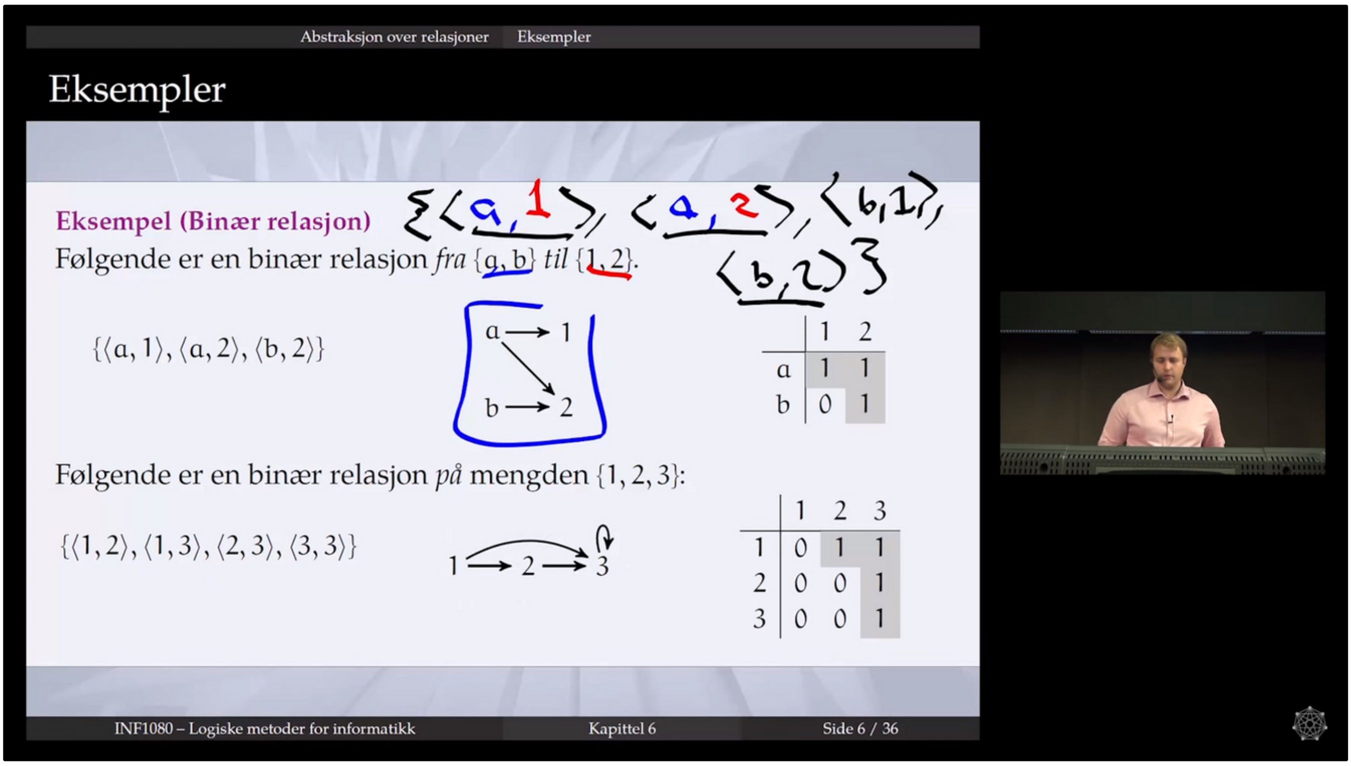
Kapittel 6: Relasjoner

Nettkurs

Boka

Definisjon

- En **binær relasjon** (*binary relation*) *fra* mengden S *til* mengden T er en delmengde av $S \times T$.
- En **binær relasjon** på mengden S er en delmengde av $S^2 = S \times S$.
- Mer generelt, en n-**ær relasjon** (n-*ary relation*) er en delmengde av $A_1 \times ... \times A_n$.

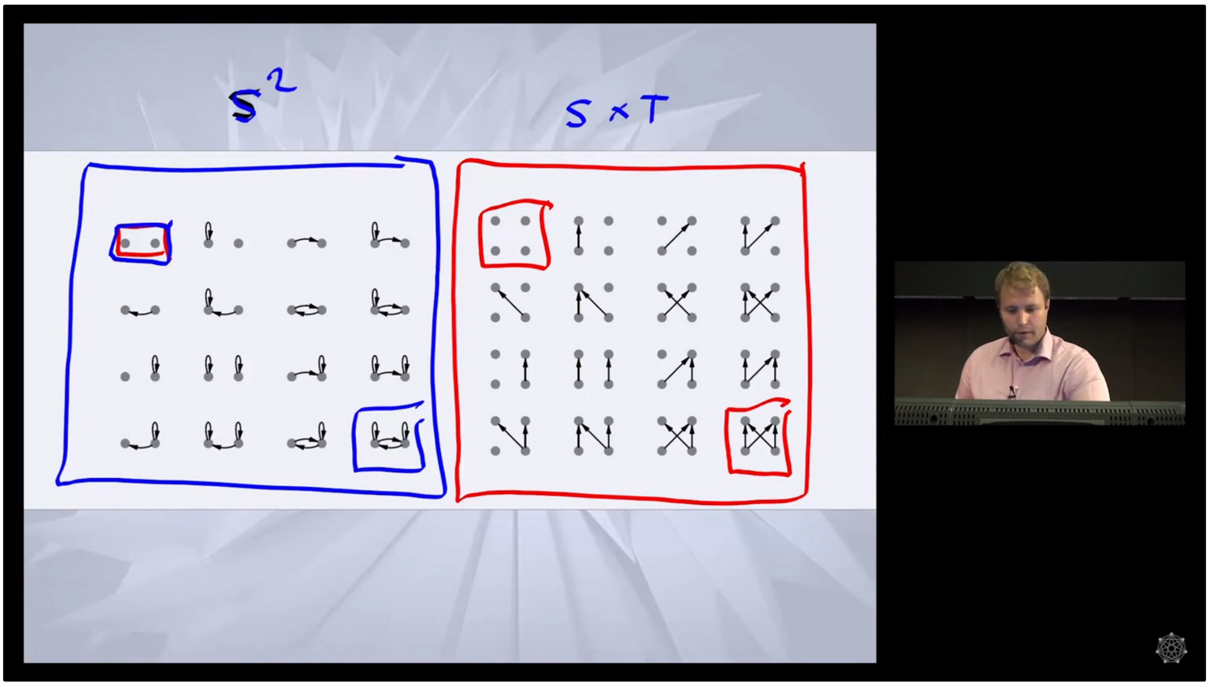


Noen spesielle relasjoner

- **Identitetsrelasjonen** (*identity relation*) på S, eller **likhetsrelasjon**, som relaterer alle elementer til seg selv:
  $\{\langle x, x\rangle \mid x \in S\}$.
  - Her er identitetsrelasjonen på mengden $\{1, 2, 3\}$:
    $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
  - Må alltid være på **en** mengde

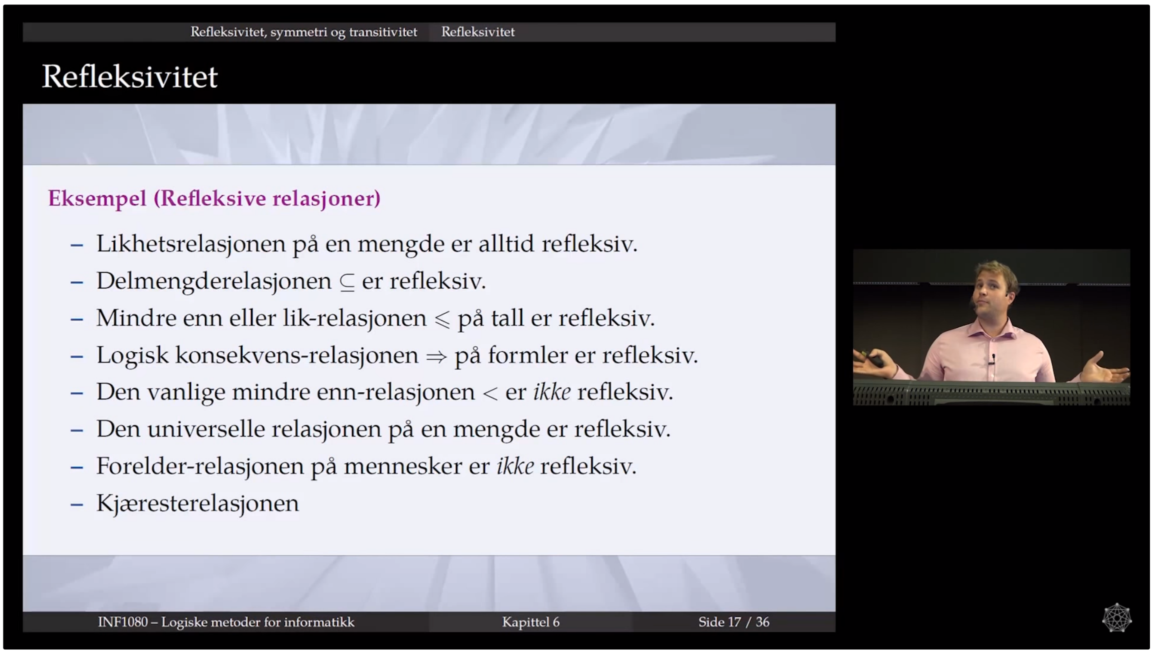
- Den **tomme relasjonen** (*empty relation*) fra S til T, som ikke relaterer noe elementer til hverandre: $\varnothing$.
    - Den tomme relasjonen på mengden $\{1, 2, 3\}$: $\varnothing$
- Den **universelle relasjonen** (*universal relation*) fra S til T, som relaterer alle elementer i S til alle elementer i T: $S \times T$.
    - Den universelle relasjonen på mengden $\{1, 2, 3\}$: $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Universet av relasjoner



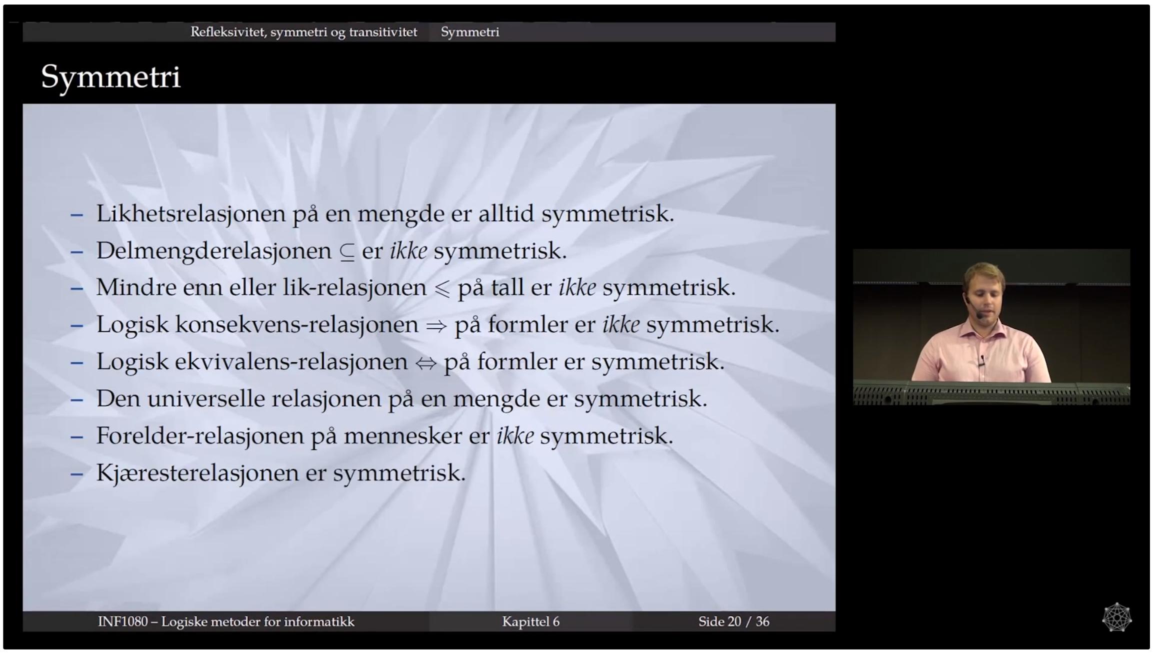
Refleksivitet

- En binær relasjon R på mengden S er **refleksiv** (*reflexive*) hvis det for alle x i S er slik at $\langle x, x \rangle \in R$.
    - La S være mengden $\{1, 2, 3\}$. Da skal en refleksiv relasjon på den mengden inneholde $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$.
    - $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en refleksiv relasjon på S.
    - $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ er ikke en refleksiv relasjon på S.
    - Eksempler på refleksive relasjoner:



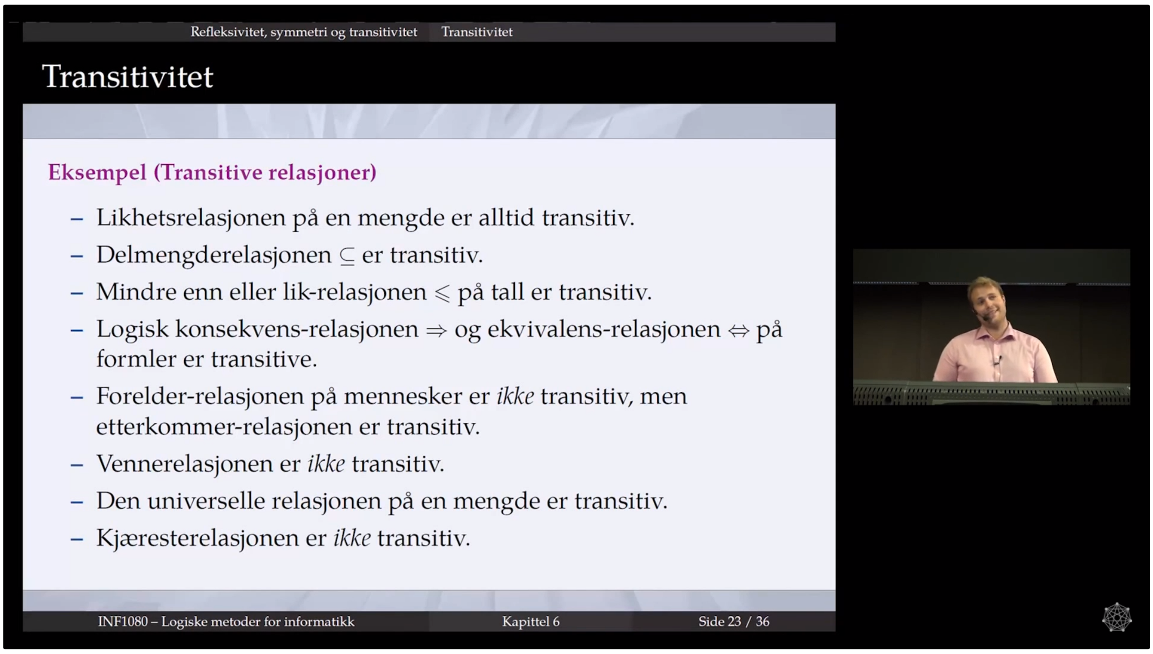
Symmetri

- En binær relasjon R på mengden S er **symmetrisk** (*symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$, så $\langle y, x\rangle \in R$.
  - La S være mengden $\{a, b, c\}$.
  - Da er $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$ en symmetrisk relasjon på S.
  - $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$ er ikke en symmetrisk relasjon på S.



Transitivitet

- En binær relasjon R på mengden S er **transitiv** (*transitive*) hvis det for alle x, y, z er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$ og $\langle y, z\rangle \in R$, så $\langle x, z\rangle \in R$.
    - La S være mengden $\{1, 2, 3\}$.
    - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ er transitiv relasjon på S.
    - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ er ikke transitiv.
    - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ er ikke transitiv heller, fordi den mangler $\langle 1, 1\rangle$ og $\langle 2, 2\rangle$. Så hvis vi går fra 1 til 2 og tilbake, da burde vi ha den tredje steg fra 1 til 1.
    - Steg kan gå fremover og bak **bare** mellom to elementer i mengden, ikke mer. Hvis det er mer enn to, da er det alltid **en** direksjon.
    - Også, når du ser på en mengde, må du telle **alle** instanser av to-steg hopp, og hvis alle er transitive, **da og bare da** er hele mengden transitiv.



Ekvivalens

- En binær relasjon på mengden S er en **ekvivalensrelasjon** (*equivalence relation*) hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
    - La S være mengden $\{1, 2, 3\}$.
    - Da er $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ en ekvivalensrelasjon på S.

Anti-symmetri

- En binær relasjon R på mengden S er **anti-symmetrisk** (*anti-symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$ og $\langle y, x\rangle \in R$, så $x = y$.

- Anti-symmetriske relasjoner er de hvor det ikke finnes to forskjellige elementer som er relatert til hverandre.
  - La S være mengden $\{1, 2, 3\}$.
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ er en anti-symmetrisk relasjon på S.
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ er ikke anti-symmetrisk, fordi $1 \neq 2$.

Irrefleksivitet

- En binær relasjon R på mengden S er **irrefleksiv** (*irreflexive*) hvis det ikke er noe $x \in S$ slik at $\langle x, x\rangle \in R$.
- Irrefleksive relasjoner er de hvor ingenting er relatert til seg selv.
  - La S være mengden $\{1, 2, 3\}$.
  - $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ er en irrefleksiv relasjon på S.
  - $\{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er ikke irrefleksiv pga $\langle 3, 3\rangle$.

Partielle ordninger

- En binær relasjon på mengden S er en **partiell ordning** (*partial order*) hvis den er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.
- Partielle ordninger er relasjoner med "retning".

Totale ordninger

- En partiell ordning R på en mengde S kalles en **total ordning** (*total order*) eller en **lineær ordning** (*linear order*) hvis det for alle x og y i S er slik at xRy og yRx.
- Totale ordninger er relasjoner som ordner alle elementene i en mengde etter hverandre.
- Relasjonen $\leqslant$ på reelle tall er en total ordning.
- Delmengderelasjonen trenger ikke å være en total ordning, fordi det er mulig å ha to mengder A og B uten at hverken $A \subseteq B$ eller $B \subseteq A$.