

Skilaverkefni 1

Brynjólfur Gauti Jónsson
Pórarinn Jónmundsson

Dæmi 1

Tilraun er fólgin í að velja af handahófi fjölskyldu sem á tvo bíla og fyrir bæði eldri og yngri bílinn athugum við hvort hann sé framleiddur í Bandaríkjunum, Evrópu eða Asíu.

1. Hverjar eru mögulegar útkomur tilraunarinnar?

Lausn:

Yngri	Eldri		
	Asía	Bandaríkin	Evrópa
Asía	p_1	p_4	p_7
Bandaríkin	p_2	p_5	p_8
Evrópa	p_3	p_6	p_9

2. Hvaða útkomur eru innihaldnar í atburðinum að annar bílinn sé framleiddur í Bandaríkjunum en ekki hinn?

Lausn:

Yngri	Eldri		
	Asía	Bandaríkin	Evrópa
Asía		p_4	
Bandaríkin	p_2		p_8
Evrópa		p_6	

3. Hvaða útkomur eru innihaldnar í atburðinum að að minnsta kosti annar bílanna sé ekki frá Bandaríkjunum? Hver er fyllicatburður þess atburðar?

Lausn:

Yngri	Eldri		
	Asía	Bandaríkin	Evrópa
Asía	p_1^a	p_4^a	p_7^a
Bandaríkin	p_2^a	p_5^b	p_8^a
Evrópa	p_3^a	p_6^a	p_9^a

^a Mengi

^b Fyllimengi

Dæmi 2

Tryggingafyrirtæki býður uppá fjögur stig sjálfsábyrgðar - enga, lága, meðal og háa - fyrir heimilistryggingu og þrjú stig - lága, meðal og háa - fyrir bílactoryggingu. Taflan hér að neðan sýnir hlutfall viðskiptavina með báðar tryggingar í umræddum flokkum.

Tafla 1: Hlutfall viðskiptavina

Bíll	Heimili				Heild
	E	L	M	H	
L	0.04	0.06	0.05	0.03	0.18
M	0.07	0.10	0.20	0.10	0.47
H	0.02	0.03	0.15	0.15	0.35
Heild	0.13	0.19	0.40	0.28	1.00

Gerum ráð fyrir að viðskiptavinur með báðar tryggingar sé valinn af handahófi.

1. Hverjar eru líkurnar á því að viðskiptavinurinn hafi meðal sjálfsábyrgð fyrir bílinn og háa sjálfsábyrgð fyrir heimilistrygginguna.

Lausn:

Bíll	Heimili				Heild
	E	L	M	H	
L					
M			0.1		
H					
Heild					

2. Hverjar eru líkurnar á því að hann hafi lága sjálfsábyrgð fyrir bílinn? En lága sjálfsábyrgð fyrir heimilið?

Lausn:

Bíll	Heimili				Heild
	E	L	M	H	
L	0.04	0.06	0.05	0.03	0.18 ^a
M		0.1			
H		0.03			
Heild		0.19 ^b			
^a Bíll					
^b Heimili					

3. Hverjar eru líkurnar á því að viðskiptavinurinn sé í sama flokki fyrir bæði bíla- og heimilistrygginguna?

Lausn:

Bíll	Heimili				Heild
	E	L	M	H	
L		0.06			
M			0.2		
H				0.15	
Heild					0.41

4. Með því að nota niðurstöðuna í 3., hverjar eru líkurnar á að viðskiptavinurinn sé í ólíkum flokkum fyrir bíla- og heimilistrygginguna?

Lausn:

$$1 - P(H = B) = 1 - 0.41 = \mathbf{0.59}$$

5. Hverjar eru líkurnar á að hann hafi að minnsta kosti eina tryggingu í lágri sjálfsábyrgð?

Lausn: Frá 1. fæst

$$P(H = L) + P(B = L) = 0.19 + 0.18 = \mathbf{0.37}$$

6. Hverjar eru þá líkurnar á að hvorug tryggingin sé í lága flokknum?

Lausn:

$$1 - (P(H = L) + P(B = L)) = 1 - 0.37 = \mathbf{0.63}$$

Dæmi 3

Í dælukerfi eru tvær eins dælur, A og B. Kerfið virkar þótt önnur dælanna bili. Hins vegar, ef önnur bilar, þá eru meiri líkur á að hin bili líka vegna aukins álags, þ.e.a.s. $P(B \text{ bilar} | A \text{ bilar}) > P(B \text{ bilar}) = q$. Það er vitað að í 7% tilvika bilar að minnsta kosti önnur þeirra innan ákveðins tíma og í 1% tilvika bila báðar. Hverjar eru líkurnar á að dæla A bili á líftímanum?

Lausn: Gerum ráð fyrir að $P(A) = P(B)$. Vitum að

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2P(A) - P(A \cap B) = 0.07$$

$$P(A \cap B) = 0.01$$

Reiknum:

$$P(A) = P(B) = \frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{2} = \frac{0.07 + 0.01}{2} = \mathbf{0.04}$$

Dæmi 4

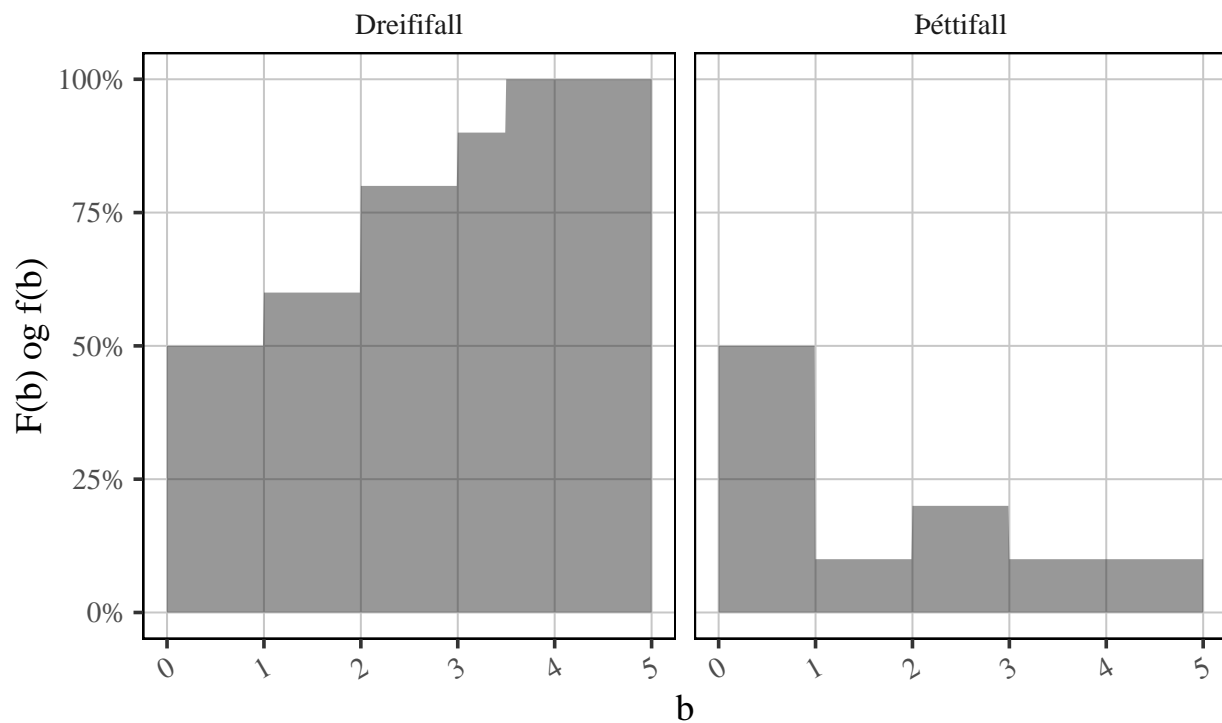
Látum X vera hendingu með eftirfarandi dreifingarfall.

$$F(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ 1/2, & 0 \leq b < 1 \\ 3/5, & 1 \leq b < 2 \\ 4/5, & 2 \leq b < 3 \\ 9/10, & 3 \leq b < 3.5 \\ 1, & b \geq 3.5 \end{cases}$$

Ákvarðið líkindafall X og teiknið upp bæði föllin.

Lausn:

$$f(b) = \begin{cases} 0, & b < 0 \\ 5/10, & 0 \leq b < 1 \\ 1/10, & 1 \leq b < 2 \\ 2/10, & 2 \leq b < 3 \\ 1/10, & 3 \leq b < 3.5 \\ 1/10, & b \geq 3.5 \end{cases}$$



Dæmi 5

Elko selur þrjár tegundir af frystum en geymslurými þeirra í rúmmetrum er uppgið 0.45, 0.54, 0.72. Látum X = geymslurými valið af næsta kaupanda frystis. Gerum ráð fyrir að X hafi líkindafallið

x	0.45	0.54	0.72
f(x)	0.20	0.50	0.30

1. Reiknið $E[X]$ og $Var[X]$

Lausn: Notum að $E[X] = \sum_x x f(x)$ og $E[X^2] = \sum_x x^2 f(x)$

$$E[X] = 0.45 * 0.2 + 0.54 * 0.5 + 0.72 * 0.3 = \mathbf{0.576}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 0.45^2 * 0.2 + 0.54^2 * 0.5 + 0.72^2 * 0.3 - 0.576^2 = \mathbf{0.01}$$

2. Ef verð frystis með geymslupláss X rúmmetra er $(250X - 85)$ þúsund krónur, hvert er væntigildi verðsins sem næstu kaupandi frystis borgar? Hver er dreifni fyrir þetta verð?

Lausn: Setjum $V = 250X - 85$.

$$E[V] = E[250X - 85] = \sum_x (250x - 85)f(x) = 250 \sum_x x f(x) - 85 \sum_x f(x) = 250E[X] - 85 = 250 * 0.576 - 85 = \mathbf{59}$$

$$Var[V] = Var[250X - 85] = 250^2 Var[X] = 250^2 * 0.01 = \mathbf{625}$$

Dæmi 6

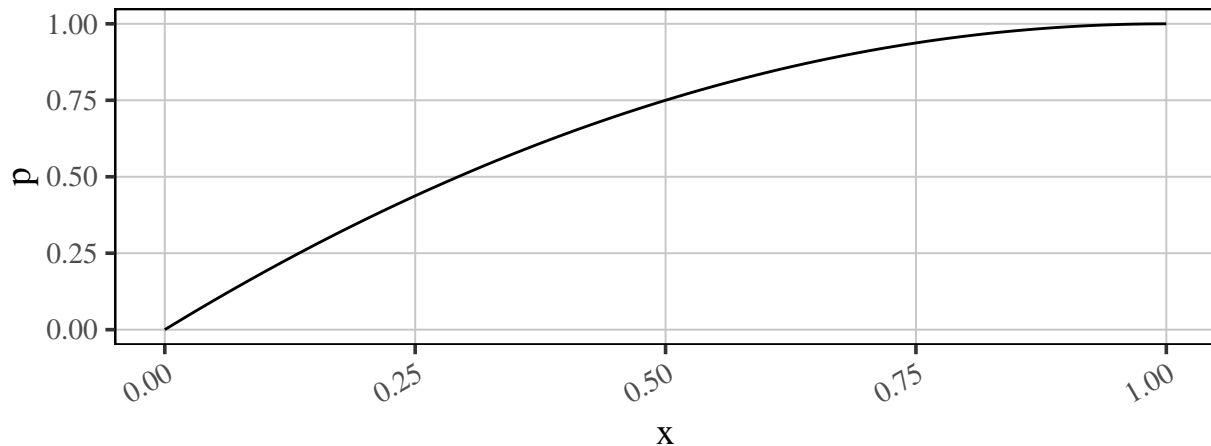
Látum $f(x)$ vera þéttifall fyrir hendinguna X , þar sem

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Ákvarðið dreififall X og teiknið graf þess.

Lausn:

$$P(x \leq X) = \int_0^x 2(1-x)dx = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 1$$



2. Finnið $P(X \leq 0.5)$, $P(X \leq 3)$ og $P(0.25 \leq X \leq 0.5)$

Lausn:

a	b	$P(a \leq X \leq b)$
0.00	0.5	0.7500
0.00	3.0	1.0000
0.25	0.5	0.3125

3. Reiknið $E[X]$ og staðalfrávik X .

Lausn:

$$E[X] = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 2x(1-x) dx = \int_0^1 2x dx - \int_0^1 2x^2 dx = [x^2]_0^1 - [\frac{2}{3}x^3]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 2x^2(1-x) dx = \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$