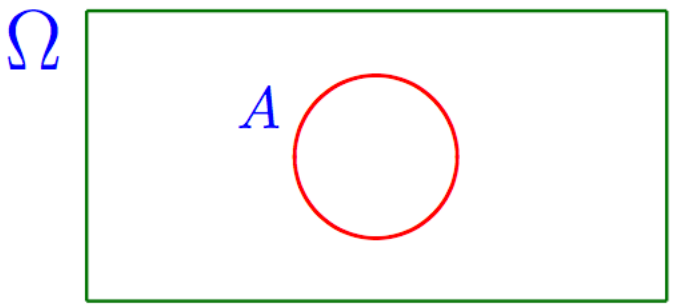
Fjármálatölfræði

Haust 2018

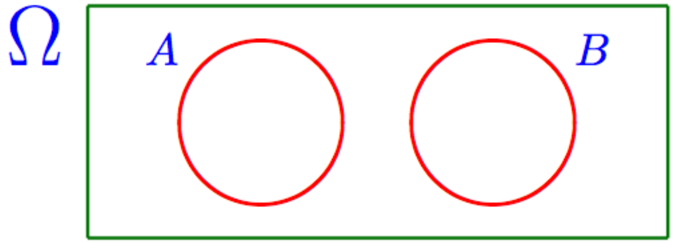
1. vika: Upprifjun í líkindafræði, kaflar 2-3 í Walpole

$\Omega =$ *útkomumengi* $=$ **mengi allra hugsanlegra útkoma.**

Atburður **er hlutmengi í** Ω.



Skilgreining: Atburðir A og B kallast *sundurlægir* (*ósamrræmanlegir*) ef $A \cap B = \varnothing$.



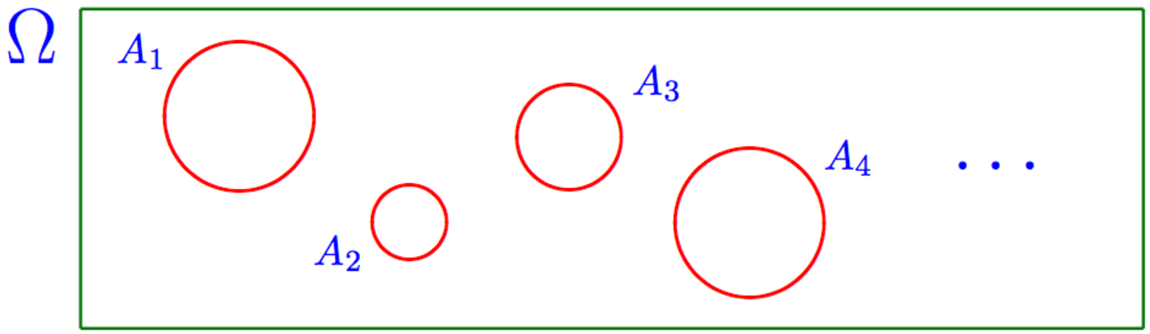
Skilgreining: ***Líkindi*** (*líkur*) eru fall $\mathbf{P}$ úr safni allra atburða sem uppfyllir:

(1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(2) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ fyrir alla atburði A.

(3) Ef $A_1, A_2, \ldots$ eru sundurlægir atburðir gildir:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$



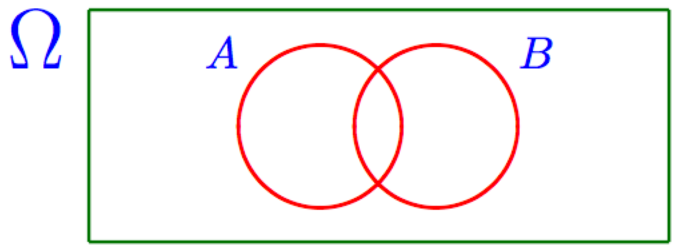
Dæmi. Í námskeiði einu eru 25 nemar úr viðskiptafræðideild, 10 í fjármálahagfræði, 10 í heilsuhagfræði og 8 úr iðnaðarverkfræði. Ef við veljum nemanda af handahófi til að svara spurningu, hverjar eru þá líkurnar á að sá útvaldi sé (a) í viðskiptafræði og (b) í heilsuhagfræði eða iðnaðarverkfræði?

Reiknireglur

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1 \text{ og } \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

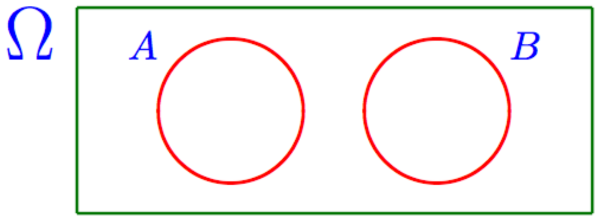
Um alla atburði A og B gildir:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

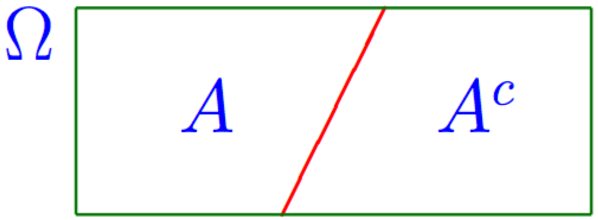


Um alla sundurlæga atburði A og B gildir:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$



$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A).$$



Dæmi. Jónas útskrifast brátt af hagfræðideild. Að loknum tveimur atvinnuviðtökum þá metur hann líkurnar á að fá vinnu hjá fyrirtæki A sem 0.8 og hjá fyrirtæki B sem 0.6. Ef hann metur líkurnar á að fá tilboð frá báðum sem 0.5, hverjar eru þá líkurnar á því að hann fái tilboð frá öðru hvoru?

Dæmi. Framleiðandi tilgreinir lengd snúru sem 2000 ± 10 mm. Við framleiðsluna eru 99% líkur á því að lengdin verði innan þessara marka og að auki er vitað að það eru jafnar líkur á því að lengdin verði meiri en 2010mm annars vegar og minni en 1990 annars vegar.

1. Hverjar eru líkurnar á því að snúra verði of löng?
2. Hverjar eru líkurnar á því að snúra valin af handahófi sé lengri en 1990mm?

Skilyrtar líkur

Skilgreining: Ef A og B eru atburðir og $\mathbf{P}(B) > 0$, kallast

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

skilyrtu líkurnar á A ***gefið*** B.

Takið eftir að $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.

Takið líka eftir að fyrir jafnar líkur gildir:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\text{fjöldinn í } A \cap B}{\text{fjöldinn í } B}.$$

Dæmi. Í forsetakosningum 2004 sýndu síðustu tölur skoðanakannana í Ohio eftirfarandi eftirfarandi niðurstöður:

	Bush	**Kerry**
Engin háskólagráða (62%)	50%	50%
Háskólagráða (38%)	53%	46%

Ef einstaklingur sem kaus Bush er valinn af handahófi, hverjar eru líkurnar á að hann hafi háskólagráðu?

Dæmi. Líkurnar á því að flug fari á réttum tíma er $P(D) = 0.83$ og líkurnar á því að vélin lendi á réttum tíma er $P(A) = 0.82$. Líkurnar á að hún taki á loft og lendi á réttum tíma er $P(A \cap D) = 0.78$. Hverjar eru líkurnar á því að:

1. Vélin lendi á réttum tíma að því gefnu að hún fór á réttum tíma?
2. Vélin fari í loftið á réttum tíma að því gefnu að hún lendi á réttum tíma?
3. Vélin lendi á réttum tíma ef hún fór ekki á réttum tíma í loftið?

Óháðir atburðir

Það væri eðlilegt að segja að A sé óháður B ef

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \mathbf{P}(A) \quad \text{þ.e.} \quad \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$$

og að B sé óháður A ef

$$\mathbf{P}(B\,|\,A) = \mathbf{P}(B) \quad \text{þ.e.} \quad \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B).$$

Skilgreining: Atburðir A og B kallast *óháðir* ef

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Skilgreining: Atburðir A, B og C kallast *óháðir* ef

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$$

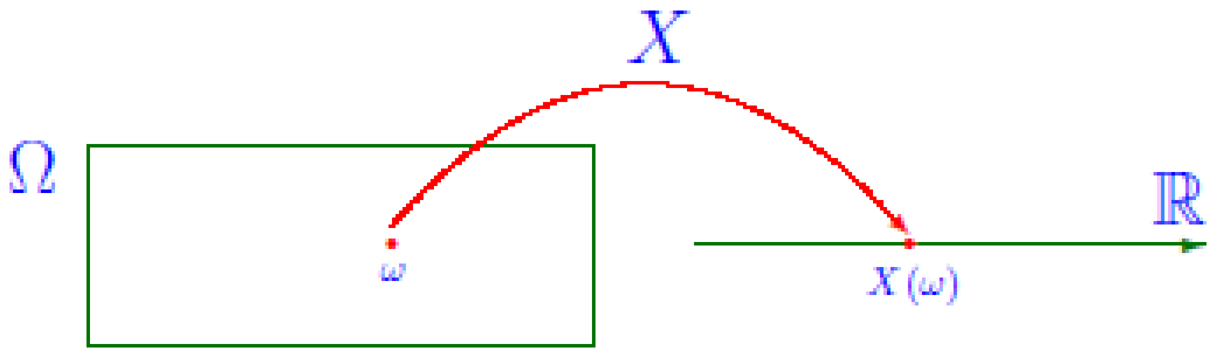
$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$$

og $\quad \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$

Dæmi. Tökum eldspýtnakassa með 20 eldspýtum en 5 þeirra eru gallaðar. Ef við tökum tvær af handahófi, hverjar eru líkurnar á því að báðar séu gallaðar?

Slembistærðir

Slembistærð er fall $X : \Omega \to \mathbb{R}$.



Dæmi. Tveir boltar eru dregnir í röð úr poka með 4 rauðum og 3 svörtum boltum án þess að fyrri boltanum sé skilað. Ef Y er slembistærðin sem táknar fjölda rauðra bolta, hver eru möguleg gildi y á Y og hver er samsvarandi atburður?

Dreififall slembistærðar

Skilgreining: *Dreififall* slembistærðar X er

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Skrifum oft F_X í stað F. Þetta er gert til að greina F frá dreififöllum annarra slembistærða.

Regla: Dreififall F uppfyllir:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant F(y) \leqslant 1, \quad x < y$.

(2) $F(x) \to 0$ þegar $x \to -\infty$.

(3) $F(x) \to 1$ þegar $x \to +\infty$.

(4) F er samfellt frá hægri: $F(y) \to F(x)$ þegar $y \searrow x$.

Aths: Ef fall F hefur þessa 4 eiginleika, þá er til slembistærð X með F sem dreififall.

Regla: $\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a), \quad a < b.$

Setjum $F(b-) := \lim_{a \nearrow b} F(a), \quad b \in \mathbb{R}.$

Takið eftir að fyrir öll $b \in \mathbb{R}$ gildir

$$\mathbf{P}(X = b) = F(b) - F(b-),$$

og sér í lagi

$$F \text{ samfellt í } b \;\Rightarrow\; \mathbf{P}(X = b) = 0.$$

Strjálar slembistærðir

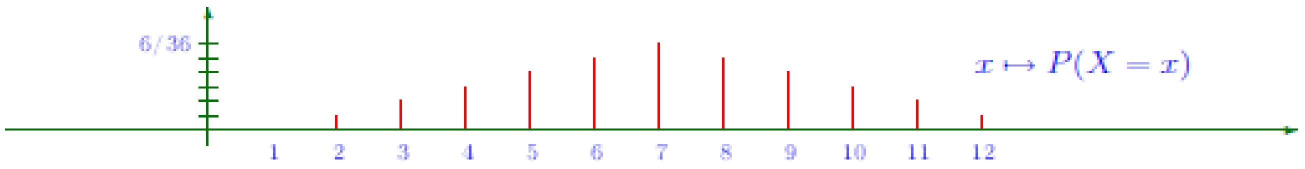
Skilgr: X kallast *strjál* ef hún tekur endanlega mörg gildi $\{a_1, \ldots, a_k\}$ eða teljanlega mörg gildi $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Fallið $x \mapsto \mathbf{P}(X = x)$ kallast þá *líkindafall* X.

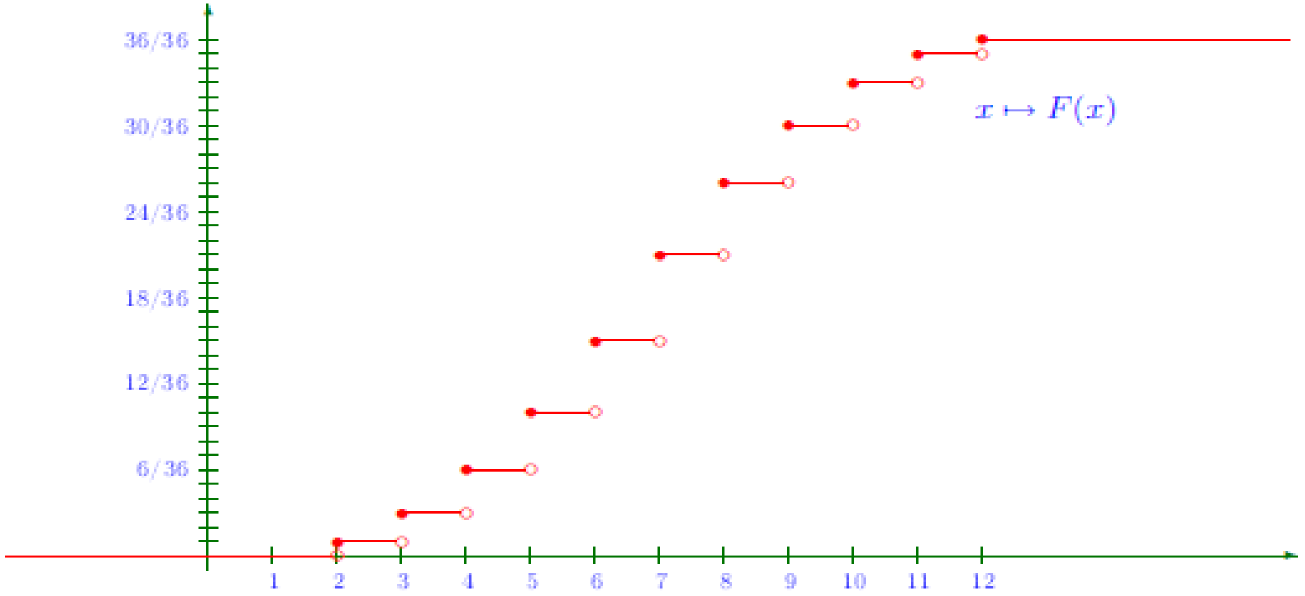
Takið eftir að ef X er strjál þá gildir:

$$F(x) = \sum_{y \leqslant x} \mathbf{P}(X = y).$$

Dæmi (tveir teningar): Látum $\mathbf{P}$ vera jafnar líkur á útkomumenginu $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$. Látum X vera punktasummuna, þ.e. $X(i,j) = i + j$. Líkindafall X er þá svona:



Og dreififall X er svona:

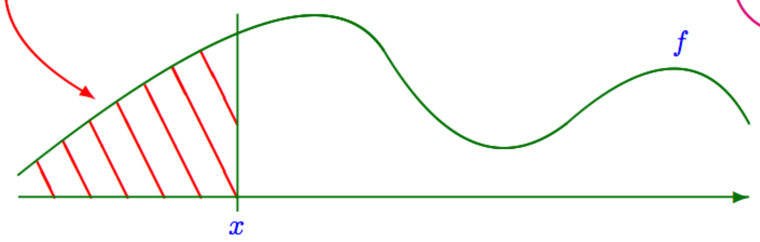


Samfelldar slembistærðir

Skilgreining: Fall f sem uppfyllir $f(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, og $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ kallast *þéttleiki*. Slembistærð X kallast *samfelld* ef til er þéttleiki f þ.a.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f = F'}$$



f kallast þá þéttleiki X. Skrifum oft f_X í stað f.

Aths: Ef f er þéttleiki, þá er til X með þéttleika f.

Regla: Ef X er samfelld slembistærð, þá er dreififallið F samfellt fall. Ennfremur gildir að

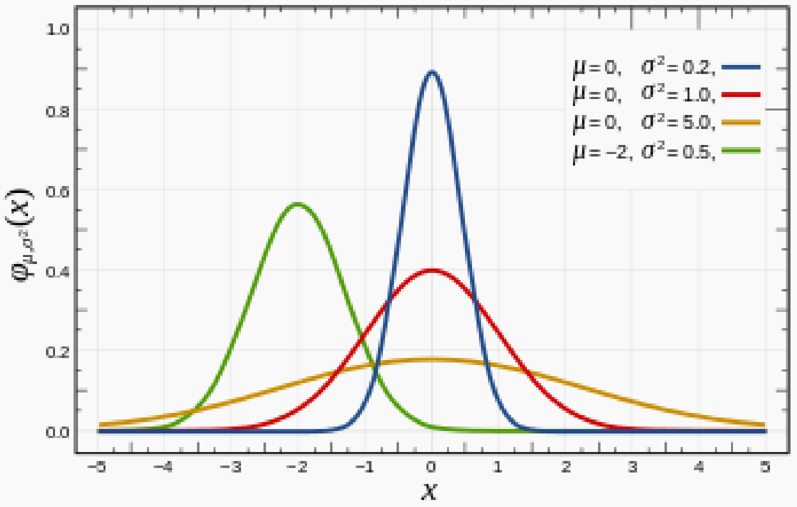
$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < b,$$

og

$$\mathbf{P}(X = b) = 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

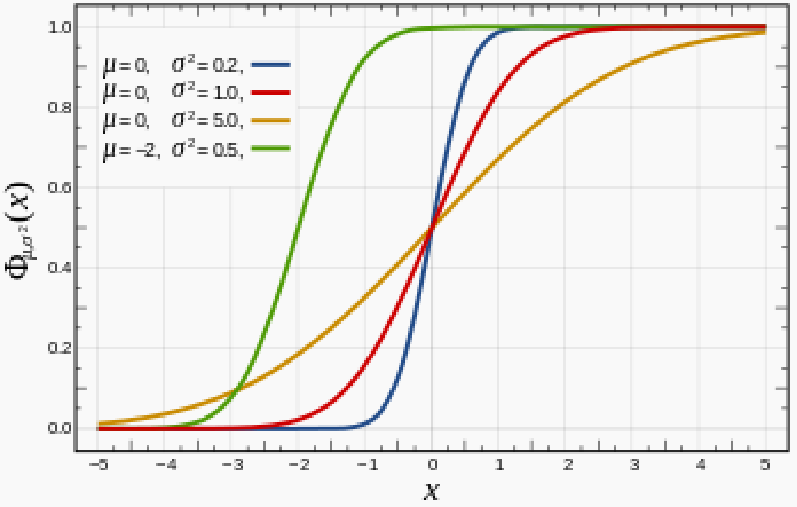
Normal distribution

Probability density function



The red curve is the *standard normal distribution*

Cumulative distribution function



Dæmi. Biðtími, í klst, á bráðamóttöku landspítalans er samfelld slembibreyta X með dreififall

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-8x}, x \geq 0 \end{cases}$$

Hverjar eru líkurnar á að bíða í minna en 12 min

a) Notið dreififallið fyrir X

b) Notið þéttifallið fyrir X