

Kapittel 7: Funksjoner

Nettkurs

Boka

Hva er en funksjon?

- En **funksjon** (*function*) fra A til B er en binær relasjon f fra A til B slik at for enhver $x \in A$, er det *nøyaktig* ett element $y \in B$ (ikke mer eller mindre) slik at $\langle x, y \rangle \in f$.
- Vi skriver $f(x) = y$ når $\langle x, y \rangle \in f$. I dette tilfellet kaller vi x for **argumentet** og $f(x)$ for **verdien** til funksjonen.
- vi skriver $f : A \rightarrow B$ for funksjonen f når den er en funksjon fra A til B .
- Eksempler på mengder som er eller ikke er funksjoner:
 - $(\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle)$ er en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$.
 - $(\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle)$ er ikke en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{a, b\}$, fordi ikke alle argumentene er brukt.
 - $(\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle)$ er ikke en funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$, fordi noe argumenter er brukt mer enn to ganger.

Intensjonal vs ekstensjonal

- En **intensjonal** måte å representere funksjoner: $f(x) = x + x$
- En **ekstensjonal** måte å representere funksjoner: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $(\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \dots)$
(vi bare ser på par av argumenter og verdier uten å vite mekanisme bak funksjonen)

Andre skrivemåter

- $f(x) = 2x$ inneholder alle tupler på formen $\langle x, 2x \rangle$.
- Eller skrives det sånn: $x \mapsto 2x$.

Definisjons- og verdiområder


- La oss anta at $f : A \rightarrow B$
- Da er A et **definisjonsområde** (*domain*)
- Og B er et **verdiområde** (*codomain*)

Noen funksjoner

Hva er en funksjon?
Noen funksjoner

Noen funksjoner

- En tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariabler er en funksjon fra mengden av utsagnsvariabler til $\{0, 1\}$.
- En *valuasjon* er en funksjon fra mengden av alle utsagnslogiske formuler til $\{0, 1\}$.
- Funksjonen $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ som er slik at $s(x) = x + 1$ kalles **etterfølgerfunksjonen** (eng: *successor function*) på de naturlige tallene.
- Hvis A er en mengde, er **identitetsfunksjonen** (eng: *identity function*) på A funksjonen id_A som er slik at $\text{id}_A(x) = x$ for alle $x \in A$.



Injektiv funksjon

- En funksjon er **injektiv** (*injective*) hvis det for alle elementer x og y i A er slik at hvis $x \neq y$, så $f(x) \neq f(y)$.
- Injektiv betyr at to **forskjellige** argumenter sendes alltid til to **forskjellige** verdier.
- Vi sier at f er en **injeksjon** (*injection*) og **en-til-en** (*one-to-one*).

Surjektiv funksjon

- En funksjon er **surjektiv** (*surjective*) hvis det for alle $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$.
- Vi sier at f er en **surjeksjon** (*surjection*) og **på** (*onto*).

Bijektiv funksjon

- En funksjon er **bijektiv** (*bijective*) hvis den er injektiv og surjektiv.
- Vi sier også at funksjonen er en **bijeksjon** (*bijection*) og en **en-til-en korrespondanse**.

Bildemengden

- La f være en funksjon fra A til B , og la X være en delmengde av A .


- Mengden $\{f(x) \mid x \in X\}$ kalles **bildet** (*image*) av X under f , og skrives $f[X]$.
- Bildet av hele A under f , $f[A]$, kalles **bildemengden** (*range*) til f .

Sammensetning av funksjoner

- Hvis $f : A \rightarrow B$ og $g : B \rightarrow C$ er funksjoner, er funksjonen $g \circ f : A \rightarrow C$ definert som funksjonen vi får ved å første anvende f , deretter anvende g på verdien av dette, det vil si $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.
- Denne nye funksjonen kalles **sammensetningen** (*composition*) av f og g .

Operasjoner

- En **unær operasjon** (*unary operation*) på en mengde A er en funksjon fra A til A .
- En **binær operasjon** (*binary operation*) på en mengde A er en funksjon fra $A \times A$ til A .
- Mer generelt, en **n -ær operasjon** (*n -ary operation*) på en mengde A er en funksjon fra A^n til A .


edX 7.6 Definisjon: Operasjoner

Operasjoner Eksempler

Eksempler

– Hvorvidt en funksjon er en operasjon, avhenger av definisjonsområdet.


– Det å addere eller multiplisere er operasjoner på de fleste tallmengder, men det samme er ikke tilfellet for det å trekke fra eller dele.

– For eksempel er ikke det å trekke fra, en operasjon på mengden av naturlige tall. Det er fordi $x - y$ kan bli et negativt tall, som er utenfor definisjonsområdet.

– På mengden av reelle tall er minusfunksjonen en operasjon.

– I mengdelære har vi at både snitt og union er operasjoner.


– Etterfølgerfunksjonen, som tar et naturlig tall og legger til én, er et eksempel på en unær operasjon på mengden av naturlige tall.



INF1080 Logiske metoder for informatikk

Kapittel 7

Side 41 / 45



Partielle funksjoner

- **Partielle funksjoner** er funksjoner som bruker bare en del av det hele definisjonsområdet, f.eks
 $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- **Totale funksjoner** er funksjoner som bruker sitt hele definisjonsområdet (dvs at partielle funksjoner kan også bli totale om vi omdefinerer deres definisjonsområdet)