

# Kapittel 21: Grafteori

Skrevet av Mohammad Fadel Al Khafaji

( Abra KaDaBra Oh La La)

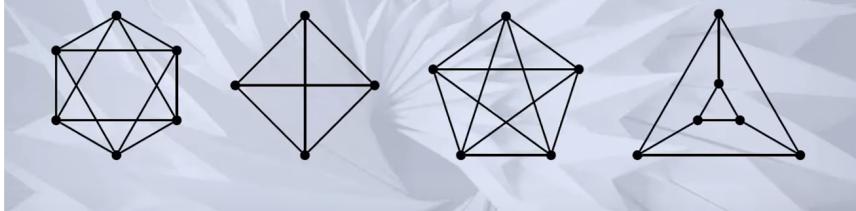


Nettkurs

Boka

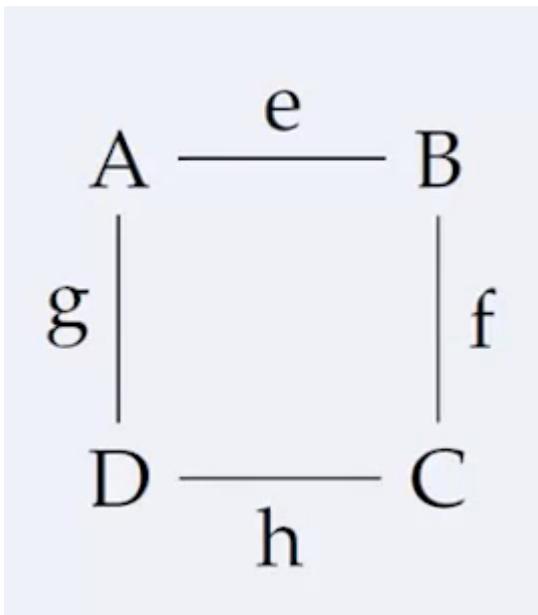
## Graf

En **graf** (eng: *graph*)  $G$  består av **noder** ( $\bullet$ ) og **kanter** (—). Her er noen grafer.



En **graf** (eng: *graph*)  $G$  består av en endelig, ikke-tom mengde  $V$  av **noder** (eng: *Vertex/ vertices*) og en mengde  $E$  av **kanter** (eng: *edges*). Hver kant i  $E$  er en mengde  $\{u, v\}$ , hvor  $u$  og  $v$  er to forskjellige noder. Vi sier at  $\{u, v\}$  ligger **inntil** (eng: *incident*)  $u$  og  $v$ . To noder kalles **naboer** (eng: *adjacent*) hvis de forbindes av en kant.

## Eksempel



- Her er  $A, B, C$  og  $D$  noder, og  $e, f, g$  og  $h$  kanter.
- Kanten  $e$  ligger inntil nodene  $A$  og  $B$ .
- Nodene  $B$  og  $C$  er naboer, siden de forbindes av kanten  $f$ .

## Andre måter å definere grafer på

- Ved å endre på definisjonen av en kant, får vi andre begreper, og vi skal se på to slike:
- Hvis en kant defineres slik at flere kanter kan ligge inntil de samme nodene, eller slik at en kant kan forbinde en node med seg selv, får vi det som henholdsvis kalles **multigrafer** (eng: *multigraphs*) og **pseudografer** (eng: *pseudographs*).

Parallelle kanter: 

En løkke: 

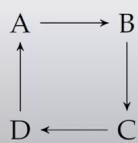


- Det er vanlig å definere grafer slik at hverken løkker eller parallelle kanter forekommer.
- Noen ganger sier vi at en graf er enkel for å understreke dette.



## Definisjon (Rettet graf)

En **rettet graf** (eng: *directed graph*) er definert som en graf, men hvor kantene er ordnede par  $\langle u, v \rangle$  i stedet for mengder  $\{u, v\}$ .



$\{\langle A, B \rangle, \langle B, C \rangle, \langle C, D \rangle, \langle D, A \rangle\}$

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	1	0	0	0



## Komplett graf

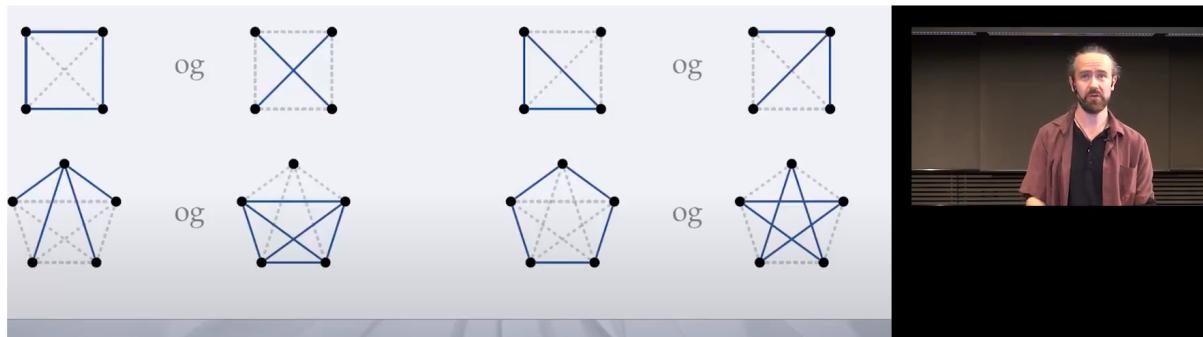
En enkel graf er komplett hvis hver node er nabo med enhver annen node. Den komplette grafen med  $n$  noder kalles  $K_n$ .

## Komplement

Hvis  $G$  er en graf, er komplementet til  $G$ , grafen som har de samme nodene som  $G$ , men hvor to noder er naboer hvis og bare hvis nodene ikke er naboer i  $G$ . Vi skriver  $\bar{G}$  for komplementet til  $G$ .

Intuitivt betyr at komplementet til grafen  $G$ , grafen  $\bar{G}$ , har de samme nodene, men ingen av de samme kantene. Grafen  $G$  og komplementet er lik en komplett graf.

### Eksempel



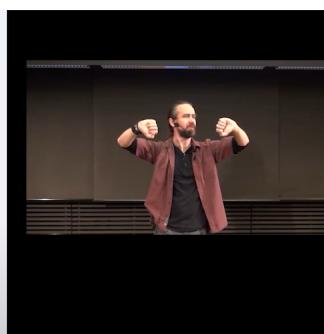
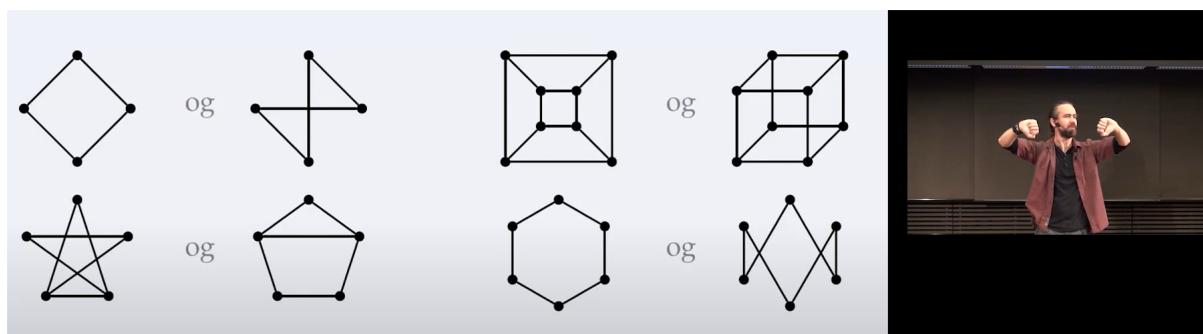
### Graden til en node

**Graden** (eng: *degree*) til en node  $v$  er antall kanter som ligger inntil  $v$ . En løkke teller som to kanter. Med  $\deg(v)$  mener vi graden til  $v$ . Summen av gradene til nodene i en graf er alltid lik det dobbelte av antall kanter.

### Isomorfi

La  $G$  og  $H$  være to grafer. En isomorfi fra  $G$  til  $H$  er en bijektiv funksjon  $f$  fra nodene i  $G$  til nodene i  $H$  som er slik at nodene  $u$  og  $v$  er naboer i  $G$  hvis og bare hvis nodene  $f(u)$  og  $f(v)$  er naboer i  $H$ .

### Eksempel



- For å vise at to grafer er isomorfe, må vi gi en funksjon og argumentere for at funksjonen har egenskapene som er nødvendige.
- For å vise at to grafer ikke er isomorfe, er det tilstrekkelig å finne en grafteoretisk egenskap som kun den ene av grafene har.
- En grafteoretisk egenskap er en egenskap som bevares under *lovlige* transformasjoner, som å flytte rundt på nodene, gjøre kantene lengre/kortere, etc.
- Noen av de enkleste grafteoretiske egenskapene er følgende:
  - Hvor mange noder en graf har.
  - Hvor mange kanter en graf har.
  - Hvor mange noder av en bestemt grad en graf har.



## Litt notasjon

- Det er vanlig å skrive  $V(G)$  for mengden av nodene i en graf  $G$ . Bokstaven  $V$  brukes fordi noder kalles "vertices" på engelsk.
- Når en graf er enkel, er det vanlig å skrive  $ab$  for en kant som ligger inntil to noder  $a$  og  $b$ . Dette går ikke hvis grafen har parallele kanter eller løkker.

## Eksempel på ikke isomorfe grafer

