

# TD 9 : Normalisation et dépendances

## Dépendances fonctionnelles

2025-11-21

---

L3 MIAHS/Ingémath

Université Paris Cité

Année 2025

[Course Homepage](#)

[Moodle](#)



### Définitions

Une *dépendance fonctionnelle* est une expression de la forme

$$A_1, A_2, \dots, A_k \rightarrow A_{k+1}, \dots, A_n$$

où  $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$  sont des attributs (colonnes) d'une base de données.

Elle signifie que deux tuples ayant la même valeur sur  $A_1, \dots, A_k$  doivent avoir la même valeur sur chaque colonne  $A_{k+1}, \dots, A_n$  (en français :  $A_1, \dots, A_k$  *déterminent*  $A_{k+1}, \dots, A_n$ ). On dit que les attributs  $A_{k+1}, \dots, A_n$  *dépendent fonctionnellement* de  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

La notion de dépendance est transitive : si  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  alors  $A \rightarrow C$ .

Un ensemble de dépendances fonctionnelles  $\mathcal{F}$  est *irréductible* si aucune dépendance ne peut être déduite des autres en utilisant les règles suivantes :

- trivialité : si  $Y \subseteq X$  alors  $X \rightarrow Y$
- augmentation : si  $X \rightarrow Y$  alors  $X, Z \rightarrow Y, Z$  pour toute suite d'attributs  $Z$ .
- transitivité : si  $X \rightarrow Y$  et  $Y \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow Z$
- union : si  $X \rightarrow Y$  et  $X \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow Y, Z$
- décomposition/séparation si  $X \rightarrow Y$  et  $Z \subseteq Y$  alors  $X \rightarrow Z$

La *clôture transitive* des attributs  $A_1, \dots, A_k$  pour un ensemble de dépendances fonctionnelles  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des attributs  $B_1, \dots, B_\ell$  qui dépendent fonctionnellement de  $A_1, \dots, A_k$ .

On la note

$$[A_1, \dots, A_k]_{\mathcal{F}}^+$$

en oubliant  $\mathcal{F}$  si le contexte est clair.

Un ensemble d'attributs  $A_1, \dots, A_k$  est une *super-clé pour une relation*  $R(B_1, \dots, B_\ell)$  si ce sont des attributs de  $R$  et si sa clôture transitive contient  $B_1, \dots, B_\ell$ . C'est une clé si elle est minimale, c'est-à-dire, aucun sous-ensemble strict de cette super-clé n'est une clé.

Un schéma est en :

- FN<sub>3</sub> si pour toute dépendance fonctionnelle non triviale, le membre de gauche contient une clef ou tout attribut du membre de droit appartient à une clef.
- FNBC si pour toute dépendance fonctionnelle non triviale, le membre de gauche contient une clef.

Un schéma et un ensemble de dépendances fonctionnelles peut se *décomposer* en une collection de schémas, dans le sens où chaque relation  $R$  peut se décomposer en  $R_1, \dots, R_k$  tels que  $R_i = \pi_i(R)$  pour une certaine projection  $\pi_i$ .

On dit cette décomposition *sans perte d'information* si toute relation  $R$  du schéma d'origine peut être retrouvée à partir des relations  $R_1, \dots, R_k : R = \pi_1(R) \bowtie \dots \bowtie \pi_k(R)$ .

On dit que cette décomposition *respecte les dépendances fonctionnelles* si celles-ci sont toujours satisfaites par la nouvelle décomposition.

### Exercice

Soit une relation concernant des personnes en France avec les attributs suivants~ :

Nom, Numéro de sécurité sociale, Commune, Département, Code postal, Numéro de téléphone

Quelles sont les dépendances fonctionnelles censées être satisfaites ?

### Exercice

Soit un schéma d'attributs  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et un ensemble de dépendances fonctionnelles. Calculer le nombre de super-clefs (en fonction de  $n$ ) dans les cas suivants~ :

- La seule clef est  $\{A_1\}$ .
- Les seules clefs sont  $\{A_1\}$  et  $\{A_2\}$ .
- Les seules clefs sont  $\{A_1, A_2\}$  et  $\{A_3, A_4\}$ .
- Les seules clefs sont  $\{A_1, A_2\}$  et  $\{A_1, A_3\}$ .

### Exercice

Soit le schéma  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$  et l'ensemble de dépendances fonctionnelles

$$\Sigma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$$

- Quelle est la fermeture  $\{A\}^+$  de  $\{A\}$  ?
- Quelles sont les super-clés ? Les clés ?

### Exercice

Soit le schéma  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F\}$  et l'ensemble de dépendances fonctionnelles

$$\Sigma = \{\{A, B\} \rightarrow C, \{B, C\} \rightarrow \{A, D\}, D \rightarrow E, \{C, F\} \rightarrow B\}$$

- Calculer la fermeture  $\{A, B\}^+$  de  $\{A, B\}$ .
- Est-ce que  $\Sigma$  implique la dépendance fonctionnelle  $\{A, B\} \rightarrow D$  ?
- Est-ce que  $\Sigma$  implique la dépendance fonctionnelle  $D \rightarrow A$  ?

### Exercice

Montrer que les assertions suivantes sont fausses :

- $A \rightarrow B$  implique  $B \rightarrow A$ .
- Si  $\{A, B\} \rightarrow C$  et  $A \rightarrow C$  alors  $B \rightarrow C$ .
- Si  $\{A, B\} \rightarrow C$  alors  $A \rightarrow C$  ou  $B \rightarrow C$ .

### Exercice : déductions de DF

Soit le schéma  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$  et soit

$$\Sigma = \{AB \rightarrow C; B \rightarrow D; CD \rightarrow E; CE \rightarrow GH; G \rightarrow A\}$$

Est-ce que les dépendances

- $A, B \rightarrow E$
- $B, G \rightarrow C$
- $A, B \rightarrow G$

sont déductibles de  $\Sigma$  ?

$\Sigma$  est elle irréductible/minimale ?

### 💡 Rappel

Pour que  $\Sigma$  soit minimale, il y a 3 conditions à remplir :

- $\Sigma$  est sous forme canonique, un seul attribut à droite.
- Aucune DF redondante , i.e. aucune DF ne peut être déduite des autres.
- Aucune DF redondante à gauche, .i.e. les déterminants sont minimaux

### Exercice : équivalence d'ensembles de DFs

- Soit

$$\Sigma_1 = \{A \rightarrow B; C, E \rightarrow H; C \rightarrow E; A \rightarrow C, H\}$$

et

$$\Sigma_2 = \{A \rightarrow B, C; C \rightarrow E, H\}$$

Les deux ensembles de dépendances fonctionnelles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont-ils *équivalents* ?

### Exercice : Décomposition et perte d'information

- On considère le schéma de relation  $\mathcal{A} = A, B, C$  et la dépendance fonctionnelle suivante :

$$\Sigma = \{A, B \rightarrow C\}.$$

Déterminer si la décomposition suivante est sans perte d'information

$$\mathcal{A}_1 = \{A, B\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{B, C\}$$

en étudiant le cas de la table suivante :

A	B	C
1	2	3
4	2	5

### Exercice : poursuite

- On considère le schéma de relation  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$  et les dépendances fonctionnelles suivantes :

$$\Sigma = \{A \rightarrow C; B \rightarrow C; C \rightarrow D; D, E \rightarrow C; C, E \rightarrow A\}.$$

Appliquer l'algorithme de poursuite pour déterminer si la décomposition suivante est sans perte d'information :

$$\mathcal{A}_1 = \{A, D\}, \mathcal{A}_2 = \{A, B\}, \mathcal{A}_3 = \{B, E\}, \mathcal{A}_4 = \{C, D, E\}, \mathcal{A}_5 = \{A, E\}$$

Même question pour la décomposition :

$$\mathcal{A}_1 = \{A, D\}, \mathcal{A}_2 = \{A, B\}, \mathcal{A}_3 = \{B, E\}, \mathcal{A}_4 = \{C, D\}, \mathcal{A}_5 = \{D, E\}, \mathcal{A}_6 = \{A, E\}$$

### Exercice

Soit  $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$  un schéma et soit la décomposition  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$  où

$$\mathcal{A}_1 = A, B, C \quad \mathcal{A}_2 = B, C, D \quad \mathcal{A}_3 = A, C, E$$

Pour chaque ensemble  $\Sigma$  de dépendances fonctionnelles ci-dessous, appliquer l'algorithme de poursuite pour déterminer si la décomposition est sans perte d'information. Dans le cas où il y a perte d'information, donner une relation  $R$  de schéma  $\mathcal{A}$  satisfaisant  $\Sigma$  et telle que

$$\pi_{\mathcal{A}_1}(R) \bowtie \pi_{\mathcal{A}_2}(R) \bowtie \pi_{\mathcal{A}_3}(R) \not\subseteq R$$

- $\Sigma = \{B \rightarrow E, CE \rightarrow A\}$
- $\Sigma = \{AC \rightarrow E, BC \rightarrow D\}$
- $\Sigma = \{A \rightarrow D, D \rightarrow E, B \rightarrow D\}$
- $\Sigma = \{A \rightarrow D, CD \rightarrow E, E \rightarrow D\}$

### Exercice : Normalisation

On considère le schéma de relation  $R(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{H}, \mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{N})$  :

$R(\text{Cours}, \text{Enseignant}, \text{Horaire}, \text{Salle}, \text{Étudiant}, \text{Note})$

et les dépendances fonctionnelles suivantes :

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{C}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}; \quad \mathbf{C}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{N}; \quad \mathbf{H}, \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{S}\}.$$

- Calculer une clé.
- Mettre en Boyce-Codd Normal Form (BCNF), donner plusieurs résultats possibles.