Kapittel 9: Tillukninger og induktivt definerte mengder

Nettkurs

Boka

Definere menger steg for steg

- Å definere mengder *induktivt* betyr å bygge dem opp *nedenfra* eller *innenfra*. Det er en måte å definere mengder på *steg for steg*.
- Når vi har definert mengden induktivt, har vi god kontroll på hvilke elementer som er i mengden. På denne måten blir det enklere å behandle og bevise påstander om mengden.

Lukket mengde og tillukningen

- At en mengde er **lukket** (*closed*) under en gitt operasjon, betyr at når vi utfører denne operasjonen på ett eller flere elementer i mengden, er vi garantert at resultatet er et element i den samme mengden.
- Hvis M er en mengde, kalles den minste mengden som inneholder M og som er lukket under en eller flere operasjoner, **tillukningen** (*closure*) av M under disse operasjonene.

Tillukninger av binære relasjoner

- Hvis R er en relasjon, kalles den minste relasjonen som inneholder R og som har en gitt egenskap, **tillukningen** (*closure*) av R med hensyn til denne egenskapen.
- Hvis egenskapen det er snakk om er refleksivitet, symmetri eller transitivitet, så kalles tillukningen henholdsvis den **refleksive**, **symmetriske** eller **transitive** tillukningen av R.

Induktivt definerte mengder

- En **induktivt definert mengde** (*inductively defined set*) er den minste mengden som inneholder en gitt mengde - kalt en **basismengde** (*base set/initial set*) - og som er lukket under gitte operasjoner.

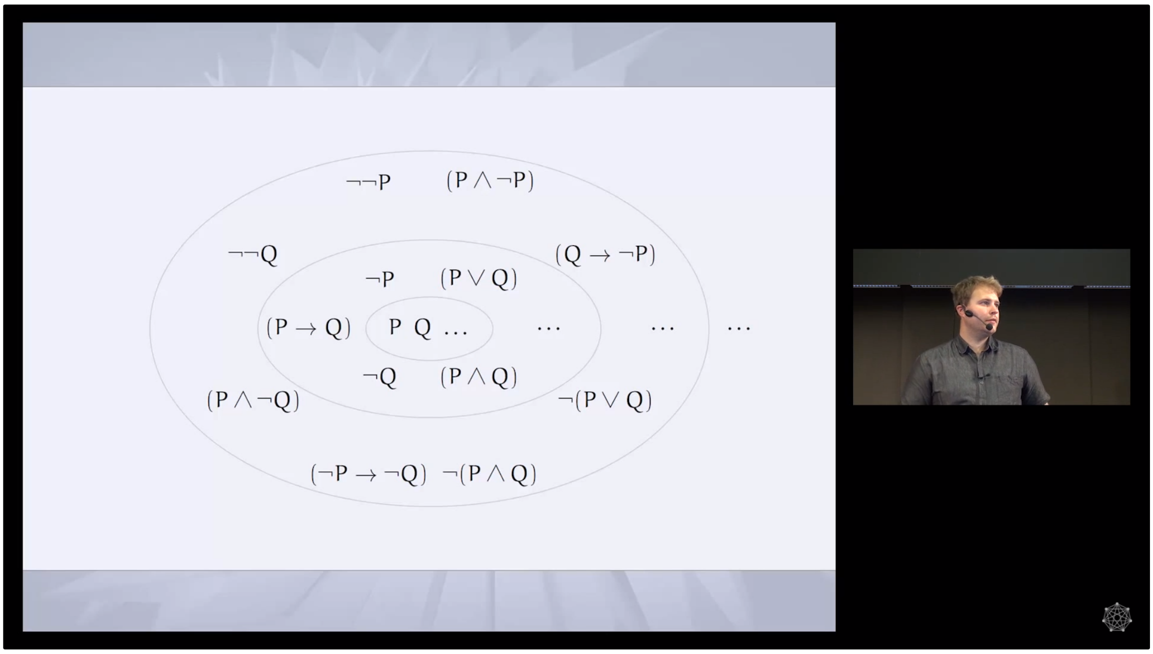
- En mengde defineres induktivt i følgende tre steg:
  - *Basissteget* (*base case/basis*): å spesifisere en basismengde.
  - *Induksjonssteget* (*induction step*): å spesifisere operasjonene.
  - *Tillukningen* (*closure*) - å ta den minste mengden som inneholder basismengden og som er lukket under operasjonene.

Tallmengder

- Mengden av naturlige tall kan defineres induktivt som den minste mengden $\mathbb{N}$ som er slik at $0 \in \mathbb{N}$ og hvis $x \in \mathbb{N}$, så $x + 1 \in \mathbb{N}$.
- Mengden av partall er den minste mengden som inneholder 0 og som er lukket under operasjonene som henholdsvis legger til og trekker fra 2.

Utsagnslogisk formler (nytt definisjon)

- Mengden av **utsagnslogiske formler** (*propositional formulas*) er den minste mengden X slik at følgende holder:
  - Enhver utsagnsvariabel er med i X. Disse utgjør basismengden og kalles **atomære formler** (*atomic formulas*).
  - Hvis F er med i X, er $\neg F$ med i X.
  - Hvis F og G er med i X, så er$(F \land G)$, $(F \lor G)$ og $(F \to G)$ er med i X.



Lister

- Lister ligner på tupler, men er ikke det samme. Vi skriver lister slik: $(1, 2, 3, 4)$.

- $(1 :: (2, 3, 4))$ betyr at elementet 1 vil være på første plass i listen: $(1, 2, 3, 4)$.
- Mengden av **lister** (*lists*) over en mengde A er induktivt definert som den minste mengden slik at følgende holder:
  - $()$ er en liste over A. Dette er en **tomme listen** over A.
  - Hvis $x \in A$ og L er en liste over A, er $x :: L$ en liste over A.
- For å få listen $(1, 2, 3)$, kan vi begynne med den tomme listen og legge til elementer ved hjelp av $::$ på følgende måte: $1 :: (2 :: (3 :: ()))$

Binære trær

- Mengden av **binære trær** (*binary trees*) over en mengde A er den minste mengden slik at følgende holder:
  - **()** er et binært tre over A. Dette kalles det **tomme binære treet** (*empty binary tree*) eller bare det **tomme treet** (*empty tree*).
  - Hvis $x \in A$, og V og H er binære trær over A, er (V, x, H) et binært tre over A.
    Elementet x kalles en **node** (*node*) i det binære treet.
    Når et binært tre er på formen $($**()**$,x,$**()**$)$, kalles x en **bladnode** eller en **løvnode** (*leaf node*).

Alfabet, tegn, streng, språk

- Anta at A er en mengde av tegn
- Mengden A kalles et **alfabet**.

- Mengden av **strenger** (*strings*) over A er den minste mengden A^* slik at:
  - $\lambda \in A^*$, hvor λ står for den tomme strengen (empty string) og
  - hvis $s \in A^*$ og $x \in A^*$, er $sx \in A^*$, hvor sx står for resultatet av å slå sammen s og x.
  - Et **språk** over A er en delmengde av A^*.

Konkatenering

- Operasjonen som består av å slå to strenger s og t sammen til en, st, kalles **konkatenering** (*concatenation*).
- Skrivemåten s^n brukes som en forkortelse for strengen s gjentatt n ganger etter hverandre.
- For eksempel, a^3b^3 er den samme som $aaabbb$.
- Vi antar at $s^0 = \lambda$.