Kapittel 17: Abstraksjon med ekvivalenser og partisjoner

Nettkurs

Boka

Ekvivalensklasse

- Anta at ~ er en ekvivalensrelasjon på en mengde M.
- Vi sier at **ekvivalensklassen** (*equivalence class*) til et element $x \in M$ er mengden
  $[x] = \{y \in M \mid y \sim x\}$.
- Vi skriver $[x]$ for ekvivalensklassen til x.
- Vi skriver $M/\sim$ for mengden av alle ekvivalensklassene.
- Denne mengden kalles **kvotientmengden** (*quotient set*) av M under ~.

Heltall modulo n

- La n være et positivt heltall. Vi definerer en ekvivalensrelasjon $\equiv$ på mengden av heltall ved å si at $x \equiv y$ holder når x og y har samme rest når vi deler på n, eller sagt på en annen måte, at $x - y$ er delelig med n. En skrivemåte for dette er $x \equiv y$ (mod n), og vi sier at
  "x er lik y modulo n".

$$
\begin{gathered}
[0] = \{..., -5, 0, 5, 10, 15, ...\} \\
[1] = \{..., -4, 1, 6, 11, 16, ...\} \\
[2] = \{..., -3, 2, 7, 12, 17, ...\} \\
[3] = \{..., -2, 3, 8, 13, 18, ...\} \\
[4] = \{..., -1, 4, 9, 14, 19, ...\}
\end{gathered}
$$

- Slike mengder kalles **restklasser** (*residue classes*) og **kongruensklasser** (*congruence classes*).
- Mengden av dem, $\mathbb{Z}/\equiv$, kalles **heltallene modulo** n (*integers modulo* n) og betegnes med $\mathbb{Z}/n$ og $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Partisjon

- En **partisjon** (*partition*) av en mengde S er en mengde X av ikke-tomme delmengder av S slik at følgende betingelser holder:
  - Unionen av alle mengdene i X er lik S.
  - Snittet fra to forskjellige mengder i X er tomt.
- Det første kravet er at "mengdene dekker hele S".
- Det andre kravet er at mengdene er **disjunkte** eller gjensidig utelukkende.

Forfining av partisjon

- La X og Y være partisjoner av en mengde M.
- Hvis ethvert element i X er en delmengde av et element i Y, skriver vi $X \leqslant Y$ og sier at X er en **forfining** (*refinement*) av Y og er **finere** (*finer*) enn Y.

Sammenhengen mellom ekvivalensklasser og partisjoner

- Hvis vi tar mengden av alle ekvivalensklasser for en gitt ekvivalensrelasjon, får vi en partisjon.
- En ekvivalensrelasjon deler altså en mengde opp i ekvivalensklasser som utgjør en partisjon.