

Kapittel 3: Semantikk for utsagnslogikk

Nettkurs

Boka

Definisjoner

- Sannhetsverdier (*truth values*):
 - 1 - sann
 - 0 - usann
- Tolkninger av forskjellige logiske utsagn (hvis sannhetsverdier for alle atomære utsagn er gitt) representeres av sannhetsverditabeller

Tolkning av formler
Tolkning definert


Tolkning definert

Definisjon (Tolkning av utsagnslogiske formler)

Hvis sannhetsverdiene til F og G er gitt, er sannhetsverdien til $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ og $(F \rightarrow G)$ som gitt i følgende tabeller, som viser hvordan konnektivene skal tolkes:

F	$\neg F$	F	G	$(F \wedge G)$	F	G	$(F \vee G)$	F	G	$(F \rightarrow G)$
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 3
Side 5 / 22



- **Valuasjon** (*valuation*) - en tilordning av sannhetsverdier til alle utsagnslogiske formler som er slik at tabellene over overholdes
 - F.eks. hvis man antar at $P = 1$ og $Q = 0$, da er det automatisk at $\neg Q = 1$ og $(P \wedge \neg Q) = 1$. Dette her er valuasjon.
- **Sannhetsverditabellen** (*truth table*) - en tabell som forteller hva sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel er på bakgrunn av hvilke sannhetsverdier som er tilordnet utsagnsvariablene

Valuasjoner og sannhetsverditabeller
Sannhetsverditabeller

Sannhetsverditabeller

En praktisk måte å regne ut valuasjoner på er ved å bruke såkalte sannhetsverditabeller.

Definisjon (Sannhetsverditabell)

En **sannhetsverditabell** (eng: *truth table*) er en tabell som forteller hva sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel er på bakgrunn av hvilke sannhetsverdier som er tilordnet utsagnsvariablene.

P	Q	(P	∧	¬	Q)
1	1		1	0	0	1	
1	0		1	1	1	0	
0	1		0	0	0	1	
0	0		0	0	1	0	

INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 3
Side 9 / 22

Logisk ekvivalens

- To formel F og G er **logisk ekvivalente** (*logically equivalent*), eller bare **ekvivalente**, hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene. Alle variasjoner som gjør F sann, må gjøre G sann, og vice versa.
- Dette skrives sånn: $F \Leftrightarrow G$
- F. eks. $P \Leftrightarrow \neg\neg P$
- NB! \Leftrightarrow er bare en del av **metaspråket** og brukes som en forkortelse for "hvis og bare hvis". Den er ikke en del av det **formelle** utsagnslogiske **språket**.

- Ekvivalens av to formler kan bli vist ved enten en sannhetsverditabell, eller ved resonnement
 - sannhetsverditabell

Logisk ekvivalens
Skrivemåter

Skrivemåter

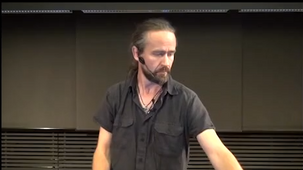
Eksempel (Ekvivalente formler)

- De utsagnslogiske formlene $(P \rightarrow Q)$ og $(\neg P \vee Q)$ er ekvivalente.
- Dette er det enklest å se ved hjelp av en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P \rightarrow Q)$			$(\neg P \vee Q)$		
1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0

- Vi ser at formlene har samme sannhetsverdi uansett tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariablene.

INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 3
Side 17 / 22



- resonnement

Logisk ekvivalens
Skrivemåter


Skrivemåter

Eksempel (Oppgave)

Vis at formlene $\neg(P \rightarrow Q)$ og $(P \wedge \neg Q)$ er ekvivalente.

- For å bevise dette er det nok å vise at $\neg(P \rightarrow Q)$ er sann hvis og bare hvis $(P \wedge \neg Q)$ er sann.
- Anta først at $\neg(P \rightarrow Q)$ er sann.
 - Da må $(P \rightarrow Q)$ være usann. (Det er slik \neg -formler tolkes.)
 - Da må P være sann og Q være usann. (Det er slik \rightarrow -formler tolkes.)
 - Da må $\neg Q$ være sann. (Det er slik \neg -formler tolkes.)
 - Da må $(P \wedge \neg Q)$ være sann. (Det er slik \wedge -formler tolkes.)
- Anta så at $(P \wedge \neg Q)$ er sann.
 - Da må P og $\neg Q$ være sanne. (Det er slik \wedge -formler tolkes.)
 - Da må Q være usann. (Det er slik \neg -formler tolkes.)
 - Da må $(P \rightarrow Q)$ være usann. (Det er slik \rightarrow -formler tolkes.)
 - Da må $\neg(P \rightarrow Q)$ være sann. (Det er slik \neg -formler tolkes.)

INF1080 – Logiske metoder for informatikk
Kapittel 3
Side 18 / 22



Noen viktige ekvivalenser

- **Distribusjon**
 - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- **De Morgan**
 - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
 - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- **Assosiativitet**
 - $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
 - $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
 - I.e. parenteser spiller ingen rolle

- **Kommutativitet**
 - $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
 - $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
 - I.e. plass spiller ingen rolle
- **Dobbel negasjon**
 - $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- **Implikasjon**
 - $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
 - $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$