

TD 9 : Normalisation et dépendances

Dépendances fonctionnelles

2025-11-21

L3 MIAHS/Ingémath

Université Paris Cité

Année 2025

[Course Homepage](#)

[Moodle](#)



Définitions

Une *dépendance fonctionnelle* est une expression de la forme

$$A_1, A_2, \dots, A_k \rightarrow A_{k+1}, \dots, A_n$$

où $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ sont des attributs (colonnes) d'une base de données.

Elle signifie que deux tuples ayant la même valeur sur A_1, \dots, A_k doivent avoir la même valeur sur chaque colonnes A_{k+1}, \dots, A_n (en français : A_1, \dots, A_k *déterminent* A_{k+1}, \dots, A_n). On dit que les attributs A_{k+1}, \dots, A_n *dépendent fonctionnellement* de A_1, A_2, \dots, A_k .

La notion de dépendance est transitive : si $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ alors $A \rightarrow C$.

Un ensemble de dépendances fonctionnelles \mathcal{F} est *irréductible* si aucune dépendance ne peut être déduite des autres en utilisant les règles suivantes :

- trivialité : si $Y \subseteq X$ alors $X \rightarrow Y$
- augmentation : si $X \rightarrow Y$ alors $X, Z \rightarrow Y, Z$ pour toute suite d'attributs Z .
- transitivité : si $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow Z$ alors $X \rightarrow Z$
- union : si $X \rightarrow Y$ et $X \rightarrow Z$ alors $X \rightarrow Y, Z$
- décomposition/séparation si $X \rightarrow Y$ et $Z \subseteq Y$ alors $X \rightarrow Z$

La *clôture transitive* des attributs A_1, \dots, A_k pour un ensemble de dépendances fonctionnelles \mathcal{F} est l'ensemble des attributs B_1, \dots, B_ℓ qui dépendent fonctionnellement de A_1, \dots, A_k .

On la note

$$[A_1, \dots, A_k]_{\mathcal{F}}^+$$

en oubliant \mathcal{F} si le contexte est clair.

Un ensemble d'attributs A_1, \dots, A_k est une *super-clé pour une relation* $R(B_1, \dots, B_\ell)$ si ce sont des attributs de R et si sa clôture transitive contient B_1, \dots, B_ℓ . C'est une clé si elle est minimale, c'est-à-dire, aucun sous-ensemble strict de cette super-clé n'est une clé.

Un schéma est en :

- FN₃ si pour toute dépendance fonctionnelle non triviale, le membre de gauche contient une clef ou tout attribut du membre de droit appartient à une clef.
- FNBC si pour toute dépendance fonctionnelle non triviale, le membre de gauche contient une clef.

Un schéma et un ensemble de dépendances fonctionnelles peut se *décomposer* en une collection de schémas, dans le sens où chaque relation R peut se décomposer en R_1, \dots, R_k tels que $R_i = \pi_i(R)$ pour une certaine projection π_i .

On dit cette décomposition *sans perte d'information* si toute relation R du schéma d'origine peut être retrouvée à partir des relations $R_1, \dots, R_k : R = \pi_1(R) \bowtie \dots \bowtie \pi_k(R)$.

On dit que cette décomposition *respecte les dépendances fonctionnelles* si celles-ci sont toujours satisfaites par la nouvelle décomposition.

Exercice

Soit une relation concernant des personnes en France avec les attributs suivants~ :

Nom, Numéro de sécurité sociale, Commune, Département, Code postal, Numéro de téléphone

Quelles sont les dépendances fonctionnelles censées être satisfaites ?

Exercice

Soit un schéma d'attributs A_1, A_2, \dots, A_n et un ensemble de dépendances fonctionnelles. Calculer le nombre de super-clefs (en fonction de n) dans les cas suivants~ :

- La seule clef est $\{A_1\}$.
- Les seules clefs sont $\{A_1\}$ et $\{A_2\}$.
- Les seules clefs sont $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_3, A_4\}$.
- Les seules clefs sont $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_1, A_3\}$.

Exercice

Soit le schéma $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$ et l'ensemble de dépendances fonctionnelles

$$\Sigma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

- Quelle est la fermeture $\{A\}^+$ de $\{A\}$?
- Quelles sont les super-clés ? Les clés ?

Exercice

Soit le schéma $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F\}$ et l'ensemble de dépendances fonctionnelles

$$\Sigma = \left\{ \{A, B\} \rightarrow C, \{B, C\} \rightarrow \{A, D\}, D \rightarrow E, \{C, F\} \rightarrow B \right\}$$

- Calculer la fermeture $\{A, B\}^+$ de $\{A, B\}$.
- Est-ce que Σ implique la dépendance fonctionnelle $\{A, B\} \rightarrow D$?
- Est-ce que Σ implique la dépendance fonctionnelle $D \rightarrow A$?

Exercice

Montrer que les assertions suivantes sont fausses :

- $A \rightarrow B$ implique $B \rightarrow A$.
- Si $\{A, B\} \rightarrow C$ et $A \rightarrow C$ alors $B \rightarrow C$.
- Si $\{A, B\} \rightarrow C$ alors $A \rightarrow C$ ou $B \rightarrow C$.

Exercice : déductions de DF

Soit le schéma $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ et soit

$$\Sigma = \{AB \rightarrow C; B \rightarrow D; CD \rightarrow E; CE \rightarrow GH; G \rightarrow A\}$$

Est-ce que les dépendances

- $A, B \rightarrow E$
- $B, G \rightarrow C$
- $A, B \rightarrow G$

sont déductibles de Σ ?

Σ est elle irréductible/minimale ?

Rappel

Pour que Σ soit minimale, il y a 3 conditions à remplir :

- Σ est sous forme canonique, un seul attribut à droite.
- Aucune DF redondante , i.e. aucune DF ne peut être déduite des autres.
- Aucune DF redondante à gauche, .i.e. les déterminants sont minimaux

Exercice : équivalence d'ensembles de DFs

- Soit

$$\Sigma_1 = \{A \rightarrow B; C, E \rightarrow H; C \rightarrow E; A \rightarrow C, H\}$$

et

$$\Sigma_2 = \{A \rightarrow B, C; C \rightarrow E, H\}$$

Les deux ensembles de dépendances fonctionnelles Σ_1 et Σ_2 sont-ils *équivalents* ?

Exercice : Décomposition et perte d'information

- On considère le schéma de relation $\mathcal{A} = A, B, C$ et la dépendance fonctionnelle suivante :

$$\Sigma = \{A, B \rightarrow C\}.$$

Déterminer si la décomposition suivante est sans perte d'information

$$\mathcal{A}_1 = \{A, B\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{B, C\}$$

en étudiant le cas de la table suivante :

A	B	C
1	2	3
4	2	5

Exercice : poursuite

- On considère le schéma de relation $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$ et les dépendances fonctionnelles suivantes :

$$\Sigma = \{A \rightarrow C; B \rightarrow C; C \rightarrow D; D, E \rightarrow C; C, E \rightarrow A\}.$$

Appliquer l'algorithme de poursuite pour déterminer si la décomposition suivante est sans perte d'information :

$$\mathcal{A}_1 = \{A, D\}, \mathcal{A}_2 = \{A, B\}, \mathcal{A}_3 = \{B, E\}, \mathcal{A}_4 = \{C, D, E\}, \mathcal{A}_5 = \{A, E\}$$

Même question pour la décomposition :

$$\mathcal{A}_1 = \{A, D\}, \mathcal{A}_2 = \{A, B\}, \mathcal{A}_3 = \{B, E\}, \mathcal{A}_4 = \{C, D\}, \mathcal{A}_5 = \{D, E\}, \mathcal{A}_6 = \{A, E\}$$

Exercice

Soit $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$ un schéma et soit la décomposition $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$ où

$$\mathcal{A}_1 = A, B, C \quad \mathcal{A}_2 = B, C, D \quad \mathcal{A}_3 = A, C, E$$

Pour chaque ensemble Σ de dépendances fonctionnelles ci-dessous, appliquer l'algorithme de poursuite pour déterminer si la décomposition est sans perte d'information. Dans le cas où il y a perte d'information, donner une relation R de schéma \mathcal{A} satisfaisant Σ et telle que

$$\pi_{\mathcal{A}_1}(R) \bowtie \pi_{\mathcal{A}_2}(R) \bowtie \pi_{\mathcal{A}_3}(R) \not\subseteq R$$

- $\Sigma = \{B \rightarrow E, CE \rightarrow A\}$
- $\Sigma = \{AC \rightarrow E, BC \rightarrow D\}$
- $\Sigma = \{A \rightarrow D, D \rightarrow E, B \rightarrow D\}$
- $\Sigma = \{A \rightarrow D, CD \rightarrow E, E \rightarrow D\}$

Exercice : Normalisation

On considère le schéma de relation $R(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{N})$:

$R(\text{Cours}, \text{Enseignant}, \text{Horaire}, \text{Salle}, \text{Étudiant}, \text{Note})$

et les dépendances fonctionnelles suivantes :

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{C}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}; \quad \mathbf{C}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{N}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{S}\}.$$

- Calculer une clé.
- Mettre en Boyce-Codd Normal Form (BCNF), donner plusieurs résultats possibles.