Prøveeksamen 2016 (med løsningsforslag)

1 Grunnleggende mengdelære

La $A = \{0, \{0\}\}$ og $B = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$. Er følgende påstander sanne eller usanne?

1 $\{\{0\}\} \in A$ 2 $0 \subseteq B$ 3 $A \in B$ 4 $A \subseteq B$

1 Usann 2 Usann 3 Sann 4 Sann

2 Mengdelære: Utregninger

La $A = \{0, \{0\}\}$ og $B = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$. Regn ut følgende:

1 $A \setminus B$ 2 $A \cap B$ 3 $A \cup B$ 4 $\mathcal{P}(A)$

1 $\emptyset$

2 $\{0, \{0\}\}$

3 $\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$

4 $\{\emptyset, \{0\}, \{\{0\}\}, \{0, \{0\}\}\}$

3 Mengdelære: Kardinalitet

La $A = \{0, \{0\}\}$ og $B = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}$. Hva er kardinaliteten til $(B \times A) \times B$?

18

4 Anti-symmetri

Er $\subseteq$ en anti-symmetrisk relasjon? Begrunn svaret ditt.

Ja, for hvis $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$, så vil $A = B$. Dette er definisjonen av hva det vil si at en relasjon er anti-symmetrisk.

5 Partiell ordning

Forklar kort hva en partiell ordning er.

En binær relasjon en partiell ordning hvis den er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.

6 Partiell ordning

Finn to partielle ordninger R og S på mengden $\{1, 2, 3\}$, slik at $R \cup S$ *ikke* er en partiell ordning.

La $A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ og $B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$. Dette er begge partielle ordninger, men $A \cup B$ mangler $\langle 1, 3\rangle$ for å være transitiv og er derfor ikke en partiell ordning.

7 Funksjoner: Egenskaper

La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være gitt ved $f(x) = x + 1$. Er f injektiv, surjektiv, bijektiv eller ingen av delene?

Injektiv

8 Funksjoner: Injektiv og surjektiv

La $g : A \to A$ og $h : B \to C$ være funksjoner slik at $g(x) = 1 - x$, og $h(x) = x$, og hvor $A \subseteq \mathbb{N}$, $B \subseteq \mathbb{N}$ og $C \subseteq \mathbb{N}$.

1 Velg A slik at g er injektiv.

2 Velg B og C slik at h ikke er surjektiv.

1 $A = \{0, 1\}$

2 $B = \{0\}$, $C = \{0, 1\}$ eller $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2\}$

9 Utsagnslogikk: Sannhetsverditabeller

Sett opp sannhetsverditabellen for $\neg P$.

P	$\neg P$
1	**0**
0	**1**

10 Utsagnslogikk: Sannhetsverditabeller

Sett opp sannhetsverditabellen for $(P \to Q) \land (P \to \neg Q)$.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(P$	$\to$	$\neg Q)$
1	**1**	1	**1**	1	**0**	1	**0**	0
1	**0**	1	**0**	0	**0**	1	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**1**	0	**1**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	1

11 Utsagnslogikk: Logisk ekvivalens

La følgende formler være gitt:

$$F = \neg P$$

$$G = (P \to Q) \land (P \to \neg Q)$$

Er F og G ekvivalente formler? Begrunn svaret ved å henvise til sannhetsverditabellene.

Ja, de er ekvivalente. Det er fordi F er sann hvis og bare hvis G er sann, det vil si at de alltid har samme sannhetsverdier. Det kommer frem i sannhetsverditabellene ved at kolonnene er like.

12 Utsagnslogikk: Sant eller usant

La følgende formler være gitt:

$$F = \neg P$$

$$G = (P \to Q) \land (P \to \neg Q)$$

Her kommer det noen påstander som du må ta stilling til. For hver påstand, svar *sann* eller *usann*. Du trenger ikke å begrunne svaret ditt.

1 F er kontradiktorisk.

2 G er kontradiktorisk.

3 F er gyldig.

4 G er gyldig.

1 Usann

2 Usann

3 Usann

4 Usann

13 Utsagnslogikk: Sannhetsverdier

1 Sett opp sannhetsverditabellen for $\neg P \to Q$.

P	Q	¬	P	→	Q
1	**1**	**0**	1	**1**	1
1	**0**	**0**	1	**1**	0
0	**1**	**1**	0	**1**	1
0	**0**	**1**	0	**0**	0

For hver av følgende formler, skriv hvilke av de fire egenskapene *gyldig*, *kontradiktorisk*, *oppfyllbar* og *falsifiserbar* formelen har. Du trenger ikke å begrunne svaret.

2 $(P \to Q) \to P$

3 $P \to (Q \to P)$

2 Oppfyllbar og falsifiserbar.

3 Oppfyllbar og gyldig.

14 Utsagnslogikk: Transitivitet og ekvivalens

Vis at $\Rightarrow$ er en transitiv relasjon.

For å vise at $\Rightarrow$ er transitiv, må vi vise at hvis $F \Rightarrow G$ og $G \Rightarrow H$, så $F \Rightarrow H$. Anta derfor (1) at $F \Rightarrow G$ og (2) at $G \Rightarrow H$. For å vise at $F \Rightarrow H$, anta at F er sann. Da følger det fra (1) at G er sann, og da følger det fra (2) at H er sann.

15 Utsagnslogikk: Anti-symmetri og ekvivalens

Vis at $\Rightarrow$ ikke er en anti-symmetrisk relasjon.

La $F = P$ og $G = \neg\neg P$. Da vil $F \Rightarrow G$ og $G \Rightarrow F$, men $F \neq G$.

16 Førsteordens logikk: Representasjon

La Lxy representere «x *liker* y». Finn førsteordens formler som representerer følgende utsagn:

(1) «Alle liker seg selv.»

$\forall x Lxx$

(2) «Det finnes en som liker alle.»

$\exists x \forall y Lxy$

(3) «Alle liker noen som liker seg selv.»

$\forall x \exists y (Lxy \land Lyy)$

17 Førsteordens logikk: Gyldig eller falsifiserbar

La F være formelen $Pa \land Pb \to \forall x Px$.

Avgjør om formelen F er gyldig og/eller falsifiserbar. Hvis du mener at den er gyldig, gi et bevis for hvorfor. Hvis du mener at den er falsifiserbar, spesifiser en førsteordens modell som gjør formelen usann.

Formelen er falsifiserbar. En førsteordens modell som gjør formelen usann er for eksempel følgende modell $\mathcal{M}$: La $\mathcal{M}$ ha mengden $\{0, 1\}$ som domene, og la $a^{\mathcal{M}} = 0$ og $b^{\mathcal{M}} = 0$, samt $P^{\mathcal{M}} = \{0\}$. Da vil $\mathcal{M}$ gjøre $Pa \land Pb$ sann, men $\forall x Px$ usann, fordi $P\bar{1}$ er usann.

18 Førsteordens logikk: Logiske konsekvenser

Her er noen førsteordens formler. Sett $\Rightarrow$-piler som angir hvilke formler som er logiske konsekvenser av hvilke formler. For eksempel, sett en pil fra F til G hvis G er en logisk konsekvens av F. Det er ikke nødvendig å sette en pil fra en formel til seg selv.

$$\begin{array}{cc} \forall x \forall y Rxy & \forall x \exists y Rxy \\ \\ \exists y \forall x Rxy & \exists x \exists y Rxy \end{array}$$

Her er formlene med piler.

$$\begin{tikzcd} \forall x \forall y Rxy \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \forall x \exists y Rxy \arrow[d, Rightarrow] \\ \exists y \forall x Rxy \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \exists x \exists y Rxy \end{tikzcd}$$

- Formelen $\forall x \forall y Rxy$ har alle de andre formlene som logisk konsekvens; $\mathcal{M} \models \forall x \forall y Rxy$ betyr at $\langle x, y \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ for alle $x, y \in |\mathcal{M}|$, eller med andre ord at $R^{\mathcal{M}}$ er lik $|\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}|$. Enhver modell som gjør denne formelen sann må også gjør de tre andre formlene sanne.
- $\exists y \forall x Rxy \Rightarrow \forall x \exists y Rxy$: Anta at $\mathcal{M} \models \exists y \forall x Rxy$. Da finnes det et element $a \in |\mathcal{M}|$ slik at for alle $x \in |\mathcal{M}|$, så $\mathcal{M} \models R\bar{x}\bar{a}$. For å vise at $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Rxy$, velg et vilkårlig element $x \in |\mathcal{M}|$. Ved antakelsen følger det at $\mathcal{M} \models R\bar{x}\bar{a}$, og dermed at $\mathcal{M} \models \exists y R\bar{x}y$. Fordi x var vilkårlig valgt har vi at $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Rxy$.
- Formelen $\exists x \exists y Rxy$ er en logisk konsekvens av alle de andre formlene; $\mathcal{M} \models \exists x \exists y Rxy$ betyr at det finnes $x, y \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle x, y \rangle \in R^{\mathcal{M}}$, og det er tilfellet for enhver modell som gjør en av de andre formlene sanne.

19 Førsteordens logikk: Modeller

Spesifiser en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{1,2,3\}$ som oppfyller følgende formler, men som er slik at R *ikke* tolkes som en *refleksiv* relasjon. Du trenger ikke å begrunne at modellen oppfyller formlene.

$$\forall x \exists y (Rxy) \qquad \forall x \forall y (Rxy \to Ryy)$$

La $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.

20 Induktivt definerte mengder

Anta at en bitstreng er en streng over alfabetet $\{0,1\}$. Gi en induktiv definisjon av mengden av alle bitstrenger som slutter med `01` eller `10`.

Vi kaller mengden M. M er den minste mengden slik at:

$01 \in M$, $10 \in M$, og

hvis $s \in M$, så $0s \in M$ og $1s \in M$.

21 Rekursive funksjoner

Anta at en bitstreng er en streng over alfabetet $\{0,1\}$. Gi en rekursiv funksjon r på mengden av alle bitstrenger som erstatter alle forekomster av `1` med `0`. For eksempel vil $r(101) = 000$.

$r(\Lambda) = \Lambda$

$r(xs) = 0r(s)$

22 Grafteori: Komplett graf

Forklar hva en *komplett* graf er.

En graf er komplett hvis den er enkel og hver node er nabo med enhver annen node. En graf er enkel hvis den hverken har løkker eller parallelle kanter.

23 Grafteori: Komplementet til en graf

Forklar hva *komplementet* til en graf er.

Hvis G er en graf, er komplementet til G grafen som har de samme nodene som G, men hvor to noder er naboer hvis og bare hvis nodene ikke er naboer i G.

24 Grafteori: Isomorfi og komplement

Bevis at hvis G og H er isomorfe grafer, så er også $\overline{G}$ og $\overline{H}$ isomorfe.

Anta at G og H er isomorfe grafer. Da finnes det per definisjon en bijektiv funksjon f fra nodene i G til nodene i H som er slik at nodene u og v er naboer i G hvis og bare hvis nodene $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i H. Denne funksjonen er også en bijektiv funksjon fra nodene i $\overline{G}$ til nodene i $\overline{H}$, fordi disse grafene har de samme nodene som G og H. I tillegg er det slik at nodene u og v er naboer i $\overline{G}$ hvis og bare hvis de ikke er naboer i G. Da følger det at nodene u og v er naboer i $\overline{G}$ hvis og bare hvis nodene $f(u)$ og $f(v)$ er naboer i $\overline{H}$. Vi kan også skrive dette slik:

$$
\begin{aligned}
& \text{nodene } u \text{ og } v \text{ er naboer i } \overline{G} & \\
\Leftrightarrow\ & \text{nodene } u \text{ og } v \text{ er ikke naboer i } G & \text{(ved definisjonen av komplement} \\
\Leftrightarrow\ & \text{nodene } f(u) \text{ og } f(v) \text{ er ikke naboer i } H & \text{(fordi } f \text{ er en isomorfi)} \\
\Leftrightarrow\ & \text{nodene } f(u) \text{ og } f(v) \text{ er naboer i } \overline{H} & \text{(ved definisjonen av komplement)}
\end{aligned}
$$

25 Kombinatorikk: Permutasjoner

Angi to forskjellige permutasjoner av mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1234567 og 7654321

26 Kombinatorikk: Mer permutasjoner

Hvor mange permutasjoner av mengden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ finnes det? Du trenger ikke å begrunne svaret ditt.

Det finnes $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ permutasjoner av mengden.

27 Kombinatorikk: Binomialkoeffisient

Regn ut $\binom{5}{2}$ og $\binom{1000}{0}$.

$\binom{5}{2} = 10$ og $\binom{1000}{0} = 1$

28 Kombinatorikk og delmengder

Anta at M er en mengde med 10 elementer. Hvor mange delmenger av M har minst to elementer?

Det er $2^{10} = 1024$ delmengder totalt. Det er $\binom{10}{1} = 10$ delmengder med nøyaktig ett element og det er $\binom{10}{0} = 1$ delmengde med null elementer. Da får vi totalt $1024 - 10 - 1 = 1013$ delmengder med minst to elementer.