Skilaverkefni 2

Fjármálatölfræði

Skilið dæmunum hér að neðan í tíma fimmtudaginn 20. september eða fyrir kl 23.59 þann 20. september ef þið viljið skila stafrænt. Ekki verður tekið á móti verkefnum eftir það. Verkefnin skulu vera snyrtilega sett fram og með skýringum. Vinnið saman í hópum eins og áður. Það eru 7 í dæmi skilaverkefninu sem gilda öll jafnt ásamt einu aukadæmi sem er bara til upphækunar.

Dæmi 1

Gerum ráð fyrir að meðalverð á gulli hafi verið undanfarið $\mu = 30$ \$/gr og staðalfrávik verðs á gulli hafi verið $\sigma = 2$ \$/gr. Gerum svo ráð fyrir að vera á gulli í næstu viku sé normaldreifð slembistærð með væntigildi $\mu = 30$ \$/gr og staðalfrávik $\sigma = 2$ \$/gr.

1. Reiknið líkurnar á því að verð á gulli í næstu viku verði minna en 32 \$/gr?
2. Reiknið líkurnar á því að verð á gulli í næstu viku verði meira en 26 \$/gr?
3. Reiknið líkurnar á því að verð á gulli í næstu viku verði meira en 26 \$/gr og minna 32 \$/gr?
4. Ef við vitum að líkurnar á því að verð á gulli í næstu viku verði meira en 30 \$/gr hverjar eru þá líkurnar á því að það verði meira en 34 \$/gr?

Dæmi 2

Látum $X_i \sim \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 9)$ fyrir $i = 1, ..., 10$ vera óháðar nomraldreifðar slembistærðir. Reiknið

$$P\left(2(X1 + X2 + X3 + X4) < 48\right)$$

Ábending:
Ef $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ og $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ og eru óháðar þá gildir að $X + Y$ fylgir líka normaldreifingu.

Dæmi 3

Líftími ákveðna rafhlaðna fylgir normal dreifingu með væntigildi $\mu = 5$ vikur og staðalfrávik 1.5 viku. Þegar rafhlaðan deyr er henni samstundis skipt út fyrir nýja sem fylgir sömu dreifingu (getum hugsað að hún sé frá sama framleiðanda og sé af sömu gerð). Metið líkurnar á því að það þurfi að nota 13 rafhlöður eða fleiri á einu ári.

Dæmi 4

Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera einsdreifðar og óháðar slembistærðir þ.a.

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \tau) \quad \text{fyrir öll } i = 1, \ldots, n$$

þar sem μ er þekkt og τ er óþekkt dreifni (e. variance).

a) Sýnið að sennileikametillinn fyrir τ er

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2.$$

Ábending:
Þið þurfið ekki að sýna að fundið útgildi sé í raun og veru hágildi

b) Reiknið bjaga sennileikametilsins $\hat{\tau}$. Þ.e.a.s. finnið $b_\tau(\hat{\tau})$.

Dæmi 5

Úrtak af $n = 56$ athuguðum bómullarsýnum gefur úrtaksmeðaltalið af hlutfallsteygjanleika bómullarinnar sem $\bar{x} = 8.17$ og úrtaksstaðalfrávikið $s = 1.42$. Finnið 95% öryggisbil fyrir sanna meðal-hlutfallsteygjanleikann μ.

Dæmi 6

Hér höfum við slembiúrtak að stærð $n = 10$ og búið er að reikna fyrir okkur

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 219,0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4949,9$$

Hér má gera ráð fyrir að úrtakið komi úr normaldreifðu þýði.
Ábending:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) - n\bar{x}^2$$

a) Reikna punktmat fyrir μ og σ.

b) Reikna 95% öryggisbil fyrir σ

Dæmi 7

Líftími $n = 14$ vélhluta var mældur. Summa líftímanna var 1368 klukkustundir. Gerið ráð fyrir að líftímarnir fylgi veldisdreifingu. Þ.e.a.s. ef við látum X_j tákna j-ta líftíma. Þá gildir að X_j er veldisdreifð slembistærð. Í táknmáli ritast það sem

$$X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$$

þar sem λ er óþekktur stiki

Ábending:
Lesið ykkur til um veldisdreifinguna áður en þið leysið þetta dæmi. Á ensku heitir þessi dreifing *exponential distribution.*

a) Hvert er punktmatið á meðalgildi líftímanna?

b) Hvert er 95% öryggisbil fyrir meðalgildið?

c) (Þessi liður er smá áskorun og gildir bara til upphækkunar)
Reiknið 95% öryggisbil fyrir $P(X > 150)$, þ.e., líkurnar á að líftíminn sé stærri en 150 klukkustundir. Styðjist við öryggisbilið hér fyrir ofan.

Aukadæmi

Höfum tvo metla d_1 og d_2 til að meta stikann θ. Um metlana eru gefnar eftirfarandi upplýsingar

$$E[d_1] = \theta, \quad Var(d_1) = 6, \quad E[d_2] = \theta + 2, \quad Var(d_2) = 2$$

Hvorn ættum við að velja til að meta stikann θ?