



CALCUL NUMÉRIQUE DES SOLIDES ET STRUCTURES NON-LINÉAIRES

COMPTE-RENDU 2 : FLAMBEMENT ET POST-FLAMBEMENT D'UNE POUTRE
HYPERÉLASTIQUE NON-LINÉAIRE

MASTER SPI : MATÉRIAUX ET STRUCTURES - MODÉLISATION ET SIMULATION

NDOME LILIANE MANGA SAME
NORA ES-SAFI

MU5MES01

S. BRISARD - D. DUHAMEL - C. MAURINI

Contents

1	Introduction	2
2	Analyse de la réponse quasi-statique non-linéaire	2
2.1	Reproduction du diagramme de bifurcation	2
2.2	Discussion de l'influence de l'imperfection	3
2.3	Algorithme de Newton-Raphson	4
3	Analyse du flambement linéaire	5
3.1	Configuration 1	5
3.2	Configuration 2	7
4	Analyse de Stabilité	8
5	Conclusion	8

1 Introduction

Dans le cadre de ce deuxième rapport, l'objectif est d'étudier un problème d'hyperélasticité sur FENICS.

Cette hyperélasticité se définit comme le comportement non-linéaire réversible d'un matériau, donc par une absence de plasticité.

Pour les structures non-linéaires, les contraintes et les problèmes peuvent être définis sur la déformée ou sur les configurations de référence, contrairement aux structures linéaires pour lesquelles tout doit être nécessairement définis sur les configurations de référence.

On considère une poutre 2D de longueur L selon l'axe x et de largeur l selon l'axe y . On



Figure 1: Poutre 2D considérée

impose une force de traction, notée g_0 sur la surface de l'extrémité libre de la poutre, soit en $x = L$. La surface est alors définie comme le produit de la largeur et de l'épaisseur, que l'on choisit unitaire. Les forces de volume, notées b_0 , sont, elles, supposées négligeables d'après l'énoncé : on les note donc égales à 0.

Cependant, on ne peut pas étudier le flambement comme tel sur FENICS, car ce dernier ne parvient pas à distinguer les flambements car lors de l'implémentation de notre modèle, ce dernier est considéré comme un modèle parfait.

Il est donc essentiel d'imposer :

- soit une imperfection de type géométrique,
- soit une imperfection de type contrainte, consistant en l'ajout d'une petite force afin que l'extrémité libre de la poutre puisse être mise en mouvement et, obtenir de ce fait du flambement.

Dans notre étude, on impose ce second type d'imperfection, notée $g0.eps$ dans notre code. Elle correspond à une compression de la poutre.

2 Analyse de la réponse quasi-statique non-linéaire

2.1 Reproduction du diagramme de bifurcation

Le chargement se définit comme le produit de la contrainte (T_x) et de la surface. Comme mentionné plus haut, la surface est égale à la largeur (L_y) puisque l'épaisseur est prise unitaire. Ainsi, on obtient l'expression du chargement (défini en abscisse) :

$$F = T_x * L_y$$

On obtient alors le diagramme de bifurcation suivant :

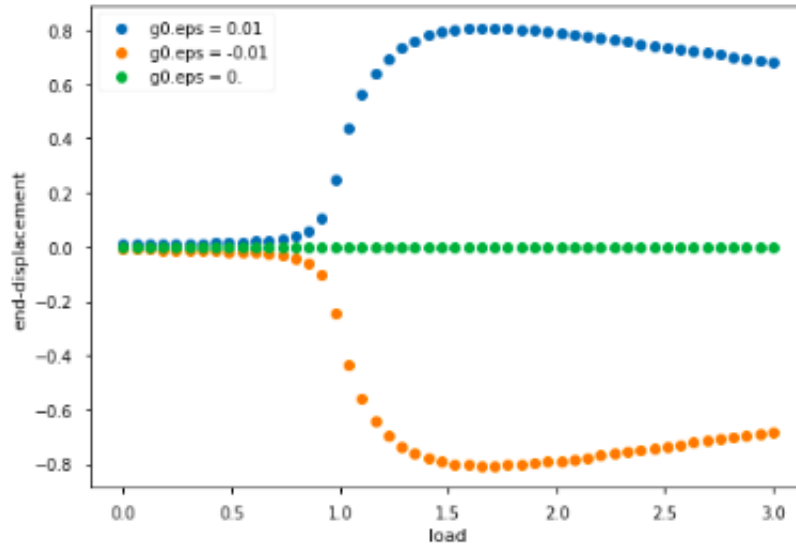


Figure 2: Déplacement transverse en fonction de $F = T_x \cdot L_y$

On remarque que le déplacement transverse ne varie pas, puis augmente brutalement lorsque l'incrément t est égal à 1, ce qui correspond à une valeur de contrainte critique :

$$\sigma_{critique} = \frac{F_c}{l_y}$$

2.2 Discussion de l'influence de l'imperfection

On augmente maintenant la valeur de l'imperfection $g0.eps$ afin d'évaluer l'influence de celle-ci sur le flambement de la poutre. On reporte sur une figure l'ensemble des diagrammes de bifurcation obtenus afin de faciliter leur observation :

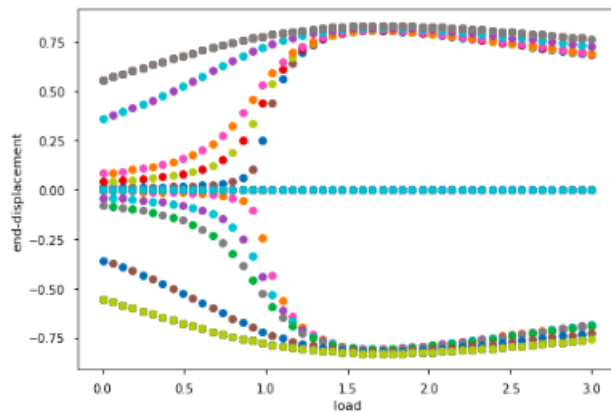


Figure 3: Déplacement transverse en fonction de $F = T_x \cdot L_y$

On remarque que la charge critique qu'en augmentant l'imperfection la poutre développe des contraintes du second ordre de plus en plus défavorable à sa stabilité ; la charge critique diminue donc. Nous observons ainsi que l'ajout d'un défaut, ici de contrainte, conduit la structure à chercher d'autres positions d'équilibre. Cependant la figure ne permet pas de conclure sur la stabilité de la structure.

2.3 Algorithme de Newton-Raphson

Le problème étant considéré étant non linéaire, il est essentiel d'utiliser un solveur de Newton. Cette méthode de résolution consiste en la définition du résidu $R(x)$ ainsi que du Jacobien $J=dR$ du problème de minimisation de l'énergie puis on fera tendre R vers 0.

Globalement, on va donc effectuer une approximation d'un zéro de la fonction R en considérant son développement de Taylor au premier ordre. On part d'un point x_0 que l'on choisit de préférence proche du zéro à trouver (en faisant des estimations grossières par exemple), on approche la fonction au premier ordre, autrement dit, on la considère asymptotiquement égale à sa tangente en ce point :

$$R(x) \simeq R(x_0) + R'(x_0)(x - x_0)$$

Donc, on part d'un point x_0 appartenant à l'ensemble de définition de la fonction et on construit par récurrence la suite :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{R(x_k)}{R'(x_k)}$$

3 Analyse du flambement linéaire

Dans cette seconde partie, on détermine les 9 premières modes propres de flambement de la poutre hyperélastique ainsi que les 9 premières charges critiques de flambement en utilisant un solveur d'équation aux valeurs propres, et ce pour différentes configurations.

3.1 Configuration 1

Pour cette première configuration, l'état de contraintes est donné sous la forme :

$$\underline{\underline{S}} = -\lambda \sigma_{cr} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

Par ailleurs, on définit la raideur géométrique comme suit :

$$a_g(\underline{v}, \underline{w}) = \int -\sigma(e_x \otimes e_x) : (\underline{\underline{\nabla}} \underline{w}^T \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{v})$$

$$\int -\sigma \partial_x V_k \partial_x w_k = -\sigma \int \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Via un calcul du déterminant, on déterminera λ :

$$Det(K_k - \lambda K_e) = 0$$

avec K_e la matrice d'élasticité

On obtient ainsi les résultats suivants :

```
Out[15]: array([-0.98034852+0.j, -0.1159902 +0.j, -0.04664769+0.j, -0.0274082 +0.j,  
-0.01937627+0.j, -0.01522145+0.j, -0.0127729 +0.j, -0.01119687+0.j,  
-0.01010493+0.j, -0.00932228+0.j])
```

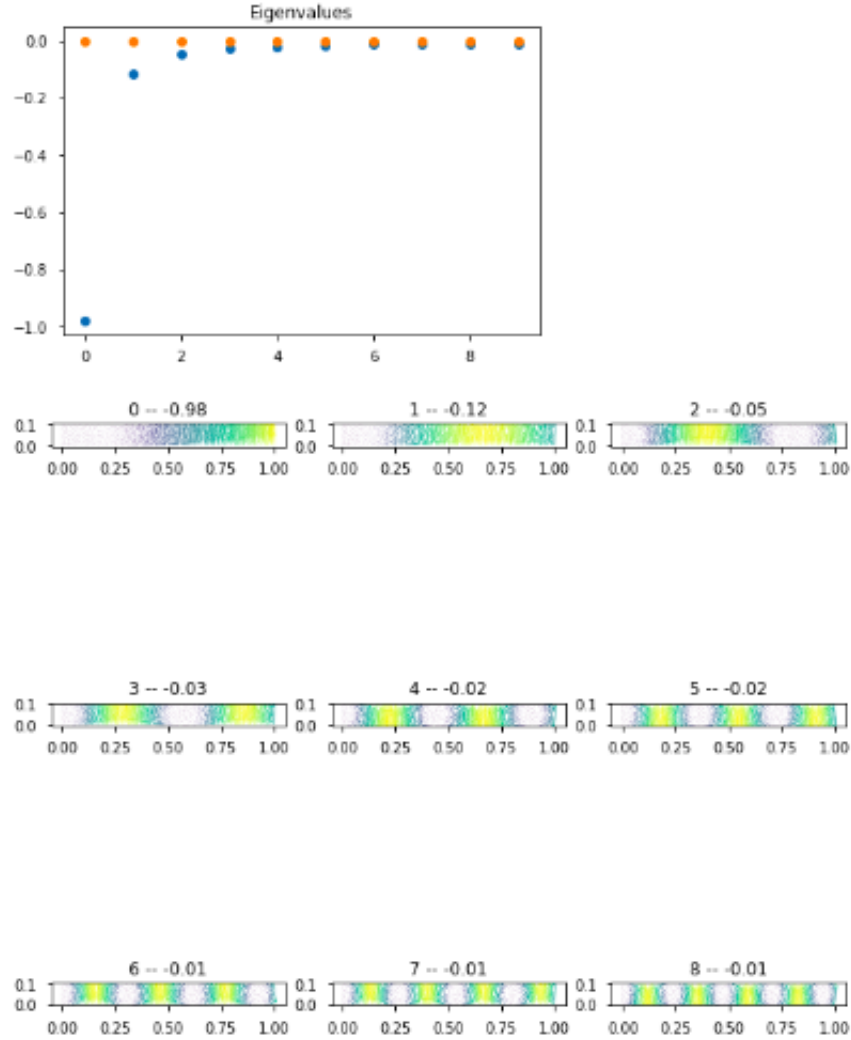


Figure 4: Représentation des neufs premiers modes de flambement pour la configuration 1

On obtient ainsi une valeur propre à 0.98, ce qui est cohérent puisque l'on cherche une valeur égale à 1, et il s'agit de celle obtenue en étant la plus proche.

3.2 Configuration 2

Pour la seconde configurations, on réalise un calcul linéaire élastique dans le but de déterminer ici la contrainte de Cauchy comme pour le CR1. Ici, on a :

$$a_g(\underline{v}, \underline{w}) = \int \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}(\underline{v})^T : \underline{\underline{\nabla}}(\underline{w}) dv$$

De la même manière que pour la première configuration, on obtient les résultats suivants pour les modes de flambement :

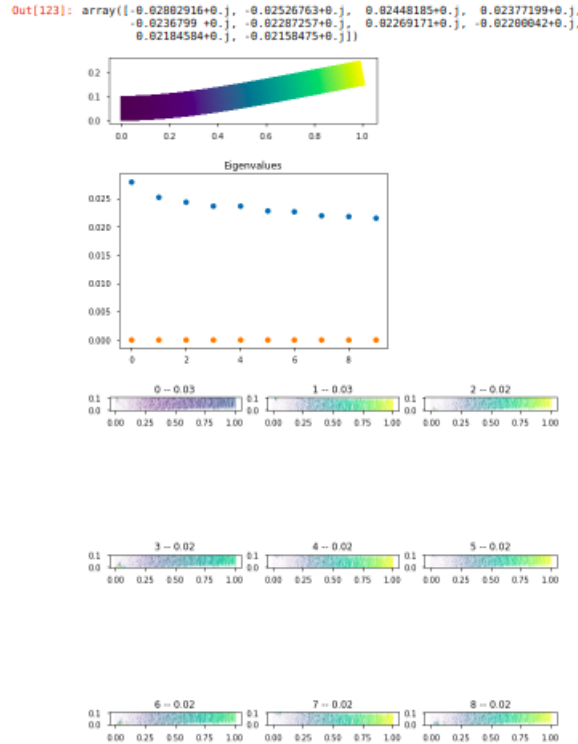


Figure 5: Représentation des neuf premiers modes de flambement pour la configuration 2

On obtient ces courbes-ci ca, étant donné qu'il y a absence d'imperfection, il ne peut pas y avoir de flambement, comme expliqué dans l'introduction. Ceci explique pourquoi nos valeurs propres sont plus ou moins égales à 0.

4 Analyse de Stabilité

Dans cette dernière partie, on effectue une analyse de la stabilité en effet, en étudiant le signe de la plus petite valeur propre de la matrice Hessienne, on peut étudier la stabilité des 3 branches du diagramme de bifurcation obtenu dans la première partie. On représentera donc en rouge les points instables et en vert les points stables du diagramme qui correspondent respectivement à une valeur propre minimale négative ou positive:

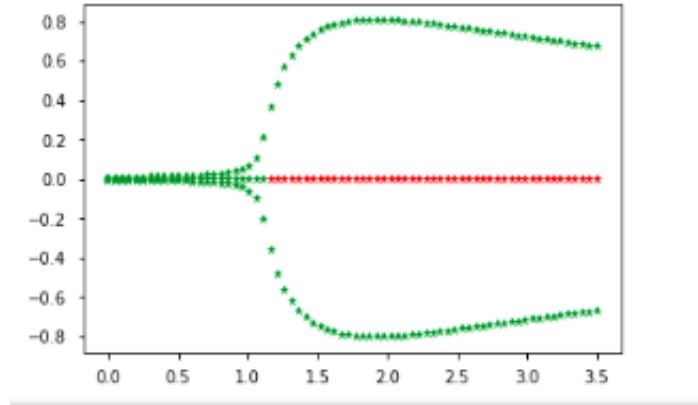


Figure 6: Etude de la stabilité

On sait de plus que la limite de stabilité de la branche fondamentale du diagramme de bifurcation, soit la branche supérieure correspond au premier mode de flambement.

5 Conclusion

Les matériaux hyper élastiques, comme le caoutchouc, sont des matériaux non linéaires qui présentent une réponse élastique instantanée aux grandes déformations. On les a donc utilisés ici pour effectuer une analyse en grands déplacements pour un modèle de poutre, ils sont un parfait exemple de non-linéarité des matériaux.