# Hjemmeeksamen i IN1150

Kandidatnummer:

28. mai 2020

## Oppgave 1.1

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. Hvis $R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle\}$, så vil $\mathcal{M} \models \forall x R(x, x)$, der $R^{\mathcal{M}}$ ikke er en symmetrisk relasjon.

## Oppgave 1.2

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. La $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ være en bijektiv funksjon med aritet en, som tolkes slik i modellen: $f^{\mathcal{M}}(a) = b$, $f^{\mathcal{M}}(b) = c$, $f^{\mathcal{M}}(c) = d$, $f^{\mathcal{M}}(d) = a$. Hvis $S^{\mathcal{M}} = \{\langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle a, d\rangle\}$, så vil $S^{\mathcal{M}}$ være en asymmetrisk relasjon, og $\mathcal{M} \models \forall x S(f(x), x)$

## Oppgave 1.3

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. Hvis $T^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$, så er relasjonen $T^{\mathcal{M}}$ transitiv, og det vil være sant at: $\mathcal{M} \models \forall x \exists y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg\exists x \forall y T(x, y)$, $\mathcal{M} \models \neg\exists y \forall x T(x, y)$.

## Oppgave 1.4

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $|\mathcal{M}| = \{a, b, c, d\}$. Vi tolker konstantsymbolene i modellen slik: $\bar{a}^{\mathcal{M}} = c$, $\bar{b}^{\mathcal{M}} = d$, $\bar{d}^{\mathcal{M}} = b$. Vi tolker relasjonen $R^{\mathcal{M}} = \{\langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$, slik at det er en transitiv relasjon. Vi tolker relasjonen $P^{\mathcal{M}} = \{c, d\}$, og relasjonen $Q^{\mathcal{M}} = \{c, d\}$. Da vil modellen opfylle alle formlene som er oppgitt i oppgaven.

## Oppgave 1.5

I denne oppgaven forklarer jeg henholdsvis hvorfor 1, 2, 3 og 4 holder i modellen fra forrige oppgave.

1) Vi har at $\mathcal{M} \models R(\bar{a}, \bar{b}) \wedge R(\bar{b}, \bar{a}) \wedge \neg Q(\bar{d})$

$\Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models R(\bar{a}, \bar{b})$ og $\mathcal{M} \models R(\bar{b}, \bar{a})$ og hvis det ikke er tilfellet at $\mathcal{M} \models Q(\bar{d})$. Dette stemmer da vi har at $\langle \bar{a}^{\mathcal{M}}, \bar{b}^{\mathcal{M}}\rangle, \langle \bar{b}^{\mathcal{M}}, \bar{a}^{\mathcal{M}}\rangle \in R^{\mathcal{M}}$, og vi har samtidig at $\bar{d}^{\mathcal{M}} \notin Q^{\mathcal{M}}$

2) Vi har at $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models P(\bar{a}) \rightarrow Q(\bar{a})$ for alle $a \in |\mathcal{M}| \Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models P(\bar{a})$ impliserer $\mathcal{M} \models Q(\bar{a})$ for alle $a \in |\mathcal{M}|$. Dette stemmer da vi har at $P^{\mathcal{M}} = Q^{\mathcal{M}} = \{c, d\}$. Med andre ord for hver $a \in |\mathcal{M}|$ som gjør $P(\bar{a})$ sann vil nødvendigvis også gjøre $Q(\bar{a})$ sann.

3) Vi har at $\mathcal{M} \models \forall x(R(x,x) \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models R(\bar{a},\bar{a}) \rightarrow P(\bar{a})$ for alle $a \in\mid \mathcal{M} \mid$. $\Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models R(\bar{a},\bar{a})$ impliserer at $\mathcal{M} \models P(\bar{a})$ for alle $a \in\mid \mathcal{M} \mid$. Dette stemmer da vi har at i de tilfellene $R(\bar{a},\bar{a})$ er sann tolket i modellen, så fører det til at $P(\bar{a})$ er sann tolket i modellen.

4) Vi har at $\mathcal{M} \models \forall x \exists y R(x,y) \Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models \exists y R(\bar{a},y)$ for alle $a \in\mid \mathcal{M} \mid \Leftrightarrow$ Hvis det for alle $a \in\mid \mathcal{M} \mid$ finnes en $b \in\mid \mathcal{M} \mid$ s.a $\mathcal{M} \models R(\bar{a},\bar{b})$. Dette stemmer ettersom vi har $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle \in R^{\mathcal{M}}$

## Oppgave 1.6

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\mid \mathcal{M} \mid= \{a,b,c,d\}$. La $f : \{a,b,c,d\} \rightarrow \{a,b,c,d\}$ være en injektiv funksjon med aritet en, og la $P^{\mathcal{M}}$ være en relasjon med aritet en. Vi har da at $\mathcal{M} \models \forall x P(f(x)) \Leftrightarrow$ Hvis $\mathcal{M} \models P(f(\bar{a}))$ for alle $a \in\mid \mathcal{M} \mid$. Ettersom vi har kravet om at f er en injektiv funksjon, så er eneste måten denne formelen blir sann i modellen på hvis vi for hver verdi i domenet som vi sender inn til funksjonen, gir et ulikt svar tilbake. Ettersom dette er en funksjon fra en mengde til den samme mengden, og vi allerede har et krav om injektivitet, så vil funksjon og bli surjektiv. Denne tolkningen av funksjonen f fører til at relasjonen $P^{\mathcal{M}}$ vil inneholde alle verdiene fra domenet til modellen. Dermed vil ikke $\mathcal{M} \models \exists x \neg P(x)$ være oppfylt ettersom det ikke vil finnes en $x \in\mid \mathcal{M} \mid$ som er s.a $\neg P(x)$. Det finnes med andre ord ikke en modell med domene $\{a,b,c,d\}$ s.a både 1 og 2 er oppfylt.

## Oppgave 2.1

La M være en mengde som er lukket under union, dvs. at hvis $A \in M$ og $B \in M$, så er $A \cup B \in M$. Vi skal vise at hvis $A_1, \dots A_n \in M$, så $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \in M$ for alle naturlige tall $n \geqslant 2$.

Basissteget: Vis det for tilfellet der n=2 som er basismengden i dette tilfellet. Antar at $A_1, A_2 \in M$. Per definisjon av at mengden M er lukket under union, så vil da $A_1 \cup A_2 \in M$.
Induksjonshypotesen: Antar at påstanden vår holder for $n = k$, så vi har at: Hvis $A_1, \dots, A_k \in M$, så $(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \in M$
Induksjonssteget: Antar at $A_1 \dots A_k, A_{k+1} \in M$. Vi skal så vise at det fører til at $(A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) \in M$.

$A_1 \cup \dots A_k \cup A_{k+1}$ kan skrivs som $(A_1 \cup \dots A_k) \cup A_{k+1}$. Fra induksjonshypotesen vår har vi at $(A_1 \cup \dots A_k) \in M \Rightarrow (A_1 \cup \cdots \cup A_k) \in M$. Ettersom vi har antatt at $A_{k+1} \in M$, så vil per definisjon av den induktivt definerte mengden M også unionen av $(A_1 \cup \ldots A_k) \cup A_{k+1} \in M$

Ved matematisk induksjon har vi bevist at hvis $A_1, \ldots A_n \in M$, så er $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in M$ for alle naturlige tall $n \geqslant 2$.

## Oppgave 2.2

la $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ og la $L = A^\star$. La $x \prec y$ bety at det finnes en streng $s \in L$ s.a $xs = y$. Vi skal vise at $\prec$ er en partiell ordning. Med andre ord at relasjonen er refleksiv, transitiv og anti- symmetrisk.

Refleksivitet: Antar at vi har en vilkårlig valgt $x \in L$. Vi skal nå vise at det da må finnes en $s \in L$ s.a $x \prec x$. Da må det finnes en $s \in L$ s.a $xs = x$. Denne finnes, da vi har $\Lambda \in L$. Vi får da $x\Lambda = x$, og fordi $x$ var vilkårlig valgt, så gjelder det $\forall x \in L$.

Transitivitet: Antar at vi har en vilkårlig $x, y, z \in L$. Antar så at $x \prec y$ og at $y \prec z$. Da følger det at vi har en $s \in L$ s.a $xs = y \Rightarrow y = xs$, og en $t \in L$ s.a $yt = z$. Skal vise at $x \prec z$. Vi må da finne en streng $k \in L$ s.a $xk = z$.
Fra antakelsene våre har vi at $y = xs \in L$, så vi setter dette inn i $yt = z \Rightarrow xst = z$. Med andre ord har vi at det finnes en streng $k = st \in L$ som er slik at $x \prec z$.

Anti-symmetri: Antar at vi har en vilkårlig $x, y \in L$. Antar så at $x \prec y$, og $y \prec x$. Da følger det at det finnes en $s \in L$, s.a $xs = y$, og en $t \in L$, s.a $yt = x$. Fra antakelsene våre følger det at $xst = x$. Det vil kun gå hvis $st = \Lambda$. Det følger videre at i alle tilfellene hvor $x \prec y$ og $y \prec x$, så er $x = y$.

Vi har nå vist at relasjonen $\prec$ er både refleksiv, transitiv og anti- symmetrisk, og vi kan derfor konkludere med at det er en partiell ordning.

## Oppgave 2.3

La G være grafen hvor $V = \{a, b\}$ og $E = \{\{a, b\}\}$. Vi har da at $V_c = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$. De to nodene i $V_c$ vil ikke være naboer i $G_c$ ettersom de ikke oppfyller noen av kravene i definisjonen for å kunne bli naboer. Vi ender derfor opp med at $G_c$ blir en tom graf som kun inneholder nodene $\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle$, men ingen kanter.

## Oppgave 2.4

Vi ender opp med at formelen for ant. noder i $G_c$ blir $n * (n - 1)$. Vi kan tenke på det som en funksjon fra ant. noder i G til to (ant vi trenger i hvert tuppel). Ettersom vi har kravet om at $x \neq y$, så må denne funksjonen være injektiv, og vi får da n muligheter for den første plassen, og $n-1$ muligheter for plass nummer to i tuppelet.

## Oppgave 2.5

La G være grafen med nodene $V = \{a, b, c\}$ og kantene $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Vis at dette er et moteksempel til påstanden For alle G, hvis G er sammenhengende, så er $G_c$ sammenhengende".

Dette er et eks. på en eksistensiell påstand, da den kvantifiserer over for alle av noe, og i dette tilfellet holder det å komme med et eks. som bryter med det påstanden sier. Hvis jeg skulle begynt å føre et bevis for denne påstanden, så hadde jeg begynt med å anta at jeg har en vilkårlig, og så hadde jeg antatt at denne vilkårlige G-en var sammenhengende. Deretter hadde jeg prøvd å vise at det førte til at $G_c$ ble sammenhengende. Hvis dette stemte, så hadde jeg kunnet konkludert med at påstanden var sann. Det vi har over blir et moteksempel, da vi får at den første delen av påstanden blir sann (hvis- delen ), men $G_c$ er ikke sammenhengende og den andre delen av påstanden (så-delen blir derfor usann. Dermed blir hele påstanden usann for dette eksempelet. Ettersom det var en eksistensiell påstand i utgangspunktet, så blir dette et moteksempel.

## Oppgave 3.1

$(V \circ H)(101000) = V(H(101000)) = V(001010) = 000101$
$(H \circ R)(001010) = H(R(001010)) = H(010100) = 000101$
$(V \circ R)(010100) = V(R(010100)) = V(001010) = 000101$

## Oppgave 3.2

Vi spesifiserer funksjonen $(R \circ (V \circ H))$ og får: $(R \circ (V \circ H)) = R(V(H(abcdef))) = R(V(efcdab)) = R(fedcba) = (abcdef) = I(abcdef)$. Med andre ord $(R \circ (V \circ H)) = I$

## Oppgave 3.3

La $G_1 = \{I, R, V, H\}$. Vi skal bevise at $(G_1, \circ)$ er en gruppe. For at det skal være en gruppe må operasjonen $\circ$ være assosiativ, det må finnes et identitetselement for $\circ$, og alle elementer må ha en invers.

La $f : M \to M$, $g : M \to M$, $h : M \to M$ være tre ulike funksjoner, der $f, g, h \in G_1$ . Funksjonskomposisjon er assosiativt, og vi har derfor at: $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Identitetselement: La $x \in M$, og la f være en vilkårlig funksjon, der $f \in G_1$. Vi har da et identiteselementet for operasjonen $\circ$ er $I \in G_1$, da vi har: $(I \circ f)(x) = x = (f \circ I)(x) = x$, for alle $x \in M$.

Invers: Vi har at $R \circ R = I$, $V \circ V = I$, $H \circ H = I$ og $I \circ I = I$. Med andre ord har alle elementene i mengden $G_1$ har en invers, nemlig seg selv.

Vi har nå vist at operasjonen $\circ$ er assosiativ, at det finnes et identitestelement lik $I$ for den, og at alle elementer $\in G_1$ har en invers. Vi kan derfor konkludere med at $(G_1, \circ)$ er en gruppe.

## Oppgave 3.4

For å avgjøre om $(G_1, \circ)$ er en abelsk gruppe, så må vi sjekke om operasjonen $\circ$ er kommutativ. La $abcdef \in M$, vi får da:

$$V(H(abcdef)) = V(efcdab) = fedcba$$
$$H(V(abcdef)) = H(badcfe) = fedcba$$

$$R(V(abcdef)) = R(badcfe) = efcdab$$
$$V(R(abcdef)) = V(fedcba) = efcdab$$

$$V(H(abcdef)) = V(efcdab) = fedcba$$
$$H(V(abcdef)) = H(badcfe) = fedcba$$

Har og at for en vilkårlig $x \in G_1$, så gjelder:

$$(I \circ x)(abcdef) = I(x(abcdef)) = x(abcdef)$$

$$(x \circ I)(abcdef) = x(I(abcdef)) = x(abcdef)$$

Vi har vist at gruppen er kommutativ, og dermed abelsk ettersom for alle $f, g \in G_1$ er det s.a $f \circ g = g \circ f$.

## Oppgave 3.5

Vi finner alle elementer som er fikspunkter for funksjonen V. Bitstrengene vi da får er 000000, 111111, 001100, 000011, 111100, 110000, 110011, 001111.

## Oppgave 3.6

La $\sim$ være relasjonen på M som er s.a $x \sim y$ hvis det finnes en funksjon $f \in G_1$ s.a $f(x) = y$. Vi skal vise at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon. Med andre ord skal vi vise at relasjonen både er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Refleksiv: Anta at x er et vilkårlig element i M. Skal da vise at for alle $x \in M$ finnes det en funksjon $f \in G_1$ s.a $f(x) = x$.
Ettersom vi har funksjonen $I \in G_1$ som kun returnerer identiteten av elementet vi sender inn, så har vi at: $I(x) = x$, og ettersom x var ett vilkårlig valgt element har vi at det gjelder $\forall x \quad x \in M$

Symmetri: Anta at $x, y$ er vilkårlige elementer i M. Anta at $x \sim y$. Da har vi en funksjon $f \in G_1$ s.a $f(x) = y \Rightarrow y = f(x)$. Skal så vise at det fører til at $y \sim x$. Med andre ord må vi vise at det finnes en funksjon $f \in G_1$ s.a $f(y) = x$. Fra antakelsen vår følger det at $y = f(x)$, og hvis vi setter inn det i $f(y) = x$ får vi: $f(f(x)) = x$. Siden vi i forrige oppgave viste at alle funksjonene $f \in G_1$ er sin egen invers, så vil det det for alle $f \in G_1$ være s.a $f(f(x)) = x$. Og ettersom x var et vilkårlig valgt element, så vil det gjelde for alle elementer i M.

Transitivitet: Anta at $x, y, z$ er vilkårlige elementer i M. Anta at $x \sim y$ og at $y \sim z$. Fra dette følger det at $f(x) = y \Rightarrow y = f(x)$, og $g(y) = z$. Vi skal vise at dette fører til at $x \sim z$, som er sant hvis det finnes en funksjon $h \in G_1$ som er s.a $h(x) = z$.

Fra antakelsene våre følger det at vi kan skrive $g(y) = z \Rightarrow g(f(x)) = z$. Ettersom at sammensetning operasjonen av funksjoner i $G_1$ vil være en lukket operasjon, så har vi at $g(f(x)) \in G_1$. Ettersom x,y,z var vilkårlig valgt vil dette gjelde for alle elementer i M.

Vi har nå vist at det ~ er en ekvivalensrelasjon, da vi har vist både refleksivitet, symmetri og transitivitet.

## Oppgave 3.7

Antar at vi har en relasjon ekvivalensrelasjon ~ på mengden M. Ekvivalensklassen [ 101000] er mengden $\{y \in M \mid y \sim 101000\}$. Med andre ord mengden av alle elemnter i M som relaterer til 101000. Vi finner at denne mengden blir lik: $\{101000, 010100, 001010, 000101\}$.

## Oppgave 3.8

La $x \in M$. Funksjonen D kan ses på som en funksjon som tar inn x, og gir ut en D(x) der radene er omrokkert. Nærmere sagt, så blir rad 1 i x til rad 2 i D(x), rad 2 i x blir til rad 3 i D(x), og rad 3 i x blir til rad 1 i D(x).

## Oppgave 3.9

Vi har at $D(110000) = 001100$, $D(D(110000)) = D(001100) = 000011$, og $D(D(D(110000)) = 110000$.

## Oppgave 3.10

La $G_2 = \{I, D, H\}$ og $G_2^\star$ være tillukningen av $G_2$ under $\circ$, dvs. den minste mengden som inneholder $\{I, D, H\}$, og som er lukket under $\circ$. Vi får: $I \circ I = I \Rightarrow$ vi må legge til I i tillukningen. $I \circ H = H \Rightarrow$ vi må legge til H i tillukningen. $I \circ D$ og vi må legge til D i tillukningen. Da har vi foreløpig at tillukningen inneholder I, D og H, men vi kan danne flere elementer ved operasjonen $\circ$. Vi har $D \circ H$, $D \circ D$ og $D \circ D \circ H$, og vi må ta med alle sammen i tillukningen. Vi ender dermed opp med at $G_2^\star = \{I, D, H, D \circ H, D \circ D, D \circ D \circ H\} \neq G_2$.

## Oppgave 4.1

T er den minste mengden s.a
Basissteget:

$$ø \in \mathsf{T}$$

Induksjonssteget: Hvis $t \in \mathsf{T}$, og $L \in \mathsf{T}$, så er

$$(t) \in \mathsf{T} \quad \text{og}$$

$$t :: (L) \quad \text{en liste over T, og } \in \mathsf{T}$$

+ forlaring!

## Oppgave 4.2

La $N(t)$ være en rekursiv funksjon definert på alle $t \in T$ s.a:
Basissteget:

$$N(ø) = 1$$

Rekursive steget:

$$N((t)) = N(t) + 1$$

$$N(t :: (L)) = N(t) + N((L))$$

Bruker definisjonen av den rekursive funksjonen til å regne ut $N(((ø)ø))$:

$$N(((ø)ø)) = N((ø)) + N((ø))$$

$$1 + N(ø) + 1 + N(ø) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

## Oppgave 4.3

La $L(t)$ være en rekursiv funksjon definert på alle $t \in T$ s.a:

Basissteget:

$$L(ø) = 1$$

Rekursive steget:

$$L((t)) = L(t)$$

$$L(t :: (L)) = L(t) + L((L))$$

Bruker definisjonen av den rekursive funksjonen til å regne ut $L((øøø))$

$$\begin{aligned} L((øøø)) &= L(ø) + L((øø)) \\ &= 1 + L(ø) + L((ø)) \\ &= 1 + 1 + L(ø) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

## Oppgave 4.4

La $H(t)$ være en rekursiv funksjon definert på alle $t \in T$ s.a:

Basissteget:

$$H(ø) = 0$$

Rekursive steget:

$$H(t :: (L)) = H(t) + H((L))$$
$$H((t)) = 1 + H(t)$$

Bruker definisjonen av den rekursive funksjonen til å regne ut $H((ø(øø)ø))$

$$\begin{aligned} H((ø(øø)ø)) &= H(ø) + H(((øø)ø)) \\ &= 0 + H((øø)) + H((ø)) \\ &= 0 + H(ø) + H((ø)) + H((ø)) \\ &= 0 + 0 + H(ø) + 1 + H(ø) + 1 \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

## Oppgave 4.5

Finn alle trær $t \in T$ s.a $N(t) = 5$, og $L(t) = 3$. Vi vet at for at et $t \in T$ skal ha tre løvnoder, så har vi fra den rekursive definisjonen av $L(t)$ at: $L(ø) + L(ø) + L(ø) = 3$. Vi vet og fra definisjonen av alle $t \in T$ at trærne må inneholde en rotnode. Vi får da at de mulige trærne da er: $((øøø))$, $((øø)ø)$, $(ø(ø)ø)$, $((ø)øø)$, $(øø(ø))$ og $(ø(øø))$

## Oppgave 4.6

Vi skal bevise påstanden: $L(t) \leqslant N(t)$ for alle trær $t \in T$ ved strukturell induksjon.
Basissteget:
I basissteget skal vi bevise at påstanden holder for alle elementer i basismengden vår: $\{\emptyset\}$. La $t = \emptyset$, vi får da

$$L(\emptyset) = 1$$
$$N(\emptyset) = 1$$

Vi får dermed at for alle elementer i basismengden til den induktivt definerte mengden av T, så har vi at påstanden $L(t) \leqslant N(t)$ er sann.

Induksjonshypotesen:
Antar at påstanden holder for en vilkårlig $k \in T$ s.a $L(k) \leqslant N(k)$. Skal vise at det fører til at $L(k :: (L)) \leqslant N(k :: (L))$, og at $L((k)) \leqslant N((k))$.

$$L((k)) = L(k) \quad \text{fra def. av funksjonen L}$$
$$N((k)) = N(k) + 1 \quad \text{fra def. av funksjonen N}$$

Fra IH har vi at $L(k) \leqslant N(k)$, og da må nødvendigvis også $L(k) \leqslant N(k) + 1$.

$$L(k :: (L)) = L(k) + L((L)) = L(k) + L(L) \quad \text{fra def. av funksjonen L}$$

$$N(k :: (L)) = N(k) + N((L)) = N(k) + N(L) + 1 \quad \text{fra def. av funksjonen N}$$

Fra IH har vi at $L(k) \leqslant N(k)$, og ettersom vi viste at $L(k) \leqslant N(k)$ for en vilkårlig valgt $k \in T$, så fører det til at $L(k) + L(L) \leqslant N(k) + N(L) + 1$.

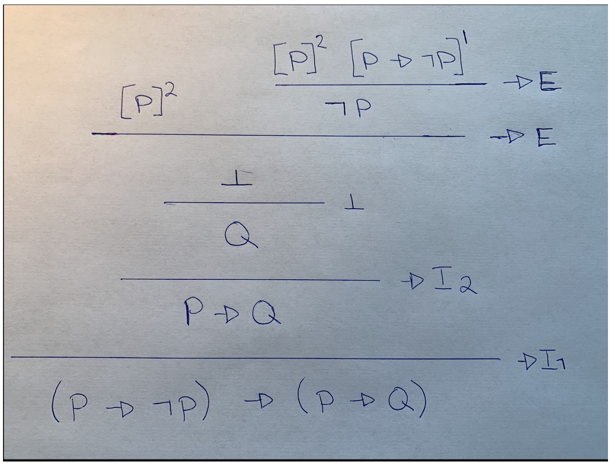
Vi har ved strukturell induksjon bevist at $L(t) \leqslant N(t)$ for alle trær $t \in T$.

## Oppgave 5.1

I naturlig deduksjon, så har vi en $\perp$ - regel. Den sier at vi har antatt noe, men siden vi ender opp med en motsigelse, så kan vi bruke $\perp$ - regelen til å eliminere $\perp$, og med det konkludere med hva som helst. Regelen er spesiell fordi hvis premisset ditt er at det usanne er sant, da er det ingenting som kan være usant, og du kan derfor konkludere med hva som helst. Vi har at alt er en logisk konsekvens av det usanne fordi det usanne kan aldri være sant.

## Oppgave 5.2

I denne oppgaven blir vi bedt om å gjennomføre et naturlig deduksjons bevis av $(P \to \neg P) \to (P \to Q)$. På bildet nedenfor er selve beviset med P, og $(P \to \neg P)$ som lukkede antakelser:




## Oppgave 5.3

Vi kan prøve å bevise at det ikke er sunnhet.