Kapittel 24: Formelle språk og deduksjon

Skrevet av Mohammad Fadel Al Khafaji

Nettkurs

Boka

Naturlig deduksjon består av en rekke slutningsregler som er til for å trekke konklusjoner fra antakelser

Dette er rent syntaktisk konstruksjoner, og de forteller hvordan utledninger kan konstrueres

I dette faget er vi begrenset til de tre konnektivene $\rightarrow$, $\wedge$ og $\perp$.

Formelen $F \rightarrow \perp$ uttryker nøyaktig det samme som $\neg F$.

Sluttningsreglene

En slutningsregel, eller bare regel, i naturlig deduksjon har følgende form:

$$\frac{F \qquad F \rightarrow G}{G} \rightarrow\mathrm{E}$$

Formlene over streken kalles premisser, og formelen under streken kalles konklusjonen.

Vi antar at F og $F \rightarrow G$ er sann, da må G også være sann.

Vi sier at $\rightarrow$ over streken i dette tilfellet blir eliminert.

Navnet på regelen står ved siden av streken. Denne regelen kalles $\rightarrow E$, som står for $\rightarrow$-eliminasjon.

Reglene for $\wedge$-formler

Vi har en introduksjonsregel og to eliminasjonsregeler for $\wedge$-formler.

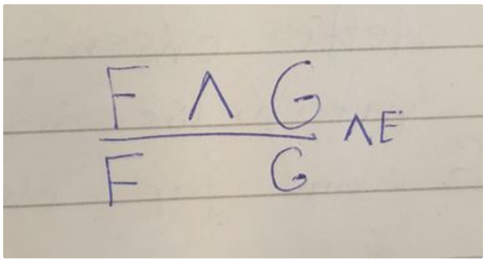
$$\frac{F \qquad G}{F \wedge G} \wedge\mathrm{I}$$

- Hvis vi har en utledning for F og en utledning for G, har vi også en utledning for $F \wedge G$.

*bilde tatt i forelesningen som tar for seg alle reglene i naturlig deduksjon

- Hvis vi har en utledning for $F \wedge G$, har vi også en utledning for F og en utledning for G.

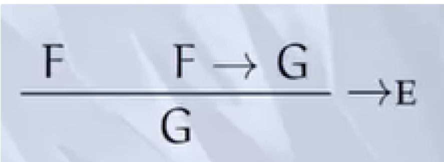
Legg merke at i naturlig deduksjon så gir den kun en konklusjon, så formelen:



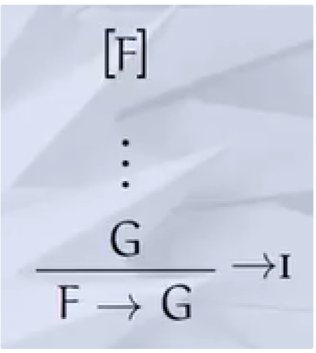
er syntaktisk ugyldig i naturlig deduksjon, selv om den er i teorien semantisk gyldig.

Reglene for $\rightarrow$-formler

Vi har en introduksjonsregel og en elimnasjonsregel for $\rightarrow$-formler.



Elimnasjonsregelen sier at hvis vi har en utledning for F og en utledning for $F \rightarrow G$, har vi også en utledning for G.



Introduksjonsregelen er annerledes; den sier at hvis vi har en utledning for G, hvor F er en antakelse, har vi også en utledning for $F \rightarrow G$, uten antakelsene om at F.

Dette svarer til intuisjonen vår om hva $F \to G$ betyr, nemlig at G følger fra antakelsen om at F.

I akkurat dette eksemplet er F i klammene en vilkårlig antakelse som vi kan resonere oss fram til G, som for eksempel kunne F vært $H \wedge G$.

Så selv om antakelsen F skulle vært sann eller usann, så vil $F \to G$ være sann.

Regelen for $\perp$ og reductio ad absurdum

$$\frac{\perp}{F}\ \perp$$

“Alt kan utledes fra $\perp$.”

Siden alt er en logisk konsekvens av en motsigelse.

$$\begin{array}{c}[F \to \perp] \\ \vdots \\ \dfrac{\perp}{F}\ \mathrm{RAA}\end{array}$$

- En form for elimnasjonsregel, fordi $\perp$ over streken elimineres.
- *Reductio ad absurdum-regelen* eller RAA-regelen er en formalisering av motsigelsesbevis.
- Hvis det er mulig å utlede $\perp$ fra $F \to \perp$, har vi antakelsen om at $F \to \perp$.
- Dette svarer til å anta $\neg F$ og utlede en selvmotsigelse.

Vi antar at F er usann og vi kommer frem til at det er absurd og dermed konkluderer at det må være sann.

Lukking av antakelser

I to av reglene, $\to I$ og RAA, blir antakelsene fjernet, eller lukket, noe som indikeres ved at vi har satt klammer rundt antakelsene.

Hvis en antakelse ikke er lukket, kalles den åpen.

For å antyde når de ulike antakelsene blir lukket, settes det tall ved siden av klammene og ved navnene på reglene.

- Se for eksempel på $\to I$-regelen, introduksjonsregelen for$\to$.
- Hvis vi fra en antakelse F klarer å vise G, kan vi konkludere med $F \to G$.

Trenger vi å beholde antakelsen om at F?

- Nei, når vi først har utledet $F \to G$, vil det være tilfellet uten antakelsen om at F.

Er det forbudt å beholde antakelsen om at F?

- Nei, men det er nødvendig.

Grunnregelen er at vi lukker antakelser så ofte vi kan, fordi vi ønsker en utledning med så få åpne antakelser som mulig.

Eksempel Utledning 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{Q}\,{\land}\mathrm{E} \qquad \dfrac{[P \land Q]^1}{P}\,{\land}\mathrm{E}}{Q \land P}\,{\land}\mathrm{I}}{P \land Q \to Q \land P}\,{\to}\mathrm{I}_1$$

Dette er en utledning av $P \land Q \to Q \land P$ hvor alle antakelser er lukket. Slike utledninger kalles bevis.

Eksempel Utledning 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^2 \qquad [P \to \bot]^1}{\bot}\,{\to}\mathrm{E}}{(P \to \bot) \to \bot}\,{\to}\mathrm{I}_1}{P \to ((P \to \bot) \to \bot)}\,{\to}\mathrm{I}_2$$

Dette er en utledning av $P \to ((P \to \bot) \to \bot)$ (eller $P \to \neg\neg P$) hvor alle antakelsene er lukket.

Eksempel Utledning 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{Q}\land E \qquad \dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{P}\land E \qquad [P \to (Q \to R)]^2}{Q \to R}\to E}{R}\to E}{\dfrac{(P \land Q) \to R}{(P \to (Q \to R)) \to ((P \land Q) \to R)}\to I_2}\to I_1$$

Dette er en utledning av $(P \to (Q \to R)) \to ((P \land Q) \to R)$ hvor alle antakelser er lukket.

Utledninger og bevis

Et bevis for en formel F er en utledning hvor F er konklusjonen og hvor alle antakelser er lukkede.

En formel er bevisbar hvis det finnes et bevis for den.

Eksempel (Bevis)

$$\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{Q}\land E}{P \land Q \to Q}\to I_1$$

Dette er et bevis for $((P \land Q) \to Q)$.

Eksempel (Bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \qquad P \to Q}{Q}\to E \qquad Q \to \bot}{\bot}\to E}{P \to \bot}\to I_1$$

Dette er ikke et bevis, men en utledning med konklusjonen $P \to \bot$ og åpne antakelser $P \to Q$ og $Q \to \bot$.

Eksempel (Bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1 \qquad P \to Q}{Q}\,{\to}E \qquad [\neg Q]^2}{\bot}\,{\to}E}{\neg P}\,{\to}I_1}{\neg Q \to \neg P}\,{\to}I_2$$

Det er fremdeles ikke et bevis, fordi $P \to Q$ er en åpen antakelse i utledningen.

Denne utledningen fanger inn at hvis $P \to Q$ er sann, så må også $\neg Q \to \neg P$ være sann.

Et spesialtilfelle

Vi kan godt anvende $\to$I-regelen selv om ingen antakelser lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{[P]^1}{Q \to P}\,{\to}I}{P \to (Q \to P)}\,{\to}I_1$$

Her får vi et bevis for $P \to (Q \to P)$.

Det er ingen antakelse Q som lukkes, men det er helt OK.

Hvis du vet at P, vet du også at $Q \to P$, uansett hva Q er.

Utledninger i praksis

I praksis lønner det seg for å tenke "nedenfra og opp" og "ovenfra og ned" når vi forsøker å finne bevis.

Vi kan godt begynne med konklusjonen og resonnere oss fram til hva premissen må være ved å spørre "hvilken regel ble sist anvendt for å få denne konklusjonen?"

Negasjon og RAA

Det er en veldig viktig forskjell mellom følgende bevis:

$$\dfrac{\begin{matrix}[F]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg F}\rightarrow\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg F]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{F}\,\mathrm{RAA}$$

I utledningen til venstre fører antakelsen F til en motsigelse, og at derfor kan ikke F være tilfellet.

I utledningen til høyre fører antakelsen $\neg F$ til en motsigelse, men konklusjonen er her at F holder, ikke bare at $\neg F$ ikke kan være tilfellet.

Eksempel (Bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P]^1 \qquad [\neg\neg P]^2}{\bot}\rightarrow\mathrm{E}}{P}\,\mathrm{RAA}_1}{\neg\neg P \rightarrow P}\rightarrow\mathrm{I}_2$$

Dette er et bevis for $\neg\neg P \rightarrow P$.

Uten RAA-regelen er det umulig å få et bevis for $\neg\neg P \rightarrow P$.

Regelne for $\vee$-formler

Introduksjonsreglene:

$$\dfrac{F}{F \vee G}\vee\mathrm{I} \qquad\qquad \dfrac{G}{F \vee G}\vee\mathrm{I}$$

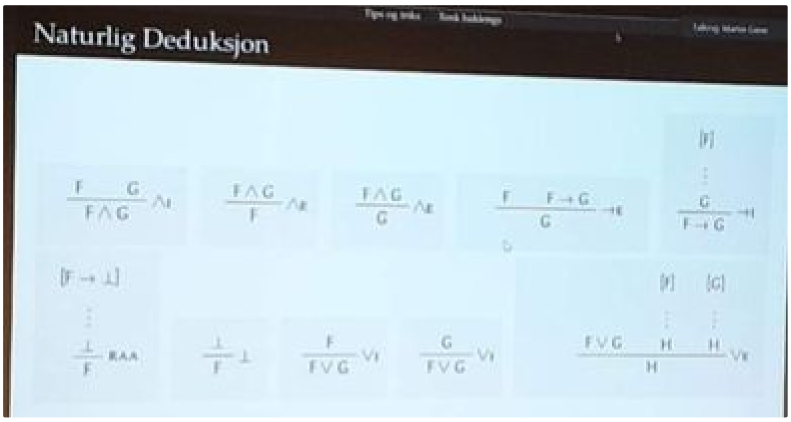
$$\dfrac{F \lor G \qquad \begin{matrix}[F]\\ \vdots \\ H\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[G]\\ \vdots \\ H\end{matrix}}{H}\lor_E$$

Elimasjonsregelen sier intuitivt at hvis vi vet $F \lor G$, og vi kan fra både F og G kan konkludere med H, så kan vi konkludere med H.

$$\dfrac{\dfrac{[P \lor Q]^2 \qquad \dfrac{[P]^1}{Q \lor P}\lor_I \qquad \dfrac{[Q]^1}{Q \lor P}\lor_I}{Q \lor P}\lor_{E_1}}{P \lor Q \to Q \lor P}\to_{I_2}$$

Dette er et bevis for $P \lor Q \to Q \lor P$.

Bilde jeg tok i forelesningen med alle reglene:



Kommentar

Dette er ork, men ta vare på deg selv.