HERMANN ÞÓRISSON

UM SÖGU OG TÚLKUN LÍKINDA

ALLT er tilviljun háð, eða flest. En jafnvel tilviljunin lýtur lögmálum. Líkindafræðin er sú grein stærðfræðinnar sem fjallar um þessi lögmál á sama hátt og til dæmis rúmfræðin fjallar um lögmál flatarmynda og rúmforma. Það var ekki fyrr en á 20. öld sem vísindin komust almennt á það stig að ekki var lengur stætt á að horfa fram hjá því að „allt sé tilviljun háð". Samkvæmt annarri megingreina nútímaeðlisfræði, skammtafræðinni, er tilviljunin jafnvel einn af hornsteinum heimsins, uppspretta framvindunnar. Líkindafræðin kemur nú við sögu næstum hvar sem gripið er niður í vísindum og tækni, allt frá eðlisfræði til félagsvísinda, tölvunarfræði til hagfræði, upplýsingatækni til fjármálafræði, gæðastjórnun til málvísinda.

Hér verður stiklað á örfáum meginatriðum úr sögu líkindafræðinnar og túlkun líkindahugtaksins rædd[1].

Almætti og örlög

Frá grárri forneskju hafa menn heillast af tilviljuninni. Dæmi um þetta er víða að finna í trúarbrögðum og bókmenntum. Til gamans læt ég fljóta hér með merkilega klausu úr Heimskringlu (Ólafs sögu helga) eftir Snorra Sturluson (1178–1241):

> Svo segir Þorsteinn fróði að byggð sú lá í Hísing er ýmist hafði fylgt til Noregs eða til Gautlands. Þá mæltu þeir konungarnir sín í milli að þeir skyldu hluta um eign þá og kasta til teningum. Skyldi sá hafa er stærra kastaði. Þá kastaði Svíakonungur sex tvö og mælti að Ólafur konungur þurfti þá eigi að kasta.
>
> Hann segir og hristi teningana í hendi sér: „Enn eru sex tvö á teningunum og er guði drottni mínum enn lítið fyrir að láta það upp horfa".
>
> Hann kastaði og horfðu upp sex tvö. Þá kastaði Ólafur Svíakonungur og enn tvö sex. Þá kastaði Ólafur Noregskonungur og var sex á öðrum en annar

[1] Þessi grein er að stofni til efni sem tekið var saman árið 2003 fyrir *Verpil*, tímarit Stiguls, félags stærðfræði- og eðlisfræðinema við Háskóla Íslands. Meginheimildin er L. E. Maistrov, *Probability Theory: A Historical Sketch* (London – New York 1974). Frumútgáfan er á rússnesku: *Teoria veroiatnostei* (Moskva – Leningrad 1967).

> hraut í sundur og voru þar á sjö. Eignaðist hann þá byggðina. Eigi höfum vér heyrt getið fleiri tíðinda á þeim fundi. Skildust konungar sáttir.[2]

Hér beitir guð óvenjulegu slembibragði til að vilji hans verði.

Menn hafa kastað beinum, sprett upp dýrvömbum og mynstrað glundroðakenndan stjörnuhimininn til að finna vísbendingar um vilja almættisins eða um óumflýjanleg örlög. Og leikir þar sem tilviljun liggur til grundvallar voru og eru sívinsælir, allt frá skafmiðum yfir í rússneska rúllettu og upp í brids, svo þrjú dæmi úr nútímanum séu tekin.

Forstærðfræðileg líkindahugtök hafa lengi verið notuð til dæmis í fjárhættuspilum og dómsmálum til að reyna að ná einhverjum tökum á tilviljun og óvissu. Frummerking orðanna *líkindi* og *líkur* á íslensku og *likelihood* á ensku gæti verið „það sem *líkist* því að vera *satt*“ samanber jafnframt orðið *sennileiki*. Þetta er einnig frummerking orðanna *verisimilis* í latínu, *Wahrsheinlichkeit* í þýsku og *sannolikhet* á sænsku. *Probability* er af latneskum uppruna og mun vísa til þess að vitni sé trúverðugt (göfugt, ættgöfugt).

Þrátt fyrir að tilviljunin sé alls staðar nærverandi og þótt frumatriði líkindafræði séu sára einföld, þróaðist þessi grein stærðfræðinnar seint miðað við til dæmis rúmfræðina sem Grikkir háþróuðu í fornöld og algebruna sem líka komst vel á legg hjá Aröbum fyrir langalöngu. Ein ástæða gæti verið sú að mikilvæg hagnýtingarsvið eins og tryggingar þyrftu að vera til staðar. Önnur ástæða gæti verið sú að það er erfitt að festa hendur á tilviljuninni, það er erfitt að sjá hana fyrir sér.

Upphaf á 17. öld — Pascal og Fermat

Uppruni líkindafræðinnar er yfirleitt rakinn til ársins 1654 þegar franski stærðfræðingurinn og heimspekingurinn Blaise Pascal (1623–1662) hóf bréfaskipti við landa sinn og kollega Pierre de Fermat[3] (1601–1665). Girolamo Cardano (1501–1576) fjallaði reyndar um jafnar líkur um miðja 16. öld[4], en komst ekki að neinum markverðum niðurstöðum. Galileo Galilei

[2] Sjá lok kafla 94. Hísing er nú borgarhlutinn Hisingen í Gautaborg.

[3] Þann sama Fermat og skrifaði á spássíu að hann hefði fundið fagra sönnun á því að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur x, y og z sem uppfylla $x^n + y^n = z^n$ fyrir nokkra heila tölu n sem er stærri en tveir, en að því miður væri spássían of þröng til að sönnunin kæmist þar fyrir. Sönnun Fermats er enn ófundin, en hins vegar rak Andrew Wiles smiðshöggið á hátimbraða nútímasönnun fyrir nokkrum árum.

[4] Bók Cardanos, *Liber de ludo aleae*, mun vera skrifuð um 1565 en kom ekki út fyrr en árið 1663.

Mynd 1. *Pierre de Fermat.*

(1564–1642) notaði einnig jafnar líkur til að skoða teningaköst[5], og rétt reiknaðar líkur fyrir þrjú köst mun vera að finna í þrettándualdarljóðinu *De vetula*.

Bréfaskipti þeirra Pascals og Fermats hófust vegna spurninga um fjárhættuspil sem menn að nafni Antoine Gombaud, Chevalier de Méré og Damien Mitton lögðu fyrir Pascal. Krónuköst, teningaköst og einföld fjárhættuspil hafa sömu þýðingu í líkindafræði og þríhyrningar, hringir, kúlur og kassar hafa í rúmfræði: skilningur á þeim auðveldar rannsókn á flóknari fyrirbærum.

Hér er dæmi um verkefni sem Pascal og Fermat leystu, en það hafði þá velkst fyrir mönnum um aldir. Tveir menn leika eftirfarandi leik. Krónu er kastað og fær annar eitt stig ef framhliðin kemur upp og hinn eitt stig ef bakhliðin kemur upp. Vinnur sá sem fyrr fær n stig þar sem n er einhver fyrirfram tiltekinn fjöldi. Mennirnir urðu að hætta leiknum þegar annan vantaði *eitt* stig til að vinna og hinn vantaði *tvö* stig. Hvernig á að skipta vinningsupphæðinni? Pascal og Fermat komust báðir að þeirri niðurstöðu að

[5] Grein Galileos, *Sopra le Scoperte dei Dadi*, mun vera skrifuð um 1620 en birtist ekki fyrr en árið 1718.

Mynd 2.
Blaise Pascal.

sá sem vantar eitt stig ætti að fá ¾ af vinningsupphæðinni (vinningslíkur hans eru ¾ ef leikurinn væri leikinn til enda, vikið verður að þessu aftar í greininni).

Pascal og Fermat virðast hafa verið fyrstir til að ná öruggu taki á því sem er í eðli sínu óöruggt. Hollendingurinn Christiaan Huygens[6] (1629–

[6] Huygens var einnig merkur eðlis- og stjörnufræðingur. Hann fann hringa Satúrnusar og fann upp pendúlklukkuna.

Mynd 3. *Christiaan Huygens.*

1695) byggði á hugmyndum þeirra. Hann gaf út fyrstu bókina um líkindafræði meðal annars fyrir áeggjan Pascals. Hún heitir *De Ratiociniis in Ludo Aleae* og kom út á latínu árið 1657; á hollensku heitir hún *Van reeckeningh in spelen van geluck*.

Lögmál mikils fjölda — Jacob Bernoulli

Jacob Bernoulli (1654–1705), svissneskur stærðfræðingur af niðurlenskum uppruna, sannaði fyrstu meginsetningu líkindafræðinnar, *Lögmál mikils fjölda*. Setninguna er að finna í bókinni *Ars Conjectandi* sem kom út að honum látnum árið 1713. *Lögmál mikils fjölda* má orða svona: Látum p vera líkurnar á því að tiltekinn atburður A gerist í einni tilraun og látum N_n tákna fjölda skipta sem A gerist þegar tilraunin er framkvæmd í n óháð skipti. Þá gildir, þegar n er nógu stórt, að N_n/n er nálægt p með líkum sem eru næstum einn (næstum 100%). Á nútímatáknmáli er þetta skrifað svona (þar sem P táknar líkindi): Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ gildir

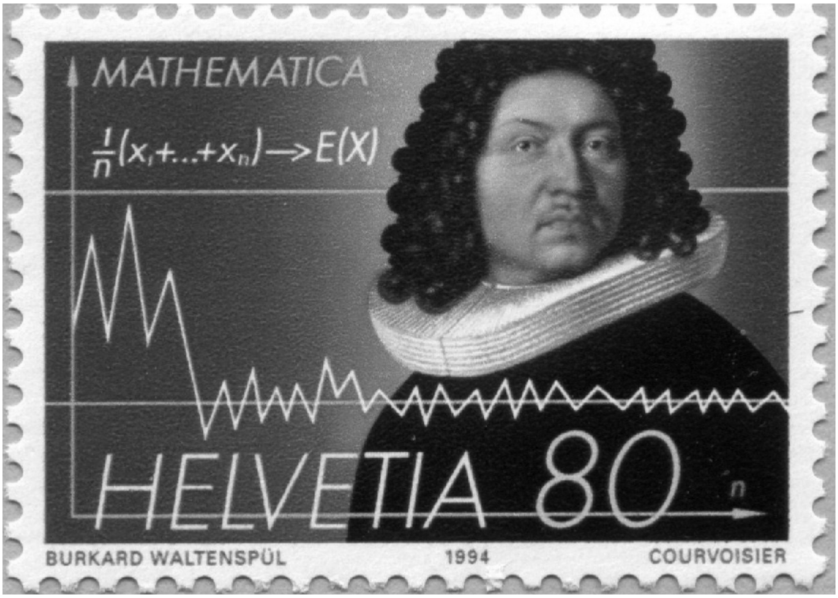
$$\mathrm{P}(|N_n/n - p| \leq \varepsilon) \to 1 \text{ þegar } n \to \infty.$$

Þetta kallast nú *veika* lögmálið til aðgreiningar frá *sterka* lögmálinu sem Emile Borel sannaði tveimur öldum síðar:

$$\mathrm{P}(N_n/n \to p \text{ þegar } n \to \infty) = 1.$$

Losaralegar má skrifa þessi lögmál svona:

$$N_n/n \approx p \quad \text{þegar } n \text{ er nógu stórt.}$$



Mynd 4. *Jacob Bernoulli.*

Þetta samræmist vel þeirri almennu tilfinningu (nútímafólks) að þegar krónu sé kastað oft komi framhliðin upp í um það bil helmingi kasta, og þegar teningi sé kastað oft komi fyrirfram tiltekin hlið upp í um það bil einu af hverjum sex köstum.

Lögmál mikils fjölda gildir einnig fyrir meðaltöl af óháðum stærðum sem allar hafa sömu dreifingu (hafa sömu líkur á að taka hin mismunandi gildi) með væntigildi[7] μ:

$$(X_1 + \ldots + X_n)/n \approx \mu \quad \text{þegar } n \text{ er nógu stórt.}$$

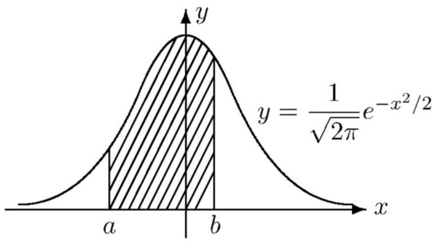
Lögmálið gildir loks fyrir mjög almenn meðaltöl af óháðum stærðum sem ekki þurfa að hafa sömu dreifingu og af margskonar háðum stærðum líka. Kemur þá einhver annar markgildisfasti í staðinn fyrir sameiginlega væntigildið μ.

[7] Ef slembin stærð X (til dæmis punktafjöldi í teningskasti) getur tekið gildin $a_1, \ldots, a_k$ með líkunum $p_1, \ldots, p_k$ þá er væntigildi X skilgreint sem vegna meðaltalið $\mu = p_1a_1 + \ldots + p_ka_k$. Væntigildið er líka oft táknað með E[X].

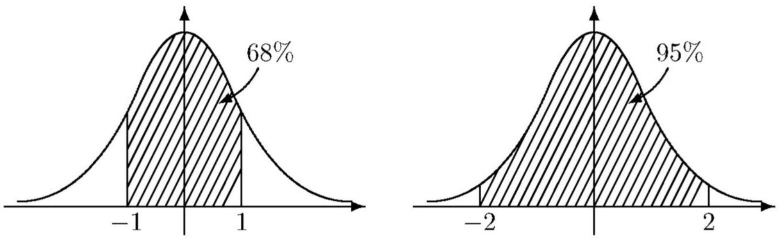
Höfuðmarkgildissetningin — de Moivre og Gauss

Næstu stóruppgötvun gerði Abraham de Moivre (1667–1754), franskur stærðfræðingur sem flúði til Englands undan Húgenottaofsóknunum. Í bók sinni *The Doctrine of Chances*, sem kom út árið 1711 á latínu og 1718 á ensku, setur hann fram *normlegu dreifinguna* og sannar *Höfuðmarkgildissetninguna* fyrir krónuköst: Þegar $p = ½$ og n er nógu stórt þá gildir fyrir öll bil $[a, b]$ að líkurnar á því að $(N_n/n - ½)2\sqrt{n}$ sé innan bilsins eru um það bil flatarmál skástrikaða svæðisins á myndinni:

Samkvæmt *Lögmáli mikils fjölda* er hlutfallstíðni framhliða í mörgum krónuköstum nálægt ½ en *Höfuðmarkgildissetningin* fer skrefi lengra og segir hversu góð þessi nálgun er. Þegar krónu er til dæmis kastað 100 sinnum þá eru um það bil 68% líkur á að framhliðin komi upp 50±5 sinnum og um það bil 95% líkur á að hún komi upp 50±10 sinnum:



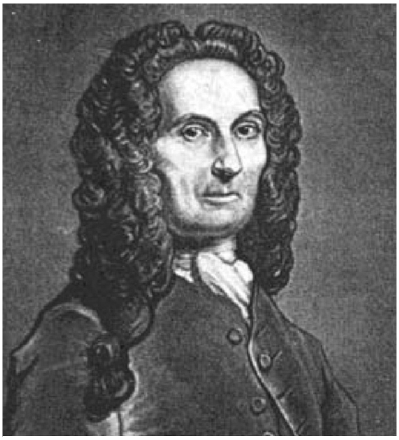
Mynd 5. *Normlega dreifingin.*



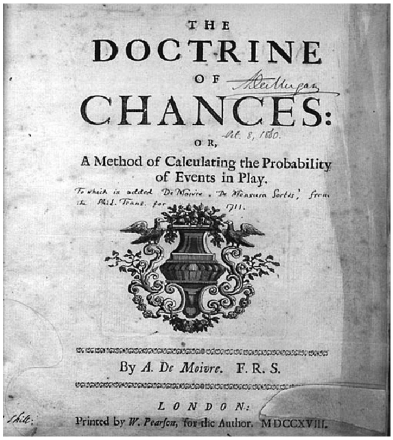
Mynd 6. *Dæmi um líkur á tveimur mismunandi frávikum.*

Þegar krónu er hins vegar kastað 10000 sinnum þá eru um það bil 68% líkur á að framhliðin komi upp 5000±50 sinnum og um það bil 95% líkur á að hún komi upp 5000±100 sinnum. *Hundraðföldun* kasta *hundraðfaldar* væntanlegan fjölda framhliða en óvissubilið hundraðfaldast ekki *heldur tífaldst bara*, — spáin um fjölda framhliða verður *nákvæmari*.

De Moivre sannaði *Höfuðmarkgildissetninguna* fyrir $p = ½$ en almennt gildir að nálga má $(N_n/n - p)\sqrt{(n/p(1 - p))}$ á sama hátt. Og reyndar gildir



Mynd 7. *Abraham de Moivre.*



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability
of Events in Play.
By A. De Moivre. F. R. S.
LONDON:
Printed by W. Pearson, for the Author. MDCCXVIII.

Mynd 8. *Titilblað* The Doctrine of Chances.

setningin fyrir mjög almennar summur af óháðum stærðum og fyrir margskonar háðar stærðir líka.

Þótt de Moivre virðist hafa verið fyrstur til að uppgötva normlegu dreifinguna er hún samt yfirleitt ekki kennd við hann heldur oft kölluð

Mynd 9. *Johann Carl Friedrich Gauß.*

Gaußdreifing eftir Þjóðverjanum Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), — *Princeps mathematicorum*, — en hann færði rök fyrir því löngu seinna að hún ætti vel við um mæliskekkjur. Þetta stafar af því að mæliskekkjur verða oft til við það að margar smáar næstum óháðar skekkjur leggjast saman.

Rannsóknir á því hvort *Lögmál mikils fjölda* og *Höfuðmarkgildissetningin* — og reglur þeim skyldar — gildi við nýjar áður ókannaðar aðstæður eru sígild viðfangsefni líkindafræðinga. Bæði þessi lögmál gegna lykilhlutverki í nútímatölfræði.

Tölfræði — listin að draga ályktanir af gögnum

Tölfræði er oft kölluð *listin að draga ályktanir af gögnum*. Hún byggir á líkindafræðinni, en er um margt ólík henni og á sér nokkuð aðra sögu.

Erlenda heitið á tölfræði, statistík (statistics á ensku), er dregið af orðinu „stat“ (skandinavíska) eða „state“ (enska) sem táknar ríki. Orðið var notað þegar á 18. öld um tölulegar upplýsingar sem vörðuðu ríkið og hag þess. Samkvæmt þessu er orðið „hagtölur“ ljómandi þýðing á statistík, en orðið „tölfræði“ afleit. „Statistík“ er reyndar núorðið notað um hvers konar gögn, ekki bara gögn sem lýsa hag ríkisins. Þessi tvöfalda merking erlenda orðsins statistík („gögn“ annars vegar og „ályktanafræði“ hins vegar) stingur neyðarlega upp kollinum hér á landi þar sem töluleg gögn eru einatt kölluð „tölfræði“ þótt ekki sé um nein „fræði“ að ræða.

Vísindagreinin tölfræði gerðist stærðfræðilegri með tímanum og tók loks líkindafræðina alfarið í þjónustu sína á 20. öld. Hún þróaðist úr því að fjalla um söfnun og framsetningu gagna yfir í að verða grein á mörkum stærðfræði og annarra vísindagreina sem fjallar um hvernig eigi að draga ályktanir af gögnum og reyndar einnig um hvernig eigi að safna gögnum svo unnt sé að draga af þeim ályktanir.

Tölfræðin er nokkurs konar andhverfa líkindafræðinnar. Líkindafræðin **spáir** fyrir um óþekktar tilraunaniðurstöður á grundvelli þekktra aðstæðna. Tölfræðin snýr þessu við, **metur** óþekktar aðstæður á grundvelli þekktra tilraunaniðurstaðna (gagna). Þetta kemur nokkuð skýrt fram í eftirfarandi dæmi.

Hugsum okkur að gerð sé skoðanakönnun þar sem 1000 handahófsvaldir kjósendur eru spurðir hvort þeir ætli að kjósa tiltekinn flokk eða ekki. Hugsum okkur jafnframt til einföldunar að það sé ekkert brottfall (að allir þúsund svari spurningunni). Látum p tákna raunverulegt hlutfallsfylgi flokksins meðal kjósenda og $H = N_{1000}/1000$ tákna hlutfallsfylgi hans meðal þeirra sem spurðir eru. Þá er p óþekktur fasti en H er ekki fasti heldur slembin stærð: gildið á H fer eftir því hverjir slæðast til að lenda í úrtakinu. Ef samskonar könnun væri gerð samtímis fengist annað H en p væri óbreytt. Með *Lögmáli mikils fjölda* **spáir** líkindafræðin fyrir um H á grundvelli fylgisins p svona: $H \approx p$. Tölfræðin snýr þessu við og **metur** óþekkta fylgið p á grundvelli H svona: $p \approx H$. Ennfremur segir líkindafræðin með *Höfuðmarkgildissetningunni* til um nákvæmni **spárinnar**, til dæmis:

$$H = p \pm 2\sqrt{(}p(1-p)/1000) \text{ með um það bil 95\% líkum.}$$

Tölfræðin snýr þessu líka við og segir til um nákvæmi **matsins**:

$$p = H \pm 2\sqrt{(}H(1-H)/1000) \text{ með um það bil 95\% líkum}$$

þar sem sett hefur verið inn $p(1-p) \approx H(1-H)$ með leyfi *Lögmáls mikils fjölda*.[8]

Grundvöllur á 20. öld — Hilbert og Kolmogorov

Mynd 10. *David Hilbert.*

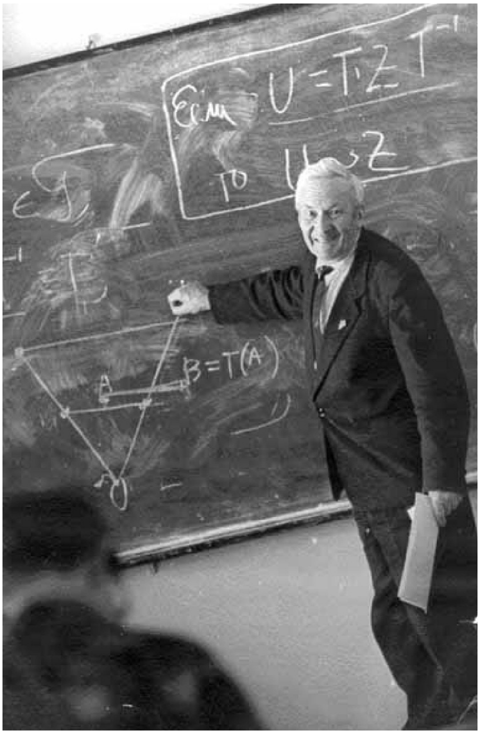
Líkindafræðin þróaðist jafnt og þétt á 18. og 19. öld fyrir tilverknað margra stærðfræðinga (Lagrange, Laplace, Poisson, Chebyshev, Markov) og notkun hennar teygði sig frá tryggingafræði yfir í eðlisfræði, til dæmis beittu Boltzmann og Gibbs henni í lok 19. aldar til að skýra eiginleika eins og hitastig lofttegunda með misæstri slembihreyfingu mikils aragrúa einda.

Líkindafræðin átti þó í vaxandi mæli við þann vanda að stríða að skorta formlegan grundvöll. Þegar endanlega margar útkomur koma til greina (eða teljanlega óendanlega margar eins og þegar krónu er kastað

[8] Sú tölfræði sem greint er frá hér er kennd við hlutlæga tíðnitúlkun líkinda. Tölfræði sem byggir á huglægri túlkun líkinda (Bayesian Statistics) hikar ekki við að gefa óþekkta fylginu p einhverja þekkta líkindadreifingu (kölluð fordreifing). Skekkjumörkin í matinu verða þá önnur og fara eftir þessari fordreifingu. Vikið verður að þessum tveimur túlkunum aftar í greininni.

þar til framhliðin kemur upp) er reyndar allt í sómanum. En til dæmis normlega dreifingin er samfelld, útkomurnar eru ekki bara óendanlega margar heldur óteljandi. Og furðuleg slembikennd náttúrufyrirbæri eins og Brownhreyfing (handahófskennt flökt agnar í vökva eða lofti vegna stöðugra árekstra við ósýnilegar sameindir á ferð og flugi) áttu sér ekki stærðfræðilega lýsingu.

Árið 1900, í frægu erindi á Öðru heimsþingi stærðfræðinga, setti þýski stærðfræðingurinn David Hilbert (1862–1943) fram 23 verkefni fyrir 20. öldina. Sjötta verkefnið fjallar um nauðsyn þess að setja fram frumsendur (axiom) fyrir þau eðlisvísindi þar sem stærðfræði skiptir meginmáli. Hilbert setur þarna líkindafræðina (sem hann greinilega flokkar þá til eðlisvísinda) fremst. Aldarþriðjungi síðar leysti rússneski stærðfræðingurinn Andrei N. Kolmogorov (1903–1987) þetta verkefni í hnitmiðaðri grein *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* sem kom út árið 1933.



Mynd 11. *Andrei N. Kolmogorov.*

„Líkindi eru mál með massann einn“

Skilgreiningu Kolmogorovs má orða svona:

Þegar tilraun er gerð (til dæmis teningi kastað) táknum við mengi allra hugsanlegra útkoma með Ω (þegar teningi er kastað getum við sett $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). *Atburður* er einfaldlega hlutmengi í Ω (þegar teningi er kastað er atburðurinn að oddatala komi upp hlutmengið $\{1, 3, 5\}$). Ekki þurfa öll hlutmengi að vera atburðir, en safn atburða þarf að mynda *σ-algebru*, það er að segja eftirfarandi skilyrði þurfa að vera uppfyllt:

- Ω er atburður (öruggi atburðurinn).
- Ef A er atburður þá er fyllimengið $\Omega \setminus A$ líka atburður.
- Ef $A_1, A_2, \ldots$ eru atburðir þá er sammengi þeirra atburður.

Líkindi eru raungilt fall P skilgreint á safn allra atburða sem uppfyllir eftirfarandi þrjú skilyrði:

(1) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
(2) $\mathrm{P}(A) \geq 0$ fyrir alla atburði A.
(3) Ef atburður A er sammengi sundurlægra atburða $A_1, A_2, \ldots$ þá gildir að $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots$

Kolmogorov skilgreindi sem sé líkindafræðina sem þann hluta svokallaðrar mál- og tegurfræði sem fjallar um „mál með massann einn“. Frumsendur (2) og (3) þýða að P sé *mál* og frumsenda (1) segir að heildarmálið (heildarmassinn) sé einn.

Túlkun til trafala

Sú grein stærðfræðinnar sem kallast mál- og tegurfræði hafði verið í glæsilegri þróun áratugina á undan og margir höfðu meðhöndlað líkindi sem mál, meðal annars sjálfur frumkvöðull mál- og tegurfræðinnar franski stærðfræðingurinn Emile Borel (1871–1956) sem sannaði til dæmis sterku útgáfuna af *Lögmáli mikils fjölda*. Hvers vegna var þá þessi augljósa skilgreining (að líkindi séu mál með massann einn) svona lengi að koma fram?

Mynd 12. *Emile Borel.*

Sá sem þetta skrifar telur að ástæðan sé sú að *túlkun* líkindahugtaksins hafi flækst fyrir mönnum og tafið fyrir. Hann hefur sjálfur reynt það á eigin skinni að þegar byrjendur sjá skilgreiningu Kolmogorovs í fyrsta sinn getur þeim brugðið illilega í brún. Þeir halda ef til vill að hún muni opinbera mikinn stórasannleik um veruleikann, að hún muni svipta hulunni af því hvað líkindi eru í „raun og veru“. En í staðinn koma þessi innantómu orð: líkindi eru mál með massann einn! Það kemur svo smátt og smátt í ljós að þessi „innantómu orð“ hafa í för með sér mikið frelsi. Kolmogorov leysti líkindafræðina úr læðingi með því að losa hana við veruleikatúlkun og gera hana að hreinni stærðfræði. Þeir sem fást við líkindafræði hafa reyndar ósjaldan einhverja veruleikatúlkun að leiðarljósi, en túlkunin flækist ekki lengur fyrir stærðfræðinni sem byggir einfaldlega á frumsendunum þremur.

Skilgreining Kolmogorovs horfði framhjá því hvað líkindi „þýddu" og losaði okkur þar með við mikið af fimbulfambi. Menn gátu loksins fengist við líkindafræði sem hverja aðra hreina stærðfræði án ágreinings, og deilt svo í tómstundum (eða þegar kom að hagnýtingum) um hvað þetta „þýddi" allt saman. Við skulum nú leyfa okkur þann lúxus.

Bábiljan um jafnar líkur

Þeir Pascal og Fermat notuðu jafnar líkur þegar þeir settu líkindafræðina á flot á 17. öld. Stundum eru gildar ástæður (samhverfuástæður) til að ætla að líkur séu jafnar, til dæmis að líkur á framhlið þegar krónu er kastað séu ½ og að líkur á tiltekinni hlið þegar teningi er kastað séu ⅙. Hér er samt auðvelt að misstíga sig eins og eftirfarandi saga sýnir.

Stærðfræðingurinn D'Alembert (1717–1783) tók þátt í gerð hinnar merku frönsku alfræðibókar á 18. öld. Hann tekur samskonar dæmi um líkindi og þeir Pascal og Fermat fengust við og nefnt var hér að framan. Tveir menn leika eftirfarandi leik. Krónu er kastað og fær annar eitt stig ef framhliðin kemur upp og hinn eitt stig ef bakhliðin kemur upp. Vinnur sá sem fyrr fær n stig þar sem n er einhver fyrirfram tiltekinn fjöldi. Mennirnir urðu að hætta leiknum þegar annan vantar *eitt* stig til að vinna og hinn *tvö* stig. Hverjar eru líkurnar á að sá, sem vantar eitt stig, vinni ef leikurinn væri leikinn til enda? Samkvæmt D'Alembert koma þrjár útkomur til greina við svona aðstæður:

Mynd 13. *D'Alembert.*

- framhlið í næsta kasti,
- bakhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta.

Tvær útkomur af þessum þremur þýði að sá sem vantar eitt stig vinni og vinningslíkur hans séu því ⅔.

Pascal og Fermat höfðu hins vegar löngu áður gert, — eins og viðtekið er nú á dögum, — ráð fyrir fjórum jafnlíklegum útkomum við svona aðstæður:

- framhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- framhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta,
- bakhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta.

Þrjár útkomur af þessum fjórum þýði að sá sem vantar eitt stig vinni og vinningslíkur hans séu því ¾.

Rök D'Alemberts fyrir sínum reikningum voru þau að leikurinn sé búinn ef framhliðin kemur upp í næsta kasti. Krónunni sé þá ekki kastað aftur og því rangt að skipta útkomunni „framhlið í næsta kasti" í tvennt („framhlið í næsta kasti og framhlið í þarnæsta" og „framhlið í næsta kasti og bakhlið í þarnæsta"). D'Alembert mun þó hafa viðurkennt að hin lausnin kæmi líka til greina og á jafnframt að hafa sagt að þetta sýndi bara að líkindafræðin sé engin stærðfræði.

Mig grunar að D'Alembert hafi verið haldinn þeirri bábilju (sem reyndar er enn að finna í sumum framhaldsskólakennslubókum) að líkur þurfi alltaf að vera jafnar. Líkönin tvö hér að ofan eru í fullu samræmi innbyrðis ef við notum *ójafnar* líkur í líkani D'Alemberts og gefum útkomunni „framhlið í næsta kasti" líkurnar ½.

En þótt það virðist nokkuð einfeldningslegt hjá D'Alembert að gefa sér jafnar líkur í fyrra líkaninu þá má finna honum það til málsbóta að bæði líkönin koma til greina ef eingöngu er litið á málið frá sjónarhóli *formlegrar* stærðfræði. Þótt stærðfræðilegt *innsæi* kalli reyndar á seinna líkanið, þá er vandamálið einmitt það að líkindafræðin er stærðfræði. Það er *veruleikatúlkunin* en ekki formlega stærðfræðin sem sker úr um hvort líkanið á betur við um raunveruleg krónuköst.

Túlkun — Eru líkindi til?

Túlkanir á líkindum skiptast í meginatriðum í tvennt: huglæga túlkun eða þekkingarhyggju, og hlutlæga túlkun eða raunhyggju.

Þekkingarhyggju, huglægu túlkunina á líkindum, er að finna hjá Pierre-Simon Laplace[9] (1749–1827). Hann reit mikið verk um líkindi, *Théorie*

[9] Þeim sama Laplace og sagði við Napóleon að hann hefði enga þörf fyrir tilgátuna um guð.

Mynd 14.
Pierre-Simon Laplace.

analytique des probabilités, sem kom út árið 1812. Bókin hefst á 106 síðna formála með heitinu *Essai philosophique sur les probabilités* þar sem hann ræddi túlkun á líkindum. Hann taldi að líkindi kæmu til sögunnar þegar upplýsingar skorti, til dæmis þegar tveir möguleikar eru fyrir hendi og ekkert um þá vitað þá séu þeir jafn líklegir. Þetta er skylt þeirri huglægu túlkun á líkindum, sem kennd er við Thomas Bayes (1702–1761), að líkindi séu mælikvarði á *tiltrú*. Ákveðna gerð þekkingarhyggju er líka að finna hjá hagfræðingnum John Maynard Keynes (1883–1946) í *Treatise on Probability* sem kom út árið 1921. Bruno de Finetti (1906–1985) reyndi að leggja tiltrúartúlkunina til grundvallar líkindafræðinni á 4. áratugnum. Hann og sporgöngumenn hans eru meðal hörðustu áhangenda tiltrúarviðhorfsins og telja að „líkindi séu ekki til“.

Raunhyggjan, hlutlæga túlkunin á líkindum, telur hins vegar að „líkindi séu til“, að tilviljunin sé raunveruleg og að líkindi vísi til einhvers sem sé til staðar í raunveruleikanum utan við huga mannsins. *Tíðnihyggja* er algengasta gerð raunhyggjunnar. Samkvæmt tíðnihyggju eru líkindi hlutfallstíðni þegar tilraun er endurtekin oft. Þetta er í samræmi við *Lögmál mikils fjölda* sem segir að $p \approx N_n/n$ þegar n er stórt. Richard von Mises (1883–1953) reyndi að leggja tíðnitúlkunina til grundvallar líkindafræðinni í *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* sem kom út árið 1919. Í lauslegri endursögn er hugmyndin þessi: Óendanleg talnaruna (ímyndaðar niðurstöður úr endurteknum tilraunum) er lögð til grundvallar og líkur á tilteknum atburði A eru skilgreindar sem

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \to \infty} N_n(A)/n$$

þar sem $N_n(A)$ táknar fjölda skipta sem atburðurinn A gerist í fyrstu n tilraununum. Þetta markgildi er sem sé sagt vera til áður en líkindi eru skilgreind. Þessi eðlilega tilraun til skilgreiningar mistókst.[10] Takið til dæmis

[10] Hugmyndir von Mises þróuðust út í svokallaða flækjufræði. Hún fjallar um hvað það þýði að ein tiltekin talnaruna sé „slembin í sér“ (en ekki slembin vegna þess hvernig hún verður til, eins og til dæmis við endurtekin teningaköst). Kolmogorov sökkti sér síðar á ævinni niður í rannsóknir á þessu gjörólíka slembihugtaki.

eftir að ef hlutfallstíðni í fyrirframgefinni talnarunu væri notuð sem skilgreining á líkindum kæmu aðeins teljanlega margar útkomur til greina og þar með væru samfelldar dreifingar eins og normlega dreifingin útilokaðar.

Tiltrúarsinnar hafa það meðal annars út á tíðnihyggjuna að setja að hún krefst óendanlegra endurtekninga á tilraun, sem sé óframkvæmanlegt. Líkur séu reyndar oft notaðar við aðstæður þar sem jafnvel ein endurtekning kemur ekki til greina. Tíðnimenn gagnrýna tiltrúarhyggjuna meðal annars með því að benda á að þegar fólk sé beðið um að tiltaka líkur á mörgum atburðum þá sé eins víst að líkurnar séu ekki í innra samræmi (uppfylli ekki frumsendur Kolmogorovs).

Hvor túlkunin ætli sé rétt?

Kolmogorov lagði grunn að líkindafræðinni á allt annan hátt. Hann lagði ekki tiltekna *túlkun* á líkindum til grundvallar heldur aðeins stærðfræðilega *eiginleika* þeirra. Einn af kostunum við skilgreiningu Kolmogorovs er sá að hún á jafn vel við um báðar túlkanir: þá huglægu og þá hlutlægu. En hvor túlkunin skyldi vera „rétt"?

Sá sem þetta skrifar telur að túlka megi líkindi á báða vegu. Ekkert mæli gegn því að nota líkindi sem mælikvarða á tiltrú, en jafnframt sé ókleift að skýra hversu nothæf líkindafræðin er ef hún fjalli ekki um eitthvað raunverulegt utan huga mannsins. Í D'Alembert sögunni hér að framan samræmist aðferð Pascals og Fermats bæði samhverfurökum tiltrúarmanna og niðurstöðum tíðnitilrauna. Ef til vill mætti nota það sem mælikvarða á „veruleikatengsl" manneskju hversu vel persónuleg tiltrú samræmist mældri tíðni.

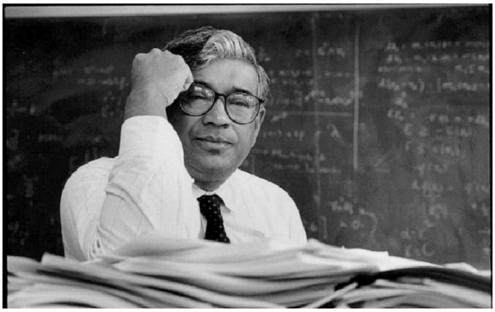
Eitt það merkilegasta við skilgreiningu Kolmogorovs er að hún leiðir af sér *Lögmál mikils fjölda*: **líkindi** eru markgildi hlutfallslegrar tíðni við óháðar endurtekningar á sömu tilraun. En þetta markgildi er aðeins til með **líkunum** einn. Þannig þarf hér hugtakið „líkindi" að vera skilgreint *áður en* hægt er að setja fram tíðnitúlkunina á líkindum. Stærðfræðileg líkindi hafa sem sagt í för með sér tíðnitúlkunina á sjálfum sér! Samkvæmt þessu gætu stærðfræðileg líkindi endurspeglað eitthvert torkennilegt veruleikafyrirbæri sem birtist sem stöðugleiki hlutfallstíðni.

Þennan stöðugleika er glettilega víða að finna í náttúrinni. Sama gildir um normlegu dreifinguna sem *Höfuðmarkgildissetningin* spáir fyrir um, Poissondreifinguna (sem á við um fjölda skipta sem ólíklegur atburður gerist í endurteknum óháðum tilraunum, eins og þegar frumeindir í geislavirku efni klofna) og margvíslegar aðrar dreifingar sem líkindafræðin spáir fyrir um með setningum sínum.

Nútímalíkindafræði

Á þeim tæpu átta áratugum sem liðnir eru frá því Kolmogorov setti fram sitt fallega líkan (skilgreiningu) hefur ekkert lát verið á nýjum viðfangsefnum og hugmyndum.

Mikil frávik fjalla til dæmis um hvað gerist þegar atburðarás víkur mikið frá sínum meðalfarvegi. Sænski stærðfræðingurinn Harald Cramér (1893–1985) leiddi út fyrstu niðurstöðurnar á þessu sviði fyrir summur $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ af óháðum stærðum sem allar hafa sömu dreifingu með væntigildi μ. Þegar fjöldinn n vex segir *Höfuðmarkgildissetningin* að líkurnar $\mathrm{P}(S_n/n > \mu)$ nálgist ½ en að líkurnar $\mathrm{P}(S_n/n > q)$ minnki niður í núll ef $q > \mu$. Í tryggingastærðfræði (sem var ein af vöggustofum líkindafræðinnar og er mikilvægt hagnýtingarsvið hennar) gætu þessar stærðir verið mánaðarlegar bótakröfur, n tiltekinn mánaðafjöldi, og spurningin sú hversu miklu hærri en μ mánaðariðgjöldin q þurfi að vera til að líkurnar á tapi séu viðunandi litlar. Árið 2007 voru Abelsverðlaunin[11] veitt indverska líkindafræðingnum Srinivasa Varadhan fyrir grundvallandi rannsóknir á þessu sviði.



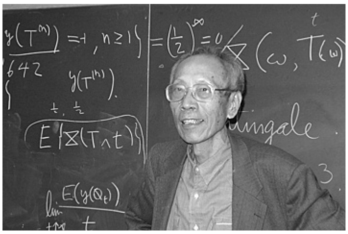
Mynd 15. *Srinivasa Varadhan.*

Slembiferli eru viðamikið svið líkindafræði. Slembiferli lýsa tilviljunarkenndri þróun í tíma. Eiginleikar þeirra geta verið margvíslegir. Sum slembiferli leita í jafnvægi með tímanum, en til dæmis hefur Brownhreyf-

[11] Abelsverðlaunin eru kennd við norska stærðfræðinginn Niels Henrik Abel (1802–1829). Norðmenn stofnuðu til þeirra í tilefni af tveggja alda fæðingarafmæli hans og hafa veitt þau árlega frá árinu 2003. Til stóð að koma þeim á fót í aldarminningu Abels en aðskilnaðar Noregs og Svíþjóðar árið 1905 kom í veg fyrir það. Abelsverðlaunin í stærðfræði mótsvara Nóbelsverðlaununum í eðlisfræði. Áður hafði Fieldsorðan gegnt þessu hlutverki. Fieldsorðan var fyrst veitt árið 1936 og síðan á fjögurra ára fresti frá árinu 1950. Sá sem hana fær má ekki vera orðinn fertugur.

Mynd 16. *Wendelin Werner.*

ing (líkan meðal annars fyrir hreint slembiflakk agnar eða flökt á verðbréfamarkaði) í einni og tveimur víddum þann eiginleika að hún leitar alltaf til upphafs síns en leitar samt ekki í jafnvægi heldur þynnast endurkomurnar út með tímanum. Í þremur víddum (og þar fyrir ofan) hverfur Brownhreyfing á endanum á braut og kemur aldrei aftur að upphafi sínu. Brownhreyfing hefur ógrynnin öll af merkilegum eiginleikum, til dæmis er hún samfelld sem fall af tíma en samt hvergi diffranleg. Árið 2006 var fransk-þýski líkindafræðingurinn Wendelin Werner sæmdur Fieldsorðunni[12] fyrir rannsóknir á flatarfræðilegum eiginleikum Brownhreyfingar í tveimur víddum.



Mynd 17. *Kai Lai Chung.*

Brownhreyfing er grundvallarverkfæri þeirrar fjármálastærðfræði sem tútnað hefur út síðustu tvo áratugina. Höfundi er enn í fersku minni fyrirlestur sem Kai Lai Chung (1917–2009) prófessor við Stanfordháskóla hélt fyrir aldarfjórðungi um Brownhreyfingu. Fyrirlesturinn hélt hann á máða tveggjafermetra krítartöflu þar sem hann kom öllu efninu fagurlega fyrir án þess að þurrka nokkuð út. Þegar fyrirlestrinum lauk snéri hann sér að áheyrendum og sagði eitthvað á þessa leið: „Þeir hérna hinum megin við götuna [þar er Stanford Graduate School of Business] segja að bráðum verði þessi fræði aðal málið á Wall Street. Ég hef enga trú á því. Þau eru alltof djúp og fáguð til að koma að nokkru gagni í þeim hráa heimi.“ Hann virtist hafa lög að mæla, það væri merkilegt ef svona fræði næðu að lýsa á raunhæfan hátt innmúruðu gróðabralli í yfirheimum auðmanna. Það kom því eins og skrattinn úr sauðarleggnum þegar fjármálastærðfræði byggð á Brownhreyfingu spratt upp eins og gorkúlur í háskólum út um allan heim nokkrum árum síðar.

12 Sjá neðanmálsgrein 11.

Slembiferli af ýmsu tagi koma við sögu í margskonar líkönum sem lýsa til dæmis myndun litninga eða afgreiðslu/umferð í búð, birgðageymslu, gatnakerfi eða á Internetinu þar sem ótrúlegt magn boða flækist um á glundroðakenndan hátt og geta hlaðist upp og myndað tappa sem mikilvægt er að skilja svo unnt sé að draga úr myndun þeirra. Ferli í margvíðum tíma eða í trjám og gröfum eru nú mikið athuguð en þau koma til dæmis við sögu við úrvinnslu gerfihnattamynda (olíuleit, stríð; staðsetning er „tími" og gildi ferlisins á tilteknum stað gæti verið hæð eða litur) og leit í tölvum. Þegar veruleikinn verður of flókinn til að hefðbundnir reikningar séu framkvæmanlegir er oft brugðið á það ráð að herma slembilíkön í tölvum og hafa margar snjallar aðferðir verið þróaðar í því skyni. Loks má geta þess að ástæðan fyrir því að leitarvélin Google ber höfuð og herðar yfir keppinauta sína er sú að hún notar slembigang á grafi (Internetinu) til að raða leitarniðurstöðunum í mikilvægisröð.

Ofangreind dæmi eru fátækleg lýsing á viðfangsefnum nútímalíkindafræði. Þau eru nefnd hér til að gefa smá nasasjón af því hvers eðlis slík viðfangsefni geta verið.[13]

Lokaorð

Árið 1997 kom út hjá Springer bók eftir sænska líkindafræðinginn Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, þar sem gerð var tilraun til að fjalla um öll grundvallaratriði nútímalíkindafræði. En ekki hafði þessi yfirþyrmandi bók fyrr litið dagsins ljós en höfundurinn endurritaði hana í ljósi nýrra rannsókna. Nýja útgáfan kom út árið 2001 og er meira en 600 síðna samþjappað stærðfræðiþykkni, en höfundur viðurkennir samt að honum sé um megn að fjalla um öll grundvallaratriði greinarinnar eins og hann hafi þó ætlað sér þegar af stað var lagt.

Um aldamótin 1900–1901 gat einn maður (Hilbert) haft næga yfirsýn yfir alla stærðfræði, og stærðfræðilega eðlisfræði líka, til að setja fram raun-

[13] Í upphafi þessarar greinar segir að samkvæmt skammtafræðinni sé tilviljunin jafnvel einn af hornsteinum heimsins. Svo undarlega vill til að skilgreining Kolmogorovs á líkindum virðist ekki nægja til að lýsa þeim örheimi þar sem þessi heimsgrundvallandi tilviljun býr. Skammtafræðin spáir til dæmis á einfaldan hátt fyrir um fyrirbæri sem Einstein kallaði *draugalega fjarverkun*. Þetta fyrirbæri er nú nokkuð vel staðfest með tilraunum en engin viðunandi skýring á grundvelli skilgreiningar Kolmogorovs liggur enn fyrir. Merkilegt nokk benti Einstein á þetta fyrirbæri um svipað leyti og Kolmogorov setti fram sína skilgreiningu. Sjá til dæmis lokahluta fyrsta kafla í bók höfundar *Coupling, Stationarity, and Regeneration* (Springer, New York 2000), www.hi.is/~hermann/iid/csr/.

hæfan verkefnalista fyrir 20. aldar stærðfræði. Um aldamótin 2000–2001 hefur einn öflugasti maður á sviði hreinnar líkindafræði tæplega yfirsýn yfir grundvallaratriði þessarar sérgreinar stærðfræðinnar, hvað þá yfir öll sérsvið líkindafræðinnar hrein og hagnýt. Þetta er lýsandi dæmi um vöxt vísinda á 20. öld.

Þrátt fyrir þennan öra vöxt er líkindafræðin enn á æskuskeiði og engin ástæða til að láta hugfallast þótt illkleift sé að hafa yfirsýn yfir öll grundvallaratriði hennar. Innsæi — byggt á tilfinningu fyrir einföldum tilraunum eins og krónuköstum — er ekki síður gagnlegt en yfirgripsmikil formleg þekking. Nóg er af verkefnum sem leysa má með traustri þekkingu á nokkrum meginatriðum og góðu innsæi.

SUMMARY

On the history and interpretation of probability

The article briefly outlines the history of probability theory from the early beginnings in the 1650s leading to the fast discovery of the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem, to the modern axiomatization in the 1930s resulting in an explosion of new theoretical and practical developments.

It is suggested that the axiomatic formalization through abstract properties of probability was delayed for years by the confusion about the real-world interpretation of probability. According to the theory derived from the axioms, probabilities are the limits of relative frequencies in independent repetitions of an experiment. Curiously, however, it is the case that this claim is only true with probability one. Thus in this theory, the concept of probability has to be introduced before probability can be interpreted as the limit of relative frequencies.

In the controversy between the subjective and objective interpretations of probability, it is claimed that while it is fully legitimate to quantify personal believes by probabilities it is hard to explain the applicability of probability theory if it does not deal with something real outside the mind of individual persons. This something may be evasive but it manifests itself in the real world for instance through the stability of relative frequencies.