IN1150 – Logiske metoder

Eksamen høsten 2019 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 25. november 2019

Om eksamen: Eksamen består av to deler som er verdt omtrent like mye. Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Et korrekt svar er her verdt ett poeng, et feil svar er verdt minus ett poeng, og en ubesvart oppgave er også verdt minus ett poeng. Det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene. Den andre delen består av litt større oppgaver, hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave. Dersom det ikke er oppgitt i oppgaven, trenger du ikke å begrunne svaret. Oppgave 17, 18 og 19(b) skal besvares ark, og ingen andre oppgaver skal besvares på ark.

Om sensur og karaktergivning: Det som er utgangspunktet for karaktergivningen er karakterskalaen på Universitetet i Oslos nettsider. Den totale poengsummen brukes som veiledning for karakteren. En grov tommelfingerregel for karakteren er følgende.

Ca. 120 poeng (ca. 86 %): A

Ca. 100 poeng (ca. 71 %): B

Ca. 80 poeng (ca. 57 %): C

Ca. 60 poeng (ca. 43 %): D

Ca. 40 poeng (ca. 29 %): E

Merk at dette er *omtrentlige* grenser som vurderes og justeres i lys av oppgavesettets vanskelighetsgrad og form.

En kommentar om minuspoeng: Det å få -1 for feil svar og +1 for riktig svar, er ekvivalent med å få 0 for feil svar og +2 for riktig svar, men det gjør det enklere å korrigere for gjetning. Hvis man gjetter helt tilfeldig på alle oppgavene får man i snitt null poeng. En gjetning er riktignok ofte ledet av en trent intuisjon, og det vil derfor som regel lønne seg å "gjette". Fordi man får like mange pluss-poeng som minus-poeng for de oppgavene man gjetter på, vil antall poeng etter 70 sant/usant-oppgaver på den måten representere hvor mange spørsmål man faktisk vet det riktige svaret på.

Kommentar: For oppgavene i den andre delen, med større oppgaver, er en mer detaljert poenggivning angitt i bokser som denne. I den første delen av eksamen er poenggivningen slik som angitt over.

Små oppgaver [70 poeng]

1 Mengdelære [5 poeng]

Anta at $A = \{0, 1, 01\}$, $B = \{1, 0, \{0\}, 01\}$ og $C = \{0, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}$.

(a) $A \subseteq B$ (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi ethvert element i A er i B.

(b) $A \cap C = \emptyset$ (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi A og C har noe til felles, nemlig 0.

(c) $A \cup C = \{0, 1, 01, \{0, 1\}\}$ (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\{0, 1, 01, \{0, 1\}\}$ inneholder nøyaktig de elementene som er i A eller i B. Merk at $\{0, 1\}$ og $\{1, 0\}$ er den samme mengden, så $C = \{0, \{0, 1\}\}$.

(d) $A \setminus C = \{1\}$ (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $A \setminus C = \{1, 01\}$.

(e) $(A \cap B) \cup \{\{0, 1\}\} \subseteq C$ (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $(A \cap B) \cup \{\{0, 1\}\} = A \cup \{\{0, 1\}\} = \{0, 1, 01, \{0, 1\}\}$ og både $1 \notin C$ og $01 \notin C$.

2 Utsagnslogikk [5 poeng]

Anta at P står for «alarmen går», Q står for «det er jordskjelv», og R står for «det rister»

(a) Formelen $(Q \wedge R)$ står for «hvis det er jordskjelv, så rister det» (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $(Q \wedge R)$ står for «det er jordskjelv og det rister».

(b) Formelen $(R \wedge P) \rightarrow Q$ står for «hvis det rister og alarmen går, så er det jordskjelv». (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er er nøyaktig slik vi bruker utsagnslogiske formler for å representere utsagn.

(c) Formelen $(\neg R \vee \neg Q)$ står for «det hverken rister eller er jordskjelv». (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $(\neg R \vee \neg Q)$ står for «det rister ikke eller er det er ikke jordskjelv».

(d) Formelen $\neg(Q \rightarrow P)$ står for «hvis det er jordskjelv, så går ikke alarmen». (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\neg(Q \rightarrow P)$ står for «det er ikke slik at hvis det er jordskjelv, så går alarmen».

(e) Formelen $\neg R \rightarrow P$ står for «alarmen går ikke hvis det rister». (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\neg R \rightarrow P$ står for «hvis det ikke rister, går alarmen».

3 Semantikk for utsagnslogikk [5 poeng]

(a) Formelen $(P \lor P) \to (P \land P)$ er en tautologi. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi formelen er sann uansatt hvilken sannhetsverdi vi gir P. Vi kunne like gjerne ha skrevet $P \to P$.

(b) Formelen $\neg(P \to \neg Q)$ er ekvivalent med $P \land Q$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi den eneste måten å gjøre $\neg(P \to \neg Q)$ sann på, er ved å gjøre $(P \to \neg Q)$ usann, men det betyr at P må være sann og at $\neg Q$ må være usann, det vil si at Q må være sann.

(c) Formelen $\neg P$ er en logisk konsekvens av $P \to Q$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis P og Q begge er sanne, vil $\neg P$ være usann mens $P \to Q$ er sann.

(d) En valuasjon som gjør $\neg(P \lor (\neg Q \to R))$ sann, må gjøre Q sann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi valuasjonen som både P, Q og R usanne, gjør $\neg(P \lor (\neg Q \to R))$ sann. For at $\neg(P \lor (\neg Q \to R))$ skal være sann, må $(P \lor (\neg Q \to R))$ være usann, og da må både P og $\neg Q \to R$ være usanne. Da må $\neg Q$ være sann, det vil si at Q er usann, og R usann.

(e) En valuasjon som gjør $(P \to (P \land Q))$ usann, må gjøre Q usann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis $(P \to (P \land Q))$ er usann, må P være sann og $P \land Q$ være usann, men da må Q være usann.

4 Relasjoner [5 poeng]

La $R = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ være en relasjon på mengden $\{0,1,2\}$.

(a) Relasjonen R er refleksiv. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi vi har at alle tupler på formen $\langle x,x\rangle$ er i R. Vi har at $\langle 0,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$ og $\langle 2,2\rangle$ er i R.

(b) Relasjonen R er symmetrisk. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi når $\langle x,y\rangle$ er med i R, så er også $\langle y,x\rangle$ med i R.

(c) Relasjonen R er transitiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\langle 0,1\rangle$ og $\langle 1,2\rangle$ er med i R, men $\langle 0,2\rangle$ mangler.

(d) Relasjonen R er anti-symmetrisk. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\langle 0,1\rangle$ og $\langle 1,0\rangle$ er med i R, men $0 \neq 1$.

(e) Det finnes en delmengde av R som er en partiell ordning. (**Sant** / Usant)

Det er sant fordi $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ er en partiell ordning.

5 Funksjoner [5 poeng]

La F være mengden av alle funksjoner fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$

(a) Mengden F er endelig. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er 27 elementer i den.

(b) Alle funksjoner i F er bijektive. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det finnes funksjoner som ikke er surjektive og injektive. Funksjonen $f(x) = 1$ er for eksempel ingen av delene.

(c) Hvis f er bijektiv funksjon, vil $f(x) = x$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi vi for eksempel har en bijektiv funksjon f slik at $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ og $f(3) = 3$.

(d) Det finnes en funksjon i F som er surjektiv, men ikke injektiv. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi enhver surjektiv funksjon fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2, 3\}$ må være injektiv. Dette er fordi en surjektiv funksjon må «treffe» alle elementene i verdiområdet, og den eneste måten å gjøre dette på er ved at de tre elementene sendes til noe forskjellig.

(e) Det finnes en funksjon f i F som er slik at $f(1) = 2$ og $f(2) = 1$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi vi for eksempel kan ha at funksjon f slik at $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ og $f(3) = 3$.

6 Mer mengdelære [5 poeng]

(a) Mengdene $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ og $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ har samme kardinalitet. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ har to elementer, mens $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ har ett element.

(b) Potensmengden til den tomme mengden er $\{\emptyset\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi den eneste delmengden av den tomme mengden, er den tomme mengden.

(c) Hvis A er uendelig og B er endelig, må $A \cap B$ være uendelig. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi hvis B er endelig, må $A \cap B$ også være endelig.

(d) Hvis A er endelig, må $\overline{A}$ være uendelig. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det kommer an på hva den universelle mengden er. Hvis den universelle mengden er endelig, blir $\overline{A}$ også endelig.

(e) Alle uendelige mengder har uendelig mange endelige delmengder. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi for hvert element x i den uendelige mengden, får vi at $\{x\}$ er en delmengde.

7 Tillukninger og induktivt definerte mengder [5 poeng]

La $P = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ være mengden av oddetall.

(a) P er lukket under addisjon. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi hvis vi adderer to oddetall, får vi ikke nødvendigvis et nytt oddetall. For eksempel får vi 2 hvis vi adderer 1 og 1.

(b) P er lukket under multiplikasjon. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi vi hvis vi hvis vi multipliserer to oddetall, får vi et nytt oddetall.

(c) P er lukket under funksjonen $f(x) = x \cdot x + 4$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi hvis x er et oddetall, må $x \cdot x + 4$ også være et oddetall.

(d) P er lukket under funksjonen $f(x) = x - 4$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi hvis x er et oddetall, må $x - 4$ også være et oddetall.

(e) P er den minste mengden som inneholder 1 og som lukket under funksjonen $f(x) = x + 2$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi dette beskriver mengden av *positive* oddetall.

8 Førsteordens språk [5 poeng]

Anta at vi har signaturen $\langle \uparrow, \downarrow\ ; \oplus, \otimes\ ;\ \leftrightsquigarrow, \bowtie \rangle$, det vil si at $\uparrow$ og $\downarrow$ er konstantsymboler, $\oplus$ og $\otimes$ er funksjonssymboler og at $\leftrightsquigarrow$ og $\bowtie$ er relasjonssymboler. Ariteten til funksjons- og relasjonssymbolene er to, og vi bruker infiksnotasjon.

(a) $(\uparrow \oplus \downarrow) \otimes \downarrow$ er en *term* i dette språket. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er satt sammen av kun konstant- og funksjonssymboler.

(b) $\uparrow \wedge (\downarrow \oplus \uparrow)$ er en *formel* i dette språket. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det som står til venstre for konjunkssymbolet ikke er en formel, men termen $\uparrow$.

(c) $(x \oplus \downarrow) \bowtie \uparrow$ er en *atomær formel* i dette språket. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi $\bowtie$ er et relasjonssymbol og $(x \oplus \downarrow)$ og $\uparrow$ er termer.

(d) $\exists y((\downarrow \otimes y) \to \downarrow)$ er en *formel* i dette språket. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det som står til høyre for implikasjonspilen ikke er en formel, men termen $\downarrow$.

(e) $(\uparrow \leftrightsquigarrow (\downarrow \otimes \uparrow)) \to (\downarrow \bowtie \uparrow)$ er en *sammensatt formel* i dette språket. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det som står til venstre og høyre for implikasjonspilen begge er formler. Da er ikke formelen atomær, men sammensatt.

9 Modeller [5 poeng]

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\{1, 2, 3\}$, slik at

- $P^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$,
- $Q^{\mathcal{M}} = \{2, 3\}$ og
- $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$.

(a) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x(Px \wedge Qx)$ (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi det finnes et element, for eksempel 1, som *ikke* er et element i $P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

(b) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x(Qx \rightarrow \neg Px)$ (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi 2 er et element i $Q^{\mathcal{M}}$, men 2 er *også* et element i $P^{\mathcal{M}}$.

(c) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x(Qx \rightarrow \exists y(Rxy \wedge Ryx))$ (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi 2 er et element i $Q^{\mathcal{M}}$, men det finnes ikke noe element b slik at *både* $\langle 2, b\rangle$ og $\langle b, 2\rangle$ er i $R^{\mathcal{M}}$.

(d) Det er slik at $\mathcal{M} \models \exists x(Px \wedge \exists y(Rxy \wedge Ryx))$ (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi 1 er et element i $P^{\mathcal{M}}$, og vi har at $\langle 1, 1\rangle$ er i $R^{\mathcal{M}}$.

(e) Det er slik at $\mathcal{M} \models \forall x(Qx \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Qy))$ (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi 3 er et element i $Q^{\mathcal{M}}$, og $\langle 3, 1\rangle$ er et element i $R^{\mathcal{M}}$, men 1 er *ikke* et element i $Q^{\mathcal{M}}$.

10 Førsteordens semantikk [5 poeng]

(a) Formelen $\exists xPx$ er en logisk konsekvens av $\forall xPx$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi enhver modell som gjør $\forall xPx$ sann, også må gjøre $\exists xPx$ sann.

(b) Alle modeller som gjør $\exists x \exists y Rxy$ sann, gjør også $\exists x Rxx$ sann. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det går an å tolke R som en ikke-tom og irrefleksiv relasjon, det vil si at det finnes minst et tuppel $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$, men ikke noe tuppel på formen $\langle a, a\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

(c) Alle modeller som gjør $\forall xRxx$ sann, må gjøre $\exists x \neg Rxx$ usann. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi enhver modell som gjør $\forall xRxx$ sann, må tolke R slik at $\langle a, a\rangle \in R^{\mathcal{M}}$ for alle a i domenet. Da kan det ikke finnes et element a slik at $\langle a, a\rangle$ *ikke* er med i $R^{\mathcal{M}}$, og dermed må $\exists x \neg Rxx$ være usann.

(d) Formelen $\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$ er gyldig. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi, fordi det er mulig at det finnes elementer a og b slik at både $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$ og $\langle b, a\rangle \in R^{\mathcal{M}}$. Da blir formelen usann.

(e) Formelen $\forall x(Rxx \to \exists yRxy)$ er gyldig. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi hvis $\langle a, a\rangle \in R^{\mathcal{M}}$, må det finnes et element b (nemlig a) slik at $\langle a, b\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

11 Ekvivalensklasser [5 poeng]

Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på $M = \{0, 1, 00, 01, 10, 11\}$ slik at ekvivalensklassene er $\{0, 00\}$, $\{1, 11\}$ og $\{01, 10\}$.

(a) $1 \sim 10$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi 1 og 10 ikke er i samme ekvivalensklasse.

(b) $01 \sim 10$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi 01 og 10 er i samme ekvivalensklasse.

(c) $1 \in [11]$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi 1 og 11 er i samme ekvivalensklasse.

(d) $[00] \subseteq [01]$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi 00 og 01 ikke er i samme ekvivalensklasse.

(e) $\{01, 10\}$ er en partisjon av M. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi mengden ikke inneholder *delmengder* av M. En partisjon av M er for eksempel $\{\{0, 00\}, \{1, 11\}, \{01, 10\}\}$.

12 Kombinatorikk [5 poeng]

(a) $\binom{6}{2} = \binom{6}{3}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi $\binom{6}{2} = 15$ og $\binom{6}{3} = 20$.

(b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ har mer enn 64 delmengder. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi mengden har nøyaktig 32 delmengder.

(c) Det er nøyaktig seks funksjoner fra $\{1, 2\}$ til $\{1, 2, 3\}$. (Sant / **Usant**)

Dette er usant fordi det er ni funksjoner fra $\{1, 2\}$ til $\{1, 2, 3\}$.

(d) Det er nøyaktig tolv injektive funksjoner fra $\{1, 2\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$. (**Sant** / Usant)

Dette er sant fordi det er $4 \cdot 3 = 12$ slike funksjoner. For argumentet 1 er det fire muligheter; og for hver av disse er det tre muligheter for tallet 2.

(e) Det er nøyaktig fjorten surjektive funksjoner fra $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{1, 2\}$. (**Sant** / Usant)

Antallet funksjoner fra $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{1, 2\}$ (uten noe krav til surjektivitet) er $4^2 = 16$. Det er kun to av disse som *ikke* er surjektive, og derfor er det fjorten *surjektive* funksjoner.

13 Abstrakt algebra [5 poeng]

(a) Funksjonen $f(x) = 2 \cdot x + 1$ på heltallene, $\{\ldots, 2, 1, 0, -1, -2, \ldots\}$, har en invers funksjon. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi 0 ikke har noen invers. Det finnes ikke noe heltall x slik at $2 \cdot x + 1 = 0$.

(b) Hvis $\langle G, \bullet \rangle$ er en *gruppe* og $x \in G$, må det finnes et element $y \in G$ slik at $x \bullet y = e$, hvor e er identitetselementet for $\bullet$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi det er slik en gruppe er definert. Ethvert element må ha en invers.

(c) Den binære operasjonen *konkatenering* på strenger er en idempotent operasjon. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi for det ikke nødvendigvis er slik at $ss = s$. For eksempel har vi at $\mathtt{00} \neq \mathtt{0}$.

(d) Den algebraiske strukturen $\langle \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, + \rangle$, slik at $x + y = \mathtt{0}$ hvis og bare hvis $x = y$, er en gruppe. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi $+$ er assosiativ, $\mathtt{0}$ er et identitetselement, og både $\mathtt{0}$ og $\mathtt{1}$ har inverser (de er sine egen inverser).

(e) Den algebraiske strukturen $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, hvor $\mathbb{R}$ står for de reelle tallene, er en gruppe. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi 0 ikke har noen invers.

14 Formelle språk [5 poeng]

La L være språket definert av det regulære uttrykket `(01|10)*(Λ|0|00|111)`.

(a) Det er slik at `01` $\in$ L. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi fra `(01|10)*` kan vi velge `01` og fra `(Λ|0|00|111)` kan vi velge Λ.

(b) Det er slik at `10011` $\in$ L. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi fra `(01|10)*` kan vi først velge `10`, og deretter `01`, men det er ingen måte å få `1`, som er det siste tegnet i strengen, fra `(Λ|0|00|111)` på.

(c) Det er slik at `0110010` $\in$ L. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi fra `(01|10)*` kan vi først velge `01`, og deretter `10`, og deretter `01`, og til slutt kan vi velge `0` fra `(Λ|0|00|111)`.

(d) Det er slik at $\{(010)^n \mid n \geqslant 0\} \subseteq L$. (Sant / **Usant**)

> Dette er usant fordi hvis $n = 2$, får vi `010010`, som ikke er i L.

(e) Det er slik at $\{(01)^n(10)^n \mid n \geqslant 0\} \subseteq L$. (**Sant** / Usant)

> Dette er sant fordi fra `(01|10)*` får vi alle strengene vi ønsker (og vi kan velge Λ fra `(Λ|0|00|111)`).

Større oppgaver [70 poeng]

15 Førsteordens formler [10 poeng]

Anta at R, K og S er relasjonssymboler slik at

Rx tolkes som «x *er et rektangel*»,
Kx tolkes som «x *er et kvadrat*» og
Sxy tolkes som «x *er større enn* y».

Finn førsteordens formler som uttrykker følgende utsagn.

(a) [2 poeng] Alle kvadrater er rektangler.

$\forall x(Kx \to Rx)$

(b) [2 poeng] Alle kvadrater er større enn alle rektangler.

$\forall x \forall y(Kx \land Ry \to Sxy)$

(c) [2 poeng] Alt som er større enn et kvadrat må være et rektangel.

$\forall x \forall y(Ky \land Sxy \to Rx)$

(d) [2 poeng] Det finnes et kvadrat som er større enn alle kvadrater.

$\exists x(Kx \land \forall y(Ky \to Sxy))$

(e) [2 poeng] Hvis det finnes to kvadrater hvor det ene er større enn det andre, så finnes det et kvadrat som er større enn det minste av dem, og mindre enn det største.

$\forall x \forall z(Kx \land Kz \land Sxz \to \exists y(Ky \land Sxy \land Syz))$

Kommentar: Det gis full uttelling for alle svar som er ekvivalente med løsningsforslaget. Det kan gis 1 eller 2 poeng for besvarelser som er veldig nær riktige, eller som representerer en annen rimelig tolkning av oppgaveteksten.

16 Relasjoner og funksjoner [10 poeng]

La $A = \{1, 2, 3\}$.

(a) [2 poeng] Gi en relasjon S_1 på A som er refleksiv og transitiv, men ikke symmetrisk.

En slik relasjon er $S_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

(b) [2 poeng] Gi en relasjon S_2 på A som er refleksiv og symmetrisk, men ikke transitiv.

En slik relasjon er $S_2 = \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle$.

(c) [2 poeng] Gi en relasjon S_3 på A som er symmetrisk og transitiv, men ikke refleksiv.

En slik relasjon er $S_3 = \emptyset$. En annen er $S_3 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$.

(d) [2 poeng] Gi en funksjon f fra A til A som ikke er injektiv.

En slik funksjon er $f = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$.

(e) [2 poeng] Gi en funksjon g fra A til A som er en bijeksjon, men som ikke er identitetsfunksjonen.

En slik funksjon er $g = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$.

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar.

17 Grafer [10 poeng]

I denne oppgaven skal du tegne på eget ark. Du skal tegne fem grafer, og alle grafene skal tegnes ved siden av hverandre på den samme siden. Forsøk å gjøre grafene så pene og enkle å lese som mulig. Du trenger ikke å begrunne hvorfor grafene har de aktuelle egenskapene, og du trenger ikke å sette navn på nodene eller kantene.

I hver av oppgavene under skal løsningen være en enkel, urettet graf med fem noder.

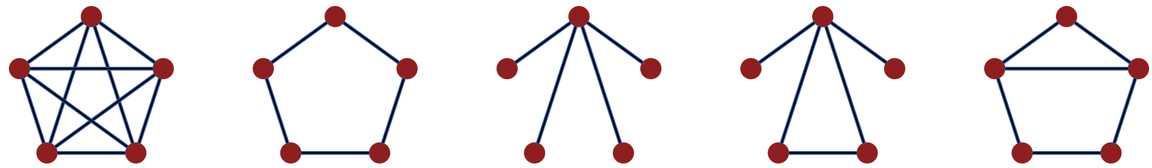
(a) [2 poeng] Tegn en komplett graf.

(b) [2 poeng] Tegn en sammenhengende graf som ikke er komplett.

(c) [2 poeng] Tegn en graf som er et tre.

(d) [2 poeng] Tegn en sammenhengende graf som ikke er et tre.

(e) [2 poeng] Tegn en graf som har en hamiltonsti og en eulervei, men ingen eulerkrets.



(a) (b) (c) (c) (c)

Kommentar: Det gis to poeng for hver graf som har alle egenskapene det spørres etter, og null poeng ellers.

18 Naturlig deduksjon [10 poeng]

I denne oppgaven skal du føre bevis og utledninger i naturlig deduksjon, og du skal føre disse på et eget ark. Alle bevisene og utledningene skal gjøres på ett og samme ark. Forsøk å være så nøyaktig som mulig, og gjør bevisene og utledningene så enkle å lese og forstå som mulig.

(a) [3 poeng] Gi et bevis ved naturlig deduksjon for $(P \wedge Q) \to P$.

$$\dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]^1}{P}\,\wedge\mathrm{E}}{(P \wedge Q) \to P}\,\to\mathrm{I}_1$$

(b) [3 poeng] Gi en utledning ved naturlig deduksjon av $P \to (P \wedge Q)$ med Q som åpen antagelse.

$$\dfrac{\dfrac{[P]^1 \qquad Q}{(P \wedge Q)}\,\wedge\mathrm{I}}{P \to (P \wedge Q)}\,\to\mathrm{I}_1$$

(c) [4 poeng] Gi et bevis ved naturlig deduksjon for $\neg(P \vee (P \to Q)) \to \neg Q$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q]^1}{P \to Q}\,\to\mathrm{I}}{P \vee (P \to Q)}\,\vee\mathrm{I} \qquad [\neg(P \vee (P \to Q))]^2}{\bot}\,\to\mathrm{E}}{\neg Q}\,\to\mathrm{I}_1}{\neg(P \vee (P \to Q)) \to \neg Q}\,\to\mathrm{I}_2$$

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen dersom bevisene og utledningene er korrekte, det vil si, i prioritert rekkefølge, at reglene er anvendt på en korrekt måte (ca. 70%), at konklusjonen samsvarer med oppgaven (ca. 10%), at mengden av åpne og lukkede antakelser samsvarer med oppgaven (ca. 10%), og at reglene er angitt med korrekte navn (ca. 10%). Dersom noen av disse ikke er oppfylt kan det trekkes poeng proporsjonalt med de angitte prosentene. Det trekkes ikke poeng dersom kandidaten har tatt unødvendige "omveier".

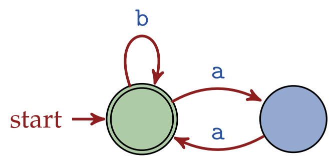
19 Regulære språk og induksjon [10 poeng]

La S være den minste mengden slik at $\Lambda \in S$, og hvis $x \in S$ så er $x\texttt{aa}, \texttt{b}x, x\texttt{b} \in S$.

(a) [3 poeng] Gi et regulært uttrykk for S.

```
(aa|b)*
```

(b) [3 poeng] Tegn en DFA for S.



(c) [4 poeng] Bevis ved strukturell induksjon at antall a-er i en streng i S alltid er et partall.

Basisteget er å vise at påstanden holder for Λ. Det er tilfellet fordi den tomme strengen inneholder null antall a-er.

Induksjonssteget er å vise at hvis påstanden holder for $x \in S$, så holder den også for $x\texttt{aa}$, $\texttt{b}x$ og $x\texttt{b}$. Vi antar derfor at påstanden holder for $x \in S$, det vil si at antall a-er i x er et partall. Dette er **induksjonshypotesen**. Vi får tre tilfeller; ett for $x\texttt{aa}$, ett for $\texttt{b}x$ og ett for $x\texttt{b}$:

- $x\texttt{aa}$ har to flere a-er, og dermed et partall antall.
- $\texttt{b}x$ har ingen flere a-er, og dermed fremdeles et partall antall.
- $x\texttt{b}$ har ingen flere a-er, og dermed fremdeles et partall antall.

Ved strukturell induksjon følger det at antall a-er i en streng i S alltid er et partall.

Kommentar: For å få full uttelling for **(a)** og **(b)** må henholdsvis det regulære uttrykket og automaten faktisk representere det gitte språket. Det trekkes ikke poeng dersom kandidaten har tatt unødvendige "omveier". Det kan gis ett poeng dersom forslaget er en delmengde av det gitte språket. For å få full uttelling for **(c)** må alle delene av induksjonsbeviset være på plass. Grovt sett er poengene fordelt slik: basissteget ett poeng, formulering og bruk av induksjonshypotesen ett poeng, induksjonssteget ett poeng, konklusjon og helhet ett poeng.

20 Bevis [20 poeng]

(a) [8 poeng] Bevis ved matematisk induksjon at $n! < n^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor $n \geqslant 2$.

Basissteget er å bevise at påstanden holder for $n = 2$. Siden $2! = 2$ og $2^2 = 4$ stemmer påstanden for $n = 2$. Vi antar nå at påstanden holder for k, altså at $k! < k^k$. Dette er **induksjonshypotesen**. Vi må vise at påstanden hlder for $k + 1$:

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! && \text{fra definisjonen av } n! \\
&< (k+1)\cdot k^k && \text{fra induksjonshypotesen} \\
&< (k+1)\cdot (k+1)^k && \text{fordi } k < k+1 \\
&= (k+1)^{(k+1)}
\end{aligned}
$$

Påstanden holder dermed for $k + 1$. Det følger ved matematisk induksjon at påstanden holder for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor $n \geqslant 2$.

(b) [4 poeng] La Fibonacci-tallene $F(n)$ være gitt ved at $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, og at $F(n + 1) = F(n) + F(n - 1)$ for $n \geqslant 1$. Bevis at $F(n + 1) \geqslant F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Du kan bruke at $F(n) \geqslant 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi har at $F(1) \geqslant F(0)$ per definisjon. Resultatet følger fra følgende utregning, som gjelder for alle $n \geqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= F(n) + F(n-1) && \text{per definisjon av } F(n) \\
&\geqslant F(n) && \text{fordi } F(n-1) \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Siden denne utregningen gjelder en vilkårlig $n \geqslant 1$, er påstanden bevist.

(c) [4 poeng] Bevis at $2 \cdot F(n) \geqslant F(n + 1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor $n \geqslant 1$. Du kan bruke resultatet fra forrige deloppgave.

Resultatet følger fra følgende utregning:

$$
\begin{aligned}
2\cdot F(n) &= F(n) + F(n) && \text{ved vanlig regning} \\
&\geqslant F(n) + F(n-1) && \text{fordi } F(n) \geqslant F(n-1) \\
&= F(n+1) && \text{per definisjon av } F(n)
\end{aligned}
$$

Det går også an å regne slik:

$$
\begin{aligned}
F(n+1) &= F(n) + F(n-1) && \text{per definisjon av } F(n) \\
&\leqslant F(n) + F(n) && \text{siden } F(n-1) \leqslant F(n) \\
&= 2\cdot F(n)
\end{aligned}
$$

Siden utregningen gjelder for en vilkårlig $n \geqslant 1$, er påstanden bevist.

(d) [4 poeng] Bevis at $F(n+1) \geqslant 1,5 \cdot F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Du kan bruke resultatet fra forrige deloppgave.

(Her skulle det ha stått «for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor $n \geqslant 2$».)Resultatet følger fra følgende utregning, som gjelder for alle $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + F(n-1) && \text{per definisjon av } F(n) \\ &\geqslant F(n) + 0,5 \cdot F(n) && \text{fra forrige resultat} \\ &= 1,5 \cdot F(n) \end{aligned}$$

Merk at resultatet fra forrige deloppgave, $2 \cdot F(n) \geqslant F(n+1)$, kan skrives om til $F(n-1) \geqslant 0,5 \cdot F(n)$, hvor $n \geqslant 1$. Siden utregningen over gjelder for en vilkårlig $n \geqslant 2$, er påstanden bevist.

Kommentar: For å få full uttelling for **(a)** må alle delene av induksjonsbevisene være på plass. Grovt sett er poengene fordelt slik: basisstegene er verdt omtrent to poeng (ett poeng per basissteg), formulering og antakelse av induksjonshypotesen er verdt omtrent ett poeng, induksjonsstegene er verdt omtrent fire poeng (to poeng per induksjonssteg), og konklusjon og helhetsinntrykk er verdt omtrent ett poeng. For **(b)**, **(c)** og **(d)** gis det full uttelling dersom bevisene er korrekte. Det trekkes ett til to poeng for hver feil i bevisene, avhengig av hvor alvorlige de er.