

平稳时间序列分析

03

引言

- 根据Wold分解定理，任意一个离散平稳时间序列都可以分解为一个确定性平稳序列和一个随机性平稳序列之和。且确定性序列可以表达为历史序列值的线性函数，而随机性序列可以表达为历史新息（历史纯随机波动）的线性组合，即

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j x_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

- 上式在统计上被称为自回归移动平均模型 (auto-regression moving average), 简称为ARMA模型。
- Wold分解定理保证了平稳序列一定可以用某个 ARMA 模型等价表达, 所以 ARMA模型是目前最常用的平稳序列拟合与预测模型。
- ARMA 模型实际上是一个模型族, 它又可细分为 AR 模型, MA 模型和 ARMA 模型三大类。

本章内容

01

AR模型

02

MA模型

03

ARMA模型

AR模型的定义

- 具有如下结构的模型称为p阶自回归模型，简记为 $AR(p)$

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t \end{cases}$$

- 特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $AR(p)$ 模型

- 令 $\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$ ，称 $\{y_t\}$ 是 $\{x_t\}$ 的中心化序列

$$y_t = x_t - \mu$$

自回归系数多项式

- 引进延迟算子, 中心化 $AR(p)$ 模型又可以简记为

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

- 称下式为p阶自回归系数多项式

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

延迟算子

- 延迟算子类似于一个时间指针，当前序列值乘以一个延迟算子，就相当于把当前序列值的时间向过去拨了一个时刻
- 记B为延迟算子，有

$$x_{t-1} = Bx_t$$

$$x_{t-2} = B^2 x_t$$

$$\vdots$$

$$x_{t-p} = B^p x_t, \forall p \geq 1$$

- 所以 $AR(p)$ 模型的简写形式如下导出

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p) x_t = \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow \Phi(B) x_t = \varepsilon_t$$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}, c$ 为任意常数
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$
- $(1-B)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i B^i$, 其中 $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

AR模型平稳性判别

- 判别原因
 - 要拟合一个平稳序列的发展, 用来拟合的模型显然也应该是平稳的。AR 模型是常用的平稳序列的拟合模型之一, 但并非所有的 AR 模型都是平稳的。
- 判别方法
 - 特征根判别法
 - 平稳域判别法

例3-1

- 考察如下四个模型的平稳性

$$(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

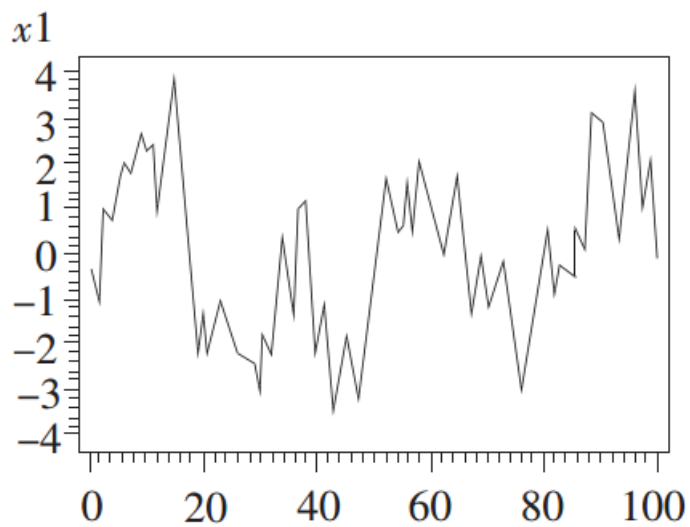
$$(2)x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3)x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

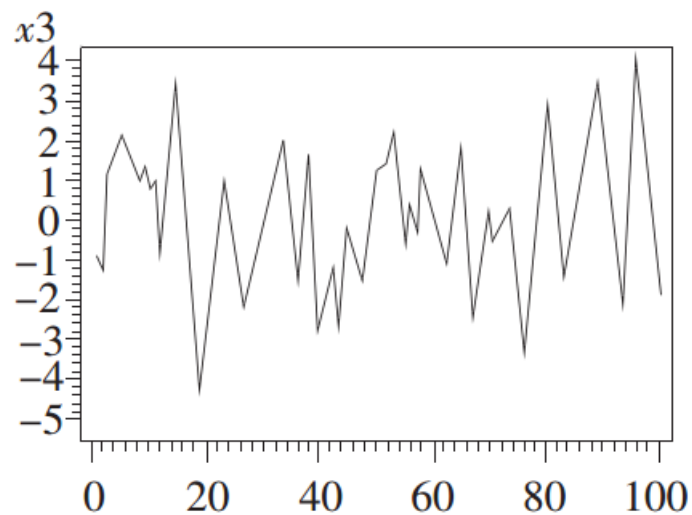
$$(4)x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$$

例3-1时序图

平稳特征

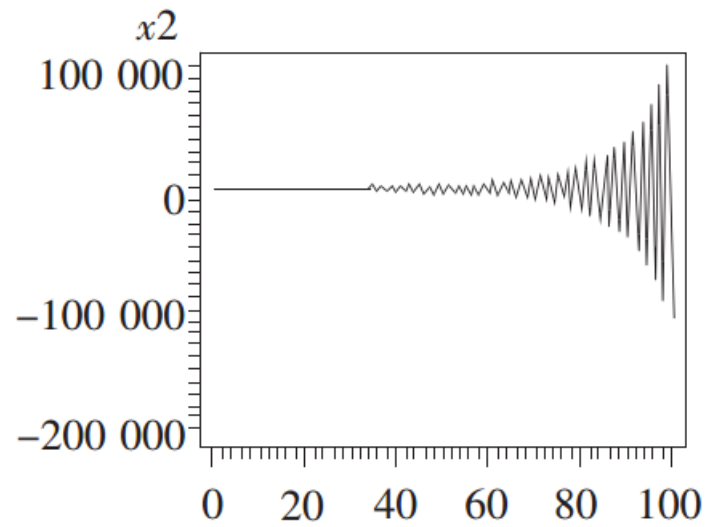


(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

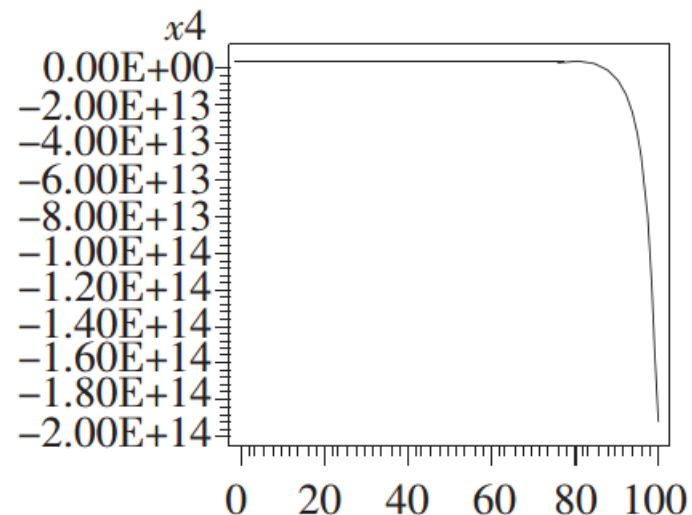


(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

非平稳特征



(2) $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$



(4) $x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$

特征根判别

- p 阶自回归序列平稳，要求 p 个非零特征根都在单位圆内，即

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p$$

- 在引入延迟算子之后, 我们还可以推导出跟特征根判别等价的性质: p 阶自回归序列平稳的条件是自回归系数多项式的 p 个根都在单位圆外

$$\Phi(u) = 1 - \phi_1 u - \phi_2 u^2 - \dots - \phi_p u^p = 0$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{1}{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, p$$

平稳域判别

- 对于一个 $AR(p)$ 模型而言，如果没有平稳性的要求，实际上也就意味着对参数向量没有任何限制，它们可以取遍维欧氏空间的任意一点
- 如果加上了平稳性限制，参数向量就只能取维欧氏空间的一个子集，使得特征根都在单位圆内的系数集合

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p \mid \text{特征根都在单位圆内}\}$$

- 对于低阶自回归模型用平稳域的方法判别模型的平稳性通常更为简便

AR(1)模型平稳条件

- 方程结构

$$x_t = \phi x_t + \varepsilon_t$$

- 特征根

$$\lambda = \phi$$

- 平稳域

$$\{\phi \mid -1 < \phi < 1\}$$

AR(2)模型的平稳条件

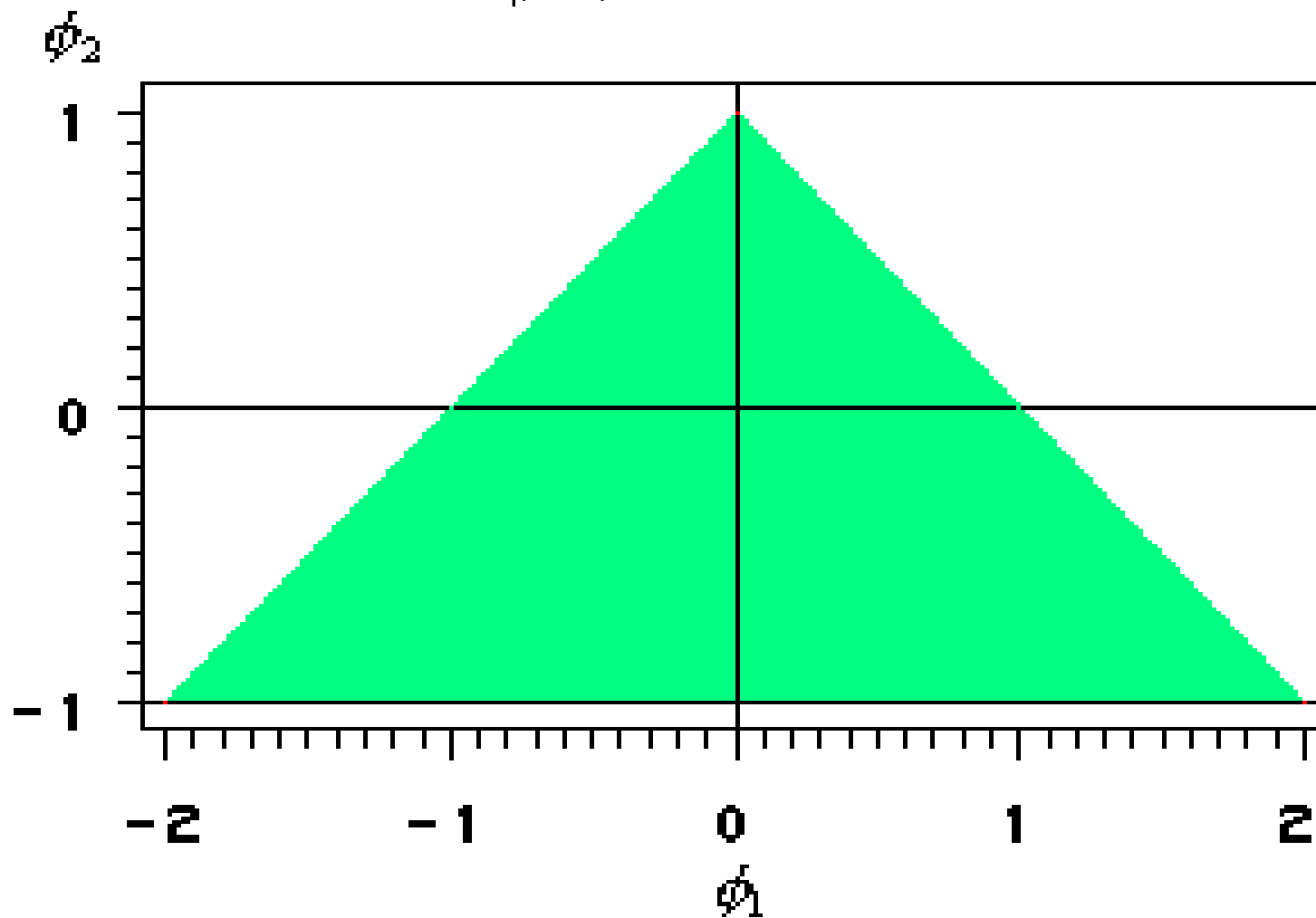
- 方程结构
$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

- 特征根
$$\lambda_1 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

- 平稳域
 - (1) $|\phi_2| = |\lambda_1 \lambda_2| < 1$
 - (2) $\phi_2 + \phi_1 = -\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) < 1$
 - (3) $\phi_2 - \phi_1 = -\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) < 1$
$$\Rightarrow \{\phi_1, \phi_2 \mid |\phi_2| < 1, \text{ 且 } \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$$

AR(2)的平稳域

$$\{\phi_1, \phi_2 \mid |\phi_2| < 1, \text{ 且 } \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$$



例3-1续

- 分别用特征根判别法和平稳域判别法检验例3-1中四个 AR 模型的平稳性

$$(1)x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2)x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(3)x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(4)x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t$$

例3.1平稳性判别

模型	特征根判别	平稳域判别	结论
(1)	$\lambda_1 = 0.8$	$\phi = 0.8$	平稳
(2)	$\lambda_1 = -1.1$	$\phi = -1.1$	非平稳
(3)	$\lambda_1 = \frac{1+i}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-i}{2}$	$ \phi_2 = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 0.5, \phi_2 - \phi_1 = -1.5$	平稳
(4)	$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$ \phi_2 = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 1.5, \phi_2 - \phi_1 = -0.5$	非平稳

平稳AR模型的统计性质——均值

- 如果AR(p)模型满足平稳性条件，则有

$$Ex_t = E(\phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t)$$

- 根据平稳序列均值为常数，且 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声序列，有

$$Ex_t = \mu, E(\varepsilon_t) = 0, \forall t \in T$$

- 推导出

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

平稳AR模型的统计性质——方差

- 要得到平稳 AR(p)模型的方差, 需要借助 Green函数的帮助
- Green函数的定义
 - 假设 $\{x_t\}$ 为任意p阶的平稳 AR 模型, 那么一定存在一个常数序列 $\{G_j, j = 1, 2, \dots\}$ 使得 $\{x_t\}$ 可以等价表达为纯随机序列 $\{\varepsilon_t | \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)\}$ 的线性组合, 即

$$\begin{aligned}x_t &= \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\&= G_0 \varepsilon_t + G_1 \varepsilon_{t-1} + G_2 \varepsilon_{t-2} \dots\end{aligned}$$

这个常数序列 $\{G_j, j = 1, 2, \dots\}$ 就称为 Green函数

- 基于Green函数, 可以求出AR(p)模型的方差为

$$\text{Var}(x_t) = \left(G_0^2 + G_1^2 + G_2^2 + \dots \right) \sigma_\varepsilon^2$$

Green函数的递推公式

- 原理

$$\begin{cases} \Phi(B)x_t = \varepsilon_t \\ x_t = G(B)\varepsilon_t \end{cases} \Rightarrow \Phi(B)G(B)\varepsilon_t = \varepsilon_t$$

- 方法：待定系数法

$$\begin{aligned} (1 - \sum_{k=1}^p \phi_k B^k) (\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j) \varepsilon_t &= \varepsilon_t \\ \Rightarrow \left[G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(G_j - \sum_{k=1}^j \phi'_k G_{j-k} \right) B^j \right] \varepsilon_t &= \varepsilon_t \\ \Rightarrow \begin{cases} G_0 = 1 \\ G_j = \sum_{k=1}^j \phi'_k G_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} & \quad \text{式中 } \phi'_k = \begin{cases} \phi_k, k \leq p \\ 0, k > p \end{cases} \end{aligned}$$

例3-2

- 求平稳 AR(1) 模型 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ 的 Green函数的递推公式, 并基于 Green函数求解 AR(1) 模型的方差。
- 平稳AR(1)模型的Green函数递推公式为

$$G_j = \begin{cases} 1 & , j = 0 \\ \phi_1^j & , j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

- 平稳AR(1)模型的方差为

$$Var(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j^2 Var(\varepsilon_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \phi_1^2}$$

平稳AR模型的统计性质——协方差函数

- 在平稳AR(p)模型两边同乘 x_{t-k} , $\forall k \geq 1$, 再求期望

$$E(x_t x_{t-k}) = \phi_1 E(x_{t-1} x_{t-k}) + \cdots + \phi_p E(x_{t-p} x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k})$$

- 根据

$$E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0$$

- 得协方差函数的递推公式

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p} , \forall k \geq 1$$

例3-3

- 求平稳AR(1)模型的协方差
 - 递推公式

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} = \phi_1^k \gamma_0$$

- 因为平稳AR(1)模型的方差为

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

- 所以协方差函数的递推公式为

$$\gamma_k = \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}, \forall k \geq 1$$

例3-4

- 求平稳AR(2)模型的协方差
 - 平稳AR(2)模型的协方差函数递推公式为

$$\begin{cases} \gamma_0 = \frac{1 - \phi_2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2} \\ \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

平稳AR模型的统计性质——自相关系数

- 自相关系数的定义

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- 平稳AR(P)模型的自相关系数递推公式

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}$$

常用AR模型自相关系数递推公式

- AR(1)模型

$$\rho_k = \phi_1^k, k \geq 0$$

- AR(2)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} & k \geq 2 \end{cases}$$

AR模型自相关系数的性质

- AR模型的自相关系数的表达式实际上是一个齐次差分方程，它的通解形式为

$$\rho_k = \sum_{i=1}^p c_i \lambda_i^k \quad |\lambda_i| < 1, \text{ 且 } c_1, \dots, c_p \text{ 为任意实数}$$

- 根据自相关系数的通解形式，可以判断AR模型的自相关系数具有如下特征
 - 呈指数衰减

$$|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \rho_k = \sum_{i=1}^p c_i \lambda_i^k \rightarrow 0$$

- 拖尾性

c_1, \dots, c_p 为任意实数 $\Rightarrow \rho_k = \sum_{i=1}^p c_i \lambda_i^k$ 不会恒等于零 $\forall k > \text{某个常数}$

例3-5

- 考察如下AR模型的自相关图

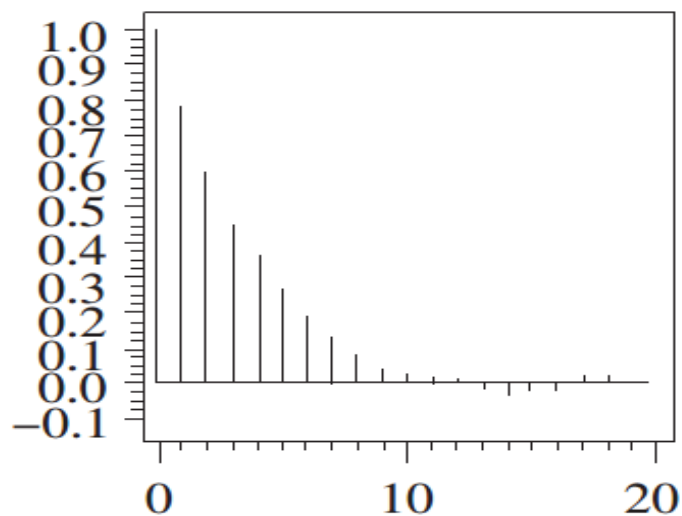
$$(1) x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2) x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

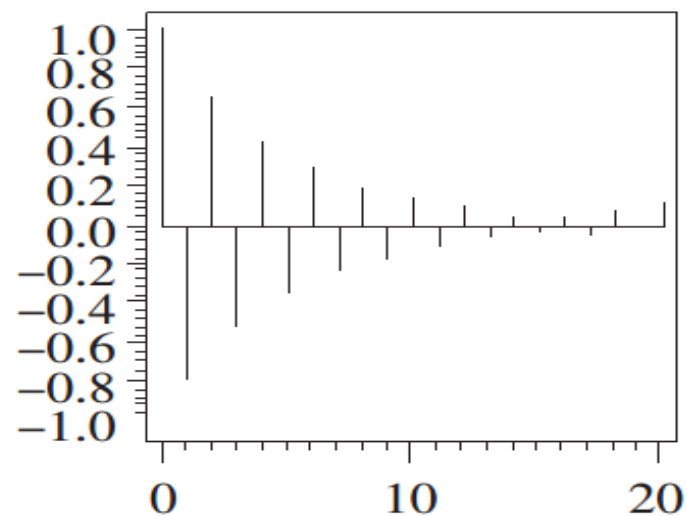
$$(3) x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(4) x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

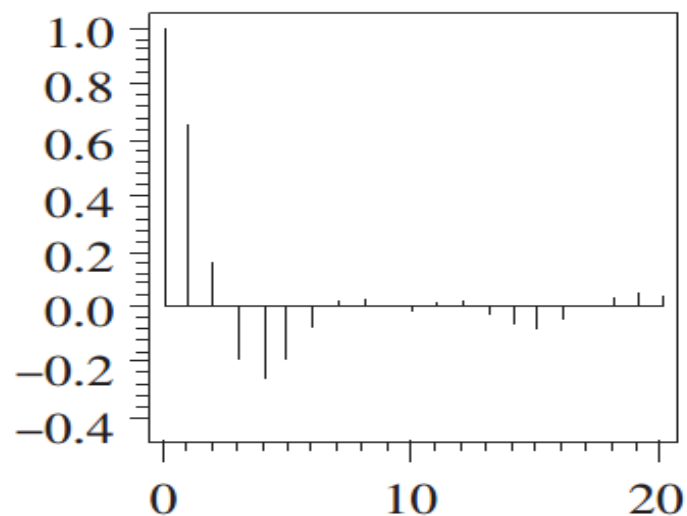
例3-5 自相关图



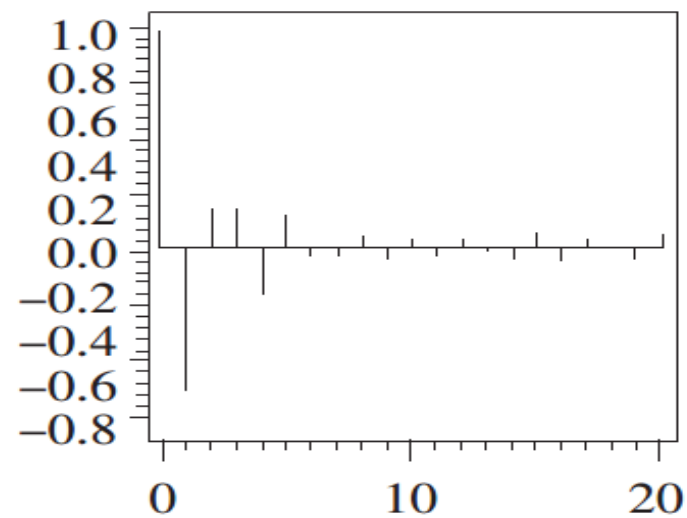
(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$



(2) $x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$



(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$



(4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

例3-5图示解释

- 从上图中可以看到, 这四个平稳 AR 模型, 不论它们是 AR(1)模型还是 AR(2)模型, 不论它们的特征根是实根还是复根, 是正根还是负根, 它们的自相关系数都呈现出拖尾性和呈指数衰减到零值附近的性质。
- 但由于特征根不同, 它们的自相关系数衰减的方式也不一样
 - 有的是按负指数单调衰减 (如模型(1))
 - 有的是正负相间地衰减 (如模型(2))
 - 有的呈现出类似于周期性的余弦衰减, 即具有 “伪周期” 特征 (如模型(3))
 - 有的是不规则衰减 (如模型(4))

偏自相关系数

- 偏自相关系数的定义
 - 对于平稳 $AR(p)$ 序列, 所谓滞后k偏自相关系数就是指在给定中间k-1个随机变量 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k+1}$ 的条件下, 或者说, 在剔除了中间k-1个随机变量的干扰之后, x_{t-k} 对 x_t 影响的相关度量。用数学语言描述就是

$$\rho_{x_t, x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]}$$

偏自相关系数的计算

$$\rho_{x_t, x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]}$$

其中： $\hat{E}x_t = E[x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}]$, $\hat{E}x_{t-k} = E[x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}]$

用过去 k 期的序列值对 x_t 做 k 阶自回归拟合：

$$x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \dots + \phi_{k(k-1)}x_{t-k+1} + \phi_{kk}x_{t-k}$$

$$\hat{E}x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \dots + \phi_{k(k-1)}x_{t-k+1} + \phi_{kk}\hat{E}(x_{t-k}) + E(\varepsilon_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1})$$

$$= \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \dots + \phi_{k(k-1)}x_{t-k+1} + \phi_{kk}\hat{E}(x_{t-k})$$

$$\therefore E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})] = \phi_{kk}E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]$$

$$\Rightarrow \rho_{x_t, x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1}} = \frac{E[(x_t - \hat{E}x_t)(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})]}{E[(x_{t-k} - \hat{E}x_{t-k})^2]} = \phi_{kk}$$

基于Yule-Walker方程组计算偏自相关系数

- 在方程 $x_t = \phi_{k1}x_{t-1} + \phi_{k2}x_{t-2} + \cdots \phi_{k(k-1)}x_{t-k+1} + \phi_{kk}x_{t-k}$ 等号两边同时乘以 $x_{t-l}, \forall l > 0$, 等号两边求期望再除以方差, 得

$$\rho_l = \phi_{k1}\rho_{l-1} + \phi_{k2}\rho_{l-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{l-k}, \forall l > 0$$

- 取前k个方程构成的方程组即Yule-Walker方程组

[illegible]

- 解Yule-Walker方程组可以得到参数 $(\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kk})'$ 的解，最后一个参数的解即为延迟K偏自相关系数

AR(1)模型偏自相关系数的计算

- AR(1)模型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Jule-Walker方程

$$\rho_1 = \phi_{11} \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_{11} = \rho_1 = \phi_1$$

- 偏自相关系数的解

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

AR(2)模型偏自相关系数的计算

$k = 1$ 时, Yule-Walker方程为

$$\phi_{11} = \rho_1$$

对AR(2)模型又有

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1$$

$$\Rightarrow \phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$k = 2$ 时, Yule-Walker方程为

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_{21} \rho_0 + \phi_{22} \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_{21} \rho_1 + \phi_{22} \rho_0 \end{cases}$$

对AR(2)模型又有

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_{22} = \phi_2$$

$$\therefore \text{AR}(2)\text{模型的偏相关系数为 } \phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} & , \quad k = 1 \\ \phi_2 & , \quad k = 2 \\ 0 & , \quad k \geq 3 \end{cases}$$

基于矩阵结构计算偏自相关系数

□ Yule-Walker方程写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

□ 根据Cramer法则，有

$$\phi_{kk} = \frac{D_k}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad D_k = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix}$$

证明AR(p)模型偏自相关系数p阶截尾

- 所谓p 阶截尾, 是指 $\phi_{kk}=0, k > p$ 。 要证明这一点, 实际上只要能证明当 $k > p$ 时, $D_k=0$ 即可。

$$\text{记 } \xi_i = \begin{pmatrix} \rho_{i-1} \\ \rho_{i-2} \\ \vdots \\ \rho_{i-k} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, k \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

对于AR(p)模型有: $\eta = \phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_2 + \dots + \phi_p \xi_p$

$$\Rightarrow D_k = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_{k-p} & \cdots & \rho_k \end{vmatrix} = 0, \quad k > p$$

$$\Rightarrow \phi_{kk} = \frac{D_k}{D} = 0, \quad k > p$$

例3-5续

- 求如下AR模型的偏自相关系数，并考察它们的偏自相关图特征

$$(1) x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2) x_t = -0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

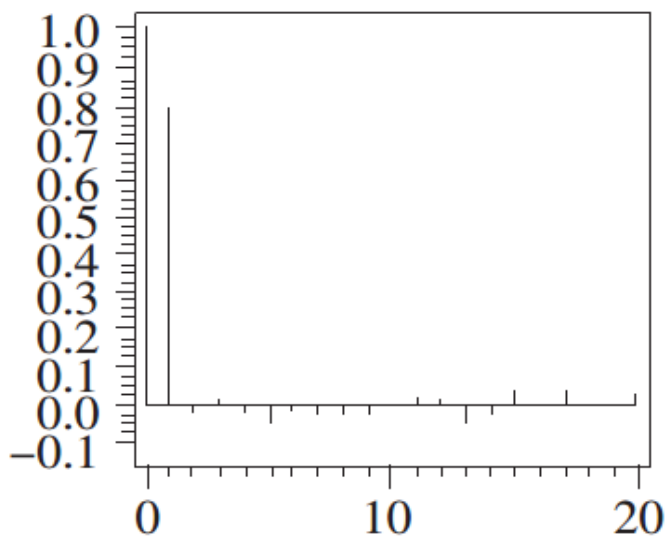
$$(3) x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(4) x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

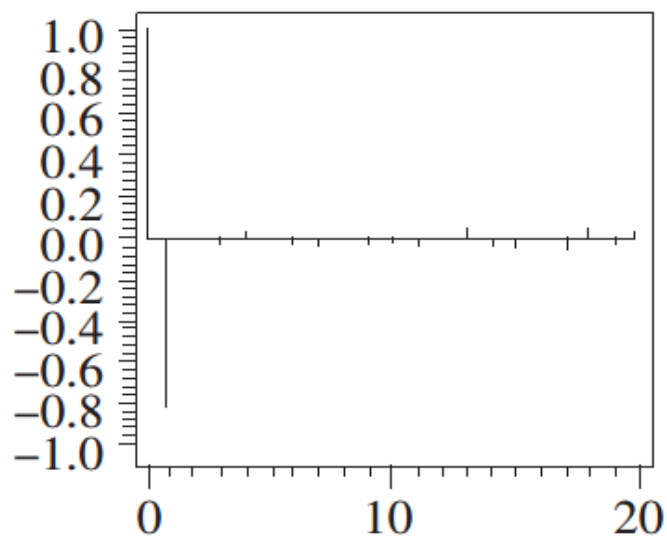
例3-5续 求AR模型的偏自相关系数

(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \epsilon_t$	$\phi_{kk} = \begin{cases} 0.8, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$
(2) $x_t = -0.8x_{t-1} + \epsilon_t$	$\phi_{kk} = \begin{cases} -0.8, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$
(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$	$\phi_{kk} = \begin{cases} \frac{2}{3}, & k=1 \\ -0.5, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$
(4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$	$\phi_{kk} = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & k=1 \\ -0.5, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$

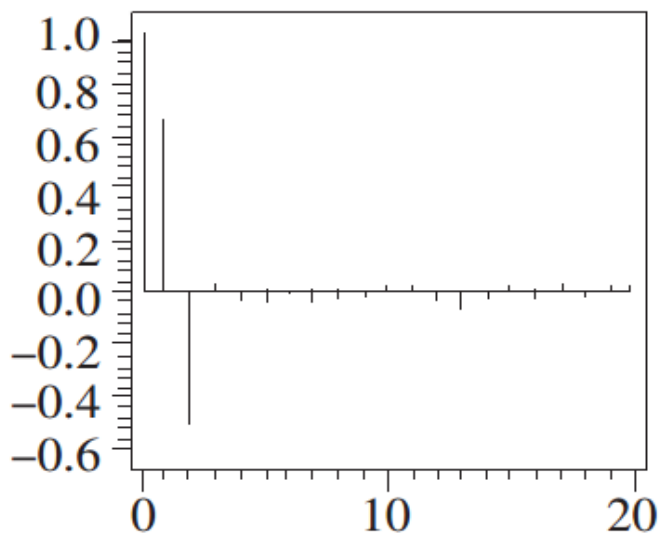
例3-5 续 考察AR序列的偏自相关图



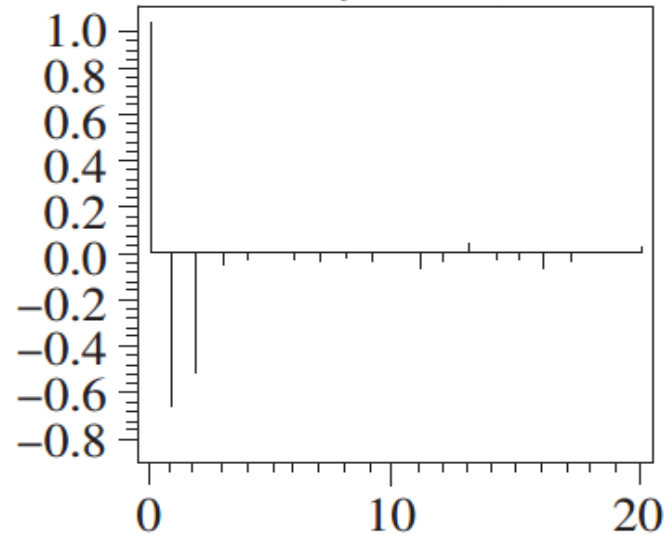
(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \epsilon_t$



(2) $x_t = -0.8x_{t-1} + \epsilon_t$



(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$



(4) $x_t = -x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$

本章内容

01

AR模型

02

MA模型

03

ARMA模型

MA模型的定义

- 具有如下结构的模型称为 q 阶自回归模型，简记为 $MA(q)$

$$\begin{cases} x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \end{cases}$$

- 特别当 $\mu = 0$ 时，称为中心化 $MA(q)$ 模型
- 引进延迟算子，中心化 $MA(q)$ 模型又可以简记为

$$x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

其中 $\Theta(B)$ 称为 q 阶移动平均系数多项式

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

MA模型的统计性质

- 常数均值
$$Ex_t = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$
$$= \mu$$
- 常数方差
$$Var(x_t) = Var(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$
$$= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2$$
- 自协方差函数与自相关系数q阶截尾

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}) \sigma_\varepsilon^2, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & 1 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

常用MA模型的自相关系数

- MA(1)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & , k = 1 \\ 0 & , k \geq 2 \end{cases}$$

- MA(2)模型

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & , k = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} & , k = 2 \\ 0 & , k \geq 3 \end{cases}$$

例3-6

- 绘制下列 MA模型的样本自相关图, 直观考察 MA模型自相关系数截尾的特性。

$$(1) x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

$$(2) x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

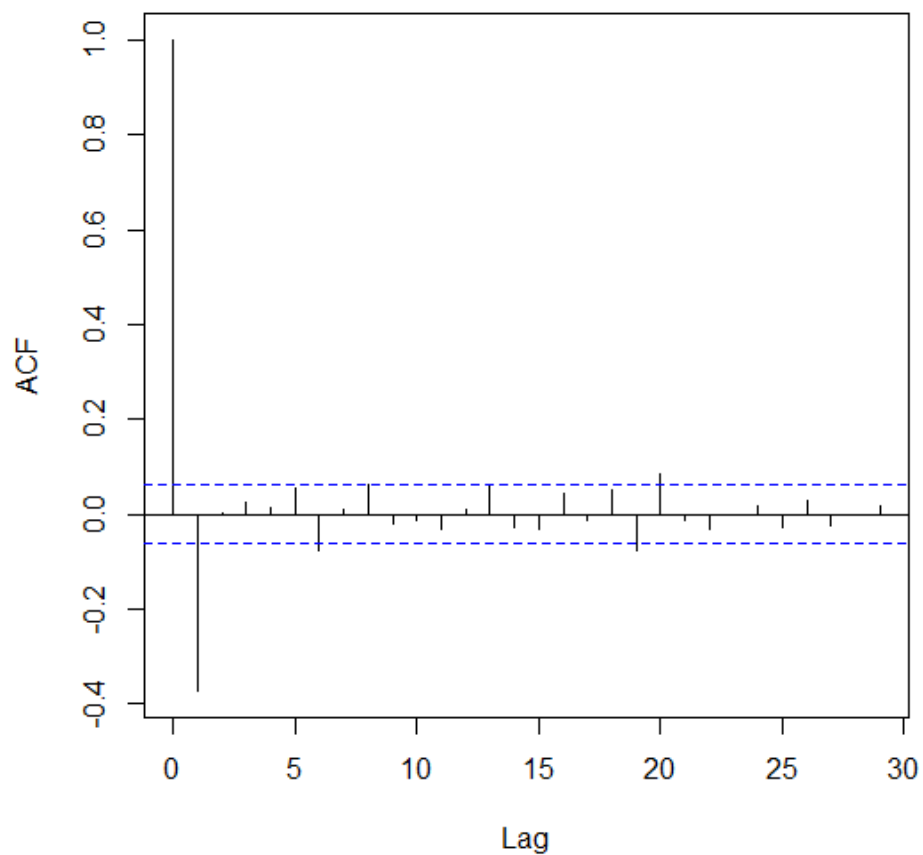
$$(3) x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

$$(4) x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

MA(1)模型的自相关图

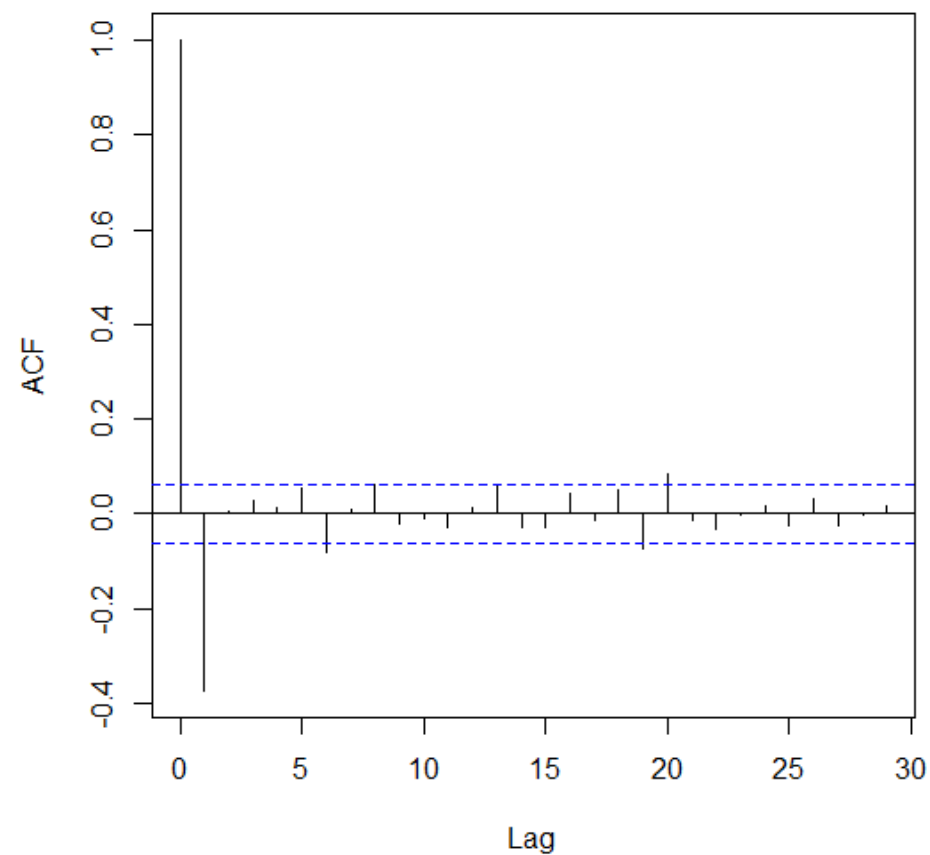
$$(1) x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

Series x1



$$(2) x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

Series x2



MA(1)模型自相关图特征解读

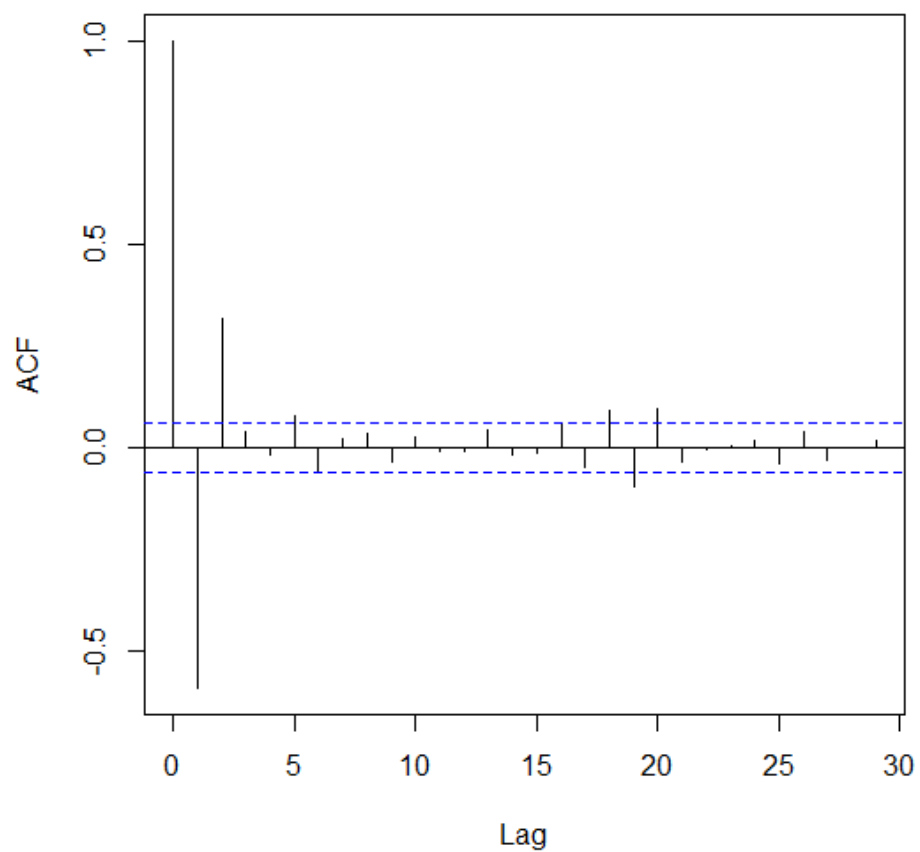
- 考察上面两个MA(1)模型的自相关图，排除样本随机性的影响，样本自相关图清晰显示出 MA(1) 模型自相关系数一阶截尾
- 考察上面两个MA(1)模型的自相关图，可以发现这两个不同的MA模型具有完全相同的自相关图。容易验证它们的理论自相关系数也正好相等

$$\rho_k = \begin{cases} -0.4 & , k = 1 \\ 0 & , k \geq 2 \end{cases}$$

MA(2)模型的自相关图

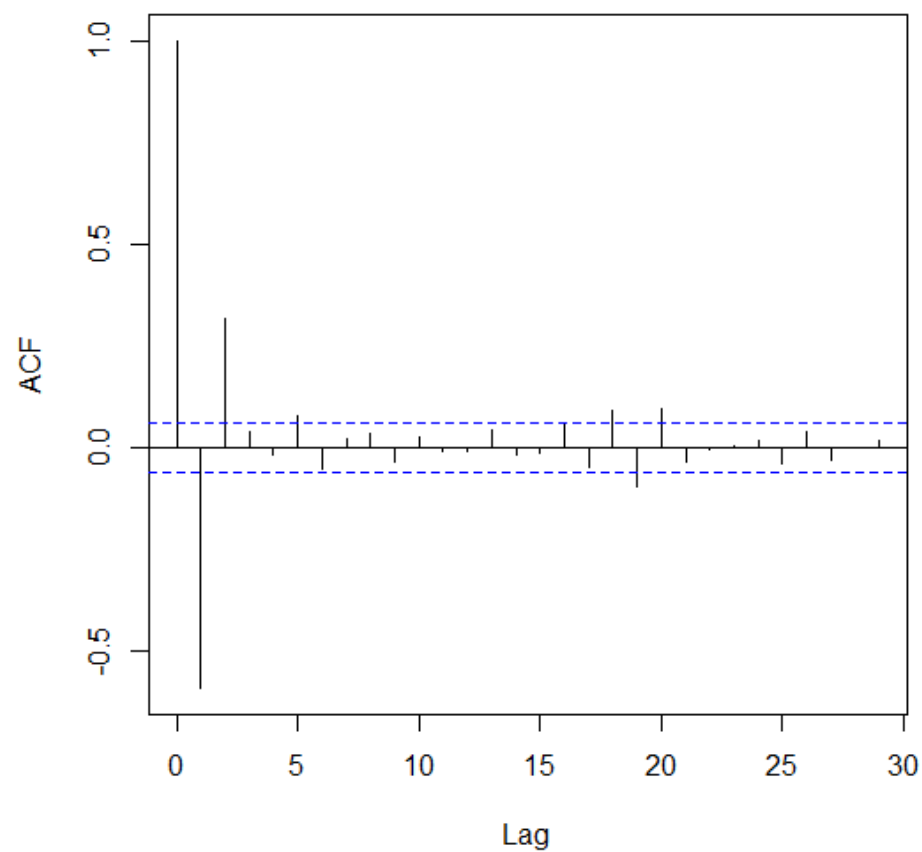
$$(3) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

Series x3



$$(4) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

Series x4



MA(2)模型自相关图特征解读

- 考察上面两个MA(2)模型的自相关图，排除样本随机性的影响，样本自相关图清晰显示出 MA(2) 模型自相关系数二阶截尾
- 考察上面两个MA(2)模型的自相关图，可以发现这两个不同的MA模型具有完全相同的自相关图。容易验证它们的理论自相关系数也正好相等

$$\rho_k = \begin{cases} -0.64012 & , k = 1 \\ 0.312256 & , k = 2 \\ 0 & , k \geq 3 \end{cases}$$

MA模型的可逆性

- 例3-6演示了不同的MA模型，可能具有完全相同的自相关系数的现象。产生这种现象的原因就是我们在第二章中提到的：自相关系数有可能不唯一。
- 这种自相关系数的不唯一性，会给我们将来的工作增加麻烦。因为，将来我们都是通过样本自相关系数显示出来的特征选择合适的模型拟合序列的发展，如果自相关系数和模型之间不是一一对应关系，就将导致拟合模型和随机序列之间不会是一一对应关系。
- 为了保证一个给定的自相关函数能够对应唯一的模型，我们就要给模型增加约束条件。这个约束条件称为模型的可逆性条件。
- 可逆MA模型定义：若一个MA模型能够表示成为收敛的AR模型形式，那么该MA模型称为可逆MA模型
- 可逆概念的重要性：一个自相关系数列唯一对应一个可逆MA模型。

可逆MA(1)模型

模型1: $x_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$

模型2: $x_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta} \varepsilon_{t-1}$

$\frac{x_t}{1 - \theta B} = \varepsilon_t$

$\frac{x_t}{1 - \frac{1}{\theta} B} = \varepsilon_t$

$\rho = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}$

$|\theta| < 1$, 模型1可逆

$|\theta| > 1$, 模型2可逆

MA(q)模型的可逆条件

- MA(q) 模型的可逆概念和 AR(p) 模型的平稳概念是对偶概念。
- MA(q)模型的可逆条件是该模型特征方程 $\lambda^q - \theta_1\lambda^{q-1} - \theta_2\lambda^{q-2} - \dots - \theta_q = 0$ 的q个非零特征根都在单位圆内

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

- 或移动平滑系数多项式 $\Theta(u) = 0$ 的根都在单位圆外

$$u_i = \left| \frac{1}{\lambda_i} \right| > 1, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

低阶MA模型系数可逆域

- 根据MA模型的结构，求出特征方程的特征根，根据特征根都在单位圆内的约束条件，可以求出满足可逆条件的系数取值空间，这就是MA模型的系数可逆域。
- MA模型的系数可逆域与AR模型的平稳域具有对偶关系
- MA(1)模型的系数可逆域

$$\{\theta \mid -1 < \theta < 1\}$$

- MA(2)模型的系数可逆域

$$\{\theta_1, \theta_2 \mid |\theta_2| < 1, \text{ 且 } \theta_2 \pm \theta_1 < 1\}$$

逆函数的递推公式

- 原理

$$\begin{cases} x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \\ \varepsilon_t = I(B)x_t \end{cases} \Rightarrow \Theta(B)I(B)x_t = x_t$$

- 待定系数法

$$(1 - \sum_{k=1}^q \theta_k B^k)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} I_j B^j)x_t = x_t$$

- 递推公式

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_j = \sum_{k=1}^j \theta'_k I_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}, \text{其中 } \theta'_k = \begin{cases} \theta_k, k \leq q \\ 0, k > q \end{cases}$$

例3.6续

- 考察如下MA模型的可逆性

$$(1) \quad x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

$$(3) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

$$(2) \quad x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$(4) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

两个MA(1)模型可逆性判断

- 模型1 $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} \Rightarrow |\lambda| = |\theta| = 2 > 1 \Rightarrow$ 不可逆
- 模型2 $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} \Rightarrow |\lambda| = |\theta| = 0.5 < 1 \Rightarrow$ 可逆
- 模型2的逆函数
$$I_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0.5^k & , k \geq 1 \end{cases}$$
- 模型2的逆转形式
$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k x_{t-k}$$

两个MA(2)模型可逆性判断

- 模型3 $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \theta_2 < 1, \theta_2 \pm \theta_1 < 1 \Rightarrow$ 可逆

- 模型4 $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \theta_2 = \frac{25}{16} > 1 \Rightarrow$ 不可逆

- 模型3的逆函数

$$I_k = \begin{cases} (-1)^n \theta_1^k, k = 3n \text{ 或 } 3n+1 \\ 0, k = 3n+2 \end{cases}, n = 0, 1, \dots$$

- 模型3的逆转形式

$$\varepsilon_t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n} x_{t-3n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 0.8^{3n+1} x_{t-3n-1}$$

MA模型偏自相关系数拖尾

- 对于一个可逆 $MA(q)$ 模型, 可以等价写成 $AR(\infty)$ 模型形式

$$I(B)x_t = \varepsilon_t$$

- 其中
$$I_j = \begin{cases} 1 & , j \geq 0 \\ \sum_{k=1}^l \theta'_k I_{j-k} & , j \geq 1 \end{cases}$$

- $AR(p)$ 模型偏自相关系数 p 阶截尾, 所以可逆 $MA(q)$ 模型偏自相关系数 ∞ 阶截尾, 即具有偏自相关系数拖尾属性。
- 一个可逆 $MA(q)$ 模型一定对应着一个与它具有相同自相关系数和偏自相关系数的不可逆 $MA(q)$ 模型, 这个不可逆 $MA(q)$ 模型也同样具有偏自相关系数拖尾特性。

例3-7

- 求MA(1)模型偏自相关系数的表达式

- MA(1)模型表达式: $x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

- 根据偏自相关系数的定义, 我们知道延迟k阶偏自相关系数是如下方程组的最后一个系数

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k}, j = 1, 2, \cdots, k$$

- 对 $j = 1, 2, \cdots, k$ 依次求方程, 可以得到MA(1)模型任意k阶偏自相关系数的通解为

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta_1^k}{\sum_{j=0}^k \theta_1^{2j}}, k \geq 1$$

例3-6续

- 绘制下列MA模型的偏自相关系数图，直观考察MA模型偏自相关系数的拖尾性

$$(1) \quad x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$

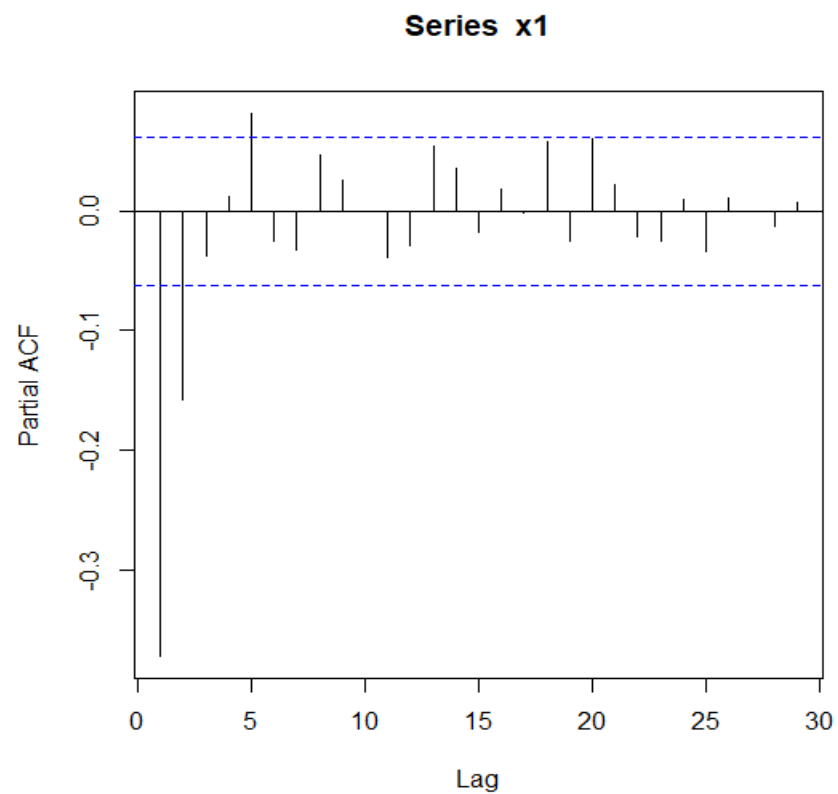
$$(2) \quad x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$(3) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$$

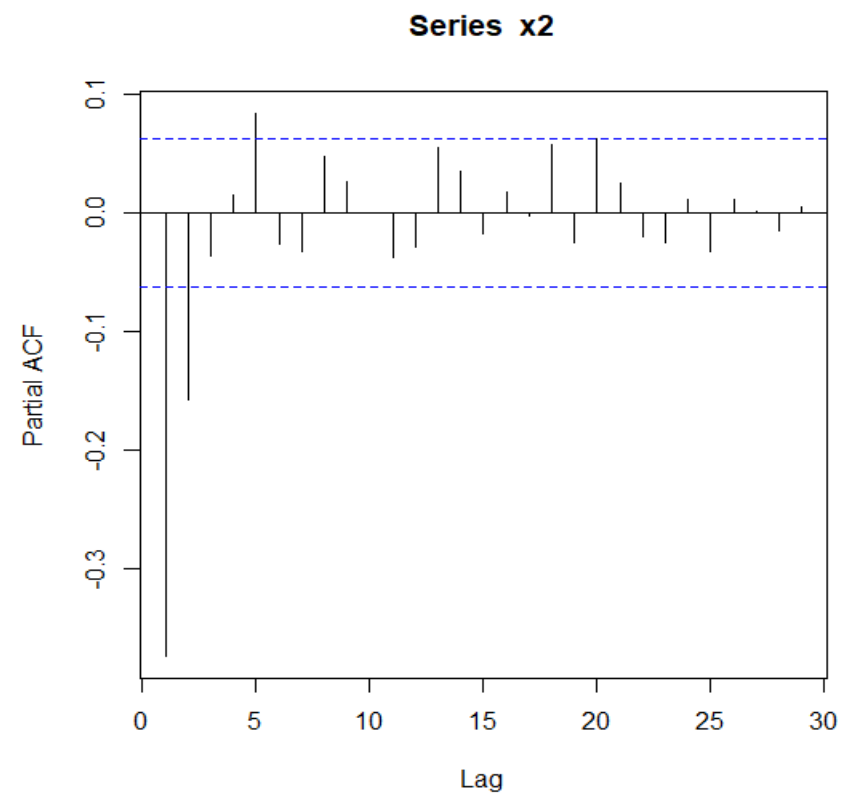
$$(4) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$$

MA(1)模型偏自相关系数拖尾

$$(1) x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$$



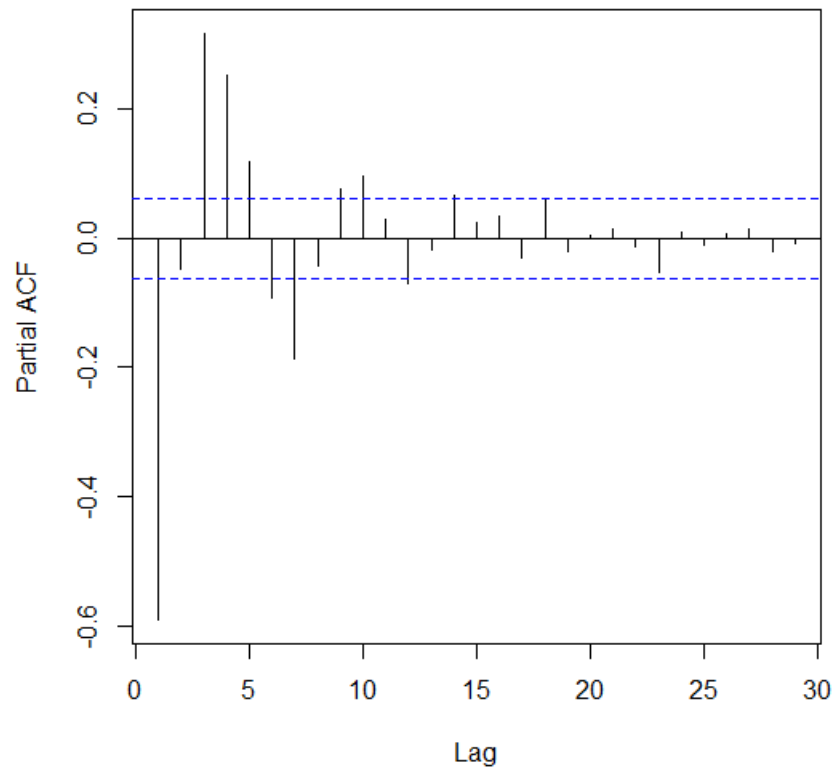
$$(2) x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$



MA(2)模型偏自相关系数拖尾

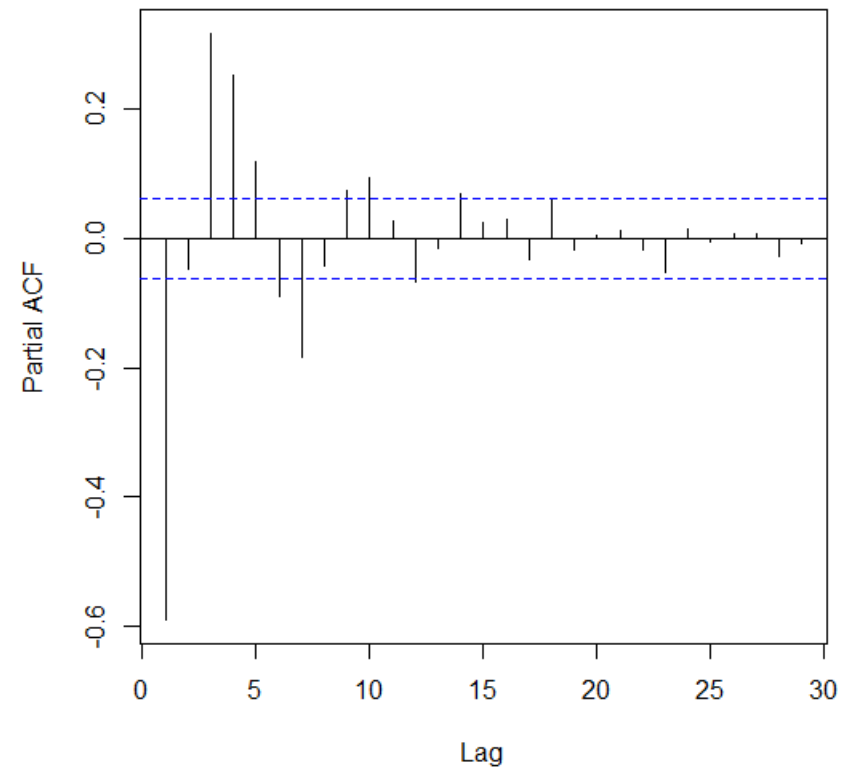
$$(3) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5} \varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25} \varepsilon_{t-2}$$

Series x3



$$(4) \quad x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} \varepsilon_{t-1} + \frac{25}{16} \varepsilon_{t-2}$$

Series x4



本章内容

01

AR模型

02

MA模型

03

ARMA模型

ARMA模型的定义

- 具有如下结构的模型称为自回归移动平均模型，简记为 $ARMA(p, q)$

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \phi_p \neq 0, \quad \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0, \forall s < t \end{cases}$$

- 特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 $ARMA(p, q)$ 模型
- 引进延迟算子, $ARMA(p, q)$ 模型简记为

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

其中： $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$

平稳条件与可逆条件

- ARMA(p,q)模型的平稳条件
 - P阶自回归系数多项式 $\Phi(u) = 0$ 的根都在单位圆外
 - 即ARMA(p,q)模型的平稳性完全由其自回归部分的平稳性决定
- ARMA(p,q)模型的可逆条件
 - q阶移动平均系数多项式 $\Theta(u) = 0$ 的根都在单位圆外
 - 即ARMA(p,q)模型的可逆性完全由其移动平滑部分的可逆性决定

传递形式与逆转形式

- 传递形式

$$\begin{aligned}x_t &= \Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_k = \sum_{j=1}^k \phi'_j G_{k-j} - \theta'_k \end{cases}, \quad k \geq 1$$

$$\text{其中: } \phi'_j = \begin{cases} \phi_j & , 1 \leq j \leq q \\ 0 & , j > q \end{cases}$$

- 逆转形式

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \Theta^{-1}(B)\Phi(B)x_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} I_j x_{t-j}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_k = \sum_{j=1}^k \theta'_j I_{k-j} - \phi'_k \end{cases}, \quad k \geq 1$$

$$\text{其中: } \theta'_j = \begin{cases} \theta_j & , 1 \leq j \leq q \\ 0 & , j > q \end{cases}$$

ARMA(p,q)模型的统计性质

- 均值

$$Ex_t = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

- 协方差

$$\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}$$

- 自相关系数

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} G_j G_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} G_j^2}$$

ARMA模型的相关性

- 自相关系数拖尾
 - ARMA(p,q)模型可以转化为无穷阶移动平均模型
- 偏自相关系数拖尾
 - ARMA(p,q)模型可以转化为无穷阶自回归模型

例3.8:考察ARMA模型的相关性

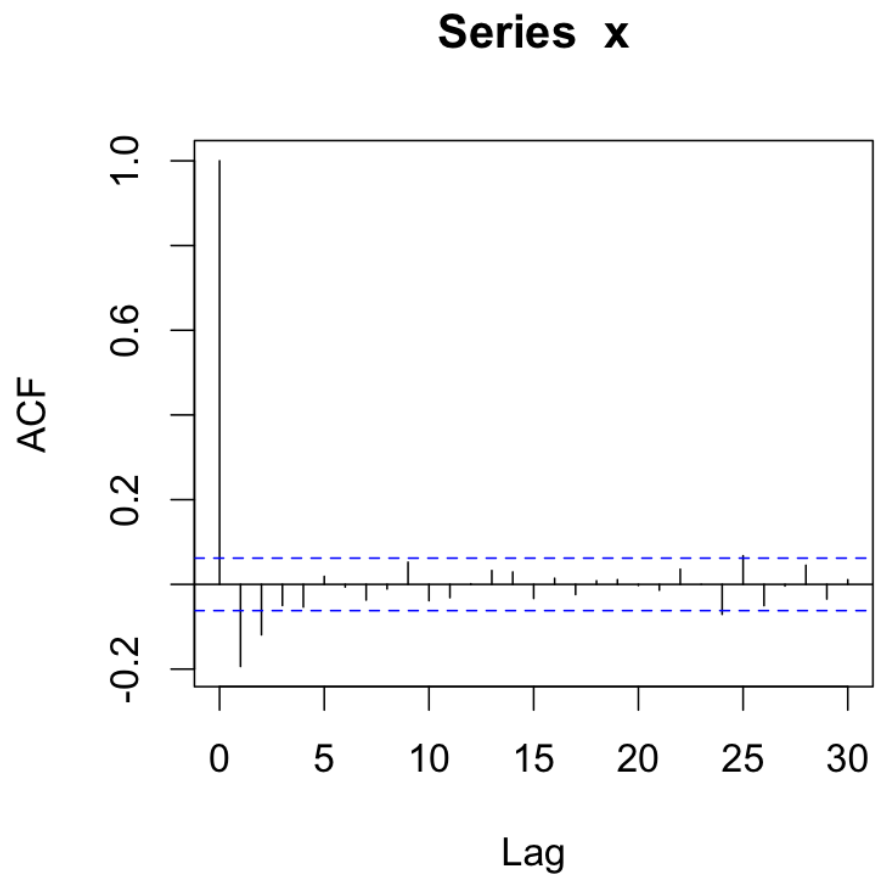
- 拟合模型ARMA(1,1)

$$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$$

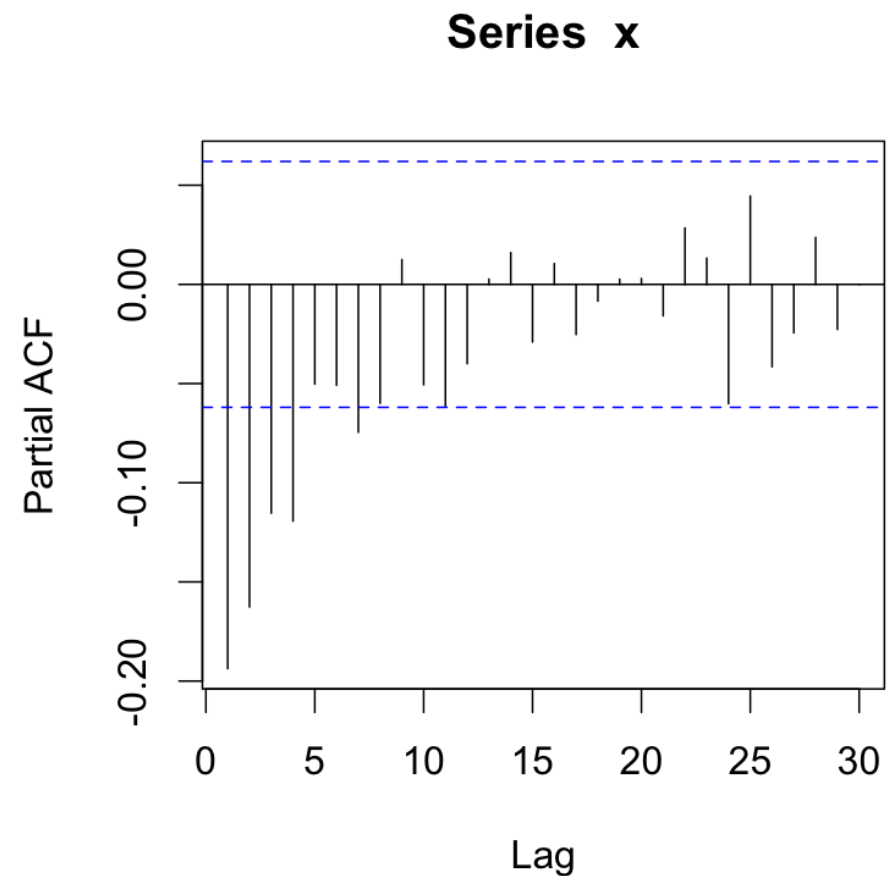
并直观地考察该模型自相关系数和偏自相关系数的性质。

自相关系数和偏自相关系数拖尾性

- 样本自相关图



- 样本偏自相关图



ARMA模型相关性特征

模型	自相关系数	偏自相关系数
AR(P)	拖尾	P阶截尾
MA(q)	q阶截尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾

THANKS

03