

# Mál- og tegurfræði

*Brynjólfur Gauti Jónsson*

*2019-03-21*



# Contents

<b>Kennsluáætlun</b>	<b>9</b>
<b>1 Örlítil mengjafræði</b>	<b>11</b>
1.1 Skilgreining . . . . .	11
<b>2 Aukna rauntalnalínan</b>	<b>13</b>
2.1 Efra- og neðra markgildi runu . . . . .	13
2.2 Setning . . . . .	14
2.3 Setning . . . . .	14
2.4 Setning . . . . .	14
2.5 Setning . . . . .	14
<b>3 Nokkur atriði varnandi raðir</b>	<b>15</b>
3.1 Setning . . . . .	15
3.2 Setning . . . . .	15
3.3 Umröðunarsetning Riemanns . . . . .	15
3.4 Æfing . . . . .	16
3.5 Setning . . . . .	16
3.6 Setning . . . . .	16
<b>Vikublað 1</b>	<b>17</b>
<b>4 Jordan-mælanleg mengi</b>	<b>19</b>
4.1 Setning . . . . .	19
Setning 3.1.2 . . . . .	19
4.2 Setning . . . . .	19
4.3 Skilgreining . . . . .	20
4.4 Setning . . . . .	20
4.5 Skilgreining . . . . .	20
4.6 Setning . . . . .	20
4.7 Setning . . . . .	21
<b>5 Tröppuföll og heildi þeirra</b>	<b>23</b>
5.1 Setning . . . . .	23
5.2 Setning . . . . .	23
5.3 Setning . . . . .	23
<b>6 Riemann-heildi (Darboux-útgáfan)</b>	<b>25</b>
6.1 Skilgreining . . . . .	25
6.2 Skilgreining . . . . .	25
6.3 Setning . . . . .	26
6.4 Setning . . . . .	26

<b>Vikublað 2</b>	<b>27</b>
Dæmi 1 . . . . .	27
Dæmi 2 . . . . .	27
Dæmi 3 . . . . .	27
Dæmi 4 . . . . .	27
Dæmi 5 . . . . .	28
Dæmi 6 . . . . .	28
<b>7 Lebesgue-utanmálið</b>	<b>29</b>
7.1 Skilgreining . . . . .	29
7.2 Setning . . . . .	29
7.3 Setning . . . . .	30
7.4 Setning . . . . .	30
7.5 Setning . . . . .	31
7.6 Setning . . . . .	31
<b>8 Lebesgue-mælanleg mengi og Lebesgue-málið</b>	<b>33</b>
8.1 Skilgreining . . . . .	33
8.2 Setning . . . . .	33
8.3 Setning . . . . .	33
8.4 Setning . . . . .	34
<b>Vikublað 3</b>	<b>35</b>
Dæmi 1 . . . . .	35
Dæmi 2 . . . . .	36
Dæmi 3 . . . . .	36
Dæmi 4 . . . . .	36
Dæmi 5 . . . . .	36
Dæmi 6 . . . . .	37
Dæmi 7 . . . . .	37
<b>9 Mælanleg rúm og málrúm</b>	<b>39</b>
9.1 Skilgreining . . . . .	39
9.2 Skilgreining . . . . .	39
9.3 Setning . . . . .	40
<b>10 Fullkomin málrúm</b>	<b>41</b>
10.1 Skilgreining . . . . .	41
10.2 Setning . . . . .	41
10.3 Setning . . . . .	41
10.4 Setning . . . . .	42
10.5 Setning . . . . .	42
<b>Vikublað 4</b>	<b>43</b>
<b>11 Líkindamál</b>	<b>45</b>
11.1 Skilgreining . . . . .	45
11.2 Skilgreining . . . . .	45
11.3 Skilgreining . . . . .	45
11.4 Skilgreining . . . . .	45
<b>12 Mælanleg föll</b>	<b>47</b>
12.1 Málvenja . . . . .	47
12.2 Skilgreining . . . . .	47
12.3 Setning . . . . .	47

12.4 Setning	48
12.5 Athugasemd	48
12.6 Setning	48
12.7 Setning	48
12.8 Setning	49
12.9 Setning	49
12.10 Setning	49
12.11 Setning	49
12.12 Skilgreining	49
12.13 Setning	50
12.14 Skilgreining	50
12.15 Setning	50

## **Vikublað 5** **51**

### **13 Slembibreytur á líkindarúmum** **53**

13.1 Skilgreining	53
13.2 Setning	53
13.3 Skilgreining	53
13.4 Skilgreining	54
13.5 Skilgreining	54
13.6 Æfing	54
13.7 Setning	54
13.8 Setning	54
13.9 Setning	55

### **14 Heildun jákvæðra falla** **57**

14.1 Skilgreining	57
14.2 Setning	57
14.3 Setning [Um einhalla samleitni] (Lebesgue)	57
14.4 Setning	58
14.5 Setning [Fatou]	58
14.6 Setning	59
14.7 Setning	59

## **Vikublað 6** **61**

Dæmi 1	61
Dæmi 2	61
Dæmi 3	61
Dæmi 4	62
Dæmi 5	62
Dæmi 6	62
Dæmi 7	62
Dæmi 8	63
Dæmi 9	63

### **15 Heildanleg föll** **65**

15.1 Skilgreining	65
15.2 Setning	65
15.3 Setning	66
15.4 Setning	67
15.5 Setningin um yfirgnæfða samleitni	68
15.6 Setning	69
15.7 Setning [Beppo Levi]	70

<b>Vikublað 7</b>	<b>71</b>
Dæmi 1 . . . . .	71
Dæmi 2 . . . . .	71
Skilgreining . . . . .	72
Dæmi 3 . . . . .	72
Dæmi 4 . . . . .	72
Dæmi 5 . . . . .	72
Dæmi 6 . . . . .	73
Dæmi 7 . . . . .	73
Dæmi 8 . . . . .	74
Dæmi 9 . . . . .	74
Dæmi 10 . . . . .	74
<b>16 Lebesgue-heildi og Riemann-heildi</b>	<b>75</b>
16.1 Dæmi (Varúð!) . . . . .	75
16.2 Setning . . . . .	75
16.3 Setning . . . . .	76
16.4 Setning . . . . .	76
<b>17 Nálganir Lebesgue-heildanlegra falla á <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>77</b>
17.1 Setning . . . . .	77
17.2 Setning . . . . .	77
<b>18 Heildun með stikabreytu</b>	<b>79</b>
18.1 Setning . . . . .	79
18.2 Setning . . . . .	79
18.3 Setning . . . . .	80
18.4 Setning . . . . .	80
<b>Vikublað 8</b>	<b>83</b>
<b>19 Skrímslafræði</b>	<b>85</b>
19.1 Valfrumsendan . . . . .	85
19.2 Setning . . . . .	85
19.3 Setning . . . . .	85
19.4 Setning . . . . .	85
<b>20 <math>L^p</math>-rúm</b>	<b>87</b>
Upprifjun . . . . .	87
Setning . . . . .	87
Æfing . . . . .	88
Setning . . . . .	88
Upprifjun . . . . .	88
Æfing . . . . .	88
Setning (Ójafna Jensens) . . . . .	89
Setning (Ójöfnur Hölders og Minkowski) . . . . .	89
Upprifjun . . . . .	91
Skilgreining . . . . .	91
Setning . . . . .	92
Setning . . . . .	92
Upprifjun . . . . .	92
Æfingar . . . . .	93
Setning . . . . .	93
Setning . . . . .	93
Athugasemd . . . . .	93

Setning . . . . .	93
Setning . . . . .	94
Setning . . . . .	94
<b>Vikublað 9</b>	<b>95</b>
Dæmi 1 . . . . .	95
Dæmi 2 . . . . .	95
Dæmi 3 . . . . .	96
Dæmi 4 . . . . .	96
Upprifjun úr línulegri algebru . . . . .	96
Dæmi 5 . . . . .	97
Dæmi 6 . . . . .	98
Dæmi 7 . . . . .	99
Dæmi 8 . . . . .	100
Dæmi 9 . . . . .	101
<b>21 Innfeldisrúm</b>	<b>103</b>
Upprifjun . . . . .	103
Setning . . . . .	103
Setning . . . . .	104
Setning . . . . .	105
Setning . . . . .	105
Skilgreining . . . . .	105
Æfing . . . . .	106
Setning . . . . .	106
Setning . . . . .	106
Skilgreining . . . . .	106
Skilgreining . . . . .	106
Setning . . . . .	107
<b>Vikublað 10</b>	<b>109</b>
Dæmi 1 (Skil) . . . . .	109
Dæmi 2 (Skil) . . . . .	110
Dæmi 3 . . . . .	112
Dæmi 4 . . . . .	112
Dæmi 5 (Skil) . . . . .	112
Dæmi 6 . . . . .	112
<b>22 Þverstaðlaðar fjölskyldur</b>	<b>113</b>
Skilgreining . . . . .	113
Setning . . . . .	113
Setning . . . . .	113
Setning . . . . .	114
Setning . . . . .	114
Setning . . . . .	114
<b>Vikublað 11</b>	<b>115</b>
Dæmi 1 (Skil) . . . . .	115
Dæmi 2 (Skil) . . . . .	115
Dæmi 5 (Skil) . . . . .	115
Dæmi 8 (Skil) . . . . .	116





# Kennsluáætlun

- **Vika 1:** Mengjafræði, aukna rauntalnalínan, raðir.
- **Vika 2:** Jordan-mælanleg mengi, tröppuföll, Riemann-heildi.
- **Vika 3:** Legesbue: Utanmálið, mælanleg mengi og málið.
- **Vika 4:** Málrúm
- **Vika 5:**
- **Vika 6:**
- **Vika 7:** Heildanleg föll
- **Vika 8:**
- **Vika 9:**



# Chapter 1

## Örlítil mengjafræði

Gefum okkur að til grundvallar liggi *hæfilega stórt* almengi.

### 1.1 Skilgreining

**Fjölskylda** af hlutmengjum í mengi  $M$  er vörpun

$$a : I \rightarrow \mathcal{P}(M).$$

Við notum yfirleitt tákn af greðinni  $A_i$  til þess að tákna gildi vörpunarinnar  $a$  í  $i$  og vörpunina  $a$  táknum við þá  $(A_i)_{i \in I}$ .

Við köllum  $I$  **stikamengi** fjölskyldunnar.

Mengið

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid x \in A_i \text{ fyrir öll } i \in I\}$$

kallast **sniðmengi** fjölskyldunnar.

Mengið

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in M \mid x \in A_i \text{ fyrir eitthvert } i \in I\}$$

kallast **sammengi** fjölskyldunnar.

Fyrir hlutmengi  $A$  í  $M$  setjum við

$$A^c := M \setminus A := \{x \in M \mid x \notin A\}$$

og köllum **fyllimengi**  $A$  (í  $M$ ).

Ef  $B$  er líka hlutmengi í  $M$ , þá setjum við

$$B \setminus A := \{x \in B \mid x \notin A\} = B \cap A^c$$

og hlutmengið

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

köllum við **samhverfan mismun** hlutmengjanna  $A$  og  $B$ .

---

Um sérhverja fjölskyldu  $(A_i)_{i \in I}$  í mengi  $M$  gilda **reglur de Morgans**

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$


---

**Kennifall** hlutmengis  $A$  í  $M$  er táknað  $\mathbf{1}_A : M \rightarrow \mathbb{R}$  og skilgreint með því að setja  $\mathbf{1}_A(x) := 1$  ef  $x \in A$  og  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  ef  $x \notin A$ .

Fyrir hlutmengi  $A$  og  $B$  í  $M$  gilda reglurnar

- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$

## Chapter 2

# Aukna rauntalnalínan

Við köllum mengið  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$  **auknu rauntalnalínuna**. Við framlengjum röðuna á  $\mathbb{R}$  yfir á  $\overline{\mathbb{R}}$  með skilyrðinu

$$-\infty < x < \infty \text{ fyrir öll } x \text{ úr } \mathbb{R}$$

og framlengjum venjulegu reikniaðgerðirnar á  $\mathbb{R}$  yfir á  $\overline{\mathbb{R}}$  með því að setja:

- $a + \infty = \infty$  fyrir öll  $a \in (-\infty, \infty]$
- $a + (-\infty) = -\infty$  fyrir öll  $a \in [-\infty, \infty)$
- $a \cdot \infty = \infty$  og  $a \cdot (-\infty) = -\infty$  fyrir öll  $a \in (0, \infty]$
- $a \cdot \infty = -\infty$  og  $a \cdot (-\infty) = \infty$  fyrir öll  $a \in [-\infty, 0)$

---

Látum  $A$  vera hlutmengi í  $\overline{\mathbb{R}}$

- Minnsti yfirstak mengisins  $A$  í  $\overline{\mathbb{R}}$  kallast **efra mark** mengisins  $A$  og við táknum það  $\sup A$ .
- Stærsti undirstak mengisins  $A$  í  $\overline{\mathbb{R}}$  kallast **neðra mark** mengisins  $A$  og við táknum það  $\inf A$ .

Ef  $(x_n)_{n \geq 0}$  er runa í  $\overline{\mathbb{R}}$  og  $n_0 \in \mathbb{N}$ , þá setjum við

- $\sup_{n \geq n_0} x_n := \sup\{x_n | n \geq n_0\}$
- $\inf_{n \geq n_0} x_n := \inf\{x_n | n \geq n_0\}$

---

Mengi  $A$  í  $\overline{\mathbb{R}}$  er sagt **takmarkað að ofan** [**neðan**] ef  $\sup A < \infty$  [ $\inf A > -\infty$ ]. Samsvarandi fyrir runur.

## 2.1 Efra- og neðra markgildi runu

Látum  $(x_n)$  vera runu í  $\overline{\mathbb{R}}$ . Þá er runan  $(\sup_{n \geq k} x_n)_k$  minnkandi og hefur því markgildi í  $\overline{\mathbb{R}}$ . Við setjum

$$\limsup x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} x_n$$

og köllum  $\limsup x_n$  **efra markgildi** rununnar  $(x_n)$ .

Með svipuðum rökum er unnt að skilgreina stakið

$$\liminf x_n := \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} x_n.$$

Það kallast **neðra markgildi** rununnar  $(x_n)$ .

## 2.2 Setning

Látum  $(x_n)$  vera runu í  $\overline{\mathbb{R}}$  og  $E$  vera mengi allra staka úr  $\overline{\mathbb{R}}$  sem eru markgildi einherrar hlutrunu í  $(x_n)$ . Þá gildir

$$\limsup x_n = \max E \quad \text{og} \quad \liminf x_n = \min E$$

## 2.3 Setning

Látum  $(x_n)$  vera runu í  $\overline{\mathbb{R}}$ . Þá gilda eftirfarandi jöfnur og ójöfnur:

$$(i) \limsup(-x_n) = -\liminf x_n \quad \text{og} \quad \liminf(-x_n) = -\limsup x_n.$$

$$(ii) \liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Ennfremur gildir að runan  $(x_n)$  er samleitin þá og því aðeins að  $\liminf x_n = \limsup x_n$ .

## 2.4 Setning

Látum  $(x_n)$  og  $(y_n)$  vera runur í  $\overline{\mathbb{R}}$  sem hafa þann eiginleika að  $x_n \leq y_n$  fyrir öll  $n$ , þá fæst  $\liminf x_n \leq \liminf y_n$  og  $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ .

## 2.5 Setning

Látum  $(x_n)$  og  $(y_n)$  vera runur í  $\overline{\mathbb{R}}$ , þá gilda ójöfnurnar

$$\begin{aligned} \liminf x_n + \liminf y_n &\leq \liminf(x_n + y_n) \\ &\leq \liminf x_n + \limsup y_n \\ &\leq \limsup(x_n + y_n) \\ &\leq \limsup x_n + \limsup y_n \end{aligned}$$

## Chapter 3

# Nokkur atriði varnandi raðir

### 3.1 Setning

Látum  $(a_n)_{n \geq 0}$  vera runu í  $[0, \infty]$  og látum  $\mathcal{S}$  tákna mengi allra summa af gerðinni  $\sum_{n \in I} a_n$  þar sem  $I$  er endanlegt hlutmengi í  $\mathbb{N}$ . Þá gildir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup(\mathcal{S})$$

### 3.2 Setning

Látum  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  vera alsamleitna tvinntalnaröð og  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  vera gagnþæka vörpum (m.ö.o. **umröðun**). Þá er röðin  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  einnig alsamleitning og

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Eftirfarandi setning er einkar áhugaverð í tengslum við setningu 2.1.2, en kemur ekki við sögu í þessu námskeiði.

### 3.3 Umröðunarsetning Riemanns

Látum  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  vera *skilyrt samleitna* rauntalnaröð og  $c$  og  $d$  vera stök úr  $\overline{\mathbb{R}}$  þannig að  $c \leq d$ . Þá er til umröðun  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sem hefur þann eiginleika

$$\liminf \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = 0 \quad \text{og} \quad \limsup \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = d.$$

Látum  $I$  vera óendanlegt teljanlegt mengi og  $(a_i)_{i \in I}$  vera fjölskyldu af tvinntölum. Við segjum að **summan**  $\sum_{i \in I} a_i$  sé **alsamleitin** ef til er gagnþæk vörpun  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ , sem hefur þann eiginleika að  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  sé alsamleitin. Sé svo, þá gildir samkvæmt *setningu 2.1.2* að talan  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  er óháð því hvaða vörpun  $\sigma$  er valin. Við setjum þá

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

og köllum **summu** fjölskyldunnar  $(a_i)_{i \in I}$

### 3.4 Æfing

Látum  $I$  vera óendanlegt teljanlegt mengi og  $(a_i)_{i \in I}$  vera fjölskyldu af tvinntölum.

(a) Gerið grein fyrir að summan  $\sum_{i \in I} a_i$  sé alsamleitinn þá og því aðeins að til sé rauntala  $K$ , sem hefur þann eiginleika að

$$\sum_{i \in F} |a_i| \leq K$$

fyrir sérhvert endanlegt hlutmengi  $F$  í  $I$ .

(b) Gerum ráð fyrir að summan  $\sum_{i \in I} a_i$  sé alsamleitinn og setjum  $A := \sum_{i \in I} a_i$ . Sýnið að fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  sé til endanlegt hlutmengi  $F$  í  $I$ , sem hefur þann eiginleika að

$$|\sum_{i \in J} a_i - A| < \varepsilon$$

fyrir sérhvert endanlegt hlutmengi  $J$  í  $I$  sem inniheldur  $F$ .

### 3.5 Setning

Tvinntalnasumma  $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n}$  er alsamleitinn þá og því aðeins að

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|) < \infty,$$

og sé svo þá gildir

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n})$$

### 3.6 Setning

Fyrir sérhverja fjölskyldu  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  í  $[0, \infty]$  gildir

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n})$$



# Vikublað 1

## Dæmi 1

Látum  $(x_n)$  vera runu í  $\mathbb{R}$  og  $M$  vera rauntölu. Sýnið að rauntalan  $M$  sé efra markgildi rununnar ef og aðeins ef hún hefur eftirfarandi eiginleika:

- Fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  gildir að mengið  $\{n \in \mathbb{N} | x_n \geq M + \varepsilon\}$  er endanlegt og mengið  $\{n \in \mathbb{N} | x_n \geq M - \varepsilon\}$  er óendanlegt.

Gerið síðan grein fyrir að neðra mark rununnar uppfylli sambærilegan eiginleika.

## Dæmi 2

Látum  $(a_n)$  og  $(b_n)$  vera runur í  $\mathbb{R}$  og gerum ráð fyrir að runan  $(b_n)$  sé samleitinn (í  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Gerið grein fyrir hvenær eftirfarandi jöfnur eru uppfylltar í þeim tilfellum þegar báðar hliðar hafa merkingu.

- (a)  $\liminf(a_n + b_n) = \liminf a_n + \lim b_n$  og  $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \lim b_n$   
(b)  $\liminf(a_n b_n) = (\liminf a_n)(\lim b_n)$  og  $\limsup(a_n b_n) = (\limsup a_n)(\lim b_n)$

## Dæmi 3

Látum  $(x_n)$  vera runu í  $\mathbb{R}$ . Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

- (a) Runan  $(x_n)$  er ekki takmörkuð að ofan ef og aðeins ef  $\limsup x_n = \infty$ .  
(b) Runan  $(x_n)$  stefnir á  $-\infty$  ef og aðeins ef  $\limsup x_n = -\infty$ .  
(c) Runan  $(x_n)$  er ekki takmörkuð að neðan ef og aðeins ef  $\liminf x_n = -\infty$ .  
(d) Runan  $(x_n)$  stefnir á  $\infty$  ef og aðeins ef  $\liminf x_n = \infty$ .

## Dæmi 4

Látum  $(c_n)$  vera runu í opna bilinu  $(0, \infty)$ . Gerið grein fyrir að eftirfarandi ójöfnur gilda.

$$\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf \sqrt[n]{c_n} \quad \text{og} \quad \limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

## Dæmi 5

Látum  $(z_n)_{n \geq 0}$  vera tvinntalnarunu. Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

- (a) Röðin  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  er alsamleitinn ef  $\limsup \sqrt[n]{z_n} < 1$

- (b) Röðin  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  er ósamleitin ef  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} > 1$
- (c) Ef  $\limsup \sqrt[n]{|z_n|} = 1$ , þá gæti röðin  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  verið hvort sem er samleitin eða ósamleitin.

### Dæmi 6

Látum  $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$  vera veldaröð (í tvinntölum) og setjum

$$\alpha := \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Sannið eftirfarandi fullyrðingar:

- (a) Ef  $\alpha = 0$ , þá er  $\infty$  samleitnigeisli raðarinnar.
- (b) Ef  $\alpha > 0$ , þá er  $\frac{1}{\alpha}$  samleitnigeisli raðarinnar.

### Dæmi 7

Látum  $(a_j)_{j \in J}$  vera fjölskyldu í  $[0, \infty]$  og  $\mathcal{S}$  tákna mengi allra talna af gerðinni  $\sum_{j \in F} a_j$ , þar sem  $F$  er hlutmengi í  $J$  sem hefur aðeins endanlega mörg stök. Setjum svo

$$\sum_{j \in J} a_j := \sup(\mathcal{S})$$

og segjum að fjölskyldan  $(a_j)_{j \in J}$  sé **samleggjanleg** ef  $\sum_{j \in J} a_j < \infty$ .

Sýnið: Ef fjölskyldan er samleggjanleg, þá er teljanlegt hlutmengi  $I$  í  $J$ , sem hefur þann eiginleika að  $a_j = 0$  fyrir öll  $j \in J \setminus I$ .

## Chapter 4

# Jordan-mælanleg mengi

- Látum  $a$  og  $b$  vera rauntölur sem uppfylla  $a \leq b$  og  $I$  vera bil (opið, hálfopið eða lokað) með endapunkta  $a$  og  $b$ . Þá setjum við  $|I| := b - a$  og köllum **lengd** bilsins  $I$ .
- Faldmengi  $d$  bila,  $B := I_1 \times \cdots \times I_d$  kallast **kassi í  $\mathbb{R}^d$**  eða  **$d$ -kassi**. Töluna

$$|B| := |I_1| \cdots |I_d|$$

köllum við  **$d$ -rúmmál** kassans  $B$ .

- Sammengi endanlega margra  $d$ -kassa köllum við **kassastæðu** (í  $\mathbb{R}^d$ ).
- 

### 4.1 Setning

Látum  $E$  og  $F$  vera kassastæður í  $\mathbb{R}^d$ . Þá eru mengin  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  og  $E \Delta F$  einnig kassastæður. Ennfremur er sérhvert mengi af gerðinni  $E + v$  kassastæða.

### Setning 3.1.2

Sérhver kassastæða í  $\mathbb{R}^d$  er sammengi endanlega margra innbyrðis sundurlægra  $d$ -kassa.

---

### 4.2 Setning

Látum  $B_1, \dots, B_k$  vera innbyrðis sundurlæga  $d$ -kassa og  $C_1, \dots, C_l$  vera innbyrðis sundurlæga  $d$ -kassa og gerum ráð fyrir að  $B_1 \cup \cdots \cup B_k = C_1 \cup \cdots \cup C_l$ . Þá gildir

$$|B_1| + \cdots + |B_k| = |C_1| + \cdots + |C_l|$$

---

### 4.3 Skilgreining

Látum  $E$  vera kassastæðu í  $\mathbb{R}^d$ . Þá er unnt að skrifa  $E = B_1 \cup \dots \cup B_k$  þar sem  $B_1, \dots, B_k$  eru innbyrðis sundurlægir  $d$ -kassar. Samkvæmt *setningu 3.1.3* er talan

$$m(E) := |B_1| + \dots + |B_k|$$

óháð valinu á innbyrðis sundurlægu kössunum og við köllum hana  $d$ -**rúmmál** kassastæðunnar  $E$ .

---

#### 4.3.1 Athugasemdir

- Fyrir sérhverja kassastæðu  $E$  gildir að  $m(E) \geq 0$
  - Tóamengið er kassastæða og  $m(\emptyset) = 0$
- 

### 4.4 Setning

Látum  $E$  og  $F$  vera kassastæður í  $\mathbb{R}^d$  og  $v \in \mathbb{R}^d$ . Þá gildir

- (i)  $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$  og jafnaðarmerkið gildir ef  $E \cap F = \emptyset$ .
  - (ii)  $m(E + v) = m(E)$ .
- 

### 4.5 Skilgreining

Látum  $X$  vera takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ .

- (i) Látum  $Jm_*(X)$  tákna efra mark mengis allra talna af gerðinni  $m(E)$ , þar sem  $E$  er kassastæða sem er innihaldin í  $X$ . Þessa tölu köllum við **Jordan-innanmál** mengisins  $X$ .
  - (ii) Látum  $Jm^*(X)$  tákna neðra mark mengis allra talna af gerðinni  $m(E)$ , þar sem  $E$  er kassastæða sem inniheldur  $X$ . Þessa tölu köllum við **Jordan-utanmál** mengisins  $X$ .
  - (iii) Við segjum að  $X$  sé **Jordan-mælanlegt** ef  $Jm^*(X) = Jm_*(X)$ . Ef svo er þá setjum við  $m(X) := Jm^*(X) = Jm_*(X)$  og segjum að  $m(X)$  sé **Jordan-mál** mengisins  $X$ .
- 

### 4.6 Setning

Látum  $E$  og  $F$  vera Jordan-mælanleg hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ . Þá gildir:

- (i) Mengin  $E \cup F$ ,  $E \cap F$ ,  $E \setminus F$  og  $E \Delta F$  eru Jordan-mælanleg.
- (ii)  $m(E) \geq 0$ .
- (iii) Ef  $E \cap F = \emptyset$ , þá  $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$
- (iv) Ef  $E \subset F$ , þá  $m(E) \leq m(F)$

$$(v) \ m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$$

(vi) Fyrir sérhvert  $v$  úr  $\mathbb{R}^d$  gildir að  $E + v$  er Jordan-mælanlegt og  $m(E + v) = m(E)$

---

## 4.7 Setning

Takmarkað hlutmengi  $E$  í  $\mathbb{R}^d$  er Jordan-mælanlegt ef og aðeins ef þaðar þess,  $\partial E$ , hefur Jordan-utanmál núll.

---

### 4.7.1 Athugasemd

Opin mengi í  $\mathbb{R}^d$  eru ekki öll Jordan-mælanleg. \*(Sjá dæmi 4 á vikublaði 3).

---



## Chapter 5

# Tröppuföll og heildi þeirra

Látum  $R$  vera kassa í  $\mathbb{R}^d$ . Safn af  $d$ -kössum  $B_1, \dots, B_k$ , sem eru innbyrðis sundurlægir og uppfylla  $R = B_1 \cup \dots \cup B_k$ , köllum **skiptingu** á  $R$  og segjum þá að  $B_1, \dots, B_k$  séu **kassar skiptingarinnar**. Skipting  $C_1, \dots, C_l$  á kassa  $R$  er sögn **finni en** skipting  $B_1, \dots, B_k$  á  $R$  ef fyrir sérhvert  $j$  er til  $i$  þannig að  $C_j \subseteq B_i$ .

---

### 5.1 Setning

Fyrir sérhverjar tvær skiptingar á kassa  $R$  er til skipting sem er finni en þær báðar.

---

Látum  $R$  vera kassa í  $\mathbb{R}^d$ . Við segjum að fall  $t : R \rightarrow \mathbb{R}$  sé **tröppufall** ef til er skipting  $R = B_1 \cup \dots \cup B_k$  sem hefur þann eiginleika að einskorðun  $t$  við  $B_j$  er fastafall fyrir sérhvert  $j$ . Þá er sagt að  $t$  sé **tröppufall með tilliti til skiptingarinnar**.

---

### 5.2 Setning

Látum  $t$  vera tröppufall með tilliti til skiptinga  $R = A_1 \cup \dots \cup A_l$  og  $R = B_1 \cup \dots \cup B_k$ . Látum  $a_i$  tákna (eina) gildið sem fallið  $t$  tekur í  $A_i$  og  $b_j$  tákna (eina) gildið sem fallið  $t$  tekur í  $B_j$ . Þá gildir

$$\sum_{i=1}^l a_i |A_i| = \sum_{j=1}^k b_j |B_j|$$

---

### 5.3 Setning

Látum  $t$  vera tröppufall á kassa  $R$  með tilliti til skiptingar  $R = B_1 \cup \dots \cup B_k$  og látum  $b_j$  tákna (eina) gildið sem fallið  $t$  tekur í  $B_j$ . Þá segjum við að

$$\int_R t := \sum_{j=1}^k b_j |B_j|$$

sé heildi fallsins  $t$  yfir  $R$

---



## Chapter 6

# Riemann-heildi (Darboux-útgáfan)

Látum  $R$  vera  $d$ -kassa og  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  vera fall. Látum  $\mathcal{S}$  vera mengi allra rauntalna af gerðinni  $\int_R s$ , þar sem  $s$  er tröppufall á  $R$ , sem uppfyllir  $s(x) \leq f(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $R$  og látum  $\mathcal{T}$  vera mengi allra rauntalna af gerðinni  $\int_R t$ , þar sem  $t$  er tröppufall á  $R$ , sem uppfyllir  $f(x) \leq t(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $R$ .

Setjum svo

$$\underline{\int_R} f := \sup \mathcal{S} \quad \text{og} \quad \overline{\int_R} f := \inf \mathcal{T}.$$

Við köllum fyrri töluna **undirheildi** fallsins  $f$  á  $R$  og seinni töluna **yfirheildi** fallsins  $f$  á  $R$ .

---

### 6.1 Skilgreining

Látum  $R$  vera  $d$ -kassa. Við segjum að fall  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  sé **Riemann-heildanlegt** ef það er takmarkað og

$$\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f.$$

Við segjum þá að talan

$$\int_R f := \underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$$

sé **heildi** fallsins  $f$  yfir  $R$ .

---

### 6.2 Skilgreining

Látum  $C$  vera takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$  og  $R$  vera  $d$ -kassa sem inniheldur  $C$ . Við segjum að fall  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  sé **Riemann-heildanlegt** ef fallið  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  sem skilgreint er með  $\tilde{f}(x) = f(x)$  fyrir  $x \in C$  og  $\tilde{f}(x) = 0$  fyrir  $x \in R \setminus C$ , er Riemann-heildanlegt. Við segjum þá að talan

$$\int_C f := \int_R \tilde{f}$$

sé **heildi** fallsins  $f$  yfir  $C$ .

---

### 6.3 Setning

Látum  $C$  vera takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$  og  $f$  og  $g$  vera Riemann-heildanleg föll á  $C$ , sem uppfylla  $f(x) \leq g(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $C$ . Þá gildir að

$$\int_C f \leq \int_C g.$$


---

### 6.4 Setning

Samfellt og takmarkað fall á Jordan-mælanlegu mengi er Riemann-heildanlegt.

---

# Vikublað 2

## Dæmi 1

Látum  $a$  og  $b$  vera rauntölur sem uppfylla  $a \leq b$  og  $I$  vera bil (opið, hálfopið eða lokað) með endapunkta  $a$  og  $b$ . Þá setjum við  $|I| := b - a$  og köllum **lengd** bilsins  $I$ .

Fjöldatölu mengis  $A$  táknum við  $\#A$  eða  $\#(A)$ .

Fyrir sérhverja náttúrulega tölu  $N > 0$  setjum við  $\frac{1}{N}\mathbb{Z} := \{\frac{k}{N} | k \in \mathbb{Z}\}$ .

Sýnið að um sérhvert bil  $I$  gildi

$$|I| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \left( I \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z} \right).$$

---

## Dæmi 2

Látum  $a$  og  $b$  vera rauntölur og  $I_1, \dots, I_k$  vera bil, sem þekja  $[a, b]$  (þ.e.a.s  $[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_k$ ). Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

(a)  $b - a \leq \sum_{j=1}^k |I_j|$ .

(b) Ef  $[a, b] = I_1 \cup \dots \cup I_k$  og  $\#(I_j \cap I_k) \leq 1$  fyrir  $j \neq k$ , þá gildir jafnaðarmerkið í ójöfnunni í lið (a).

---

## Dæmi 3

Látum  $(I_n)_{n \geq 1}$  vera runu af bilum sem þekja hálflínu. Sýnið að

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \infty.$$

---

## Dæmi 4

Faldmengi  $d$  bila,  $B := I_1 \times \dots \times I_d$ , kallast **kassi í  $\mathbb{R}^d$**  eða  $d$ -kassi. Töluna

$$|B| := |I_1| \dots |I_d|$$

köllum við **rúmmál** kassans B. Sýnið að um sérhvern kassa B í  $\mathbb{R}^d$  gildi

$$|B| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \# \left( B \cap \frac{1}{N} \mathbb{Z}^d \right)$$

þar sem  $\frac{1}{N} \mathbb{Z}^d := \{ \frac{1}{N} (k_1, \dots, k_d) | k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z} \}$ .

---

## Dæmi 5

Látum A og B vera hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ , sem hvort um sig er sammengi endanlega margra  $d$ -kassa. Sýnið að hið sama gildi þá einnig um hlutmengin  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  og  $A \Delta B$ .

---

## Dæmi 6

Fyrir sérhvert  $n \in \mathbb{N}$  skilgreinum við fall

$$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \frac{x\sqrt{n}}{(1+x^2)^n}.$$

Sannið eða hrekið eftirfarandi fullyrðingar.

(a) Runan  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  stefnir á núll fyrir sérhvert  $x$ .

(b) Runan  $(f_n)_{n \geq 1}$  stefnir í jöfnum mæli á núllfallið.

(c) Runan  $(\int_0^\infty f_n(x) dx)_{n \geq 1}$  stefnir á núll.

## Chapter 7

# Lebesgue-utanmálið

Fyrir hlutmengi  $A$  í  $\mathbb{R}^d$  látum við  $Z_A$  tákna mengi allra stærða af gerðinni  $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$  (í  $\overline{\mathbb{R}}$ ) þar sem  $(B_n)_{n \geq 1}$  er runa af  $d$ -kössum sem þekja  $A$ , þ.e.a.s.  $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} B_n$ .

---

### 7.1 Skilgreining

Látum  $A$  vera hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ . Þá kallast talan

$$m^*(A) := \inf Z_A$$

**Lebesgue-utanmál** mengisins  $A$ .

---

### 7.2 Setning

Lebesgue-utanmálið hefur eftirfarandi eiginleika

1.  $m^*(\emptyset) = 0$ .
2. Ef  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^d$ , þá er  $m^*(E) \leq m^*(F)$ .
3. Um sérhverja runu  $(E_n)_{n \geq 1}$  af hlutmengjum í  $\mathbb{R}^d$  gildir

$$m^*\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

4. Ytra mál hlutmengis í  $\mathbb{R}^d$  breytist ekki við hliðrun, m.ö.o. gildir um öll hlutmengi  $E$  í  $\mathbb{R}^d$  og öll  $v$  úr  $\mathbb{R}^d$  að

$$m^*(E + v) = m^*(E).$$

---

**Sönnun.**

- 1.
2. Augljóst þegar við tökum eftir því að sérhver þakning á  $F$  er þakning á  $E$ .
3. Gerum ráð fyrir að  $m_*(E_j) < \infty$  fyrir öll  $j$ , því annars er niðurstaðan augljós. Fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  gefur skilgreiningin á Lebesgue-utanmálinu okkur fyrir hvert  $j$  þakningu  $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$  með lokuðum kössum þannig að

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Þá er  $E \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} Q_{k,j}$  þakning á  $E$  með lokuðum kössum og því

$$\begin{aligned} m_*(E) &\leq \sum_{j,k} |Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (m_*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Þar sem ofangreint stens fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  er staðhæfingin sönnuð.

### 7.2.1 Setning

Látum  $E$  og  $F$  vera hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ , sem uppfylla  $d(E, F) > 0$ . Þá gildir

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F).$$

## 7.3 Setning

Látum  $E$  vera kassastæðu í  $\mathbb{R}^d$ . Þá er Lebesgue-utanmálið á  $E$  jafn Jordan-málinu á  $E$ , með öðrum orðum  $m^*(E) = m(E)$ .

Látum  $(B_i)_{i \in I}$  vera fjölskyldu af  $d$ -kössum, Við segjum að kassarnir í fjölskyldunni séu **næstum innbyrðis sundurlægir** ef  $\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) = \emptyset$  þegar  $i \neq j$ .

## 7.4 Setning

Látum  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vera runu af næstum innbyrðis sundurlægum  $d$ -kössum. Þá gildir

$$m^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n|.$$

---

## 7.5 Setning

Sérhvert opið mengi í  $\mathbb{R}^d$  er unnt að skrifa sem sammengi af teljanlega mörgum næstum innbyrðis sundurlægum kössum.

---

## 7.6 Setning

Látum  $E$  vera hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$  og  $\mathcal{U}$  vera mengi allra stærða af gerðinni  $m^*(U)$  í  $\overline{\mathbb{R}}$  þar sem  $U$  er opið mengi í  $\mathbb{R}^d$ , sem inniheldur  $E$ . Þá gildir

$$m^*(E) = \inf(\mathcal{U})$$





## Chapter 8

# Lebesgue-mælanleg mengi og Lebesgue-málið

### 8.1 Skilgreining

Látum  $E$  vera hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ .

(i) Við segjum að  $E$  sé **Lebesgue-mælanlegt** ef, fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$ , er til opið mengi  $U$  í  $\mathbb{R}^d$  sem uppfyllir skilyrðin

$$E \subseteq U \quad \text{og} \quad m^*(U \setminus E) \leq \varepsilon$$

(ii) Ef  $E$  er Lebesgue-mælanlegt, þá segjum við að stærðin  $m(E) := m^*(E)$  (í  $\mathbb{R}$ ) sé **Lebesgue-mál** mengisins  $E$ .

---

### 8.2 Setning

Sérhvert Jordan-mælanlegt mengi í  $\mathbb{R}^d$  er Lebesgue-mælanlegt og Jordan-mál þess er jafnt Lebesgue-máli þess.

---

### 8.3 Setning

(i) Öll opin mengi í  $\mathbb{R}^d$  eru Lebesgue-mælanleg.

(ii) Öll mengi í  $\mathbb{R}^d$ , sem hafa Lebesgue-utanmál núll, eru Lebesgue-mælanleg.

(iii) Ef  $(E_n)_{n \geq 1}$  er runa af Lebesgue-mælanlegum mengjum í  $\mathbb{R}^d$ , þá er sammengið  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  einnig Lebesgue-mælanlegt.

(iv) Fyllimengi sérhvers Lebesgue-mælanlegs mengis í  $\mathbb{R}^d$  er Lebesgue-mælanlegt.

(v) Ef  $(E_n)_{n \geq 1}$  er runa af Lebesgue-mælanlegum mengjum í  $\mathbb{R}^d$ , þá er sniðmengið  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  einnig Lebesgue-mælanlegt.

## 8.4 Setning

Látum  $(E_n)_{n \geq 1}$  vera runu af *innbyrðis sundurlægum* Lebesgue-mælanlegum mengjum í  $\mathbb{R}^d$ . Þá gildir

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

---

# Vikublað 3

## Dæmi 1

Látum  $I$  vera óendanlegt teljanlegt mengi og  $(a_i)_{i \in I}$  vera fjölskyldu af tvinntölum.

(a) Gerið grein fyrir að summan  $\sum_{i \in I} a_i$  sé alsamleitinn þá og því aðeins að til sé rauntala  $K$ , sem hefur þann eiginleika að

$$\sum_{i \in F} |a_i| \leq K$$

fyrir sérhvert endanlegt hlutmengi  $F$  í  $I$ .

**Lausn.** Gerum ráð fyrir að til sé slíkt  $K$  og sýnum að summan er alsamleitinn. Þar sem að  $I$  er teljanlega óendanlegt er til gagntækt fall  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ . Þá fæst fyrir sérhvert  $n \in \mathbb{N}$  að

$$\sum_{k=0}^n |a_{\sigma(k)}| \leq K.$$

Samkvæmt forsendu er markgildið  $n \rightarrow \infty$  til svo hlutsummurunin hefur markgildi. Þar með er runan alsamleitinn.

Gerum nú ráð fyrir að summan sé alsamleitinn og sýnum að til sé slíkt  $K$ . Aftur er til gagntækt fall  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ . Þar sem runan er alsamleitinn setjum við

$$K := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|.$$

Þar sem  $\sigma$  er gagntæk er þá

$$\sum_{i \in F} |a_i| = K - \sum_{i \in I \setminus F} |a_i| \leq K$$

---

(b) Gerum ráð fyrir að summan  $\sum_{i \in I} a_i$  sé alsamleitinn og setjum  $A := \sum_{i \in I} a_i$ . Sýnið að fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  sé til endanlegt hlutmengi  $F$  í  $I$ , sem hefur þann eiginleika að

$$\left| \sum_{i \in J} a_j - A \right| < \varepsilon$$

fyrir sérhvert endanlegt hlutmengi  $F$  í  $I$ .

**Lausn.** Eins og í fyrri til er til gagntækt fall  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ . Þar sem röðin er alsamleitin er hún sér í lagi skilorðslaust samleitin þannig að  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{\sigma(k)}$  fyrir öll skík  $\sigma$ . Þá er til  $n \in \mathbb{N}$  þannig að

$$\left| A - \sum_{k=0}^N a_{\sigma(k)} \right| < \varepsilon$$

fyrir öll  $N \geq n$ . En þá er einmitt  $\sigma(\{1, \dots, n\})$  slíkt hlutmengi.

---

## Dæmi 2

Látum  $E$  og  $F$  vera Jordan-mælanleg hlutmengi hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ . Gerið grein fyrir að  $E \Delta F$  sé líka Jordan-mælanlegt.

---

## Dæmi 3

Látum  $E$  vera takmarkað mengi í  $\mathbb{R}^d$  og látum samkvæmt venju  $\overline{E}$  tákna lokun þess og  $\text{int}(E)$  tákna innmengi þess.

- (a) Gerið grein fyrir að mengin  $\overline{E}$  og  $E$  hafi sama Jordan-utanmál.
  - (b) Gerið grein fyrir að mengin  $\text{int}(E)$  og  $E$  hafi sama Jordan-innanmál.
  - (c) Ályktið út frá (a) og (b) að  $E$  sé mælanlegt þá og því aðeins að jaðar þess,  $\partial E$ , hafi Jordan-utanmál núll.
  - (d) Finnið dæmi um takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$  sem er ekki Jordan-mælanlegt.
- 

## Dæmi 4

Gerið fyrst grein fyrir að til séu runur  $(a_n)_{n \geq 1}$  og  $(b_n)_{n \geq 1}$  í lokaða bilinu  $[0, 1]$ , sem uppfylla skilyrðin

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n) \quad \text{og} \quad \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) < 1$$

og setjið svo  $U := \bigcup_{n \geq 1} (a_n, b_n)$ . Sannið síðan eftirfarandi fullyrðingar.

- (a) Mengið  $[0, 1] \setminus U$  er jaðar mengisins  $U$  (í  $\mathbb{R}$ ).
  - (b) Mengið  $U$  er ekki Jordan-mælanlegt.
- 

## Dæmi 5

Látum  $C$  vera takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ . Gerið grein fyrir að kennifallið  $\mathbf{1}_C$  sé Riemann-heildanlegt þá og því aðeins að mengið  $C$  sé Jordan-mælanlegt.

---

## Dæmi 6

Látum  $f$  vera fall á  $d$ -kassa  $R$  og  $R = B_1 \cup \dots \cup B_k$  vera skiptingu. Sýnið fram á að fallið  $f$  sé Riemann-heildanlegt þá og því aðeins að einskorðun  $f$  við  $B_i$  sé Riemann-heildanleg fyrir öll  $i$  úr  $\{1, \dots, k\}$ . Sýnið enn fremur fram á að í því tilfalli gildi

$$\int_R f = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f_i$$

þar sem  $f_i$  táknar einskorðun fallsins  $f$  við  $B_i$ .

---

## Dæmi 7

Látum  $C$  vera takmarkað hlutmengi í  $\mathbb{R}^d$ ,  $f$  og  $g$  vera Riemann-heildanleg föll á  $C$  og  $a$  vera rauntölu. Sannið eftirfarandi fullyrðingar:

(a) Fallið  $af + g$  er heildanlegt og

$$\int_C (af + g) = a \int_C f + \int_C g.$$

(b) Fallið  $fg$  er heildanlegt.



## Chapter 9

# Mælanleg rúm og málrum

### 9.1 Skilgreining

Látum  $\Omega$  vera mengi og  $\mathcal{F}$  vera safn hlutmengja í  $\Omega$ . Þá er sagt að  $\mathcal{F}$  sé  **$\sigma$ -algebra** ef eftirfarandi skilyrði eru uppfyllt:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
2. Ef  $E \in \mathcal{F}$  þá  $E^c \in \mathcal{F}$ .
3. Ef  $(E_n)_{n \geq 1}$  er runa af mengjum í  $\mathcal{F}$ , þá er sammengið  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  einnig í  $\mathcal{F}$ .

Röðuð tvennd  $(\Omega, \mathcal{F})$  þar sem  $\Omega$  er mengi og  $\mathcal{F}$  er  $\sigma$ -algebra af hlutmengjum í  $\Omega$  kallast **mælanlegt rúm**.

---

### 9.2 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm. Fall  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  kallast **mál** (á  $\mathcal{F}$ ) ef það hefur eftirfarandi eiginleika:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Ef  $(E_n)_{n \geq 1}$  er runa af innbyrðist sundurlægum mengjum úr  $\mathcal{F}$  þá er

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Röðuð þrennd  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , þar sem  $(\Omega, \mathcal{F})$  er mælanlegt rúm og  $\mu$  er mál á  $\mathcal{F}$  kallast **málrum**.

---

Látum  $\mathcal{M}$  tákna safn allra Lebesgue-mælanlegra mengja í  $\mathbb{R}^d$ . *Setning 6.2.3* segir okkur meðal annars að  $\mathcal{M}$  sé  $\sigma$ -algebra (á  $\mathbb{R}^d$ ) og  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$  er því mælanlegt rúm.

Þar eð  $m(\emptyset) = 0$ , þá gildir samkvæmt *setningu 7.1.1* að fallið

$$m : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad E \rightarrow m(E)$$

er mál og þar með er  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m)$  málrum. Málið  $m$  er kallað **Lebesgue-málið** á  $\mathbb{R}^d$ .

---

### 9.3 Setning

Gerum ráð fyrir að  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sé málrúm.

1. Látum  $A_1, \dots, A_n$  vera innbyrðis sundurlæg mengu úr  $\mathcal{F}$ . Þá gildir

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

2. Ef  $A, B \in \mathcal{F}$  og  $A \subseteq B$ , þá gildir  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

3. Látum  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$  vera vaxandi runu í  $\mathcal{F}$ . Þá gildir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right).$$

4. Látum  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$  vera minnkandi runu í  $\mathcal{F}$  og gerum ennfremur ráð fyrir að  $\mu(B_1) < \infty$ . Þá gildir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right).$$

**Sönnun.**

---



---



# Chapter 10

## Fullkomin málrúm

### 10.1 Skilgreining

Málrúm  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  er sagt **fullkomið** ef það fullnægir eftirfarandi skilyrði:

- Fyrir sérhvert  $A \in \mathcal{F}$  þannig að  $\mu(A) = 0$  gildir að öll hlutmengi  $B$  í  $A$  tilheyra  $\mathcal{F}$  (og þar með  $\mu(B) = 0$ ).
- 

### 10.2 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og látum  $\mathcal{G}$  vera safn allra hlutmengja  $E$  í  $\Omega$  sem hafa þann eiginleika að til eru  $A$  og  $B$  úr  $\mathcal{F}$  sem uppfylla

$$A \subseteq E \subseteq B \quad \text{og} \quad \mu(B \setminus A) = 0.$$

Þá er  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -algebra á  $\Omega$ .

---

#### 10.2.1 Athugasemd

Við segjum að  $\mathcal{G}$  sé  $\mu$ -fullkonnun  $\sigma$ -algebrunnar  $\mathcal{F}$ .

---

### 10.3 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og látum  $\mathcal{G}$  vera  $\mu$ -fullkonnun  $\sigma$ -algebrunnar  $\mathcal{F}$ . Þá er til nákvæmlega eitt mál

$$\mu_c : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$$

sem framlengir málið  $\mu$ . Ennfremur gildir að málrúmið  $(\Omega, \mathcal{G}, \mu_c)$  er fullkomið.

### 10.3.1 Athugasemd

Málið  $\mu_c$  kallast **fullkomnun málsins**  $\mu$  og málrúmið  $(\Omega, \mathcal{G}, \mu_c)$  kallast **fullkomnun málrúmsins**  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

---

Látum  $\mathcal{B}$  tákna **Borel-algebruna** á  $\mathbb{R}^d$ , þ.e.a.s.  $\sigma$ -algebruna sem opnu mengin í  $\mathbb{R}^d$  framleiða.

---

## 10.4 Setning

$\mathcal{M}$  er  $m$ -fullkomnun  $\mathcal{B}$ .

---

## 10.5 Setning

$\mathcal{M}$  er stærsta  $\sigma$ -algebra á  $\mathbb{R}^d$ , sem fullnægur tveimur skilyrðum:

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$
  - Einskorðun  $m^*$  við  $\mathcal{M}$  er mál.
-

## Vikublað 4



# Chapter 11

## Líkindamál

### 11.1 Skilgreining

Málrúm  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  er kallað **líkindarúm** ef  $P(\Omega) = 1$ . Þá er sagt að  $P$  sé **líkindamál**.

Í líkindarúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  eru hlutmengin í  $\Omega$ , sem tilheyra  $\mathcal{F}$ , iðulega kölluð **atburðir**.

---

### 11.2 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vera líkindarúm,  $A, B \in \mathcal{F}$  og gerum ráð fyrir að  $P(B) > 0$ . Þá kallast talan

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

skilyrt líkindi  $A$  að uppfylltu  $B$ .

---

### 11.3 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vera líkindarúm. Við segjum að atburðir  $A$  og  $B$  úr  $\mathcal{F}$  séu **óháðir** ef

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

---

### 11.4 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vera líkindarúm og  $\mathcal{F}_1$  og  $\mathcal{F}_2$  vera tvær  $\sigma$ -algebrur, sem báðar eru innihaldnar í  $\mathcal{F}$ . Við segjum að  $\mathcal{F}_1$  og  $\mathcal{F}_2$  séu **óháðar** ef um öll  $A_1 \in \mathcal{F}_1$  og  $A_2 \in \mathcal{F}_2$  gildir

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$



# Chapter 12

## Mælanleg föll

### 12.1 Málvenja

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm. Sagt er að tiltekin fullyrðing um punktana í  $\Omega$  sé rétt **næstum alls staðar** (oft skammstafað **n.a.**) ef til er  $N \in \mathcal{F}$  sem hefur þá eiginleika að  $\mu(N) = 0$  og fullyrðingin er rétt varðandi alla punkta úr  $\Omega \setminus N$ .

---

### 12.2 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm. Fall  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  er sagt  **$\mathcal{F}$ -mælanlegt** (eða bara **mælanlegt** ef ekki er hætt á ruglingi) ef um sérhvert bil  $I$  í  $\mathbb{R}$  gildir að  $f^{-1}(I)$  sé mælanlegt.

Í því tilfelli þegar  $\Omega$  er Lebesgue-mælanlegt mengi í  $\mathbb{R}^d$  og  $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ , þá segjum við að slík föll séu **Lebesgue-mælanleg** og í tilfellinu þegar  $\Omega$  er Borel-mengi í  $\mathbb{R}$  og  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$  segjum við að slík föll séu **Borel-mælanleg** eða **Borel-föll**.

---

### 12.3 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm og  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild.

1. Fallið  $f$  er mælanlegt.
  2. Mengið  $f^{-1}((a, \infty))$  er mælanlegt fyrir sérhvert  $a$  úr  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .
  3. Mengið  $f^{-1}([a, \infty))$  er mælanlegt fyrir sérhvert  $a$  úr  $\mathbb{R}$ .
  4. Mengið  $f^{-1}((-\infty, a))$  er mælanlegt fyrir sérhvert  $a$  úr  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .
  5. Mengið  $f^{-1}((-\infty, a])$  er mælanlegt fyrir sérhvert  $a$  úr  $\mathbb{R}$ .
- 

**Sönnun.**

---

## 12.4 Setning

Látum  $f$  og  $g$  vera mælanleg föll á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vera samfelld fall. Þá er fallið

$$h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow F(f(x), g(x))$$

mælanlegt.

Sönnun.

## 12.5 Athugasemd

Fyrir raungilt fall á mengi  $X$  skilgreinum við föll  $f^+$  og  $f^-$  á  $X$  með því að setja

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{og} \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$

## 12.6 Setning

Látum  $f$  og  $g$  vera mælanleg föll á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $c$  vera rauntölu. Þá eru föllin

$$cf, \quad f^2, \quad f + g, \quad fg, \quad |f|, \quad f^+, \quad f^-$$

öll mælanleg.

Sönnun.

## 12.7 Setning

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $k$  vera náttúrulega tölu. Þá eru föllin

$$\max_{n \leq k} f_n, \quad \min_{n \leq k} f_n, \quad \sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

öll mælanleg.

Sönnun.



## 12.8 Setning

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $k$  vera náttúrulega tölu. Þá eru föllin

$$\max_{n \leq k} f_n, \quad \min_{n \leq k} f_n, \quad \sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

öll mælanleg.

Sönnun.

## 12.9 Setning

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og gerum ráð fyrir að runan stefni á fall  $f$  (í hverjum punkti). Þá er fallið  $f$  mælanlegt.

Sönnun.

## 12.10 Setning

Látum  $f$  og  $g$  vera föll á fullkomnu málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sem eru eins næstum alls staðar. Ef annað fallanna er mælanlegt, þá er hitt það líka.

Sönnun.

## 12.11 Setning

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á fullkomnu málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og  $f$  vera fall á  $\Omega$  sem hefur þann eiginleika að  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  næstum alls staðar. Þá er  $f$  mælanlegt fall.

Sönnun.

## 12.12 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm. Fall  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  er sagt  **$\mathcal{F}$ -mælanlegt** ef um allar rauntölur  $a$  gildir að mengið  $f^{-1}((a, \infty])$  er í  $\mathcal{F}$ .

### 12.13 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm. Fall  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  er mælanlegt ef og aðeins ef mengin  $f^{-1}(\infty)$  og  $f^{-1}(-\infty)$  eru bæði mælanleg og fallið  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sem skilgreint er með því að setja

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in f^{-1}(-\infty, \infty) \\ 0, & x \in f^{-1}(\{-\infty, \infty\}), \end{cases}$$

er mælanlegt.

---

**Sönnun.**

---

### 12.14 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vera mælanlegt fall. Stærðin

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{t \in \overline{\mathbb{R}} \mid f \leq t \text{ næstum alls staðar}\}$$

kallast **raunverulegt efra mark** fallsins  $f$  og talan

$$\operatorname{ess\,inf} f := \inf\{t \in \overline{\mathbb{R}} \mid f \geq t \text{ næstum alls staðar}\}$$

kallast **raunverulegt neðra mark** fallsins  $f$ .

---

### 12.15 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vera mælanleg föll.

(i) Ef  $f$  og  $g$  taka gildi sín í  $(-\infty, \infty]$ , þá gildir

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

(ii) Ef  $f$  og  $g$  taka gildi sín í  $[-\infty, \infty)$ , þá gildir

$$\operatorname{ess\,inf} f + \operatorname{ess\,inf} g \leq \operatorname{ess\,inf}(f + g).$$


---

**Sönnun.**

---

## Vikublað 5



## Chapter 13

# Slembibreytur á líkindarúmum

Mælanlegt fall á líkindarúmi er yfirleitt kallað **hending**, **slembibreyta** eða **slembistærð**.

### 13.1 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vera líkindarúm,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vera slembistærð og látum skv. venju  $\mathcal{B}$  tákna Borel-algebruna á  $\mathbb{R}$ . Þá er mengjasafnið

$$X^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(E) | E \in \mathcal{B}\}$$

$\sigma$ -algebra á  $\Omega$  og við segjum að slembistærðin  $X$  **framleiði** hana. Hún verður oftast táknuð  $\mathcal{F}_X$ .

### 13.2 Setning

Látum  $X$  vera slembistærð á líkindarúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Þá er fallið

$$P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty], \quad B \mapsto P(X^{-1}(B))$$

líkindamál á  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

Við segjum að líkindamálið  $P_X$  sé **líkindadreifingin** sem slembistærðin  $X$  ákvarðar.

### 13.3 Skilgreining

Við segjum að tvær slembistærðir á líkindarúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  séu **óháðar** ef  $\sigma$ -algebrurnar sem þær framleiða eru óháðar, m.ö.o., ef um öll Borel-mengi  $B$  og  $C$  í  $\mathbb{R}$  gildir

$$P(X^{-1}(B) \cap Y^{-1}(C)) = P(X^{-1}(B)) \cdot P(Y^{-1}(C))$$

### 13.4 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm. Fall  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  er sagt **einfalt** ef það er mælanlegt og tekur aðeins endanlega mörg gildi.

Sérhvert fall  $t$  á  $(\Omega, \mathcal{F})$  er hægt að setja fram sem

$$t = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$$

þar sem  $A_i \in \mathcal{F}$  fyrir öll  $i$ . Slík framsetning er kölluð **staðlaða framsetningin** á  $t$  ef  $a_i \neq a_j$  fyrir  $i \neq j$  og  $t^{-1}(a_i) = A_i$ .

### 13.5 Skilgreining

Látum  $t = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$  vera staðlaða framsetningu einfalds falls  $t$  á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og  $E \in \mathcal{F}$ . Þá kallast

$$\int_E t d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E)$$

**heildi** fallsins  $t$  yfir mengið  $E$  m.t.t. málsins  $\mu$ .

### 13.6 Æfing

Línulegar samantektir af einföldum föllum eru einföld föll.

---

### 13.7 Setning

Látum  $s$  og  $t$  vera einföld föll á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og  $c \in [0, \infty)$ . Þá gildir um öll  $E \in \mathcal{F}$ :

$$(i) \int_E c s d\mu = c \int_E s d\mu.$$

$$(ii) \int_E (s + t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu.$$

(iii) Ef  $s(x) \leq t(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $\Omega$ , þá er

$$\int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$$

### 13.8 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm og  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  vera mælanlegt fall. Þá er til runa  $(s_n)_{n \geq 1}$  af einföldum föllum á  $\Omega$  sem fullnægir eftirfarandi skilyrðum.

$$(i) 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \text{ fyrir öll } x \in \Omega.$$

## 13.9 Setning

Látum  $t \geq 0$  vera einfalt fall á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og skilgreinum fall  $\lambda : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  með því að setja

$$\lambda(E) := \int_E t d\mu.$$

Þá er  $\lambda$  mál á  $\mathcal{F}$ .





## Chapter 14

# Heildun jákvæðra falla

### 14.1 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  vera mælanlegt fall,  $E \in \mathcal{F}$  og  $Y(E, f)$  vera mengi allra talna af gerðinni  $\int_E t d\mu$  þar sem  $t$  er einfalt fall á málruminu, sem uppfyllir  $0 \leq t(x) \leq f(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $\Omega$ . Þá kallast

$$\int_E f d\mu := \sup Y(E, f)$$

**Lebesgue-heildi** fallsins  $f$  yfir mengið  $E$  m.t.t. málsins  $\mu$ .

---

### 14.2 Setning

Látum  $f$  og  $g$  vera mælanleg föll á málrumi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sem uppfylla  $0 \leq f \leq g$ , og  $E \subseteq F$  vera mælanleg mengi. Þá gildir:

1.  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$
  2.  $\int_E f d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbf{1}_E d\mu$
  3.  $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$
  4.  $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu, \quad \forall c \in \mathbb{R}_+$
  5. Fallið  $f$  er núll næstum alls staðar þá og því aðeins að  $\int_\Omega f d\mu = 0$
- 

**Sönnun.**

---

### 14.3 Setning [Um einhalla samleitni] (Lebesgue)

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera vaxandi runu af mælanlegum föllum á málrumi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sem taka gildi sín í  $[0, \infty]$ , og gerum ráð fyrir að runan stefni á fall  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Með öðrum orðum eru eftirfarandi skilyrði uppfyllt:

1.  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$  fyrir öll  $x$  úr  $\Omega$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  fyrir öll  $x$  úr  $\Omega$ .

Þá er  $f$  mælanlegt fall og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$


---

**Sönnun.**

---

## 14.4 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  vera mælanleg föll. Þá gildir

$$\int_{\Omega} (f + g) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} g d\mu$$


---

**Sönnun.**

---

## 14.5 Setning [Fatou]

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sem taka gildi sín í  $[0, \infty]$ . Þá gildir

$$\int_{\Omega} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$


---

**Sönnun.** Gerum ráð fyrir að  $0 \leq g \leq f$ , þar sem  $g$  er takmarkað fall með stoð á mengi  $E$  með endanlegt mál. Ef við setjum  $g_n(x) = \min(g(x), f_n(x))$ , þá er  $g_n$  mælanlegt á  $E$  og  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  næstum alls staðar, svo að

$$\int g_n \rightarrow \int g.$$

Samkvæmt skilgreiningu höfum við líka  $g_n \leq f_n$ , svo að  $\int g_n \leq \int f_n$ , og þar af leiðir

$$\int g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Með því að taka supremum yfir öll slík  $g$  er ójafnan sönnuð.

---

## 14.6 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  vera mælanlegt fall og skilgreinum fall

$$\lambda : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty], \quad E \rightarrow \int_E f d\mu$$

1. Fallið  $\lambda$  er mál á  $\mathcal{F}$ .
2. Ef  $\mu(E) = 0$ , þá er  $\lambda(E) = 0$ .

Mál  $\lambda$  á  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , sem fullnægir skilyrði (ii), er sagt vera **alsamfellt** með tilliti til  $\mu$ .

Sönnun.

---



---

## 14.7 Setning

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera vaxandi runu af föllum frá málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  inn í  $[0, \infty]$ , sem stefnir n.a. á mælanlegt fall  $f$ . Þá gildir

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

Sönnun.

---



---



# Vikublað 6

## Dæmi 1

Látum  $(\Omega, \mathcal{G}, \mu_c)$  vera fullkonnun málrúmsins  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Látum  $\mathcal{G}'$  vera  $\sigma$ -algebru á  $\Omega$  og  $\mu' : \mathcal{G}' \rightarrow [0, \infty]$  vera mál, sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

- Málrúmið  $(\Omega, \mathcal{G}', \mu')$  er fullkomið.
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}'$  og  $\mu'(E) = \mu(E)$  fyrir öll  $E$  úr  $\mathcal{F}$ .

Sýnið að  $\sigma$ -algebran  $\mathcal{G}$  sé innihaldin í  $\mathcal{G}'$  og  $\mu'(E) = \mu_c(E)$  fyrir öll  $E$  úr  $\mathcal{G}$ .

---

**Lausn.**

## Dæmi 2

Látum  $\mathcal{F}$  vera  $\sigma$ -algebru á  $\mathbb{R}^d$ , sem fullnægir eftirtöldum tveimur skilyrðum:

- Öll opin mengi í  $\mathbb{R}^d$  eru í  $\mathcal{F}$ .
- Einskorðun Lebesgue-utanmálsins  $m^*$  við  $\mathcal{F}$  er mál.

Sýnið að öll mengin í  $\mathcal{F}$  séu Lebesgue-mælanleg.

---

**Lausn.**

## Dæmi 3

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og  $A \in \mathcal{F}$ . Setjum

$$\mathcal{F}_A := \{A \cap E \mid E \in \mathcal{F}\}$$

og látum  $\mu_A : \mathcal{F}_A \rightarrow [0, \infty]$  vera einskorðun málsins  $\mu$ .

(a) Er  $\mathcal{F}_A$   $\sigma$ -algebra á  $\Omega$ ?

Ef  $A \neq \Omega$  þá er  $\Omega \notin \mathcal{F}_A$  og þá er  $\mathcal{F}_A$  ekki  $\sigma$ -algebra á  $\Omega$ .

(b) Er  $\mathcal{F}_A$   $\sigma$ -algebra á  $A$ ?

Augljóslega.

(c) Er  $\mu_A$  mál á  $(A, \mathcal{F}_A)$ ?

$\mu_A(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ . Ef  $B_m)_{m \in \mathbb{N}}$  er runa af innbyrðis sundurlægum mengjum úr  $\mathcal{F}_A$  þá gildir að  $\mu_A(\cup B_n) = \mu(\cup B_n) = \sum \mu = \sum \mu_A$

(d) Er fallið  $v : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $E \rightarrow \mu(E \cap A)$  mál á  $(\Omega, \mathcal{F})$ ?

$v(\emptyset) = \mu(0 \text{ sam } A) = 0$

En rruna af innb sund meng í F, þá

$v(\cup E_n) = \mu(A \text{ snið } \cup E_n) = \mu(\text{sam } (A \text{ snið } E_n)) = \text{sum } \mu(A \text{ snið } E) = \text{sum } v(E_n)$

JÁ!

## Dæmi 4

Látum A og B vera tvo óháða atburði í líkindarúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sýnið að  $\sigma$ -algebran sem  $\{A\}$  framleiðir og  $\sigma$ -algebran sem  $\{B\}$  framleiðir séu óháðar.

---

**Lausn.**

## Dæmi 5

Finnið dæmi um fall  $f$  á mælanlegu rúmi, sem er ekki mælanlegt, en hefur þann eiginleika þa föllin  $|f|$  og  $f^2$  eru bæði mælanleg.

---

**Lausn.**

## Dæmi 6

Látum  $h$  vera samfellt raungilt fall á bili I í  $\mathbb{R}$  og  $f$  vera mælanlegt fall á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$ , sem varpar  $\Omega$  inn í bilið I.

(a) Sýnið að samskeytingin  $h \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sé mælanlegt fall.

(b) Sýnið að um sérhvert mælanlegt fall  $f$  á tilteknu málrúmi gildi að föllin  $\log(|f|)$  og  $|f|^r$  séu mælanleg fyrir öll  $r > 0$ .

---

**Lausn.**

## Dæmi 7

Látum  $f$  vera mælanlegt fall á mælanlegu rúmi  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $C > 0$ . Sýnið að *afskorna* fallið  $f_C$ , sem skilgreint er með

$$f_C(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ef } |f(x)| \leq C \\ C & \text{ef } f(x) > C \\ -C & \text{ef } f(x) < -C, \end{cases}$$

sé mælanlegt.

**Skilgreining.** *Tvinngilt* fall á málrúmi er sagt **mælanlegt** ef bæði raunhluti þess og þverhluti eru mælanleg föll.

---

**Lausn.**

## Dæmi 8

(a) Látum  $f$  og  $g$  vera mælanleg tvinngild föll á tilteknu mælanlegu rúmi. Sýnið að föllin  $f + g$  og  $fg$  séu mælanleg.

(b) Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera samleitna runu af mælanlegum tvinngildum föllum á tilteknu málrúmi. Sýnið að markgildi rununnar sé mælanlegt fall.

---

**Lausn.**

## Dæmi 9

Sýnið að tvinngilt fall  $f$  á málrúmi sé mælanlegt þá og því aðeins að um öll opin mengi  $U$  í  $\mathbb{C}$  gildi að mengið  $f^{-1}(U)$  sé mælanlegt mengi.

---

**Lausn.**





## Chapter 15

# Heildanleg föll

### 15.1 Skilgreining

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og  $E \in \mathcal{F}$ . Við segjum að fall  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sé **heildanlegt á  $E$**  ef það er mælanlegt og  $\int_E f^+ d\mu < \infty$  og  $\int_E f^- d\mu < \infty$ . Þá kallast rauntalan

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

**heildi fallsins  $f$  yfir  $E$  m.t.t. málsins  $\mu$ .**

Mengi allra falla, sem eru heildanleg á  $E$ , verður táknad  $\mathcal{L}(E, \mu)$  eða bara  $\mathcal{L}^1$  ef ekki er hætt á ruglingi.

---

### 15.2 Setning

Látum  $f$  vera mælanlegt fall á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og  $E \in \mathcal{F}$ . Þá er  $f$  í  $\mathcal{L}^1(E, \mu)$  þá og því aðeins að fallið  $|f|$  sé í  $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ . Sé svo þá gildir einnig

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

---

**Sönnun.** Athugum að  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  ef og aðeins ef bæði föllin  $f^+$  og  $f^-$  eru heildanleg.

$$f = f^+ + f^-|f| = f^+ + f^-$$

Sjáum að  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  ef og aðeins ef  $|f| \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$ . Ef  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  þá er

$$\begin{aligned} \left| \int_E f d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right| \\ &\leq \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu \\ &= \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E |f| d\mu \end{aligned}$$

---

### 15.2.1 Athugasemd

1. Ef  $f$  er mælanlegt fall á  $(\Omega, \mathcal{F})$  og  $E \in \mathcal{F}$  og  $g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  þ.a.  $|f| \leq |g|$ , þá er  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  og  $\int_E |f| d\mu \leq \int_E |g| d\mu$ .
  2. Það getur gerst með Riemann-heildi að  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  er samleitið en  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  er ekki samleitið. Svona gerist ekki með Lebesgue-heildi því fall  $f$  er heildanlegt ef og aðeins ef  $|f|$  er heildanlegt (*innbyggð alsamleitni*).
- 

## 15.3 Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $E \in \mathcal{F}$ . Ef  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  og  $c \in \mathbb{R}$ , þá gildir:

1. Fallið  $cf$  er í  $\mathcal{L}^1(E, \mu)$  og  $\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$
2. Fallið  $f + g$  er í  $\mathcal{L}^1(E, \mu)$  og

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$


---

**Sönnun.**

1. Tilvikið  $c = 0$  er augljóst. **Gerum ráð fyrir að  $c > 0$ .** Þá er  $(cf)^+ = cf^+$  og  $(cf)^- = cf^-$ . \*12.3.2\*\* segir að ef  $g \geq 0$  þá  $\int_E (cg) d\mu = c \int_E g d\mu$ . Notum þetta

$$\begin{aligned} \int_E (cf) d\mu &= \int_E (cf)^+ d\mu - \int_E (cf)^- d\mu \\ &= \int_E cf^+ d\mu - \int_E cf^- d\mu \\ &= c \int_E f^+ d\mu - c \int_E f^- d\mu \\ &= c \left( \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right) \\ &= c \int_E f d\mu \end{aligned}$$

**Gerum nú ráð fyrir  $c < 0$ .** Þá er  $(cf)^+ = |c|f^-$  og  $(cf)^- = |c|f^+$ . Athugum að  $|c| = -c$ .

$$\begin{aligned} \int_E (cf) d\mu &= \int_E (cf)^+ d\mu - \int_E (cf)^- d\mu \\ &= \int_E |c|f^- d\mu - \int_E |c|f^+ d\mu \\ &= c \int_E f^- d\mu - c \int_E f^+ d\mu \\ &= c \int_E f^+ d\mu - c \int_E f^- d\mu \\ &= c \left( \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right) \\ &= c \int_E f d\mu \end{aligned}$$

**2.** Gefum okkur  $f, g \in \mathcal{L}^1(e, \mu)$ . Athugum að  $|f|, |g| \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$ . Þar sem  $f + g$  er mælanlegt,  $|f| + |g|$  er heildanlegt og  $|f + g| \leq |f| + |g|$  heildanlegt og því er  $f + g$  heildanlegt. **Ath.** Þarf ekki að gilda að  $(f + g)^+ = f^+ + g^+$ . Hinsvegar er  $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-) =$

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) d\mu &= \int_E (f^+ + g^+) d\mu - \int_E (f^- + g^-) d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E f^- d\mu - \int_E g^- d\mu, (\text{öll} \geq 0) \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \end{aligned}$$


---

## 15.4 Setning

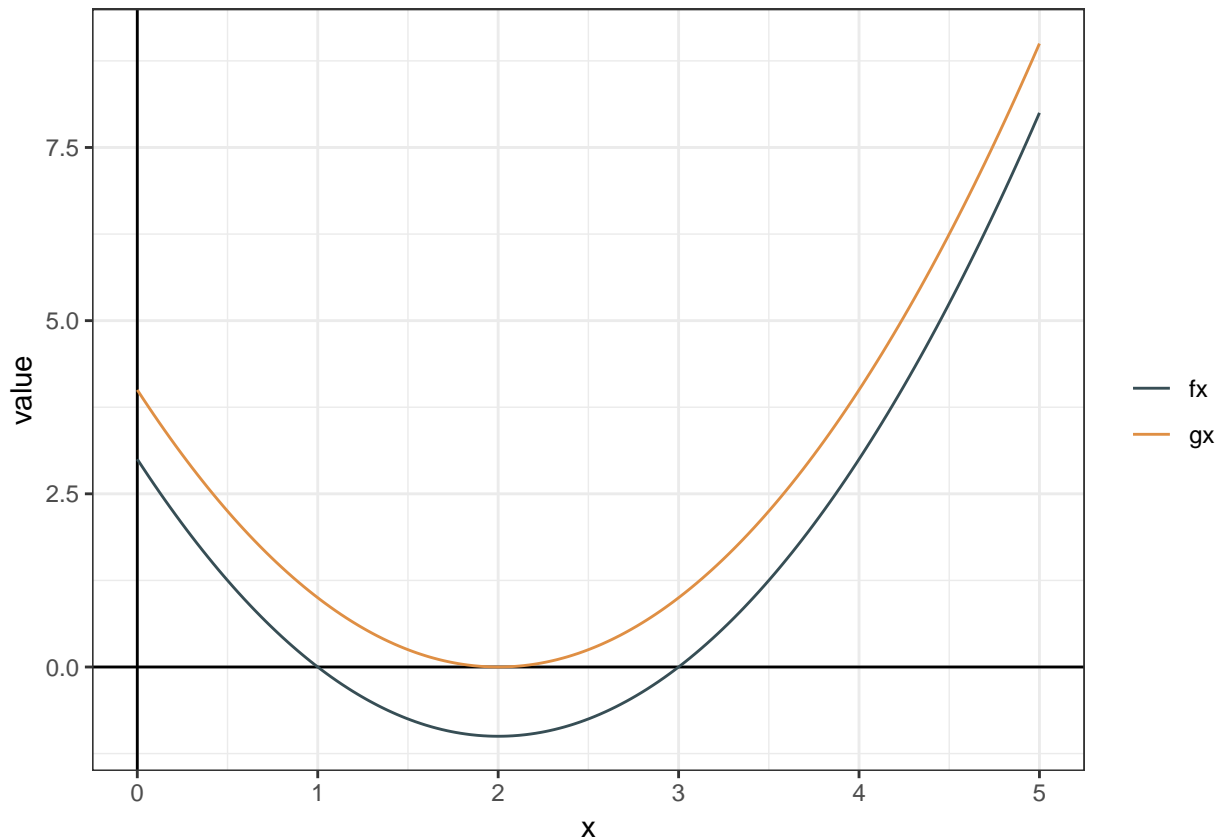
Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrúm og  $E \in \mathcal{F}$ . Ef  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  og  $f \leq g$ , þá gildir

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$$


---

**Sönnun.** Höfum séð að ef  $0 \leq f \leq g$  og  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  þá er  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ . Höfum núna bara forsendu  $f \leq g$  og  $f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$ . Ef  $f \leq g$  þá  $f^+ \leq g^+$  og  $g^- \leq f^-$ ,  $\int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu$ ,  $\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu$ .

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu = \int_E g d\mu$$



## 15.5 Setningin um yfirgnæfða samleitni

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og gerum ráð fyrir að hún stefni n.a. á mælanlegt fall  $f$ . Ef til er fall  $g$  úr  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , sem fullnægir skilyrðinu  $|f_n| \leq g$  fyrir öll  $n$ , þá er  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  og

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

**Sönnun.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  næstum alls staðar. Látum  $E$  vera mælanlegt mengi með mál 0 þ.a.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \setminus E$$

Með því að setja  $f_n = f_n \pi_{\Omega \setminus E}$  og  $f = f \pi_{\Omega \setminus E}$  getum við gert ráð fyrir að  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Heildin breytast ekki heldur. Athugum nú að  $|f_n| \leq g$  svo  $f + g \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g d\mu + \int_{\Omega} f d\mu &= \int_{\Omega} (g + f) d\mu \\ &= \int_{\Omega} (g + \liminf f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int_{\Omega} (g + f_n) d\mu \\ &= \liminf \left( \int_{\Omega} g d\mu + \int_{\Omega} f_n d\mu \right) \\ &= \int_{\Omega} g d\mu + \liminf \int_{\Omega} f_n d\mu \end{aligned}$$

Sjáum að

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} f_n d\mu$$

Athugum að  $g - f_n \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g d\mu - \int_{\Omega} f d\mu &= \int_{\Omega} (g - f) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \liminf (g - f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int_{\Omega} (g - f_n) d\mu \\ &= \int_{\Omega} g d\mu + \liminf \left( - \int_{\Omega} f_n d\mu \right) \\ &= \int_{\Omega} g d\mu - \limsup \int_{\Omega} f_n d\mu \end{aligned}$$

Sjáum að

$$\begin{aligned}
\limsup \int_{\Omega} f_n d\mu &\leq \int_{\Omega} f d\mu \\
\int_{\Omega} f d\mu &\leq \liminf \int_{\Omega} f_n d\mu \\
&\leq \limsup \int_{\Omega} f_n d\mu \\
&\leq \int_{\Omega} f d\mu
\end{aligned}$$

Sv0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$


---

## 15.6 Setning

Látum  $f$  vera Lebesgue-heildanlegt fall á  $\mathbb{R}^d$ . Þá gildir, fyrir sérhvert  $n$  úr  $\mathbb{N}^*$ , að föllin  $g_n := f \cdot \mathbf{1}_{\overline{B}_{(0,n)}}$  og  $h_n := \min\{f, n\}$  eru heildanleg og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - g_n| dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - h_n| dm = 0.$$


---

**Sönnun.** Setjum

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$$

þá er  $g$  mælanlegt,  $g(x) \in [0, \infty]$  og  $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  og  $g_n \rightarrow g$ . Setningin um einhalla samleitni segir

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n d\mu \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n |f_k| d\mu \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} |f_k| d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| d\mu
\end{aligned}$$

Því er  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  og  $E = g^{-1}(\infty)$  hefur mál 0. Svo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty, \quad \forall x \in \Omega \setminus E$$

Svo

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) \text{ samleitinn, } \forall x \in \Omega \setminus E f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x), & x \in \Omega \setminus E, \\ 0, & x \in E \end{cases}$$

Svo

$$|\sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x) = f(x), \text{ fyrir næstum öll } x$$

Svo  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  og

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\lim h_n) d\mu = \lim \int_{\Omega} h_n d\mu = \lim \int_{\Omega} \sum_{k=1}^n f_n d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$


---

## 15.7 Setning [Beppo Levi]

Látum  $(f_k)_{k \geq 1}$  vera runu af mælanlegum föllum á málrúmi  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  og gerum ráð fyrir að

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_k| d\mu < \infty.$$

Þá er röðin  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  samleitinn næstum alls staðar að heildanlegu falli  $f$  á  $\Omega$  og enn fremur gildir

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_k d\mu$$


---

**Sönnun.**

---

# Vikublað 7

## Dæmi 1

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vera mælanleg föll.

(a) Ef  $f$  og  $g$  taka gildi sín í  $(-\infty, \infty]$ , þá gildir

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

(b) Ef  $f$  og  $g$  taka gildi sín í  $[-\infty, \infty)$ , þá gildir

$$\operatorname{ess\,inf} f + \operatorname{ess\,inf} g \leq \operatorname{ess\,inf}(f + g)$$

**Ritháttur.** Látum  $\Omega$  vera mengi og  $\mathcal{F}$  vera safn hlutmengja í  $\Omega$ . Þá látum við  $\mathcal{F}^\sigma$  tákna  $\sigma$ -algebruna sem  $\mathcal{F}$  framleiðir.

Ef  $\Omega'$  er annað mengi,  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  er vörpun og  $\mathcal{G}$  er safn hlutmengja í  $\Omega'$ , þá setjum við

$$f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{G}\}.$$

---

## Dæmi 2

Látum  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  vera vörpun milli tveggja mengja. Sannið eftirfarandi fullyrðingar:

(a) Ef  $\mathcal{G}$  er  $\sigma$ -algebra á  $\Omega_2$ , þá er  $f^{-1}(\mathcal{G})$   $\sigma$ -algebra á  $\Omega_1$ .

- Þar sem að  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  er  $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{G})$ .
- Ef  $E \in f^{-1}(\mathcal{G})$  þá er til  $U \in \mathcal{G}$  þ.a.  $f^{-1}(U) = E$ . Þar sem  $\mathcal{G}$  er  $\sigma$ -algebra er þá  $U^c \in \mathcal{G}$ , svo við fáum  $f^{-1}(U^c) = E^c$  svo  $E^c \in f^{-1}(\mathcal{G})$ .
- Tökum þá loks runu  $(E_n)_{n \geq 1}$  af mengjum í  $f^{-1}(\mathcal{G})$ . Þá er til samsvarandi runa  $(U_n)_{n \geq 1}$  í  $\mathcal{G}$  þ.a.  $f^{-1}(U_n) = E_n$  fyrir öll  $n$ . Tökum eftir því að  $\mathcal{G}$  er  $\sigma$ -algebra og því er  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{G}$ . Þar sem frummynd falls dreifist yfir sammengi fáum við að  $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  svo  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in f^{-1}(\mathcal{G})$ .

Ofantalin atriði sýna að  $f^{-1}(\mathcal{G})$  sé  $\sigma$ -algebra.

(b) Ef  $\mathcal{F}$  er  $\sigma$ -algebra á  $\Omega_1$  þá er  $\mathcal{G} := \{E \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$   $\sigma$ -algebra á  $\Omega_2$

- Þar sem frummynd  $\emptyset$  er ávallt  $\emptyset$  og  $\emptyset \in \mathcal{F}$  fæst að  $\emptyset \in \mathcal{G}$ .
- Ef  $E \in \mathcal{G}$  þá er tilsamsvarandi  $U \in \mathcal{F}$  þ.a.  $f^{-1}(U) = E$ . Þar sem  $\mathcal{F}$  er  $\sigma$ -algebra er  $U^c \in \mathcal{F}$  og því  $f^{-1}(U^c) = E^c \in \mathcal{G}$ .
- Tökum runu  $(E_n)_{n \geq 1}$  af mengjum í  $\mathcal{G}$ . Til er samsvarandi runa  $(U_n)_{n \geq 1}$  af mengjum í  $\mathcal{F}$  þ.a.  $f^{-1}(U_n) = E_n$  fyrir öll  $n$ . Þar sem  $\mathcal{F}$  sé  $\sigma$ -algebra gildir  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{F}$  og þar sem frummynd dreifist yfir sammengi sjáum við að  $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  svo  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{G}$ .

Ofantalin atriði séna að  $\mathcal{G}$  sé  $\sigma$ -algebra.

(c) Ef  $\mathcal{G}$  er safn af hlutmengjum í  $\Omega_2$ , þá er  $(f^{-1}(\mathcal{G}))^\sigma = f^{-1}(\mathcal{G}^\sigma)$

Samkvæmt (a) er  $f^{-1}(\mathcal{G}^\sigma)$   $\sigma$ -algebra sem inniheldur nauðsynlega  $f^{-1}(\mathcal{G})$ . Því fæst að  $(f^{-1}(\mathcal{G}))^\sigma \subseteq f^{-1}(\mathcal{G}^\sigma)$ , svo okkur dugir að leiða út hlutmengjamerkið í öfuga átt. Nú gefur (b) að

$$\mathcal{H} := \{E \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(E) \in (f^{-1}(\mathcal{G}))^\sigma\}$$

sé  $\sigma$ -algebra í  $\Omega_2$ . Ef við tökum  $U \in \mathcal{G}$  þá er  $f^{-1}(U) \in f^{-1}(\mathcal{G})$  og þá sér í lagi í  $(f^{-1}(\mathcal{G}))^\sigma$ . Því fæst að  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ , en þar sem  $\mathcal{H}$  er  $\sigma$ -algebra er  $\mathcal{G}^\sigma \subseteq \mathcal{H}$ . Þar sem hlutmengjavenzl varðveitast yfir frummyndir er þá  $f^{-1}(\mathcal{G}^\sigma) \subseteq f^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq (f^{-1}(\mathcal{G}))^\sigma$ .

## Skilgreining

Látum  $(\Omega_1, \mathcal{F})$  og  $(\Omega_2, \mathcal{G})$  vera tvö mælanleg rúm. Við segjum að vörpun  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  sé **mælanleg** ef  $\varphi^{-1}(E) \in \mathcal{F}$  fyrir öll  $E \in \mathcal{G}$

## Dæmi 3

Látum  $(\Omega, \mathcal{F})$  vera mælanlegt rúm og  $f$  vera tvinngilt fall á  $\Omega$ . Sýnið að fallið  $f$  sé mælanlegt þá og því aðeins að  $f$  sé mælanleg vörpun frá  $(\Omega, \mathcal{F})$  til  $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ , þar sem  $\mathcal{B}$  táknar samkvæmt venju Borel-algebruna á  $\mathbb{C}$ .

## Dæmi 4

Sýnið að samskeyting endanlega margra mælanlegra varpana sé mælanleg vörpun.

## Dæmi 5

Látum  $(\Omega_1, \mathcal{F})$  og  $(\Omega_2, \mathcal{G})$  vera mælanleg rúm og  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  vera mælanlega vörpun. Sýnið að fyrir sérhvert mál  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  gildi að fallið

$$\varphi_*\mu : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty], \quad E \mapsto \mu(\varphi^{-1}(E))$$



sé mál. Við segjum að það sé **mynd vörpunarinnar**  $\varphi$  af málinu  $\mu$ .

- 
- $\varphi_*\mu(\emptyset) = \mu(\varphi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ .
  - Tökum runu  $(E_n)_{n \geq 1}$  af innbyrðis sundurlægum mengjum í  $\mathcal{G}$ . Þar sem frummynd dreifist yfir sammengi fæst

$$\mu\left(\varphi^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varphi^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_*\mu(E_n).$$

Ofangreind atriði sýna að  $\varphi_*\mu$  er mál.

---

## Dæmi 6

Látum  $(s_n)_{n \geq 1}$  og  $f$  vera eins og í setningu 12.2.4 og sönnun hennar og gerum ennfremur ráð fyrir að  $f$  sé takmarkað fall. Sýnið að runan  $(s_n)_{n \geq 1}$  stefni á  $f$  í jöfnum mæli á  $\Omega$ .

---

**Lausn.** Þar sem  $f$  er takmarkað er til  $M$  þ.a.  $\|f\| < M$ . Gefum okkur  $\varepsilon > 0$ . Við viljum sýna að til sé  $N \in \mathbb{N}$  þ.a.  $\|f - s_n\|_{\Omega} < \varepsilon$  fyrir öll  $n \geq N$ . Við erum búin að sanna að  $s_n \leq f$  fyrir öll  $n$  svo við þurfum í raun bara að sýna að  $f - s_N < \varepsilon$ . Fáum nú:

$$\begin{aligned} f - s_N &= f - n\mathbf{1}_{f^{-1}([n, \infty])} - \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})}) \\ &< (\|f\| - n)\mathbf{1}_{f^{-1}([n, \infty])} + \sum_{i=1}^{n2^n} \left(\frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n}\right) \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})}) \\ &< (M - n)\mathbf{1}_{f^{-1}([n, \infty])} - \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n})}) \\ &= (M - n)\mathbf{1}_{f^{-1}([n, \infty])} - \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([0, n])} \end{aligned}$$

Þar sem síðasta jafnaðarmerkið er vegna þess að summan er yfir kenniföll sundurlægra mengja. Þegar  $n > M$  fæst að  $\mathbf{1}_{f^{-1}([n, \infty])} = 0$  og ljóst er að  $\frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{f^{-1}([0, n])} \leq 1$  svo við fáum að fyrir nógu stór  $N$  sé  $f - s_N < 2^{-N}$  en þá er ljóst að  $f - s_N < \varepsilon$  fyrir nógu stór  $N$ .

---

## Dæmi 7

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $t = \sum_{k=1}^m b_k \mathbf{1}_{E_k}$  vera (ekki endilega staðlaða framsetningu) á einföldu falli á  $\Omega$ , þar sem  $E_k \in \mathcal{F}$  fyrir öll  $k$ . Sýnið að

$$\int_{\Omega} t d\mu = \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_k)$$


---

**Lausn.**

---

## Dæmi 8

Látum  $s$  og  $t$  vera einföld föll á málrúmi. Sýnið að föllin  $\min\{s, t\}$  og  $\max\{s, t\}$  séu líka einföld föll.

---

**Lausn.**

---

## Dæmi 9

Látum  $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ . Sýnið að fallið  $f$  sé mælanlegt á  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  þar sem  $\mu$  er talningarmálið, og um öll hlutmengi  $E$  í  $\mathbb{N}$  gildi

$$\int_E f d\mu = \sum_{n \in E} f(n).$$


---

**Lausn.**

---

## Dæmi 10

Bíl er ekið frá stað A til staðar B á 50 km meðalhraða, en fjarlægðin frá A til B er 25 km. Hann leggur af stað milli kl 12 og 13 (sama dag) og nemur staðar þegar hann kemur til B. Skilgreinum hendingu (slembibreytu, slembistærð)  $X$  á líkindarúminu  $([0, 1], P)$ , þar sem  $P$  táknar einskorðun Lebesgue-málsins við  $[0, 1]$ , með því að setja

$$X(t) := \text{Fjarlægð bílsins frá B kl 13 ef hann leggur af stað kl 12} + t.$$

Finnið líkindamálið  $P_X$ , sem hendingin  $X$  ákvarðar.

---

**Lausn.**

Sjáum að  $X$  varpar  $[0, \frac{1}{2}]$  í 0. Hins vegar fyrir  $[\frac{1}{2}, 1]$  varpar  $X$  gildinu  $t$  í  $25 - 50t$ . Því er  $X(t) = \max(0, 25 - 50t)$ . Ljóst er því að frummynd 0 hafi mál  $\frac{1}{2}$ , frummynd alls utan  $[0, 1]$  sé tóm, og allt í  $]0, 1]$  þjappast um helming við að frummynd sé tekin. Því fæst

$$P_X(B) = \frac{1}{2}m(B \cap ]0, 1]) + \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ef } 0 \in B \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

## Chapter 16

# Lebesgue-heildi og Riemann-heildi

### 16.1 Dæmi (Varúð!)

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  er núllmengi og einskorðun  $f$  við  $[0, 1] \setminus [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  er fastafallið 1. Hins vegar er fallið ekki Riemann-heildanlegt enda er það ósamfellt í öllum pkt. úr  $[0, 1]$ .

### 16.2 Setning

Látum  $B$  vera lokaðan (takmarkaðan) kassa í  $\mathbb{R}^d$ . Takmarkað fall  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  er Riemann-heildanlegt þá og því aðeins að það sé samfelst næstum alls staðar (þ.e.a.s. mengi þeirra punkta þar sem  $f$  er ósamfellt hefur mál núll). Sé svo þá er  $f$  Lebesgue-mælanlegt og Riemann-heildi þess er jafnt Lebesgue-heildinu.

---

**Sönnun.** Látum  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  vera takmarkað fall og  $E$  vera mengi allra ósamfelltupunkta þess. Fyrir sérhvert  $m$  látum við  $B = C_1^m \cup \dots \cup C_{l_m}^m$  vera skiptingu á  $B$  þ.a. skipting nr.  $m + 1$  sé finni en skipting nr.  $m$  og þ.a.  $\text{diam}(C_j^m) \leq \frac{1}{m}$ . Setjum  $M_j^m := \sup_{x \in C_j^m} f(x)$  og  $m_j^m := \inf_{x \in C_j^m} f(x)$ . Setjum svo  $t_n := \sum_{j=1}^{l_m} M_j^m \mathbf{1}_{C_j^m}$  og  $s_m := \sum_{j=1}^{l_m} m_j^m \mathbf{1}_{C_j^m}$ . Þá fæst  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq t_2 \leq t_1$ . Ljóst er að sérhvert tröppufallá  $B$  er Lebesgue-heildanlegt og Riemann-heildi þess er jafnt Lebesgue-heildinu.

Nú er  $f$  takmarkað svo að föllin  $s := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m$  og  $t := \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$  eru í  $\mathcal{L}^1(B, m)$  og  $\int_B s dm = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_B s_m dm$ ,  $\int_B t dm = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_B t_m dm$  skv setn um yfirgnæfða samleitni.

Ennfremur gildir að  $s \leq f \leq t$  og  $t(x) = s(x)$  ef  $o(f, x) = 0$ .

- G.r.f. að  $m(E) = 0$ . Þá er  $s(x) = f(x) = t(x)$  f.öll  $x \in B \setminus E$  svo að  $f$  er Lebesgue-mælanlegt skv. setn 11.1.2 vegna þess að  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m)$  er fullkomið málrúm. Þar eð  $f$  er takmarkað þá er það Lebesgue-heildanlegt og  $\int_B s dm = \int_B f dm = \int_B t dm$ , en það hefur í för með sér að  $f$  er Riemann-heildanlegt og jafnframt að  $\int_B f dm$  er Riemann-heildi  $f$  yfir  $B$ .
- Öfugt. G.r.f. að  $f$  sé Riemann-heildanlegt og sýnum að  $m(E) = 0$ . Við getum valið skiptingarnar þannig að  $\int_B s dm = \int_B t dm$  (gildir reyndar sjálfkrafa). Skv. vikublaði 8 gildir að  $E = \{x \in B \mid o(f, x) > 0\}$  og f. sérhv.  $\varepsilon > 0$  og  $E_\varepsilon = \{x \in B \mid o(f, x) \geq \varepsilon\}$  er lokað f.öll  $\varepsilon > 0$ . Þar eð  $E = E_1 \cup E_{\frac{1}{2}} \cup \dots$  þá nægir að sýna að  $m(E_{\frac{1}{n}}) = 0$  f.öll  $n \in \mathbb{N}^*$ . Látum  $n$  vera gefið og tökum  $\varepsilon > 0$ . Þá er til  $k$  svo

stórt að  $\int_B t_k dm - \int_B s_k dm < \frac{\varepsilon}{m}$ . Tökum eftir að  $B \setminus \bigcup_{j=1}^{l_k} \text{int}(C_j^k)$  er núllmengi svo að  $m(E_{\frac{1}{m}}) = m(E_{\frac{1}{m}} \cap (\bigcup_{j=1}^{l_k} \text{int}(C_j^k)))$ . En fyrir  $x$  úr  $\text{int}(C_j^k)$  gildir að  $t_k(x) - s_k(x) \geq o(f, x)$  svo við fáum:

$$\frac{1}{m} m(E_{\frac{1}{m}}) = \int_{E_{\frac{1}{m}}} \frac{1}{m} dm = \int_{E_{\frac{1}{m}} = m(E_{\frac{1}{m}} \cap (\bigcup_{j=1}^{l_k} \text{int}(C_j^k))} \frac{1}{m} dm \leq \int_{E_{\frac{1}{m}} = m(E_{\frac{1}{m}} \cap (\bigcup_{j=1}^{l_k} \text{int}(C_j^k))} (t_k - s_k) dm \leq \int_B t_k dm - \int_B s_k dm < \frac{\varepsilon}{m}$$

Þar sem  $\varepsilon > 0$  má vera hversu lítið sem vera skal þá er  $m(E_{\frac{1}{m}}) = 0$ .

### 16.3 Setning

Óeiginlegt Riemann-heildi falls, sem tekur gildi sín í  $[0, \infty)$ , er samleitið ef og aðeins ef fallið er Lebesgue-heildanlegt og í því tilfelli er Lebesgue-heildið markgildi óeiginlega heildisins.

**Sönnun.** Látum  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  og  $f : A \rightarrow [0, \infty[$ . Óeiginlegt Riemann-heildi  $f$  er samleitið ef til er vaxandi runa af Jordan-mælanlegum hlutmengjum (*yfirleitt af sérstakri gerð*) í  $A$  sem uppfylla að  $\bigcup A_m = A$  og  $f|_{A_m}$  er Riemann-heildanlegt og  $\lim \int_{A_m} f < \infty$ . Við fáum því

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_m} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_m} f dm \\ &= \lim \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_{A_m} dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_A dm \\ &= \int_A f dm \end{aligned}$$

Sér í lagi fáum við að samleitni Riemann-heildisins er óháð valinu á rununni  $(A_m)_{m \geq 1}$

### 16.4 Setning

Látum  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vera samfelld fall. Þá er  $f$  Lebesgue-heildanlegt á  $[a, b]$  og fallið

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{[a, x]} f dm$$

er diffranlegt og  $F' = f$ .

**Sönnun.**

## Chapter 17

# Nálganir Lebesgue-heildanleggra falla á $\mathbb{R}^d$

### 17.1 Setning

Látum  $f$  vera Lebesgue-heildanlegt fall á  $\mathbb{R}^d$  og  $\varepsilon > 0$ .

(i) Til er kassi  $A$  í  $\mathbb{R}^d$  og tröppufall  $t : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sem uppfyllir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - t| dm < \varepsilon$$

(Hér hefur fallið  $t$  verið framlengt með núlli yfir á allt  $\mathbb{R}^d$ ).

(ii) Til er samfelld fall  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  og  $d$ -kassi  $C$ , sem hafa eftirfarandi eiginleika

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - g| dm < \varepsilon \quad \text{og} \quad g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus C.$$

---

Sönnun.

---

### 17.2 Setning

Látum  $f$  vera í  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, m)$  og setjum, fyrir sérhvert  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$s_k := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{og} \quad c_k := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx.$$

Pá gildir  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ .

---

Sönnun.

---



## Chapter 18

# Heildun með stikabreytu

Í þessari grein tákna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  málrum og fall  $f : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sem hefur þann eiginleika að

$$f(-, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x, t)$$

er mælanlegt fyrir sérhvert  $t$ .

---

### 18.1 Setning

Gerum ráð fyrir að  $f$  fullnægi eftirfarandi skilyrðum

- Til er  $t_0 \in [a, b]$ , sem hefur þann eiginleika að

$$f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) \quad \text{fyrir öll } x \in \Omega.$$

- Til er  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  sem uppfyllir

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{fyrir öll } (x, t) \in \Omega \times [a, b].$$

Þá gildir  $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x) = \int_{\Omega} f(x, t_0) d\mu(x)$

---

**Sönnun.**

---

### 18.2 Setning

Gerum ráð fyrir að  $f$  fullnægi eftirfarandi skilyrðum:

- Fyrir sérhvert  $x$  úr  $\Omega$  er fallið  $t \rightarrow f(x, t)$  samfellt á  $[a, b]$ .
- Til er  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  sem uppfyllir

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{fyrir öll } (x, t) \in \Omega \times [a, b]$$

Þá gildir að fallið

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x)$$

er samfelld.

---

**Sönnun.**

---

### 18.3 Setning

Gerum ráð fyrir að  $f$  fullnægi eftirfarandi skilyrðum:

- Til er  $t_0 \in [a, b]$ , sem hefur þann eiginleika að  $f(-, t_0) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ .
- Hlutafléiðan  $\frac{\partial f}{\partial t}$  er til í sérhverjum punkti úr  $\Omega \times [a, b]$ .
- Til er  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  sem uppfyllir

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \text{fyrir öll } (x, t) \in \Omega \times [a, b].$$

Þá gildir að fallið  $F$ , sem skilgreint er í *setningu 16.2.2*, er diffranlegt og

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

---

**Sönnun.**

---

### 18.4 Setning

Gerum ráð fyrir að  $f$  fullnægi eftirfarandi skilyrðum:

- Fyrir sérhvert  $x$  úr  $\Omega$  er fallið  $t \rightarrow f(x, t)$  samfelld á  $[a, b]$ .
- Til er  $g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$  sem uppfyllir

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \text{fyrir öll } (x, t) \in \Omega \times [a, b].$$

Þá gildir

$$\int_a^b \left[ \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x) \right] dt = \int_{\Omega} \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x).$$


---



**Sönnun.**

---



## Vikublað 8



## Chapter 19

# Skrímslafræði

### 19.1 Valfrumsendan

Látum  $(A_i)_{i \in I}$  vera fjölskyldu af hlutmengjum í mengi  $X$ , þ.e.a.s. vörpun  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{P}(X)$ , og gerum ráð fyrir að mengin séu ekki tóm og innbyrðis sundurlæg. Þá er til vörpun  $f : I \rightarrow X$ , sem hefur þann eiginleika að  $f(i) \in A_i$  fyrir sérhvert  $i$  úr  $I$ .

---

### 19.2 Setning

Ekki eru öll hlutmengi í  $\mathbb{R}$  Lebesgue-mælanleg.

---

Sönnun.

---

### 19.3 Setning

Ekki eru öll Lebesgue-mælanleg hlutmengi í  $\mathbb{R}$  Borel-mælanleg.

---

Sönnun.

---

### 19.4 Setning

Til er Riemann-heildanlegt fall á lokuðu bili í  $\mathbb{R}$  sem er ekki Borel-mælanlegt.

---

Sönnun.

---



# Chapter 20

## $L^p$ -rúm

Í þessari grein verður gert ráð fyrir að mælanlegu föllin sem um ræðir séu *tvinngild* nema annað sé tekið fram.

### Upprifjun

Látum  $V$  vera vigurrúm (yfir  $\mathbb{R}$  eða  $\mathbb{C}$ ). Við segjum að raungilt fann  $N$  á  $V$  sé **norm** eða **staðall** á  $V$ , ef það uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

1.  $N(v) \geq 0$  fyrir öll  $v$  úr  $V$
2.  $N(v) = 0$  þá og því aðeins að  $v = 0$
3.  $N(cv) = |c|N(v)$  fyrir öll  $v$  úr  $V$  og allar tölur  $c$
4.  $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$  fyrir öll  $u$  og  $v$  úr  $V$

Sé skilyrði 2. sleppt kallsat  $N$  **hálfnorm** eða **hálfstaðall**.

---

### Setning

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum. Þá gerir venjuleg samlagning falla og margföldun þeirra með tölu mengið  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  að  $\mathbb{C}$ -vigurrúmi og fallið

$$N_\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \rightarrow \int_\Omega |f| d\mu$$

er hálfnorm.

---

### Sönnun.

1.  $|f| \geq 0$  svo  $\int_\Omega |f| d\mu \geq 0$
2.  $\int_\Omega |cf| d\mu = |c| \int_\Omega |f| d\mu$
3.  $|f + g| \leq |f| + |g|$  svo  $\int_\Omega |f + g| d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu + \int_\Omega |g| d\mu$

---

Skilgreinum vensl á  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  með því að segja að  $f$  sé  $\mu$ -**jafngilt**  $g$ , táknað  $f \sim_\mu g$ , ef  $f$  og  $g$  eru eins næstum alls staðar m.t.t.  $\mu$ .

## Æfing

Sýnið að  $\sim_\mu$  séu jafngildisvensl á  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ .

---

### Lausn.

1.  $f \sim_\mu f$  þar sem  $f = f$  alls staðar.
  2. Ef  $f \sim_\mu g$  þá er  $f = g$  næstum alls staðar og sömuleiðis  $g = f$  svo  $g \sim_\mu f$
  3. Ef  $f = g$  á mengi  $F_1 \in \Omega$  þ.a.  $\mu(\Omega \setminus F_1) = 0$  og  $g = h$  á mengi  $F_2 \in \Omega$  þ.a.  $\mu(\Omega \setminus F_2) = 0$  er  $f = h$  á menginu  $F_1 \cap F_2$  og  $\mu(\Omega \setminus (F_1 \cap F_2)) = 0$ .
- 

Setjum  $L^1(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \setminus \sim_\mu$  og táknum jafngildisflokk falls  $f$  úr  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  með  $[f]$ .

## Setning

Aðgerðirnar  $c[f] := [cf]$  og  $[f] + [g] := [f + g]$  eru vel skilgreindar á  $L^1(\Omega, \mu)$  og gera  $L^1(\Omega, \mu)$  að vigurrúmi. Jafnframt er fallið

$$\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \rightarrow \|[f]\|_1 := \int_{\Omega} |f| d\mu$$

vel skilgreint norm.

---

Við munum iðulega leyfa okkur að skrifa  $\|f\|_1$  í stað  $\|[f]\|_1$ .

## Uppfrifjun

Látum  $a$  og  $b$  vera úr  $[-\infty, \infty]$ . Raungilt fall  $\varphi$  á opna bilinu  $(a, b)$  er sagt **kúpt** ef um öll  $x, y \in (a, b)$  og öll  $\lambda \in [0, 1]$  gildir

$$\varphi[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y).$$

## Æfing

Látum  $a, b \in [-\infty, \infty]$ . Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

1. Fall  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  er kúpt þá og því aðeins að um allar rauntölur  $s, t$  og  $u$ , sem uppfylla  $a < s < t < u < b$ , gildi

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

2. Diffralegt fall á  $(a, b)$  er kúpt þá og því aðeins að afleiða þess sé vaxandi á  $(a, b)$ .
  3. Öll kúpt föll á  $(a, b)$  eru samfelld á  $(a, b)$ .
-



Lausn.

---

## Setning (Ójafna Jensens)

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum sem uppfyllir  $\mu(\Omega) = 1$ , þ.e. líkindarúm. Látum  $a, b \in [-\infty, \infty]$  og  $f : \Omega \rightarrow (a, b)$  vera heildanlegt fall. Þá gildir um sérhvert kúpt fall  $\varphi$  á  $(a, b)$  að

$$\varphi \left( \int_{\Omega} f d\mu \right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu.$$


---

Sönnun.

---

## Setning (Ójöfnur Hölders og Minkowski)

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $p$  og  $q$  vera tölur úr  $(1, \infty)$  sem uppfylla  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Um öll mælanleg föll  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  gilda þá jöfnurnar:

1.

$$\int_{\Omega} f g d\mu \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

og

2.

$$\left( \int_{\Omega} (f + g)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Fyrri ójafnan er kennd við **Hölder** og sú síðari við **Minkowski**.

---

**Sönnun.** Sönnunum fyrst hjálparsetningu: Ef  $x$  og  $y$  eru jákvæðar rauntölurog  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  þ.a.  $\alpha + \beta = 1$  gildir

$$x^{\alpha} y^{\beta} \leq \alpha x + \beta y$$

$x = 0$  er augljóts. Látum  $x > 0$  og skoðum  $f(t) = (1 - \beta) + \beta t - t^{\beta}$  fyrir  $t \geq 0$ . Við höfum  $f'(t) = \beta - \beta t^{\beta-1} = \beta(1 - t^{\beta-1})$  og þar sem  $0 < \beta < 1$  er  $f'(t) < 0$  á  $(0, 1)$  og  $f'(t) > 0$  á  $(1, \infty)$ . Höfum því að  $f$  er minnkandi á  $[0, 1]$  en vaxandi á  $[1, \infty)$ .  $f(1) = 0$  er því eina lágildi  $f$  á  $[0, \infty)$ , svo  $f(t) \geq 0$  fyrir  $t \geq 0$ . Setjum nú  $t = \frac{y}{x}$ . Þá gildir  $(1 - \beta) + \beta \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \geq 0$ , það er  $\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \leq \alpha + \beta \frac{y}{x}$ . Með því að skrifa  $x = x^{\alpha+\beta}$  fáum við að  $x^{\alpha+\beta} \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \leq \alpha x + \beta x \frac{y}{x}$ , svo að  $x^{\alpha} y^{\beta} \leq \alpha x + \beta y$ .

1. Ójafna Hölders:

**Skref 1.** Gerum ráð fyrir að  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Þurfum að sýna að  $\|fg\|_1 \leq 1$ . Notum hjálparsetninguna að ofan með  $\alpha = \frac{1}{p}$ ,  $\beta = \frac{1}{q}$ ,  $x = |f|^p$ ,  $y = |g|^q$ , og fáum

$$|fg| = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |g|^q.$$

Með því að heilda fáum við

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Skref 2.** Fyrir almenn  $f \in L^p$  og  $g \in L^q$  ritum við  $\|f\|_p = a$  og  $\|g\|_q = b$ . Skilgreinum svo föllin  $\tilde{f} = \frac{1}{a}f$  og  $\tilde{g} = \frac{1}{b}g$ . Þau uppfylla forsendur skrefs 1 að ofan svo  $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq \|\tilde{f}\|_p \|\tilde{g}\|_q$ , sem leiðir að

$$\frac{1}{ab} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{a} \|f\|_p \frac{1}{b} \|g\|_q$$

Margföldun með  $ab$  klárar svo sönnun.

## 2. Ójafna Minkowski

Gerum ráð fyrir að  $1 < p < \infty$ . Höfum

$$|f+g|^p = |(f+g)(f+g)^{p-1}| \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Með því að velja  $q$  þannig að  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , það er  $p+q = pq$ , fáum við

$$|f+g|^{(p-1)q} = |f+g|^p < \infty.$$

Því er  $(f+g)^{p-1} \in L^q$  og

$$\|(f+g)^{p-1}\|_q = \left( \int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beitum ójöfnu Hölders:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f+g|^p d\mu &\leq \int_{\Omega} |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= A \left( \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right), \end{aligned}$$

þar sem  $A = \left( \int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$ . Ef  $A = 0$  þá er  $\|f+g\|_p = 0$  og ekkert sem þarf að sanna. Gerum því ráð fyrir að  $A > 0$  og deilum með  $A$ :

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p &= \left( \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{A} \left( \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right) \\
&\leq \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p.
\end{aligned}$$


---

Við skilgreinum jafngildisvæðslu  $\sim_{\mu}$  eins og áður:  $f \sim_{\mu} g$  þá og því aðeins að  $f - g$  sé núll næstum alls staðar.

Fyrir sérhvert  $p \in [1, \infty)$  látum við  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  tákna mengi allra (tvinngildra) mælanlegra falla á  $\Omega$ , sem hafa þann eiginleika að  $f^p$  er í  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  og setjum

$$L^p(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) / \sim_{\mu}.$$

Jafngildisflokkur falls  $f$  úr  $L^p(\Omega, \mu)$  verður táknaður  $[f]$

## Upprifjun

Fyrir fall  $h : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  segjum við að

$$\text{ess sup } h := \inf \{c \mid h \leq c \text{ næstum alls staðar}\}$$

sé **raunverulegt efra mark**  $h$ .

---

## Skilgreining

Við segjum að (tvinngilt) fall  $f$  á  $\Omega$  sé **raunverulega takmarkað** ef  $\text{ess sup } |f| < \infty$ .

---

Látum  $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mu)$  tákna mengi allra (tvinngildra) mælanlegra falla á  $\Omega$ , sem eru raunverulega takmörkuð og setjum

$$L^{\infty}(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mu) / \sim_{\mu}.$$

Jafngildisflokkur falls  $f$  úr  $L^{\infty}(\Omega, \mu)$  verður táknaður  $[f]$ .

---

## Setning

Fyrir sérhvert  $1 \leq p \leq \infty$  eru aðgerðirnar  $c[f] := [cf]$  og  $[f] + [g] := [f + g]$  vel skilgreindar á  $L^p(\Omega, \mu)$  og gera  $L^p(\Omega, \mu)$  að vigurrúmi. Ennfremur gildir að fallið

$$\|\cdot\|_p : L^p(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \rightarrow \|[f]\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

er vel skilgreint norm þegar  $1 \leq p < \infty$  og fallið

$$\|\cdot\|_{\infty} : L^{\infty}(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [f] \rightarrow \|[f]\|_{\infty} := \text{ess sup } |f|$$

er vel skilgreint norm.

Sönnun.

## Setning

Gerum ráð fyrir að  $p$  og  $q$  séu úr  $[1, \infty]$  og uppfylli  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Þá gildir um öll  $f$  úr  $L^p(\Omega, \mu)$  og öll  $g$  úr  $L^q(\Omega, \mu)$  að  $fg \in L^1(\Omega, \mu)$  og

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Sönnun.

## Upprifjun

Ef  $(V, \|\cdot\|)$  er staðlað vigurrúm, þá er fallið

$$d : V \times V \rightarrow [0, \infty), \quad (x, y) \rightarrow \|x - y\|$$

firð á  $V$  og við lítum ávallt á  $V$  sem firðrúm með tilliti til þessarar firðar.

Runa  $(x_n)_{n \geq 1}$  í firðrúmi  $(X, d)$  er kölluð **Cauchy-runu** ef fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  er til  $N \in \mathbb{N}$  sem uppfyllir skilyrðið

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{fyrir öll } m, n \geq N.$$

Við segjum að firðrúmið  $(X, d)$  sé **fullkomið** ef sérhver Cauchy-runu í  $X$  er alsamleitinn.

Staðlað vigurrúm kallast **Banach-rúm** ef það er fullkomið (sem firðrúm).

## Æfingar

1. Cauchy-runna sem hefur samleitna hlutrunu er samleitin.
2. Hlutrúm í fullkomnu firðrúmi er fullkomið þá og því aðeins að það sé lokað.

Lausn.

## Setning

Látum  $1 \leq p \leq \infty$  og  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu í  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ , sem hefur þann eiginleika að  $([f_n])_{n \geq 1}$  er Cauchy-runna í  $L^p(\Omega)$ . Þá er til fall  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  og hlutruna  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  í  $(f_n)_{n \geq 1}$ , sem uppfylla skilyrðið

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \quad \text{fyrir næstum öll } x \in \Omega.$$

Sönnun.

## Setning

Firðrúmið  $L^p(\Omega, \mu)$  er fullkomið fyrir sérhvert  $p$  úr  $[1, \infty]$ .

Sönnun.

## Athugasemd

Setninguna má einnig orða svo að  $(L^p(\Omega, \mu), \|\cdot\|_p)$  sé Banach-rúm.

## Setning

Gerum ráð fyrir að  $\mu(\Omega) < \infty$ . Þá gildir  $L^q(\Omega, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \mu)$  þegar  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

Sönnun.

Við segjum að tvinngilt fall á  $\Omega$  sé **einfalt** ef það er mælanlegt og tekur bara endanlega mörg gildi.

Látum  $\mathcal{S}$  tákna vigurrúm allra einfaldra falla  $s$  á  $\Omega$ , sem uppfylla skilyrðið

$$\mu(\{x \in \Omega | s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Það er hlutrum í  $L^p(\Omega, \mu)$  fyrir öll  $p$ .

---

## Setning

Hlutrumið  $\mathcal{S}$  er þétt í  $L^p(\Omega, \mu)$  þegar  $1 \leq p < \infty$

---

**Sönnun.**

---

## Setning

Látum  $1 \leq p < \infty$  og  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, m)$ . Fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  er þá til lokað og takmarkað hlutmengi  $K$  í  $\mathbb{R}^d$  og samfelld fall  $g$ , sem er núll fyrir utan  $K$  og uppfyllir  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ .

---

**Sönnun.**

---

# Vikublað 9

## Dæmi 1

Sýnið að föllin  $f_n = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0,n]}$  stefni í jöfnum mæli á fallið  $f = 0$  á  $\mathbb{R}$  þegar  $n \rightarrow \infty$  og

$$\int_{\mathbb{R}} f dm \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm.$$

Hvernig lítur þessi niðurstaða út í ljósi setningar um einhalla samleitni, setningar Fatous og setningar um yfirgnæfða samleitni?

Gerið samskonar úttekt á rununni  $(g_n)_{n \geq 1}$  þar sem  $g_n := n \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ .

## Lausn

**f<sub>n</sub>.** Þar sem  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = n^{-1}$  liggur ljóst fyrir að  $f_n$  stefni í jöfnum mæli á 0 þegar  $n \rightarrow \infty$ . Þar sem  $f_n$  er einfalt fall fæst beint skv. skilgr. að  $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = \frac{1}{n}([0, n]) = 1$ . Því er markgildi þessara heilda ljóslega 1. Hins vegar er heildi  $f$  ljóslega 0 á  $\mathbb{R}$ . Þar sem runan  $(f_n)_{n \geq 1}$  er ekki vaxandi þá á reglan um einhalla samleitni ekki við. Setning Fatous gildir, enda er  $0 \leq 1$  eins og setningin spáir fyrir um. Til þess að beita setningunni um yfirgnæfða samleitni þyrfti að vera til  $h$  sem yfirgnæfir öll  $f$ . Það þyrfti þá að vera jafn a.m.k.  $n^{-1}$  á  $[n-1, n]$  fyrir öll  $n > 0$ . En þetta  $h$  er ekki í  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, m)$  því summan af  $n^{-1}$  frá  $n = 1$  upp í  $\infty$  er ekki samleitin.

**g<sub>n</sub>.** Þar sem sérhver punktur  $x \in \mathbb{R}$  liggur alltaf að lokum (eða alltaf) utan  $[n^{-1}, 2n^{-1}]$  stefnir  $g_n$  á núllfallið. Hins vegar stefnir  $g_n$  ekki á núllfallið í jöfnum mæli því  $\|g_n\|_{\mathbb{R}} = n$ . Þar sem  $g_n$  er einfalt fall fæst beint skv. skilgr. að  $\int_{\mathbb{R}} g_n dm = nm([n^{-1}, 2n^{-1}]) = 1$ . Því er markgildi þessara heilda ljóslega 1. Hins vegar er heildi  $g$  ljóslega 0 á  $\mathbb{R}$ . Þar sem runan  $(g_n)_{n \geq 1}$  er ekki vaxandi þá á reglan um einhalla samleitni ekki við. Setning Fatous gildir, enda er  $0 \leq 1$  eins og setningin spáir fyrir um. Til þess að beita setningunni um yfirgnæfða samleitni þyrfti að vera til  $h$  sem yfirgnæfir öll  $f$ . Það þyrfti þá að vera jafn a.m.k.  $n$  á  $[n^{-1}, 2n^{-1}]$  fyrir öll  $n > 0$ . En þetta  $h$  er ekki í  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, m)$  því summan af 1 frá  $n = 1$  upp í  $\infty$  er ekki samleitin.

---

## Dæmi 2

Sýnið fram á að samfelld og takmarkað fall á Jordan-mælanlegu mengi í  $\mathbb{R}^d$  sé Riemann-heildanlegt.

*VINSAMLEG ÁBENDING:* Dæmið gengur út á að sanna setningu 4.3.4 í fyrirlestrunum svo þið megið ekki nota hana.

**Lausn.** C, Jordan-mælanlegt mengi

$$f : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \text{ framlengt}$$

Tökum kassa  $R$  þ.a.  $C \subseteq R$ .  $\tilde{f}$  er heildanlegt á  $R$  þá og því aðeins að mengi þeirra punkta þar sem  $f$  er ósamfellt sé núllmengi (*setning 14.2.1*), en það mengi er innihaldið í  $\partial C$ , sem er núllmengi (*dæmi 3.3*).

## Dæmi 3

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum. Við segjum að fall  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sé **heildanlegt** ef raungildi föllin  $\operatorname{Re} f$  og  $\operatorname{Im} f$  eru bæði heildanleg og þá setjum við

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} \operatorname{Re} f d\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f d\mu.$$

Sýnið að tvinngilt fall  $f$  á  $\Omega$  sé heildanlegt þá og því aðeins að fallið  $|f|$  sé heildanlegt á  $\Omega$  og sé svo þá gildi

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

**Lausn.**

## Dæmi 4

Látum  $f$  vera stak í  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, m)$  og skilgreinum fall  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  með því að setja

$$\hat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) dm$$

Gerið grein fyrir að fallið  $\hat{f}$  sé samfellt í jöfnum mæli á  $\mathbb{R}$ .

**Lausn.**

## Upprífjun úr línulegri algebru

Látum  $e_1, \dots, e_d$  vera venjulega grunninn fyrir  $\mathbb{R}^d$ . Gagntæk línuleg vörpun  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  er samskeyting endanlega margra línulegra varpana sem hver um sig ákvarðast af einu eftirfarandi skilyrða:

- $L(e_i) = e_i$  ef  $i \neq j$ , og  $L(e_j) = ae_j$  þar sem  $a \in \mathbb{R}$ .
- $L(e_i) = e_i$  ef  $i \neq j$ , og  $L(e_j) = e_j + e_k$ .
- $L(e_i) = e_i$  ef  $i \notin \{j, k\}$ , og  $L(e_j) = e_k, L(e_k) = e_j$ .



## Dæmi 5

Látum  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera línulega vörpun, sem er af einni af þeim þremur gerðum sem lýst er í upprifjuninni hér að ofan, og  $B$  vera tening í  $\mathbb{R}^d$ .

1. Geri grein fyrir að  $T(B)$  sé Lebesgue-mælanlegt mengi.
2. Sýnið að

$$m(T(B)) = |\det(T)| |B|.$$

*Ábendingar:* Sannið fyrst niðurstöðuna fyrir  $B$  þegar núllpunkturinn er einn af hornpunktum  $B$ . Skoðið sérstaklega tilfellið  $d = 2$  og teiknið skýringamyndir.

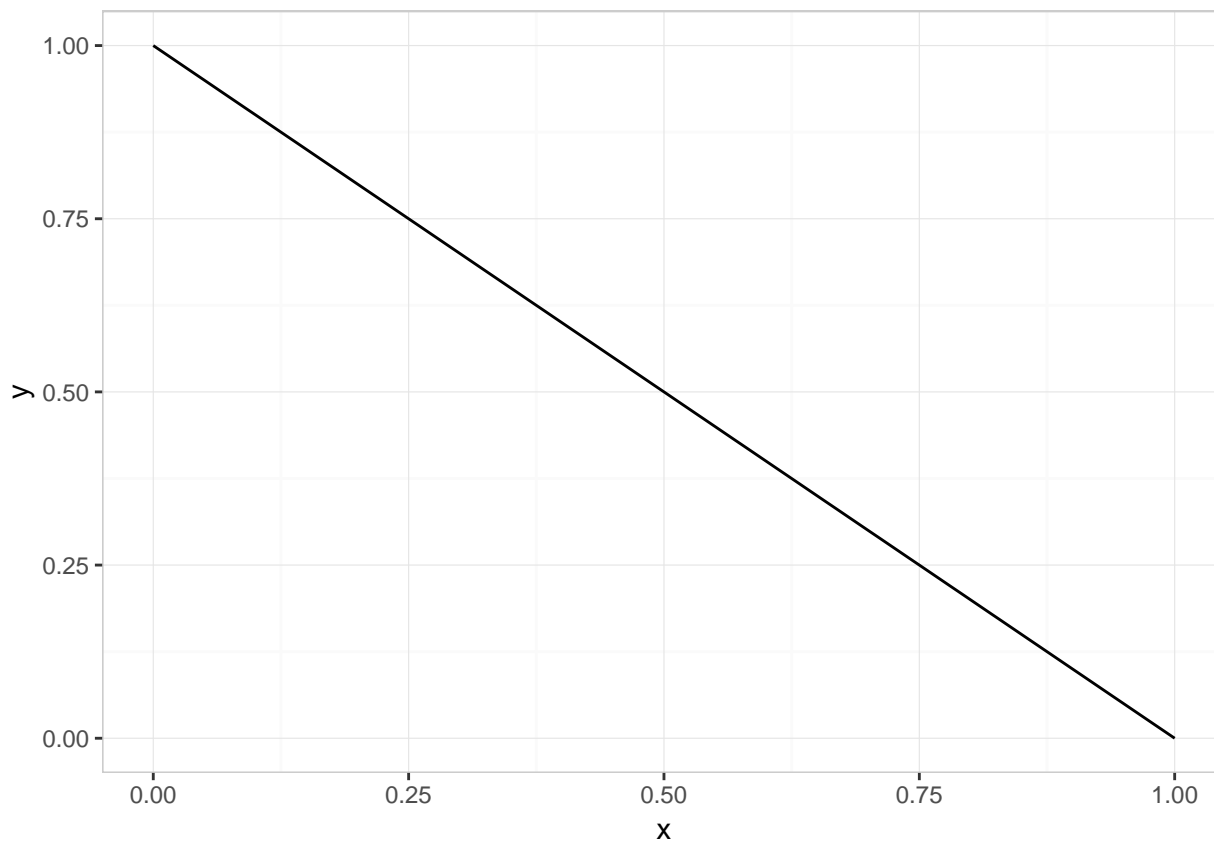
3. Gerið grein fyrir að  $T$  sé mælanleg vörpun frá  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$  til  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$ .
4. Látum  $T_*m$  tákna mynd vörpunarinnar  $T$  af Lebesgue-málinu  $m$ . Sýnið að

$$T_*m = \frac{1}{|\det T|} m.$$

### Lausn.

Athugið: Þríhyrningur í  $\mathbb{R}^2$  sem hefur tvær hliðar samsíða ásunum er Jordan-mælanlegur vegna þess að

```
tibble(x = seq(0, 1, 0.01),
  y = 1 - x) %>%
  ggplot(aes(x, y)) +
  geom_line()
```



1.  $\alpha)$   $m(T(B)) = |a|h^{d-1}$  þar sem  $h$  er brúnalengd teningsins.  $T(B)$  er kassi og þar með mælanlegt.

$\beta)$  Nóg að skoða  $j = 1, k = 2, d = 2$ .

$T(B)$  er sammengi tveggja mælanlegra mengja og þar með

$\gamma)$   $T(B) = B$  o.s.fr.

2.  $\alpha)$   $m(T(B)) = |T(B)| = |a|h^d = |\det T||B|$

$\beta)$  Ljóst að  $2 \cup (1 - e_2) = B$  og því  $m(T(B)) = m(B) = |B| = |\det T||B|$

$\gamma)$  Augljóst vegna  $|\det T| = |(-1)| = 1$

3. Ef  $U$  er opið í  $\mathbb{R}^d$  þá er  $T^{-1}(U)$  opið í  $\mathbb{R}^d$ . Auk þess eru öll opin mengi í  $\mathbb{R}^d$  af gerðinni  $T^{-1}(u)$  þar sem  $u$  er opið.

Látum  $\mathcal{O}$  tákna safn allra opinna menngja í  $\mathbb{R}^d$ . Þá er  $\mathcal{O}^\sigma = \mathcal{B}$ . Skv. ofansögðu er  $T^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$  og skv. dæmi 7.2 er  $T^{-1}(\mathcal{O}^\sigma) = (T^{-1}(\mathcal{O}))^\sigma = \mathcal{B}$ .

Munum: Sérhvert opið mengi er teljanlegt sammengi af næstum því innbyrðis sundurlægum teningum.

Sýnum: Ef  $E$  er núllmengi, þá er  $T^{-1}(E)$  núllmengi.

Sö: G.r.f. að  $m(E) = 0$  og gefið sé  $\varepsilon > 0$ . Veljum opið mengi  $u \supseteq E$  þ.a.  $m(u) < \varepsilon/|\det T^{-1}|$ . Skrifum  $u = \bigcup_{n \geq 1} B_n$  þar sem  $(B_n)_{n \geq 1}$  er runa af næstum innbyrðis sundurlægum kössum. Þá fæst að  $m(u) = \sum_{n \geq 1} |B_n|$  og  $T^{-1}(E) \subseteq T^{-1}(u) = \bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(B_n)$ . Af því leiðir að

$$m^*(T^{-1}(E)) \leq \sum_{n \geq 1} m(T^{-1}(B_n)) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\det T|} |B_n| < \varepsilon$$

Sýnum nú að  $T : (\mathbb{R}^d, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{M})$  sé mælanlegt. Ef  $E \in \mathcal{M}$ , þá veljum við  $A, C \in \mathcal{B}$  þ.a.  $A \subseteq E \subseteq C$  og  $m(C \setminus A) = 0$ . Þá er  $E = A \cup (E \setminus A)$  og því  $T^{-1}(E) = T^{-1}(A) \cup T^{-1}(E \setminus A)$  mælanlegt.

4. Ef  $u$  er opið þá skrifum við  $u = \bigcup_{n \geq 1} B_n$  þar sem  $B_n$  eru næstum innbyrðis sundurlægir teningar. Þá er  $u' = \bigcup \text{int}(B_n) \subseteq u$  og  $m(u') = m(u)$ . Af því leiðir að

$$T_*m(u) = m(T^{-1}(u)) = m\left(\bigcup_{n \geq 1} T^{-1}(\text{int} B_n)\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|\det T|} |B_n| = \frac{1}{|\det T|} m(u)$$

Ef  $E \in \mathcal{M}$  og  $\varepsilon > 0$  þá er  $m(E) = \inf\{m(u) | u \in \mathcal{O}, E \subseteq u\}$ .

$$T_*m(E) = m(T^{-1}(E)) = \inf\{m(w) | w \in \mathcal{O}, T^{-1}(E) \subseteq w\} = \inf\{m(T^{-1}(u)) | u \in \mathcal{O}, E \subseteq u\} = \frac{1}{|\det T|} \inf\{m(u) | u \in \mathcal{O}, E \subseteq u\}$$

## Dæmi 6

Látum  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  vera gagntæka línulega vörpun. Gerið grein fyrir að  $T$  sé mælanleg vörpuframt að

$$T_*m = \frac{1}{|\det T|} m.$$

Ályktið út frá því að fyrir sérhvert Lebesgue-mælanlegt mengi  $E$  í  $\mathbb{R}^d$  og sérhvert  $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$  gildi

$$\int_E f dm = \int_{T^{-1}(E)} (f \circ T) |\det(T)| dm.$$

Hvað er hægt að segja um málið  $T_*m$  ef ekki er gert ráð fyrir að  $T$  sé gæntæk?

---

**Lausn.**

---

## Dæmi 7

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  vera mælanlegt fall sem uppfyllir

$$0 < \int_{\Omega} f d\mu < \infty.$$

Sýnið að

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} n \log[1 + (f/n)^{\alpha}] d\mu = \begin{cases} \infty & \text{ef } 0 < \alpha < 1 \\ \int_{\Omega} f d\mu & \text{ef } \alpha = 1 \\ 0 & \text{ef } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$


---

**Lausn.**

*Upprifjun:* Notum skilgreininguna á afleiðu til að sýna:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{kn(1+at)}{t} = a, a \in \mathbb{R}$$

Af því leiðir að  $n^{\alpha} \ln(1 + \frac{a}{n^{\alpha}}) = \frac{\ln(1 + \frac{a}{n^{\alpha}})}{1/n^{\alpha}} \rightarrow a$ , þegar  $n \rightarrow \infty$  fyrir hvaða  $\alpha \in ]0, \infty[$  sem er. Af þessu leiðir að

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + (\frac{a}{n})^{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} n^{\alpha} \ln(1 + \frac{a^{\alpha}}{n^{\alpha}}), a \neq 0 = \begin{cases} 0, \alpha > 1 \\ a, \alpha = 1 \\ \infty, 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Setjum  $E = \Omega \setminus f^{-1}(\{0, \infty\})$ . Þá er  $\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$ .

Nú fæst:

$\alpha < 1$ :

$$\liminf_n \int_{\Omega} n \log(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) d\mu = \liminf_n \int_E n \log(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) d\mu \geq \int_E \liminf_n n \log(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) d\mu = \int_E \infty d\mu = \infty.$$

$\alpha = 1$ :

Tökum nú eftir að  $\ln(1+t) \leq t, \forall t > -1$ . Við fáum því að

$$n \ln(1 + (\frac{f}{n})) \leq f, \forall n$$

og setning um yfirgnæfða samleitni gefur þá

$$\lim_n \int_{\Omega} n \ln(1 + (\frac{f}{n})) d\mu = \int_E \lim_n n \ln(1 + (\frac{f}{n})) d\mu = \int_E f d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

$\alpha > 1$  : Setjum

$$g(x) = \frac{\ln(1 + x^{\alpha})}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, 0^+$$

Svo að til er  $M > 0$  þ.a.  $g(x) \leq M, \forall x$ . Af því leiðir að

$$\frac{\ln(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha})}{f/n} \leq M \rightarrow (f \neq 0) n \ln(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) \leq M \cdot f$$

Setningin um yfirgnæfða samleitni gefur þá:

$$\lim_n \int_E n \ln(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) d\mu = \int_E \lim_n n \ln(1 + (\frac{f}{n})^{\alpha}) d\mu = \int_E 0 d\mu = 0.$$


---

## Dæmi 8

Reiknið heildið

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\log x} dx$$

með því að beita setningu 16.2.3 á fallið

$$F(t) := \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x} dx$$


---

**Lausn.** Setjum

$$f(x, t) = \frac{x^1 - t}{\ln x}, (x, t) \in (0, 1) \times [0, 2].$$

Þá er

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| = x^t \leq 1$$

sem er teganlegt yfir bilið frá 0 uppí 1 svo við betum beitt diffrunarsetningu Hermanns til að fá:

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{1+t}.$$

En þá er

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\ln x} dx = F(2) = \int_0^2 F'(t) dt + F(0) = \ln 3$$


---

## Dæmi 9

Sérhverja tölu  $x \in [0, 1]$  er hægt að rita á nákvæmlega einn veg sem tvíundabrot  $x = 0, a_1 a_2 \dots$  samkvæmt viðteknum venjum. Sýnið að fyrir sérhvert  $n \geq 1$  sé fallið

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow a_n$$

mælanlegt.

---

**Lausn.** Nóg að sýna að  $a_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow a_n(x)$  sé þ.a.  $a_n^{-1}(0)$  sé mælanlegt. En þetta er bersýnilega sammengi af bilum. Bwahahaha!!

---



## Chapter 21

# Innfeldisrúm

### Upprifjun

Látum  $V$  vera  $\mathbb{K}$ -vigurrúm ( $\mathbb{K}$  annað hvort  $\mathbb{R}$  eða  $\mathbb{C}$ ). **Innfeldi** á  $V$  er fall

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

sem uppfyllir eftirtalin skilyrði

1.  $\langle x, x \rangle > 0$  ef  $x \neq 0$
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4.  $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$  fyrir allar tölur  $c$ .

Vigurrúm með gefnu innfeldi er nefnt **innfeldisrúm**.

---

### Setning

Látum  $V$  vera innfeldisrúm og setjum  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  fyrir öll  $x$  úr  $V$ . Þá gildir um öll  $x$  og  $y$  úr  $V$ :

1.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Fyrri ójafnan er kennd við Cauchy, Búnjakovskí og Schwartz, en sú síðari kallast þríhyrningsójafnan.

---

**Sönnun.**

---

Af ofangreindri setningu leiðir að fyrir sérhvert innfeldisrúm  $V$  er fallið  $V \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$  norm á  $V$ . Við köllum það **innfeldisnormið** á  $V$ .

Innfeldisrúm er kallað **Hilbert-rúm** ef það er fullkomið m.t.t. firðarinnar sem innfeldisnormið gefur af sér.

---

## Setning

Fyrir  $f$  og  $g$  úr  $L^2(\Omega, \mu)$  setjum við

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu.$$

Þá er  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  innfeldi á  $L^2(\Omega, \mu)$  sem gefur af sér normið  $\|\cdot\|_2$  og gerir  $L^2(\Omega, \mu)$  að Hilbert-rúmi.

---

**Sönnun.** Sýnum að  $L^2(\Omega, \mu)$  sé vigurrúm.

Setjum  $f, g \in L^2(\Omega, \mu)$ . Þar sem  $|f(x) + g(x)| \leq 2 \max(|f(x)|, |g(x)|)$  höfum við að

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq 4(|f(x)|^2 + |g(x)|^2),$$

og því

$$\int_{\Omega} |f + g|^2 d\mu \leq 4 \int_{\Omega} |f|^2 d\mu + 4 \int_{\Omega} |g|^2 d\mu < \infty$$

svo að  $f + g \in L^2(\Omega, \mu)$ . Augljóst er að ef  $a \in \mathbb{R}$  þá er  $af \in L^2(\Omega, \mu)$ . Því er  $L^2(\Omega, \mu)$  vigurrúm.

Sýnum svo að innfeldið sé vel skilgreint, þ.e. að  $f\bar{g} \in L^2(\Omega, \mu)$ .

Rifjum upp að fyrir  $A, B \geq 0$  gildir  $2AB \leq A^2 + B^2$  svo að

$$\int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \leq \frac{1}{2}(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Sýnum að innfeldið uppfylli skilyrðin fjögur.

1.  $\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} |f|^2 d\mu \geq 0$
2.  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu = \overline{\int_{\Omega} \bar{f} g d\mu} = \overline{\langle g, f \rangle}$
3.  $\langle f + h, g \rangle = \int_{\Omega} (f + h) \bar{g} d\mu = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu + \int_{\Omega} h \bar{g} d\mu = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$
4.  $\langle af, g \rangle = \int_{\Omega} af \bar{g} d\mu = a \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu = a \langle f, g \rangle$

Sýnum svo að  $L^2(\Omega, \mu)$  sé fullkomið í innfeldisnorminu.

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera Cauchy runu í  $L^2$ , og skoðum hlutrunu hennar,  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ , sem hefur þá eiginleika að

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 \leq 2^{-k}, \quad \text{fyrir öll } k \geq 1.$$

Setjum nú

$$g_k = \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_2, \quad g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_2.$$

Þríhyrningsójafnan gefur okkur að  $\|g_k\|_2 \leq \sum_{i=1}^k 2^{-i}$  og við beitum reglu Fatou á jákvæðu mælanlegu föllum  $g_k^2$  þannig að

$$\|g\|_2^2 = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^2 d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k^2 d\mu \leq 1.$$



Við sjáum að  $g$  er endanlegt næstum alls staðar og  $f_{n_1} + \sum_{i \geq 1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$  er alsamleitinn næstum alls staðar með markgildi  $f$ . Við þurfum nú að sýna að  $f \in L^2$ . Tökum fyrst eftir að  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$  næstum alls staðar, og fyrir gefið  $\varepsilon > 0$  getum við fundið  $N$  svo að  $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$  fyrir sérhver  $m, n \geq N$ . Beitum reglu Fatou á rununa  $(|f_{n_i} - f_m|^2)_{i \geq 1}$  og látum  $i \rightarrow \infty$ . Fáum

$$\int_{\Omega} |f - f_m| d\mu \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_i} - f_m|^2 d\mu \leq \varepsilon^2.$$

Fáum því að  $f - f_m \in L^2$  og þá  $f = f_m + (f - f_m) \in L^2$  auk þess að  $\|f - f_m\|_2 < \varepsilon$  fyrir öll  $m \geq N$ . Því gildir að  $f_m \rightarrow f$  í innfeldisnorminu svo að  $L^2(\Omega, \mu)$  er fullkomið.

## Setning

Látum  $V$  vera innfeldisrúm og  $v \in V$ . Þá eru föllin  $x \rightarrow \langle x, v \rangle$ ,  $x \rightarrow \langle v, x \rangle$  og  $x \rightarrow \|x\|$  samfelld á  $V$ .

Sönnun.

## Setning

Látum  $V$  vera innfeldisrúm. Þá gildir um öll  $x$  og  $y$  úr  $V$ :

1.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .
2.  $4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$ .

Fyrri jafnan er kölluð *samsíðungsregla* og sú síðari *skautunarjafna*.

Sönnun.

## Skilgreining

Við segjum að tveir vigrar  $x$  og  $y$  úr innfeldisrúmi séu **þverstæðir** eða **hornréttir** (hvor á annan) ef  $\langle x, y \rangle = 0$ . Þetta er stundum táknað  $x \perp y$ .

Látum  $X$  vera hlutmengi í innfeldisrúmi  $V$ . Setjum

$$X^\perp := \{v \in V \mid \langle v, x \rangle = 0, \forall x \in X\}$$

og köllum  $X^\perp$  **hornrétt fyllirúm**  $X$ .

Fljótséð er að  $X^\perp$  er lokað hlutvigurrúm í  $V$ .

## Æfing

Látum  $x$  og  $y$  vera þverstæða vigra í innfeldisrúmi. Sýnið að

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2.$$

Lausn.

## Setning

Látum  $K$  vera lokað hlutrúm í Hilbert-rúmi  $H$  og  $x \in H$ . Þá er til nákvæmlega einn vigur  $y$  úr  $K$ , sem fullnægir eftirfarandi jafngildum skilyrðum.

1.  $x - y \in K^\perp$
2.  $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \mid z \in K\}.$

Sönnun.

## Setning

Látum  $K$  vera lokað hlutrúm í Hilbert-rúmi  $H$ . Þá er hægt að skrifa sérhvern vigur  $x$  úr  $K$  á nákvæmlega einn veg sem  $x = x_1 + x_2$  þar sem  $x_1 \in K$  og  $x_2 \in K^\perp$ . Auk þess gildir að varpanirnar

$$P : H \rightarrow H, x \rightarrow x_1 \quad \text{og} \quad Q : H \rightarrow H, x \rightarrow x_2$$

eru línulegar og fullnægja skilyrðinu

$$\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2, \quad \text{fyrir öll } x \in H.$$

Sönnun.

## Skilgreining

Varpanirnar  $P$  og  $Q$  kallast **hornrétt ofanvörp** á  $K$  og  $K^\perp$ .

## Skilgreining

Línuleg vörpun af  $\mathbb{K}$ -vigurrúmi yfir í  $\mathbb{K}$  kallast **línulegt felli** (á vigurrúminu).

## Setning

Látum  $L$  vera *samfelld línulegt felli* á Hilbert-rúmi  $H$ . Þá er til nákvæmlega einn vigur  $y$  úr  $H$ , sem uppfyllir skilyrðið

$$L(x) = \langle x, y \rangle, \quad \text{fyrir öll } x \in H.$$

**Sönnun.**

---

---



# Vikublað 10

## Dæmi 1 (Skil)

Reiknið heildið

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin x} dx$$

með því að beita *setningu 17.1.1* á fallið

$$F(u) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(u \tan x)}{\tan x} dx.$$

## Lausn

Veljum bil  $[a, b] = [0, 1]$  og  $\Omega = [0, \pi/2]$  og skilgreinum fallið

$$f(x, t) = \arctan(t \tan(x)) \cot(x).$$

Tökum eftir að

$$\begin{aligned} f(x, 1) &= x \cot(x), \\ f(x, 0) &= 0 \quad \text{og} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= \frac{1}{t^2 \tan(x)^2 + 1} \\ &= \frac{\cos(x)^2}{(t^2 - 1) \sin(x)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Við sjáum að nefnarinn getur orðið núll þegar  $t = 0$ , en ef  $t$  er núll fæst að

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \frac{\cos(x)^2}{1 - \sin(x)^2} = \frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^2} = 1$$

svo hlutafleiðan er skilgreind á öllu  $\Omega \times [a, b]$ . Við hámarkum hlutafleiðuna með því að lágmarka nefnarann, svo hlutafleiðan er takmörkuð að ofan á okkar mengi. Öllum skilyrðum setningarinnar er þá uppfyllt og við fáum að

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^2 \tan(x)^2 + 1} dx.$$

Framkvæmum breytuskiptin  $u = \tan(x)$  og þá  $du = \cos(x)^{-2}dx$  Fáum þá

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t^2 \tan(x)^2 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{1}{(u^2 + 1)(t^2 u^2 + 1)} du.$$

Með stofnbrotaliðun fæst nú

$$\int_0^\infty \frac{1}{(u^2 + 1)(t^2 u^2 + 1)} du = \int_0^\infty \frac{t^2}{(t^2 - 1)(t^2 u^2 + 1)} du - \int_0^\infty \frac{1}{(t^2 - 1)(u^2 + 1)} du.$$

Nú þar sem  $t - in$  eru óháð heildinu má taka þau út fyrir þarf þá bara að reikna heildið

## Dæmi 2 (Skil)

Látum  $a, b \in ]-\infty, \infty[$ . Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

1. Fall  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  er kúpt þá og því aðeins að um allar rauntölur  $s, t, u$  sem uppfylla  $a < s < t < u$ , gildir

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

2. Diffralegt fall á  $(a, b)$  er kúpt þá og því aðeins að afleiða þess sé vaxandi á  $(a, b)$ .
3. Öll kúpt föll á  $(a, b)$  eru samfelld á  $(a, b)$ .

## Lausn

1. Setjum

$$F(x, y) := \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}.$$

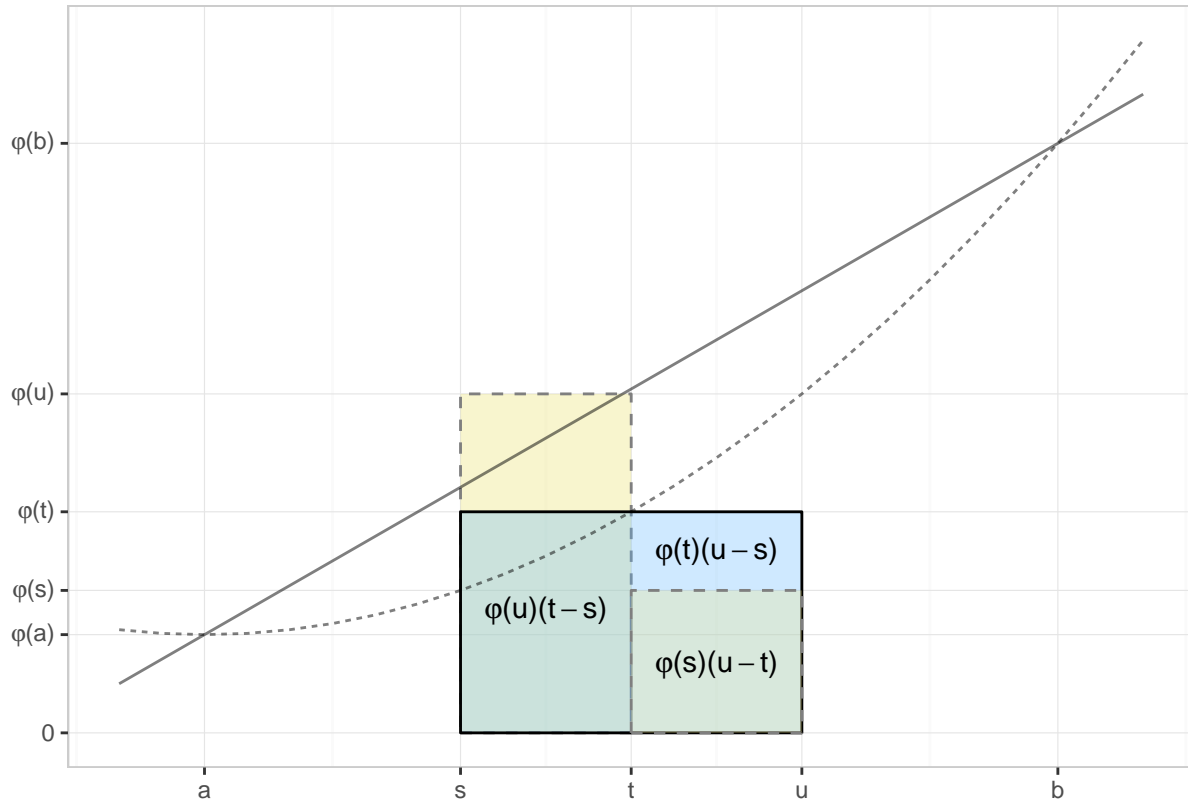
$F$  er þá hallatala striksins sem tengir saman tvo punkta  $(x, \varphi(x))$  og  $(y, \varphi(y))$ ,  $y > x$ , á ferli fallsins  $\varphi$ . Með því að skrifa ójöfnuna úr dæminu með fallinu  $F$  fæst

$$F(s, t) \leq F(u, t), \quad a < s < t < u < b.$$

Fullyrðingin heldur því fram að fall sé kúpt á bilinu  $[a, b]$  þá og því aðeins að halli þess minnki ekki á því bili. Við sjáum á myndinni að neðan að þetta samræmist því innsæi að bein lína milli tveggja punkta á ferli kúpts falls sé aldrei fyrir neðan ferilinn. Ef við umritum ójöfnuna fáum við líka

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} &\leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \\ \rightarrow (\varphi(t) - \varphi(s))(u - t) &\leq (\varphi(u) - \varphi(t))(t - s) \\ \rightarrow (u - t)\varphi(t) - (u - t)\varphi(s) &\leq (t - s)\varphi(u) - (t - s)\varphi(t) \\ \rightarrow (u - s)\varphi(t) &\leq (t - s)\varphi(u) + (u - t)\varphi(s). \end{aligned}$$

Þetta segir að fyrir kúpt full sé flatarmál kassa með hæð  $\varphi(t)$  og breidd  $(u - s)$  ekki stærri en samanlagt flatarmál tveggja kassa, annar með hæð og breidd  $\varphi(u)$  og  $(t - s)$ , og hinn  $\varphi(s)$  og  $(u - t)$ . Á myndinni að neðan má túlka þetta svo að blái kassinn er aldrei stærri en línustrikuðu kassarnir.



2. Fæst með því að að velja  $x, y \in (a, b), x > y$  og skoða ójöfnuna

$$F(x, x + \varepsilon) \leq F(y, y + \varepsilon), \quad x < x + \varepsilon \leq y < y + \varepsilon.$$

fyrir gefið  $\varepsilon > 0$ .

3. Allar tölur  $x \in (a, b)$  má skrifa á forminu  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$  þar sem  $\lambda \in (0, 1)$ . Fáum þá

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} &= \frac{\varphi(\lambda a + (1 - \lambda)b) - \varphi(a)}{\lambda a + (1 - \lambda)b - a} \\ &\leq \frac{\lambda \varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b) - \varphi(a)}{\lambda a + (1 - \lambda)b - a} \\ &= \frac{(\lambda - 1)\varphi(a) + (1 - \lambda)\varphi(b)}{(\lambda - 1)a + (1 - \lambda)b} \\ &= \frac{(1 - \lambda)(\varphi(b) - \varphi(a))}{(1 - \lambda)(b - a)} \\ &= \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} \end{aligned}$$

### Dæmi 3

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$ . Sýnið að fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  sé til  $\delta > 0$ , sem fullnægur eftirfarandi skilyrði:

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon \quad \text{fyrir öll } E \in \mathcal{F}, \text{ sem uppfylla } \mu(E) > \delta.$$

**Lausn**

---

### Dæmi 4

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum. Sýnið að sérhvert  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  fullnægi skilyrðinu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\mu(f^{-1}([x, \infty))) = 0.$$

Er mælanlegt fall á  $\Omega$  heildanlegt ef það uppfyllir umrætt skilyrði?

**Lausn**

---

### Dæmi 5 (Skil)

Sýnið með dæmi að niðurstaðan í *dæmi 8.11* sé ekki rétt ef skilyrðinu

$$\int_{\Omega} f d\mu < \infty$$

er sleppt.

**Lausn**

---

### Dæmi 6

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera málrum og  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ . Sannið eftirfarandi fullyrðingar.

1. Fyrir sérhverja rauntölu  $a > 0$  hefur mengið  $\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq a\}$  endanlegt mál.
2. Mengið  $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$  er teljanlegt sammengi mengja sem hvert um sig er mælanlegt og hefur endanlegt mál. (Slík mengi eru sögð hafa  **$\sigma$ -endanlegt** mál).



## Chapter 22

# Þverstaðlaðar fjölskyldur

Í þessari grein tákna  $H$  ávalt Hilbert-rúm.

### Skilgreining

Fjölskylda  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  í  $H$  er sögð **þverstöðluð** ef um öll  $\alpha$  og  $\beta$  úr  $A$  gildir

$$\langle u_\alpha, u_\beta \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ef } \alpha = \beta \\ 0, & \text{ef } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Hugtökin **þverstöðluð upptalning**, **þverstöðluð runa** og **þverstaðlað mengi** eru skilgreind á samsvarandi hátt.

### Setning

Látum  $u_1, \dots, u_k$  vera þverstaðlaða upptalningu í  $H$  og  $x = \sum_{j=1}^k c_j u_j$ . Þá gildir

1.  $c_j = \langle x, u_j \rangle$  fyrir öll  $j$  úr  $\{1, \dots, k\}$
2.  $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^k |c_j|^2$ .

Sönnun.

---

### Setning

Þverstaðlaðar fjölskyldur í Hilbert-rúmum eru línulega óháðar.

---

Sönnun.

---

## Setning

Látum  $(V, \|\cdot\|)$  vera staðlað rúm af endanlegri vídd.

1. Allar línulegar varpanir frá  $V$  inn í staðlað rúm eru samfelldar.
2.  $V$  er fullkomið firðrúm.

Sönnun.

---



---

## Setning

Látum  $u_1, \dots, u_k$  vera þverstaðlaða upptalningu í  $H$ . Látum  $K$  vera (lokaða) hlutrúmið sem hún spannar og  $P: H \rightarrow H$  tákna hornréttan ofanvarpið á  $K$ . Þá gildir um öll  $x$  úr  $H$ :

$$P(x) = \sum_{j=1}^k \langle x, u_j \rangle u_j.$$


---

Sönnun.

---



---

## Setning

Látum  $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$  vera þverstaðlaða fjölskyldu í  $H$ . Þá gildir um sérhvert endanlegt hlutmengi  $I$  í  $A$  og öll  $x$  úr  $H$ :

$$\sum_{\alpha \in I} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Ójafnan er yfirleitt kölluð **Bessel-ójafna**.

---

# Vikublað 11

## Dæmi 1 (Skil)

Látum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  vera líkindarúm og  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  vera heildanlegt fall. Setjum  $A := \int_{\Omega} h d\mu$ .

1. Sýnið að  $\sqrt{1+A^2} \leq \int_{\Omega} \sqrt{1+h^2} d\mu \leq 1+A$
2. Skoðum nú sértílfellið þegar  $\Omega$  er lokaða bilið  $[0, 1]$  með venjulega Lebesgue-málinu og gerum enn fremur ráð fyrir að  $h = f'$  þar sem  $f$  er samfelldt diffranlegt fall á  $[0, 1]$ . Túlkið ójöfnurnar í lið 1. út frá fallriti fallsins  $f$  og segið síðan til um hvenær jafnaðarmerki gildir í hvorri ójöfnu fyrir sig.

Lausn.

## Dæmi 2 (Skil)

Sýnið að fallið

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + |\log x|}$$

sé í  $L^p((0, \infty))$  þá og því aðeins að  $p > 2$ .

Sönnun.

## Dæmi 5 (Skil)

Látum  $(f_n)_{n \geq 1}$  vera runu af tvinngildum mælanlegum föllum á *takmörkuðu málrumi*  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  (þ.e.a.s.  $\mu(\Omega) < \infty$ ) og gerum ráð fyrir að hún stefni (í sérhverjum punkti) á fall  $f$ .

1. Sýnið að fyrir sérhvert  $\varepsilon > 0$  sé til  $E$  úr  $\mathcal{F}$  sem uppfyllir eftirtalin skilyrði:

- $\mu(\Omega \setminus E) < \varepsilon$
- $f_n \rightarrow f$  í jöfnum mæli á  $E$ .

*Ábending:* Setjið  $S(n, k) := \bigcap_{j < n} \{x \in \Omega : |f(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}\}$  og sýnið að fyrir sérhvert  $k$  gildi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S(n, k)) = \mu(\Omega)$

2. Sýnið með dæmi að niðurstaðan sé almennt ekki rétt fyrir ótakmörkuð málrum.

## Dæmi 8 (Skil)

Látum  $\lambda$  vera málið á  $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$  sem ákvarðast af  $\lambda(\{n\}) = \frac{1}{n^2}$  og setjum

$$f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \rightarrow \sqrt{n}.$$

Sýnið að  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{N}^*, \lambda)$  þá og því aðeins að  $1 \leq p < 2$ .

**Lausn.**

---

---