IN1150 – Logiske metoder

Prøveeksamen 2018 (med løsningsforslag)

Dette er et utkast til løsningsforslag til prøveeksamen i IN1150, og feil kan forekomme. Hvis du finner noen feil, si ifra til Roger på `rantonse@ifi.uio.no`.

1 Små oppgaver [70 poeng]

1.1 Grunnleggende mengdelære [3 poeng]

Anta at $A = \{\{1, \{1\}\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

- Er det slik at $\{1\} \in A$? (Ja / **Nei**)
- Er det slik at $\{2\} \in A$? (**Ja** / Nei)
- Er det slik at $\{1\} \subseteq A$? (Ja / **Nei**)

1.2 Utsagnslogikk [3 poeng]

Anta at S står for «han er sulten» og at T står for utsagnet «han er tålmodig».

- Formelen $(S \to \neg T)$ representerer utsagnet «han er ikke tålmodig hvis han er sulten». (**Sant** / Usant)
- Formelen $(\neg S \lor \neg T)$ representerer utsagnet «han er hverken sulten eller tålmodig». (Sant / **Usant**)
- Formelen $(T \to \neg S)$ representerer utsagnet «han er tålmodig bare hvis han ikke er sulten». (**Sant** / Usant)

1.3 Sannhetsverdier og valuasjoner [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $(\neg P \to \neg P)$ er sann for alle valuasjoner. (**Sant** / Usant)
- $(P \lor \neg P)$ kan gjøres usann. (Sant / **Usant**)
- Hvis $(P \to Q)$ er sann, kan P være sann. (**Sant** / Usant)

1.4 Utsagnslogiske begreper [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes en utsagnslogisk formel som er både gyldig og kontradiktorisk. (Sant / **Usant**)
- Alle gyldige formler er ekvivalente med hverandre. (**Sant** / Usant)
- Formelen $(Q \to P)$ er en logisk konsekvens av $\{(\neg R \to \neg Q), (\neg R \lor P)\}$. (**Sant** / Usant)

1.5 Bevis og moteksempler [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- En formel som ikke er oppfyllbar, må være kontradiktorisk. (**Sant** / Usant)

- For å vise at «hvis vi har $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$, så har vi også $A \subseteq C$» er det tilstrekkelig å finne tre mengder slik at $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ og $A \subseteq C$. (Sant / **Usant**)
- Et moteksempel til påstanden «F er en falsifiserbar formel» er en valuasjon som gjør F sann. (Sant / **Usant**)

1.6 Relasjoner [3 poeng]

La $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ være en relasjon på $A = \{a, b, c, d\}$.

- Er R refleksiv? (Ja / **Nei**)
- Er R symmetrisk? (Ja / **Nei**)
- Er R transitiv? (Ja / **Nei**)

1.7 Funksjoner [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes funksjoner som også er transitive relasjoner. (**Sant** / Usant)
- For enhver refleksiv relasjon R finnes det en funksjon f slik at $f \subseteq R$. (**Sant** / Usant)
- Det finnes funksjoner som er hverken injektive eller surjektive. (**Sant** / Usant)

1.8 Litt mer mengdelære [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- For alle mengder A er det slik at potensmengden til A har større kardinalitet enn A. (**Sant** / Usant)
- Kardinaliteten til unionen av A og B er lik kardinaliteten til A pluss kardinaliteten til B. (Sant / **Usant**)
- Mengden av heltall, $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er tellbar. (**Sant** / Usant)

1.9 Induktivt definerte mengder [3 poeng]

La M være den minste mengden slik at $0 \in M$, og hvis $x \in M$, så er $2x \in M$ og $2x + 1 \in M$.

- Det er slik at $4 \in M$. (**Sant** / Usant)
- M inneholder alle positive oddetall. (**Sant** / Usant)
- Det finnes uendelig mange naturlige tall som ikke er i M. (Sant / **Usant**)

1.10 Rekursive funksjoner [3 poeng]

La f være en funksjon på naturlige tall definert rekursivt på følgende måte:

(1) $f(0) = 0$

(2) $f(n + 1) = 2 \cdot f(n) + 1$

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det er slik at $f(f(2)) = 7$. (**Sant** / Usant)
- Bildemengden til f inneholder alle positive oddetall. (Sant / **Usant**)
- Funksjonen f er identisk med funksjonen g som er slik at $g(n) = 2^n - 1$. (Her betyr 2^n «2 i n-te potens», det vil si 2 ganget med seg selv n ganger.) (**Sant** / Usant)

1.11 Strukturell induksjon [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Et bevis ved matematisk induksjon trenger ikke en induksjonshypotese. (Sant / **Usant**)
- Basissteget i et induksjonsbevis kan ikke være et motsigelsesbevis. (Sant / **Usant**)
- Bevis ved strukturell induksjon kan også fungere for endelige mengder. (**Sant** / Usant)

1.12 Førsteordens språk [4 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- $Px \land (\forall x Ry \to \exists y Rx)$ er en formel. (**Sant** / Usant)
- $\forall Px$ er en formel. (Sant / **Usant**)
- $\forall x(Qx \to (\exists y \to Rxy))$ er en formel. (Sant / **Usant**)
- $(Ax \lor \neg Ax \forall x)$ er en formel. (Sant / **Usant**)

1.13 Representasjon av kvantifiserte utsagn [3 poeng]

Anta at P er et relasjonssymbol slik at Px tolkes som «x er et primtall».

Anta at M er et relasjonssymbol slik at Mx tolkes som «x er et magisk tall».

Anta at R er et relasjonssymbol slik at Rxy tolkes som «tallet x er relatert til tallet y».

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $(\forall x Px \lor \forall y My)$ representerer utsagnet «ethvert tall er enten et primtall eller et magisk tall». (Sant / **Usant**)
- Formelen $\exists x(Mx \to Px)$ representerer utsagnet «det finnes et magisk tall som også er et primtall». (Sant / **Usant**)
- Formelen $\exists x(Mx \land \forall y(Rxy \to Py))$ representerer utsagnet «det finnes et magisk tall som bare er relatert til primtall». (**Sant** / Usant)

1.14 Tolkning i modeller [4 poeng]

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\{1, 2, 3\}$ slik at følgende holder.

$P^{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3\}$

$Q^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$

$R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det er slik at $M \models \forall x(\neg Qx \vee Px)$. (**Sant** / Usant)
- Det er slik at $M \models \forall x \exists y Rxy$. (Sant / **Usant**)
- Det er slik at $M \models \forall x(\neg Qx \vee \exists y Rxy)$. (**Sant** / Usant)
- Det er slik at $M \models \exists y \forall x Rxy$. (Sant / **Usant**)

1.15 Resonnering om modeller [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Formelen $(\forall x Px \vee \forall x Qx)$ er en logisk konsekvens av $\forall x(Px \vee Qx)$. (Sant / **Usant**)
- Det finnes en modell som gjør både $\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$ og $\exists x Qx$ sanne. (**Sant** / Usant)
- Enhver modell som gjør $\forall x \exists y Rxy$ sann, må også gjøre $\exists y \forall x Rxy$ sann. (Sant / **Usant**)

1.16 Ekvivalensrelasjoner [4 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1,2,3\}$. (Sant / **Usant**)
- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1,2\}$. (**Sant** / Usant)
- $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1,2,3\}$. (Sant / **Usant**)
- $\{\langle 1,1\rangle, \langle a,a\rangle, \langle Z,Z\rangle, \langle 1,a\rangle, \langle a,1\rangle, \langle 1,Z\rangle, \langle Z,1\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1,a,Z\}$. (Sant / **Usant**)

1.17 Kombinatorikk [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Det finnes nøyaktig 12 delmengder av mengden $\{1,2,3,4\}$. (Sant / **Usant**)
- Det finnes nøyaktig 8 funksjoner fra $\{1,2,3\}$ til $\{1,2\}$. (**Sant** / Usant)
- Det finnes nøyaktig 24 bijektive funksjoner fra $\{1,2,3,4\}$ til $\{1,2,3,4\}$. (**Sant** / Usant)

1.18 Litt mer kombinatorikk [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

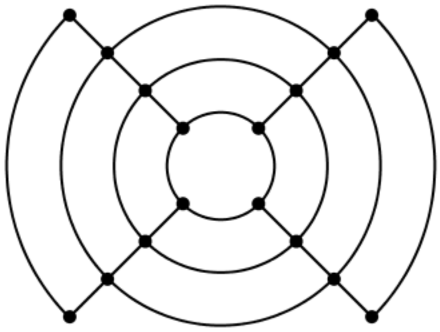
- Antall permutasjoner av en mengde med n elementer er $n!$. (**Sant** / Usant)
- Antall funksjoner fra en mengde med k elementer til en mengde med n elementer er n^k. (**Sant** / Usant)
- Antall injektive funksjoner fra en mengde med n elementer til en mengde med n elementer er $n!$. (**Sant** / Usant)

1.19 Litt abstrakt algebra [3 poeng]

Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Funksjonen $f(x) = x - 1$ er en operasjon på de naturlige tallene. (Sant / **Usant**)
- Operasjonen $\times$ (multiplikasjon) på de rasjonale tallene er en idempotent operasjon. (Sant / **Usant**)
- Den algebraiske strukturen $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, hvor $\mathbb{Q}$ står for de rasjonale tallene, er en gruppe. (**Sant** / Usant)

1.20 Vandringer i grafer [3 poeng]



Se på grafen over. Avgjør om følgende påstander er sanne eller usanne.

- Grafen har en eulervei, det vil si en vei som inneholder hver kant fra grafen nøyaktig én gang. (Sant / **Usant**)
- Grafen har en hamiltonsykel, det vil si en sykel som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang. (**Sant** / Usant)
- Grafen har flere enn fem sykler. (**Sant** / Usant)

1.21 Regulære språk [4 poeng]

La L være språket definert av det regulære uttrykket `(0|1)(00|1)(000|1)*`.

- Det er slik at `001` $\in L$. (Sant / **Usant**)
- Det er slik at `0101` $\in L$. (Sant / **Usant**)
- Det er slik at $\{0^{3n} \mid n \geqslant 1\} \subseteq L$. (**Sant** / Usant)
- Det er slik at $\{1^{n} \mid n \geqslant 1\} \subseteq L$. (Sant / **Usant**)

1.22 Naturlig deduksjon 1 [1 poeng]

Avgjør om følgende påstand er sann eller usann.

- Et bevis i naturlig deduksjon er en utledning hvor alle antakelser er lukkede. (**Sant** / Usant)

1.23 Naturlig deduksjon 2 [1 poeng]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \qquad [\neg P]^2}{\perp}\,{\to}\mathrm{E}}{Q}\,\perp}{P \to Q}\,{\to}\mathrm{I}_1 \qquad [(P \to Q) \to P]^3}{P}\,{\to}\mathrm{E} \qquad [\neg P]^2}{\perp}\,{\to}\mathrm{E}}{\boxed{F}}\,\mathrm{RAA}_2}{((P \to Q) \to P) \to P}\,{\to}\mathrm{I}_3$$

Hva er formelen F i denne utledningen?

- $(P \to Q) \to P$
- P (**riktig**)

1.24 Naturlig deduksjon 3 [1 poeng]

Avgjør om følgende påstand er sann eller usann.

«Naturlig deduksjon er en sunn og komplett kalkyle» betyr nøyaktig at mengden av bevisbare formler er lik mengden av gyldige formler. (**Sant** / Usant)

2 Større oppgaver [70 poeng]

2.1 Kvotientmengder [5 poeng]

La S være mengden $S = \{1, 2, 3\}$, og la R være relasjonen $R = \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle$.

Hva er kvotientmengden S/R?

Kvotientmengden S/R er mengden av alle ekvivalensklassene under R, det vil si $\{[1], [2], [3]\}$, som er lik $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$.

2.2 Partiell ordning [5 poeng]

Forklar kort hva en partiell ordning er.

En partiell ordning er en binær relasjon som er transitiv, refleksiv og anti-symmetrisk.

2.3 Førsteordens modeller [7 poeng]

Spesifiser en førsteordens modell $\mathcal{M}$ for signaturen $\langle ; ; R, Q\rangle$ slik at følgende egenskaper holder:

(1) Både R og Q har aritet 2.

(2) Domenet til modellen er $\{1, 2, 3\}$.

(3) Formelen $\forall x \forall y(Rxy \lor Qxy)$ er sann i $\mathcal{M}$.

(4) R tolkes som en irrefleksiv og anti-symmetrisk relasjon.

(5) Q tolkes som en symmetrisk relasjon.

Her er én løsning:

La R tolkes slik: $\emptyset$

La Q tolkes slik: $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

2.4 Induktivt definerte mengder [7 poeng]

Gi en induktiv definisjon av mengden av oddetall (både positive og negative).

La M være den minste mengden slik at $1 \in M$ og hvis $x \in M$, så $x - 2 \in M$ og $x + 2 \in M$.

2.5 Rekursiv funksjon på strenger [7 poeng]

La $A = \{0, 1, x\}$. Definer en rekursiv funksjon d på A^* som *dobler* antallet 0-er i en streng. For eksempel vil $d(001) = 00001$ og $d(01x01) = 001x001$.

La d være definert rekursivt på følgende måte:

- $d(e) = e$, hvor e står for den tomme strengen.
- $d(s0) = d(s)00$, hvor s er en streng.
- $d(s1) = d(s)1$, hvor s er en streng.
- $d(sx) = d(s)x$, hvor s er en streng.

2.6 Bevis ved matematisk induksjon [12 poeng]

Bevis ved matematisk induksjon at for alle naturlige tall n større enn eller lik 2, er det slik at $n!$ er et partall.

Påstanden vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall $n \geqslant 2$ er: «$n!$ er et partall».

Basissteget er å bevise at påstanden holder for tallet 2. Siden $2! = 2 \cdot 1 = 2$ er et partall, får vi at påstanden holder.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et tall n, det vil si at $n!$ er et partall. Dette er induksjonshypotesen (IH). Fra denne må vi vise at påstanden også holder for $n + 1$, det vil si at $(n + 1)!$ er et partall. Per definisjon av fakultetsfunksjonen, er $(n + 1)!$ lik $(n + 1) \cdot (n!)$. Ved induksjonshypotesen må $n!$ være et partall. Når vi multipliserer et partall med et hvilket som helst tall, får vi et partall, og derfor må også $(n + 1)!$ være et partall.

Ved matematisk induksjon følger det at påstanden holder for alle naturlige tall større enn eller lik 2.

2.7 Mer om rekursive funksjoner [7 poeng]

Vi lar fortsatt $A = \{0, 1, x\}$.

Du skal nå definere funksjonen f på A^* som er slik at den dobler antall 0-er i *nøyaktig den delen av strengen som følger etter den første forekomsten av* x.

For eksempel har vi:

$f(x10) = x100$

$f(101x) = 101x$

$f(001x0101) = 001x001001$

$f(01x01x01) = 01x001x001$

Definerer f rekursivt. (Hint: Bruk funksjonen d som dobler antall 0-er i en streng.)

La f være definert rekursivt på følgende måte:

- $f(e) = e$, hvor e står for den tomme strengen
- $f(0s) = 0f(s)$
- $f(1s) = 1f(s)$
- $f(xs) = xd(s)$

2.8 Definisjon og utregning [3 poeng]

La $*$ være funksjonen på endelige mengder av naturlige tall definert ved

$$X * Y = \{a \mid (a \in X \text{ eller } a \in Y), \text{ men } \textit{ikke } (a \in X \cap Y)\}$$

hvor X og Y er endelige mengder av naturlige tall.

For eksempel har vi følgende:

$\{1, 2, 3\} * \{2, 3, 4\} = \{1, 4\}$

$\{1, 2, 3\} * \{1, 2, 3\} = \emptyset$

$\{1, 2, 3\} * \{1, 3\} = \{2\}$

Regn ut $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} * \{1, 3, 5, 7\}$

$\{0, 2, 4, 6, 7\}$

2.9 Definisjon og assosiativitet [3 poeng]

Er dette en assosiativ operasjon?

Ja.

2.10 Definisjon og bevis 1 [7 poeng]

Bevis at $X * Y = Y * X$ for alle endelige mengder X og Y av naturlige tall.

La X og Y være endelige mengder med naturlige tall, og anta at a er et element i $X * Y$. Vi må vise at a da også er et element i $Y * X$. Den motsatte retningen er tilsvarende. Ved definisjonen får vi at a er et element enten i X eller Y, men ikke begge deler. Det vil si at a *ikke* er et element i $Y \cap X$. Hvis a er et element i X, får vi at $a \in Y * X$, og hvis a et element i Y, får vi at $a \in Y * X$.

Alternativ måte å skrive dette på:

$$\begin{aligned} X * Y &= \{a \mid (a \in X \text{ eller } a \in Y), \text{ men } \textit{ikke } (a \in X \cap Y)\} \\ &= \{a \mid (a \in Y \text{ eller } a \in X), \text{ men } \textit{ikke } (a \in X \cap Y)\} \\ &= \{a \mid (a \in Y \text{ eller } a \in X), \text{ men } \textit{ikke } (a \in Y \cap X)\} \\ &= Y * X \end{aligned}$$

2.11 Definisjon og bevis 2 [7 poeng]

Er det slik at $|X * Y| \leqslant |X| + |Y|$? Hvis ja, gi et bevis. Hvis nei, gi et moteksempel.

Ja, det er slik. Antall elementer i $X * Y$, $|X * Y|$, er lik antallet elementer i X pluss antall elementer i Y *minus* antall elementer i snittet, $X \cap Y$. Det er fordi et element er $X * Y$ nøyaktig når det er et element i X eller Y, men ikke i snittet. Vi kan skrive dette på følgende måte:

$$X * Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$

En øvre grense for antallet elementer i $X \cup Y$ er summen av antall elementer i X og antall elementer i Y. Antallet elementer i $X * Y$ er mindre enn eller lik antall elementer i $X \cup Y$, fordi elementene i $X \cap Y$ fjernes. Det betyr at en øvre grense for antallet elementer i $X * Y$ er $|X| + |Y|$, som betyr at $|X * Y| \leqslant |X| + |Y|$.