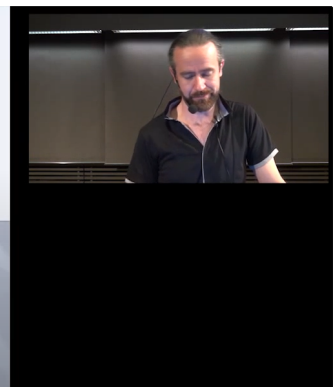
Hvis  $R$  er en relasjon fra  $A$  til  $B$ , er den inverse relasjonen til  $R$  relasjonen  $\{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$  fra  $B$  til  $A$ . Vi skriver  $R^{-1}$  for inversen til  $R$ .

### Eksempel (Invers relasjon)

- Den inverse relasjonen til  $\{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$  er  $\{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$ .
- Hvis  $R$  er mindre enn-relasjonen på naturlige tall, er  $R^{-1}$  større enn-relasjonen på naturlige tall.

$$\begin{array}{lcl} 2 & R & 5 \\ 5 & R^{-1} & 2 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} 2 & < & 5 \\ 5 & <^{-1} & 2 \end{array}$$

MORE VIDEOS



## Invers funksjon

La  $f$  være en en-til-en korrespondanse (bijektiv) fra mengden  $A$  til mengden  $B$ . Den inverse funksjonen til  $f$  er funksjonen fra  $B$  til  $A$  som er slik at  $f^{-1}(b) = a$  hvis  $f(a) = b$ . Vi skriver  $f^{-1}$  for den inverse funksjonen til  $f$ .

### Eksempel (Invers funksjon)

- La  $f$  være funksjonen fra  $\{1, 2, 3\}$  til  $\{a, b, c\}$  slik at  $f(1) = a$ ,  $f(2) = b$  og  $f(3) = c$ .
- Denne funksjonen har en invers, siden den er en bijeksjon.
- Den inverse funksjonen  $f^{-1}$  er slik at  $f^{-1}(a) = 1$ ,  $f^{-1}(b) = 2$  og  $f^{-1}(c) = 3$ .

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

### Kommutativ

En binær operasjon  $*$  på en mengde  $S$  er kommutativ hvis det for alle  $x, y \in S$  er slik at  $x * y = y * x$ .

- At en binær operasjon er kommutativ, betyr intuitivt at rekkefølgen på argumentene ikke spiller noen rolle.

### Eksempel (Kommutativitet)

- Operasjonene  $+$  (addisjon) og  $*$  (multiplikasjon) er vanligvis kommutative, men operasjonene  $-$  (subtraksjon) og  $/$  (divisjon, på rasjonale eller reelle tall uten null) er vanligvis ikke kommutative.
- Et moteksempel er for eksempel tallene 2 og 3, siden  $2 - 3 \neq 3 - 2$  og  $2/3 \neq 3/2$ .
- Operasjonene  $\cap$  (snitt) og  $\cup$  (union) på mengder er kommutative, men operasjonen  $\setminus$  (mengdedifferanse) er ikke kommutativ.

### Assosiativ

En binær operasjon  $*$  på en mengde  $S$  er assosiativ hvis det for alle  $x, y, z \in S$  er slik at  $x * (y * z) = (x * y) * z$ .

- At en operasjon er assosiativ betyr intuitivt at parentessettingen ikke er viktig.

### Eksempel

- Operasjonene  $+$  (addisjon) og  $*$  (multiplikasjon) er assosiative.
- Operasjonene  $-$  (Subtraksjon) og  $/$  (divisjon, på rasjonale eller reelle uten null) er ikke assosiative.

Et moteksempel er for eksempel tallene 1, 2 og 3, siden

$$2 = 1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3 = -4$$

$$3/2 = 1/(2/3) \neq (1/2)/3 = 1/6$$

- Operasjonene  $\cap$  (snitt) og  $\cup$  (union) på mengder er assosiative, men operasjonen  $\setminus$  (mengdedifferanse) er ikke kommutativ.

## Idempotent

- En unær operasjon  $f$  på en mengde  $S$  er idempotent hvis det for alle  $x \in S$  er slik at  $f(f(x)) = f(x)$
- En binær operasjon  $*$  på en mengde  $S$  er idempotent hvis det for alle  $x \in S$  er slik at  $x * x = x$
- Det at noe er idempotent betyr at det ikke har noen effekt å gjøre noe mer enn en gang.

### Eksempel (Idempotent)

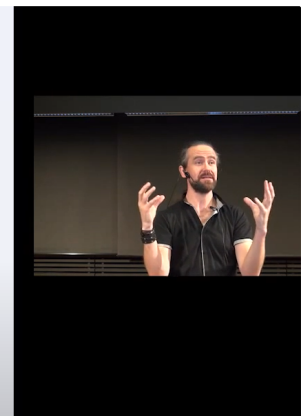
- Operasjonene  $\cap$  (snitt) og  $\cup$  (union) på mengder er idempotente, fordi  $x \cup x$  og  $x \cap x$  alltid er lik  $x$ , uansett hva  $x$  er.
- Operasjonene  $+$  (addisjon) og  $*$  (multiplikasjon) er ikke idempotente. Et moteksempel er for eksempel tallet 2, siden  $2 + 2 \neq 2$  og  $2 * 2 \neq 2$ .

## Identitetselement

- La en binær operasjon  $*$  på en mengde  $S$  være gitt.
- Hvis  $x * e = e * x = x$  for alle  $x \in S$  sier vi at  $e$  er et identitetsselement eller et nøytralt element for operasjonen  $*$ , i den forstand at de ikke har noen effekt på andre elementer.

### Eksempel (Identitetselement)

- For de fleste tallmengder har vi at:
  - 0 er et identitetselement for addisjon.
  - 1 er et identitetselement for multiplikasjon.
- I mengdelære har vi at:
  - $\emptyset$  er et identitetselement for union.
  - den universelle mengden er et identitetselement for snitt.
- I formelle språk har vi at:
  - $\wedge$  er et identitetselement for konkatenering.
- Hvis vi ser på funksjonssammensetning, har vi at:
  - identitetsfunksjonen er et identitetselement.



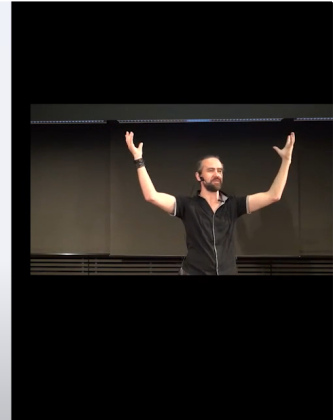
## Inverse elementer

- La en binær operasjon  $*$  på en mengde  $S$  være gitt.
- Anta at  $e$  er et identitetsselement for  $*$ .

- Hvis  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ , sier vi at  $a$  og  $a^{-1}$  er inverse elementer, og ta de er inversene til hverandre.

#### Eksempel (Inverse elementer)

- Det er ikke alltid slik at elementer har inverser.
- Hvis vi ser på naturlige tall og addisjon, er det kun 0 som har en invers, og det er 0 selv:  $0 + 0 = 0$ .
- Hvis vi ser på naturlige tall og multiplikasjon, er det kun 1 som har en invers, og det er 1 selv:  $1 \cdot 1 = 1$ .
- Hvis vi ser på heltallene og addisjon, har alle elementer en invers: Inversen til  $x$  er  $-x$ , fordi  $x + (-x) = 0$ .
- Hvis vi ser på de rasjonale tallene og multiplikasjon, har alle elementer bortsett fra 0 en invers: Inversen til  $x$  er  $1/x$ , fordi  $x \cdot (1/x) = 1$ .



## Gruppe

- La en binær operasjon  $\bullet$  på en mengde  $G$  være gitt.
- Da er  $\langle G, \bullet \rangle$  en gruppe hvis følgende betingelser kalt gruppeaksiomene, er oppfylt.
  - Operasjonen  $\bullet$  er assosiativ.
  - Det finnes et identiteselement for  $\bullet$ .
  - Alle elementer har en invers.
- Hvis den i tillegg har at  $\bullet$  er kommutativ, kalles gruppen abelsk.

#### Eksempel (Grupper)

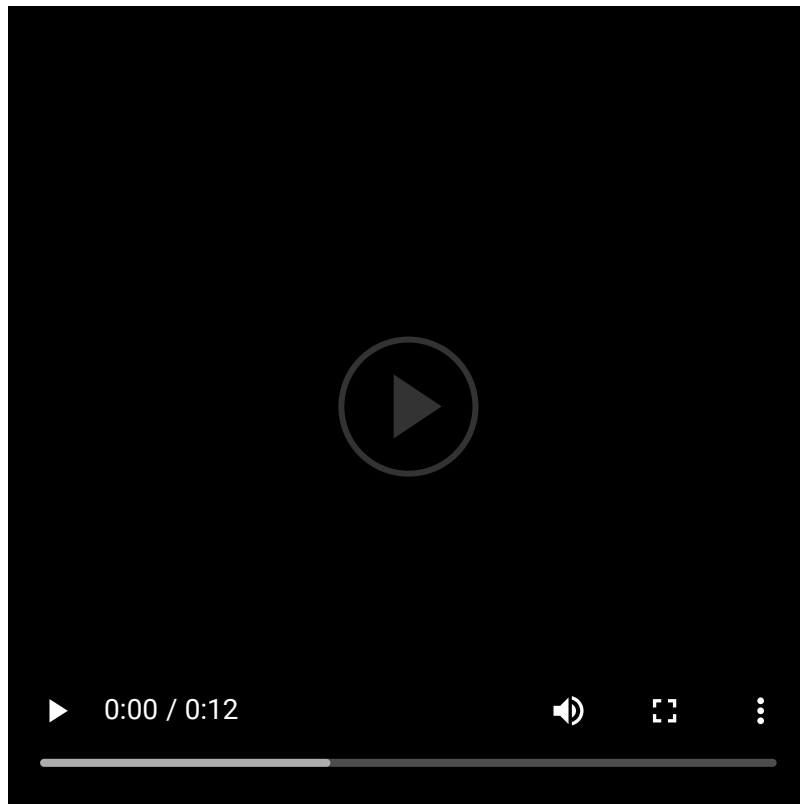
- $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ , heltallene under addisjon, er en gruppe, fordi  $+$  er assosiativ, 0 er et identiteselement, og alle elementer  $x$  har en invers  $-x$ . Det er en *abelsk* gruppe fordi  $+$  er kommutativ.
- $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ , heltallene under multiplikasjon, er ikke en gruppe, fordi ikke alle elementer har en invers.



## Kommentarer

Notatene er for det meste ferdig skrevet, men skal bare finpusse på det, damn kunne ha gått for macern nå'as.

Burger King Fan: 🍔🍔🍔



McDonald Enjoyer: 🤖🤖🤖

