Kapittel 13: Førsteordens språk

Nettkurs

Boka

Språk med større uttrykkskraft

- I utsagnslogikk har vi kun utsagnsvariabler og konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
- Førsteordens logikk, eller *predikatlogikk*, også har *kvantorer*:
  - $\exists$, **eksistenskvantoren** (*existential quantifier*), og
  - $\forall$, **allkvantoren** (*universal quantifier*).
- Ved hjelp av disse kan vi representere og analysere *kvantifiserte* utsagn, dvs. utsagn om at det *finnes* et objekt med en bestemt egenskap, eller at *alle* objekter har en bestemt egenskap.

Signaturer

- For å definere førsteordens formler, må vi se på de minste bestanddelene i språket og hvilke symboler som er tillatt. Dette spesifiserer vi i en såkalt *signatur*.
- En signatur består av konstanssymboler, funksjonssymboler og relasjonssymboler.
- En signatur gir opphav til en induktivt definert mengde av førsteordens *termer*.
- Mengden av førsteordens *formler* defineres deretter induktivt fra mengde av førsteordens termer.
- Et førsteordens språk består av to typer symboler:
  - *Logiske*, som alltid blir tolket på samme måte, f.eks. konnektivene.
  - *Ikke-logiske*, som kan tolkes fritt, på samme måte som utsagnsvariabler i utsagnslogikk.
- En signatur oppgis som et tuppel av tre mengder på en følgende måte: $\langle \quad \underbrace{a, b, c...}_{\text{konstanssymboler}} \quad ; \quad \underbrace{f, g, h...}_{\text{funksjonssymboler}} \quad ; \quad \underbrace{R, S, T...}_{\text{relasjonssymboler}} \quad \rangle$
- Signaturen kun definerer syntaks. Den har ingenting å si om semantikk før vi har definert den, selv om vi kan ha noe intuisjoner om hva ett eller annet symbol betyr.

Førsteordens språk

- Ethvert **førsteordens språk** (*first-order language*) består av følgende logiske symboler:
    - De logiske **konnektivene**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.
    - **Kvantorene** (*quantifiers*), $\exists$ og $\forall$.
    - En uendelig, tellbar mengde av **variabler** (*variables*).
- Ethvert førsteordens språk består av følgende ikke-logiske symboler:
    - En mengde av **konstanssymboler** (*constant symbols*).
    - En mengde av **funksjonssymboler** (*function symbols*).
    - En mengde av **relasjonssymboler** (*relation symbols*).
    - Disse må være disjunkte (distinctive).
    - Ethvert funksjons- og relasjonssymbol er assosiert med et naturlig tall, kalt **ariteten** (*arity*) til symbolet (teller antall argumenter som trengs for en operasjon).
- Eksempel: Signaturen $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$ beskriver et førsteordens språk for mengdelære.
    - Vi antar at ariteten til alle funksjons- og relasjonssymboler er to.

Førsteordens termer

- Anta at et førsteordens språk er gitt. Mengden av **førsteordens termer** (*first-order terms*) er induktivt definert som den minste mengden slik at enhver variabel og konstant er en **term**, og hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en **term**.
- Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skreve f.eks.:
    - fa i stedet for $f(a)$
    - gaa i stedet for $g(a, a)$
    - $gfaa$ i stedet for $g(f(a), a)$

Prefiks-, infiks- og postfiksnotasjon

- **Prefiksnotasjon**: $+(x, y)$

- **Postfiksnotasjon**: $(x, y)+$
- **Infiksnotasjon**: $(x + y)$

Atomær formler

- Hvis R er en relasjonssymbol med aritet $n > 0$ og $t_1, ..., t_n$ er termer, er $R(t_1, ..., t_n)$ er en **atomær formel**.

Førsteordens formler

- Anta at et førsteordens språk er gitt. Mengden av **førsteordens formler** (*first-order formulas*) er den minste mengden slik at:
    - Alle atomære formler er **formler**.
    - Hvis ϕ og ψ er formler, er $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ og $(\phi \rightarrow \psi)$ **formler**.
    - Hvis ϕ er en formel og x er en variabel, er $\forall x\phi$ og $\exists x\phi$ **formler**.
- Alle forekomster av en variabel x i ϕ sies å være **bundet** (*bound*) i formlene $\forall x\phi$ og $\exists x\phi$ og innenfor **skopet** (*scope*) til den gjeldende kvantoren.

Presedensregler

- $\forall$ og $\exists$ binder sterkest, like mye som $\neg$.
  For eksempel, står $\exists yPy \wedge Px$ for $(\exists yPy \wedge Px)$, hvor skopet til $\exists y$ er kun Py, og ikke $\exists(yPy \wedge Px)$.