

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants

Exercice 1

On considère un réel a strictement positif et F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{t} dt$$

1. (a) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
(b) Calculer, pour tout réel x strictement positif $F'(x)$.
2. (a) Déterminer la limite de F en 0^+ .
(b) Montrer, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{t} dt = -\ln x + \int_x^1 \frac{e^{-\frac{t}{a}} - 1}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{t} dt$$

(c) En déduire :

i. L'existence de :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{t} dt \right]$$

On note $K(a)$ cette limite

ii. l'équivalent suivant :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (-\ln x)$$

3. Montrer que, pour tout réel α , $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.
4. On définit la fonction f par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} F(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que f peut-être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
- (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- (c) Calculer $\text{Var}(X)$.
5. On considère une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, suivant toutes la même loi que X et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- (a) Construire, à partir de S_n un estimateur \tilde{S}_n sans biais de a .
- (b) Montrer que cet estimateur est convergent.
6. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
On définit la variable aléatoire Y par $Y = -\ln Z$.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - (b) Déterminer une densité de Y .
 - (c) Établir que $\mathbb{E}(Y) = \ln \lambda - K(1)$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre, par deux méthodes différentes, l'équation matricielle (1) d'inconnue X , où X est élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$X^2 + X = A \quad (1)$$

Partie 1

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres, λ_1 et λ_2 de A , avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer la matrice P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, dont la première ligne est constituée de 1, telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

4. Soit X une solution de l'équation (1).
 - (a) En déduire que $P^{-1}XP$ commute avec D .
 - (b) Montrer que X s'écrit $X = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. (a) Montrer que X est solution de (1) si et seulement si Δ est solution de :

$$\Delta^2 + \Delta = D \quad (2)$$

- (b) Résoudre l'équation (2).

- (c) En déduire, en les laissant sous forme de produits de matrices, les quatre solutions de l'équation (1)

Partie 2

1. Montrer que si X est solution alors X ou $X + I$ est non inversible.
2. On suppose que X est solution et que X est non inversible. On note g l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 est X .
 - (a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$ puis donner les dimensions de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
 - (b) Établir que $\text{Ker } g = \text{Ker } f$ puis que $\text{Im } g = \text{Im } f$.
3. (a) Montrer que $g(e_1) = g(e_2)$ et qu'il existe un réel α tel que $g(e_1 + e_2) = \alpha(e_1 + e_2)$.
(b) Montrer que X est proportionnelle à A
4. Déterminer les matrices X non inversibles qui sont solutions de l'équation (1).
5. On suppose que $X + I$ est non inversible.
Donner, par analogie et sans démonstration, l'expression de X en fonction de A et de I .
En déduire toutes les solutions de l'équation (1).

Exercice 3

Dans tout l'exercice on note, pour tout réel x , $[x]$ la partie entière de x

Partie 1

Pour tout réel x_0 appartenant à $]0, 1]$, on définit les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_n = \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor + 1 \\ x_{n+1} = u_n x_n - 1 \end{cases}$$

1. Établir que si $x_0 = \frac{1}{k}$, où k est un entier naturel non nul, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que les suites (u_n) et (x_n) sont bien définies et que, pour tout entier naturel n , x_n est strictement positif.
3. (a) Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. (a) Montrer, pour tout entier naturel n , l'inégalité suivante :

$$u_n \geq 2$$

- (b) Établir, pour tout entier naturel n , la relation suivante :

$$x_0 = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \dots + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n} + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n} x_{n+1}$$

- (c) Montrer, pour tout entier naturel n , l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n} x_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (d) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k}$ est convergente et que l'on a :

$$x_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k}$$

On admet que le développement précédent, appelé développement en série de Engel, est unique, c'est-à-dire que, pour tout réel de $]0, 1]$, il existe une unique suite (u_n) tel que x_0 s'écrive ainsi et que cette suite (u_n) est définie par les relations précédentes

5. (a) Déterminer la suite (u_n) associée au réel x_0 définie par :

$$x_0 = e - 2$$

- (b) Déterminer le réel x_0 dont le développement en série de Engel est défini par la suite constante $u_n = 3$.
6. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
En utilisant la question 4.(b), montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $u_n = k$

(ii) $\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \dots + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n-1}} + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n-1} k} < x_0 \leq \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \dots + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n-1}} + \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n-1} (k-1)}$

Partie 2

On suppose dans cette partie que le réel x_0 n'est plus un réel fixé de $]0, 1]$ mais une variable aléatoire X_0 , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui suit la loi uniforme sur $]0, 1]$.

On définit alors deux suites de variables aléatoires X_n et U_n par les relations :

$$\begin{cases} U_n = \left\lfloor \frac{1}{X_n} \right\rfloor + 1 \\ X_{n+1} = U_n X_n - 1 \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier naturel n , X_n et U_n sont bien des variables aléatoires définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On remarquera que tous les calculs effectués dans la partie précédente restent valables. On a donc, en particulier, pour tout entier naturel n , $U_n(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Dans la suite k désigne un entier supérieur ou égal à 2

1. (a) Déterminer la loi de U_0 .
(b) La variable U_0 admet-elle une espérance ?
2. (a) Justifier la relation suivante :

$$\mathbb{P}([U_1 = k]) = \sum_{j=2}^k \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{j} + \frac{1}{jk} \leq X_0 \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j(k-1)}\right] \cap [U_0 = j]\right)$$

- (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([U_1 = k]) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=2}^k \frac{1}{j}$$

- (c) La variable U_1 admet-elle une espérance ?
3. Établir l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([U_n = k]) = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{2 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-1} \leq k} \frac{1}{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$$

4. (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (j, k) vérifiant $2 \leq j \leq k$, la relation suivante :

$$\mathbb{P}([U_n = k] \cap [U_{n-1} = j]) = \frac{1}{jk(k-1)} \sum_{2 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{n-2} \leq j} \frac{1}{i_0 i_1 \dots i_{n-2}}$$

- (b) En déduire les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbb{P}_{[U_{n-1}=j]}([U_n = k]) = \begin{cases} \frac{j-1}{k(k-1)} & \text{si } 2 \leq j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$