Kapittel 20: Litt abstrakt algebra

Skrevet av Mohammad Fadel Al Khafaji

(◑‿◑)ɔ┏🍟--🍔┑٩(^◡^)

Nettkurs

Boka

Algebraisk struktur

Abstrakt algebra regnes som den delen av algebraen som handler om såkalte algebraiske strukturer.

En algebraisk struktur betyr bare en mengde sammen med en eller flere operasjoner på denne mengden.

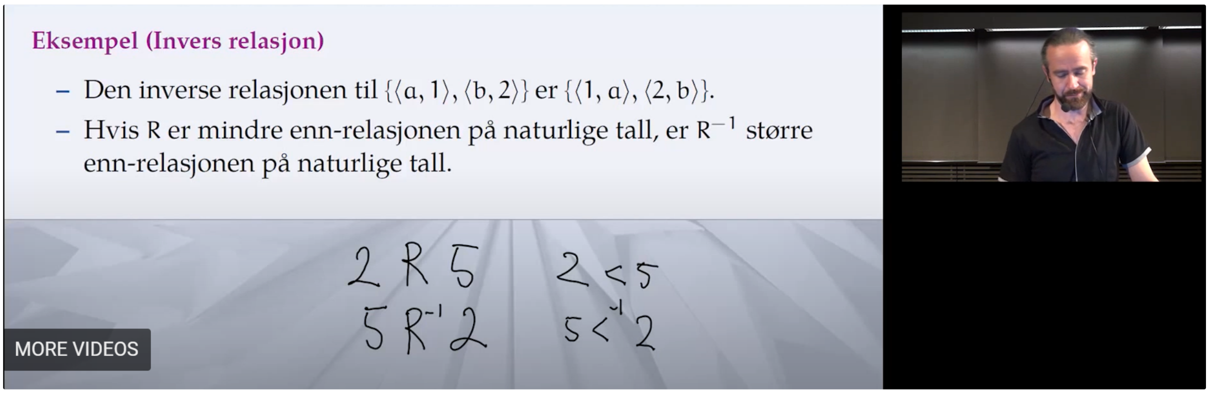
"Hvis du har en mengde og en operasjon på den mengden så har du det som kalles en algebraisk struktur."

Operasjoner er funksjoner. Noen binære funksjoner: +, -, /, *,...

Det at en mengde er lukket under en funksjon gjør funksjonen til en operasjon.

Invers relasjon

Hvis R er en relasjon fra A til B, er den inverse relasjonen til R relasjonen $\{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\}$ fra B til A. Vi skriver R^{-1} for inversen til$R$.



Invers funskjon

La f være en en-til-en korrespondanse (bijektiv) fra mengden A til mengden B. Den inverse funsksjonen til f er funksjonen fra B til$A$ som er slik at $f^{-1}(b) = a$ hvis $f(a) = b$. Vi skriver f^{-1} for den inverse funksjonen til$f$.

Eksempel (Invers funksjon)

- La f være funksjonen fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{a, b, c\}$ slik at $f(1) = a$, $f(2) = b$ og $f(3) = c$.
- Denne funskjonen har en invers, siden den er en bijeksjon.

- Den iverse funksjonen f^{-1} er slik at $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$ og $f^{-1}(c) = 3$.

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Kommutativ

En binær operasjon $\circledast$ på en mengde S er kommutativ hvis det for alle $x, y \in S$ er slik at $x \circledast y = y \circledast x$.

- At en binær operasjon er kommutativ, betyr intuitivt at rekkefølgen på argumentene ikke spiller noen rolle.

Eksempel (Kommutativitet)

- Operasjonene $+$ (addisjon) og $*$ (multiplikasjon) er vanligvis kommutative, men operasjonene $-$ (substraksjon) pg $/$ (divisjon, på rasjonale eller reelle tall uten null) er vanligvis ikke kommutative.
- Et moteksempel er for eksempel tallene 2 og 3, siden $2 - 3 \neq 3 - 2$ **og** $2/3 \neq 3/2$.
- Operasjonene ∩ (snitt) og ∪ (union) på mengder er kommutataive, men operasjonen $\setminus$ (mengdedifferanse) er ikke kommutativ.

Assosiativ

En binær opersjon $\circledast$ på en mengde S er assiosiativ hvis det for alle $x, y, z \in S$ er slik at $x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) \circledast z$.

- At en operasjon er assiosiativ betyr intuitivt at parentessettingen ikke er viktig.

Eksempel

- Operasjonene $+$ (addisjon) og $*$ (multiplikasjon) er assosiative.
- Operasjonene $-$ (Subtraksjon) og $/$ (divisjon, på rasjonale eller reelle uten null) er ikke assosiative.

Et moteksempel er for eksempel tallene 1,2 og 3, siden

$2 = 1 - (2 - 3) \neq (1 - 2) - 3 = -4$

$3/2 = 1/(2/3) \neq (1/2)/3 = 1/6$

- Operasjonene $\cap$ (snitt) og $\cup$ (union) på mengder er assosiative, men operasjonen $\setminus$ (mengdedifferanse) er ikke kommutativ.

Idempotent

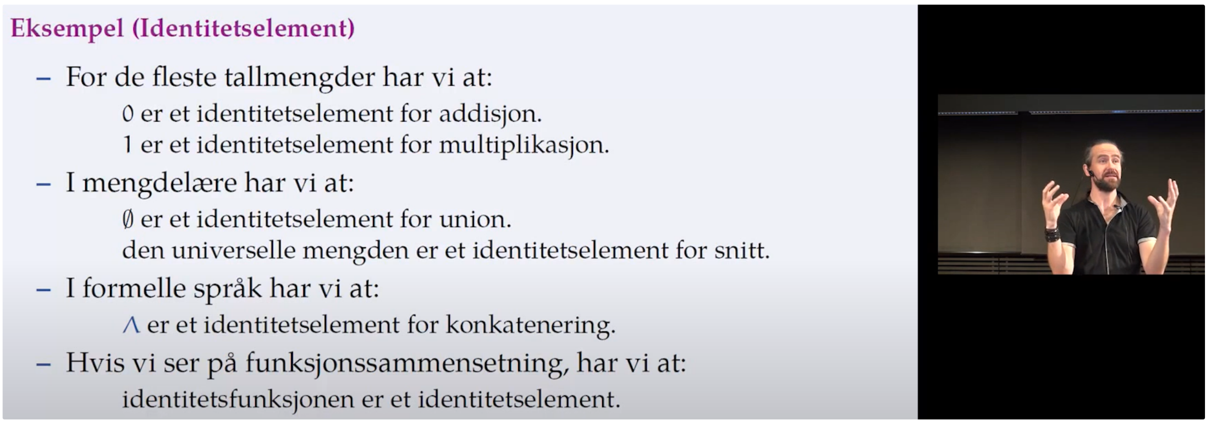
- En unær operasjon f på en mengde S er idempotent hvis det for alle $x \in S$ er slik at $f(f(x)) = f(x)$
- En binær operasjon $\circledast$ på en mengde S er idempotent hvis det for alle$x \in S$ er slik at $x \circledast x = x$
- Det at noe er idempotent betyr at det ikke har noen effekt å gjøre noe mer enn en gang.

Eksempel (Idempotent)

- Operasjonene $\cap$ (snitt) og $\cup$ (union) på mengder er idempotente, fordi $x \cup x$ og $x \cap x$ alltid er lik x, uansett hva x er.
- Operasjonene $+$ (adddisjon) og $*$ (multiplikasjon) er ikke idempotente. Et moteksempel er for eksempel tallet 2, siden $2 + 2 \neq 2$ og $2 * 2 \neq 2$.

Identitetselement

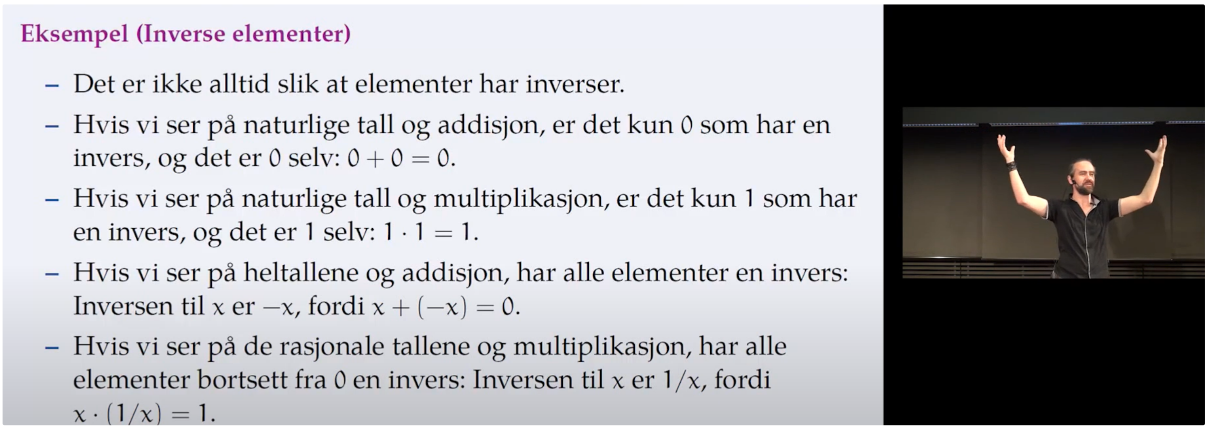
- La en binær operasjon $\circledast$ på en mengde s være gitt.
- Hvis $x \circledast e = e \circledast x = x$ for alle $x \in S$ sier vi at e er et identitselement eller et nøytralt element for operasjonen $\circledast$, i den forstand at de ikke har noen effekt på andre elementer.



Inverse elementer

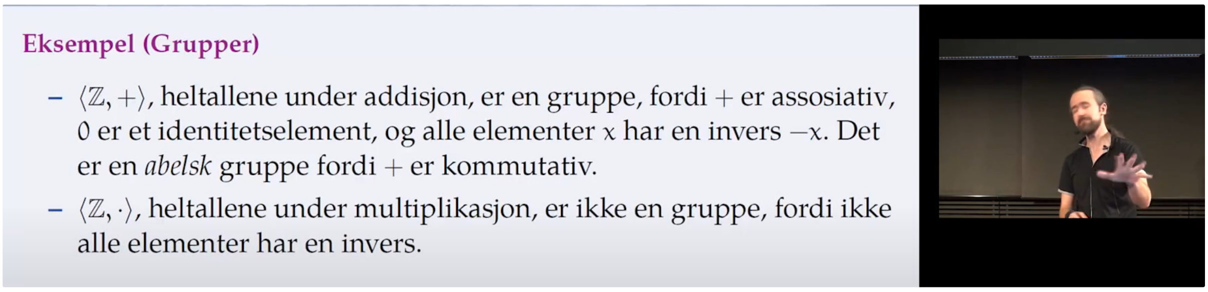
- La en binær operasjon $\circledast$ på en mengde S være gitt.
- Anta at e er et identitetelememt for $\circledast$.

- Hvis $a \circledast a^{-1} = a^{-1} \circledast a = e$, sier vi at a og a^{-1} er inverse elementer, og ta de er inversene til hverandre.



Gruppe

- La en binær operasjon $\bullet$ på en mengde G være gitt.
- Da er $\langle G, \bullet \rangle$ en gruppe hvis følgende betingelser kalt gruppeaksiomene, er oppfylt.
    - Operasjonen $\bullet$ er assiosiativ.
    - Det finnes et identiteselement for $\bullet$.
    - Alle elementer har en invers.
- Hvis den i tillegg har at $\bullet$ er kommutativ, kalles gruppen abelsk.

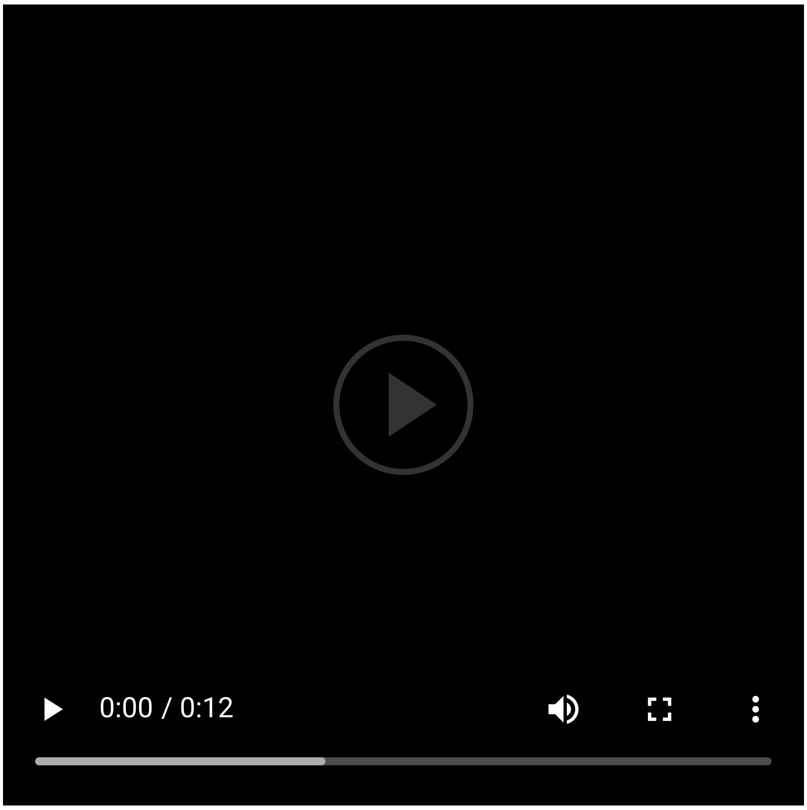


Kommentarer

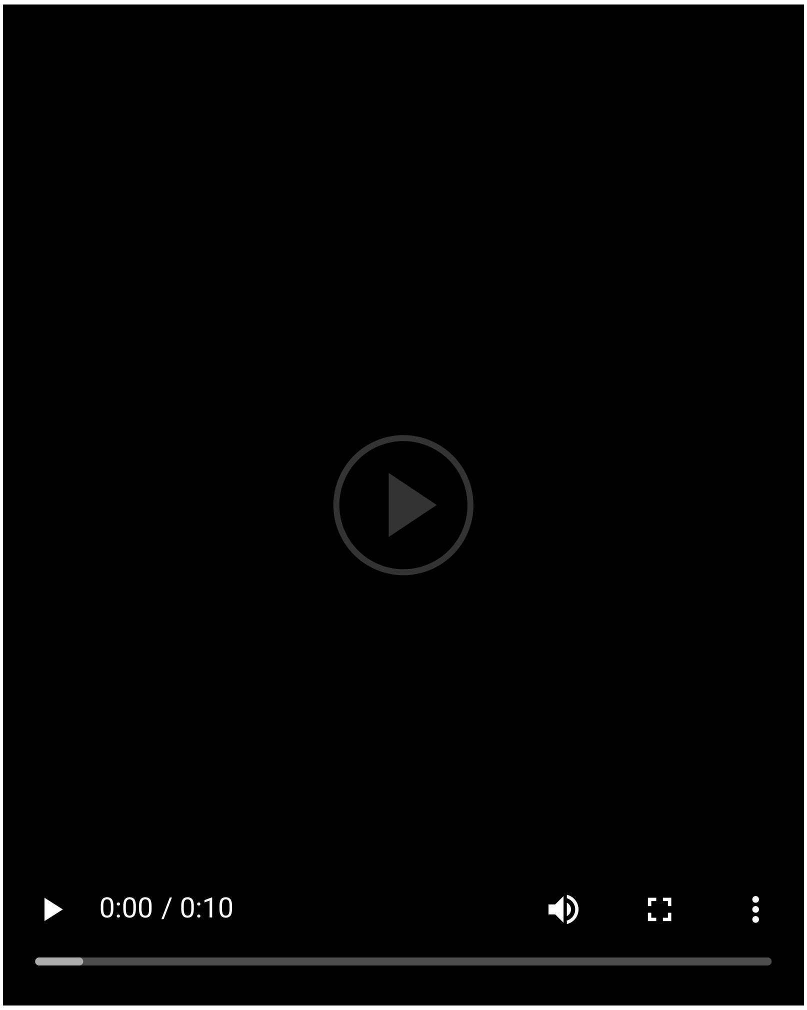
Notatene er for det meste ferdig skrevet, men skal bare finpusse på det,

damn kunne ha gått for macern nå'as.

Burger King Fan:👑👑👑



McDonald Enjoyer: 🤡🤡🤡


0:00 / 0:10