IN1150 – Logiske metoder

Eksamen våren 2020

Tid: *Fra fredag 22. mai 2020 kl. 14.30 til fredag 29. mai kl. 14.30*

Om eksamen:

– Denne eksamen består av fem hovedoppgaver som er verdt omtrent like mye.
– Eksamen vil bli vurdert som bestått eller ikke bestått.
– For å bestå eksamen må hver hovedoppgave være bestått.
– Det legges stor vekt på at besvarelsen er oversiktlig og at forklaringene er gode.
– Hele besvarelsen skal lastes opp og leveres som én enkelt PDF-fil i Inspera.
– Teksten skal være maskinskrevet, men figurer og illustrasjoner kan godt være skannet, eller laget på en annen måte, og være en del av besvarelsen.

Kommentarer:

– Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
– Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
– En viktig del av kurset er å kunne lese og bruke definisjoner, utforske hva som er sant og usant og argumentere for påstander. Derfor handler mange av oppgavene om dette.
– Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
– Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
– Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.
– Dersom du bruker LaTeX (det er ikke noe krav om det), har vi laget en enkel mal her.

Om sensur:

– Informasjon om eksamen og sensuren våren 2020
– Vurderingsbeskrivelse for bestått/ikke bestått i realfag
– Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset. Grunnen er at emnet undervises både vår og høst.

.

1 Førsteordens logikk og modeller

I denne oppgaven skal du finne førsteordens modeller. For hver deloppgave skal du definere en modell. Hvordan en modell defineres i én deloppgave har ingenting å si for de andre deloppgavene. Alle modellene skal ha domene $\{a, b, c, d\}$, og alle konstantsymboler, funksjonssymboler og relasjonsymboler som forekommer i hver oppgave skal tolkes.

Oppgave 1.1. Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c, d\}$ slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$$

og hvor $R^{\mathcal{M}}$ ikke er en symmetrisk relasjon.

Oppgave 1.2. Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c, d\}$ slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$$

og hvor $f^{\mathcal{M}}$ er en bijektiv funksjon og $S^{\mathcal{M}}$ er en asymmetrisk relasjon.

Oppgave 1.3. Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c, d\}$ slik at

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\models \forall x \exists y T(x, y), \\
\mathcal{M} &\models \neg \exists x \forall y T(x, y), \\
\mathcal{M} &\models \neg \exists y \forall x T(x, y),
\end{aligned}$$

og hvor $T^{\mathcal{M}}$ er en transitiv relasjon.

Oppgave 1.4. Finn en førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c, d\}$ slik at

$$\mathcal{M} \models R(\bar{a}, \bar{b}) \land R(\bar{b}, \bar{a}) \land \neg Q(\bar{d}), \tag{1}$$
$$\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \to Q(x)), \tag{2}$$
$$\mathcal{M} \models \forall x (R(x, x) \to P(x)), \tag{3}$$
$$\mathcal{M} \models \forall x \exists y R(x, y), \tag{4}$$

og hvor $R^{\mathcal{M}}$ er en transitiv relasjon. Legg merke til at konstantsymbolene er $\bar{a}$, $\bar{b}$ og $\bar{d}$ her, og ikke a, b og d.

Oppgave 1.5. Forklar hvorfor modellen du fant i forrige oppgave gjør at (1), (2), (3) og (4) holder.

Oppgave 1.6. Forklar hvorfor det ikke finnes noen førsteordens modell $\mathcal{M}$ med domene $\{a, b, c, d\}$ slik at

$$\mathcal{M} \models \forall x P(f(x)), \tag{1}$$
$$\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x), \tag{2}$$

og hvor $f^{\mathcal{M}}$ er en injektiv funksjon.

.

2 Mengder, partielle ordninger og grafer

Oppgave 2.1. La M være en mengde som er lukket under union, det vil si at hvis $A \in M$ og $B \in M$, så er $A \cup B \in M$. Bevis følgende påstand ved matematisk induksjon:

$$\text{Hvis } A_1, A_2, \ldots, A_n \in M, \text{ så } (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \in M, \text{ for alle naturlige tall } n \geqslant 2.$$

Oppgave 2.2. La $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}\}$ og la L være A^*, det vil si mengden av alle strenger over A. La $x \prec y$ bety at det finnes en streng $s \in L$ slik at $xs = y$. For eksempel vil $\mathtt{aaa} \prec \mathtt{aaabbb}$ (fordi vi kan velge $s = \mathtt{bbb}$), men $\mathtt{b} \not\prec \mathtt{aab}$ (fordi det ikke finnes noen s slik at $\mathtt{b}s = \mathtt{aab}$). Bevis at $\prec$ er en partiell ordning.

De neste oppgavene handler om en måte å lage nye grafer fra allerede eksisterende grafer på.

Definisjon.
Hvis $G = \langle V, E \rangle$ er en graf, la G_C være grafen $\langle V_C, E_C \rangle$ slik at nodene V_C er mengden av tupler

$$\{\langle x, y \rangle \mid x \in V, y \in V \text{ og } x \neq y\},$$

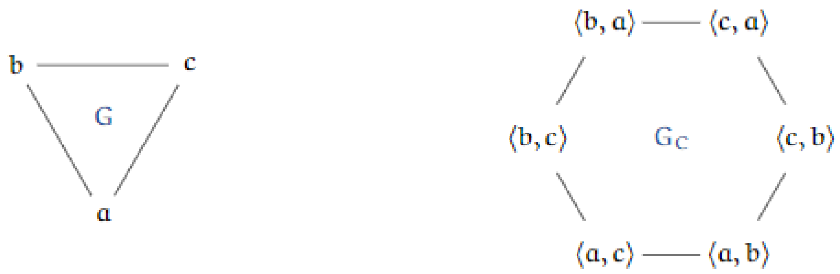
og to noder $\langle x, y \rangle$ og $\langle z, w \rangle$ i V_C er naboer i G_C hvis og bare hvis

$$x = z \text{ og } \{y, w\} \in E \quad \text{eller} \quad y = w \text{ og } \{x, z\} \in E.$$

Dette er en ganske abstrakt definisjon, så her er et eksempel: Hvis G er grafen med nodene $V = \{a, b, c\}$ og kantene $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, blir nodene i G_C lik mengden

$$\{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle\}.$$

Vi kan tegne grafene G og G_C på følgende måte:



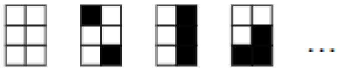
Oppgave 2.3. La G være grafen hvor $V = \{a, b\}$ og $E = \{\{a, b\}\}$. Spesifiser grafen G_C.

Oppgave 2.4. Anta at G er en graf med n noder. Finn en formel som uttrykker antall noder i grafen G_C. Gi en forklaring på hvorfor denne formelen gir antall noder i G_C.

Oppgave 2.5. La nå G være grafen med nodene $V = \{a, b, c\}$ og kantene $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Vis at dette er et *moteksempel* til påstanden som sier «for alle G, hvis G er sammenhengende, så er G_C sammenhengende».

3 Figurer og funksjoner

I denne oppgaven skal vi jobbe med figurer som ser ut som følger. Hver figur består av et rutenett med to kolonner og tre rader, hvor hver rute enten er hvit eller svart.

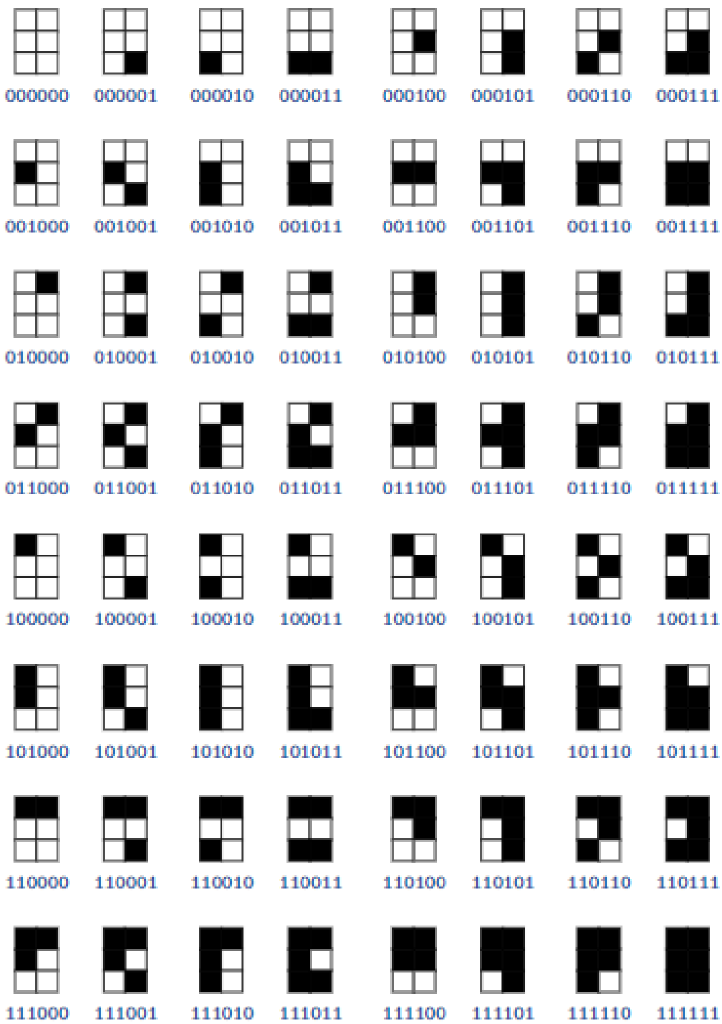


Vi tenker på en hvit rute som 0 og en svart rute som 1, og figurer kan dermed representeres som bitstrenger. De fire figurene over er henholdsvis 000000, 100001, 010101 og 000111.

Definisjon.
La M være mengden av figurer på formen 

, hvor a, b, c, d, e og f er elementer i $\{0, 1\}$. Vi kan referere til denne figuren ved å tegne rutenettet eller ved å skrive $abcdef$. Når vi tegner rutenettet bruker vi en hvit rute for 0 og en svart rute for 1.

Her er alle elementene i M. Du kan svare på alle de relevante deloppgavene ved å referere til bitstrengene.

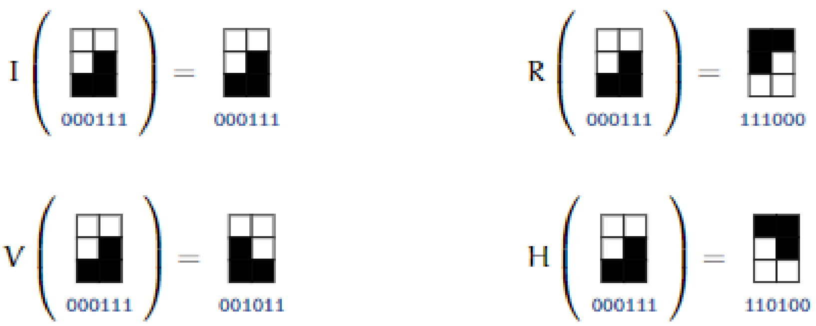


.

Definisjon.
La I, R, V og H være følgende funksjoner fra M til M.

$$I\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array} \qquad R\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline f & e \\ \hline d & c \\ \hline b & a \\ \hline\end{array} \qquad V\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline b & a \\ \hline d & c \\ \hline f & e \\ \hline\end{array} \qquad H\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline e & f \\ \hline c & d \\ \hline a & b \\ \hline\end{array}$$

Legg merke til at a, b, c, d, e og f er *plassholdere* i denne definisjonen. En måte å tenke på disse funksjonene på er at I er *identiteten*, at R *roterer* en figur, at V speiler en figur *vertikalt*, og at H speiler en figur *horisontalt*. Her er noen eksempler på hvordan funksjonene virker:



Som en repetisjon, her er definisjonen av sammensetning av funksjoner:

Som en repetisjon, her er definisjonen av sammensetning av funksjoner:

Definisjon.
Hvis $f : A \to B$ og $g : B \to C$ er funksjoner, er funksjonen

$$g \circ f : A \to C$$

definert som funksjonen vi får ved å først anvende f, deretter anvende g på verdien av dette, det vil si

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Denne nye funksjonen kalles **sammensetningen** av f og g.

Oppgave 3.1. Finn verdiene til $(V \circ H)(101000)$, $(H \circ R)(001010)$ og $(V \circ R)(010100)$.

Oppgave 3.2. Spesifiser funksjonen $(R \circ (V \circ H))$.

Oppgave 3.3. La $G_1 = \{I, R, V, H\}$. Bevis at $(G_1, \circ)$ er en gruppe.

Oppgave 3.4. Avgjør om $(G_1, \circ)$ i forrige oppgave er en abelsk gruppe. Begrunn svaret ditt.

.

Definisjon.
Dersom f er en funksjon og $f(x) = x$, sier vi at x er et **fikspunkt** for f.

Oppgave 3.5. Finn alle elementer som er fikspunkter for funksjonen V.

Definisjon.
La $\sim$ være relasjonen på M som er slik at $x \sim y$ hvis det finnes en funksjon $f \in G_1$ slik at $f(x) = y$.

Oppgave 3.6. Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Oppgave 3.7. Hva er [101000], det vil si, ekvivalensklassen til 101000?

Definisjon.
La D være funksjonen fra M til M slik at

$$D\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline e & f \\ \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}.$$

Definisjon.
La D være funksjonen fra M til M slik at

$$D\left(\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline e & f \\ \hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|}\hline e & f \\ \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}.$$

Oppgave 3.8. Forklar med egne ord hva D gjør.

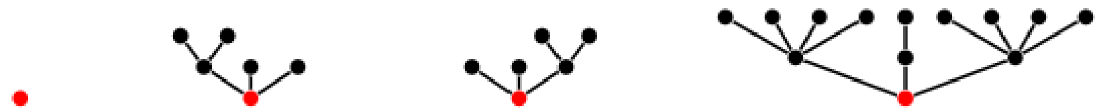
Oppgave 3.9. Finn verdiene til $D(110000)$, $D(D(110000)$ og $D(D(D(110000)))$.

Oppgave 3.10. La $G_2 = \{I, D, H\}$ og G_2^* være tillukningen av G_2 under $\circ$, det vil si den minste mengden som inneholder $\{I, D, H\}$ og som er lukket under $\circ$. Finn ut om G_2^* skiller seg fra G_2. Er de identiske? Inneholder G_2^* flere elementer enn G_2? I så fall, hvilke elementer?

.

4 Induksjon og rekursjon for trær med rot

I denne oppgaven skal vi se på endelige trær med *røtter*. Her er fire forskjellige trær hvor rotnodene er fargelagt røde og tegnet *nederst* for hvert tre:



(a) (b) (c) (d)

For å representere trær skal vi bruke *lister*. Trærne over representeres på følgende måte, hvor $\emptyset$ står for den tomme listen og representerer en *løvnode*. Legg merke til at trærne i (b) og (c) er forskjellige.

$$\emptyset \qquad ((\emptyset\ \emptyset)\ \emptyset\ \emptyset) \qquad (\emptyset\ \emptyset\ (\emptyset\ \emptyset)) \qquad ((\emptyset\ \emptyset\ \emptyset\ \emptyset)\ ((\emptyset))\ (\emptyset\ \emptyset\ \emptyset\ \emptyset))$$

Det minste treet, også kalt en **løvnode**, representeres med tegnet $\emptyset$, og her er løvnoden også **rotnoden**. Ethvert annet tre representeres som en *liste av trær*, og vi kaller disse trærne for *barna* til rotnoden. Når vi for eksempel skriver $(\emptyset\ \emptyset\ \emptyset)$, betyr dette at vi har fire noder: en rotnode og tre løvnoder. Når vi skriver $(((\emptyset)))$ har vi også fire noder, men kun én rotnode og én løvnode. Her har alle nodene bortsett fra løvnoden nøyaktig ett barn. Disse to trærne kan tegnes slik:

$(\emptyset\ \emptyset\ \emptyset)$ $(((\emptyset)))$

(e) (f)

Oppgave 4.1. Gi en induktiv definisjon av mengden T av alle endelige trær med rot, representert som lister. For eksempel vil $(\emptyset\ \emptyset\ \emptyset) \in T$. Forklar kort hvorfor den induktive definisjonen er korrekt og fanger inn *alle* og *bare* endelige trær med rot.

.

Vi skal nå definere noen rekursive funksjoner på T. For et tre $t \in T$ vil:

- $N(t)$ være *antall noder* i t,
- $L(t)$ være *antall løvnoder* i t, og
- $H(t)$ være *høyden* av t.

Vi definerer høyden av et tre som den største avstanden fra rotnoden til en løvnode, målt i antallet kanter, slik at $H(\emptyset) = 0$. Her er en oversikt over hva N, L og H gjør med trærne vi har sett så langt:

t	$N(t)$	$L(t)$	$H(t)$
(a)	1	1	0
(b)	6	4	2
(c)	6	4	2
(d)	13	9	2
(e)	4	3	1
(f)	4	1	3

Oppgave 4.2. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen N og bruk definisjonen til å vise utregningen av $N(((\emptyset)\ \emptyset))$.

Oppgave 4.3. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen L og bruk definisjonen til å vise utregningen av $L((\emptyset\ \emptyset\ \emptyset))$.

Oppgave 4.4. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen H og bruk definisjonen til å vise utregningen av $H((\emptyset\ (\emptyset\ \emptyset)\ \emptyset))$.

Oppgave 4.5. Finn alle trær $t \in T$ slik at $N(t) = 5$ og $L(t) = 3$.

Oppgave 4.6. Bevis ved strukturell induksjon at $L(t) \leqslant N(t)$ for alle trær $t \in T$. Pass på at alle delene av beviset er på plass.

.

5 Naturlig deduksjon

Oppgave 5.1. I naturlig deduksjon har vi $\perp$-regelen som ser slik ut:

$$\frac{\perp}{F}\perp$$

Forklar kort hvordan denne regelen fungerer og hva det er som gjør at den er spesiell.

Oppgave 5.2. Gi et *bevis* for formelen $(P \to \neg P) \to (P \to Q)$ i naturlig deduksjon.

Oppgave 5.3. Trenger vi $\perp$-regelen? Hva tror du skjer i naturlig deduksjon dersom den fjernes? Forklar. (Denne oppgaven er noe vanskeligere, og du anbefales ikke å begynne på denne før du er ferdig med alt annet.)