Skilaverkefni 3

Brynjólfur Gauti Jónsson
Þórarinn Jónmundsson

Dæmi 1

Ný aðferð til að mæla fosfór í jarðvegi er kynnt til sögunnar. Úrtak af 11 jarðvegssýnum úr jarðvegi með raunverugeu fosfórmagni $548mg/kg$ er greint með nýju aðferðinni. Úrtaksmeðaltalið reynist vera 587 og úrtaksstaðalfrávikið 10.

(1) Gefa gögnin til kynna að nýja aðferðin mæli fosfórmagnið rétt? Nota skal núlltilgátupróf með marktektarkröfu $\alpha = 0.05$.

Lausn:

Við ætlum að prófa μ sem er hið sanna meðaltal þýðisins og gerum ráð fyrir því að meðaltalið komi úr normaldreifingunni (skv T3_Nulltilgatu.pdf). Tilgátuprófið er

$$H_0 : \mu = 548 \quad \text{v.s.} \quad H_1 : \mu \neq 548.$$

Þar sem hið sanna staðalfrávik er ekki gefið þurfum við að styðjast við t-próf. Prófstærðin er:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Hér er $\overline{x}$ úrtaksmeðaltalið, s úrtaksstaðalfrávikið, μ_0 núlltilgátugildið sem við viljum prófa og n fjöldi mælinga. Í okkar tilfelli verður því jafnan að ofan:

$$t = \frac{587 - 548}{10/\sqrt{11}} = \frac{39}{10/\sqrt{11}} \approx 12.935$$

Þar sem gagntilgátuprófið okkar er tvíhliða þá höfnum við H_0 ef $|t| > t_{\alpha/2,n-1}$. Þar sem $\alpha = 0.05$ er $t_{0.025,10} = 2.228$ og því ljóst að

$$|t| = |12.935| > 2.228 = t_{0.025,10}.$$

Við höfnum því núlltilgátunni H_0 undir marktektarkröfunni $\alpha = 0.05$ og samþykkjum gagntilgátuna undir sömu marktektarkröfu.

(2) Hverju þurfum við að gera ráð fyrir til að núlltilgátuprófið í **(1)** verði viðeigandi?

Lausn:

Að gögnin komi úr normaldreifingunnni og fyrst úrtakið er lítið að gögnin séu án útlaga eða séu ekki skeif.

Dæmi 2

Framleiðslufyrirtæki þarf að velja á milli tveggja birgja sem selja örflögur í tölvur. Slembiúrtak af 200 örflögum frá birgi A eru kannaðar og 8 þeira reyndust vera gallaðar, á meðan 13 í slembiúrtaki af 250 örflögum frá brgi B voru gallaðar. Notið núltilgátu til að meta hvort þessi niðurstaða ætti aðhafa áhrif á val fyrirtækisins á birgi með marktektarkröfu $\alpha = 0.01$.

Lausn:

Við leysum dæmið út frá tvíkosta *(e. binomial)* dreifingunni. Þar sem úrtakið er nægilega stórt notum við normaldreifinguna til að nálga prófstærð miðað vil núlltilgátuna $H_0 : p_A = p_B$.

Höfum að $\hat{p}_A = \frac{8}{200}$, $\hat{p}_B = \frac{13}{250}$, $\hat{p} = \frac{8+13}{200+250} = \frac{21}{450}$. Prófstærðin okkar verður

$$z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}} = -0.6$$

Flettum upp p-gildi prófstærðar með R skipuninni `2 * dnorm(-0.6)` og fáum p = 0.67. Við getum því ekki sagt að munur sé á birgjum og því ætti niðurstaðan ekki að hafa áhrif á val fyrirtækisins.

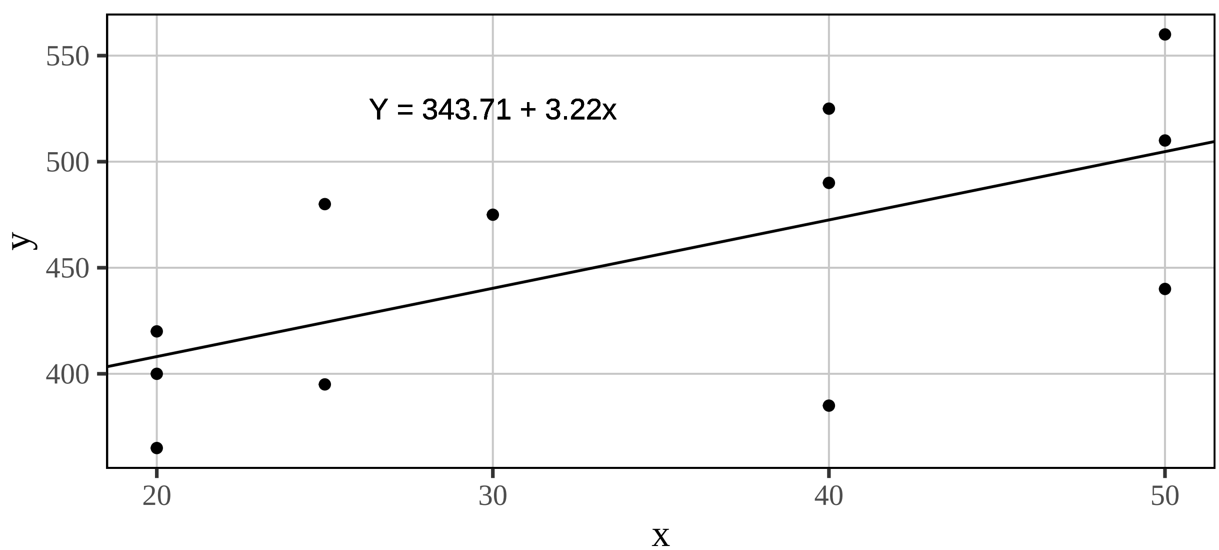
Dæmi 3

Í þessu dæmi á að skila R kóða ásamt svörum. Rannsókn var gerð til að ákvarða samband milli vikulegra útgjalda til auglýsinga og söluhagnaðs. Niðurstaðan var eftirfarandi:

Útgjöld til auglýsinga [mISK]	Söluhagnaður [mISK]
40	385
20	400
25	395
20	365
30	475
50	440
40	490
20	420
50	560
40	525
25	480
50	510

(a) Notið R til að gera línulega aðhvarfsgreiningu á gögnunum með því að nota formúlurnar í bókinni beint og ákvarðið þannig jöfnu matlínunnar fyrir $Y = \beta_0 + \beta_1 x$. Teiknið gögnin.

```
x <- data %>% mutate(x0 = 1) %>% select(x0, x) %>% as.matrix
y <- as.matrix(data$y)
hat_matrix <-
betas <- solve(t(x) %*% x) %*% t(x) %*% y
fmla <- paste0("Y = ", round(betas[1], 2), " + ", round(betas[2], 2), "x")
ggplot(data, aes(x, y)) + geom_point() +
      geom_abline(intercept = betas[1], slope = betas[2]) +
      geom_text(aes(x = 30, y = 525, label = fmla))
```



(b) Ákvarðið 95% öryggisbil fyrir β_1 með því að reikna sjálf í R.

```
e <- y - (x %*% betas)
sigma2 <- ((t(e) %*% e) / (nrow(y) - nrow(betas))) %>% as.vector
var_beta <- solve(t(x) %*% x)  %>% diag %>% as.vector %>% (function(x) x * sigma2)
se_beta <- sqrt(var_beta)

data_frame(term = c("Skurðpunktur", "x"),
           beta = as.vector(betas),
           se = se_beta) %>%
      mutate(lower = beta + qt(0.025, nrow(y)) * se,
             upper = beta + qt(0.975, nrow(y)) * se) %>%
      set_names(c("Breyta", "Stuðull", "Staðalvilla", "Neðri", "Efri")) %>%
      kable(format = "latex", booktabs = TRUE, digits = 3, align = c("l", rep("c", 4))) %>%
      kable_styling() %>%
      add_header_above(c("", "", "", "95% Öryggisbil" = 2))
```

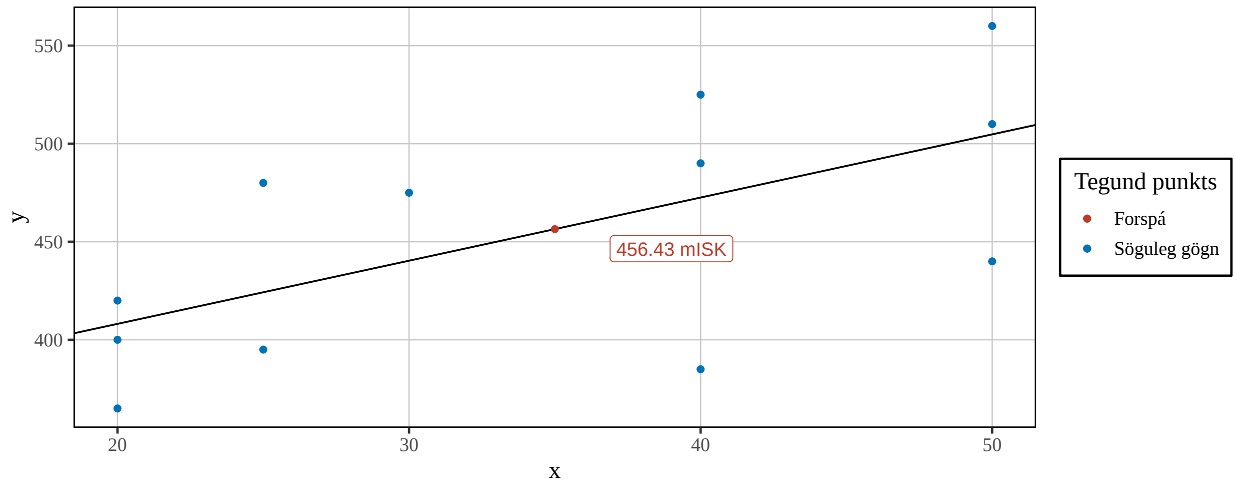
			95% Öryggisbil	
Breyta	Stuðull	Staðalvilla	Neðri	Efri
Skurðpunktur	343.706	44.766	246.168	441.243
x	3.221	1.240	0.520	5.922

(c) Notið fallið `lm(y ~ x)` og staðfestið reikningana í **(a)** og **(b)**.

```
mod <- lm(y ~ x, data = data)
mod %>%
      tidy %>%
      select(term, estimate, std.error) %>%
      mutate(lower = estimate + qt(0.025, nrow(y)) * std.error,
             upper = estimate + qt(0.975, nrow(y)) * std.error) %>%
      set_names(c("Breyta", "Stuðull", "Staðalvilla", "Neðri", "Efri")) %>%
      kable(format = "latex", booktabs = TRUE, digits = 3) %>%
      kable_styling(full_width = TRUE) %>%
      add_header_above(c("", "", "", "95% Öryggisbil" = 2))
```

			95% Öryggisbil	
Breyta	Stuðull	Staðalvilla	Neðri	Efri
(Intercept)	343.706	44.766	246.168	441.243
x	3.221	1.240	0.520	5.922

(d) Spáið fyrir vikulegum söluhagnaði þegar útgjöld til auglýsinga eru 35 milljónir ISK.



(e) Á 5% prófsstigi, getum við dregið þá ályktun að auglýsingar hafi áhrif á sölur?

Þar sem öryggisbil fyrir hallastuðul við auglýsingar inniheldur ekki núll getum við ályktan með 95% vissu að áhrif auglýsinga á sölu séu ekki núll.

(Auka) Hvernig skal túlka β_0 og β_1 fyrir þessi gögn?

β_0 er vænt sölumagn þegar engu fjármagni er varið í auglýsingar. Hafa ber varann á þar sem úrtak inniheldur ekki mælingar á sölu fyrir auglýsingaútgjöld minni en 20 mISK eða meiri en 50 mISK. Mælt er með að heimfæra ekki niðurstöður greiningar á auglýsingafjármagn langt utan þess bils.

β_1 er vænt aukning í sölumagni þegar vikulegum útgjöldum til auglýsinga er aukið um 1 mISK.