Inngangur að líkindafræði

viðbót við líkindahluta námskeiðsins Líkindareikningur og tölfræði

Janúar 2017

Hermann Þórisson

Efnisyfirlit

1. Líkindi

Skoðum tilraun þar sem útkoman er háð tilviljun. Táknum mengi allra hugsanlegra útkoma með Ω þar sem $\Omega \neq \emptyset$. Atburður er hlutmengi í Ω. Ekki þurfa öll hlutmengi að vera atburðir en safn allra atburða, sem við táknum með $\mathcal{F}$, þarf að mynda *σ-algebru*:

Skilgreining 1.1. *Safn hlutmengja $\mathcal{F}$ kallast* σ-algebra *ef eftirfarandi gildir:*

a. $\Omega \in \mathcal{F}$.

b. *Ef $A \in \mathcal{F}$ þá er $A^c \in \mathcal{F}$.*

c. *Ef $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ þá er* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Takið eftir að ef $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ þá er $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ samkvæmt b og c. Takið líka eftir að $\emptyset$ er fyllimengi Ω og því er $\emptyset$ stak í $\mathcal{F}$ samkvæmt a og b. Takið loks eftir að ef $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ þá er $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ og $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$; fyrra atriðið fæst úr c með því að setja $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ og síðara atriðið með því að setja $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \Omega$.

Atburðir A og B eru sagðir vera *sundurlægir* (eða *ósamræmanlegir*) ef $A \cap B = \emptyset$. Fleiri en tveir atburðir eru sagðir vera *sundurlægir* ef þeir eru sundurlægir tveir og tveir.

Skilgreining 1.2. Líkindi (líkindamál, líkur) *eru fall* $\mathbf{P}$ *sem er skilgreint á safn allra atburða $\mathcal{F}$ og uppfyllir eftirfarandi þrjú atriði:*

I. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

II. $\mathbf{P}(A) \geq 0$ *fyrir alla atburði A.*

III. *Ef $A_1, A_2, \dots$ eru sundurlægir atburðir gildir* $\displaystyle\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

Skilgreining 1.3. *Þrennd $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ kallast* líkindarúm *ef $\Omega \neq \emptyset$ er mengi, $\mathcal{F}$ er σ-algebra hlutmengja úr Ω og $\mathbf{P}$ er líkindamál skilgreint á $\mathcal{F}$.*

Hér eru nokkrar einfaldar reglur um líkindi.

Setning 1.1. *Látum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *vera líkindarúm. Þá gildir eftirfarandi fyrir* $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *og heilar tölur* $n > 1$*:*

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.
2. *Ef* $A \cap B = \emptyset$ *þá gildir* $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.
3. *Ef* $A_1, \ldots A_n$ *eru sundurlægir þá gildir* $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.
4. *Ef* $A \subseteq B$ *þá gildir* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.
5. $\mathbf{P}(A) \leq 1$.
6. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.
7. Boole-ójafnan: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

Sönnun:

1. Takið eftir að $\Omega = \Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ og að atburðirnir hægra megin eru sundurlægir. Því gefur atriði *III* í Skilgreining 1.2 að

$$\mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}(\emptyset) + \ldots.$$

   Samkvæmt atriði *I* í Skilgreiningu 1.2 er $\mathbf{P}(\Omega)$ endanleg tala ($\mathbf{P}(\Omega) = 1$) svo þetta gefur $0 = \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}(\emptyset) + \ldots$ og þar með $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

2. Þetta er sértilvik af næsta lið.

3. Ef $A_1, \ldots, A_n$ eru sundurlægir eru $A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$ sundurlægir svo *III* í Skilgreiningu 1.2, ásamt $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots$, gefur

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}(\emptyset) + \ldots$$

   Samkvæmt lið *1* er $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ svo $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$.

4. Ef $A \subseteq B$ þá er B samatburður sundurlægu atburðanna $B \setminus A$ og A. Samkvæmt *2* er því $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \setminus A) + \mathbf{P}(A)$. Samkvæmt atriði *II* í Skilgreiningu 1.2 er $\mathbf{P}(B \setminus A) \geq 0$ svo $\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A)$.

5. Setjum $B = \Omega$ í *4* og notum atriði *I* í Skilgreiningu 1.2.

6. Tökum eftir að $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ og $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Atburðirnir hægra megin eru í báðum tilvikum sundurlægir og samkvæmt *2* er því

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B \setminus A) \text{ og } \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \setminus A).$$

Niðurstaðan fæst með því að draga fyrri jöfnuna frá þeirri seinni.

7. Notum þrepun yfir n. Samkvæmt *6* og atriði *II* í Skilgreiningu 1.2 gildir

$$\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) \tag{1}$$

þ.e. $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$ gildir fyrir $n = 2$. Gerum ráð fyrir að þetta gildi fyrir gefið $n \geq 2$. Þá fæst úr (1) og þrepunarforsendunni að

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) \leq \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \mathbf{P}\big(A_{n+1}\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big(A_i\big) + \mathbf{P}\big(A_{n+1}\big).$$

Skv. þrepun gildir því $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)$ fyrir öll $n > 1$. □

Athugasemd við lið *6*. Hér er óformleg útleiðsla á *6*. Hugsum um líkindi sem massa sem dreifður er yfir útkomurúmið Ω. Til að finna massann á $A \cup B$ leggjum við fyrst saman massana á A og B. En þá höfum við tekið massann á $A \cap B$ með tvisvar og þurfum að draga hann frá einu sinni.

Beitum aðferðinni í þessari athugasemd á þrjá atburði A, B og C. Til að finna massann á $A \cup B \cup C$ leggjum við fyrst saman massana á A, B og C. Þá höfum við tekið massana á $A \cap B$, $B \cap C$ og $A \cap C$ með tvisvar og þurfum að draga þá frá einu sinni. En þá hefur massinn á $A \cap B \cap C$ komið með þrisvar og verið dreginn frá þrisvar svo við þurfum að leggja hann við einu sinni. Þetta gefur

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = &\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) \\ &- \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(A \cap C) \\ &+ \mathbf{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Almennt má finna massann á $\bigcup_{i=1}^n A_i$ með því að leggja fyrst saman massana á öllum atburðunum, draga svo frá massana á tvítöldum sniðum $A_{i_1} \cap A_{i_2}$ o.s.frv. þannig að á víxl eru lagðir við vantaldir massar og dregnir frá oftaldir. Við sönnum þetta nú formlega með þrepun.

Setning 1.2. *Ef* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *er líkindarúm og* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, *þá gildir*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (-1)^{k+1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

**Sönnun:* Notum þrepun. Gefum okkur að

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right) \tag{2}$$

gildi fyrir eitthvert tiltekið $n \ge 1$ og alla atburði $A_1, \ldots, A_n$. Þetta gildir augljóslega fyrir $n = 1$. Við þurfum að sanna að

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right). \tag{3}$$

Samkvæmt lið *6* í Setningu 1.1 gildir

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right). \tag{4}$$

Beitum (2) á síðasta liðinn

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} (A_{i_m} \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{k+1} = n+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k+1} A_{i_m}\right) \\
&= -\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right).
\end{aligned}$$

Setjum þetta og (2) inn í (4); þá fæst

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right) \\
&\quad + \mathbf{P}(A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k = n+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}\right)
\end{aligned}$$

sem er umskrift á (3). □

2. Líkindi eru samfellt mengjafall

Fyrir atburði $A_1, A_2, \ldots$ skrifum við

- $A_n \downarrow A$, $n \to \infty$, ef $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ og $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$,
- $A_n \uparrow A$, $n \to \infty$, ef $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ og $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$.

Setning 2.1. *Látum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *vera líkindarúm. Þá gildir eftirfarandi fyrir* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$*:*

1. Ef $A_n \downarrow \emptyset, n \to \infty$*, þá gildir* $\mathbf{P}(A_n) \to 0$*,* $n \to \infty$*.*

2. Ef $A_n \downarrow A, n \to \infty$ *þá gildir* $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$*,* $n \to \infty$*.*

3. Ef $A_n \uparrow A$*,* $n \to \infty$*, þá gildir* $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$*,* $n \to \infty$*.*

4. Boole-ójafnan: $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

Sönnun:

1. Látum $A_n \downarrow \emptyset$, $n \to \infty$. Atburðirnir $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$, $n = 1, 2 \ldots$, eru sundurlægir og $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$. Atriði *III* í Skilgreiningu 1.2 gefur $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(B_k)$. Samkvæmt Setningu 1.1.5 er $\mathbf{P}(A_1) \leq 1$ svo $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) < \infty$ sem gefur $\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) \to 0$, $n \to \infty$.

2. Látum $A_n \downarrow A$, $n \to \infty$. Þá fæst $A_n \setminus A \downarrow \emptyset$, $n \to \infty$, og samkvæmt *1* gildir $\mathbf{P}(A_n \setminus A) \to 0$ þegar $n \to \infty$. Nú er $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n \setminus A) + \mathbf{P}(A)$ samkvæmt *2* í Setningu 1.1. Þetta gefur $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ þegar $n \to \infty$.

3. Þetta leiðir af *2* vegna þess að $A_n \uparrow A$ hefur í för með sér $A_n^c \downarrow A^c$.

4. Samkvæmt lið *7* í Setningu 1.1 gildir $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$. Samkvæmt *3* stefnir vinstri liðurinn á $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ þegar $n \to \infty$ og hægri liðurinn stefnir á $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$. $\square$

Athugasemd við lið *1.* Í sönnuninni var notað að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$. Til að sjá að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \supseteq A_n$ tökum við $\omega \in A_n$. Þá er til $m \geq n$ þannig að $\omega \in A_m$ og $\omega \notin A_{m+1}$. Því er $\omega \in B_m$ og þá $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$ sem gefur $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \supseteq A_n$. Til að sjá að $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subseteq A_n$ tökum við $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$. Þá er til $m \geq n$ þannig að $\omega \in B_m$. Þá er $\omega \in A_m \subseteq A_n$ sem gefur $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \subseteq A_n$. Svo $\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k = A_n$.

Samkvæmt eftirfarandi setningu, ásamt lið *1* í Setningu 1.1 og lið *1* í Setningu 2.1, mætti skipta út atriði *III* í Skilgreiningu 1.2 á móti atriðunum tveimur (*III** og *IV**) hér fyrir neðan. Við það fengist jafngild skilgreining á líkindum.

Setning 2.2. *Látum $\mathcal{F}$ vera σ-algebru hlutmengja í Ω og $\mathbf{P}$ vera fall skilgreint á $\mathcal{F}$ sem uppfyllir $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ og $\mathbf{P}(A) \geq 0$ fyrir $A \in \mathcal{F}$. Þá er $\mathbf{P}$ líkindamál ef eftirfarandi tvo skilyrði eru uppfyllt:*

*III** *Ef $A, B \in \mathcal{F}$ og $A \cap B = \emptyset$ þá $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.*

*IV** *Ef $A_n \in \mathcal{F}$ og $A_n \downarrow \emptyset$, $n \to \infty$, þá $\mathbf{P}(A_n) \to 0$, $n \to \infty$.*

Sönnun: Við þurfum að sanna að atriði *III* í Skilgreiningu 1.2 gildi. Látum $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ vera sundurlæg og $n \geq 3$. Notum *III** ítrekað til að fá

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \\
&= \ldots = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Vegna þess að $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i \downarrow \emptyset$, $n \to \infty$, gefur *IV** að liðurinn $\mathbf{P}(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i)$ í (5) stefnir á núll þegar $n \to \infty$. Því fæst

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

□

3. Hvers vegna þarf σ-algebruna $\mathcal{F}$?

Áður en lengra er haldið er rétt að skoða aðeins betur hugtakið atburður. Eins og fram kemur í Kafla 1 er orðið *atburður* ekki notað um öll hlutmengi úr Ω heldur bara um þau hlutmengi $A \subseteq \Omega$ sem eru með skilgreindar líkur $\mathbf{P}(A)$. Til þess að geta ákvarðað líkur fyrir samsetta atburði er þess jafnframt krafist að safn slíkra hlutmengja, $\mathcal{F}$, myndi σ-algebru.

"Hvers vegna eru ekki einfaldlega öll hlutmengi látin vera atburðir?" Þetta er spurning sem gjarnan vaknar þegar σ-algebran $\mathcal{F}$ er kynnt til sögunnar. Hinn hagsýni maður (hagmennið) gæti svarað henni á þann veg að það sé engin ástæða til að hafa öll hlutmengi með vegna þess að til eru mörg hlutmengi sem við höfum enga þörf fyrir að ákvarða líkindi á. Þótt það sé eitthvað til í þessu er samt dýpri stærðfræðileg ástæða fyrir því að þess er ekki krafist að öll hlutmengi A hafi skilgreindar líkur $\mathbf{P}(A)$. Ástæðan er sú að ef þess væri karfist væru sum mikilvæg líkindimál $\mathbf{P}$ einfaldlega ekki til.

Dæmi um þetta eru jafnar líkur á $\Omega = [0,1]$. Þær eru skilgreindar þannig að $\mathbf{P}(A) = \ell(A) =$ lengd mengisins A. Lengd er skilgreind fyrir bil með

$$\ell([a,b)) = \ell([a,b]) = \ell((a,b] = \ell((a,b)) = b - a$$

og fyrir sammengi runu sundurlægra bila $A_1, A_2, \ldots$ (í samræmi við *III*) með

$$\ell(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \ell(A_1) + \ell(A_2) + \ldots$$

En hver er lengd mengis A sem ekki samanstendur af bilum? Lengdarfallið ℓ ætti að uppfylla eiginleika II og III í Skilgreiningu 1.2 (þannig fall er kallað *mál*) og þar að auki ætti lengd mengis A ekki að breytast við hliðrun, þ.e. $\ell(x + A) = \ell(A)$ ætti að gilda fyrir allar rauntölur x. En nú er hægt að sanna (með aðstoð valfrumsendunnar) að ef slíkt fall ℓ væri skilgreint á safn allra hlutmengja rauntalna þá hefði það í för með sér að til væri mengi H sem uppfyllti bæði $\ell(H) = 0$ og $\ell(H) > 0$. Þessi mótsögn sýnir að ekki er hægt að skilgreina lengd fyrir öll hlutmengi rauntalna.

Nú er lengd skilgreind fyrir bil. Minnsta σ-algebra sem inniheldur öll bil er kölluð Borel σ-algebra (eftir einum helsta frumkvöðli mál- og tegurfræðinnar). Hún er táknuð með $\mathcal{B}$ og stökin í henni eru kölluð Borelmengi. Lengd er hægt að skilgreina fyrir öll Borelmengi. Því eru jafnar líkur á $\Omega = [0,1]$ til, við látum $\mathcal{F}$ einfaldlega vera safn allra hlutmengja $[0,1]$ sem eru Borelmengi.

Af sömu ástæðu þarf að takmarka slembistærðir við að vera föll X skilgreind á Ω sem hafa þann eiginleika að $\{X \leq x\}$ er atburður fyrir allar rauntölur x. Þetta er forsenda þess að F, dreififall X, sé til vegna þess að $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$. Slík föll X hafa þann eiginleika að $\{X \in B\}$ er líka atburður fyrir öll $B \in \mathcal{B}$. Þau eru sögð vera Borelmælanleg.

Um þetta allt er nánar fjallað í námskeiðunum *Mál- og tegurfræði* og *Grundvöllur líkindafræðinnar*. Látum nægja hér að taka fram að öll líkindi $\mathbf{P}$ sem koma við sögu í þessu námskeiði eru til og ef gefin eru dreififöll (föll sem uppfylla eiginleika 1.-4. í Kafla 5) þá eru til óháðar slembistærðir með þau dreififöll. Sama gildir um líkindaföll og þéttleika.

4. Dreififall slembistærðar

Munið að dreififall slembistærðar X er fallið F sem er skilgreint svona:

$$F(x) := \mathbf{P}(X \le x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Setning 4.1. *Ef F er dreififall slembistærðar X gildir*

1. $0 \le F(x) \le F(y) \le 1, \quad x < y.$
2. $F(x) \to 0$ *þegar* $x \to -\infty$.
3. $F(x) \to 1$ *þegar* $x \to \infty$.
4. F *er samfellt frá hægri, þ.e.* $F(y) \to F(x)$ *þegar* $y \downarrow x$.

Sönnun:

1. Ef $x \le y$ er $\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\}$ og *4* í Setningu 1.1 gefur $F(x) \le F(y)$. Af *II* í Skilgreiningu 1.2 leiðir að $0 \le F(x)$. Af *5* í Setningu 1.1 leiðir að $F(y) \le 1$.

2. Af *1* leiðir að $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n)$. Af *1* í Setningu 2.1 leiðir að $\lim_{n\to\infty} F(-n) = 0$ því að $\{X \le -n\} \downarrow \emptyset$ þegar $n \to \infty$.

3. Af *1* leiðir að $\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n)$ og af *3* í Setningu 2.1 leiðir að $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$ því að $\{X \le n\} \uparrow \Omega$ þegar $n \to \infty$.

4. Af *1* leiðir að $\lim_{y\downarrow x} F(y) = \lim_{n\to\infty} F(x + 1/n)$ og af *2* í Setningu 2.1 leiðir að $\lim_{n\to\infty} F(x + 1/n) = F(x)$ því að $\{X \le x + 1/n\} \downarrow \{X \le x\}$ þegar $n \to \infty$. □

Athugasemd. Í sönnuninni er notað að $\{X \le x + 1/n\} \downarrow \{X \le x\}$. Þetta stafar af því að $X(\omega) \le x + 1/n$ fyrir öll $n \ge 1$ ef og aðeins ef $X(\omega) \le x$.

Setning 4.2. *Ef F er dreififall slembistærðar X gildir fyrir $x \in \mathbb{R}$ að*

$$\mathbf{P}(X < x) = F(x-) := \lim_{y\uparrow x} F(y),$$

$$\mathbf{P}(X = x) = F(x) - F(x-).$$

Sönnun: Af *1* í Setningu 4.1 leiðir að $\lim_{y\uparrow x} F(y) = \lim_{n\to\infty} F(x - 1/n)$ og af *3* í Setningu 2.1 leiðir að $\lim_{n\to\infty} F(x - 1/n) = \mathbf{P}(X < x)$ því að $\{X \le x - 1/n\} \uparrow \{X < x\}$ þegar $n \to \infty$. Þetta gefur fyrra atriðið. Síðara atriðið leiðir af fyrra atriðinu og *2* í Setningu 2.1. □

Athugasemd. Í sönnuninni er notað að $\{X \le x - 1/n\} \uparrow \{X < x\}$. Þetta stafar af því að $X(\omega) \le x - 1/n$ fyrir eitthvert $n \ge 1$ ef og aðeins ef $X(\omega) < x$.

5. Skilyrt líkindi

Munið að ef A og B eru atburðir og $\mathbf{P}(B) > 0$ þá kallast

$$\mathbf{P}(A \mid B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

skilyrtu líkurnar á A gefið B.

Setning 5.1. *Látum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vera líkindarúm og $B \in \mathcal{F}$ uppfylla $\mathbf{P}(B) > 0$. Skilgreinum fall Q á $\mathcal{F}$ á eftirfarandi hátt*

$$Q(A) = \mathbf{P}(A \mid B), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Þá er $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ líkindarúm.

Sönnun: Við þurfum að sýna að Q uppfylli atriðin þrjú í Skilgreiningu 1.2. Fyrsta atriðið er uppfyllt vegna

$$Q(\Omega) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

Annað atriðið er uppfylt vegna

$$Q(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Til að sýna að þriðja atriðið sé uppfyllt tökum við sundurlæga atburði $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Þá eru $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots$ líka sundurlægir og vegna þess að $\mathbf{P}$ uppfyllir þriðja atriðið gefur þetta þriðju jöfnuna í

$$\begin{aligned} Q\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{\mathbf{P}([\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \cap B)}{\mathbf{P}(B)} &= \frac{\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i \cap B])}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} &= \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i). \end{aligned}$$

Setning 5.2. *Látum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, B og Q vera eins og í Setningu 5.1 og látum ennfremur $C \in \mathcal{F}$ uppfylla $\mathbf{P}(B \cap C) > 0$. Þá gildir*

$$Q(A \mid C) = \mathbf{P}(A \mid B \cap C), \quad A \in \mathcal{F}.$$

Sönnun: Tökum eftir að $\mathbf{P}(B \cap C) > 0$ hefur í för með sér að $Q(C) > 0$. Nú fæst fyrir $A \in \mathcal{F}$

$$Q(A \mid C) = \frac{Q(A \cap C)}{Q(C)} = \frac{\frac{\mathbf{P}(A \cap C \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}{\frac{\mathbf{P}(C \cap B)}{\mathbf{P}(B)}} = \frac{\mathbf{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbf{P}(B \cap C)} = \mathbf{P}(A \mid B \cap C).$$

6. Skilyrt væntigildi og dreifni

Munið að þegar X og Y hafa samþéttleika f og $f_Y(y) > 0$ þá er skilyrtur þéttleiki X gefið $Y = y$ skilgreindur svona:

$$f_{X|Y}(x \mid y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Athugasemd. Þegar f er samfellt í (x, y) má skýra skilgreininguna óformlega á eftirfarandi hátt. Hugsið um dx og dy sem örsmáar tölur sem eru rétt fyrir ofan núll. Þá er

$$\mathbf{P}(X \in [x, x+dx], Y \in [y, y+dx]) \approx f(x,y)dxdy$$

og

$$\mathbf{P}(Y \in [y, y+dy]) \approx f_Y(y)dy.$$

Deilum nú seinni formúlunni upp í þá fyrri. Þá fæst að ef Y er rétt hjá y þá má reikna líkur fyrir X með $f_{X|Y}$ svona:

$$\mathbf{P}(X \in [x, x+dx] \mid Y \in [y, y+dy]) \approx f_{X|Y}(x \mid y)dx.$$

Skilgreining 6.1. *Ef X hefur væntigildi er skilyrt væntigildi X gefið $Y = y$*

$$E[X \mid Y = y] := \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\mathbf{P}(X = x \mid Y = y), & \textit{ef } X \textit{ og } Y \textit{ eru strjálar,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dx, & \textit{ef } X \textit{ og } Y \textit{ hafa samþéttleika,} \end{cases}$$

og skilyrt væntigildi X gefið Y er slembistærðin

$$E[X \mid Y] := g(Y)$$

þar sem $g(y) = E[X \mid Y = y]$.

Takið eftir að þegar Y tekur gildið y þá tekur $E[X \mid Y]$ gildið $E[X \mid Y = y]$.

Setning 6.1. $E[E[X \mid Y]] = E[X]$.

Sönnun: Þegar X og Y eru strjálar fæst

$$\begin{aligned}
E[E[X \mid Y]] &= \sum_y E[X \mid Y = y]\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x\mathbf{P}(X = x \mid Y = y)\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_x x \sum_y \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \sum_x x\mathbf{P}(X = x).
\end{aligned}$$

Þegar X og Y hafa samþéttleika fæst

$$\begin{aligned}
E[E[X \mid Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dx\right] f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx.
\end{aligned}$$

Skilgreining 6.2. *Ef X hefur dreifni er skilyrt dreifni X gefið $Y = y$*

$$\begin{aligned}
Var[X \mid Y = y] &:= E[(X - E[X \mid Y = y])^2 \mid Y = y] \\
&= E[X^2 \mid Y = y] - (E[X \mid Y = y])^2
\end{aligned}$$

og skilyrt dreifni X gefið Y er

$$\begin{aligned}
Var[X \mid Y] &:= E[(X - E[X \mid Y])^2 \mid Y] \\
&= E[X^2 \mid Y] - (E[X \mid Y])^2. \quad (*)
\end{aligned}$$

Setning 6.2. $Var[X] = E[Var[X \mid Y]] + Var[E[X \mid Y]]$.

Sönnun: Ef við tökum væntigildi í $(*)$ fæst

$$E[Var[X \mid Y]] = E[X^2] - E[(E[X \mid Y])^2]. \quad (**)$$

Ennfremur höfum við

$$\begin{aligned}
Var[E[X \mid Y]] &= E[(E[X \mid Y])^2] - (E[E[X \mid Y]])^2 \\
&= E[(E[X \mid Y])^2] - (E[X])^2. \quad (***)
\end{aligned}$$

Leggjum saman $(**)$ og $(***)$ og fáum

$$E[Var[X \mid Y]] + Var[E[X \mid Y]] = E[X^2] - (E[X])^2 = Var[X].$$

7. Fylgnistuðull

Setning 7.1. *Fyrir fylgnistuðul ρ gildir $-1 \le \rho \le 1$.*

Sönnun: Notum $\mathrm{Var}[V+W] = \mathrm{Var}[V] + \mathrm{Var}[W] + 2\mathrm{Cov}[V,W]$. Fáum

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X}\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{Y}{\sigma_Y}\right] + 2\mathrm{Cov}\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_X^2}\mathrm{Var}[X] + \frac{1}{\sigma_Y^2}\mathrm{Var}[Y] + 2\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = 1 + 1 + 2\rho \end{aligned}$$

sem gefur $-1 \le \rho$. Fáum einnig

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{X}{\sigma_X}\right] + \mathrm{Var}\left[\frac{-Y}{\sigma_Y}\right] + 2\mathrm{Cov}\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{-Y}{\sigma_Y}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_X^2}\mathrm{Var}[X] + \frac{1}{(-\sigma_Y)^2}\mathrm{Var}[Y] + 2\frac{-\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = 1 + 1 - 2\rho \end{aligned}$$

sem gefur $\rho \le 1$.

8. Happadrættisstærðin $X \sim \mathbf{Hyp}(N, M, n)$

Skoðum eftirfarandi dæmi. Kúlur eru settar í kassa, N hvítar og M svartar. Því næst eru dregnar n kúlur ($1 \le n \le N+M$) af handahófi úr kassanum án skila. Hverjar eru líkurnar á að nákvæmlega k þeirra séu hvítar?

Látum Ω vera mengi allra n-kúlna hlutmengja af þessum kúlum. Látum $\mathbf{P}$ vera jafnar líkur á Ω. Látum X vera fjölda hvítra kúlna í hlutmenginu sem dregið er. Takið eftir að X tekur gildi í $\{\max\{0, n-M\}, \ldots, \min\{n, N\}\}$. Fjöldi hlutmengja með k hvítum kúlum er $\binom{N}{k}$ og fjöldi hlutmengja með $n-k$ svörtum kúlum er $\binom{M}{n-k}$. Fjöldi hlutmengja með k hvítum kúlum og $n-k$ svörtum er því $\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}$. Heildarfjöldinn í Ω er $\binom{N+M}{n}$ svo við fáum

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}, \qquad \max\{0, n-M\} \le k \le \min\{n, N\}.$$

Takið loks eftir að við fáum sama líkindafall ef við látum Ω vera mengi allra raðaðra hlutmengja með n kúlum. Ástæðan er sú að fjöldinn uppi á striki margfaldast þá með $n!$ og sömuleiðis fjöldinn undir striki.

Stærð með þetta líkindafall kallast *happadrættistærð*, tákað $\mathrm{Hyp}(N, M, n)$.

Setning 8.1. *Látum $X \sim \mathrm{Hyp}(N, M, n)$. Setjum $p = N/(N+M)$. Þá gildir*

(a) $E[X] = np$

(b) $Var[X] = np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\right)$

Sönnun: Við getum látið X vera eins og í dæminu hér að ofan með Ω mengi allra raðaðra hlutmengja með n kúlum. Látum X_i vera slembistærð sem tekur gildið 1 ef kúlan í sæti númer i í dregnu rununni er hvít og gildið 0 ef hún er svört. Þá er

$$X = X_1 + \cdots + X_n.$$

Fjöldi útkoma með hvíta kúlu í sæti i er $N \times (N+M-1)!/(N+M-n)!$ og deiling með heildarfjöldanum $(N+M) \times (N+M-1)!/(N+M-n)!$ gefur

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{N}{N+M} = p.$$

Summuregla væntigilda gefur svo (a):

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = np.$$

Tökum nú $i \neq j$. Fjöldi útkoma með hvítar kúlur bæði í sæti i og j er $N \times (N-1) \times (N+M-2)!/(N+M-n)!$ og deiling með heildarfjöldanum $(N+M) \times (N+M-1) \times (N+M-2)!/(N+M-n)!$ gefur þriðja skrefið í

$$E[X_i X_j] = \mathbf{P}(X_i X_j = 1) = \mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)}.$$

Reiknireglan fyrir samdreifni gefur fyrsta skrefið í

$$\begin{aligned}
Cov[X_i, X_j] &= E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] \\
&= \frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)} - \Big(\frac{N}{N+M}\Big)^2 \\
&= \frac{(N+M)N(N-1) - (N+M-1)N^2}{(N+M)^2(N+M-1)} \\
&= \frac{-NM}{(N+M)^2(N+M-1)} \\
&= \frac{-N}{N+M} \; \frac{M}{N+M} \; \frac{-1}{N+M-1}
\end{aligned}$$

þ.e. (takið eftir því að fylgnin er neikvæð, eins og eðlilegt er)

$$Cov[X_i, X_j] = p(1-p)\frac{-1}{N+M-1}, \qquad i \neq j.$$

Vegna þess að X_i er Bernoulli p er $Var[X_i] = p(1-p)$. Notum nú fyrst samdreifniregluna fyrir dreifni og svo að fjöldi (i,j) þannig að $i \neq j$ er $n(n-1)$,

$$\begin{aligned}
Var[X] &= \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j] \\
&= np(1-p) + n(n-1)p(1-p)\frac{-1}{N+M-1} \\
&= np(1-p)\Big(1 - \frac{n-1}{N+M-1}\Big).
\end{aligned}$$

$\square$

9. Summa óháðra strjálla stærða (Bin, Poi)

Ef X og Y eru strjálar fæst líkindafall $X+Y$ á eftirfarandi hátt:

$$\mathbf{P}(X+Y=x) = \sum_r \mathbf{P}(X=r, X+Y=x) = \sum_r \mathbf{P}(X=r, Y=x-r).$$

Ef X og Y eru auk þess óháðar fæst

$$\mathbf{P}(X+Y=x) = \sum_r \mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y=x-r). \tag{6}$$

Setning 9.1. *Ef X og Y eru óháðar, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ og $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$ þá er*
 (a) $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$,
 (b) fyrir $r=0,\ldots,n+m$ gildir $X \mid X+Y=r \sim \mathrm{Hyp}(n,m,r)$.

Sönnun: (*a*) Fyrir $k=0,\ldots,n+m$ fæst

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=k) &= \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}\binom{m}{k-r}p^{k-r}(1-p)^{m-(k-r)} && \text{skv. (6)}\\
&= p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{r=0}^{k}\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}\\
&= \binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k} && \text{skv. Dæmi 1 í iL-dæmasafni}
\end{aligned}$$

sem er líkindafall $\mathrm{Bin}(n+m,p)$.

(*b*) Samkvæmt (*a*) er $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m,p)$ sem gefur fjórða skrefið í

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=r) &= \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=r)}{\mathbf{P}(X+Y=r)} = \frac{\mathbf{P}(X=k, Y=r-k)}{\mathbf{P}(X+Y=r)}\\
&= \frac{\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=r-k)}{\mathbf{P}(X+Y=r)}\\
&= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{m}{r-k}p^{r-k}(1-p)^{m-(r-k)}}{\binom{n+m}{r}p^r(1-p)^{n+m-r}}\\
&= \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}}{\binom{n+m}{r}}
\end{aligned}$$

sem er líkindafall $\mathrm{Hyp}(n,m,r)$.

Setning 9.2. *Ef X og Y eru óháðar, $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ og $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ þá er*
(*a*) $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda+\mu)$,
(*b*) $X \mid X+Y=n \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$.

Sönnun: (*a*) Látum $k \geq 0$. Þá fæst

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X+Y=k) &= \sum_{r=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-r}}{(k-r)!} \qquad \text{skv. (6)} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\sum_{r=0}^{k}\frac{k!}{r!(k-r)!}\frac{\lambda^r\mu^{k-r}}{(\lambda+\mu)^k} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-r} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

vegna þess að liðirnir í summunni eru $\mathrm{Bin}(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$-líkindafall svo summan er 1

(*b*) Samvæmt (*a*) liðnum er $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda+\mu)$ sem gefur fjórða skrefið í

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k \mid X+Y=n) &= \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbf{P}(Y=n-k)} = \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

10. Væntigildi og Geo(p)

Setning 10.1. *Ef X tekur aðeins gildi í $\{0,1,2,\dots\}$ þá er*

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(X>n).$$

Sönnun: Notum að $k\mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{P}(X=k)$ til að taka annað skrefið í

$$\begin{aligned} E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbf{P}(X=k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X>n). \end{aligned}$$

Setning 10.2. *Ef $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, þá er $E[X] = \dfrac{1}{p}$.*

Sönnun: $E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X>n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \dfrac{1}{1-(1-p)} = \dfrac{1}{p}$.

Setning 10.3. *Ef $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, þá er $E[X^2] = \dfrac{2-p}{p^2}$.*

**Sönnun:* Nú er $\dfrac{1}{p} = E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1}$ og $\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = \dfrac{1}{p}$ svo

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2\mathbf{P}(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{x} x\mathbf{P}(X=x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x=k}^{\infty} x\mathbf{P}(X=x) \quad (\text{Setjum } n := x-k+1). \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (n+k-1)\mathbf{P}(X=n+k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} \right] (1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \right] (1-p)^{k-1} \\ &= \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Setning 10.4. *Ef* $X \sim \text{Geo}(p)$*, þá er* $Var[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$.

**Sönnun:* $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Setning 10.5. *Ef* X *er samfelld slembistærð og* $f_X(x) = 0$ *fyrir* $x < 0$*, þá er*

$$E[X] = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > x)dx.$$

Sönnun: Notum að $xf_X(x) = \int_0^x f_X(x)dy$ til að taka annað skrefið í

$$\begin{aligned} E[X] = \int_0^\infty xf_X(x)dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f_X(x)dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty f_X(x)dx \right) dy = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > y)dy. \end{aligned}$$

Athugasemd. Slembistærð X sem tekur gildi í $\{1, 2, \dots\}$ kallast*minnislaus í strjálum tíma* ef $\mathbf{P}(X > n+k|X > n) = \mathbf{P}(X > k)$ fyrir allar heilar tölur n, $k \geq 1$. Einu slembistærðirnar sem uppfylla þetta eru $X \sim \text{Geo}(p)$.

11. Minnisleysi og Exp(λ)

Skilgreining 11.1. *Jákvæð slembistærð* X *kallast minnislaus ef*

$$\mathbf{P}(X > a + b|X > a) = \mathbf{P}(X > b), \quad a, b \geq 0.$$

Þetta má líka skrifa svona:

$$\mathbf{P}(X > a + b) = \mathbf{P}(X > a)\mathbf{P}(X > b),\ a, b \geq 0.$$

Athugasemd. Tæki sem eldist ekki (sem er alltaf eins og nýtt meðan það er nothæft) er með minnislausan endingartíma.

Setning 11.1. *Ef* $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ *þá er* X *minnislaus.*

Sönnun: $\mathbf{P}(X > a+b) = e^{-\lambda(a+b)} = e^{-\lambda a}e^{-\lambda b} = \mathbf{P}(X > a)\mathbf{P}(X > b),\ a, b \geq 0.$

Setning 11.2. *Ef X er minnislaus þá er til $\lambda > 0$ þannig að $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.*

Sönnun: Vegna minnisleysis gildir fyrir $h > 0$ og $n \geq 1$ að

$$\mathbf{P}(X > nh) = \mathbf{P}(X > (n-1)h)\,\mathbf{P}(X > h).$$

Með ítrekun fæst

$$\mathbf{P}(X > nh) = \mathbf{P}(X > h)^n, \qquad h > 0,\, n \geq 1. \tag{1}$$

Þetta má umskrifa

$$\mathbf{P}(X > h) = \mathbf{P}(X > mh)^{\frac{1}{m}}, \qquad h > 0,\, m \geq 1. \tag{2}$$

Ef við tökum $h = 1/n$ í (1) fæst $\mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > 1/n)^n$ og vegna þess að $\mathbf{P}(X > 1/n) \to \mathbf{P}(X > 0) = 1$ þegar $n \to \infty$ gefur þetta $\mathbf{P}(X > 1) > 0$. Ef við tökum $h = 1$ í (2) fæst $\mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > m)^{1/m}$ og vegna þess að $\mathbf{P}(X > m) \to 0$ þegar $m \to \infty$ gefur þetta $\mathbf{P}(X > 1) < 1$. Við höfum sýnt að $0 < \mathbf{P}(X > 1) < 1$ og getum því sett $\lambda = -\log \mathbf{P}(X > 1)$ og skrifað

$$\mathbf{P}(X > 1) = e^{-\lambda} \quad \text{þar sem } 0 < \lambda < \infty. \tag{3}$$

Með því að að setja $h = 1/m$ og nota fyrst (1) og svo (2) fæst að

$$\mathbf{P}(X > n/m) = \mathbf{P}(X > 1/m)^n = \mathbf{P}(X > 1)^{\frac{n}{m}}, \qquad n, m \geq 1,$$

sem ásamt (3) gefur

$$\mathbf{P}(X > n/m) = e^{-\lambda\frac{n}{m}}, \qquad n, m \geq 1. \tag{4}$$

Tökum nú $x > 0$ og heilar tölur n_k og m_k þannig að $n_k/m_k \downarrow x$, $k \to \infty$. Vegna þess að $\mathbf{P}(X > y) = 1 - F_X(y)$ og fallið F_X er samfellt frá hægri, er fallið $y \mapsto \mathbf{P}(X > y)$ líka samfellt frá hægri. Þetta gefur

$$\mathbf{P}(X > n_k/m_k) \to \mathbf{P}(X > x), \quad k \to \infty.$$

sem ásamt $e^{-\lambda\frac{n_k}{m_k}} \to e^{-\lambda x}$, $k \to \infty$, og (4) gefur

$$\mathbf{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

þ.e. $X \sim \mathit{Exp}(\lambda)$.

Athugasemd. $x_k \downarrow x$, $k \to \infty$, þýðir að

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots > x \quad \text{og} \quad x_k \to x,\ k \to \infty.$$

12. Gamma, Weibull, Beta, Cauchy

Gammafallið Γ er skilgreint svona:

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy, \quad t > 0.$$

Setning 12.1. *$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$, $t > 1$, og $\Gamma(n) = (n-1)!$ fyrir $n \geq 1$.*

Sönnun: $\Gamma(t) = \big[-e^{-y}y^{t-1}\big]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y}(t-1)y^{t-2}dy$

$$= (t-1)\int_0^\infty e^{-y}y^{t-2}dy = (t-1)\Gamma(t-1)$$

Vegna þess að $\int_0^\infty e^{-y}dy = 1$ er $\Gamma(1) = 1$ og með ítrekun fæst

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$$

Athugasemd. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, sjá athugasemd eftir Setningu 13.4.

Skilgreining 12.1. *Tökum t, $\lambda > 0$. Slembistærð X er* Gamma(t,λ) *ef*

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}, \quad x > 0.$$

Athugasemd. $\text{Gamma}(1,\lambda) = \text{Exp}(\lambda)$.

Setning 12.2. *Ef $X \sim \text{Gamma}(t,\lambda)$, þá er $E[X] = \dfrac{t}{\lambda}$.*

Sönnun: $E[X] = \dfrac{1}{\Gamma(t)}\displaystyle\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}dx \overset{[y=\lambda x]}{=} \dfrac{1}{\lambda\Gamma(t)}\int_0^\infty e^{-y}y^t dy$

$= \dfrac{\Gamma(t+1)}{\lambda\Gamma(t)} = \dfrac{t\Gamma(t)}{\lambda\Gamma(t)} = \dfrac{t}{\lambda}$ þar sem Setning 12.1 gefur næst síðasta skrefið.

Setning 12.3. *Ef $X \sim \text{Gamma}(t,\lambda)$, þá er $\text{Var}[X] = \dfrac{t}{\lambda^2}$.*

Sönnun: Samkvæmt Setningu 12.1 er $\Gamma(t+2) = (t+1)\Gamma(t+1) = t(t+1)\Gamma(t)$. Þetta gefur lokaskrefið í

$$E[X^2] = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}dx$$

$$\overset{[y=\lambda x]}{=} \frac{1}{\lambda^2\Gamma(t)}\int_0^\infty y^2 e^{-y}y^{t-1}dy = \frac{\Gamma(t+2)}{\lambda^2\Gamma(t)} = \frac{t(t+1)}{\lambda^2}.$$

Því fæst $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \dfrac{t(t+1)}{\lambda^2} - \dfrac{t^2}{\lambda^2} = \dfrac{t}{\lambda^2}$.

Skilgreining 12.2. *Tökum* $\nu \in \mathbb{R}$ *og* $\alpha,\ \beta > 0$. *Slembistærð* X *er kölluð* Weibull(ν, α, β) *ef*

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x > \nu.$$

Weibull-stærðir eru notaðar fyrir endingartíma.
Takið eftir að þegar $\nu = 0,\ \ \alpha = \frac{1}{\lambda},\ \ \beta = 1$ þá er $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Skilgreining 12.3. *Tökum* $a > 0$ *og* $b > 0$. *Slembistærð* X *er* Beta(a, b) *ef*

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1,$$

þar sem

$$B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Auðvelt er að leiða út að

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad \text{(sjá athugasemd eftir Setningu 14.4)}$$

og að ef $X \sim \mathrm{Beta}(a,b)$ þá er

$$E[X] = \frac{a}{a+b} \quad \text{og} \quad Var[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Skilgreining 12.4. *Slembistærð* X *er kölluð* Cauchy *ef*

$$f(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Þegar $X \sim$ Cauchy þá er miðgildið augljóslega 0 en hinsvegar er $E[X]$ óskilgreint vegna þess að $\int_0^\infty xf(x)dx = -\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ og

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx \geq \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx \geq \int_1^\infty \frac{x}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty.$$

Cauchystærðir hafa þann merkilega eiginleika að ef $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar og allar Cauchy þá er $(X+Y)/n$ líka Cauchy. Þetta þýðir til dæmis að

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} < b\right) = \mathbf{P}(a < X < b), \qquad a < b.$$

13. Normlega stærðin

Setning 13.1. *Fallið* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, *er þéttleiki.*

Sönnun: Setjum $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Sanna þarf að $I = \sqrt{2\pi}$. Við fáum að

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} drd\theta \qquad (x = r\cos\theta \text{ og } y = r\sin\theta) \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} drd\theta \qquad \left(\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r\right) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} dr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds \qquad (s = r^2/2) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Nú er $I \geq 0$ svo $I = \sqrt{2\pi}$.

Setning 13.2. *Látum* $Z \sim N(0,1)$. *Þá er* $E[Z] = 0$ *og* $Var[Z] = 1$.

Sönnun: Síðara skrefið í eftirfarandi fæst vegna þess að fallið $x \mapsto xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ er tegranlegt og oddstætt,

$$E[Z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

Ennfremur höfum við

$$\begin{aligned}
Var[Z] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Big[-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

þar sem Setning 13.1 gefur lokaskrefið.

Athugasemd. Setjum $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, x \in \mathbb{R}$, og $Z \sim N(0,1)$. Þá fæst, fyrir $\mu \in \mathbb{R}$ og $0 < \sigma < \infty$, að

$$F_{\mu+\sigma Z}(x) = \mathbf{P}(\mu + \sigma Z \leq x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

Með diffrun fæst nú að $\mu + \sigma Z$ hefur $N(\mu, \sigma^2)$-þéttleikann

$$f_{\mu+\sigma Z}(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Höfum þar með sannað bæði að $N(\mu, \sigma^2)$-þéttleikinn er þéttleiki og líka að $\mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Setning 13.3. *Ef $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, þá er $E[X] = \mu$ og $Var[X] = \sigma^2$ og*

$$a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2), \quad a \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

**Sönnun:* $E[X] = E[\mu + \sigma Z] = \mu + \sigma E[Z] = \mu$ og

$$Var[X] = Var[\mu + \sigma Z] = \sigma^2 Var[Z] = \sigma^2.$$

Nú hefur $a + bX$ sömu dreifingu og

$$a + b(\mu + \sigma Z) = a + b\mu + b\sigma Z \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2), \quad b > 0.$$

Þegar $b < 0$ þá hefur $a + b\mu + b\sigma Z$ sömu dreifingu og

$$a + b\mu + |b|\ \sigma(-Z) \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2).$$

Hér notum við að $-Z \sim N(0,1)$ vegna þess að

$$\mathbf{P}(-Z \leq x) = \mathbf{P}(Z \geq -x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Setning 13.4. *Ef $Z \sim N(0,1)$, þá er $Z^2 \sim$* Gamma$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Sönnun: Fyrir $a \leq 0$ er $F_{Z^2}(a) \leq \mathbf{P}(Z^2 \leq 0) = 0$. Fyrir $a > 0$ fæst

$$F_{Z^2}(a) = \mathbf{P}(Z^2 \leq a) = \mathbf{P}(-\sqrt{a} \leq Z \leq \sqrt{a}) = 2\Phi(\sqrt{a}) - 1$$

og því

$$f_{Z^2}(a) = 2 \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \Phi'(a^{\frac{1}{2}}) = a^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}a} \left(\frac{1}{2}a\right)^{\frac{1}{2}-1}.$$

Þéttleiki Gamma$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er $f(a) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}a} (\frac{1}{2}a)^{\frac{1}{2}-1}$, $a > 0$, og vegna þess að bæði f_{Z^2} og f hafa tegrið 1 hlýtur því að gilda að $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Þetta gefur að f_{Z^2} er Gamma$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ þéttleikinn.

Athugasemd. Sönnunin gefur að $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

14. Summa óháðra samfelldra stærða

Setning 14.1. *Látum X og Y vera óháðar og samfelldar. Þá gildir*

$$F_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Sönnun: Nú er $\{X+Y \leq a\} = \{(X,Y) \in A\}$ þar sem $A := \{(x,y) : x+y \leq a\}$. Fáum því

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(a) = \mathbf{P}(X+Y \leq a) &= \iint_A f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x) dx \right] f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(X \leq a-y) f_Y(y) dy. \end{aligned}$$

Fylgisetning 14.2. *Látum X og Y vera óháðar og samfelldar. Þá gildir*

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Sönnun: $\dfrac{dF_{X+Y}(a)}{da} = \dfrac{d \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y) f_Y(y) dy}{da} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_X(a-y)}{da} f_Y(y) dy.$

Setning 14.3. *Látum X og Y vera óháðar og jafnt dreifðar á $[0,1]$. Þá gildir*

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a, & \textit{ef } 0 \leq a \leq 1, \\ 2-a, & \textit{ef } 1 < a < 2, \\ 0, & \textit{annars.} \end{cases}$$

Sönnun: $f_{X+Y}(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y) dy$

$$= \int_0^1 f_X(a-y) dy = \begin{cases} \int_0^a dy = a, & \text{ef } 0 \leq a \leq 1, \\ \int_{a-1}^1 dy = 2-a, & \text{ef } 1 < a < 2, \\ 0, & a < 0 \text{ eða } a \geq 2. \end{cases}$$

Setning 14.4. *Látum* $X \sim \text{Gamma}(s, \lambda), Y \sim \text{Gamma}(t, \lambda)$, X *og* Y *óháðar. Þá er* $X + Y \sim \text{Gamma}(s + t, \lambda)$.

Sönnun: Við höfum

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{s-1}, \quad x \geq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}, \quad y \geq 0$$

Ljóst er að $f_{X+Y}(a) = 0$ fyrir $a \leq 0$. Fyrir $a > 0$ fæst

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)f_Y(y)dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^a \lambda e^{-\lambda(a-y)}(\lambda(a-y))^{s-1}\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{t-1}dy \\
&= \frac{\lambda^{s+t}e^{-\lambda a}}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^a (a-y)^{s-1}y^{t-1}dy \\
&\overset{[y=au]}{=} \frac{\lambda^{s+t}e^{-\lambda a}}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^1 (a-au)^{s-1}(au)^{t-1}adu \\
&= c\,\lambda^{s+t}\,e^{-\lambda a}a^{s+t-1} \qquad \text{þar sem } c = \frac{\int_0^1(1-u)^{s-1}u^{t-1}du}{\Gamma(s)\Gamma(t)} \\
&= c\,\lambda\,e^{-\lambda a}(\lambda a)^{s+t-1}.
\end{aligned}$$

Þéttleiki $\text{Gamma}(s + t,\ \lambda)$ er $f(a) = \frac{1}{\Gamma(s+t)}\lambda e^{-\lambda a}(\lambda a)^{s+t-1}$, $a > 0$, og vegna þess að bæði f_{X+Y} og f hafa tegrið 1 hlýtur því að gilda að $\frac{1}{\Gamma(s+t)} = c$. Þetta gefur að f_{X+Y} er $\text{Gamma}(s + t, \lambda)$ þéttleikinn.

Athugasemd. Þessar tvær jöfnur fyrir c gefa

$$B(s,t) := \int_0^1 (1-u)^{s-1}u^{t-1}du = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

Setning 14.5. *Látum* $Z_1, \ldots, Z_r$ *vera óháðar stærðir sem allar eru* $N(0, 1)$. *Þá er*

$$Z_1^2 + \cdots + Z_r^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sönnun: Þetta leiðir af Setningu 13.4 og Setningu 14.4.

Athugasemd. Af þessu leiðir að χ_r^2-stærðin er $\text{Gamma}\left(\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\right)$-stærð. Takið eftir að $Z_1^2 + Z_2^2$ er $\text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Hjálparsetning 14.6. *Látum $V \sim N(0,\sigma^2)$, $Z \sim N(0,1)$, V og Z óháðar. Þá er $V+Z \sim N(0,\sigma^2+1)$.*

**Sönnun:* Fyrir $a \in \mathbb{R}$ fæst

$$\begin{aligned}
f_V(a-x)f_Z(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(a-x)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}a^2}e^{-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}(x^2-2x\frac{a}{1+\sigma^2})} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}a^2}e^{-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}[(x-\frac{a}{1+\sigma^2})^2-(\frac{a}{1+\sigma^2})^2]} \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}a^2}e^{\frac{a^2}{2\sigma^2(1+\sigma^2)}}e^{-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}(x-\frac{a}{1+\sigma^2})^2}.
\end{aligned}$$

Því er

$$f_{V+Z}(a) = \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^2(1+\sigma^2)})a^2}C$$

þar sem

$$C := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}(x-\frac{a}{1+\sigma^2})^2}dx \overset{[y:=x-\frac{a}{1+\sigma^2}]}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1+\sigma^2}{2\sigma^2}y^2}dy$$

er óháð a. Við fáum því

$$f_{V+Z}(a) = \frac{C}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2(1+\sigma^2)}a^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Setning 14.7. *Látum $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$, X og Y óháðar. Þá er $X+Y \sim N(\mu_x+\mu_y,\sigma_x^2+\sigma_y^2)$.*

**Sönnun:* Setjum

$$V := \frac{X-\mu_x}{\sigma_y} \text{ og } Z := \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}.$$

Þá er $V+Z$ normleg samkvæmt Hjálparsetningu 14.6. Nú er

$$X+Y = \sigma_y(V+Z)+\mu_x+\mu_y$$

og því er $X+Y$ normleg samkvæmt Setningu 13.3.

Setning 14.8. *Látum $X_1, X_2 \ldots, X_n$ vera óháðar normlegar slembistærðir. Þá er $X_1+\cdots+X_n$ normleg.*

**Sönnun:* Notum Setningu 11.7 ítrekað.

15. Nokkur dæmi

1. Húfur: Hér á árum áður gengu nemendur við verkfræðiháskólann í Gautaborg með húfur sem líktust stúdentshúfum með áhengdu svörtu skotti. Eitt sinn sem endra nær mæta þeir til árshátíðar og kasta þá húfum sínum í hrúgu við innganginn. Þegar þeir svo halda heimleiðis taka þeir húfu af handhófi úr hrúgunni. Látum n vera fjölda nemenda á árshátíðinn. Hverjar eru líkurnar p_n á að einhver þeirra fari heim með sína húfu? Ákvarðið líka $\lim_{n\to\infty} p_n$.

2. Afmælisdagar: Sláið á líkurnar á því að í n manna bekk eigi engir nemendur sama afmælisdag. Hvað þarf n að vera til að þessar líkur séu um það bil 50%?

3. Péturborgarþversögnin: Manni nokkrum gefst kostur á að leika eftirfarandi leik fyrir a krónur. Peningi er kastað þangað til framhliðin kemur upp. Gerist það í kasti númer n fær maðurinn 2^n krónur í vinning. Maðurinn telur rétt að taka þátt í leiknum ef hann er *sanngjarn*, það er að segja ef væntigildi vinningsins er að minnsta kosti a. Hvað þarf a að vera lítið til að maðurinn taki þátt í leiknum?

4. Strjált minnisleysi: Sýnið að strjálar veldisstærðir $\mathrm{Geo}(p)$, $0 < p < 1$, eru einu slembistærðirnar sem eru minnislausar í strjálum tíma.

5. Sjónvarpsþáttur: Í vikulegum sjónvarpsþætti er eftirfarandi leikur ávallt leikinn. Bíl er komið fyrir af handahófi í einum af þremur lokuðum básum. Keppandi skal velja einn bás og hreppir bílinn sé hann þar. Stjórnandinn (sem veit í hvaða bás bíllinn er) opnar nú bás, sem keppandinn hefur ekki valið, og sýnir að bíllinn er ekki þar. Keppandinn stendur þá frammi fyrir tveimur lokuðum básum og stjórnandinn gefur honum kost á að breyta upphaflegu vali sínu.

(a) Á keppandinn að breyta vali sínu, eða á hann ekki að gera það, eða skiptir það ekki máli?

(b) Eitt sinn gerist það, þegar keppandi hefur valið bás, að pottormur úr salnum (sem hefur ekki hugmynd um hvar bíllinn er) stekkur upp á sviðið og rífur upp dyrnar að öðrum hinna básanna og reynist bíllinn ekki vera þar. Á keppandinn að fara þess á leit að leikurinn verði leikinn upp á nýtt?