

AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Praca doktorska

Marcin Rybak

Symulacje konkurencyjnych procesów kontaktowych na sieciach

Promotor: **prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski**
dr hab. inż. Krzysztof Malarz

Kraków, wrzesień 2016

Oświadczenie autora rozprawy:

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę doktorską wykonałem osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Oświadczenie promotora rozprawy:

Niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Chciabym serdecznie podziękować Katarzynie Kubinie za wsparcie i nieocenioną pomoc w sporządzeniu ilustracji do niniejszej rozprawy.

Wszystkie obliczenia, których wyniki są przedstawione w tej pracy, wykonane zostały w centrum obliczeniowym ACK Cyfronet AGH w Krakowie.

Streszczenie

Rozprawa dotyczy badania procesów kontaktowych na sieciach złożonych różniących się topologiami, a więc właściwościami takimi jak rozkład prawdopodobieństw stopni wierzchołków czy współczynnik gronowania, z regułami przejść między stanami węzłów sieci ustalonymi na podstawie dwóch różnych modeli.

Procesy kontaktowe symulowane są na sieciach złożonych: Erdősa-Rényiego, Wattsa-Strogatza oraz Albert-Barabásiego, o modyfikowalnym współczynniku gronowania.

Wybrano dwa modele reguł przejść dla procesów kontaktowych: bazujące na modelu Sznajdów i modelu który nazwiemy „z sąsiedztwem”.

W przypadku pierwszego modelu, obecność w sieci pary węzłów tego samego typu (nazwijmy go D) powoduje - z prawdopodobieństwem będącym parametrem symulacji - zmianę stanu wszystkich sąsiadów innego typu (nazwijmy go S) tej pary na D. Procesem współzawodniczącym z powyższym był proces o regułach zdefiniowanych na podstawie modelu inwazji. Polegają one na tym, że wylosowany węzeł typu S zmienia typ jednego losowo wybranego sąsiada z D na S.

Natomiast w modelu „z sąsiedztwem”, obecność w sieci pary połączonych ze sobą węzłów tego samego typu powoduje zmianę stanu tylko jednego, losowo wybranego węzła, będącego sąsiadem zarówno pierwszego jak i drugiego węzła tej pary. W tym przypadku procesem współzawodniczącym był proces o regułach inspirowanych modelem wyborcy. Polegają one na tym, że wylosowany węzeł typu D przyjmuje — z prawdopodobieństwem będącym parametrem symulacji — typ S jednego ze swoich sąsiadów.

W obu przypadkach obecność konkurencyjnego procesu, pozwalała regulować intensywność rozprzestrzeniania się badanych w rozprawie procesów kontaktowych o regułach opartych na modelu Sznajdów i modelu „z sąsiedztwem”.

Reguły przejść oparte na modelu Sznajdów zostały zbadane na sieciach Wattsa-Strogatza i Albert-Barabásiego, natomiast dla modelu „z sąsiedztwem” na sieciach Erdősa-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza.

Badanie dynamiki procesów kontaktowych miało miejsce dla różnych wartości parametrów symulacji, związanych zarówno z właściwościami strukturalnymi sieci (średni stopień wierzchołków czy współczynnik gronowania) jak i właściwościami samych procesów kontaktowych (prawdopodobieństwa zaaplikowania reguł przejść dla węzłów danego typu) oraz początkowym udziałem węzłów danego typu w sieci.

Wpływ wspomnianych wyżej czynników został przeanalizowany zarówno w ramach danego modelu reguł przejść jak i w ramach ustalonego typu sieci. Pozwoliło to na stwierdzenie braku zależności końcowego udziału węzłów danego typu w sieci od początkowego udziału tych węzłów dla obu zbadanych typów sieci (tj. Erdősa-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza) w przypadku modelu „z sąsiedztwem” oraz obecności tej zależności dla modelu Sznajdów również dla obu zbadanych

typów sieci, tj. Wattsa-Strogatza oraz Albert-Barabásiego. Podobnie sprawdzono wpływ współczynnika gronowania badanych sieci na dynamikę procesów kontaktowych. Wpływ ten był widoczny dla wszystkich rodzajów sieci i obu zaproponowanych modeli reguł przejść, natomiast różnił się charakterem zależności udziału węzłów danego typu w sieci od tego współczynnika (w niektórych przypadkach była to zależność monotoniczna, zaś w innych nie).

Zostały zaobserwowane również wyniki specyficzne tylko dla danego typu sieci oraz modelu reguł przejść, jak np. obecność dwóch faz: stacjonarnej i niestacjonarnej — dla modelu „z sąsiedztwem” na sieci Wattsa-Strogatza czy też istnienie zależności początkowego udziału węzłów danego typu, dla którego końcowy ich udział w sieci wynosi 50% od rozmiaru sieci w przypadku modelu Sznajdów na sieci Albert-Barabásiego.

Udało się również zaobserwować i szczegółowo zbadać decydujący wpływ średniej liczby sąsiadów pary węzłów w sieci na otrzymane wyniki dla modelu Sznajdów.

Spis treści

1 Wprowadzenie	8
1.1 Cel badań.....	8
1.2 Sieci złożone	9
1.2.1 Podstawowe pojęcia.....	9
1.2.2 Charakterystyki sieci.....	11
1.2.3 Sieci Erdős-a-Rényiego.....	12
1.2.4 Sieci bezskalowe.....	13
1.2.5 Sposoby sterowania współczynnikiem gronowania sieci.....	16
1.3 Procesy kontaktowe na sieciach.....	19
1.3.1 Wprowadzenie	19
1.3.2 Model Harrisa	23
1.3.3 Model wyborcy.....	31
1.3.4 Model inwazji	33
1.3.5 Model Sznajdów	33
2 Składowe algorytmu symulacji i ich wpływ na wyniki	37
2.1 Ogólny opis algorytmu	37
2.2 Sieci, jako parametr wejściowy algorytmu.....	37
2.3 Sposób wyboru węzłów.....	39
2.4 Warunek stopu	42
2.5 Niepewności i błędy numeryczne parametrów wejściowych i wyjściowych	44
2.5.1 Współczynnik gronowania.....	44
2.5.2 Średni stopień wierzchołka	45
2.5.3 Generacja konfiguracji początkowej	45
2.5.4 Średni początkowy udział węzłów S	46
2.5.5 Średni końcowy udział węzłów S.....	46
2.5.6 Wartość n_s^*	47
3 Model Sznajdów na sieci Wattsa-Strogatza	48
3.1 Proces generacji rodziny sieci.....	48
3.2 Symulacja procesu kontaktowego.....	51
3.3 Pojedyncze przebiegi czasowe	52
3.4 Uśrednione przebiegi czasowe	55
3.5 Zależność n_s^* od rozmiaru sieci.....	57
3.6 Zależność n_s^* od prawdopodobieństwa procesu D i współczynnika gronowania.....	59
4 Model Sznajdów na sieci Albert-Barabásiego.....	62
4.1 Proces generacji rodziny sieci.....	62
4.2 Weryfikacja parametrów sieci.....	65
4.3 Symulacja procesu kontaktowego.....	68
4.4 Pojedyncze przebiegi czasowe.	68

4.5	Uśrednione przebiegi czasowe	70
4.6	Zależność n_s^* od prawdopodobieństwa procesu D i współczynnika gronowania.....	73
4.7	Zależność n_s^* od rozmiaru sieci.....	75
5	Model z sąsiedztwem na sieci Erdősa-Rényiego	78
5.1	Proces generacji rodziny sieci E-R.....	78
5.2	Symulacja procesu kontaktowego.....	81
5.3	Pojedyncze przebiegi czasowe	82
5.4	Uśrednione przebiegi czasowe	86
5.5	Wykres końcowego udziału n_s^T węzłów S w przestrzeni parametrów (p_s, C)	90
5.6	Metoda średniego pola.....	93
6	Model z sąsiedztwem na sieci Wattsa-Strogatza.....	97
6.1	Symulacja procesu kontaktowego.....	97
6.2	Pojedyncze przebiegi czasowe	98
6.2.1	Przebiegi dla sieci regularnej	98
6.2.2	Przebiegi dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania	98
6.3	Uśrednione przebiegi czasowe	103
6.3.1	Przebiegi dla sieci regularnej	103
6.3.2	Przebiegi dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania	107
6.4	Wykres fazowy dla sieci regularnej	110
6.5	Wykres fazowy w przestrzeni parametrów (p_s, C) dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania	112
6.6	Podsumowanie	117
7	Porównanie wyników symulacji modelu „z sąsiedztwem” na sieci Erdősa-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza.....	118
8	Porównanie wyników symulacji modelu Sznajdów na sieci Wattsa-Strogatza oraz Albert-Barabásiego	121
9	Porównanie wyników symulacji modelu Sznajdów i modelu z sąsiedztwem na sieci Wattsa-Strogatza	124
9.1	Konkurencja procesów o regułach opartych na modelu Sznajdów i modelu wyborcy	126
9.2	Konkurencja procesów o regułach opartych na modelu „z sąsiedztwem” i modelu inwazji	129
10	Podsumowanie	133
	Bibliografia	137

1 Wprowadzenie

1.1 Cel badań

Niniejsza rozprawa została poświęcona badaniom dynamiki procesów kontaktowych na sieciach złożonych, zarówno w kontekście topologii tych sieci jak i reguł przejść pomiędzy stanami węzłów sieci dla poszczególnych procesów kontaktowych.

Za cel postawiono sobie zbadanie różnych modeli reguł przejść pomiędzy stanami węzłów sieci dla procesów kontaktowych oraz wpływu właściwości strukturalnych sieci (średniego stopnia wierzchołków czy współczynnika gronowania) i właściwości samych procesów kontaktowych (prawdopodobieństwa zaaplikowania reguł przejść dla węzłów danego typu) oraz początkowych udziałów węzłów danego typu w sieci na dynamikę tych procesów.

Zostały wybrane dwa modele reguł przejść: bazujący na modelu Sznajdów (rozdział 3 oraz 4) i modelu „z sąsiedztwem” (rozdział 5 oraz 6).

Procesy kontaktowe, których dynamika została zdefiniowana na podstawie powyższych modeli, współzawodniczą z procesami, którego dynamika opiera się na prostych regułach modelu inwazji oraz modelu inspirowanego modelem wyborcy.

W przypadku modelu Sznajdów, obecność w sieci pary węzłów tego samego typu (nazwijmy go D) powoduje zmianę — z prawdopodobieństwem będącym parametrem symulacji — stanu wszystkich sąsiadów innego typu (nazwijmy go S) tej pary na D. Procesem konkurencyjnym był tutaj proces o regułach zdefiniowanych na podstawie modelu inwazji: wylosowany węzeł typu S zmieniał typ jednego losowo wybranego sąsiada typu D. Motywacją wyboru współzawodniczącego procesu opartego na modelu inwazji był fakt, że tak jak w przypadku procesu opartego na modelu Sznajdów, to wylosowany węzeł (bądź para węzłów) zmienia stan sąsiada bądź sąsiadów.

Natomiast w modelu „z sąsiedztwem”, obecność w sieci pary połączonych ze sobą węzłów tego samego typu powoduje zmianę stanu tylko jednego, losowo wybranego węzła, będącego sąsiadem zarówno pierwszego jak i drugiego węzła tej pary. Procesem współzawodniczącym z powyższym był proces o regułach inspirowanych modelem wyborcy: wylosowany węzeł typu D przyjmował — z prawdopodobieństwem będącym parametrem symulacji — typ jednego z sąsiadów S. W tym przypadku wybór współzawodniczącego procesu opartego na modelu wyborcy był motywowany tym, że tak jak w przypadku procesu opartego na modelu „z sąsiedztwem”, to wylosowany węzeł zmienia swój stan, przyjmując stan sąsiada bądź pary wzajemnie połączonych sąsiadów.

Reguły przejść oparte na modelu Sznajdów zbadano na sieciach Wattsa-Strogatza i Albert-Barabásiego, natomiast modelu „z sąsiedztwem” na sieciach Erdős-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza.

Sieć przypadkowa Erdős-Rényiego charakteryzuje się tym, że wierzchołki tworzą zbliżoną liczbę połączeń z innymi wierzchołkami. Jako przykład może posłużyć sieć autostrad USA. Inną istotną właściwością sieci Erdős-Rényiego jest bliski zeru średni współczynnik gronowania sieci.

Natomiast sieć bezskalowa Albert-Barabásiego charakteryzuje się obecnością dużej ilości wierzchołków tworzących niewielką liczbę połączeń z innymi oraz obecnością kilku takich, które łączą się z bardzo dużą liczbą wierzchołków (są one nazywane hubami). Tu z kolei, jako przykład może posłużyć sieć połączeń lotniczych USA.

Ostatnia z badanych sieci, czyli regularna sieć Wattsa-Strogatza, charakteryzuje się identycznym stopniem wierzchołka wszystkich węzłów w sieci oraz takim samym współczynnikiem gronowania dla wszystkich węzłów.

Ponieważ badanie wpływu współczynnika gronowania na dynamikę procesów kontaktowych było istotnym punktem niniejszej rozprawy a współczynniki gronowania sieci Erdős-Rényiego oraz Albert-Barabásiego są bliskie zeru, zaś dla sieci regularnej Wattsa-Strogatza możliwa jest tylko jedna wartość tego współczynnika, konieczne stało się sięgnięcie po algorytmy pozwalające na sterowanie współczynnikiem gronowania dla poszczególnych sieci.

Jednym z pobocznych celów badań było sprawdzenie, jak sterowanie współczynnikiem gronowania wpłynęło na inne charakterystyki sieci, jak np. rozkład stopni wierzchołków sieci, co zostało opisane w rozdziałach 1.2.5, 4.2 oraz 5.1 niniejszej rozprawy.

Natomiast podstawowe pytania jakie zostały postawione w pracy badawczej dotyczyły wpływu reguł przejść jak i typu sieci na charakterystyki przebiegów czasowych obrazujących udział węzłów danego typu w sieci w danej chwili czasowej, co opisują rozdziały 3.3, 4.4, 5.3 oraz 6.2.

Postawiono również za cel zbadanie charakterystyki zależności końcowego udziału węzłów danego typu w sieci od początkowego udziału tych węzłów, co zostało zawarte w rozdziałach 3.5 oraz 4.7. W przypadku zaobserwowania istnienia powyższej zależności, kolejnym celem było zbadanie charakterystyki zależności udziału węzłów typu S w sieci, dla którego połowa symulacji kończy się przewagą udziału węzłów tego typu w sieci a druga połowa przewagą udziału węzłów typu D (oznaczonej w pracy jako n^*) od wielkości sieci, co opisuje rozdział 3.5.

Postawiono również pytanie o charakterystyki fazowe układu — czy można zaobserwować fazy dominacji węzłów poszczególnych typów w sieci, w zależności od wartości parametrów symulacji, takich jak prawdopodobieństwa przejść między stanami węzłów oraz współczynnik gronowania sieci – zostały temu poświęcone rozdziały 3.6, 5.5 oraz 6.5.

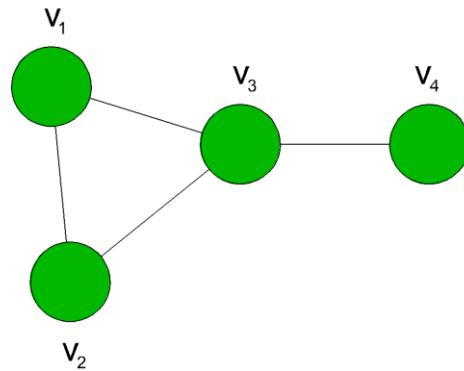
1.2 Sieci złożone

W niniejszej rozprawie przedmiotem badań są procesy kontaktowe na sieciach złożonych. Pojęcie sieci znalazło zastosowanie w zasadzie we wszystkich dziedzinach nauki: matematyce, biologii, informatyce i wielu innych. Do matematycznej reprezentacji sieci stosowane są grafy.

1.2.1 Podstawowe pojęcia

Graf prosty G składa się z niepustego zbioru skończonego $V(G)$, którego elementy nazywa się wierzchołkami lub węzłami i skończonego zbioru $E(G)$ różnych par nieuporządkowanych różnych

elementów zbioru $V(G)$, które nazywane są krawędziami bądź połączeniami. Zbiór $V(G)$ jest nazywany zbiorem wierzchołków, a zbiór $E(G)$ zbiorem krawędzi grafu G . Wierzchołki, które należą do krawędzi są nazywane końcami krawędzi. W każdym grafie prostym istnieje co najwyżej jedna krawędź łącząca daną parę wierzchołków [1].



Rysunek 1-1. Graf prosty.

Dwa wierzchołki v_1 i v_2 grafu G są **sąsiednie**, jeśli istnieje krawędź która je łączy.

Stopniem wierzchołka v grafu G jest liczba krawędzi zawierających wierzchołek v . W każdym grafie suma stopni wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą — dokładniej, jest równa podwojonej liczbie krawędzi, gdyż każda krawędź zwiększa tę sumę o dwa [1].

W symulacjach komputerowych zachodzi potrzeba implementacji grafu jako struktury danych. Najpopularniejszymi sposobami są przedstawienie grafu w postaci macierzy sąsiedztwa lub listy sąsiedztwa [2].

Macierzą sąsiedztwa grafu G , którego wierzchołki są oznaczone liczbami ze zbioru $\{1,2,\dots,n\}$ jest macierz wymiaru $n \times n$, której wyraz o indeksach i, j dla grafu prostego jest równy 1 gdy istnieje krawędź pomiędzy wierzchołkami i, j , natomiast wynosi 0 gdy ta krawędź nie istnieje.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	1	0

v_3	1	1	0	1
v_4	0	0	1	0

Tabela 1-1. Macierz sąsiedztwa dla grafu przedstawionego na Rysunku 1-1.

Inną często używaną reprezentacją grafu są tzw. **listy sąsiedztwa** — dla każdego wierzchołka zapamiętywana jest lista sąsiadujących z nim wierzchołków, np.:

v_1	v_2, v_3
v_2	v_1, v_3
v_3	v_1, v_2, v_4
v_4	v_3

Tabela 1-2. Lista sąsiedztwa dla grafu przedstawionego na rysunku 1-1.

1.2.2 Charakterystyki sieci

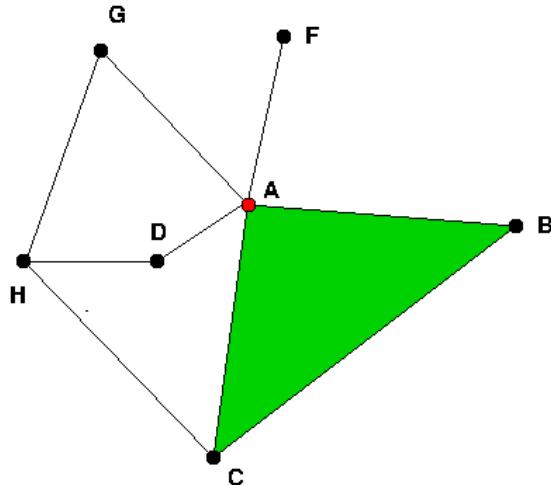
Jedną z podstawowych charakterystyk sieci jest **rozkład stopni wierzchołków**. Jest to rozkład prawdopodobieństwa $P(k)$, że wybrany wierzchołek ma dokładnie k połączeń z innymi wierzchołkami. $P(k)$ jest uzyskiwany przez zliczanie ilości wierzchołków $N(k)$, które tworzą $k = 1, 2, \dots, N$ połączeń i dzielenie tej liczby przez liczbę całkowitą wierzchołków N . Rozkład stopnia wierzchołka pozwala rozróżnić pomiędzy różnymi klasami sieci.

W wielu sieciach, jeśli wierzchołek A jest połączony z B i B jest połączony z C , to jest bardzo prawdopodobne, że A również ma bezpośrednie połączenie do C . To zjawisko może być określone ilościowo za pomocą **lokalnego współczynnika gronowania** C_i

$$C_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1-1)$$

gdzie n_i jest ilością połączeń pomiędzy k_i sąsiadami wierzchołka i [3].

Innymi słowy, C_i informuje o liczbie trójkątów, które zawierają węzeł i jako jeden ze swoich wierzchołków, podczas gdy $k_i(k_i - 1)/2$ jest maksymalną liczbą trójkątów, które mogłyby zawierać wierzchołek i , jeżeli wszyscy sąsiadzi wierzchołka i byłyby połączeni ze sobą [3].



Rysunek 1-2. Sposób liczenia współczynnika gronowania sieci.

Na przykład, spośród pięciu sąsiadów wierzchołka A (Rysunek 1-2), jedyną parą sąsiadów, pomiędzy którymi istnieje połączenie, są wierzchołki B i C . Daje to $n_A = 1$ i $C_A = 2/20$. Natomiast żaden z sąsiadów wierzchołka D , nie łączy się z innym sąsiadem wierzchołka D , zatem $n_D = 0$ i $C_D = 0$ [3].

Dysponując lokalnymi współczynnikami gronowania C_i można obliczyć **średni współczynnik gronowania** $\langle C \rangle$, który charakteryzuje ogólną skłonność wierzchołków do formowania się w klastry. Otrzymuje się go poprzez zsumowanie lokalnych współczynników gronowania C_i dla każdego wierzchołka i podzielenie przez całkowitą liczbę wierzchołków [3]:

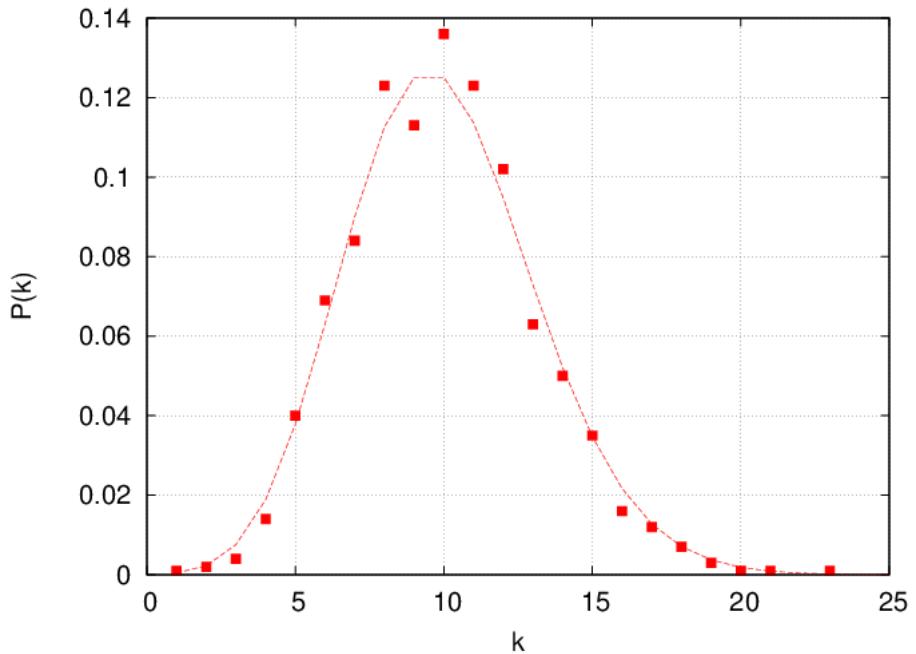
$$\langle C \rangle = \frac{\sum_i^N C_i}{N}, \quad (1-2)$$

gdzie C_i jest lokalnym współczynnikiem gronowania wierzchołka i , a N liczbą wierzchołków sieci.

Kształty wykresów funkcji $C(k)$, która przedstawia zależność średniego współczynnika gronowania wierzchołków tworzących k połączeń od stopnia wierzchołka k oraz funkcji $\langle C \rangle(N)$, przedstawiającej zależność średniego współczynnika gronowania od wielkości sieci, są istotnym wyznacznikiem klasyfikacji badanej sieci [3].

1.2.3 Sieci Erdős-Rényiego

W sieci przypadkowej Erdős-Rényiego, wierzchołki tworzą zbliżoną liczbę połączeń z innymi wierzchołkami. Jako przykład może posłużyć sieć autostrad USA [4]. Wykres rozkładu stopni wierzchołków takiej sieci przedstawia Rysunek 1-3:



Rysunek 1-3. Wykres rozkładu stopni wierzchołków sieci Erdős-Rényiego o rozmiarze $N = 1000$ węzłów. Na osi odciętych znajdują się wartości stopni wierzchołków, natomiast na osi rzędnych wartości odpowiadających im prawdopodobieństw, że wybrany wierzchołek ma dokładnie k połączeń z innymi wierzchołkami. Przerywana linia reprezentuje wykres rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej równej 10.

Jak przedstawiono na Rysunku 1-3, rozkład stopnia wierzchołka jest rozkładem Poissona, zatem wartości prawdopodobieństw $P(k)$ wynoszą:

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k}{k!} e^{-\langle k \rangle}, \quad (1-3)$$

gdzie $\langle k \rangle$ jest średnim stopniem wierzchołka sieci.

Generacja sieci Erdős-Rényiego polega na początkowym zdefiniowaniu zbioru N węzłów a następnie losowym wyborze spośród wszystkich par węzłów z tego zbioru określonej liczby par i utworzeniu połączeń między węzłami wchodzącyymi w skład wybranej pary. Wartość prawdopodobieństwa p wybrania pary węzłów ze zbioru ma bezpośrednie przełożenie na średni stopień wierzchołka tak otrzymanej sieci, zgodnie z zależnością:

$$\langle k \rangle = p(N - 1) . \quad (1-4)$$

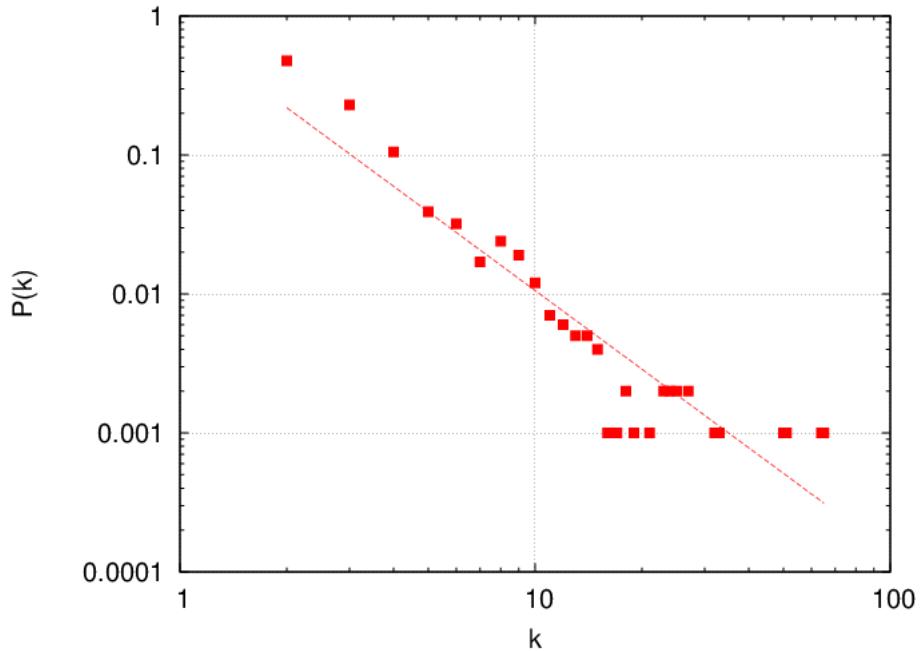
Średni współczynnik gronowania sieci Erdős-Rényiego jest równy prawdopodobieństwu p . Widać zatem, że dla sieci rzadkich, dla których $\langle k \rangle \ll N$, jest on bliski零.

1.2.4 Sieci bezskalowe

Dla sieci bezskalowych, większość wierzchołków ma niewielką liczbę połączeń z innymi, natomiast istnieją takie, które łączą się z bardzo dużą liczbą wierzchołków (są one nazywane

hubami). Zatem rozkład „gęstości połączeń” jest w tym przypadku bardzo nierównomierny i mówi się o „braku skali”. Jako przykład może posłużyć sieć połączeń lotniczych USA [4].

Wykres rozkładu stopni wierzchołków przedstawiono na Rysunku 1-4:



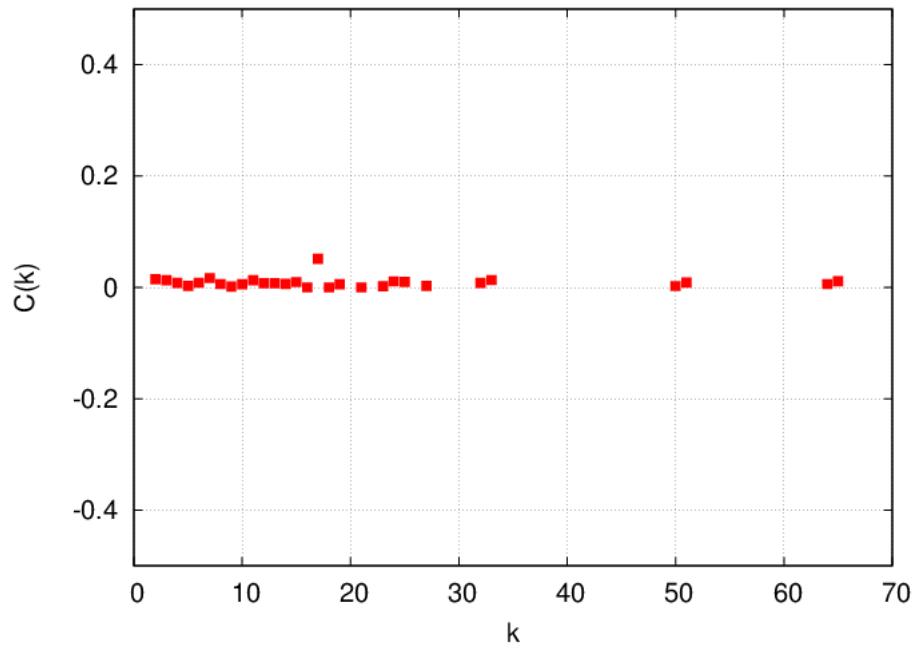
Rysunek 1-4. Wykres rozkładu stopni wierzchołków sieci bezskalowej Albert-Barabásiego o rozmiarze $N=1000$ węzłów w skali logarytmicznej. Na osi odciętych znajdują się wartości stopni wierzchołków, natomiast na osi rzędnych wartości odpowiadających im prawdopodobieństw, że wybrany wierzchołek ma dokładnie k połączeń z innymi wierzchołkami. Linia przerywana odpowiada dopasowaniu metodą najmniejszych kwadratów funkcji potęgowej postaci k^γ , gdzie $\gamma \approx 2$.

Z wykresu na Rysunku 1-4 widać, że najczęściej jest wierzchołków, z których wychodzi niewielka liczba krawędzi, zaś rozkład stopnia wierzchołka jest potęgowy (w skali logarytmicznej jest linią prostą), zatem z dokładnością do stałej normalizacji wartości prawdopodobieństw $P(k)$ wynoszą:

$$P(k) \propto k^{-\gamma}. \quad (1-5)$$

W sieciach rzeczywistych często spotykanymi wartościami γ są liczby z przedziału (2,3).

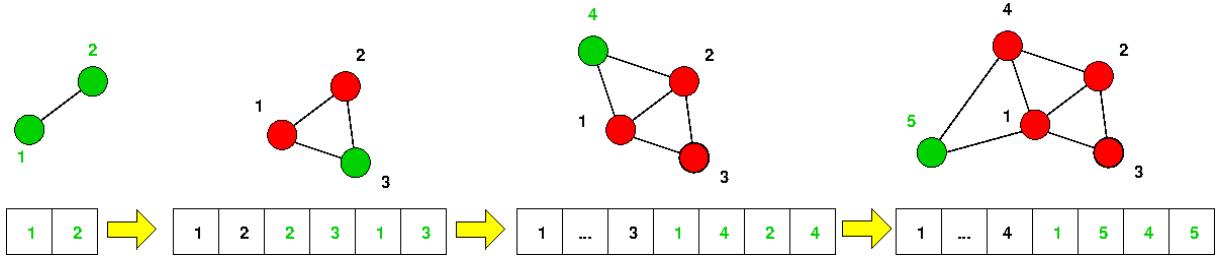
Inną charakterystyczną właściwością sieci bezskalowej jest brak zależności lokalnego współczynnika gronowania od stopnia wierzchołka, co ilustruje Rysunek 1-5.



Rysunek 1-5. Wykres zależności współczynnika gronowania od stopnia wierzchołka dla sieci bezskalowej Albert-Barabásiego o rozmiarze $N=1000$ węzłów. Na osi odciętych znajdują się wartości stopni wierzchołków, natomiast na osi rzędnych wartości odpowiadających im współczynników gronowania.

Generacja bezskalowej sieci Albert-Barabásiego polega na dodawaniu w każdym kroku czasowym nowego wierzchołka, łącząc go z ustaloną liczbą już istniejących wierzchołków. Jako punkt wyjściowy, zwykle przyjmowany jest graf w pełni połączony. Liczba tworzonych w każdym kroku czasowym połączeń jest parametrem charakterystycznym dla danej sieci. Nie może ona przekraczać liczby węzłów istniejących w chwili początkowej. Prawdopodobieństwo, że nowy wierzchołek zostanie przyłączony do danego wierzchołka jest proporcjonalne do stopnia (liczby sąsiadów) tego wierzchołka. Nazywa się to regułą preferencyjnego przyłączania.

Generując sieć Albert-Barabásiego wygodnie jest skorzystać ze struktury zwanej listą Kertesza [6]. Pozwala ona realizować regułę preferencyjnego przyłączania poprzez losowy wybór elementów z tej listy. Każde bowiem nowe połączenie w danej sieci powoduje, iż do listy Kertesza trafiają kolejne pary liczb, będących etykietami nowo dodanego i istniejącego już w sieci węzła, zatem etykiety węzłów tworzących najwięcej połączeń są numerami najczęściej powtarzającymi się w liście. Sposób tworzenia listy Kertesza przedstawia Rysunek 1-6.



Rysunek 1-6. Ilustracja konstrukcji listy Kertesza umożliwiającej prostą realizację reguły preferencyjnego przyłączania.

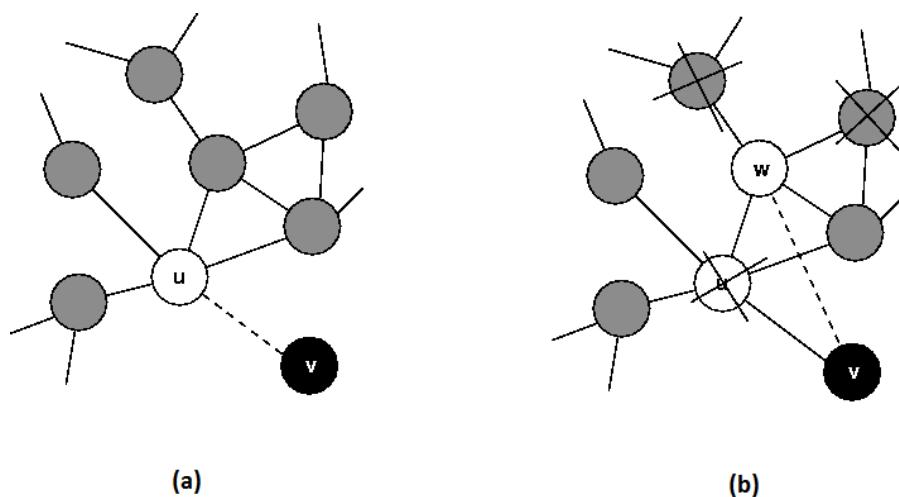
1.2.5 Sposoby sterowania współczynnikiem gronowania sieci

Badanie wpływu współczynnika gronowania na dynamikę procesów kontaktowych jest istotnym punktem niniejszej rozprawy. Ponieważ współczynniki gronowania sieci Erdős-Rényiego oraz Albert-Barabásiego są bliskie zeru, zaś dla sieci regularnej Wattsa-Strogatza możliwa jest tylko jedna wartość tego współczynnika, konieczne stało się sięgniecie po algorytmy pozwalające na sterowanie współczynnikiem gronowania dla poszczególnych sieci.

Algorytm Holme'a zwiększenia współczynnika gronowania sieci Albert-Barabásiego

W swojej pracy, Petter Holme i Beom Jun Kim przedstawili sposób zwiększenia współczynnika gronowania sieci, z jednoczesnym zachowaniem rozkładu stopnia wierzchołka charakterystycznego dla sieci bezskalowych [7].

Sposób polega na modyfikacji istniejącego algorytmu tworzenia sieci, poprzez dodanie dodatkowego kroku — formowania triad. Mianowicie po dodaniu zgodnie z regułą preferencyjnego przyłączania wiązania pomiędzy węzłami u i v (Rysunek 1-7-a), dodawane jest jedno dodatkowe połączenie z losowo wybranym sąsiadem węzła u , tak by utworzyć triadę. Nawet jeśli znajdują się w sieci węzły tworzące więcej połączeń, zawsze zostanie wybrany któryś z sąsiadów węzła u , jak na przykład węzeł w (Rysunek 1-7-b). Jeśli nie ma takiej możliwości (np. wszyscy sąsiedzi węzła u są już połączeni z węzłem v) — dodawane jest kolejne połączenie węzła v , zgodnie z regułą preferencyjnego przyłączania.



Rysunek 1-7. Ilustracja zastosowania algorytmu zwiększania gronowania. Węzły przekreślone nie

mogą zostać wybrane do utworzenia nowego połączenia.

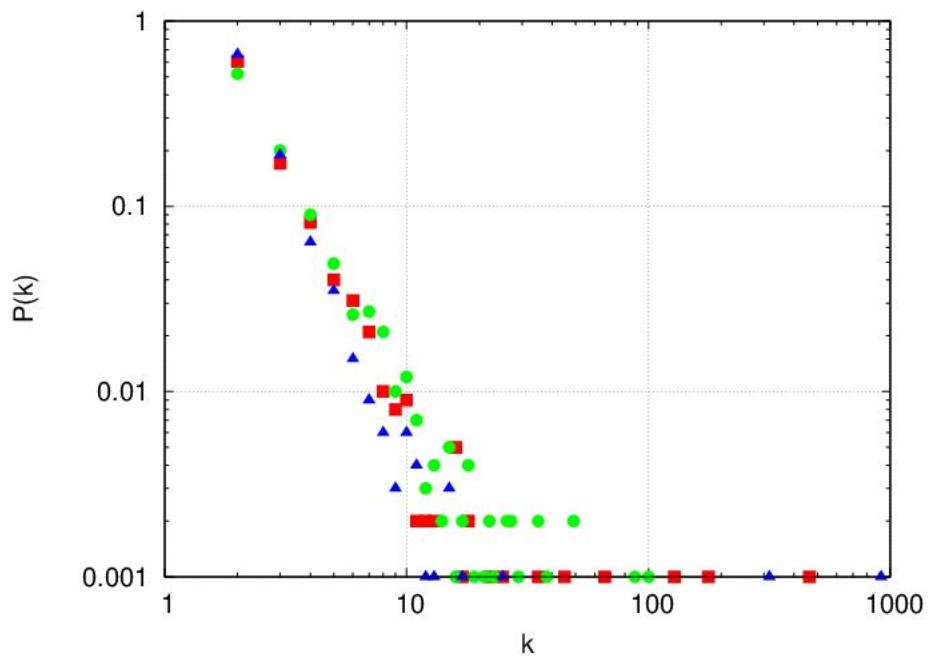
Wielkość osiągniętego współczynnika gronowania dla sieci jest sterowana wartością prawdopodobieństwa formowania triad P_t . Prawdopodobieństwo to określa czy nowe połączenie zostanie dodane zgodnie z regułą preferencyjnego przyłączania, czy tak aby uformować triadę.

Zależność średniej liczby m_t uformowanych triad dla każdego dodanego węzła tworzącego m połączeń od tego prawdopodobieństwa przedstawia się następująco [7]:

$$m_t = (m-1)P_t \quad (1-6)$$

Dla zerowego prawdopodobieństwa P_t algorytm redukuje się do oryginalnego algorytmu generacji sieci Albert-Barabásiego.

Jak zostało sprawdzone bezpośrednia symulacją, wygenerowana w ten sposób sieć zachowuje charakterystyki sieci bezskalowej. Wyniki testu numerycznego przedstawia Rysunek 1-8.

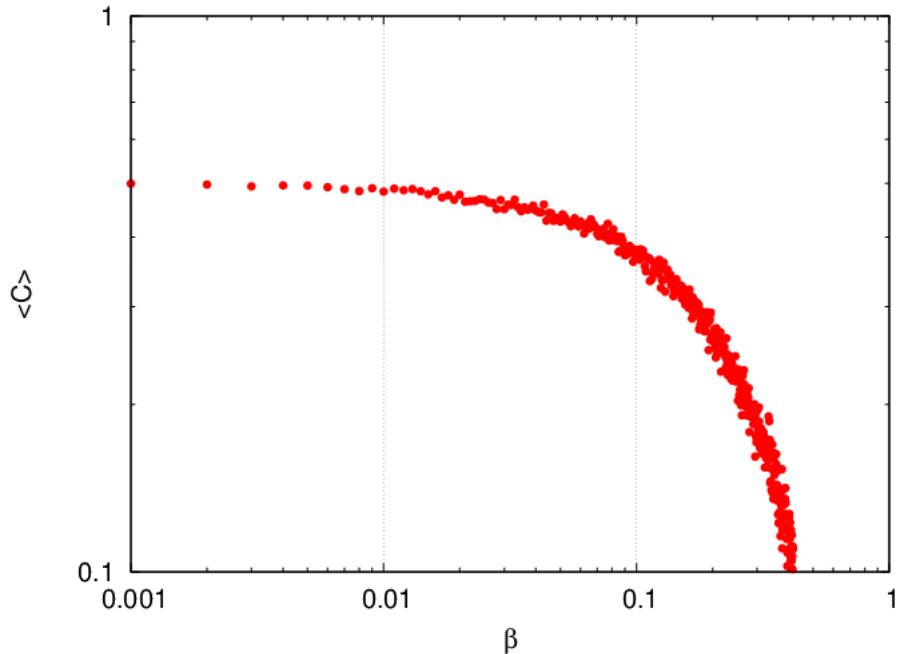


Rysunek 1-8. Wykresy w skali logarytmicznej rozkładu stopni wierzchołków sieci bezskalowej Alberta-Barabásiego o rozmiarze $N=1000$ węzłów i średnim stopniu wierzchołka równym cztery dla różnych wartości współczynnika gronowania sieci C : okręgi reprezentują $C=0,1$, kwadraty $C=0,5$, trójkąty $C=0,8$.

Algorytm przełączania połączeń w sieci Wattsa-Strogatza

Regularna (nieprzełączona) sieć Wattsa-Strogatza charakteryzuje się identycznym stopniem wierzchołka wszystkich węzłów w sieci wynoszącym $k=4$ oraz współczynnikiem gronowania wynoszącym 0,5. Sterowanie wartością współczynnika gronowania C jest możliwe poprzez losowe przełączanie połączeń między węzłami sieci. Poprzez zwiększenie wartości

prawdopodobieństwa przełączania osiągane jest zmniejszenie współczynnika gronowania sieci — dla prawdopodobieństwa wynoszącego jeden, wartość współczynnika gronowania sieci wyniesie tyle, ile dla sieci Erdősa-Rényiego o takim samym średnim stopniu wierzchołka. Zależność współczynnika gronowania od prawdopodobieństwa przełączania przedstawia Rysunek 1-9.

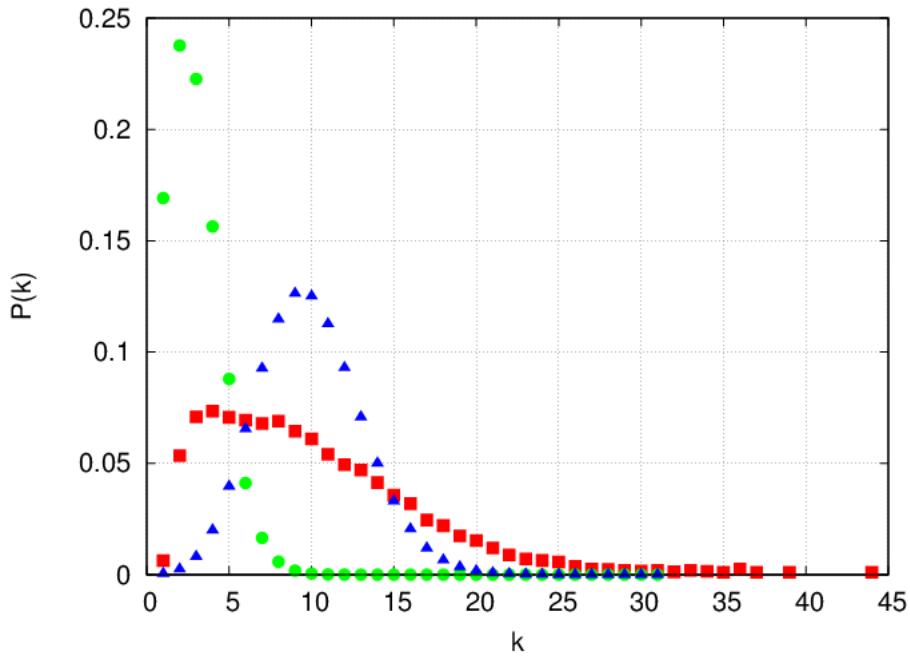


Rysunek 1-9. Wykres zależności współczynnika gronowania C od prawdopodobieństwa β przełączania połączeń między węzłami sieci Wattsza-Strogatza o rozmiarze $N=1000$ węzłów.

Przełączanie połączeń między węzłami sieci Wattsza-Strogatza wpływa na jej charakterystyki – rozkład stopni wierzchołków przełączonej sieci zaczyna przypominać rozkład stopni wierzchołków sieci Erdősa-Rényiego.

Algorytm zwiększenia gronowania sieci Erdősa-Rényiego.

Przypadkowa sieć Erdősa-Rényiego, będąca grafem rzadkim, charakteryzuje się współczynnikiem gronowania bliskim zeru, jak zostało to wyjaśnione w Rozdziale 1.2.3. Zwiększenie gronowania jest osiągane poprzez dodawanie połączeń między węzłami mającymi wspólnego sąsiada, z określonym prawdopodobieństwem. Zwiększając wartość tego prawdopodobieństwa, zwiększa się jednocześnie współczynnik gronowania sieci otrzymanej w wyniku zastosowania tej procedury. Zaaplikowanie tego algorytmu powoduje zmianę charakterystyki sieci: następuje zwiększenie średniego stopnia wierzchołka sieci oraz zmiana rozkładu stopni wierzchołków, który przestaje być poissonowski. Ten efekt ilustruje Rysunek 1-10.



Rysunek 1-10. Rozkład stopnia wierzchołka sieci Erdősa-Rényiego o zwiększym współczynniku gronowania C wynoszącym 0,5 i średnim stopniu wierzchołka równym 10 (czerwone kwadraty), na tle rozkładu stopnia wierzchołka sieci bazowej o niezwiększym gronowaniu i średnim stopniu wierzchołka wynoszącym około 2,8 (zielone koła) oraz rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej 10, odpowiadającej średniemu stopniowi wierzchołka sieci o zwiększym gronowaniu (niebieskie trójkąty).

1.3 Procesy kontaktowe na sieciach

1.3.1 Wprowadzenie

Procesy kontaktowe są stosowane do modelowania różnorodnych zjawisk, zaczynając od rozprzestrzeniania się epidemii [8, 9, 10], przez reakcje chemiczne [11], a na ruchu ulicznym [12, 13] kończąc. Pierwsze badania tego rodzaju procesów w kontekście rozprzestrzeniania się chorób czy też epidemii miały miejsce na początku XX wieku (Ross 1916 [8] oraz 1917 [9], Brownlee 1918 [10]). Opis matematyczny procesów kontaktowych i istnienie przejścia fazowego zostały zaprezentowane przez Harrisa w pracy z 1974 roku [14]. Dalsze badania przemian fazowych zachodzących w takich systemach były prowadzone m.in. przez Grassbergera (1983) [15], Andersona i May'a (1991) [16], Hethcote'a (2000) [17] i wielu innych. Badane było również zachowanie tych procesów na sieciach złożonych przez Barrata (2008) [18] oraz Dorogovtseva (2008) [19].

Zazwyczaj przyjmuje się, że choroba jest zapoczątkowywana przez jedną lub kilka zainfekowanych osób i propaguje się poprzez infekowanie ich sąsiadów. Proces propagacji choroby może zakończyć się na dwa sposoby: choroba może wygasnąć, jeśli prawdopodobieństwo zakażenia jest niskie, lub może opanować skończoną część populacji, powodując epidemię. Jednym z najpopularniejszych matematycznych modeli epidemii jest model

SIR [21]. Model ten zakłada, że całkowita populacja, w której wybuchnie epidemia jest stała, tzn. nie występuje migracja osobników oraz czas trwania epidemii jest na tyle krótki, że nie są uwzględniane narodziny i śmierć osobników z przyczyn naturalnych. Populacja, którą opanowała epidemia dzielona jest na trzy odrębne klasy osobników:

- S czyli susceptible – podatnych na chorobę,
- I czyli infected – zarażonych, którzy mogą rozprzestrzeniać chorobę,
- R czyli removed/recovered – usuniętych z populacji przez śmierć, izolację lub wyzdrowiałych po przebytej chorobie i odpornych na powtórne zarażenie.

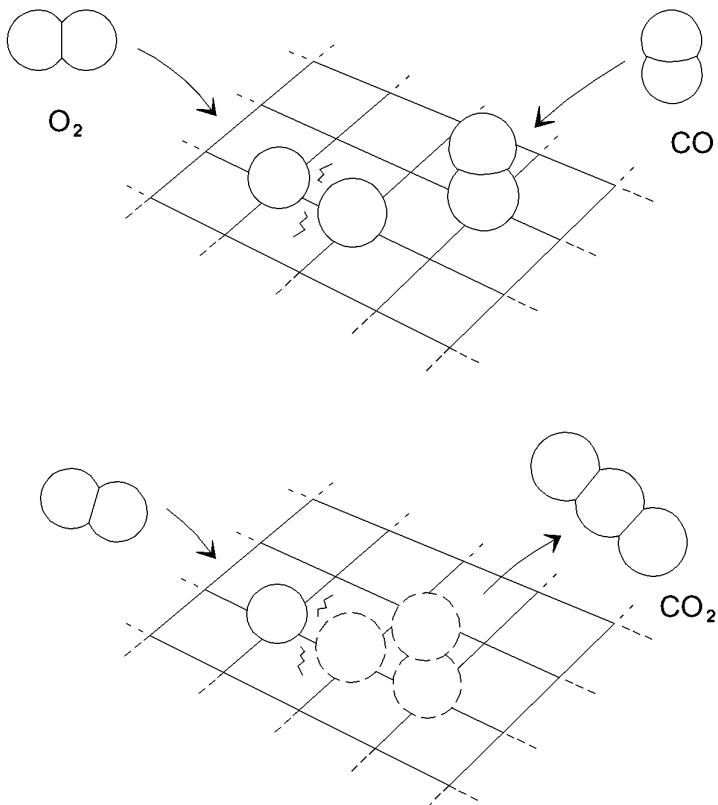
Model ten pozwalał wyznaczyć wartość progu epidemiologicznego, nazywanego również stopą reprodukcji epidemii. Definiuje się go jako liczbę wtórnego infekcji spowodowanych przez jednego zarażonego wprowadzonego do populacji składającej się wyłącznie z jednostek podatnych. Dla wartości progu mniejszych od jednego, epidemia naturalnie wygasza [21].

Oprócz ściśle teoretycznego zainteresowania, badanie procesów kontaktowych w kontekście rozprzestrzeniania się chorób zakaźnych znalazło istotne praktyczne zastosowanie jakim jest opracowywanie programów szczepień dla społeczeństwa na podstawie wyliczonej stopy reprodukcji epidemii [8].

Innymi zastosowaniami procesów kontaktowych w naukach biologicznych było wyjaśnienie rozkładów liczności gatunków obserwowanych w deszczowych lasach tropikalnych [22], modelowanie przestrzenne rozprzestrzeniania się pojedynczych populacji, takich jak np. populacja żonkili [23] czy też modelowania przestrzennego dynamiki populacji drapieżnik-ofiara [24].

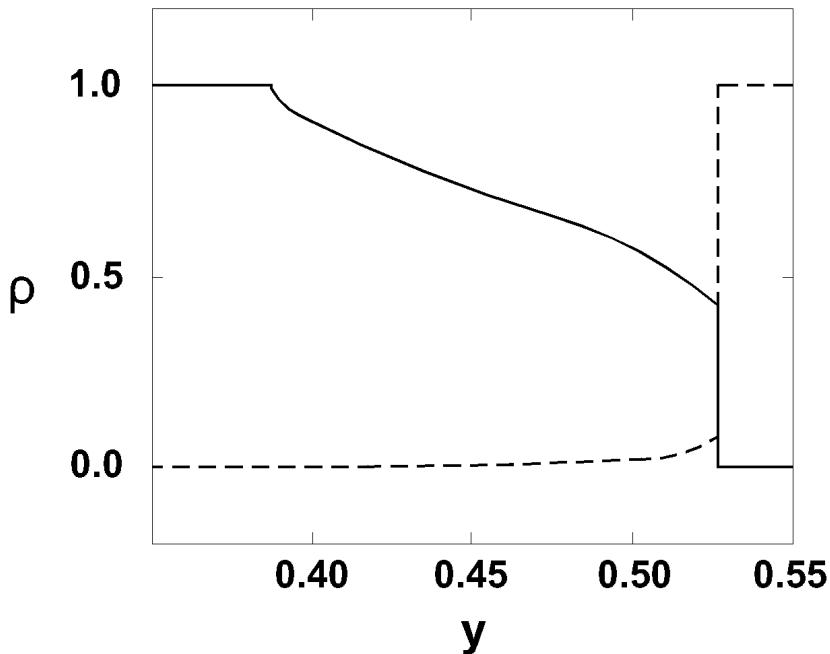
Dobrym przykładem zastosowania procesów kontaktowych w naukach chemicznych jest zaproponowany w 1986 roku model Ziffa-Gulariego-Barshada [11]. Model ten – który po raz pierwszy został użyty do opisu reakcji utleniania tlenku węgla (CO) na powierzchni katalizatora (np. platyny) – jest używany do symulowania przebiegu reakcji katalitycznych. Powierzchnia katalityczna jest reprezentowana w nim przez siatkę kwadratową. Reguły przejść (przedstawione na rysunku 1-11) definiują parametr y , reprezentujący prawdopodobieństwo, że nastąpi adsorpcja cząsteczki tlenku węgla (CO) na powierzchni katalizatora. Natomiast prawdopodobieństwo, że nastąpi adsorpcja cząsteczki tlenu (O_2) wynosi $1-y$. Wartości te mogą być interpretowane jako stężenia molowe CO i O_2 w mieszaninie gazowej nad powierzchnią katalizatora. Model zakłada, że mieszanina ta jest ciągle uzupełniana z zewnątrz, co powoduje że jej skład nie zmienia się w trakcie ewolucji układu [25]. Do adsorpcji cząsteczki CO na powierzchni katalizatora potrzebny jest tylko jeden pusty węzeł siatki kwadratowej, reprezentującej tę powierzchnię. Natomiast adsorpcja dysocjacyjna (ponieważ następuje dysocjacja O_2 na tlen atomowy) cząsteczki tlenu wymaga dwóch pustych węzłów, będących swoimi najbliższymi sąsiadami na tej siatce. Jeżeli w sąsiednich węzłach siatki znajdzie się para CO-O , ulega ona natychmiastowej desorbcji asocjacyjnej z powierzchni katalizatora, jako gazowy

produkt reakcji utleniania CO₂. Zasady modelu nie dopuszczają możliwości readsorpcji, dysocjacji oraz niereakcyjnej desorpcji CO₂ – jest to więc proces nieodwracalny [26].



Rysunek 1-11. Ilustracja reguł modelu Ziffa-Gulariego-Barshada. Górnny rysunek obrazuje adsorcję cząsteczki tlenu (desocjacyjną — wymaga dwóch pustych sąsiednich węzłów siatki reprezentującej powierzchnię katalizatora) oraz tlenku węgla (wymaga tylko jednego pustego węzła). Dolny rysunek przedstawia desorpcję asocjacyjną cząsteczki dwutlenku węgla, wymagającej obecności atomu tlenu i cząsteczki tlenku węgla w dwóch sąsiednich węzłach. Rysunek na podstawie [26].

Model Ziffa-Gulariego-Barshada pokazuje istnienie przejścia fazowego pomiędzy dwoma stanami absorbującymi (nazywanymi również „zatrutymi” od zatrucia katalizatora) – kiedy węzły siatki są zajęte przez cząsteczki tlenku węgla w taki sposób, że nie ma możliwości przyłączenia atomów tlenu lub są zajęte przez atomy tlenu, w sposób uniemożliwiający dołączenie tlenku węgla – i aktywnym stanem stacjonarnym. Ilustruje to Rysunek 1-12. Przeprowadzone symulacje numeryczne [27] pokazały, że aktywność katalityczna występuje tylko w zakresie wartości 0,39 < y < 0,525, a w układzie występują dwa rodzaje przejść fazowych. Przejście do stanu zatrucia tlenem jest ciągłe, natomiast przejście do stanu zatrucia tlenkiem węgla jest przejściem fazowym pierwszego rodzaju [28].



Rysunek 1-12. Schemat diagramu fazowego modelu Ziffa-Gulariego-Barshada. Stężenia tlenku węgla (przerywana linia) i tlenu (linia ciągła) w stanie stacjonarnym na powierzchni katalizatora wykreślono w funkcji stężenia CO y w fazie gazowej. Rysunek na podstawie [28].

Również w stosunkowo nowej dyscyplinie wiedzy jaką jest socjofizyka [20], znalazło się miejsce dla procesów kontaktowych w kontekście modelowania dynamiki zjawisk społecznych. Przykładami takich zjawisk są zjawiska rozchodzenia się pogłosek na dany temat bądź nowin w społeczeństwie [29]. Widać tu podobieństwo do rozprzestrzeniania się epidemii: jednostki poinformowane pełnią rolę zainfekowanych, natomiast niepoinformowane – podatnych na infekcję [30]. Jakkolwiek istnieją różnice – pogłoski czy nowiny w przeciwnieństwie do chorób są rozpowszechniane intencjonalnie, przynosząc korzyści jednostkom je rozpowszechniającym – większość tych różnic leży w interpretacji parametrów modelu. Niektóre z istotnych pytań, jakie pojawiają się przy okazji badania rozprzestrzeniania się pogłosek, są podobne do tych zadawanych w kontekście epidemii, np. czy istnieje wartość progowa prawdopodobieństwa, że jednostki poinformowane przekażą sobie informację, powyżej której pogłoska rozprzestrzeni się w danej populacji [31].

Innym przykładem z tej samej dziedziny wiedzy jest modelowanie opinii społecznych. Modelowane są obserwowane w rzeczywistym świecie zmiany opinii dotyczące zadanego tematu. Tematami mogą być preferencje polityczne, preferencje konsumenckie i inne zagadnienia. Najczęściej stosowane są modele agentowe, w których pojedynczy „agent” jest odpowiednikiem osoby, a cały układ składa się z wielu tego typu agentów. Agent zwykle ma przypisaną tylko jedną opinię, która jest liczbowym przedstawieniem poglądu agenta. Istnieją zarówno modele zakładające dyskretne wartości tych opinii (np. -1 i +1), takie jak opisane w dalszej części

rozprawy model wyborcy, inwazji oraz model Sznajdów, jak również zakładające ciągłe widmo wartości opinii, jak model Deffuanta [32] czy Hegselmanna-Krausego [33].

W modelowaniu opinii społecznych oprócz zdefiniowanych reguł dynamiki, istotną rolę pełni również topologia sieci, która odwzorowywuje połączenia pomiędzy poszczególnymi agentami [34]. W pracach badany jest wpływ takich parametrów jak rozkład stopnia wierzchołka czy współczynnik gronowania sieci na wyniki. Również w niniejszej rozprawie istotną jej część poświęcono różnicom w wynikach dla ustalonych reguł dynamiki dla trzech różnych sieci: Erdősa-Rényiego, Wattsa-Strogatza oraz Albert-Barabásiego.

1.3.2 Model Harrisa

Dynamika badanych w niniejszej rozprawie procesów polega na zmianie stanu w jakim znajdują się poszczególne węzły sieci w danej chwili czasowej. Czynnikiem, który warunkuje zmianę stanu danego węzła, jest kontakt z innymi węzłami sieci — węzły sieci mogą się kontaktować, jeżeli istnieje połączenie między nimi. Zatem kontakt z innym węzłem bądź węzłami znajdującymi się w określonych stanach może spowodować zmianę stanu danego węzła sieci.

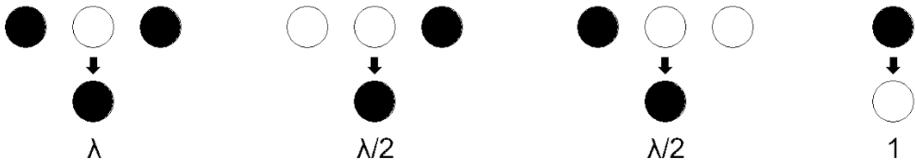
Pojęcie procesu kontaktowego zostało wprowadzone przez T.E. Harrisa w 1974 roku, w kontekście modelowania rozprzestrzeniania się epidemii [14]. W zaproponowanym modelu, każdy węzeł d -wymiarowej, regularnej siatki hiperkubicznej reprezentuje organizm, który w danej chwili czasowej może znajdować się w jednym z dwóch możliwych stanów S : zdrowym bądź zainfekowanym ($S \in \{0,1\}$).

W modelu tym definiuje się współczynniki $\lambda(x, y)$ zarażania węzła x przez węzeł y oraz współczynniki zdrowienia u_x [14]. Zdrowe węzły są infekowane w tempie proporcjonalnym do ilości zainfekowanych sąsiadów, co w przypadku jednowymiarowym dla węzła x , posiadającego dwóch sąsiadów (y oraz z) wynosi: $\lambda(x, y)S(y) + \lambda(x, z)S(z)$.

Najczęściej przyjmuje się, że współczynniki zdrowienia są stałe i równe jedności, natomiast współczynniki zarażania dla wszystkich węzłów są równe pewnej niezerowej wartości λ [35].

Sposób definiowania wskaźników tempa zarażania, przy ustalonej wartości współczynnika zarażania λ oraz współczynnika zdrowienia, dla jednowymiarowego procesu kontaktowego przedstawia Rysunek 1-13. Widać z niego, że w przypadku kiedy węzeł zdrowy (biały) ma dwóch zainfekowanych (czarnych) sąsiadów, tempo zarażania jest dwukrotnie większe, niż w przypadku posiadania tylko jednego zarażonego sąsiada.

Ponieważ w przedstawionym modelu węzeł może być zarażony tylko poprzez kontakt z innym zainfekowanym węzłem, dla dostatecznie małych wartości współczynnika λ , może zostać osiągnięty stan absorbujący, w którym wszystkie węzły będą „zdrowe”.



Rysunek 1-13. Wartości wskaźników tempa zarażania (trzy pierwsze konfiguracje od lewej) dla jednowymiarowego procesu kontaktowego, w zależności od konfiguracji sąsiadów węzła zdrowego. Ostatnia konfiguracja przedstawia przypadek zdrowienia zainfekowanego węzła, gdzie współczynnik zdrowienia jest równy jedności. Czarne punkty reprezentują węzły „zarażone”, natomiast białe – „zdrowe” [26].

Proces kontaktowy jest procesem stochastycznym posiadającym własność Markowa, co oznacza że przyszły stan układu zależy jedynie od jego stanu teraźniejszego, nie zaś od stanów, w których układ znajdował się w przeszłości.

W symulacjach komputerowych naturalne jest zastosowanie podejścia dyskretnego [26]: w każdym kroku czasowym symulacji losowany jest jeden węzeł, a następnie zgodnie z przyjętymi współczynnikami zarażania i zdrowienia, jeżeli węzeł ten jest „zarażony” może „wyzdrowieć” (stosuje się tu również określenie „anihilacja węzła”), i/lub zarazić najbliższego, „zdrowego” sąsiada (tutaj mówi się o „kreacji węzła”). Przy zaaplikowaniu odpowiednio dużej liczby kroków czasowych, możliwe jest osiągnięcie przez układ stanu stacjonarnego.

Mając zdefiniowane reguły zarażania i zdrowienia na poziomie pojedynczych węzłów, można zapytać o zachowanie całego układu — czy epidemia przetrwa, czy wygaśnie? Jeśli przetrwa — to pod jakimi warunkami? Wstępnych odpowiedzi na te pytania dostarcza analiza przeprowadzona metodą średniego pola. Jeżeli jako $\rho(x,t)$ zdefiniowane zostanie prawdopodobieństwo, że w danym kroku czasowym t , węzeł x jest zarażony, a jednocześnie przyjęty zostanie brak statystycznej zależności między zarażeniem poszczególnych węzłów oraz jednorodny rozkład zarażonych węzłów w przestrzeni $\rho(x,t)=\rho(t)$, można wtedy zapisać:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t) + \lambda\rho(t)(1 - \rho(t)). \quad (1-7)$$

Równanie 1-7 jest nazywane równaniem Malthusa-Verhulsta [26].

Poszukując rozwiązań stacjonarnych powyższego równania poprzez przyrównanie lewej jego strony do zera, otrzymuje się równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są $\rho_1=0$ oraz $\rho_2=1-\lambda^{-1}$. Ponieważ ρ musi być nieujemne, ρ_2 ma tylko sens dla wartości $\lambda \geq 1$. Zatem dla $\lambda > 1$ istnieje aktywny stan stacjonarny, w którym $\rho=1-\lambda^{-1}$, natomiast dla wartości $\lambda \leq 1$ jedynym stacjonarnym

rozwiązaniem tego równania jest stan próżni ($\rho=0$). Wartość $\lambda_c = 1$ nazywana jest punktem krytycznym — w otoczeniu tego punktu gęstość węzłów zarażonych zmienia się wraz z λ w sposób ciągły.

Definiując $\Delta = \lambda - \lambda_c$ w pobliżu punktu krytycznego, dla $\Delta > 0$, gęstość węzłów zarażonych podlega zależności opisanej wzorem 1-8.

$$\rho \propto \Delta^\beta. \quad (1-8)$$

Na podstawie powyższej metody średniego pola można wyliczyć, że wartość krytycznego wykładnika $\beta = 1$.

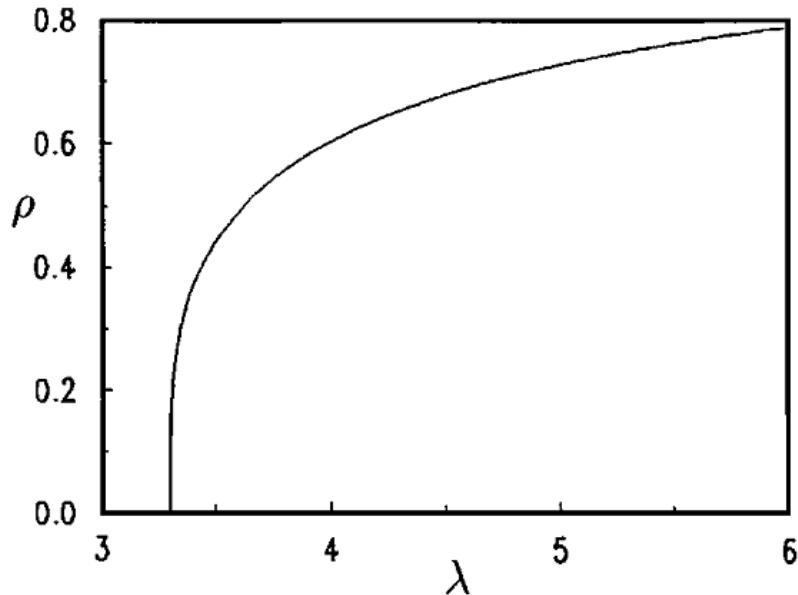
Teoria średniego pola dostarcza prawidłowego opisu jakościowego parametrów λ_c i β , natomiast ich wartości są ilościowo niepoprawne (ściślej: dla wymiaru przestrzennego siatki $d < 4$) [36]. Wynika to z założenia, że poszczególne węzły traktowane są jako statystycznie niezależne.

Z pomocą metod analitycznych nie da się również wyznaczyć dokładnych wartości λ_c możliwe jest jedynie podanie górnego i dolnego zakresu wartości jakie ta wielkość może przyjąć [37]. Jednakże liczne symulacje [38, 39, 40] pozwoliły wyznaczyć wartości λ_c i β z dosyć dużą dokładnością. Przedstawia je Tabela 1-3. Analizując te wartości widać, że wraz ze wzrostem wymiaru przestrzeni, wartości współczynników zbliżają się do tych wyliczonych metodą średniego pola.

	d=1	d=2	d=3 [44]	d=4 [26]	średnie pole [26]
λ_c	3,29785(2) [41]	1,6488(1) [43]	1,3169(1)	1	1
β	0,27649(4) [42]	0,583(4) [26]	0,805(10)	1	1

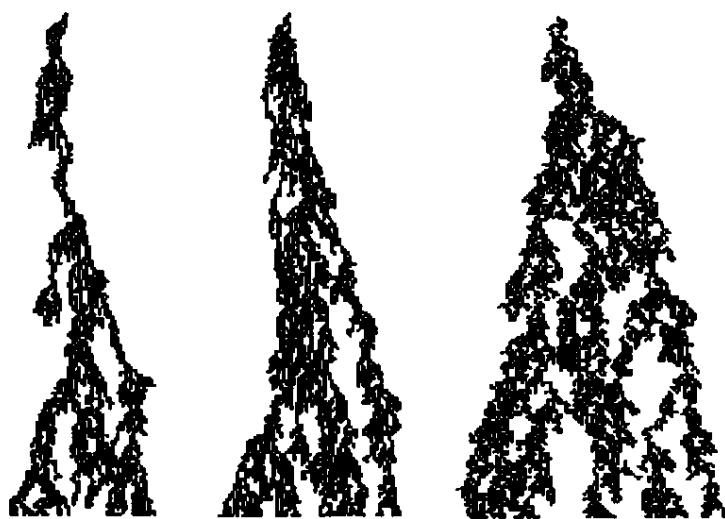
Tabela 1-3. Wartości wybranych współczynników krytycznych dla procesu kontaktowego w zależności od liczby wymiarów siatki.

Oprócz wartości współczynników krytycznych, udało się otrzymać metodą symulacji zależność gęstości węzłów zarażonych ρ od współczynnika λ dla jednowymiarowego procesu kontaktowego [39]. Przedstawia ją Rysunek 1-14. Widać na nim charakter skokowy zależności w okolicy punktu krytycznego odpowiadającego wartości $\lambda_C \approx 3,3$.



Rysunek 1-14. Zależność gęstości węzłów zarażonych od współczynnika λ , dla jednowymiarowego procesu kontaktowego [26].

Dobrą ilustrację przebiegu jednowymiarowego procesu kontaktowego w zależności od wartości współczynnika λ stanowi Rysunek 1-15. W chwili początkowej tylko jeden węzeł jest zainfekowany. Przebieg po lewej stronie odpowiada wartości współczynnika $\lambda < 3,3$, środkowy — krytycznej jego wartości $\lambda = 3,3$, natomiast przebieg po prawej stronie — wartości $\lambda > 3,3$.



Rysunek 1-15. Ilustracja jednowymiarowego procesu kontaktowego [26]. Współczynniki λ rosną od lewej do prawej i wynoszą odpowiednio: $\lambda=3,0$, $\lambda=3,3$, $\lambda=3,5$. Wymiar siatki $d=1$.

W tym miejscu komentarza wymaga sam sposób tworzenia Rysunku 1-15. Każdy przebieg został bowiem sklejony z jednowymiarowego łańcucha węzłów w kolejnych chwilach czasowych. Pomocne będzie tutaj posłużenie się przykładem deterministycznych automatów komórkowych, które są często używane do modelowania procesów kontaktowych. Są to modele matematyczne, zdefiniowane jako [45]:

- sieć komórek $\{i\}$ d -wymiarowej przestrzeni,
- k -elementowy zbiór $\{s_i\}$ stanów pojedynczej komórki — zwykle ten sam dla wszystkich komórek i ,
- reguła F określająca stan komórki w chwili $t + 1$ w zależności od stanu w chwili t tej komórki i komórek ją otaczających.

Jeśli funkcja F dodatkowo zależy od zmiennej losowej, to taki automat nazywany jest probabilistycznym albo niedeterministycznym. Przykładowe reguły przejść między stanami dla jednowymiarowego automatu deterministycznego, który posiada 2 elementowy zbiór stanów $s_i \in \{0,1\}$ (komórka pusta — biała, komórka zajęta — czarna), przedstawia Rysunek 1-16. Widać z niego, że komórka zajęta zmieni swój stan i w kolejnej chwili czasowej stanie się pusta, gdy:

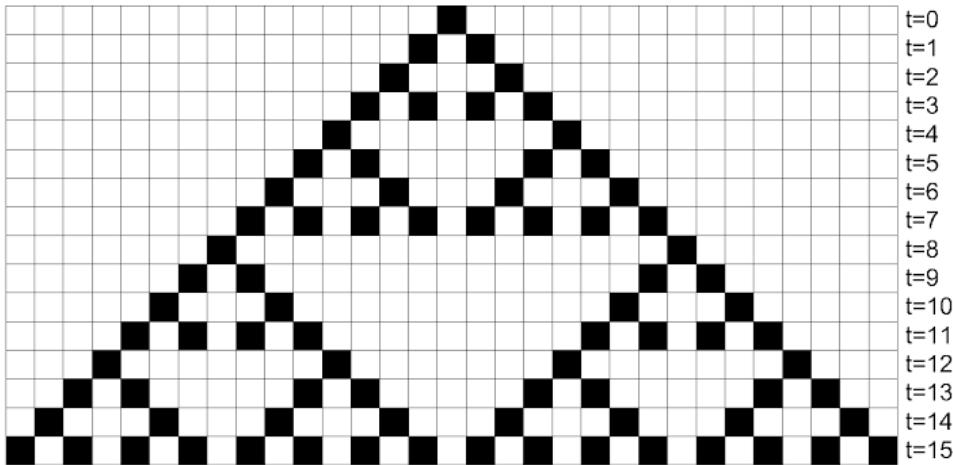
- ma dwóch sąsiadów zajętych,
- ma dwóch sąsiadów pustych.

Natomiast komórka pusta zmieni swój stan i w kolejnej chwili czasowej stanie się zajęta tylko wtedy, kiedy ma jednego sąsiada pustego i jednego zajętego. W żadnej innej konfiguracji sąsiadów komórka nie zmieni swojego stanu.



Rysunek 1-16. Reguły przejść dla jednowymiarowego, deterministycznego automatu komórkowego o dwuelementowym zbiorze stanów (zajęty — czarny, pusty — biały).

Ponieważ automat jest jednowymiarowy, jego ewolucję czasową przedstawia się na jednym rysunku — wiersze reprezentują kolejne chwile czasowe (zaczynając od góry), natomiast kolumny reprezentują komórki jednowymiarowego łańcucha. Dla reguł opisanych powyżej otrzymywany jest przebieg przedstawiony na Rysunku 1-17. W analogiczny sposób został również wygenerowany Rysunek 1-15.



Rysunek 1-17. Ewolucja czasowa jednowymiarowego, deterministycznego automatu komórkowego o dwuelementowym zbiorze stanów, którego reguły przejść przedstawia Rysunek 1-16.

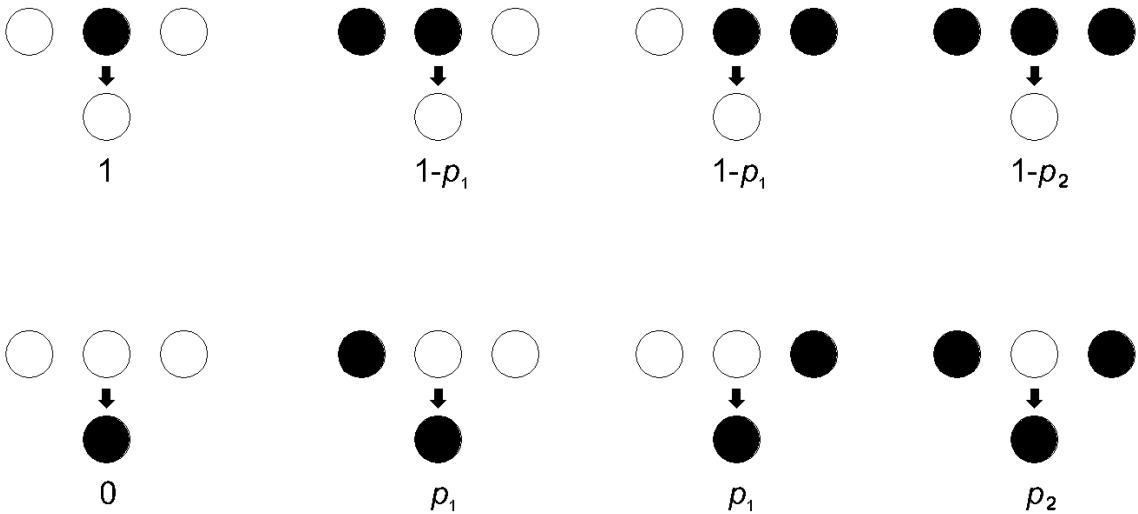
W powyższym przykładzie posłużono się automatem deterministycznym, natomiast jednym z najbardziej znanych przykładów automatów probabilistycznych jest automat Domanyego-Kinzela. Jest on zdefiniowany na jednowymiarowej sieci komórek, dla której zbiór stanów pojedynczej komórki jest zbiorem dwuelementowym $s_i \in \{0,1\}$ (komórka pusta — biała, komórka zajęta — czarna). [46]. Reguły, określające stan komórki w chwili $t+1$ mają postać prawdopodobieństw warunkowych poszczególnych przejść — przedstawia je Rysunek 1-18.

Widać z niego, że komórka pusta zmieni swój stan i w kolejnej chwili czasowej stanie się zajęta, kiedy:

- ma jednego sąsiada pustego i jednego zajętego — stanie się to z prawdopodobieństwem p_1 ,
- ma dwóch sąsiadów zajętych — stanie się to z prawdopodobieństwem p_2 .

Natomiast komórka zajęta zmieni swój stan i w kolejnej chwili czasowej stanie się pusta, kiedy:

- ma dwóch sąsiadów pustych (zmiana stanu nastąpi z prawdopodobieństwem 1),
- ma jednego sąsiada pustego i jednego zajętego — stanie się to z prawdopodobieństwem $1-p_1$,
- ma dwóch sąsiadów zajętych — stanie się to z prawdopodobieństwem $1-p_2$.

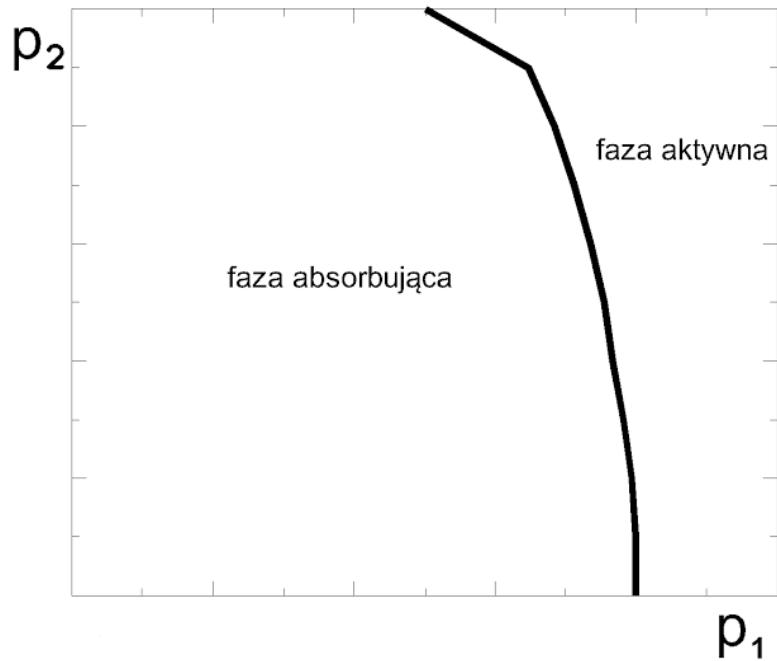


Rysunek 1-18. Prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami probabilistycznego automatu komórkowego Domanyego-Kinzel'a. Czarne punkty oznaczają komórki zajęte, białe — puste.

W swojej pracy Domany i Kinzel, posługując się metodą równań macierzy transferu, wykazali istnienie dwóch faz [46]:

- fazy absorbującej (zamrożonej) – w stanie stacjonarnym ($t \rightarrow \infty$) wszystkie komórki są puste. Nie jest możliwa ucieczka z tego stanu ze względu na to, że prawdopodobieństwo zmiany stanu pustej komórki, posiadającej dwóch pustych sąsiadów wynosi zero.
- fazy aktywnej — istnieje przynajmniej jedna zajęta komórka

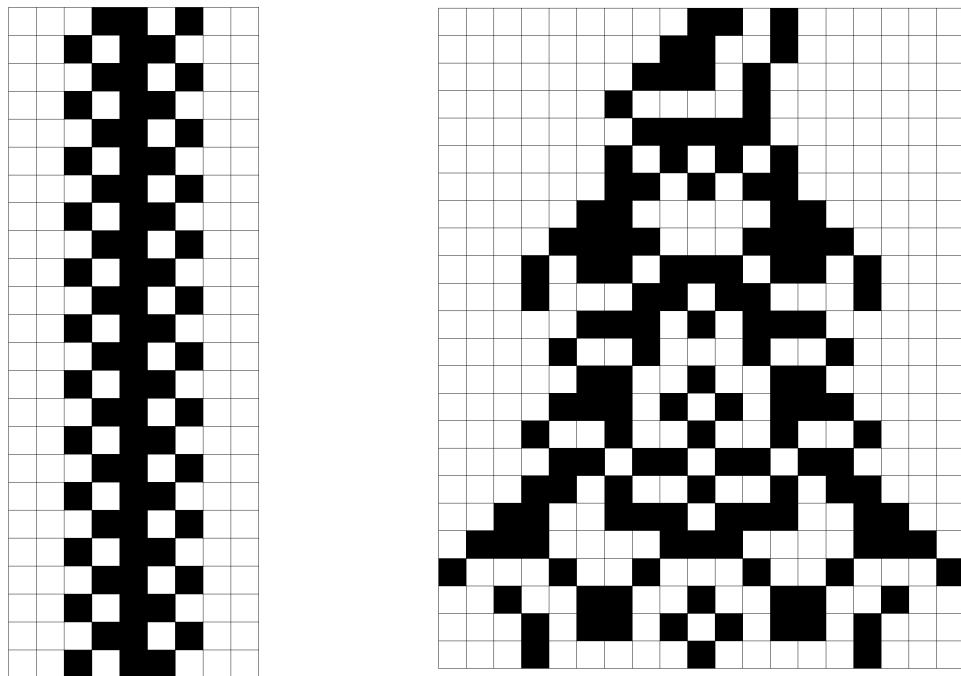
Szkic diagramu fazowego w przestrzeni parametrów p_1 oraz p_2 modelu, przedstawia Rysunek 1-19.



Rysunek 1-19. Szkic diagramu fazowego w przestrzeni parametrów będących prawdopodobieństwami warunkowymi przejść.

Rysunek 1-19 jest dobrą ilustracją zależności pomiędzy parametrami modelu — w tym przypadku prostego probabilistycznego automatu komórkowego realizującego model Domany'ego-Kinzela — a zachowaniem całego układu w stanie stacjonarnym. Zależności podobnego typu będą uzyskiwane w procesie symulacji komputerowej, a następnie analizowane w dalszej części pracy, poświęconej badaniu wpływu poszczególnych parametrów modelu procesów kontaktowych oraz właściwości sieci złożonych na których te procesy się rozprzestrzeniają, na udział węzłów określonego typu w stanie stacjonarnym w sieci.

Warto w tym miejscu odwołać się do pojęcia nieredukowalności obliczeniowej [47]. Dotyczy ono układów fizycznych, dla których jedynym sposobem przewidzenia stanu układu w przyszłości jest przeprowadzenie symulacji i przejście wszystkich kolejnych kroków czasowych. Natomiast układy obliczeniowo redukowalne to takie, których stan można opisać formułami matematycznymi — znając stan początkowy układu, możliwe jest poznanie jego stanu w każdym wybranym kroku czasowym, bez konieczności wykonywania wszystkich poprzedzających kroków [48]. Układ redukowalny i nieredukowalny obliczeniowo na przykładzie automatu komórkowego przedstawia Rysunek 1-20.



Rysunek 1-20. Układ redukowalny i nieredukowalny obliczeniowo na przykładzie automatu komórkowego. Po lewej stronie układ redukowalny obliczeniowo — znając parzystość numeru kroku czasowego, można od razu określić stan układu. Po prawej stronie — układ nieredukowalny obliczeniowo — aby poznać stan układu w danym kroku czasowym należy przejść wszystkie poprzedzające kroki.

Przykładami układów nieredukowalnych obliczeniowo są tak nieskomplikowany przecież w swoich założeniach model automatu Domanyego–Kinzela, jak i bazujące na modelu Sznajdów i modelu „z sąsiedztwem” modele procesów kontaktowych, opisywanych w dalszej części niniejszej pracy.

Jedną z konsekwencji nieredukowalności obliczeniowej jest fakt, że nie można przewidzieć *a priori* ile kroków czasowych symulacji jest wymaganych aby zaobserwować fazę absorbiującą [48]. Można jedynie na podstawie analizy wielu przebiegów symulacyjnych ocenić jakiego rzędu będą te wielkości. Dlatego właśnie w dalszej części pracy na początkowym etapie symulacji procesów kontaktowych dużo uwagi zostało poświęcone ustaleniu maksymalnego czasu symulacji tak, aby symulacje były jak najmniej kosztowne czasowo, a jednocześnie możliwe było zaobserwowanie stanu stacjonarnego układu.

1.3.3 Model wyborcy

W niniejszej rozprawie, reguły przejść między stanami węzłów badanych procesów kontaktowych zostały między innymi oparte na regułach modelu wyborcy [50]. Model ten w klasycznej postaci został zaprezentowany jako jeden z modeli probabilistycznych stosowanych do opisu oddziałyujących ze sobą częstek [50]. Następnie model został zaadaptowany w socjofizyce do badania dynamiki dojścia do konsensusu wśród grupy agentów przyjmujących opinie swoich sąsiadów [51].

W modelu tym, poszczególni agenci-wyborcy umieszczeni są pojedynczo w każdym z wierzchołków grafu. Każdy agent może przyjmować opinię z dyskretnego, n -elementowego zbioru opinii. Reguły zastosowane w modelu prezentują się następująco:

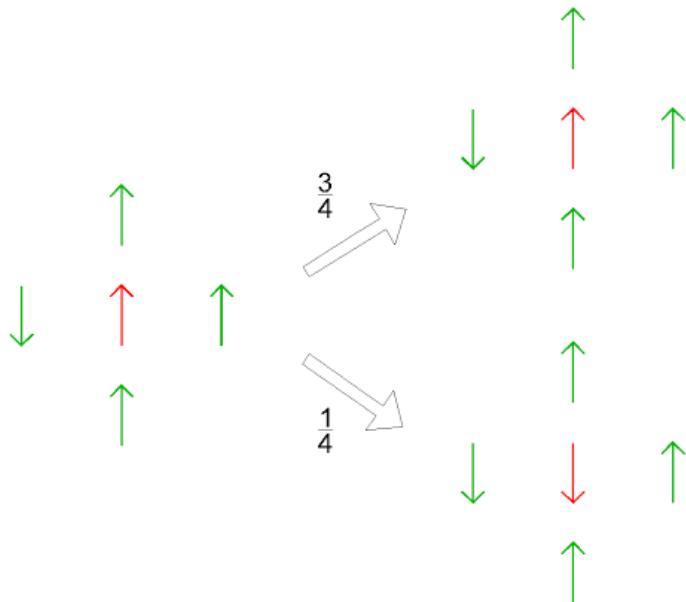
1. losowo wybierany jest jeden agent umiejscowiony w węźle i ,
2. wybrany agent przyjmuje opinię losowo wybranego sąsiada umiejscowionego w węźle j :

$$S_i(t+1) = S_j(t),$$

gdzie $S_{i,j} \in \{1,2,\dots,n\}$,

3. kroki 1 i 2 są powtarzane do momentu osiągnięcia konsensusu.

W podstawowym przypadku prawdopodobieństwo, że wylosowany agent zmieni swoją opinię na przeciwną, jest liniową funkcją liczby sąsiadów prezentujących właśnie tę przeciwną opinię. Przykładowo, jeżeli wszyscy sąsiedzi wylosowanego agenta podzielają jego opinię, prawdopodobieństwo zmiany jest równe zeru. Natomiast jeżeli wszyscy podzielają opinię przeciwną — prawdopodobieństwo to wynosi jeden.



Rysunek 1-21 Ilustracja reguł przejść modelu wyborcy, z zaznaczonym prawdopodobieństwem zmiany opinii wylosowanego agenta (oznaczony kolorem czerwonym).

Liniowy model wyborcy, ze względu na swoją prostotę nie oddaje dobrze procesów kształtowania się opinii w grupie społecznej. Zostały zaproponowane liczne modyfikacje tego modelu, jak np. nieliniowy model q -wyborcy, w którym wpływ na zmianę opinii agenta ma q wylosowanych jego sąsiadów [52] albo modele w których agenci mogą przyjmować więcej niż dwie opinie [53].

1.3.4 Model inwazji

Podobnie nieskompilowane — tak jak w przypadku modelu wyborcy — reguły przejść między stanami węzłów cechują model inwazji.

Został on zaadaptowany w socjofizyce do badania dynamiki dojścia do konsensusu wśród grupy agentów, którzy narzucają swoją opinię sąsiadom [54, 55].

W modelu tym, poszczególni agenci umieszczeni są pojedynczo w każdym z wierzchołków grafu. Każdy agent może przyjmować opinię z dyskretnego zbioru n wartości. Reguły modelu prezentują się następująco:

1. wybierany jest w sposób losowy jeden agent umiejscowiony w węźle i ,
2. wybrany agent narzuca swoją opinię losowo wybranemu sąsiadowi umiejscowionemu w węźle j :

$$S_j(t+1) = S_i(t),$$

gdzie $S_{i,j} \in \{1,2,\dots,n\}$,

3. kroki 1 i 2 są powtarzane aż do momentu osiągnięcia konsensusu.

1.3.5 Model Sznajdów

W niniejszej rozprawie, reguły przejść między stanami węzłów badanych procesów kontaktowych zostały również oparte na regułach modelu Sznajdów [56]. Początkowo model Sznajdów nazywany był zgodnie ze stosowanymi w nim regułami modelem USDF („United we Stand, Divided we Fall”) czyli „Zgoda buduje, niezgoda rujnuje”. Obecna nazwa „Model Sznajdów” (od nazwisk jego autorów — Katarzyny Sznajd-Weron oraz Józefa Sznajda) została mu nadana przez Dietricha Stauffera, który miał duży udział w propagowaniu i rozwoju tego modelu [59].

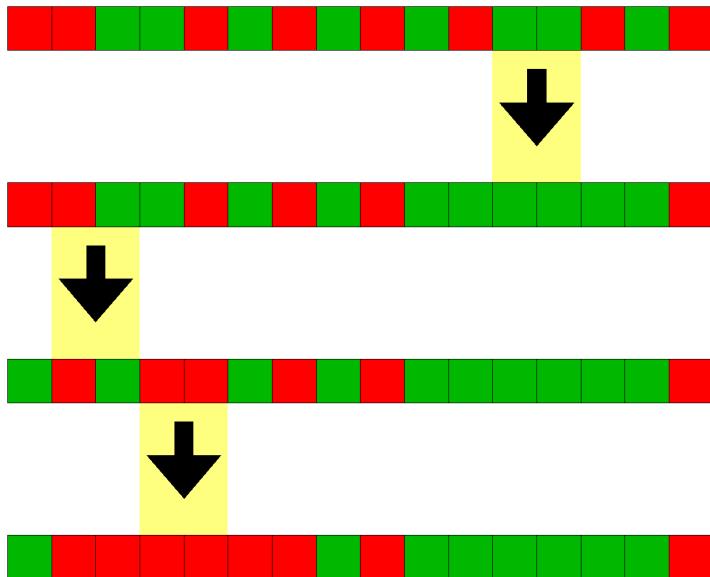
Klasyczny model Sznajdów [56, 57] definiuje się na jednowymiarowym łańcuchu węzłów. Każdy węzeł znajdująca się może w jednym z dwóch możliwych stanów $S \in \{-1,+1\}$, które w ujęciu socjofizycznym mogą reprezentować binarne opinie (tak/nie) na dany temat.

Następnie przeprowadzany jest ciąg iteracji i w każdej z nich aplikowane są reguły modelu, które są następujące:

1. w danym kroku czasowym t losowany jest jeden węzeł i , do którego dobierany jest do pary węzłów po jego prawej stronie $i+1$ (stosowane są periodyczne warunki brzegowe, zatem w przypadku wylosowania ostatniego w łańcuchu węzła, jego sąsiadem będzie pierwszy węzeł w łańcuchu),
2. następnie, w zależności od stanów w których znajdują się oba węzły, aplikowane są następujące reguły:
 - a. jeżeli oba węzły znajdują się w tym samym stanie, wtedy w kroku $t+1$ sąsiedzi pary również znajdują się w tym stanie („Zgoda buduje...”):
$$S_{i-1}(t+1) = S_i(t) \text{ oraz } S_{i+2}(t+1) = S_i(t),$$

- b. natomiast jeśli węzły w analizowanej parze znajdują się w różnych stanach, wtedy stany sąsiadów pary w kroku $t+1$, będą prezentować się następująco („...niezgoda rujnuje”):

$$S_{i-1}(t+1) = S_{i+1}(t) \text{ oraz } S_{i+2}(t+1) = S_i(t) .$$



Rysunek 1-22. Zastosowanie reguł w jednowymiarowym modelu Sznajdów – przykład.

Reguły te można również zapisać w bardziej zwięzlej formie, jako:

$$S_{i-1}(t+1) = S_{i+1}(t)$$

oraz

$$S_{i+2}(t+1) = S_i(t) .$$

Po wystarczającej liczbie iteracji można zaobserwować, że układ dochodzi do stanu stacjonarnego. Są możliwe trzy stany końcowe: albo wszystkie węzły znajdują się w stanie -1, albo wszystkie przyjmą wartość +1, albo węzły znajdują się w różnych stanach, ale w takiej konfiguracji (na przemian wartości +1 i -1 w łańcuchu), że nie będzie możliwości ich zmiany zgodnie z przyjętymi regułami. W przypadku pierwszym i drugim mówi się o fazie „ferromagnetycznej”, natomiast stan trzeci określany jest mianem fazy „antyferromagnetycznej”. Jak się okazuje ostatnia sekwencja jest najbardziej prawdopodobna — startując z przypadkowego początkowego rozkładu stanów węzłów, w 50% przypadków właśnie taki układ końcowy zostanie otrzymany, natomiast stany pierwszy i drugi pojawiają się z prawdopodobieństwem 0,25 każdy [56].

Dalsza ewolucja modelu Sznajdów motywowana była jak najwierniejszym odwzorowaniem zachowania społeczności. Modyfikacje polegały m.in. na wprowadzeniu szumu informacyjnego [56] powodującego, że na zmianę stanu węzła nie mają jedynie wpływu jego sąsiedzi, ale również

zależy to od pewnego losowego czynnika lub też modyfikacji reguł modelu w przypadku gdy węzły w wylosowanej parze znajdują się w różnych stanach [58].

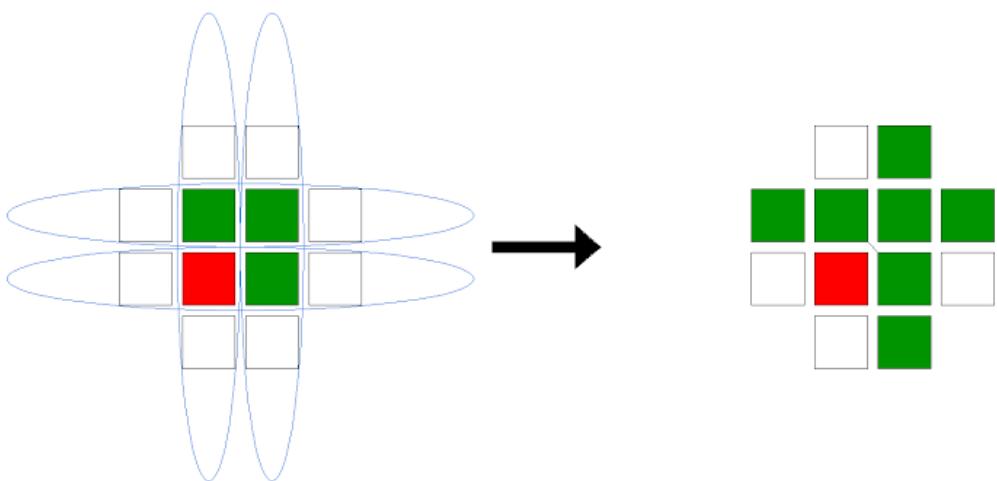
Następstwem dalszych prac nad modelem Sznajdów, było rozszerzenie go na układ dwuwymiarowy: Dietrich Stauffer [59, 60] wprowadził następujące modyfikacje, przystosowujące model Sznajdów do symulacji dynamiki opinii na sieci kwadratowej:

1. po wylosowaniu węzła dobiera się mu się jednego bądź trzech sąsiadów, tworząc w ten sposób parę bądź czteroagentowy „klaster decyzyjny”,
2. tak utworzona para bądź klaster decyduje o opinii sześciu (para) lub ośmiu (klaster) najbliższych sąsiadów. Oczywiście zgodnie z dynamiką modelu Sznajdów, węzły wchodzące w skład pary bądź klastra tylko wtedy zmieniają stan swoich sąsiadów, jeśli znajdują się wszystkie w tym samym stanie.



Rysunek 1-23. Reguły działania modelu Sznajdów (klaster decyzyjny) wg. D. Stauffera [59, 60].

Z kolei Serge Galam [60], przedstawił zasady oddziaływania bazujące na jednowymiarowym modelu Sznajdów. Zaproponował on, aby klaster, rozpatrywać jako cztery odrębne pary: dwie pary poziome i dwie pionowe.



Rysunek 1-24. Reguły działania modelu Sznajdów wg. S. Galama [60].

W niniejszej pracy została zaadaptowana reguła, mówiąca że w przypadku wylosowania pary węzłów będących w tym samym stanie (nazywanym w niniejszej rozprawie stanem D — drugim możliwym stanem jest stan S), następuje zmiana stanu wszystkich sąsiadów pary na D.

Przedmiotem badań jest również zbadanie przypadku, w którym zgodna para węzłów znajdujących się w stanie D zmienia stan tylko jednego sąsiada, takiego, który jest jednocześnie sąsiadem pierwszego i drugiego węzła w parze. Ten wariant modelu funkcjonuje w pracy pod nazwą „model z sąsiedztwem”.

2 Składowe algorytmu symulacji i ich wpływ na wyniki

Przedstawiony w pracy algorytm symulacji ewoluował w trakcie badań — poszczególne jego składowe były analizowane pod kątem jakości otrzymanych wyników, a następnie optymalizowane. Do składowych tych zaliczają się:

- sieci, na których przeprowadzane są symulacje,
- sposób wyboru węzłów,
- warunek stopu symulacji.

2.1 Ogólny opis algorytmu

Dla każdej z n sieci o rozmiarze N i współczynniku gronowania C_i zawierającym się w przedziale $[C-\Delta C; C+\Delta C]$, wykonywane jest s symulacji:

1. w chwili początkowej ($t=0$), określona ilość wybranych w sposób przypadkowy węzłów jest oznaczana jako węzły typu S. Wszystkie pozostałe są oznaczane jako węzły typu D,
2. w każdej iteracji t , wybieranych jest w zadany sposób N węzłów,
3. następnie, dla każdego wybranego węzła, aplikowane są reguły przejścia, czyli natychmiastowo zmieniany jest stan węzła (z D na S bądź odwrotnie) jeżeli zostały spełnione zdefiniowane wcześniej warunki, zależne od prawdopodobieństwa przejścia czy sąsiedztwa węzłów określonego typu,
4. symulacja kończy się po spełnieniu warunku stopu.

2.2 Sieci, jako parametr wejściowy algorytmu

Symulacje dla badanych procesów kontaktowych prowadzone są na sieciach złożonych. Sieci te stanowią dane wejściowe dla algorytmu.

Jak zostało wspomniane w ogólnym opisie algorytmu, dla każdej z n sieci o C_i zawierającym się w przedziale $[C-\Delta C; C+\Delta C]$ wykonywane jest s symulacji. Każda z symulacji wykonywana jest dla innej konfiguracji początkowej.

Zatem całkowita liczba symulacji dla rodziny sieci o współczynnikach gronowania z ustalonego zakresu wartości C_i jest iloczynem wartości parametrów n i s . Pojawiło się pytanie, jak ustalić wartości tych parametrów, aby uzyskać jak najbardziej wiarygodne wyniki w akceptowalnym czasie.

W tym celu zostały przeprowadzone testy dla różnych zestawów tych parametrów (n i s) dla sieci Albert-Barabásiego. Została ona wybrana ze względu na występowanie szczególnych, „wyróżnionych” węzłów — hubów, tworzących bardzo wiele połączeń z innymi węzłami. Tego typu węzły nie występują w pozostałych badanych sieciach Erdősa-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza. Zatem sieci Albert-Barabásiego wydają się być najbardziej czułe na zmiany konfiguracji

początkowej. Przez konfigurację początkową rozumiemy tutaj sieć o ustalonej topologii i ustalonym rozkładzie węzłów S i D.

Zostały sprawdzone następujące warianty:

1. 10 symulacji na 10 sieciach,
2. 100 symulacji na 10 sieciach,
3. 1 symulacja na 1000 sieciach.

Klasyfikację wymienionych wariantów została przeprowadzona w oparciu o wyliczone wartości n_s^* (jest to taki udział węzłów typu S w sieci dla którego połowa symulacji kończy się przewagą udziału węzłów tego typu w sieci a druga połowa przewagą udziału węzłów typu D) i ich niepewności. Sam sposób obliczania n_s^* wraz z niepewnością, został opisany szczegółowo w rozdziale 2.5.

Dla sieci Albert-Barabásiego liczącej 1000 węzłów o średnim stopniu wierzchołka $k=4$ nie było widać żadnej różnicy w wartości n_s^* pomiędzy wariantem 2 i 3. Wskazuje to, że metoda zastosowana w wariantie 2 nie jest obciążona błędem systematycznym. Widać było natomiast różnicę otrzymywanej z symulacji wartości n_s^* pomiędzy wariantem 1 a wariantami 2 i 3 na poziomie około 2%. Wskazuje to na obciążenie wariantu 1 błędem przypadkowym — statystyka jest niewystarczająca.

Dla $k=10$ nie było widać żadnej różnicy w wartości n_s^* pomiędzy wariantami 1, 2 i 3.

Sprawdzono również czy dla dokładności obliczania n_s^* ma znaczenie stosunek liczby symulacji do liczby topologii sieci dla danego współczynnika gronowania. W tym celu obliczono n_s^* wraz z niepewnością przeprowadzając 10 symulacji na 100 topologiach i 100 symulacji na 10 topologiach. Otrzymane wyniki przedstawiają Tabela 2-1 oraz Tabela 2-2.

parametr	wartość	niepewność	niepewność względna (%RSD)
C	0,1	dokł.	nie dotyczy
k	3,99	dokł.	nie dotyczy
$n_s(0)$	0,4200	0,0005	0,1
$n^{+s}(0)$	0,4250	0,0005	0,1
n_s^*	0,424	0,002	0,5

Tabela 2-1. Wartości średnie współczynnika gronowania C , stopnia wierzchołka k oraz wielkości $n_s(0)$, $n^{+s}(0)$, n_s^* wraz z ich niepewnościami dla sieci Albert-Barabásiego ($N=1000$, $k=4$): 10 sieci – 100 symulacji.

parametr	wartość	niepewność	niepewność względna (%RSD)
C	0,1	dokł.	nie dotyczy
k	3,99	dokł.	nie dotyczy
$n_s(0)$	0,4150	0,0005	0,1
$n^+s(0)$	0,4200	0,0005	0,1
n^*_s	0,4190	0,0015	0,35

Tabela 2-2. Wartości średnie współczynnika gronowania C , stopnia wierzchołka k oraz wielkości $n_s(0)$, $n^+s(0)$, n^*_s wraz z ich niepewnościami dla sieci Albert-Barabásiego ($N=1000$, $k=4$): 100 sieci – 10 symulacji.

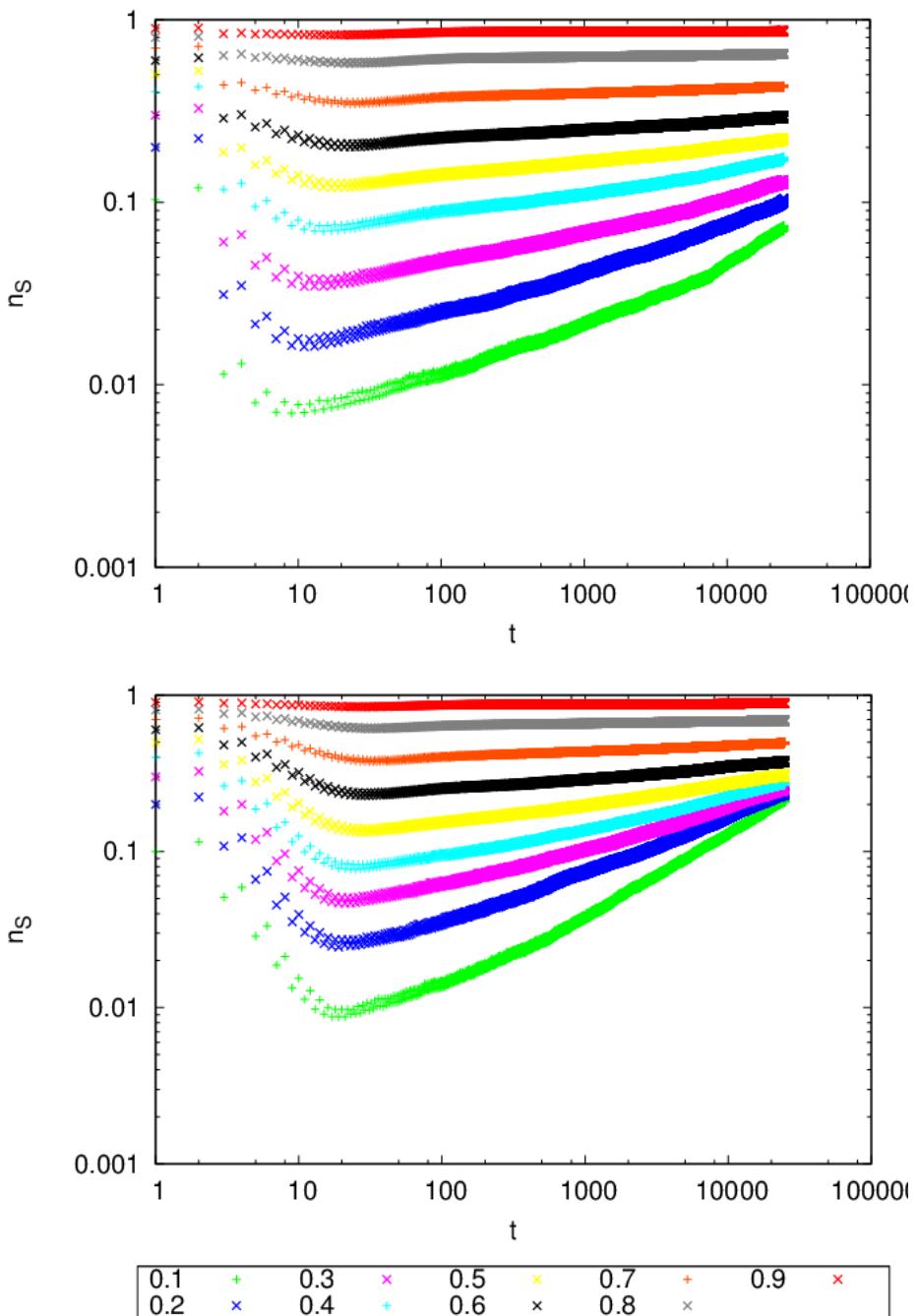
Okazało się że nie ma większego znaczenia czy jest przeprowadzane 10 symulacji na 100 topologiach czy 100 symulacji na 10 topologiach — w obu przypadkach wartości niepewności praktycznie się nie różnią

2.3 Sposób wyboru węzłów

W każdym kroku czasowym symulacji wybierane są węzły, na których aplikowane są reguły przejścia i następnie ewentualna zmiana stanu. W toku badań zostały przetestowane następujące warianty wyboru węzłów:

1. w ustalonej kolejności,
2. poprzez losowanie ze zwracaniem,
3. zgodnie z losową permutacją liczb będących etykietami węzłów sieci.

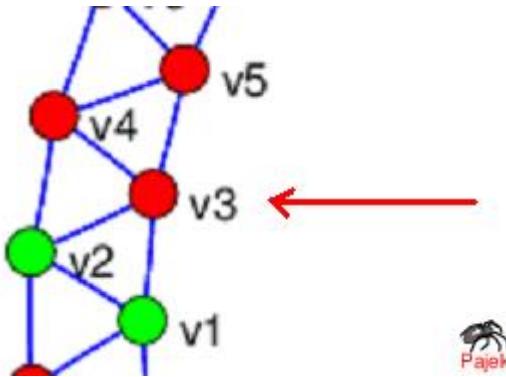
Wariant nr 1 był testowany dla sieci Wattsa-Strogatza. Jego zaletą była prostota implementacji i szybkość działania — węzły zawsze były przeglądane w tej samej kolejności, zgodnie z numeracją węzłów. W każdym kroku symulacji, każdy węzeł był odwiedzany dokładnie jeden raz, zatem żaden nie został pominięty. Analiza przebiegów czasowych udziału węzłów S w całej sieci, wskazała brak istotnych różnic pomiędzy wariantami nr 1 i nr 2 dla przewirowanych sieci Wattsa-Strogatza. Ilustruje to Rysunek 2-1.



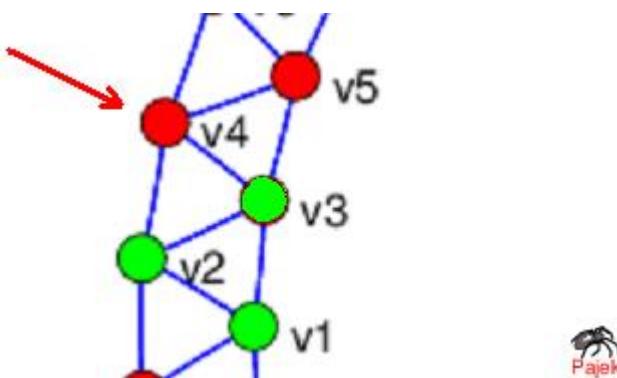
Rysunek 2-1. Przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza liczącej 1000 węzłów o współczynniku gronowania wynoszącym około 0,4, dla różnych wartości początkowych udziałów węzłów S w sieci (poszczególne wartości w legendzie pod rysunkiem) przy ustalonej kolejności wyboru węzłów (góra) oraz dla losowego wyboru węzłów (dół)

Wizualizacje, wykonane przy użyciu programu Pajek [61] dla sieci nieprzełączonej ($C=0,5$), przedstawiające fragment jednej iteracji procesu symulacyjnego, wykazały jednak słabość wariantu nr 1:

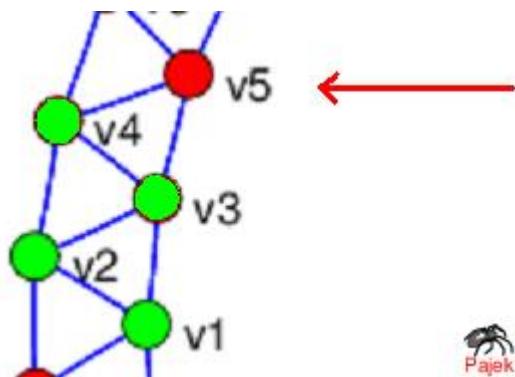
1. Został odwiedzony węzeł czerwony (typu S) oznaczony etykietą v3. Węzeł ten ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów zielonych v1 i v2 (typu D). Zgodnie ze zdefiniowanymi regułami przejścia, węzeł v3 staje się również natychmiastowo węzłem typu D.



2. Następnie w tej samej iteracji został odwiedzony węzeł czerwony (S) v4, gdyż jest oznaczony numerem o jeden większym niż węzeł v3. Ponieważ ma on również dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów zielonych v3 i v2, natychmiast staje się zielony (D).



3. Również w tej samej iteracji odwiedzony jest czerwony węzeł v5. Analogicznie jak poprzednicy, węzeł ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów zielonych v3 i v4 a zatem staje się zielony (D).



W efekcie obserwujemy coś na kształt reakcji łańcuchowej: Na końcu zilustrowanej iteracji wszystkie węzły będą zielone. Uporządkowany wybór węzłów determinuje wyniki symulacji i dlatego musiał zostać zastąpiony inną metodą.

Następnym testowanym wariantem kolejności wyboru węzłów było losowanie ze zwracaniem etykiet węzłów. Taki sposób powodował, że niektóre węzły mogły zostać pominięte, inne mogły zaś zostać wylosowane więcej niż jeden raz (niekoniecznie jednak to musi być wada, dla symulacji niektórych procesów np. społecznych może to być pożądane).

Ostatnim testowanym wariantem było generowanie w każdym kroku czasowym losowych permutacji etykiet węzłów. Zwiększało to czas symulacji, natomiast zapewniało, że każdy węzeł zostanie odwiedzony w danym kroku czasowym dokładnie jeden raz.

Przeprowadzone testy porównawcze wariantów nr 2 i nr 3 na sieci Alberta-Barabásiego, wykazały, co następuje:

- dla $k=4$ i odwiedzania węzłów w kolejności zgodnej z losową permutacją etykiet węzłów, nie widać istotnej różnicy, jeśli chodzi o wartość n_s^* pomiędzy symulacją na jednej sieci o 1000 rozkładach początkowych i dla 1000 sieci i jednym rozkładzie początkowym, różnym dla każdej sieci,
- różnicę tą widać dla losowego wyboru węzłów, wartości n_s^* różnią się o około 0,02-0,04, co może stanowić około 10% wartości n_s^* .

Wydaje się, że przy losowaniu ze zwracaniem, dla sieci o jednej, ustalonej topologii brak wylosowania kluczowego węzła ma dużo większy wpływ na wyniki niż dla 1000 różnych topologii.

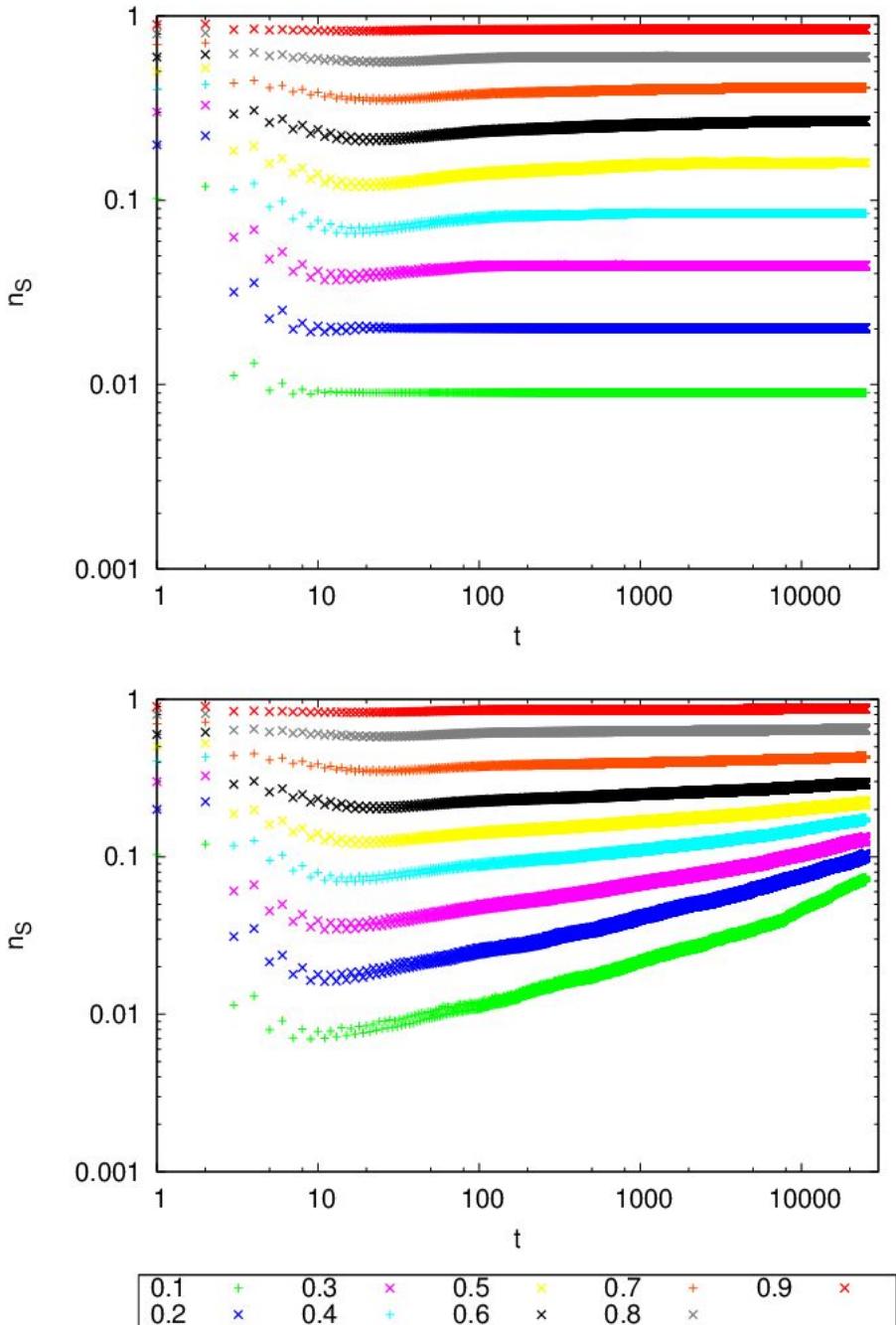
Dla $k=10$ nie zaobserwowano żadnych różnic.

2.4 Warunek stopu

Osiągnięcie stanu stacjonarnego układu, czyli momentu, kiedy żaden z węzłów S i D nie zmieni swojego stanu, było konieczne do późniejszego wyznaczenia wartości n_s^* . W związku z tym należało się upewnić, że czas symulacji jest odpowiednio długi. Jednocześnie odpowiednie ustalenie momentu zakończenia symulacji było jednym z kluczowych czynników mających wpływ na szybkość otrzymania wyników do późniejszej analizy. Początkowo przyjęto by kończyć symulacje:

1. w momencie, kiedy żaden węzeł S nie zmienił stanu na D i żaden węzeł D nie zmienił stanu na S,
2. po T_{max} kroków czasowych.

Przyjęcie kryterium nr 1 pozwoliło znacznie skrócić czas symulacji, natomiast okazało się, że nie pracuje ono dobrze dla małych wielkości prawdopodobieństw przejścia; może się bowiem okazać, że w danej iteracji żaden z węzłów nie zmienił swojego stanu, chociaż część z nich mogłaby zmienić stan w następnych iteracjach. Prowadziło to do błędnych wniosków, jak na przykład stwierdzenia zależności końcowego udziału węzłów S w sieci od udziału początkowego, mimo że tej zależności nie było (po odpowiednio dużej liczbie kroków czasowych), co ilustruje Rysunek 2-2.



Rysunek 2-2. Przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci dla przełączonej sieci Wattsa-Strogatza liczącej 1000 węzłów o współczynniku gronowania wynoszącym około 0,4, dla różnych wartości początkowych udziałów węzłów S w sieci (poszczególne wartości w legendzie pod rysunkiem) z zadanym przez kryterium nr 1 warunkiem stopu (góra) oraz bez warunku stopu (dół).

Oczywiście zrezygnowano z kryterium nr 1 w dalszych symulacjach.

W przypadku kryterium nr 2, kluczowe było ustalenie takiej wartości T_{max} , aby stan stacjonarny został osiągnięty a jednocześnie symulacja nie była zbyt czasochłonna. Było to możliwe jedynie poprzez analizę otrzymanych przebiegów czasowych i odpowiednie dostosowywanie wartości T_{max} (wykroje przez jego zwiększenie) w kolejnym przebiegu programu. Dla kryterium nr 2 zaobserwowano duży wpływ topologii sieci, stanu początkowego i prawdopodobieństwa przejścia na

czas symulacji. Przykładowe ilości kroków czasowych potrzebne do osiągnięcia stanu stacjonarnego dla sieci Wattsa-Strogatza o wielkości $N=1000$ dla początkowej ilości węzłów równej n^*_S ilustruje Tabela 2-3.

C	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	31	108	143	49	37
0,2	29	64	400	89	55
0,3	34	62	339	187	137

Tabela 2-3. Ilość kroków czasowych potrzebnych do osiągnięcia stanu stacjonarnego dla sieci Wattsa-Strogatza o rozmiarze $N=1000$. Początkowa liczba węzłów S wynosi n^*

2.5 Niepewności i błędy numeryczne parametrów wejściowych i wyjściowych

2.5.1 Współczynnik gronowania

Współczynnik gronowania jest parametrem, który ściśle związany jest z danymi wejściowymi symulacji, czyli wygenerowanymi sieciami.

Podawana w końcowych wynikach wartość tego współczynnika jest wartością średnią współczynników gronowania dla poszczególnych sieci.

Sposób, w jaki dla rodziny n sieci obliczana jest wartość średnia współczynnika gronowania przedstawia wzór 2-1, gdzie C_i są współczynnikami gronowania poszczególnych sieci, a n jest liczbą tych sieci.

Poszczególne wartości C_i są natomiast liczone jako średnia lokalnych współczynników gronowania danej sieci. Należy tu jednak zaznaczyć, że do tej średniej nie są wliczane węzły będące liścimi, czyli mającymi lokalny współczynnik gronowania równy zero

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{n}. \quad (2-1)$$

Wzór 2-2 przedstawia sposób, w jaki wyliczana jest niepewność wyznaczenia wartości C :

$$u(C) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - C)^2}{n(n-1)}}. \quad (2-2)$$

W dalszych częściach pracy będzie analizowany wpływ C (oraz innych parametrów) na wartości n^*_S .

2.5.2 Średni stopień wierzchołka

Średni stopień wierzchołka jest kolejnym parametrem związanym z danymi wejściowymi symulacji — wygenerowanymi sieciami. Również w tym wypadku podawana w końcowych wynikach wartość tego współczynnika jest wartością średnią średnich stopni wierzchołka dla poszczególnych sieci.

Wzór 2-3 przedstawia, w jaki sposób obliczana jest średnia wartość średniego stopnia wierzchołka dla rodziny n sieci, gdzie k_i są średnimi stopniami wierzchołka poszczególnych sieci, a n jest liczbą tych sieci.

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n}. \quad (2-3)$$

Niepewność wyznaczenia wartości k jest obliczona zgodnie ze wzorem na odchylenie standardowe wartości średniej (Wzór 2-4):

$$u(k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - k)^2}{n(n-1)}}. \quad (2-4)$$

Zależność otrzymanych w symulacji komputerowej wielkości od k jest analizowana w pracy na wykresach przedstawiających wyniki dla sieci Albert-Barabásiego. Sieci te są generowane dla dwóch różnych wartości k .

2.5.3 Generacja konfiguracji początkowej

Aby zbadać zależność końcowego udziału węzłów od stanu początkowego, niezbędne było uzyskanie w chwili początkowej jednorodnego rozkładu węzłów S i D. Dlatego do każdego węzła w sieci była przypisywana uzyskana za pomocą generatora liczb losowych liczba z przedziału [0:1]. Następnie wszystkie węzły, do których były przypisane liczby mniejsze lub równe pożdanemu udziałowi węzłów S w chwili początkowej były oznaczone jako S, natomiast wszystkie pozostałe jako D. Kluczowe w tej procedurze było zastosowanie jak najlepszego generatora liczb pseudolosowych. Wybór padł na generator Mersenne-Twister [62] z następujących powodów:

1. okres tego generatora wynosi $2^{19937} - 1$,
2. posiada on wysoki stopień równomiernego rozmieszczenia — okresowa zależność między kolejnymi wartościami sekwencji wyjściowej jest nieistotna,
3. spełnia liczne testy statystycznej losowości, włączając w to testy diehard [62]. Spełnia większość bardziej rygorystycznych testów losowości [64] (TestU01 Crush [65]).

2.5.4 Średni początkowy udział węzłów S

Dla rodziny n sieci i s konfiguracji początkowych, całkowita liczba konfiguracji początkowych wynosi $A = ns$.

Sposób obliczania wartości średniej udziału węzłów S w chwili początkowej po wszystkich konfiguracjach początkowych przedstawia wzór 2-5, gdzie $n_{S_i}^0$ są udziałami węzłów w poszczególnych konfiguracjach początkowych

$$n_S^0 = \frac{\sum_{i=1}^A n_{S_i}^0}{A}. \quad (2-5)$$

Wzór 2-6 stosowany jest do obliczenia odchylenia standardowego tej wartości:

$$u(n_s^0) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^A (n_{S_i}^0 - n_S^0)^2}{A(A-1)}}. \quad (2-6)$$

W dalszej części pracy badana jest m.in. zależność średniego końcowego udziału węzłów S od ich początkowego udziału.

2.5.5 Średni końcowy udział węzłów S

Analogicznie, wzór 2-7 służy do obliczania wartości średniego udziału węzłów S w chwili końcowej, gdzie $n_{S_i}^T$ są udziałami węzłów S w sieci w ostatniej iteracji T_{max} dla poszczególnych konfiguracji początkowych

$$n_S^T = \frac{\sum_{i=1}^A n_{S_i}^T}{A}. \quad (2-7)$$

Wzór 2-8 stosowany jest do obliczenia odchylenia standardowego tej wartości:

$$u(n_s^T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^A (n_{S_i}^T - n_S^T)^2}{A(A-1)}}. \quad (\text{Wzór 2-8})$$

Średnie końcowe i początkowe wartości udziału węzłów S w sieci są niezbędne do obliczenia wartości n_S^* . Procedura obliczania tej wartości przedstawiona jest w rozdziale 2.5.6.

2.5.6 Wartość n_s^*

Na potrzeby symulacji, została zdefiniowana wartość średniego początkowego udziału węzłów S, dla której połowa symulacji kończy się dominacją procesu S a druga połowa — dominacją procesu D. Oznaczana jest ona w pracy jako n_s^* .

W celu wyznaczenia wartości n_s^* z wykresu zależności średniego końcowego udziału węzłów typu S od średniego początkowego udziału tych węzłów w sieci, odczytywane są dwie wartości końcowego udziału węzłów S, będące najbliższej wartości 0,5, na lewo i prawo od niej. Oznaczane są jako: $n_s^-(T)$ i $n_s^+(T)$. Odczytywane są również odpowiadające im dwie wartości średniego początkowego udziału węzłów typu S. Oznaczane są jako: $n_s^-(0)$ i $n_s^+(0)$.

Wzór 2-9 wynikający z zastosowania aproksymacji liniowej, przedstawia sposób obliczania wartości średniego początkowego udziału węzłów typu S, dla której średni końcowy udział tych węzłów wynosi 0,5

$$n_s^* = \frac{n_s^-(0) \left[\frac{1}{2} - n_s^+(T) \right] + n_s^+(0) \left[n_s^-(T) - \frac{1}{2} \right]}{n_s^-(T) - n_s^+(T)}. \quad (2-9)$$

Niepewność n_s^* wyznaczana jest z prawa przenoszenia niepewności, co przedstawia wzór 2-10:

$$u(n_s^*) = \left[\left(\frac{\partial n_s^*}{\partial n_s^-(0)} u(n_s^-(0)) \right)^2 + \left(\frac{\partial n_s^*}{\partial n_s^+(0)} u(n_s^+(0)) \right)^2 + \left(\frac{\partial n_s^*}{\partial n_s^-(T)} u(n_s^-(T)) \right)^2 + \left(\frac{\partial n_s^*}{\partial n_s^+(T)} u(n_s^+(T)) \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2-10)$$

Niepewność n_s^* jest wykorzystywana w pracy do porównywania różnych wariantów poszczególnych składowych algorytmu symulacji.

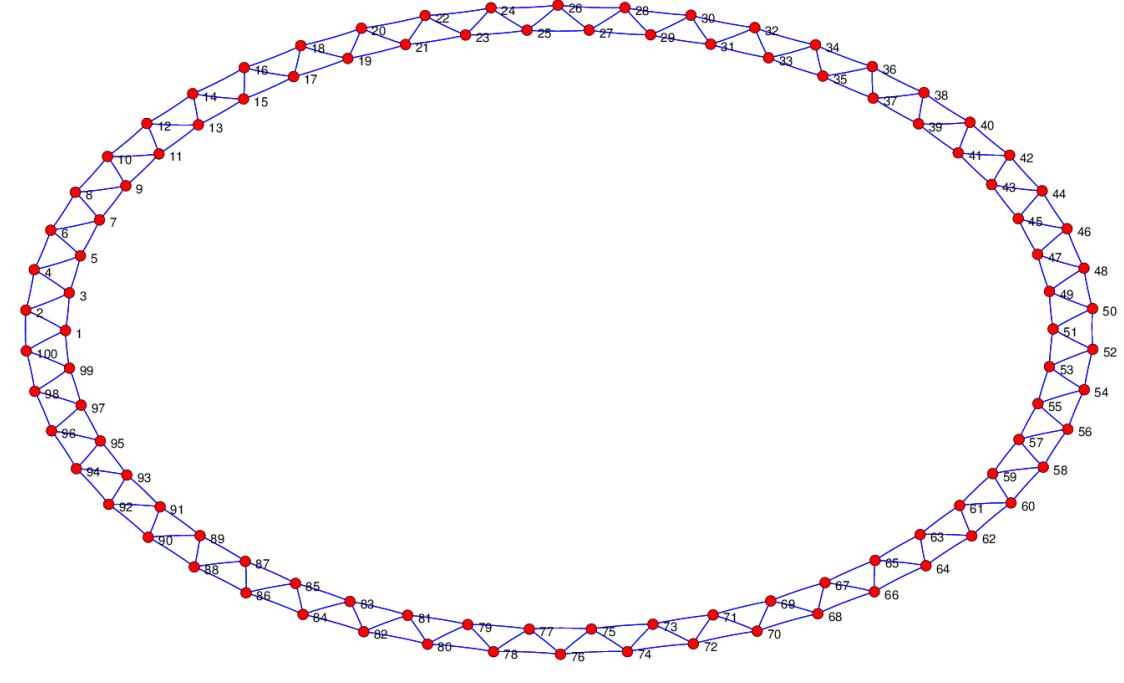
3 Model Sznajdów na sieci Wattsa-Strogatza

Niniejszy rozdział zawiera opis procedury generacji rodziny sieci Wattsa-Strogatza o szerokim spektrum współczynników gronowania oraz opis algorytmu symulacji procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu Sznajdów. Zostaną również przedstawione i przedyskutowane otrzymane wyniki.

3.1 Proces generacji rodziny sieci

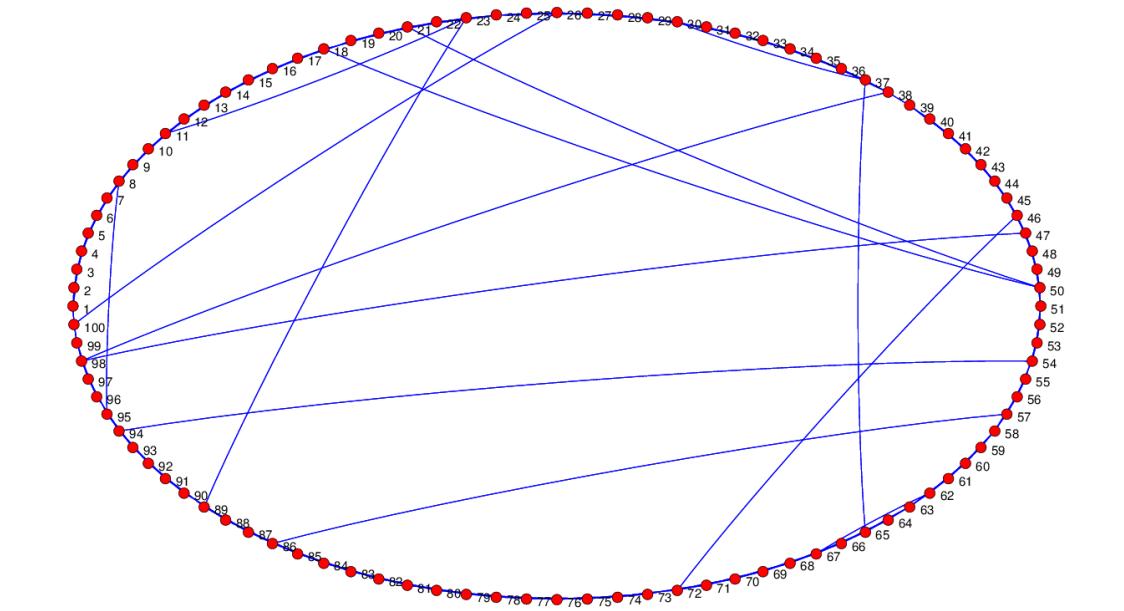
1. Punktem wyjściowym procesu generacji rodziny sieci Wattsa-Strogatza jest przygotowanie regularnej sieci Wattsa-Strogatza zawierającej N węzłów, z periodycznymi warunkami brzegowymi. Stopień każdego wierzchołka takiej sieci jest równy $k=4$. Współczynnik gronowania tak przygotowanej sieci wynosi $C_{1/2}=0,5$.
2. Następnie, z zadanym prawdopodobieństwem przełączania wiązań q z ustalonego zakresu (zależącego od pożądanego współczynnika gronowania wygenerowanych sieci), dla każdego węzła w sieci końcówki dwóch krawędzi wychodzących z tego węzła (łączących węzeł z sąsiadami po jego prawej stronie), przełącza się do losowo wybranych, innych węzłów tej sieci, niepołączonych z tym węzłem.
3. Powtarzając n - krotnie punkty 1-2 dla pożądanego współczynnika gronowania C , generuje się rodzinę liczącą n sieci, których współczynniki gronowania zawierają się w przedziale $C \pm \Delta C$.

Dołączone do rozdziału rysunki przedstawiają wizualizacje wygenerowanych sieci, stworzone przy pomocy programu Pajek. Dla większej przejrzystości, sieci na rysunkach są mniejsze niż użyte w późniejszych symulacjach.



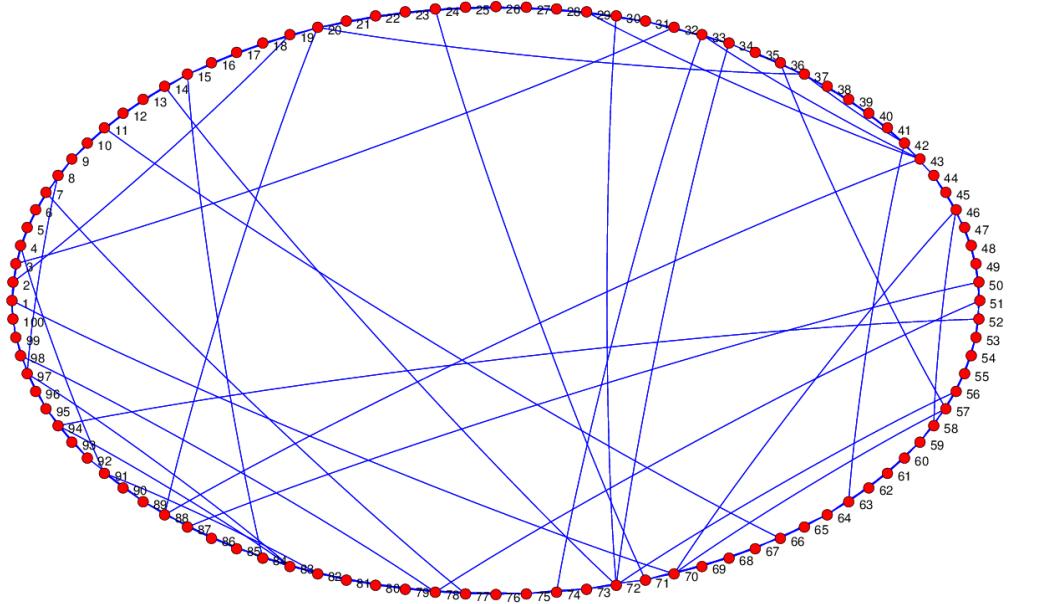
Rysunek 3-1. Sieć Wattsa-Strogatza dla $N=100$, $k=4$ i $C=0,5$, $q=0$.

Pajek



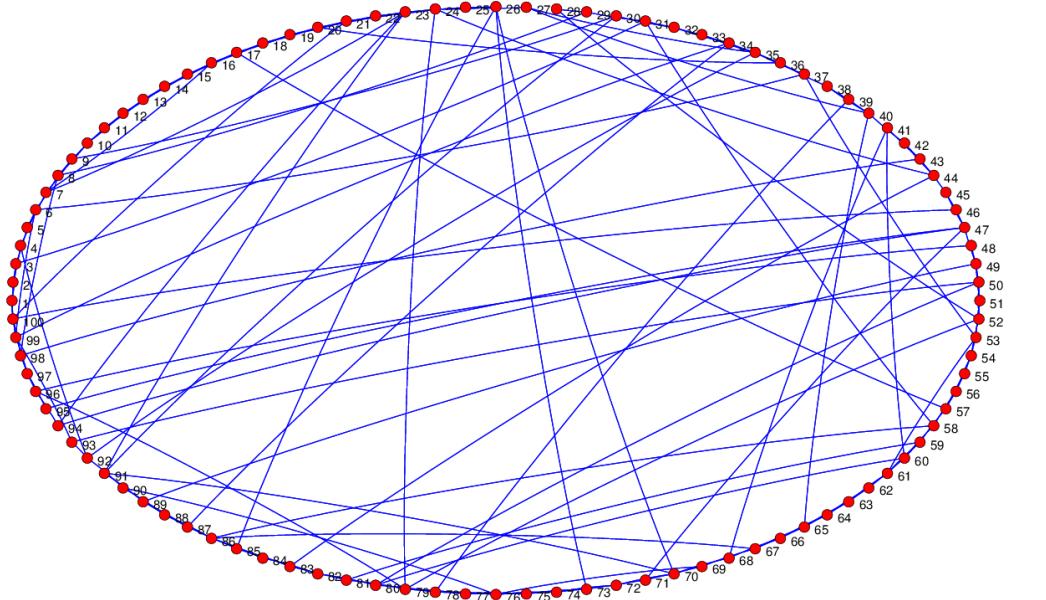
Rysunek 3-2. Sieć Wattsa-Strogatza dla $N=100$, $k=4$ i $C=0,4$, $q=0,09$.

Pajek



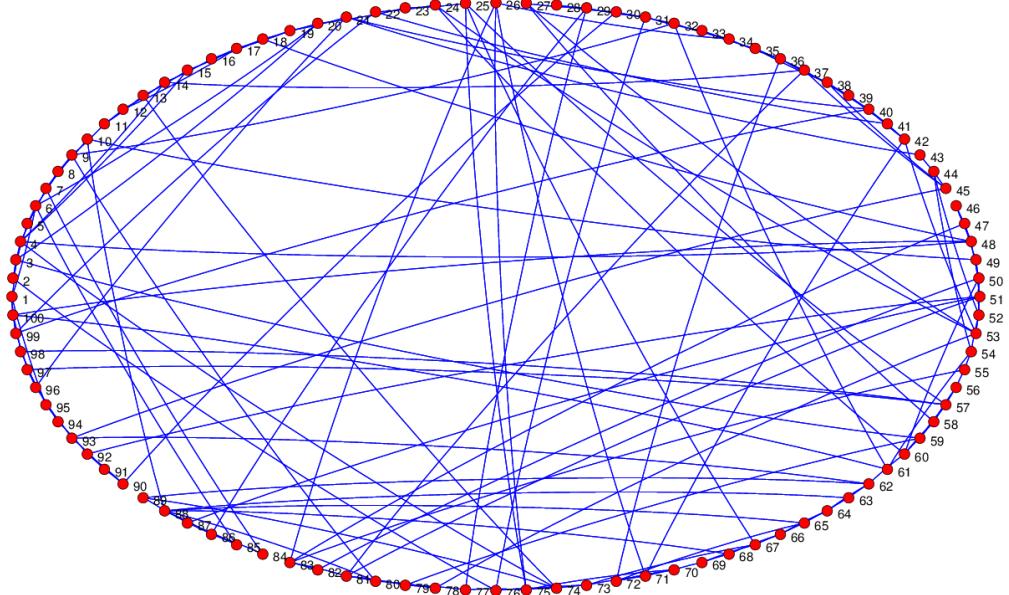
Pajek

Rysunek 3-3. Sieć Wattsa-Strogatza dla $N=100$, $k=4$ i $C=0,3$, $q=0,16$.



Pajek

Rysunek 3-4. Sieć Wattsa-Strogatza dla $N=100$, $k=4$ i $C=0,2$, $q=0,28$.



Rysunek 3-5. Sieć Wattsa-Strogatza dla $N=100$, $k=4$ i $C=0,1$, $q=0,46$.

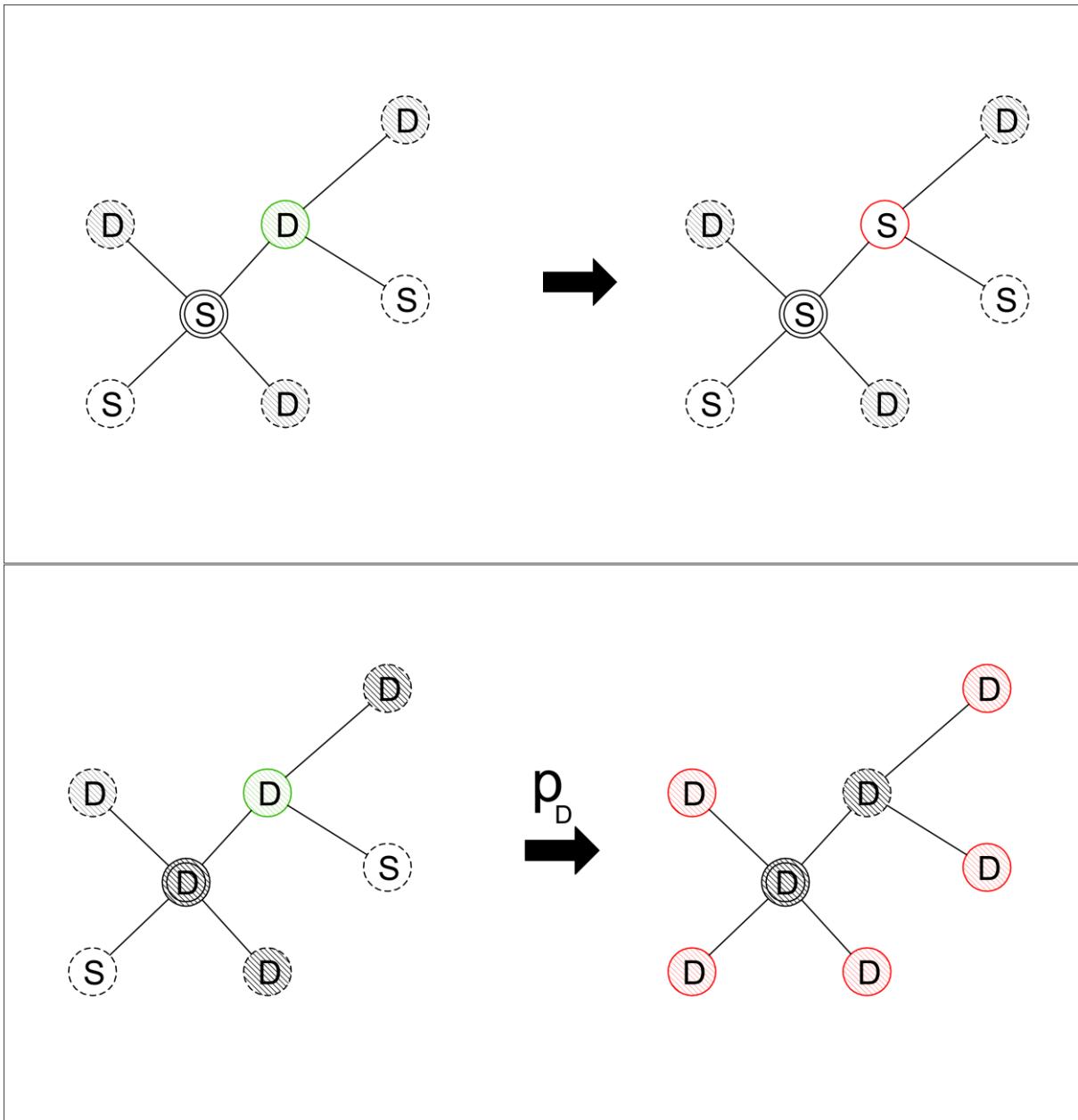
3.2 Symulacja procesu kontaktowego

Następnie dla każdej wygenerowanej sieci powtarzana jest procedura opisana w poniższych punktach [66, 67]:

- W chwili początkowej ($t=0$), określona część węzłów jest oznaczana jako węzły typu S. Wszystkie pozostałe są oznaczane jako węzły typu D. Początkowy rozkład typów węzłów jest generowany losowo.
- W każdej iteracji t , wykonywana jest liczba N losowań ze zwieracaniem na zbiorze N węzłów.
- Następnie, w zależności od typu wylosowanego węzła, aplikowana jest jedna z poniższych reguł, które ilustruje Rysunek 3-6:
 - i. Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem 1 zmieniany jest typ tego jednego sąsiada z D na S.
 - ii. Jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_D (parametr symulacji) zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D.

Następuje natychmiastowe uaktualnienie typu węzła.

- W każdym kroku czasowym monitorowany jest aktualny udział węzłów typu S $ns(t)$ w sieci.
- Symulacja kończy się po zadanej liczbie kroków czasowych T_{max} będącej jednym z parametrów symulacji.



Rysunek 3-6. Ilustracja reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół).

Górny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony kolorem zielonym). Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem 1 zmieniany jest typ tego jednego sąsiada z D na S (kolor czerwony).

Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony na zielono). Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_D zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D (oznaczone na czerwono).

3.3 Pojedyncze przebiegi czasowe

Pierwszym etapem badań było wygenerowanie pojedynczych przebiegów czasowych dla sieci o różnych współczynnikach gronowania C , różnych prawdopodobieństw p_D procesu D i różnych

początkowych udziałów węzłów typu S. Zostało zaobserwowane, że pojedyncze przebiegi czasowe kończą się albo udziałem węzłów S w sieci równym zeru, albo 100% udziałem tych węzłów w sieci. Przykładowe, pojedyncze takie przebiegi zostały przedstawione na Rysunku 3-7.

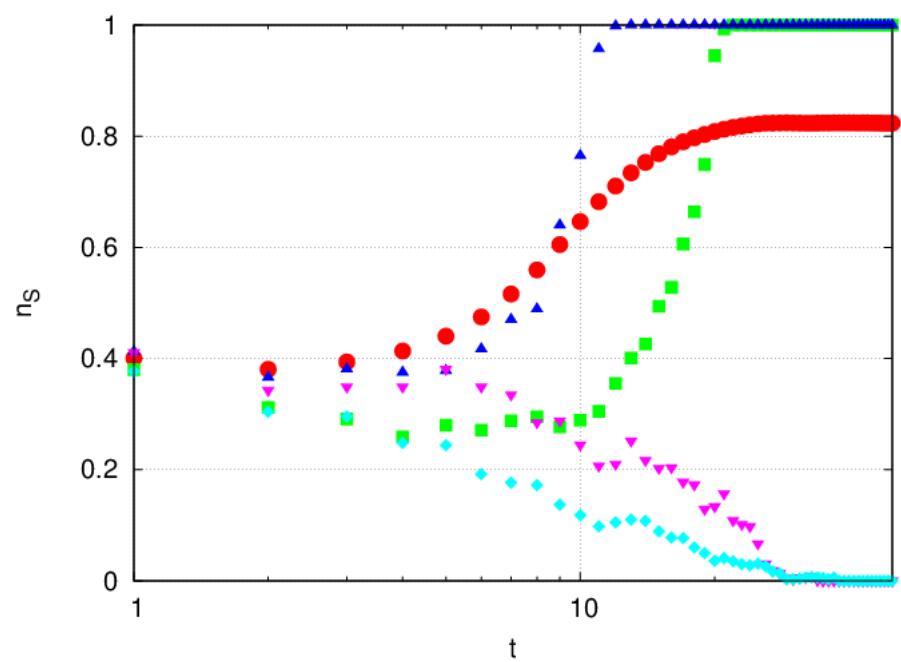
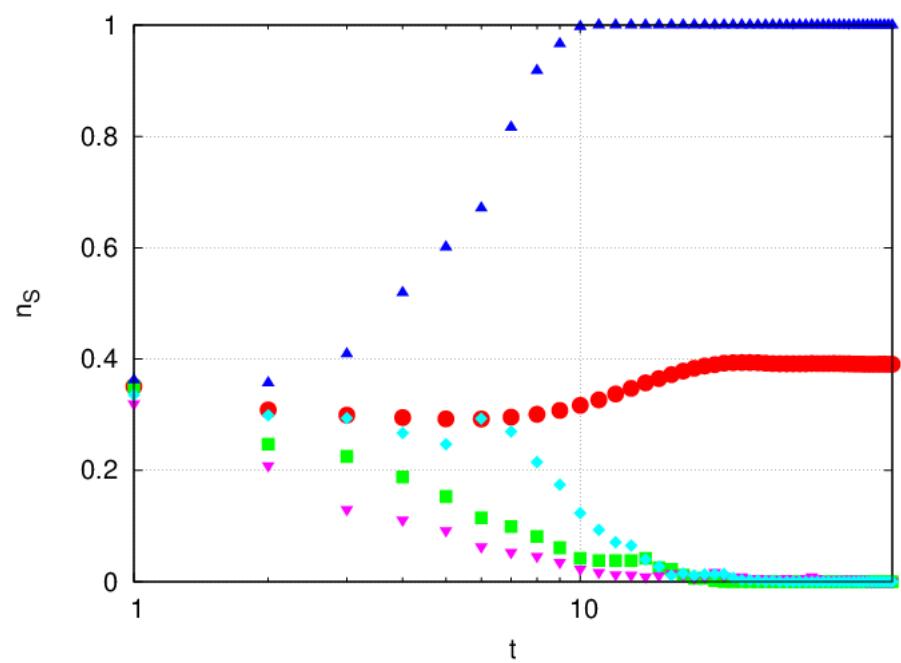
Na każdym z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 3-7 umieszczono wybrane losowo, cztery pojedyncze przebiegi czasowe. Dodatkowo naniesiono przebieg będący średnią z 1000 takich pojedynczych przebiegów, różniących się jedynie początkowym rozkładem przestrzennym węzłów S w sieci, przy ustalonym ich początkowym udziale w sieci.

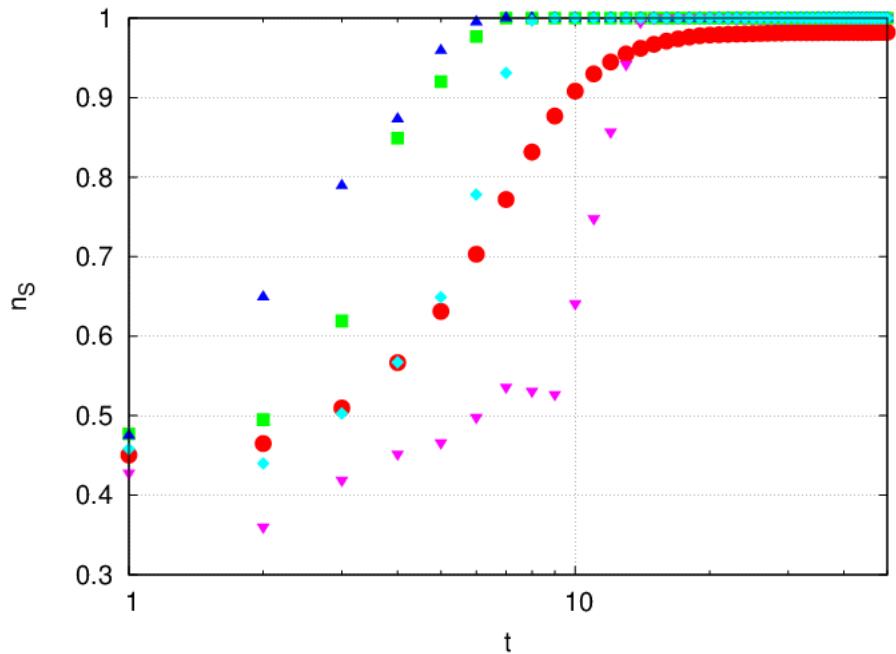
Każdy z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 3-7 został wygenerowany dla tej samej sieci i prawdopodobieństwa p_D procesu D. Różnica jest natomiast w początkowym udziale n^0_S węzłów typu S: wykres górnny odpowiada n^0_S wynoszącemu 0,35, środkowy — 0,4, zaś wykres dolny — n^0_S wynoszącemu 0,45. Widać, że na wykresie górnym większość pojedynczych przebiegów czasowych kończy się udziałem węzłów S w sieci równym zeru. Na wykresie środkowym dwa przebiegi kończą się 100% udziałem węzłów S w sieci, natomiast dwa pozostałe — udziałem węzłów S równym zeru. Na wykresie dolnym zaś, wszystkie wylosowane pojedyncze przebiegi kończą się 100% udziałem węzłów S w sieci.

Analiza pojedynczych przebiegów w kontekście różnych wartości n^0_S pokazała, że musi istnieć zależność od stanu początkowego, objawiająca się tym, że wraz ze wzrostem początkowego udziału węzłów S w sieci, liczba przebiegów czasowych kończących się 100% udziałem węzłów typu S w sieci będzie rosła.

Aby lepiej zbadać tą zależność, została wprowadzona wielkość n^*_S , opisana dokładniej w rozdziale 2.5.6.

Pojawiły się w związku z tym pytania czy n^*_S zależy od rozmiaru sieci, współczynnika gronowania C , czy też prawdopodobieństwa p_D procesu D. Odpowiedzi na te pytania zawarte są w dalszej części niniejszego rozdziału.





Rysunek 3-7. Pojedyncze (jeden rozkład początkowy węzłów S na jednej sieci) przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza. Każda krzywa, z wyjątkiem czerwonych kół odpowiadających średniej po 1000 przebiegach, przedstawia inny pojedynczy przebieg czasowy. Wykresy różnią się początkowym udziałem węzłów n^0_S , który wynosi: 0,35 — wykres górnego, 0,4 — wykres środkowy oraz 0,45 — wykres dolny. Współczynnik gronowania $C=0,1$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D=0,3$.

3.4 Uśrednione przebiegi czasowe

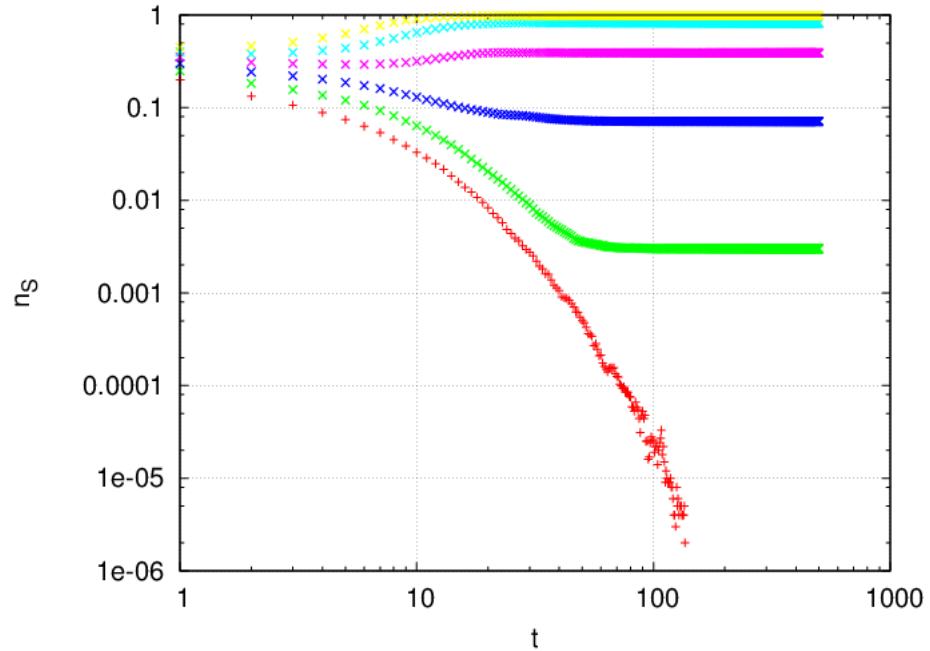
Dla ustalonych wartości parametrów symulacji: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa p_D procesu D i początkowego udziału węzłów typu S w sieci n^0_S , przebiegi czasowe zostały uśrednione po $n = 1000$ realizacjach sieci. Odstępstwo od tej reguły zachodzi dla sieci nieprzełączonej ($q=0$, $C_{1/2}=0,5$) — generowana jest tylko jedna sieć, gdyż istnieje tylko jedna możliwa topologia takiej sieci. W tym przypadku uśrednianie wyników symulacji odbywa się po $s_{1/2} = 1000$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci.

Wartości pozostałych parametrów symulacji zostały wybrane następująco:

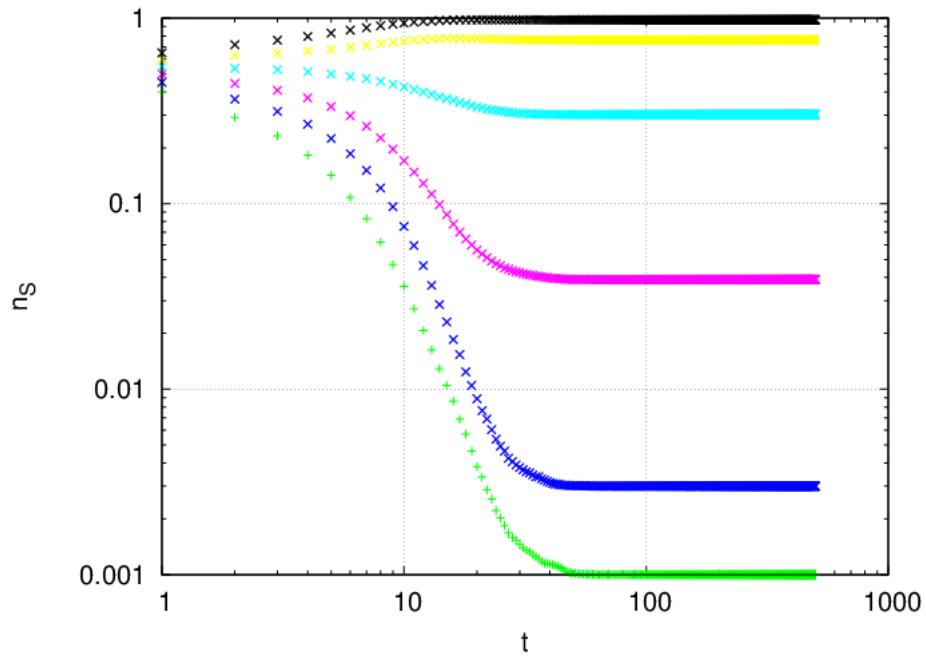
- $N = 1000$,
- $k = 4$,
- $\Delta C = 0,01$,
- $T_{max} = 500$.

Uzyskane w symulacjach wybrane zależności $n_S(t)$ ewolucji udziału węzłów S od czasu, przedstawione są na rysunkach 3-8 - 3-10. Jak zostało wcześniej wspomniane, pojedyncze przebiegi czasowe kończą się albo udziałem węzłów S w sieci bliskim zeru, albo 100% udziałem tych węzłów w sieci. Dlatego średnie udziały węzłów S w sieci w chwili końcowej przyjmują wartości z całego przedziału [0;1]. Dzięki umieszczeniu na jednym wykresie uśrednionych

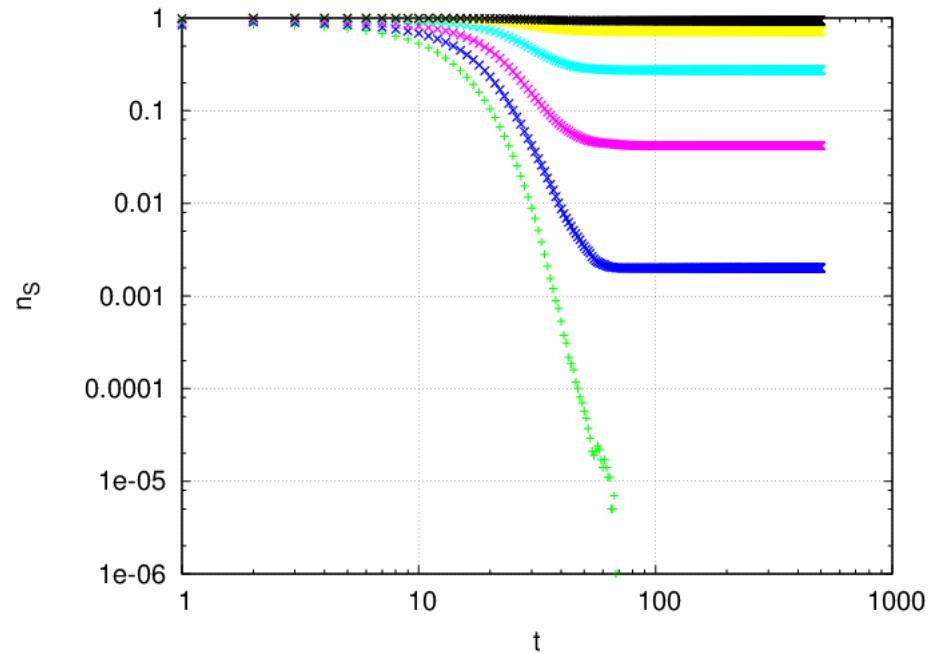
przebiegów dla różnych początkowych udziałów węzłów typu S w sieci, widać również wyraźną zależność od stanu początkowego. Zależność ta zostanie dokładniej zbadana w dalszej części niniejszego rozdziału.



Rysunek 3-8. Przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S n^S_0 . Od dołu do góry są to: 0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45. Współczynnik gronowania $C=0,1$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,3$.



Rysunek 3-9. Przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S n^0_S . Od dołu do góry są to: 0,4, 0,45, 0,5, 0,55, 0,6, 0,65. Współczynnik gronowania $C=0,2$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,4$.



Rysunek 3-10. Przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S n^0_S . Od dołu do góry są to: 0,8, 0,84, 0,88, 0,92, 0,96. Współczynnik gronowania $C=0,4$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,6$.

3.5 Zależność n^*_S od rozmiaru sieci

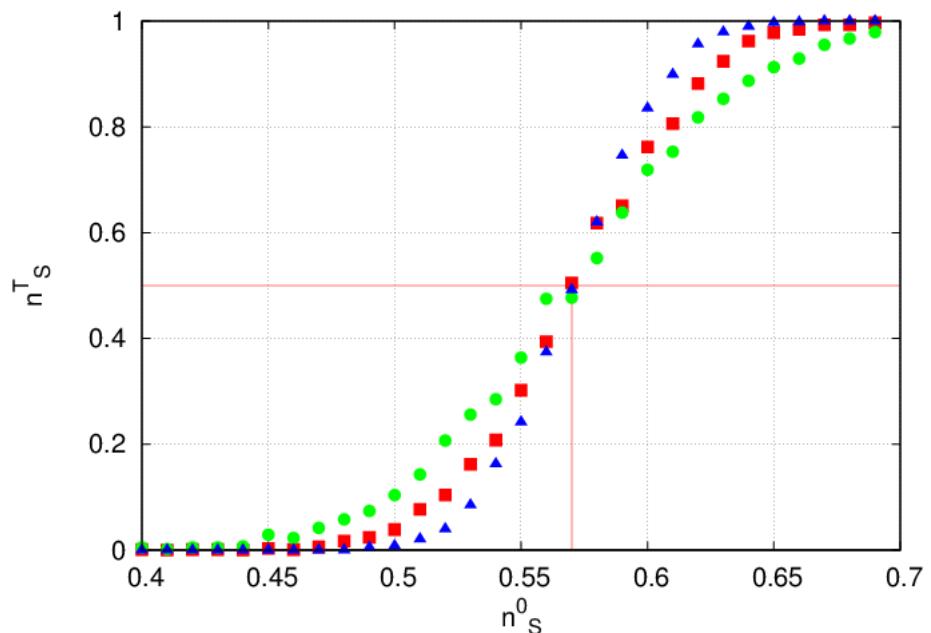
Punktem wyjściowym do zbadania zależności n^*_S od rozmiaru sieci jest sporządzenie zależności średniego końcowego udziału węzłów S od początkowego dla ustalonego rozmiaru

sieci. Dla każdej wartości początkowego udziału węzłów S n^0_S z ustalonego przed symulacją zakresu wartości generowany jest przebieg, uzyskany z uśredniania po 1000 symulacji. Następnie, z każdego przebiegu czasowego, odczytywany jest udział węzłów typu S w ostatnim kroku czasowym n^T_S . Finalnie, sporządzany jest wykres zależności końcowego udziału węzłów typu S n^T_S od początkowego udziału tych węzłów w sieci n^0_S — wykresy takie są sporządzane dla sieci liczących $N=500, 1000$ i 2000 węzłów i są przedstawione na Rysunkach 3-11 oraz 3-12.

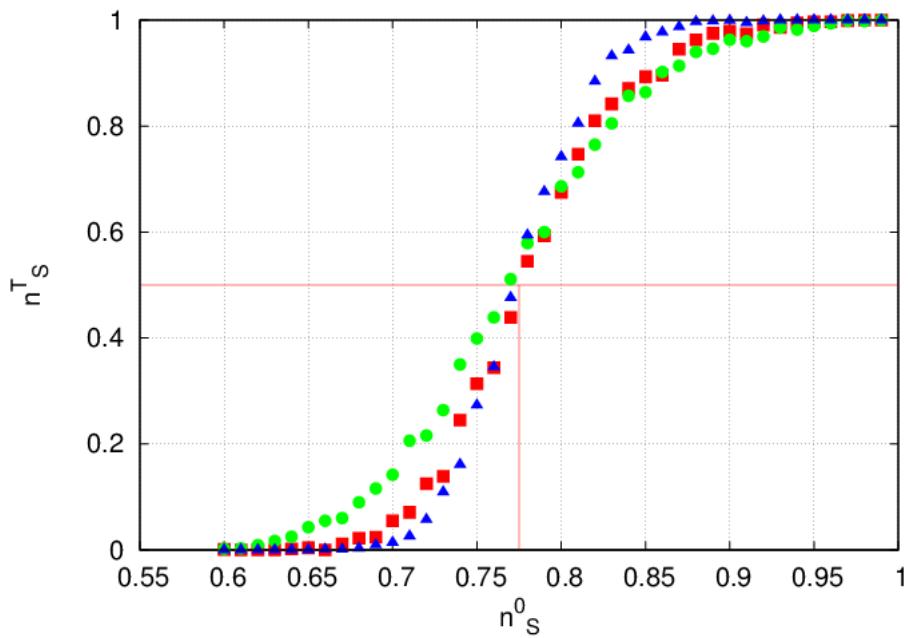
Rysunki te obrazują dwa istotne wyniki:

- wykresy dla różnych rozmiarów sieci przecinają się w jednym punkcie — punkt ten odpowiada takiemu początkowemu udziałowi węzłów S w sieci, dla którego dokładnie połowa symulacji kończy się 100% udziałem węzłów S w sieci, oznaczonemu wcześniej w pracy jako n^*_S ,
- wraz ze wzrostem rozmiaru sieci, wykresy robią się coraz bardziej strome i w granicy termodynamicznej dążą do funkcji Heaviside'a

Wniosek jest zatem następujący: n^*_S nie zmienia się w granicy rozmiaru sieci dążącego do nieskończoności, gdzie spodziewane jest przejście skokowe pomiędzy fazą, w której 100% symulacji kończy się całkowitym udziałem węzłów D w sieci a fazą gdzie 100% symulacji kończy się całkowitym udziałem węzłów typu S.



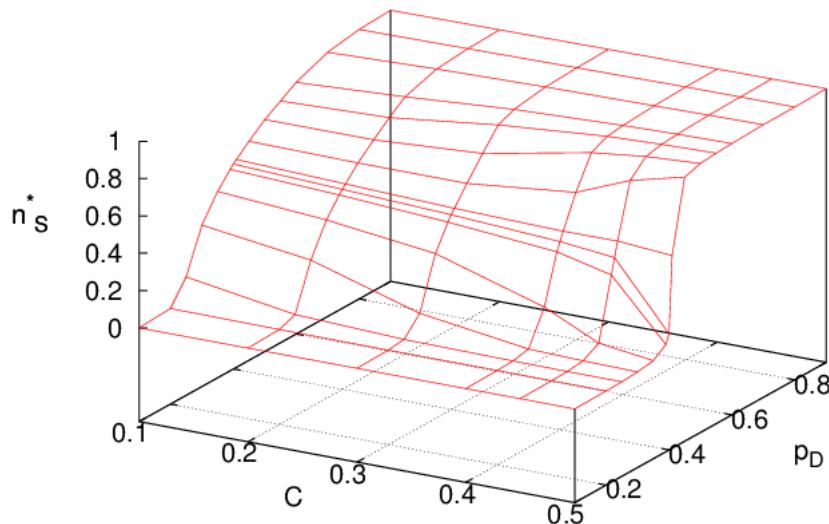
Rysunek 3-11. Wykres zależności końcowego udziału węzłów typu S n^T_S od początkowego udziału tych węzłów w sieci n^0_S . Każda krzywa odpowiada innej wielkości sieci. Koła odpowiadają $N=500$, kwadraty $N=1000$, trójkąty $N=2000$. Współczynnik gronowania $C=0,2$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D=0,4$.



Rysunek 3-12. zależności końcowego udziału węzłów typu S n^S od początkowego udziału tych węzłów w sieci n^0_S . Każda krzywa odpowiada innej wielkości sieci. Koła odpowiadają $N=500$, kwadraty $N=1000$, trójkąty $N=2000$. Współczynnik gronowania $C=0,3$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D=0,5$.

3.6 Zależność n^S od prawdopodobieństwa procesu D i współczynnika gronowania

Gdy dysponuje się zależnościami końcowego średniego udziału węzłów S od początkowego dla różnych wartości par parametrów (C, p_D), możliwe jest sporządzenie wykresu fazowego, przedstawiającego przejście pomiędzy fazą dominacji procesu S (kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów S w sieci) i fazą dominacji procesu D (kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów D w sieci). Na wykresie na Rysunku 3-13 są naniesione punkty odpowiadające takim średnim początkowym wartościom udziału węzłów S w sieci, dla których średni końcowy udział węzłów S wynosi 0,5, co oznacza, że 50% symulacji kończy się stu procentowym udziałem węzłów S w sieci (dominacja procesu S). Punkty te tworzą powierzchnię na wykresie we współrzędnych będących współczynnikiem gronowania C , prawdopodobieństwem p_D procesu D i udziałem węzłów S w sieci n^S .

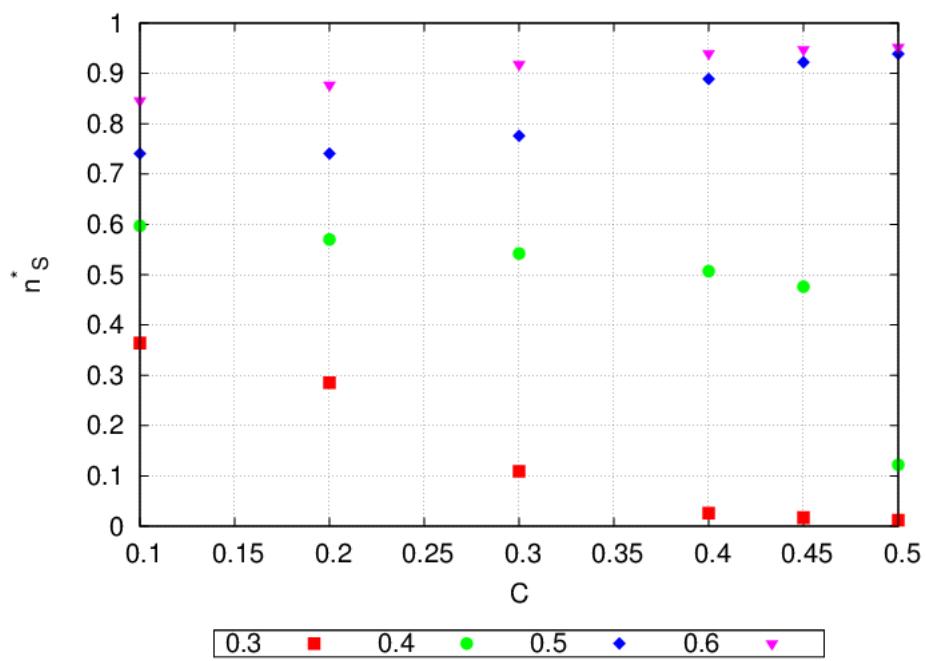


Rysunek 3-13. Wykres fazowy dla sieci Wattsa-Strogatza, liczącej $N=1000$ węzłów we współrzędnych będących współczynnikiem gronowania C , prawdopodobieństwem p_D i udziałem węzłów S w sieci n_s^* .

Z analizy wykresu na Rysunku 3-13 widać zależność n_s^* od prawdopodobieństwa procesu D: n_s^* rośnie wraz ze wzrostem p_D .

Można wytłumaczyć to następująco: Wzrost początkowego udziału węzłów S w sieci dla którego połowa symulacji kończy się dominacją procesu S a druga połowa dominacją procesu D wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa procesu D wynika z tego, że wyższe prawdopodobieństwo p_D wzmacnia aktywność procesu dwuwęzłowego D, a co za tym idzie, początkowy udział węzłów S w sieci musi wzrosnąć aby zrównoważyć ten efekt.

Widac również zależność n_s^* od współczynnika gronowania C . Nie jest to jednak zależność o takim samym charakterze w całym zakresie zbadanych wartości prawdopodobieństw p_D procesu D. Ilustruje to Rysunek 3-14. Są na tej powierzchni punkty, dla których przy ustalonym p_D wartości n_s^* rosną (np. dla p_D równych 0,5 czy 0,6), natomiast w innych obszarach wykresu wartości te maleją (np. dla p_D równych 0,3 oraz 0,4). Niestety, pytanie dlaczego tak się dzieje, na obecnym etapie badań pozostaje bez odpowiedzi.



Rysunek 3-14. Wykres zależności n_s^* od współczynnika gronowania C dla sieci Wattsa-Strogatza, liczącej $N = 1000$ węzłów dla różnych wartości prawdopodobieństwa p_D procesu D. Wartości prawdopodobieństw procesu D znajdują się w legendzie pod wykresem.

4 Model Sznajdów na sieci Albert-Barabásiego

Niniejszy rozdział zawiera opis procedury generacji rodziny sieci Albert-Barabásiego o różnych wartościach średniego stopnia wierzchołka oraz o szerokim spektrum współczynników gronowania, jak również opis algorytmu symulacji procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu Sznajdów. Zostaną tu również przedstawione i przedyskutowane otrzymane wyniki.

4.1 Proces generacji rodziny sieci.

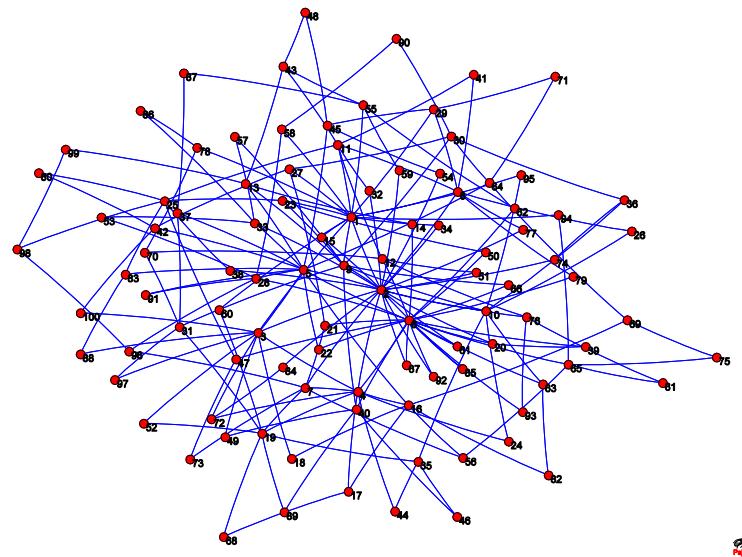
Do generacji sieci Albert-Barabásiego jest wykorzystywana implementacja listy Kertesza. Trafiają do niej pary etykiet wierzchołków reprezentujące utworzone pomiędzy wierzchołkami połączenie. Dzięki zimplementowaniu tej listy, przy wyborze wierzchołków do których nastąpi przyłączenie nowo dodanych węzłów, możliwe stało się zrealizowanie reguły preferencyjnego przyłączania. Ponieważ każde utworzone połączenie trafia na listę jako para liczb odpowiadająca etykietom wierzchołków które je tworzą, te które tworzą najczęściej połączeń występują na liście największą ilość razy. Zatem prawdopodobieństwo, że przy losowym wyborze elementu z tej listy to właśnie one zostaną wylosowane aby połączyć się z nowo dodanym wierzchołkiem jest proporcjonalne do ich stopni. Sam algorytm przebiega według następujących kroków:

1. W pierwszym kroku generowana jest w pełni połączona struktura składająca się z m węzłów, gdzie $m=k/2$, zaś k to oczekiwany średni stopień wierzchołka wygenerowanej sieci.
2. Następnie do początkowej struktury zostanie sukcesywnie dołączonych $N-m$ węzłów, gdzie N to docelowy rozmiar sieci .
3. Dołączanie do sieci nowego węzła i , który utworzy m połączeń z już istniejącymi węzłami, przebiega następująco:
 - a. Następuje dodanie wiązania zgodnie z regułą preferencyjnego przyłączania: z listy Kertesza zawierającej etykiety węzłów obecnych już w sieci, z jednorodnym prawdopodobieństwem zostaje wybrany jeden węzeł sieci j_1 , z którym zostanie połączony nowy węzeł i , pod warunkiem że połączenie jeszcze nie istnieje.
 - b. Następnie, z zadanym prawdopodobieństwem P_t następuje próba stworzenia triady, czyli wiązania pomiędzy nowym węzłem i a którymś z sąsiadów węzła j_1 . Jeżeli triada nie zostanie stworzona, następuje powrót do punktu a — z listy Kertesza zostanie wybrany inny węzeł — j_2 , z którym zostanie połączony węzeł i zgodnie z regułą preferencyjnego przyłączania a następnie ma miejsce próba stworzenia triady, czyli wiązania pomiędzy węzłem i a którymś z sąsiadów węzła j_2 .

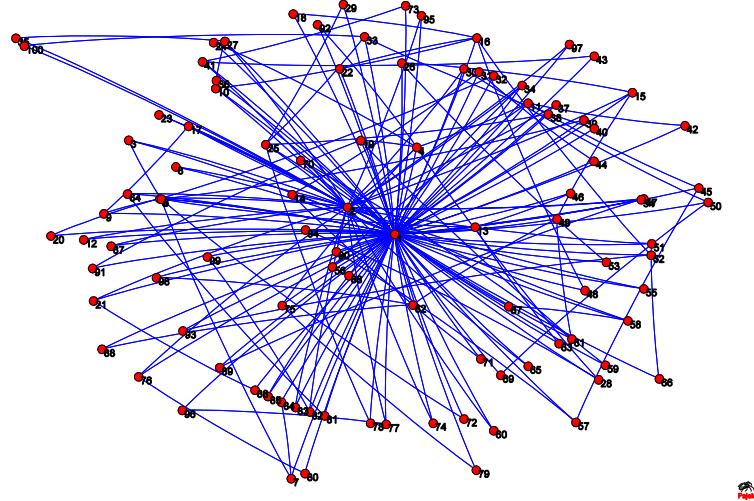
Powyższa procedura jest powtarzana dopóki nie zostanie utworzonych m połączeń między węzłem i oraz węzłami sieci.

4. Wreszcie, sprawdzane jest czy wygenerowana sieć posiada pożądany współczynnik gronowania C_i zawierający się w przedziale $[C-\Delta C ; C+\Delta C]$, jak również średni stopień wierzchołka k_i , zawierający się w przedziale $[k-\Delta k ; k+\Delta k]$. Jeśli nie, następuje modyfikacja P_t i generowana jest kolejna sieć.
5. Algorytm kończy działanie po wygenerowaniu n sieci dla każdego zadanego współczynnika gronowania C należącego do zbioru Z_C , gdzie zbiór ten definiujemy jako zbiór wybranych przed symulacją wartości współczynników gronowania (zwykle zawierających się w przedziale od najmniejszego do największego możliwego do uzyskania współczynnika gronowania dla danego typu sieci).

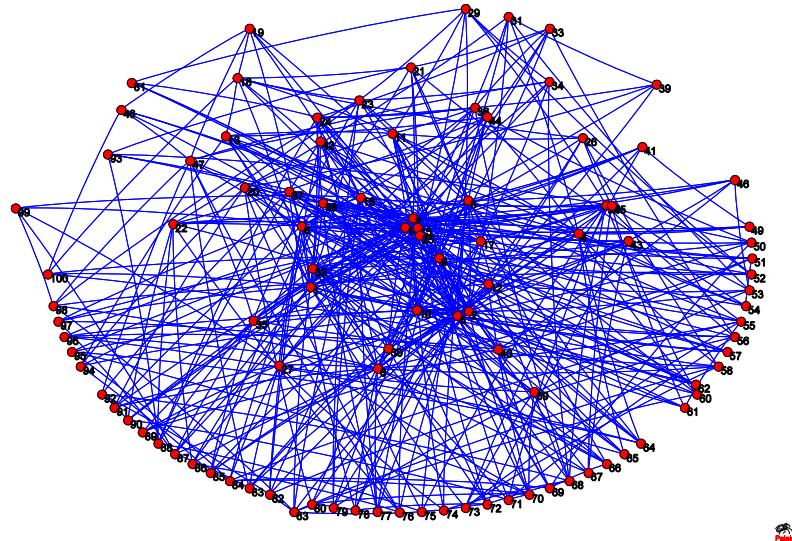
Dołączone do rozdziału rysunki przedstawiają wizualizacje wygenerowanych sieci, stworzone przy pomocy programu Pajek. Wyraźnie pokazują one, iż najwięcej połączeń mają wierzchołki które tworzyły sieć w chwili początkowej, a więc silą rzeczy miały najwięcej połączeń i zgodnie z regułą preferowanego przyłączania liczba ich połączeń wciąż rosła. Dla większej przejrzystości, sieci są mniejsze niż użyte w późniejszych symulacjach.



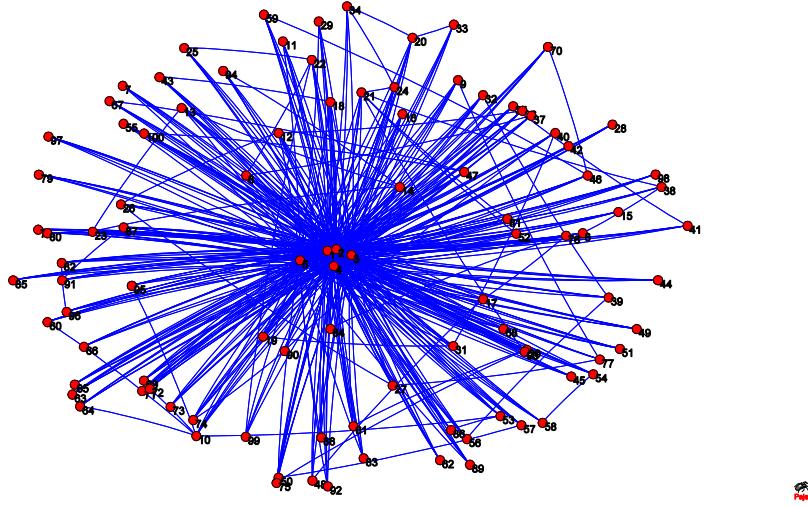
Rysunek 4-1. Sieć Albert-Barabásiego dla $N=100$, $k=4$ oraz $C=0,1$.



Rysunek 4-2. Sieć Albert-Barabásiego dla $N=100$, $k=4$ oraz $C=0,8$.



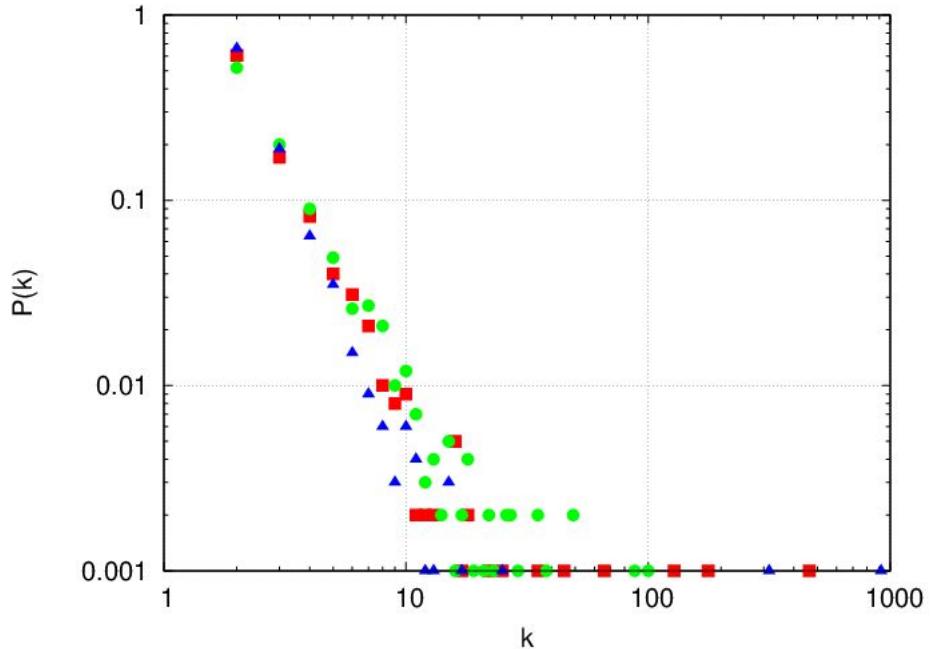
Rysunek 4-3. Sieć Albert-Barabásiego dla $N=100$, $k=10$ oraz $C=0,2$.



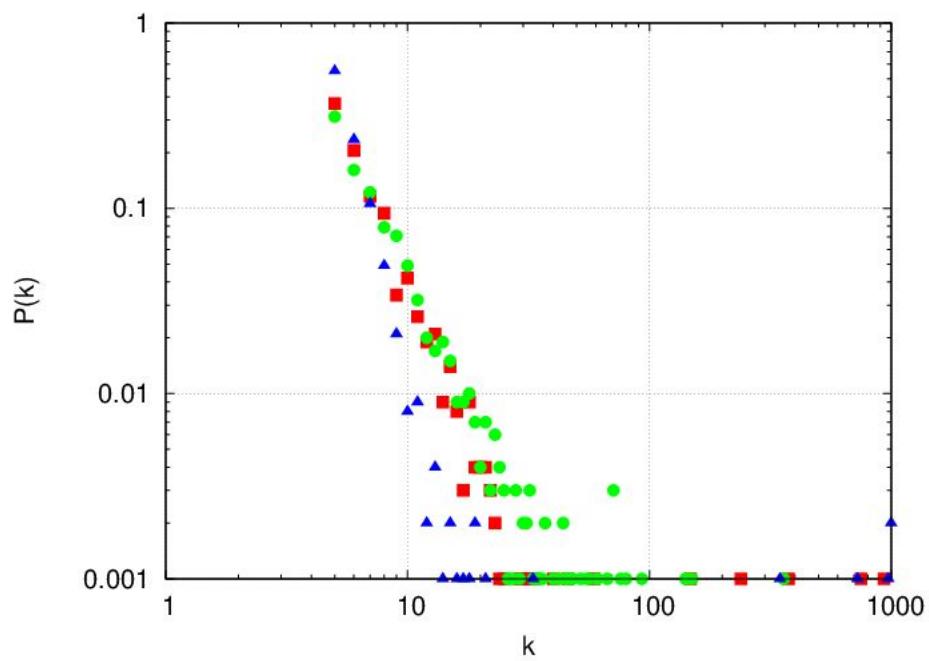
Rysunek 4-4. Sieć Albert-Barabásiego dla $N=100$, $k=10$ oraz $C=0,9$.

4.2 Weryfikacja parametrów sieci

Dla wygenerowanych sieci Albert-Barabásiego o wielkości $N = 1000$, średnim stopniu wierzchołka $k= 4$ i $k= 10$ (gdzie $\Delta k = 0,1$ oraz $\Delta C = 0,001$) a także wybranych współczynników gronowania, zostały sporządzone wykresy rozkładu stopnia wierzchołka. Rozkłady te w skali logarytmicznej przedstawiają Rysunki 4-5 oraz 4-6.



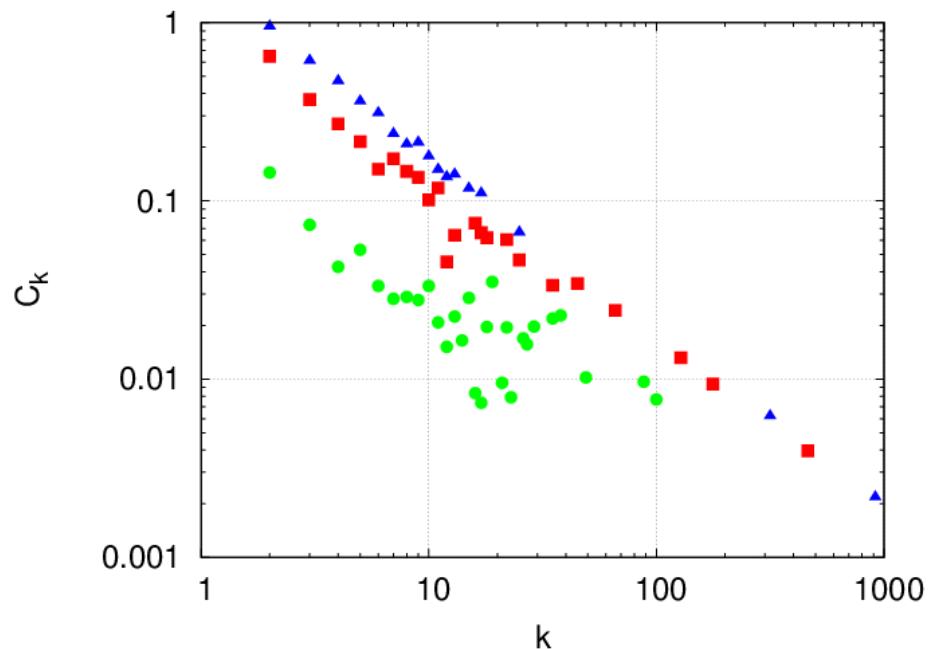
Rysunek 4-5. Rozkład prawdopodobieństw stopni wierzchołków dla wygenerowanej sieci Albert-Barabásiego, $N=1000$, $k=4$. Trójkąty odpowiadają wartościom współczynnika gronowania $C=0,8$, kwadraty $C=0,5$, okręgi $C=0,1$.



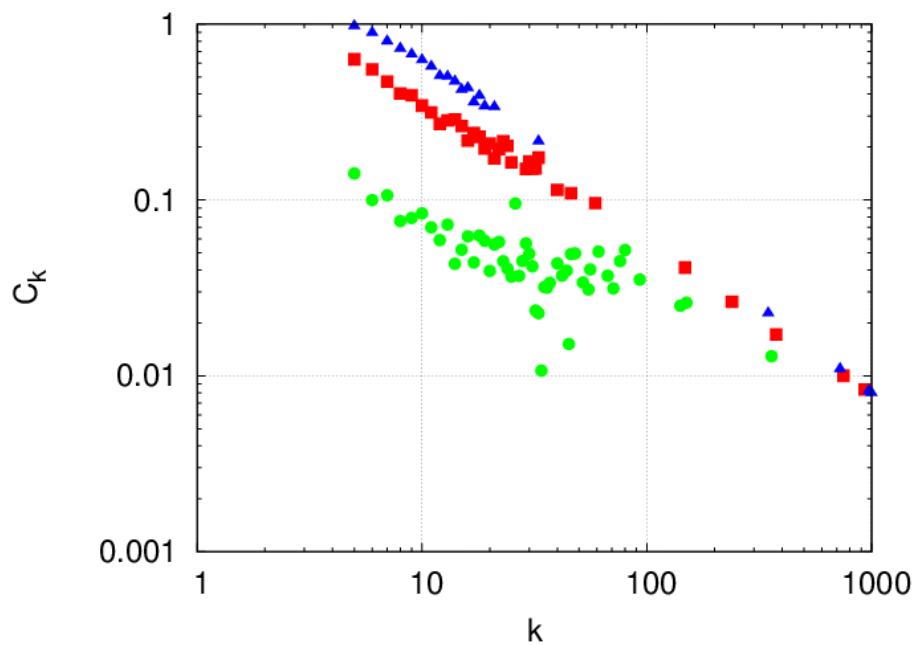
Rysunek 4-6. Rozkład prawdopodobieństw stopni wierzchołków dla wygenerowanej sieci Albert-Barabásiego, $N=1000$, $k=10$. Trójkąty odpowiadają wartościom współczynnika gronowania $C=0,9$, kwadraty $C=0,5$, okręgi $C=0,1$.

Otrzymane wykresy rozkładu prawdopodobieństw stopni wierzchołków dla wygenerowanej sieci odpowiadają zależnościom teoretycznym, przedstawionym we wstępie teoretycznym niniejszej pracy.

Jednocześnie zostały sporządzone wykresy rozkładu lokalnego współczynnika gronowania w skali logarytmicznej. Przedstawiają je Rysunki 4-7 oraz 4-8.



Rysunek 4-7. Rozkład lokalnego współczynnika gronowania dla sieci Albert-Barabásiego, $N=1000$, $k=4$. Trójkąty odpowiadają $C=0,8$, kwadraty $C=0,5$, okręgi $C=0,1$.



Rysunek 4-8. Rozkład lokalnego wsp. gronowania dla sieci Albert-Barabásiego, $N=1000$, $k=10$. Trójkąty odpowiadają $C=0,9$, kwadraty $C=0,5$, okręgi $C=0,1$.

Widać, że otrzymane wykresy rozkładu lokalnego współczynnika gronowania dla sieci Albert-Barabásiego o regulowanym gronowaniu różnią się od teoretycznego, w którym lokalny współczynnik gronowania jest stały i niezależny od stopnia wierzchołka [4]. Wynika to z przyjętego algorytmu generacji sieci, umożliwiającego bardzo znaczące zwiększenie gronowania.

4.3 Symulacja procesu kontaktowego.

W celu symulacji procesu kontaktowego, dla każdej z n sieci o współczynniku gronowania C_i zawierającym się w przedziale $[C-\Delta C ; C+\Delta C]$, gdzie C należy do zbioru Z_C , wykonywana jest s -krotnie procedura opisana w poniższych punktach:

1. W chwili początkowej ($t=0$), określona ilość węzłów jest oznaczana jako węzły typu S. Wszystkie pozostałe są oznaczane jako węzły typu D. Początkowy rozkład typów węzłów jest generowany losowo.
2. W każdej iteracji t , losowo generowana jest permutacja N – wyrazowa zbioru etykiet wszystkich węzłów. Gwarantuje to, że przy aktualnianiu stanów węzłów, żaden węzeł nie zostanie pominięty i żaden nie zostanie odwiedzony więcej niż jeden raz w danej iteracji.
3. Następnie, w zależności od typu wybranego węzła, aplikowana jest jedna z poniższych reguł, które przedstawia Rysunek 3-6:
 - a. Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to zmieniany jest typ sąsiada z D na S.
 - b. Natomiast jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to następuje sprawdzenie czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_D zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D.
4. Uaktualnienie typu węzła następuje asynchronicznie, czyli przed odwiedzeniem kolejnego węzła w tej iteracji.
5. W każdym kroku czasowym monitorowany jest aktualny udział węzłów typu S ($n_S(t)$) i typu D ($1-n_S(t)$) w sieci.
6. Symulacja kończy się po zadanej liczbie kroków czasowych T_{max} , będącej jednym z parametrów symulacji.

4.4 Pojedyncze przebiegi czasowe.

Początkowo zostały wygenerowane pojedyncze przebiegi czasowe dla sieci Albert-Barabásiego różniących się współczynnikami gronowania C , różnych prawdopodobieństw p_D procesu D oraz różnych początkowych udziałów węzłów typu S. Przykładowe, pojedyncze takie przebiegi zostały przedstawione na Rysunku 4-9. Widać, że kończą się one albo udziałem węzłów S w sieci równym zeru albo 100% udziałem tych węzłów w sieci.

Na każdym z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 4-9 umieszczono wybrane losowo, cztery pojedyncze przebiegi czasowe. Oprócz nich naniesiono przebieg będący średnią po $s = 10$ rozkładach początkowych realizowanych na $n = 100$ sieciach różniących się topologiami.

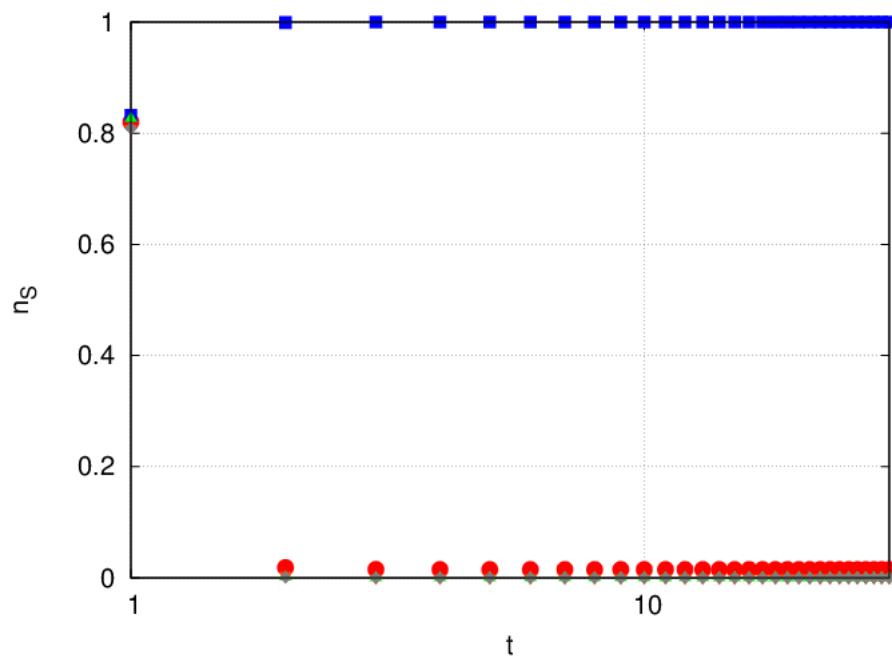
Każdy z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 4-9 został wygenerowany dla tej samej sieci i prawdopodobieństwa p_D procesu D, natomiast różnego udziału n^0_S węzłów typu S: wykres górnny odpowiada n^0_S wynoszącemu 0,82, środkowy — 0,86, zaś wykres dolny — n^0_S wynoszącemu 0,9. Na wykresie górnym i środkowym większość pojedynczych przebiegów

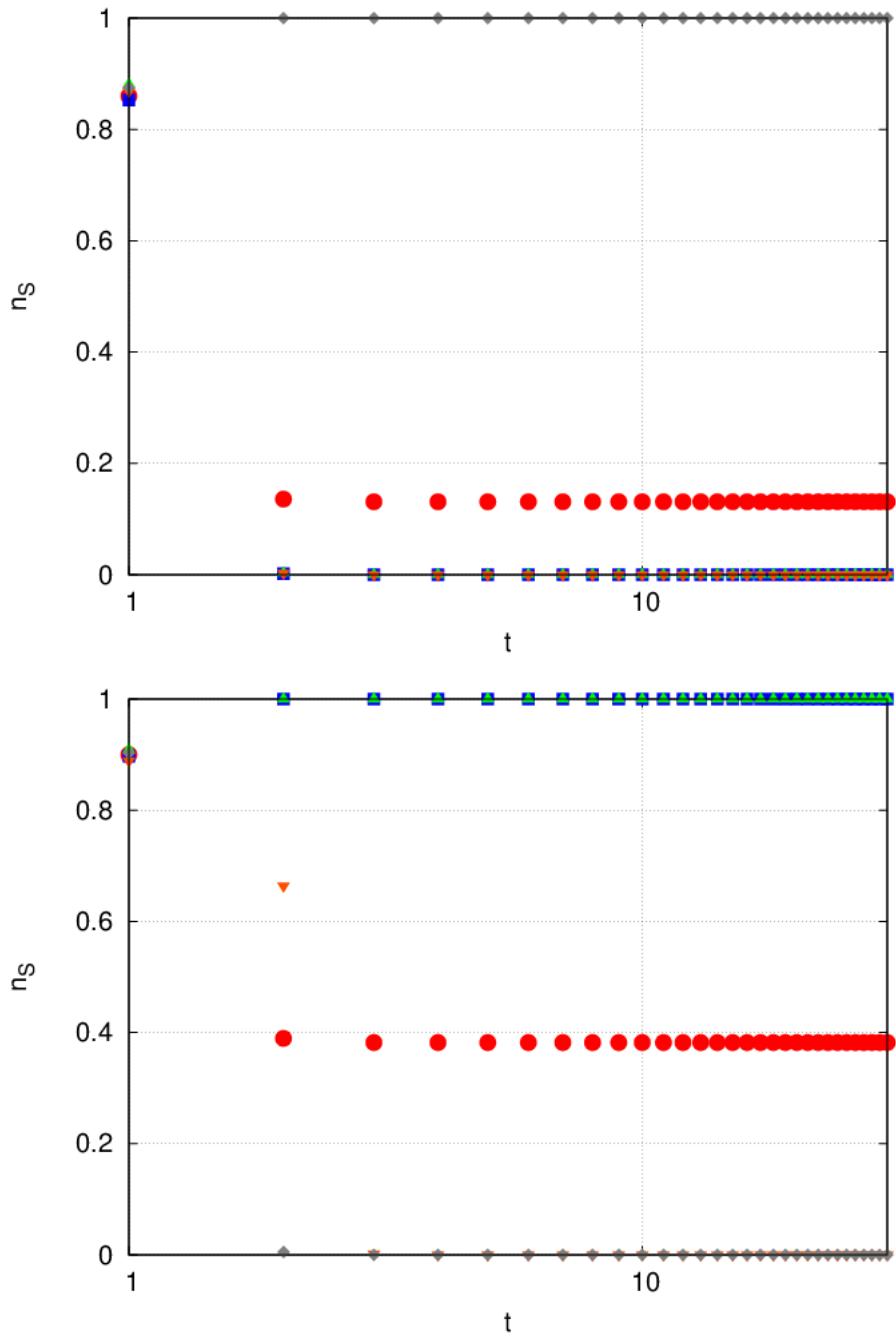
czasowych kończy się udziałem węzłów S w sieci równym zeru. Na dolnym dwa przebiegi kończą się 100% udziałem węzłów S w sieci, natomiast dwa pozostałe — udziałem węzłów S równym zeru.

Analiza pojedynczych przebiegów w kontekście różnych wartości n^{θ_S} sugeruje zatem istnienie zależności od stanu początkowego, polegającej na tym że wraz ze wzrostem początkowego udziału węzłów S w sieci, liczba przebiegów czasowych kończących się 100% udziałem węzłów typu S w sieci będzie rosła. Również tutaj wygodnie będzie posłużyć się wielkością n^*_S opisaną dokładniej w rozdziale 2.5.6. Dla przypomnienia, jest to taka wartość początkowego udziału węzłów S, dla której dokładnie połowa symulacji kończy się 100% udziałem węzłów typu S w sieci a druga połowa — 100% udziałem węzłów typu D.

W dalszej części niniejszego rozdziału zostanie zbadane czy n^*_S zależy od współczynnika gronowania \mathcal{C} oraz prawdopodobieństwa p_D procesu D dla sieci liczącej 1000 węzłów.

Podjęta również zostanie próba odpowiedzi na pytanie czy n^*_S zależy od rozmiaru sieci.





Rysunek 4-9. Pojedyncze (jeden rozkład początkowy węzłów S na jednej sieci) przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Albert-Barabásiego liczącej 1000 węzłów. Każda krzywa, z wyjątkiem czerwonych kół odpowiadających średniej po 1000 przebiegach, przedstawia inny pojedynczy przebieg czasowy. Wykresy różnią się początkowym udziałem węzłów S n^0_S , który wynosi: 0,82 — wykres górnny, 0,86 — wykres środkowy oraz 0,9 — wykres dolny. Średni stopień wierzchołka $k=10$, współczynnik gronowania $C=0,1$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D=0,5$.

4.5 Uśrednione przebiegi czasowe

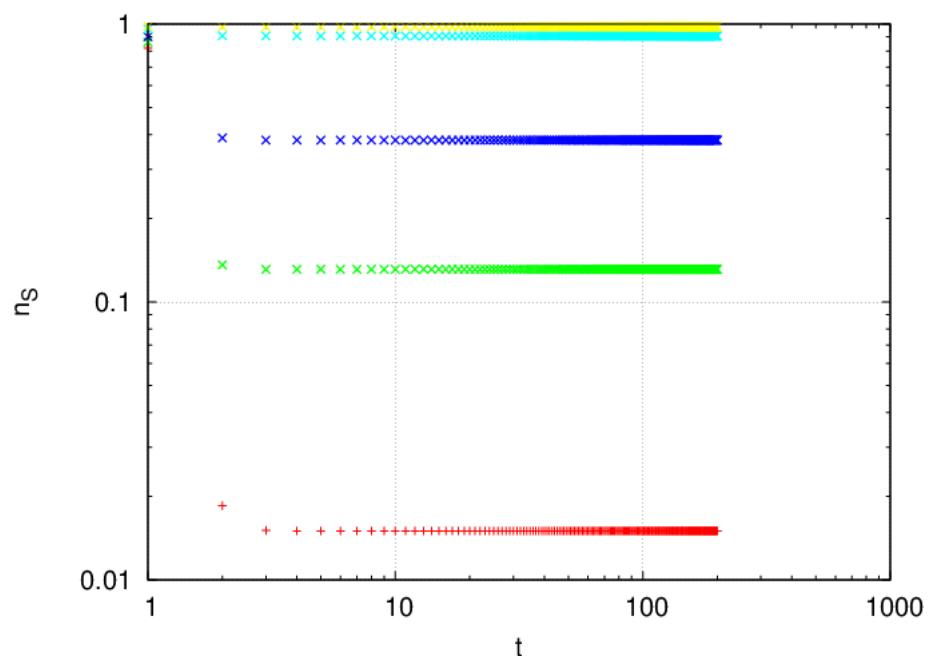
Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa p_D procesu D i początkowego udziału węzłów typu S w sieci n^0_S , pojedyncze przebiegi czasowe są uśredniane po $s = 10$ rozkładach początkowych realizowanych na $n = 100$ sieciach różniących się topologiami.

Wartości pozostałych parametrów są następujące:

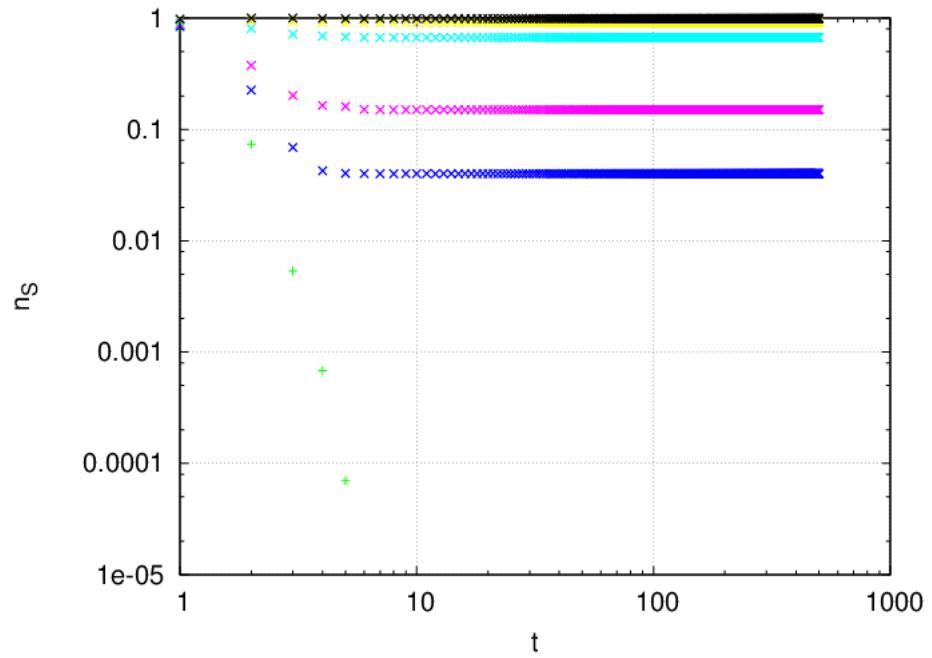
- $N = 1000$,
- $k = 4$ lub 10 ,
- $\Delta k = 0,1$,
- $\Delta C = 0,001$,
- $Z_C = \{0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8\}$ dla $k = 4$. Dodatkowo, dla $k = 10$ udało się uzyskać $C=0,9$,
- $T_{max} = 500$.

Wybrane, uzyskane w symulacjach zależności $n_S(t)$ ewolucji udziału węzłów S od czasu, przedstawione są na rysunkach 4-10 - 4-12.

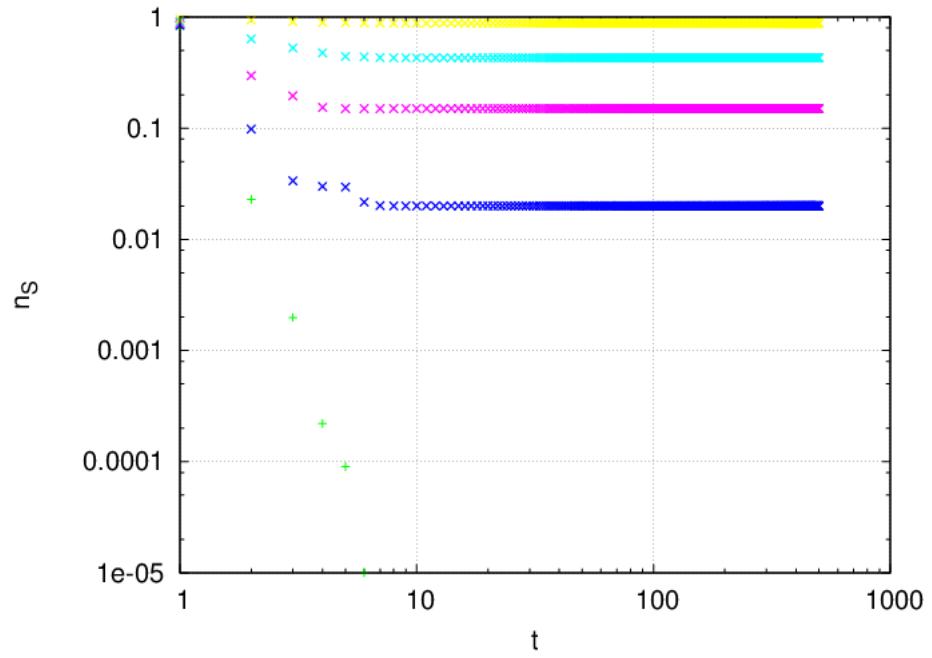
Jak zostało wspomniane, pojedyncze przebiegi czasowe kończą się albo udziałem węzłów S w sieci równym zeru, albo 100% udziałem tych węzłów w sieci, zatem średnie udziały węzłów S w sieci w chwili końcowej przyjmują wartości z całego przedziału $[0;1]$. Umieszczając na jednym wykresie uśrednione przebiegi dla różnych początkowych udziałów węzłów typu S w sieci, obserwujemy również wyraźną zależność od stanu początkowego. Zależność ta zostanie dokładniej zbadana w dalszej części niniejszego rozdziału.



Rysunek 4-10. Uśrednione zależności czasowe udziału węzłów S w sieci $n_S(t)$. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S $n^0 S$. Od dołu do gory są to: 0,82 ,0,86, 0,9, 0,96, 0,98. Współczynnik gronowania $C=0,1$, średni stopień wierzchołka $k=10$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,5$.



Rysunek 4-11. Uśrednione zależności czasowe udziału węzłów S w sieci $n_S(t)$. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S n^0_S . Od dołu do góry są to: 0,8 ,0,84, 0,88, 0,92, 0,96, 0,98. Współczynnik gronowania $C=0,2$, średni stopień wierzchołka $k=4$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,7$.

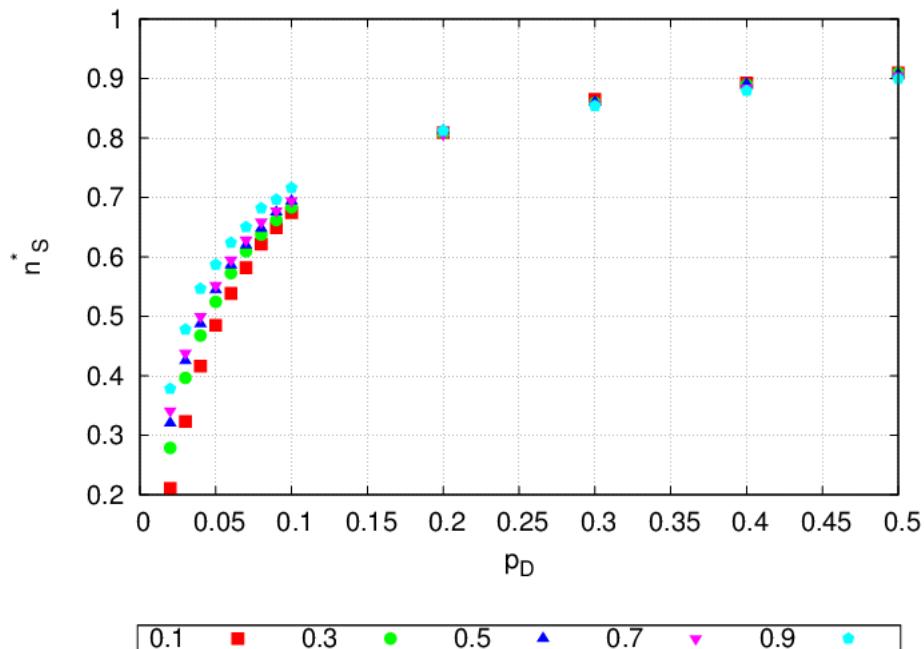


Rysunek 4-12. Uśrednione zależności czasowe udziału węzłów S w sieci $n_S(t)$. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi węzłów S n^0_S . Od dołu do góry są to: 0,8 ,0,84, 0,88, 0,92, 0,96. Współczynnik gronowania $C=0,5$, średni stopień wierzchołka $k=4$, prawdopodobieństwo procesu D wynosi $p_D= 0,8$.

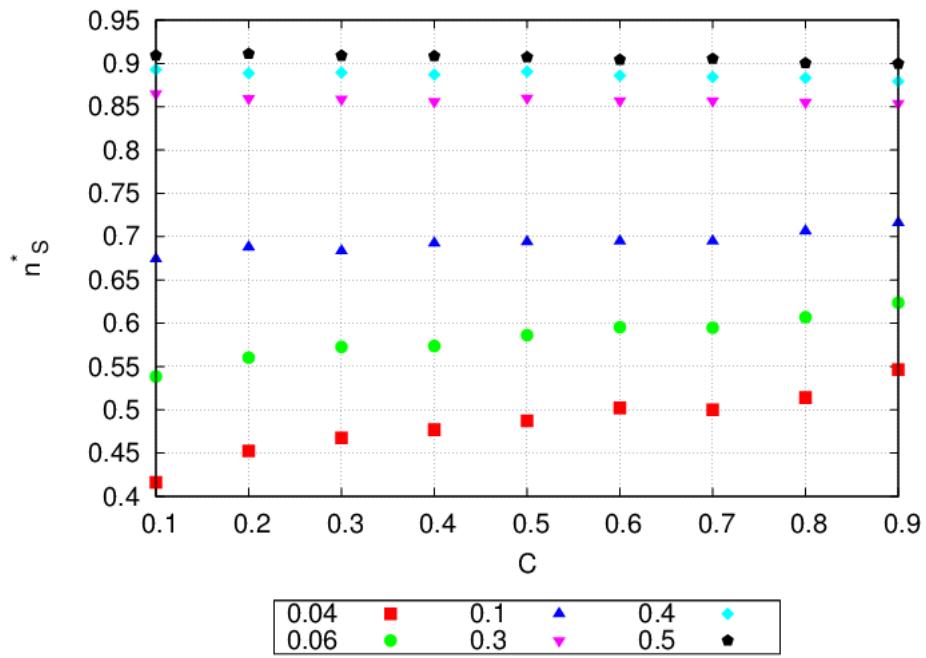
4.6 Zależność n^*_S od prawdopodobieństwa procesu D i współczynnika gronowania

Aby zbadać zależność n^*_S od prawdopodobieństwa p_D procesu D i współczynnika gronowania sieci C , trzeba było najpierw otrzymać zależność średniego końcowego udziału węzłów S od udziału początkowego, dla ustalonego rozmiaru sieci i różnych par wartości prawdopodobieństwa p_D procesu D oraz współczynnika gronowania C . Sposób w jaki generowane są takie zależności na podstawie przebiegów czasowych, jest taki sam jak dla sieci Watts-Strogatza i został opisany w rozdziale 3.5 pracy.

Otrzymane zależności zostały przedstawione na rysunkach 4-13 oraz 4-14.



Rysunek 4-13. Wykres zależności n^*_S od prawdopodobieństwa procesu D dla sieci Albert-Barabásiego ($k=10$), liczącej $N = 1000$ węzłów dla różnych wartości współczynnika gronowania C . Wartości współczynnika gronowania C znajdują się w legendzie pod wykresem.



Rysunek 4-14. Wykres zależności n_s^* od współczynnika gronowania C dla sieci Albert-Barabásiego ($k=10$), liczącej $N = 1000$ węzłów dla różnych wartości prawdopodobieństwa procesu D. Wartości prawdopodobieństw procesu D znajdują się w legendzie pod wykresem.

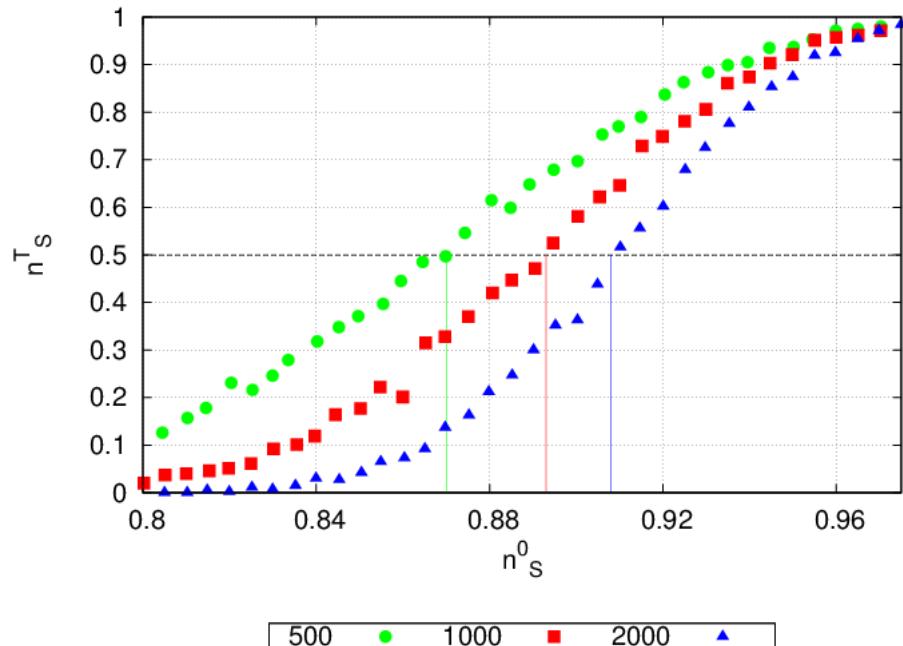
Analizując Rysunek 4-13 można zaobserwować wyraźną zależność pomiędzy n_s^* oraz prawdopodobieństwem p_D procesu D. Dla wszystkich zbadanych wartości współczynnika gronowania, wartości n_s^* rosną wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p_D procesu D. Jest to zgodne z intuicją – duże prawdopodobieństwo procesu D wzmacnia proces dwuwęzłowy, zatem początkowy udział węzłów S w sieci musi wzrosnąć, aby skompensować ten efekt.

Na Rysunku 4-15, widać również zależność n_s^* od współczynnika gronowania C . Nie ma ona jednak takiego samego charakteru w całym zakresie zbadanych wartości prawdopodobieństw p_D procesu D. Są obszary, dla których przy ustalonym p_D wartości n_s^* rosną (np. dla p_D równych 0,04 czy 0,06). Wraz ze wzrostem p_D , wzrost n_s^* wraz ze współczynnikiem gronowania jest łagodniejszy, aż do momentu kiedy p_D osiągnie wartość, dla której obserwowana jest zależność odwrotna: n_s^* nieznacznie maleje ze wzrostem współczynnika gronowania (np. dla p_D równych 0,3, 0,4 oraz 0,5).

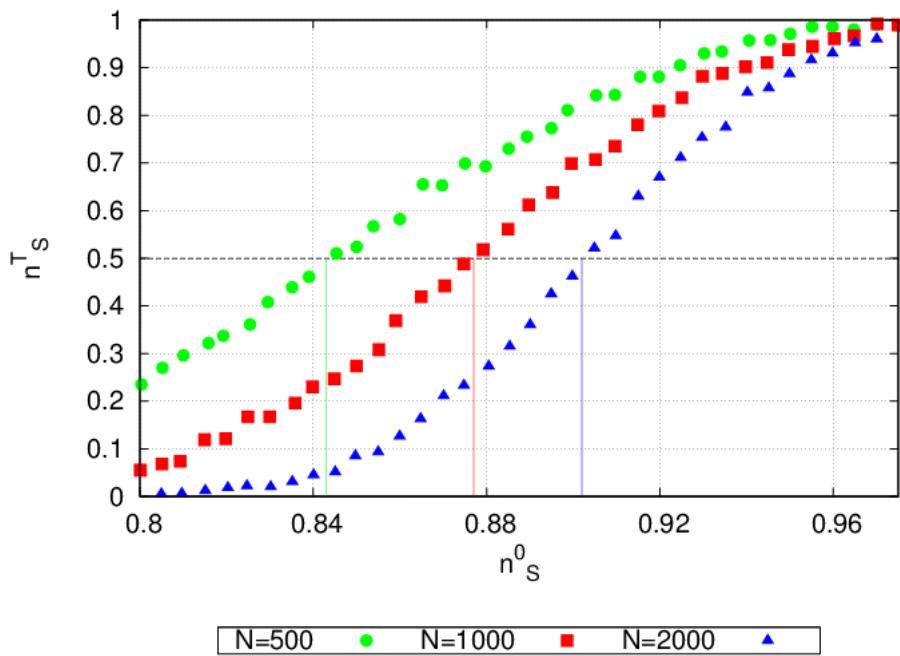
Niestety, na obecnym etapie badań nie udało się znaleźć odpowiedzi na pytanie co jest przyczyną efektu odwracania charakteru monotoniczności zależności $n_s^*(C)$ wraz ze wzrostem p_D .

4.7 Zależność n^S od rozmiaru sieci

Aby zbadać zależność n^S od rozmiaru sieci, trzeba było najpierw otrzymać zależność średniego końcowego udziału węzłów S od udziału początkowego, dla różnych rozmiarów sieci. Rysunki 4-16 oraz 4-17 przedstawiają zależność średniego końcowego udziału węzłów S od początkowego dla sieci liczących $N = 500, 1000$ i 2000 węzłów.



Rysunek 4-16. Zależność średniego udziału końcowego węzłów S n^S w sieci od początkowego n^0_S dla sieci Albert-Barabásiego ($k=4$, $C=0,1$) i prawdopodobieństwa $p_D=0,4$ procesu D, dla różnych wielkości sieci, podanych w legendzie pod wykresem.

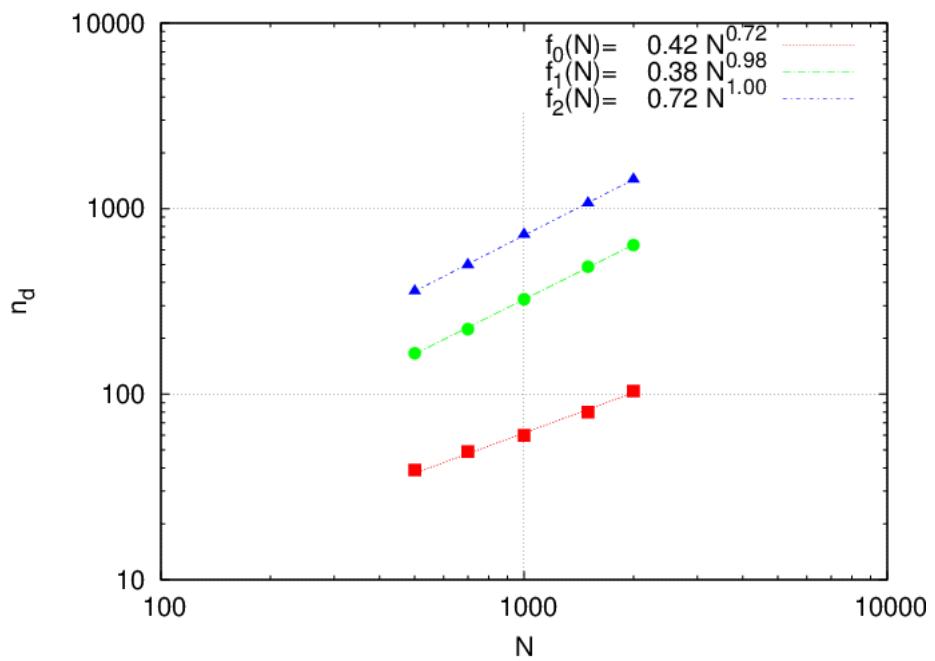


Rysunek 4-17. Zależność średniego udziału końcowego węzłów S n^S w sieci od początkowego n^0_S dla sieci Albert-Barabásiego ($k=10$, $C=0,5$) i prawdopodobieństwa $p_D=0,5$ procesu D, dla różnych wielkości sieci, podanych w legendzie pod wykresem.

Z analizy wykresów na rysunkach 4-16 oraz 4-17 wynika, że wartość n^S wraz ze wzrostem rozmiaru sieci N rośnie – razem z wykresem przesuwa się w prawo, w stronę jedności. Można zatem wysnuć wniosek, że zwiększając nieskończonie rozmiar sieci — n^S osiągnie wartość jeden. Oznacza to, że dla każdego początkowego udziału węzłów typu S wszystkie symulacje kończyłyby się 100% udziałem węzłów D w sieci, z wyjątkiem sytuacji kiedy w chwili początkowej udział węzłów S w sieci wynosiłby 100%.

Nie ma zatem dla sieci Albert-Barabásiego przejścia pomiędzy fazą, w której 100% symulacji kończy się całkowitym udziałem węzłów D w sieci a fazą gdzie 100% symulacji kończy się całkowitym udziałem węzłów typu S, ponieważ faza S zanika wraz ze wzrostem rozmiaru sieci.

Efekt wzrostu n^S wraz ze wzrostem wielkości sieci nie jest do końca oczywisty i intuicyjny. Wyjaśnienie jest tutaj następujące: wraz ze wzrostem rozmiaru sieci rośnie średnia ilość sąsiadów pary węzłów, co wzmacnia proces dwuwęzłowy D, wymagający właśnie jak największej liczby sąsiadów pary D-D aby się rozprzestrzeniać w sieci. Zatem początkowy udział węzłów typu S w sieci musi również wzrosnąć, aby skompensować ten efekt, co objawia się wzrostem n^S . Ilustruje to Rysunek 4-18. Dodatkowo na rysunku zostały umieszczone funkcje dopasowane do serii danych odpowiadających poszczególnym wartościom współczynnika gronowania. Widać, że ze wzrostem tego współczynnika, dopasowanie staje się coraz bardziej liniowe (dla największej jego wartości jest liniowe).



Rysunek 4-18. Zależność średniej ilości sąsiadów n_d pary węzłów od wielkości sieci Albert-Barabásiego liczącej 1000 węzłów i średnim stopniu wierzchołka k równym 10, dla różnych wartości współczynnika gronowania C , wynoszących: $C=0,1$ — czerwone kwadraty, $C=0,5$ — zielone koła, $C=0,9$ — niebieskie trójkąty. Dodatkowo na rysunku zostały umieszczone wzory funkcji dopasowanych do poszczególnych serii danych: f_0 dla $C=0,1$, f_1 dla $C=0,5$, f_2 dla $C=0,9$.

5 Model z sąsiedztwem na sieci Erdősa-Rényiego

Niniejszy rozdział zawiera opis procedury generacji rodziny sieci Erdősa-Rényiego (E-R) o szerokim spektrum współczynników gronowania, jak również opis algorytmu symulacji procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu „z sąsiedztwem”. Zostaną również przedstawione i przedyskutowane otrzymane wyniki.

5.1 Proces generacji rodziny sieci E-R

1. Punktem wyjściowym procesu generacji rodziny sieci Erdősa-Rényiego o zwiększym współczynniku gronowania jest wygenerowanie sieci „bazowej”. Jest to klasyczny graf przypadkowy liczący N węzłów o współczynniku gronowania bliskim zeru i średnim stopniu wierzchołka k_B mniejszym od „docelowego” średniego stopnia wierzchołka k .
2. Następnie, zgodnie z procedurą zastosowaną pierwotnie dla sieci bezskalowych [7], a następnie zaadaptowaną dla sieci przypadkowych [68], dokonywane jest zwiększenie gronowania sieci bazowej. Odbywa się to w następujący sposób:
 - a. ustalana jest wartość prawdopodobieństwa stworzenia triady p_T ,
 - b. przeglądana jest lista sąsiadów każdego węzła w sieci,
 - c. z prawdopodobieństwem p_T wybierana jest nie więcej niż jedna para sąsiadów między którymi zostanie utworzone połączenie,
 - d. nowe wiązania tworzone są dopiero po przeglądnięciu list sąsiadów wszystkich węzłów w sieci.

Procedura kończy działanie gdy po dodaniu nowych połączeń, współczynnik gronowania tak otrzymanej sieci zawiera się w przedziale $C \pm \Delta C$, zaś C jest pożdanym współczynnikiem gronowania i średni stopień wierzchołka k zawiera się w przedziale $k \pm \Delta k$.

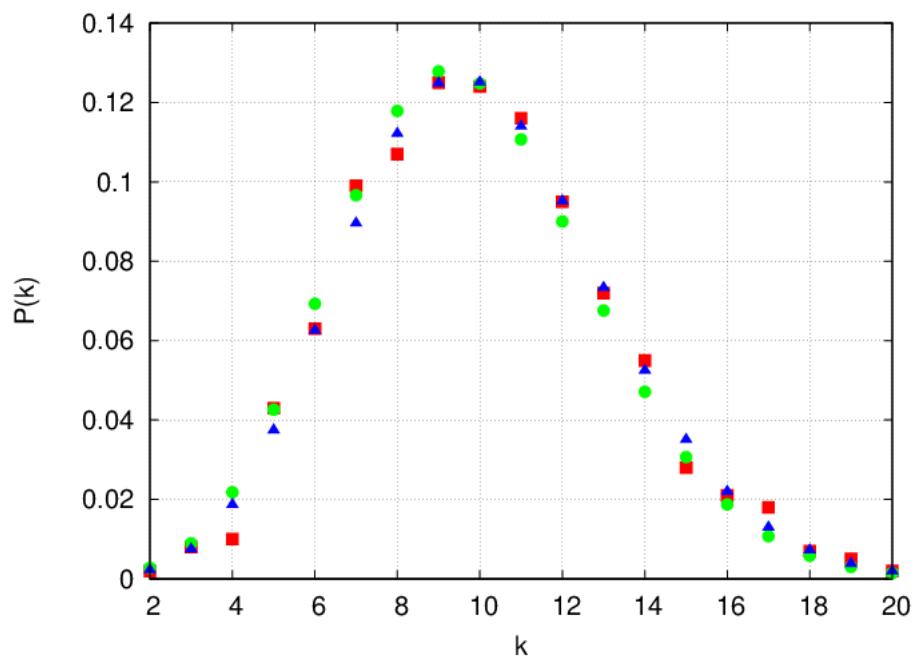
3. W przypadku gdy powyższe warunki, dotyczące wartości C i k nie są spełnione, następuje zwiększenie wartości p_T i powtórzenie procedury opisanej w punktach 2.a - 2.d.

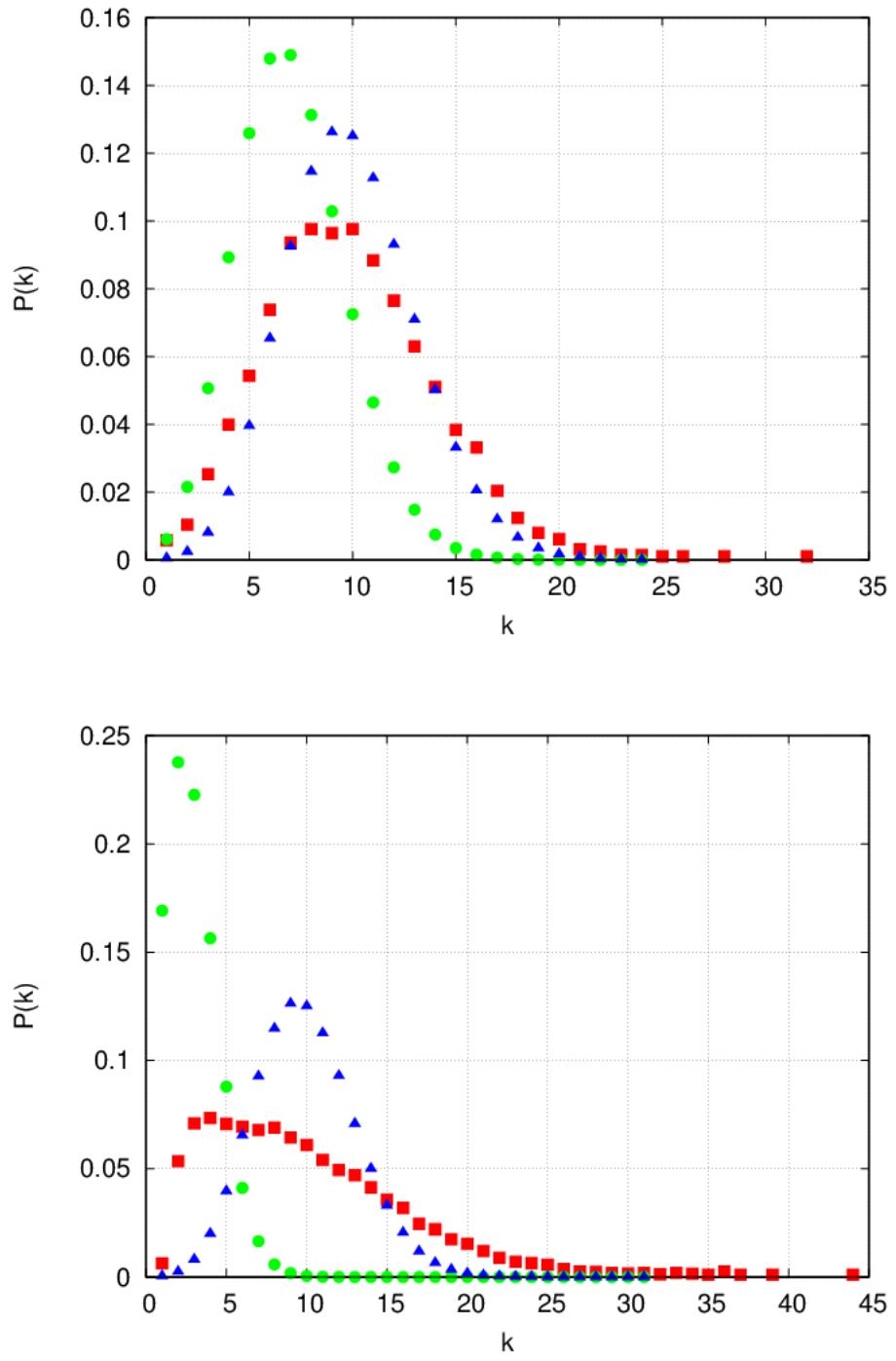
Rozkład prawdopodobieństwa stopni wierzchołka dla sieci otrzymanych zgodnie z powyższą procedurą odbiega od rozkładu dla sieci przypadkowej o tym samym średnim stopniu wierzchołka lecz niezwiększym gronowaniem. Na rysunku 5-1 przedstawiono rozkłady prawdopodobieństwa stopni wierzchołków dla sieci otrzymanych zgodnie z opisaną procedurą dla $k = 10$ i wybranych wartości współczynnika gronowania C , wraz z teoretycznym rozkładem prawdopodobieństwa stopni wierzchołków dla klasycznych grafów przypadkowych o $k = 10$. Przeprowadzone testy zgodności chi kwadrat (Pearsona) wykazały, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, iż rozkład prawdopodobieństwa stopni wierzchołka sieci Erdősa-Rényiego o minimalnie zwiększym

gronowaniu, wynoszącym $C = 0,01$ jest rozkładem Poissona ($\chi^2 < \chi^2_{\text{kryt}}$), natomiast dla sieci o współczynniku gronowania zwiększym do wartości 0,1 i wyższych, hipoteza została odrzucona, co przedstawia Tabela 5-1.

C	χ^2	χ^2_{kryt}
0,01	10,68	37,57
0,1	227,78	44,99
0,5	2210,55	44,99

Tabela 5-1. Zestawienie wartości χ^2 i χ^2_{kryt} dla różnych wartości współczynnika gronowania C sieci E-R o zwiększym gronowaniu. Poziom istotności $\alpha = 0,01$ dla $C = 0,01$, natomiast dla pozostałych $C, \alpha = 0,05$.



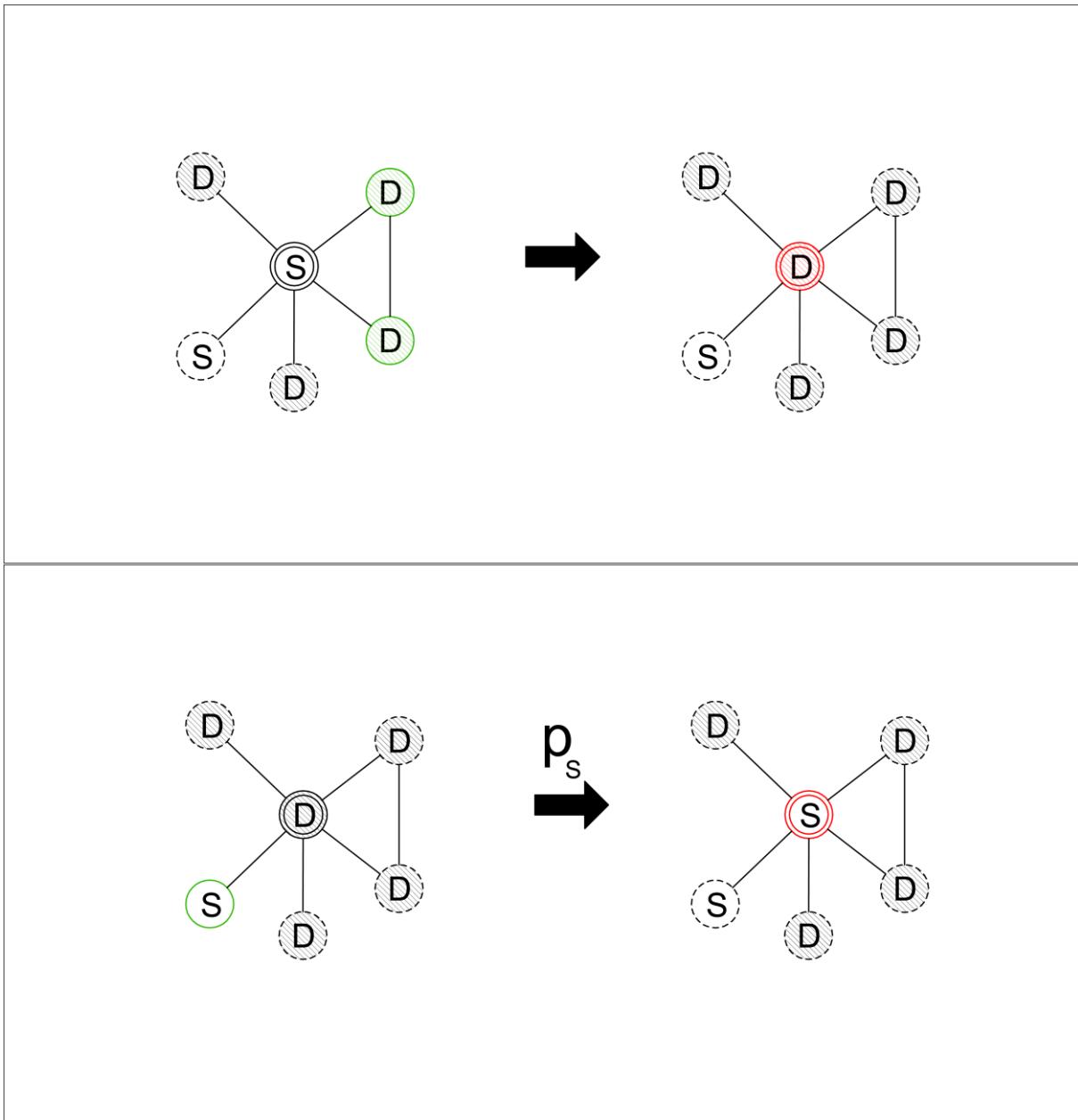


Rysunek 5-1. Rozkłady stopnia wierzchołka sieci E-R o zwiększym współczynniku gronowania C (czerwone kwadraty), na tle rozkładu wierzchołka sieci bazowej o niezwiększym gronowaniu (zielone koła) oraz rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej odpowiadającej średniemu stopniowi wierzchołka sieci o zwiększym gronowaniu (niebieskie trójkąty). Wykres górnny odpowiada $C=0,01$, środkowy $C=0,1$ (rozkład stopnia wierzchołka jest średnią po 10 sieciach), natomiast dolny $C=0,5$ (rozkład stopnia wierzchołka jest również średnią po 10 sieciach). We wszystkich przypadkach pożądany średni stopień wierzchołka sieci o zwiększym gronowaniu $k = 10 \pm 0,5$.

5.2 Symulacja procesu kontaktowego

W celu symulacji procesu kontaktowego, dla każdej z n realizacji sieci o współczynniku gronowania C_i zawierającym się w przedziale $[C-\Delta C ; C+\Delta C]$, wykonywana jest s -krotnie procedura opisana w poniższych punktach:

1. W chwili początkowej ($t=0$), określona ilość węzłów zostaje w sposób przypadkowy oznaczana jako węzły typu S. Wszystkie pozostałe są oznaczane jako węzły typu D.
2. W każdej iteracji t generowana jest losowa permutacja N – wyrazowa zbioru etykiet wszystkich węzłów. Gwarantuje to, że przy aktualnianiu stanów węzłów, żaden węzeł nie zostanie pominięty i żaden nie zostanie odwiedzony więcej niż jeden raz w danej iteracji.
3. Następnie, w zależności od typu wybranego węzła, aplikowana jest jedna z poniższych reguł, które przedstawia Rysunek 5-2:
 - a. Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D. Jeśli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D.
 - b. Natomiast jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to następuje sprawdzenie czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_S zmieniany jest typ tego węzła z D na S.
4. Uaktualnienie typu węzła następuje asynchronicznie, czyli przed odwiedzeniem kolejnego węzła w tej iteracji.
5. W każdym kroku czasowym monitorowany jest aktualny udział węzłów typu S $n_S(t)$ i typu D ($1-n_S(t)$) w sieci.
6. Symulacja kończy się po zadanej liczbie kroków czasowych T_{max} , będącej jednym z parametrów symulacji.



Rysunek 5-2. Ilustracja reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół).

Górny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D (oznaczone kolorem zielonym). Jeśli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D (kolor czerwony).

Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to następuje sprawdzenie czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S (oznaczony na zielono). Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_s zmieniany jest typ tego węzła z D na S (kolor czerwony).

5.3 Pojedyncze przebiegi czasowe

Pierwszym etapem badań było wygenerowanie pojedynczych przebiegów czasowych dla sieci o różnych współczynnikach gronowania C , różnych prawdopodobieństw p_s procesu S i różnych początkowych udziałów n_0^S węzłów typu S. Zostało zaobserwowane, że w chwili końcowej

współistnieją w sieci zarówno węzły typu S i jak i typu D. Przykładowe pojedyncze przebiegi czasowe zostały umieszczone na wykresie na Rysunku 5-3.

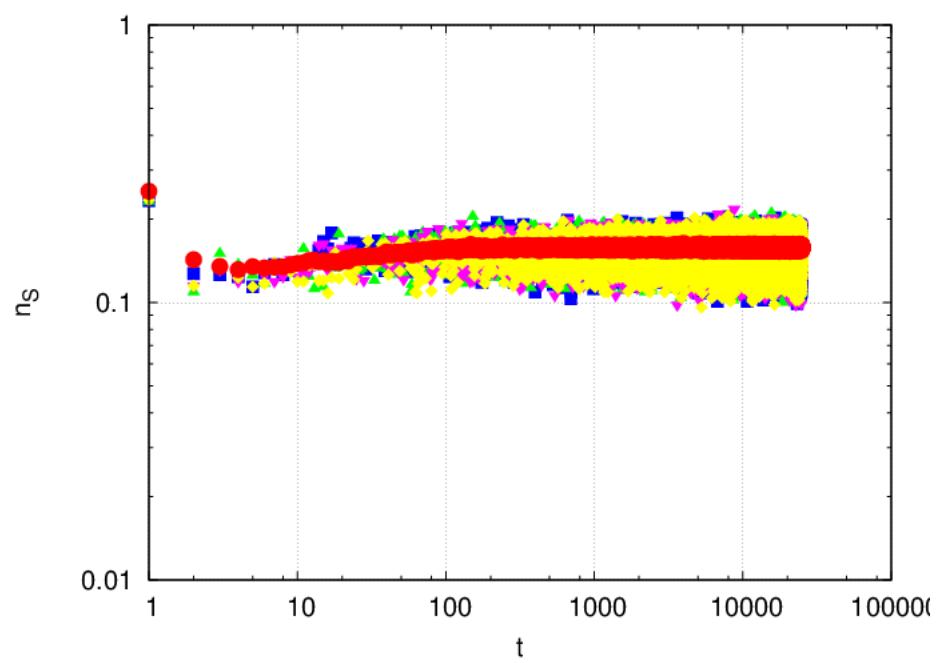
Na każdym z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 5-3 zostały umieszczone losowo wybrane, cztery pojedyncze przebiegi czasowe. Dodatkowo naniesiono przebieg będący średnią ze stu takich pojedynczych przebiegów, przy ustalonym początkowym udziale węzłów typu S w sieci.

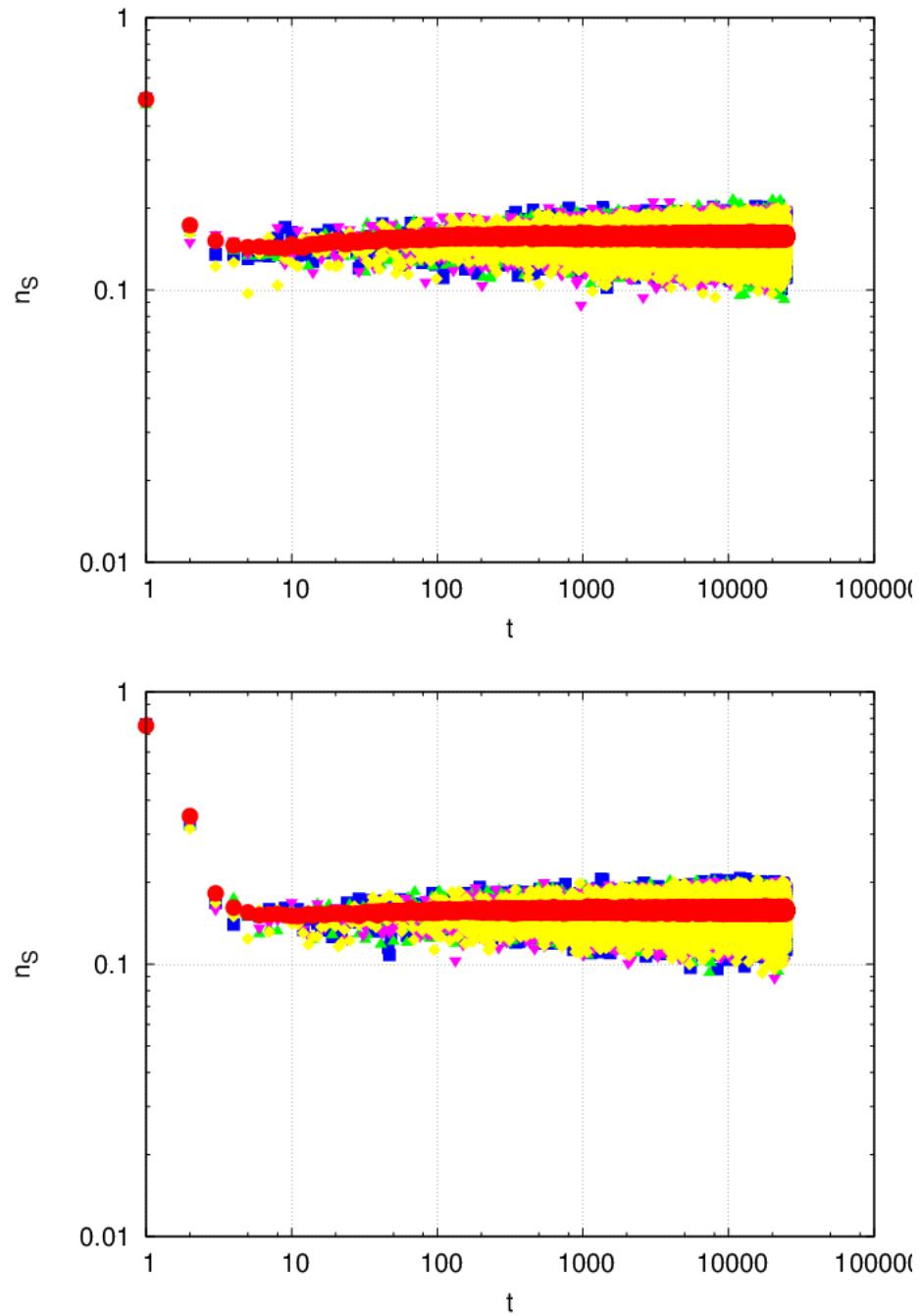
Każdy z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 5-3 został wygenerowany dla tej samej sieci i prawdopodobieństwa p_S procesu S. Różnica jest natomiast w początkowym udziale n^0_S węzłów typu S: wykres górny odpowiada n^0_S wynoszącemu 0,25, środkowy — 0,5, zaś wykres dolny — n^0_S wynoszącemu 0,75. Widać, że na wszystkich wykresach, w poszczególnych chwilach czasowych udział węzłów S zawiera się w przedziale [0,1;0,2], niezależnie od początkowego udziału węzłów typu S w sieci.

Analiza pojedynczych przebiegów czasowych pokazała, że w sprawdzonym zakresie parametrów symulacji, obserwowany jest brak zależności końcowego udziału węzłów typu S od udziału początkowego tych węzłów w sieci.

Przebiegi te pokazały również, że ze względu na oscylowanie udziałów węzłów typu S w poszczególnych chwilach czasowych w pojedynczych przebiegach, niezbędne jest zwiększenie statystyki i bazowanie w dalszych obliczeniach na wartościach średnich z wielu pojedynczych przebiegów czasowych.

Pytania, na które szukano odpowiedzi w dalszej części niniejszego rozdziału, dotyczyły istnienia zależności końcowego (w ustalonym kroku T_{max} symulacji) udziału n^T_S węzłów typu S w sieci od współczynnika gronowania C oraz prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci liczącej 1000 węzłów. Zbadano również właściwości fazowe układu, czyli spróbowano znaleźć takie wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S i współczynnika gronowania C , poniżej/powyżej których zdecydowana większość węzłów w sieci w końcowej chwili symulacji T_{max} , byłaby w stanie S lub w stanie D.





Rysunek 5-3. Pojedyncze (jeden rozkład początkowy węzłów S na jednej sieci) przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci E-R liczącej 1000 węzłów. Każda krzywa, z wyjątkiem czerwonych kół odpowiadających średniej po 100 przebiegach, przedstawia inny pojedynczy przebieg czasowy. Wykresy różnią się początkowym udziałem węzłów S n^S_0 , który wynosi: 0,25 — wykres górny, 0,5 — wykres środkowy oraz 0,75 — wykres dolny. Średni stopień wierzchołka $k=10$, współczynnik gronowania $C=0,2$, prawdopodobieństwo procesu S wynosi $p_S=0,2$.

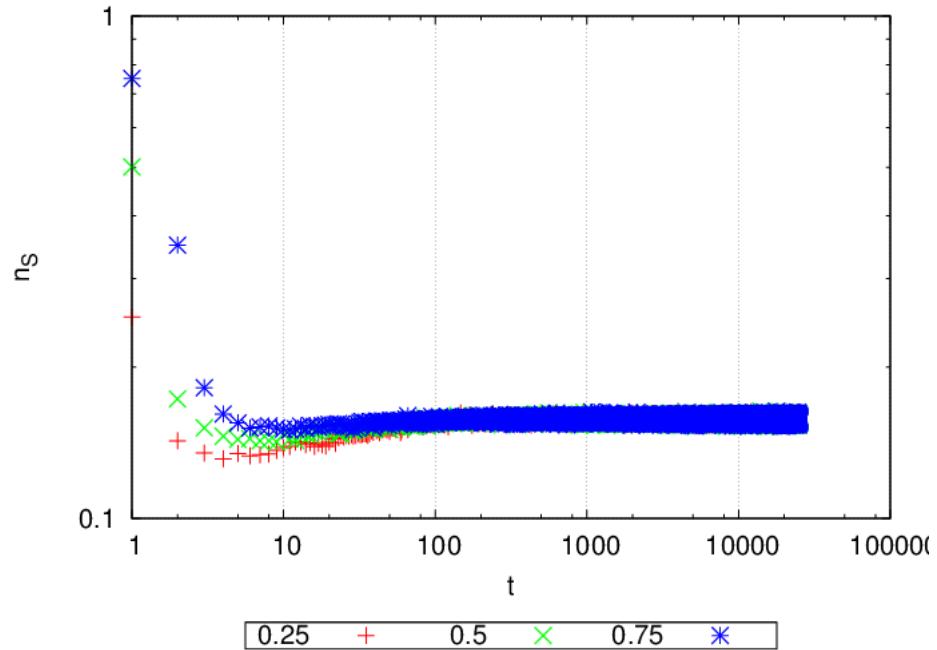
5.4 Uśrednione przebiegi czasowe

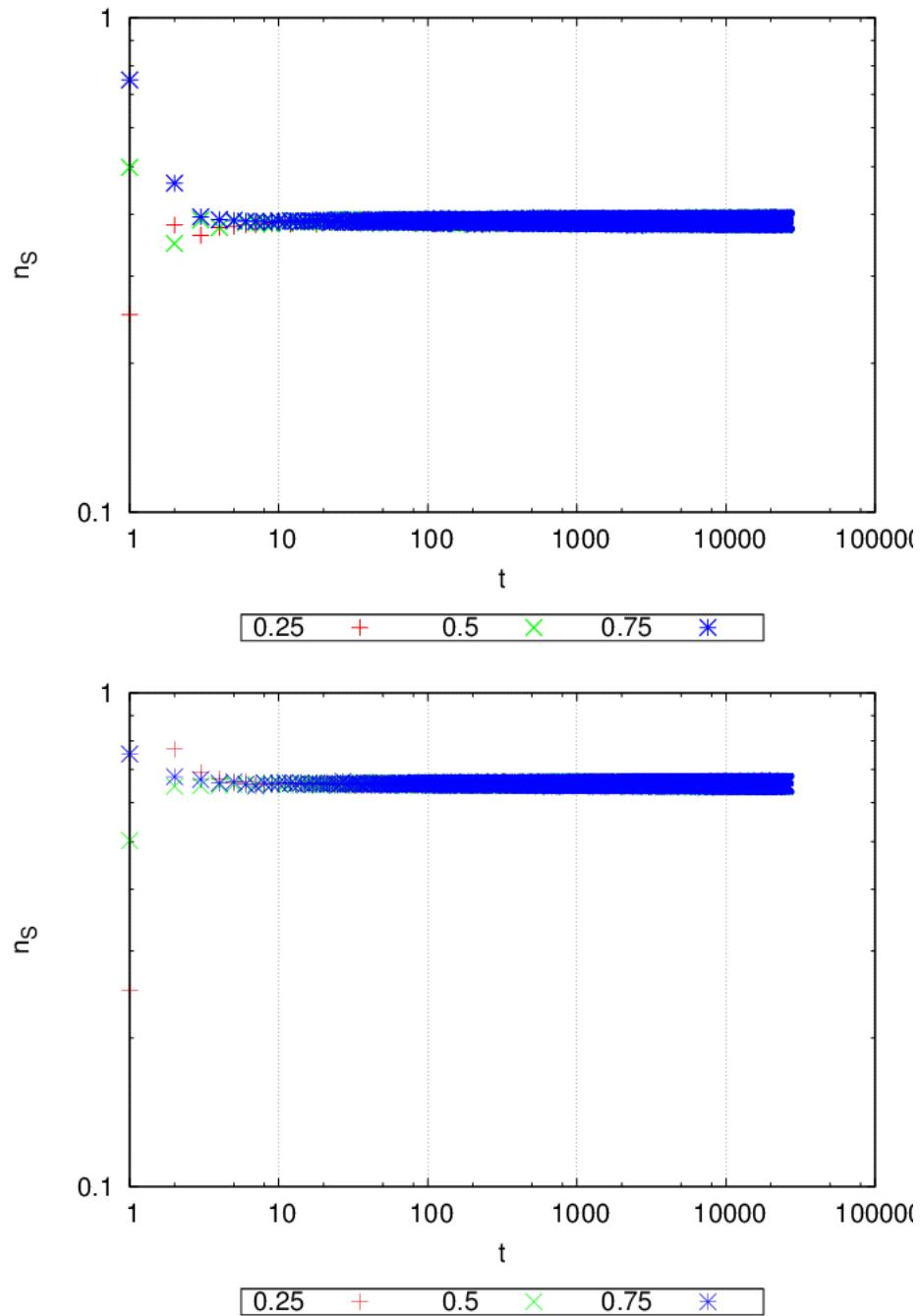
Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa p_S procesu S i początkowego udziału n^0_S węzłów typu S w sieci, wyniki symulacji procesu kontaktowego są uśredniane po $s = 10$ rozkładach początkowych węzłów S i D na $n = 10$ realizacjach sieci, różniących się między sobą topologią.

Wartości pozostałych parametrów są następujące:

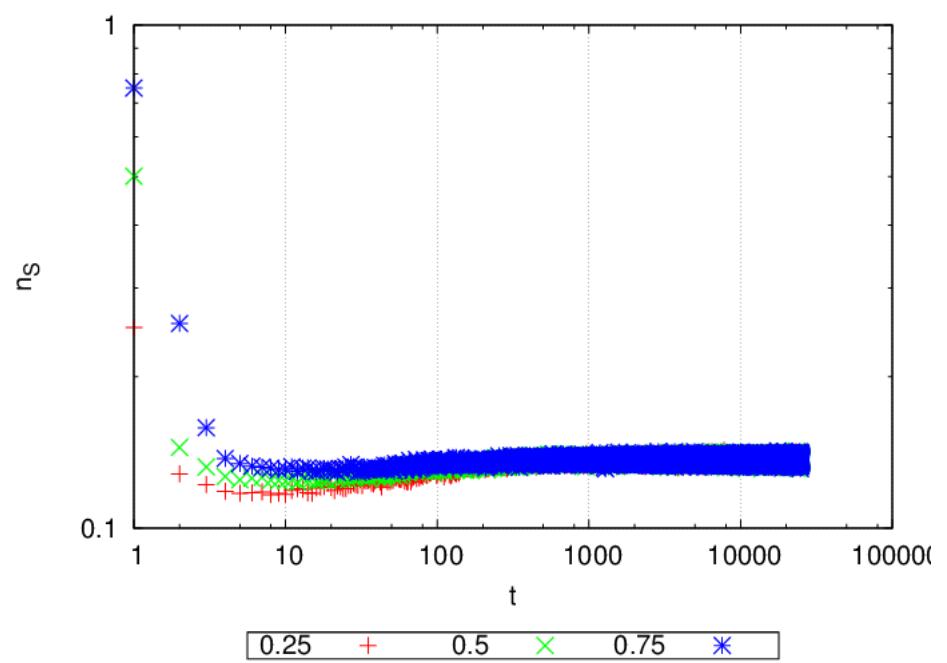
- $N = 1000$,
- $k = 10$,
- $\Delta k = 0,5$,
- $\Delta C = 0,001$,
- $T_{max} = 25000$.

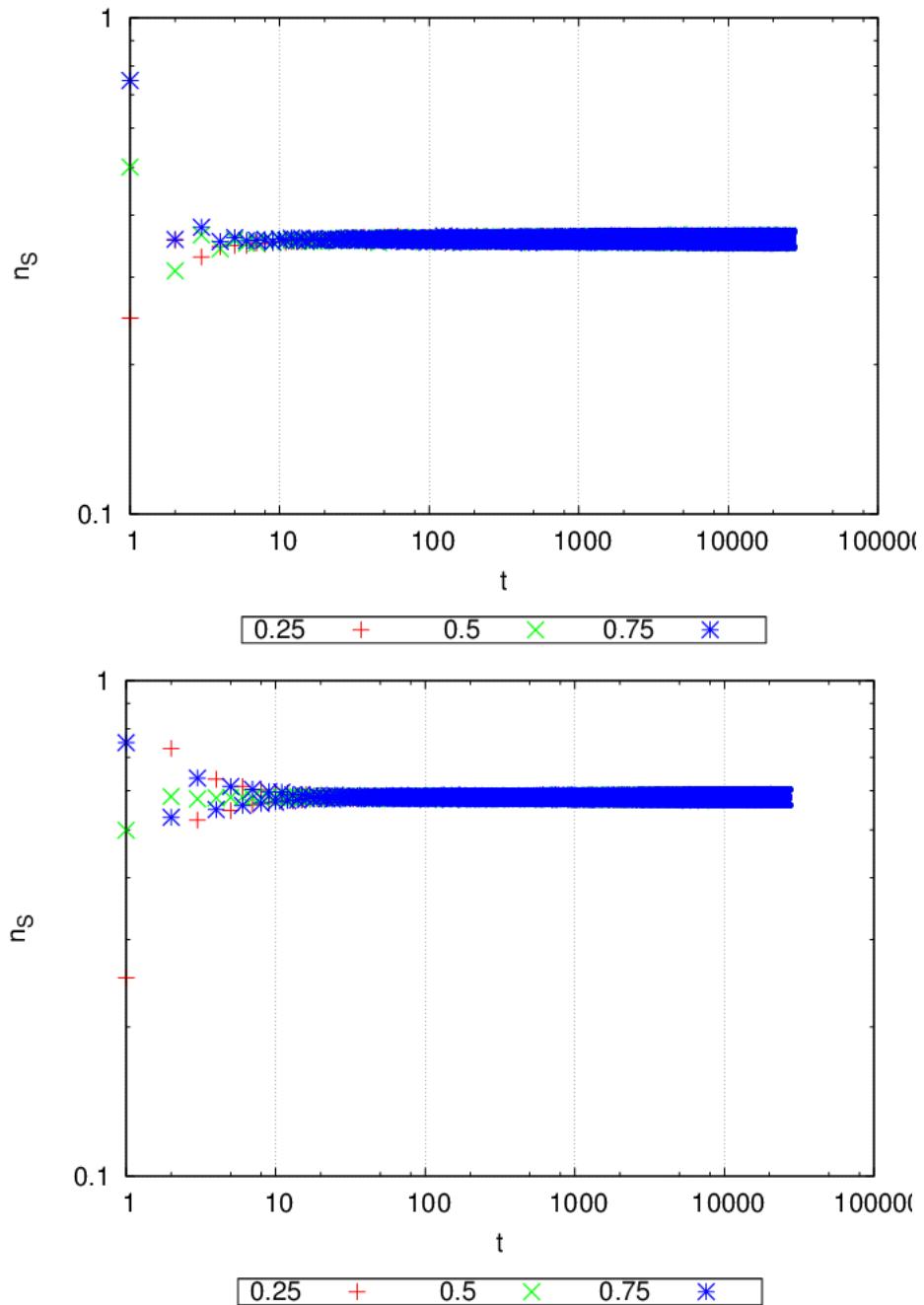
Uzyskane w symulacjach zależności $n_S(t)$ ewolucji udziału węzłów S od czasu, przedstawione są na rysunkach 5-4 - 5-5.





Rysunek 5-4. Uśrednione zależności czasowe $n_S(t)$ udziału węzłów typu S w sieci E-R o współczynniku gronowania $C = 0,2$. Każdy wykres odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa procesu S: $p_S = 0,2$ — góra, $p_S = 0,5$ — środek, $p_S = 0,95$ — dół. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n_0^S węzłów S — poszczególne wartości są podane się na legendzie pod wykresem.



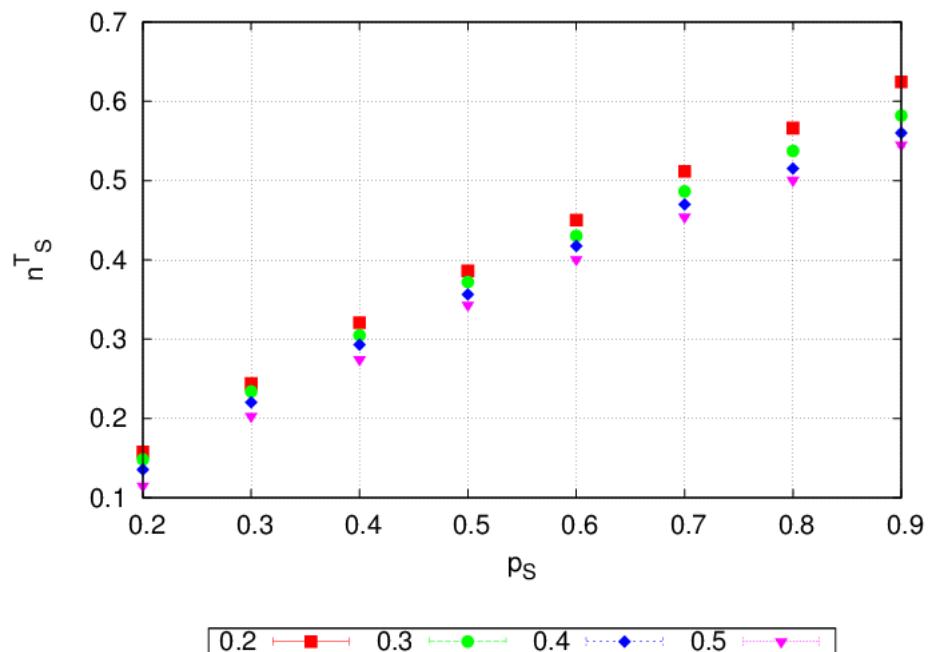


Rysunek 5-5. Uśrednione zależności czasowe $n_S(t)$ udziału węzłów typu S w sieci E-R o współczynniku gronowania $C = 0,4$. Każdy wykres odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa procesu S: $p_S = 0,2$ — góra, $p_S = 0,5$ — środek, $p_S = 0,95$ — dół. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n_0^S węzłów S — poszczególne wartości są podane się na legendzie pod wykresem.

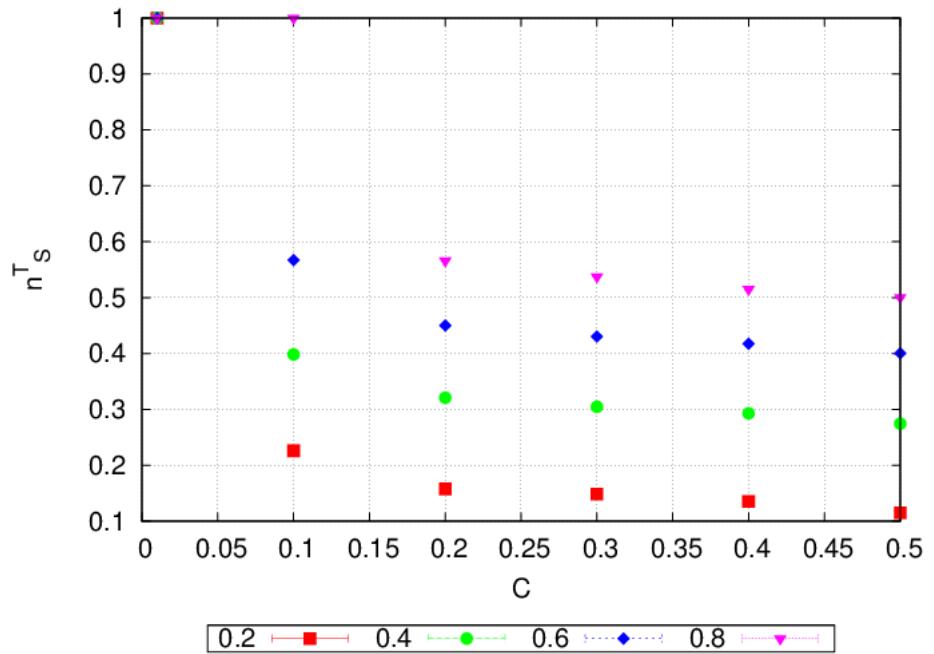
Na Rysunkach 5-4 - 5-5 widać, że uśrednione przebiegi czasowe przypominają bardzo wyglądem przebiegi pojedyncze i polepszenie statystyki powoduje pożądane „wygładzenie” krzywych na wykresie.

5.5 Wykres końcowego udziału n^T_S węzłów S w przestrzeni parametrów (p_S, C)

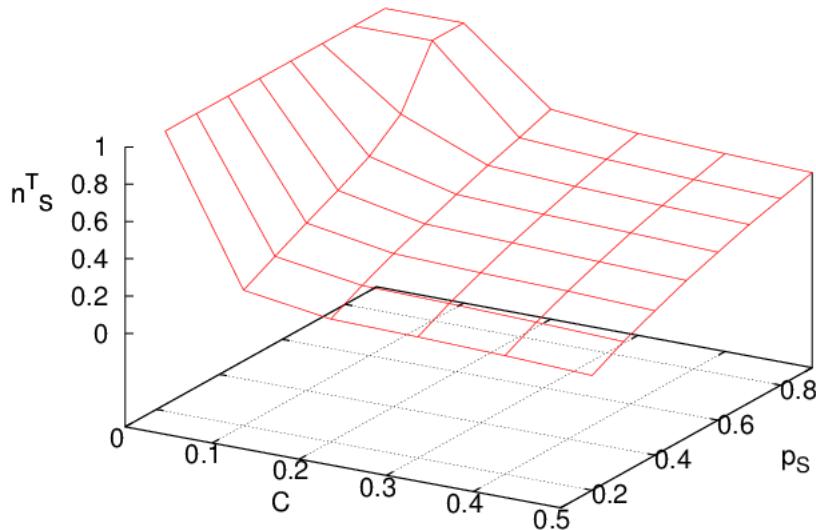
Dysponując wartościami końcowego średniego udziału węzłów S dla różnych wartości par parametrów (p_S, C), odczytanymi z przebiegów czasowych, możliwe jest sporządzenie wykresów przedstawiających zależność końcowego udziału n^T_S od parametrów p_S oraz C , które przedstawiają rysunki 5-3 - 5-8.



Rysunek 5-6. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci Erdősa-Rényiego, liczącej $N = 1000$ węzłów ($k=10$), dla różnych wartości współczynnika gronowania, wymienionych w legendzie pod wykresem. Każdy punkt na wykresie jest średnią wartością n^T_S dla wartości początkowych udziałów n^0_S węzłów S równych: 0,25, 0,5 oraz 0,75.



Rysunek 5-7. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od współczynnika gronowania C dla sieci Erdősa-Rényiego, liczącej $N=1000$ węzłów ($k=10$), dla różnych prawdopodobieństw p_S procesu S, wymienionych w legendzie pod wykresem. Każdy punkt na wykresie jest średnią wartością n^T_S z wartości początkowych udziałów n^0_S węzłów S równych: 0,25, 0,5 oraz 0,75.

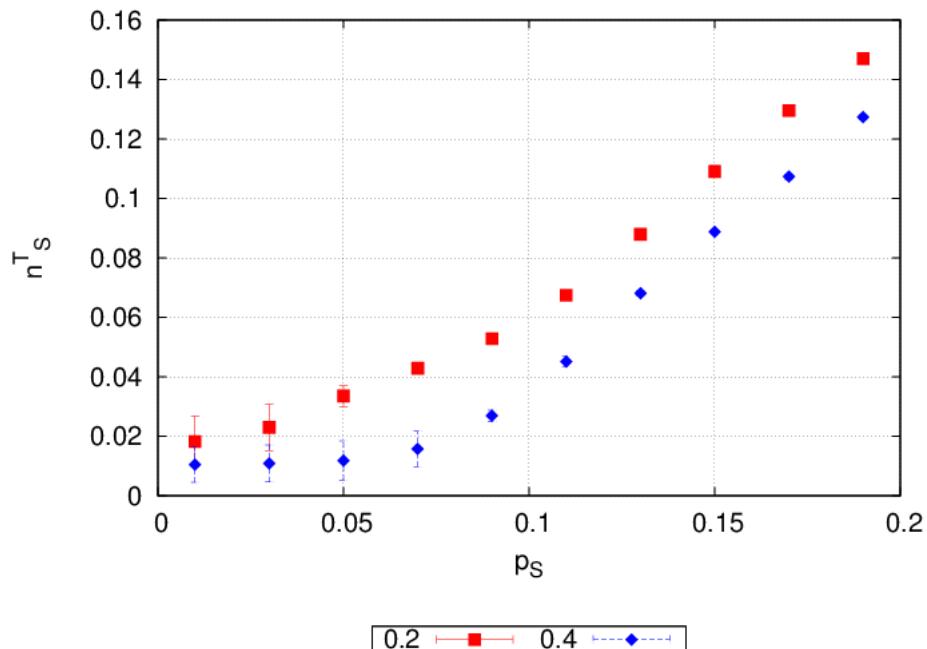


Rysunek 5-8. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od parametrów (p_S, C) dla sieci Erdősa-Rényiego, liczącej $N=1000$ węzłów ($k=10$).

Z analizy wykresów widać zależność aktywności procesu S od prawdopodobieństwa p tegoż procesu: n^T_S rośnie wraz ze wzrostem p_S . Jest to zgodne z oczekiwaniami: wyższe prawdopodobieństwo wzmacnia aktywność procesu jednowęzłowego S, co powoduje że końcowy udział węzłów S w sieci musi być większy. Widać również zależność od współczynnika

gronowania C: n^T_S maleje wraz ze wzrostem wartości tego współczynnika. Jest to również zgodne z oczekiwaniemi: wyższy współczynnik gronowania wzmacnia proces dwuwęzłowy D, który do rozprzestrzeniania się w sieci potrzebuje pary wzajemnie połączonych węzłów D. Wzmocnienie procesu D przy ustalonej aktywności procesu S, powoduje, że końcowy udział węzłów D w sieci wzrasta, czyli jednocześnie końcowy udział węzłów S musi maleć.

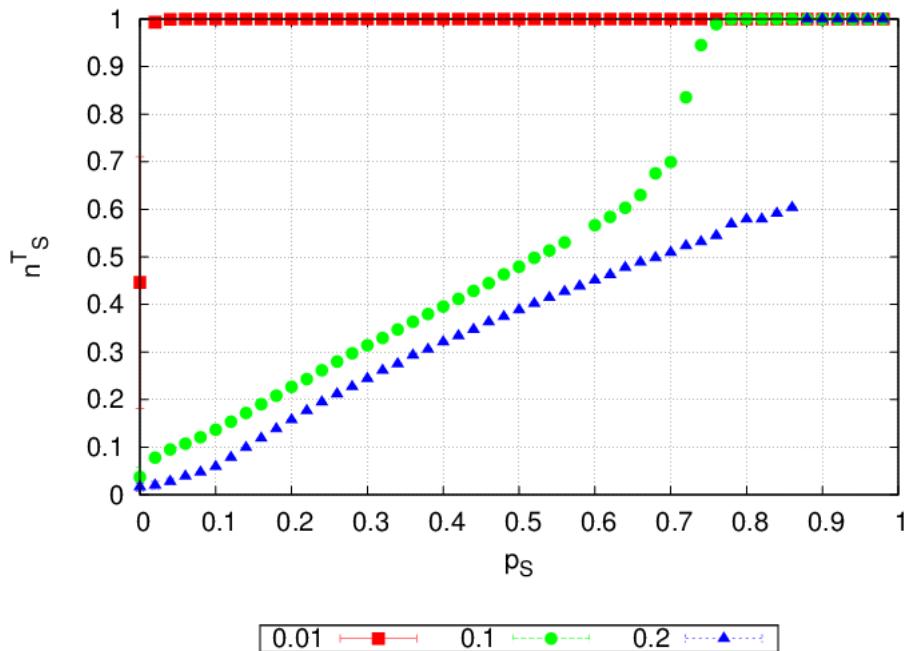
Rysunek 5-6 pokazuje, że dodatkowej uwagi wymaga zakres małych prawdopodobieństw procesu S, poniżej wartości 0,2. Możliwe, że w przedziale tym znajduje się wartość graniczna prawdopodobieństwa aktywacji procesu S, poniżej której udział węzłów S jest zawsze równy zero — proces jednowęzłowy nie aktywuje się. Niestety również Rysunek 5-9 nie daje jednoznacznej odpowiedzi — być może wartość graniczna znajduje się w przedziale jeszcze mniejszych prawdopodobieństw procesu S — poniżej wartości 0,01 — lecz ze względu na wzrastające odchylenia standardowe wartości punktów na wykresie wraz ze zmniejszaniem prawdopodobieństw, trudno o udzielenie wiarygodnej odpowiedzi na to pytanie. Dodatkowo w tym przedziale czasy dojścia do stanu stacjonarnego są znacznie dłuższe i ustalona na potrzeby symulacji maksymalna ilość kroków czasowych okazuje się niewystarczająca by ten stan osiągnąć, co ma zasadniczy wpływ na wiarygodność wyników w tym obszarze.



Rysunek 5-9. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci Erdős-Rényiego, liczącej $N = 1000$ węzłów ($k=10$), w przedziale małych prawdopodobieństw, dla różnych współczynników gronowania, wymienionych w legendzie pod wykresem. Każdy punkt na wykresie jest średnią wartością n^T_S dla wartości początkowych udziałów n^0_S węzłów S równych: 0,25, 0,5 oraz 0,75.

Rysunek 5-7 pokazuje, że dodatkowej uwagi wymaga również zakres małych współczynników gronowania (poniżej 0,2) i dużych prawdopodobieństw procesu S. W przedziale tym znajduje się wartość graniczna prawdopodobieństwa procesu S, powyżej której dla ustalonego współczynnika

gronowania udział węzłów S jest zawsze równy jeden — proces dwuwęzłowy nie aktywuje się. Przedstawia to Rysunek 5-10: dla wartości współczynnika gronowania równej 0,1 obserwowana jest wartość graniczna prawdopodobieństwa procesu S, wynosząca około 0,75, powyżej której udział węzłów S w sieci wynosi 100%. Dla sieci o współczynniku gronowania 0,2 ta wartość graniczna wynosi już około 0,88. Natomiast dla sieci o współczynniku gronowania bliskim zeru jest ona również bliska零. Efekt wzrostu wartości granicznej p_S wraz ze wzrostem współczynnika gronowania można解释为: wyższy współczynnik gronowania wzmacnia proces dwuwęzłowy D, który do rozprzestrzeniania się w sieci potrzebuje pary wzajemnie połączonych węzłów D. Dlatego aktywność procesu S, której miarą jest p_S , potrzebna do całkowitego opanowania sieci przez węzły typu S, musi również wzrastać z współczynnikiem gronowania.



Rysunek 5-10. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci Erdős-Rényiego, liczącej $N = 1000$ węzłów ($k=10$), w przedziale dużych prawdopodobieństw. Wartości współczynnika gronowania sieci wynoszą: $C= 0,01$ — czerwone kwadraty, $C= 0,1$ — zielone koła, $C= 0,2$ — niebieskie trójkąty. Każdy punkt na wykresie jest średnią wartością n^T_S dla wartości początkowych udziałów n^0_S węzłów S równych: 0,25, 0,5 oraz 0,75.

5.6 Metoda średniego pola

Dysponując wynikami symulacji numerycznych, można porównać je z wartościami analitycznymi, wyliczonymi metodą średniego pola. W formalizmie równania M (*master equation*) [69], zmianę udziału y węzłów typu D w czasie, można zapisać równaniem [70]:

$$\frac{dy}{dt} = f(C)(1-y)y^2 - py(1-y). \quad (5-1)$$

Prawa strona powyższego równania składa się z dwóch składników: pierwszy z nich odpowiada za kreację węzłów typu D w sieci: $(1-y)$ reprezentuje udział węzłów typu S w sieci, natomiast $f(C)$ — gdzie C jest współczynnikiem gronowania sieci — to prawdopodobieństwo, że węzeł sieci ma przynajmniej dwóch, wzajemnie połączonych sąsiadów. Drugi człon odpowiada natomiast za anihilację węzłów typu D w sieci: p jest tutaj prawdopodobieństwem aktywacji procesu S.

Opierając się na rozkładzie prawdopodobieństw stopni wierzchołków $P(k)$, prawdopodobieństwo, że wylosowany węzeł sieci ma dwóch lub więcej sąsiadów można zapisać jako:

$$P(k \geq 2) = P(2) + P(3) + \dots = 1 - P(0) - P(1). \quad (5-2)$$

Ponieważ współczynnik gronowania C mówi o tym, jaki ułamek ze wszystkich możliwych połączeń tworzą miedzy sobą sąsiedzi danego węzła, a maksymalna liczba połączeń jakie może utworzyć pomiędzy sobą k sąsiadów węzła wynosi:

$$n_k = \frac{k(k-1)}{2},$$

prawdopodobieństwo, że przynajmniej dwóch sąsiadów jest ze sobą połączonych, można zapisać jako:

$$f(C) = \sum_{k=2} P(k) [1 - (1-C)^{k(k-1)/2}]. \quad (5-3)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym reprezentuje prawdopodobieństwo, iż żadna para sąsiadów nie jest ze sobą połączona. Widać, że w przypadku, gdy współczynnik gronowania C byłby równy jedności (każda para sąsiadów dowolnego węzła jest połączona ze sobą), prawdopodobieństwo $f(C)$ byłoby równe prawdopodobieństwu, że wylosowany wierzchołek ma co najmniej dwóch sąsiadów $P(k \geq 2)$. Jest więc oczywiste, że każda mniejsza od jedności wartość C , wpływa na obniżenie tego prawdopodobieństwa.

Rozwinięcie wyrażenia $1 - (1-C)^{k(k-1)/2}$ w szereg Taylora w punkcie $C=0$, prezentuje się następująco:

$$1 - (1-C)^{k(k-1)/2} = \frac{C(k-1)k}{2} - \frac{C^2 [(k-1)k(k^2-k-2)]}{8} + \frac{C^3(k-1)k(k^2-k-4)(k^2-k-2)}{48} - \dots$$

Dla małych C można zatem zapisać, korzystając z własności rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej k

$$f(C) = \sum_{k=2} P(k)C \frac{(k-1)k}{2} = \frac{C}{2} \left[\left(\sum_{k=2} P(k)k^2 \right) - \sum_{k=2} P(k)k \right] = \frac{(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)C}{2}. \quad (5-4)$$

Poszukując stacjonarnych rozwiązań równania opisanego wzorem 5-1, znajduje się trzy punkty stałe:

- $y^*=0$, który jest zawsze stabilny,
- $y^*=1$, który jest stabilny dla $p < f(C)$,
- $y^*=p/f(C)$, który jest stabilny dla $p > f(C)$, jednakże ze względu na ograniczenie wartości y , które nie mogą być większe od jedności — rozwiązanie to nie jest uwzględniane, jako niefizyczne.

Zatem, na podstawie powyższego, dla wartości prawdopodobieństwa p procesu S większego od zera należy rozróżnić dwa przypadki:

- Dla $p > f(C)$ jedynym stabilnym rozwiązaniem jest $y^*=0$, kiedy wszystkie węzły w sieci są węzłami typu S.
- Dla $p < f(C)$ końcowy udział węzłów zależy od stanu początkowego — rozróżnia się tutaj dwie sytuacje:
 - Jeżeli w chwili początkowej $y(t=0) < p/f(C)$, to w chwili końcowej wszystkie węzły sieci są węzłami typu S.
 - Jeżeli $y(t=0) > p/f(C)$ to w chwili końcowej wszystkie węzły sieci są węzłami typu D.

Wyniki analityczne pokazują, że dla dodatniego prawdopodobieństwa procesu S, istnieje wartość krytyczna prawdopodobieństwa p_c , taka że dla prawdopodobieństw większych od niej, w chwili końcowej wszystkie węzły w sieci są węzłami typu S. Natomiast dla prawdopodobieństw mniejszych od p_c , końcowy udział węzłów typu S wynosi zero (gdy początkowy ich udział jest mniejszy od $(p_c - p)/p_c$) bądź 100%, gdy ten udział jest większy od tej wartości.

Dla wartości współczynnika gronowania równej 0,1, wyniki numeryczne podobnie jak analityczne, wskazują na istnienie wartości krytycznej p_c wynoszącej około 0,75, powyżej której udział węzłów S w sieci wynosi 100%. Jednakże dla prawdopodobieństw procesu S poniżej tej wartości, nie jest obserwowana zależność od stanu początkowego, którą pokazują wyniki analityczne.

Nie można natomiast jednoznacznie stwierdzić, że nie istnieje wartość p_c poniżej której udział węzłów S w sieci wynosi zero. Jest to związane z bardzo długimi czasami dojścia do stanu stacjonarnego w zakresie prawdopodobieństw procesu S bliskich zeru — założona ilość kroków symulacji — zapewniająca akceptowalny czas oczekiwania na wyniki symulacji komputerowej — okazuje się niewystarczająca.

Wyniki numeryczne jednoznacznie wskazują na istnienie zależności aktywności procesu S od prawdopodobieństwa p_s tegoż procesu: końcowy udział węzłów typu S w sieci rośnie monotonicznie wraz ze wzrostem p_s , co jest zgodne z oczekiwaniami — wyższe prawdopodobieństwo wzmacnia bowiem aktywność procesu jednowęzłowego S.

Dodatkowo, w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji nieobserwowana jest zależność końcowego udziału węzłów typu S od udziału początkowego tych węzłów.

Komentując rozbieżności między wynikami średniopolowymi i numerycznymi, należy zaznaczyć, że metoda numeryczna uwzględnia wpływ lokalnych korelacji między węzłami i dlatego jest bardziej wiarygodna.

6 Model z sąsiedztwem na sieci Wattsa-Strogatza.

Niniejszy rozdział zawiera opis i dyskusję wyników symulacji procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu „z sąsiedztwem” dla rodziny sieci Wattsa-Strogatza.

Proces generacji rodziny sieci Wattsa-Strogatza został opisany szczegółowo w rozdziale 3.1.

6.1 Symulacja procesu kontaktowego

W celu symulacji procesu kontaktowego, dla każdej z n sieci o współczynniku gronowania C_i zawierającym się w przedziale $[C-\Delta C : C+\Delta C]$, wykonywana jest s -krotnie procedura opisana w poniższych punktach. Wyjątkiem jest bazowa sieć Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C_{1/2}$ — istnieje bowiem tylko jedna możliwa topologia sieci o takim współczynniku gronowania — dla niej niniejsza procedura wykonywana jest $s^* = s \times n$ razy, aby liczba symulacji została zachowana:

1. W chwili początkowej ($t=0$), określona ilość węzłów jest oznaczana jako węzły typu S. Wszystkie pozostałe są oznaczane jako węzły typu D. Początkowy rozkład typów węzłów jest generowany losowo.
2. W każdej iteracji t , generowana jest N -wyrazowa losowa permutacja zbioru etykiet wszystkich węzłów. Gwarantuje to, że przy aktualnianiu stanów węzłów, żaden węzeł nie zostanie pominięty i żaden nie zostanie odwiedzony więcej niż jeden raz w danej iteracji.
3. Następnie, w zależności od typu wybranego węzła, aplikowana jest jedna z poniższych reguł, które ilustruje Rysunek 5-2:
 - a. Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D. Jeśli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D.
 - b. Natomiast jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to następuje sprawdzenie czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem p_S zmieniany jest typ tego węzła z D na S.
4. Uaktualnienie typu węzła następuje asynchronicznie, czyli przed odwiedzeniem kolejnego węzła w tej iteracji.
5. W każdym kroku czasowym monitorowany jest aktualny udział węzłów typu S $n_S(t)$ i typu D ($1 - n_S(t)$) w sieci.
6. Symulacja kończy się po zadanej liczbie kroków czasowych T_{max} będącej jednym z parametrów symulacji.

6.2 Pojedyncze przebiegi czasowe

6.2.1 Przebiegi dla sieci regularnej

Dla sieci o współczynniku gronowania $C=0,5$, różnych prawdopodobieństw p_S procesu S i różnych początkowych udziałów węzłów typu S w sieci zostały wygenerowane pojedyncze przebiegi czasowe. Dla ustalonej liczby T_{max} kroków symulacji udało się za każdym razem zaobserwować stan stacjonarny. Co więcej, przebiegi kończyły się albo 100% udziałem węzłów typu S albo 100% udziałem węzłów typu D w sieci. Dlatego dalsze badania dotyczyły istnienia zależności końcowego (w ustalonym kroku T_{max} symulacji) udziału n^T_S węzłów typu S w sieci od prawdopodobieństwa p_S procesu S.

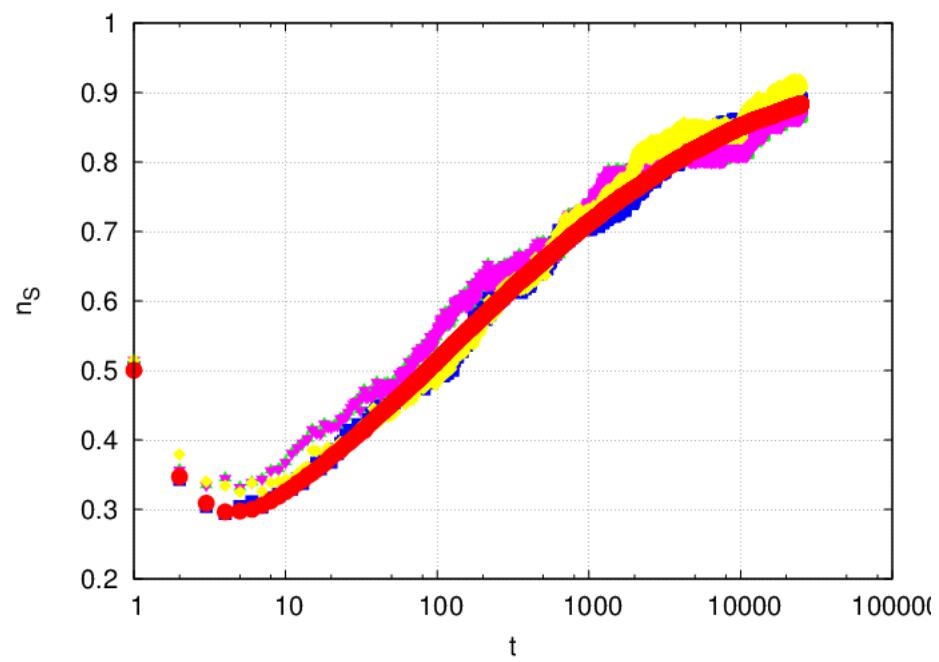
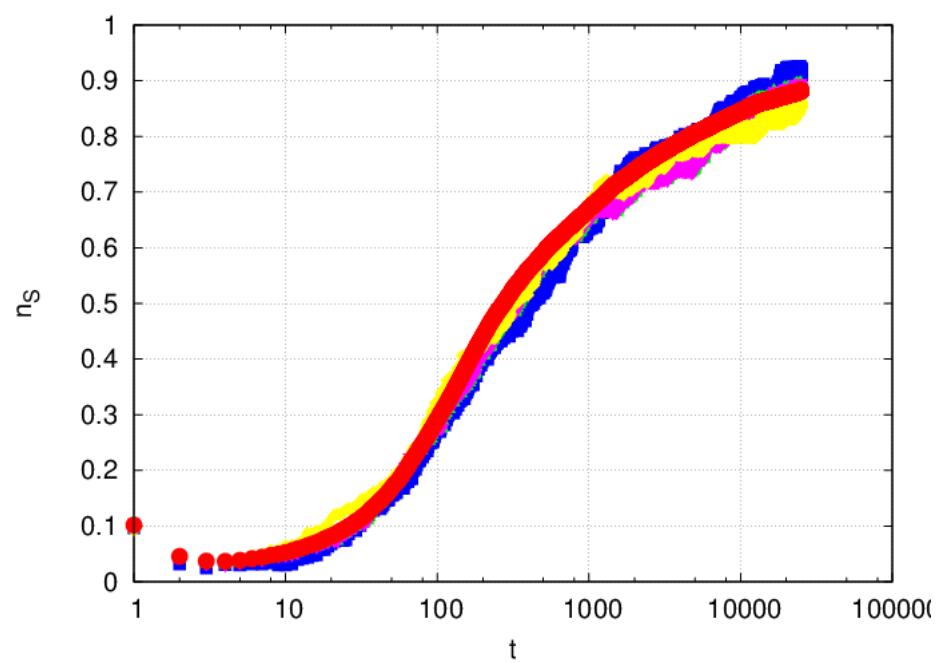
6.2.2 Przebiegi dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania

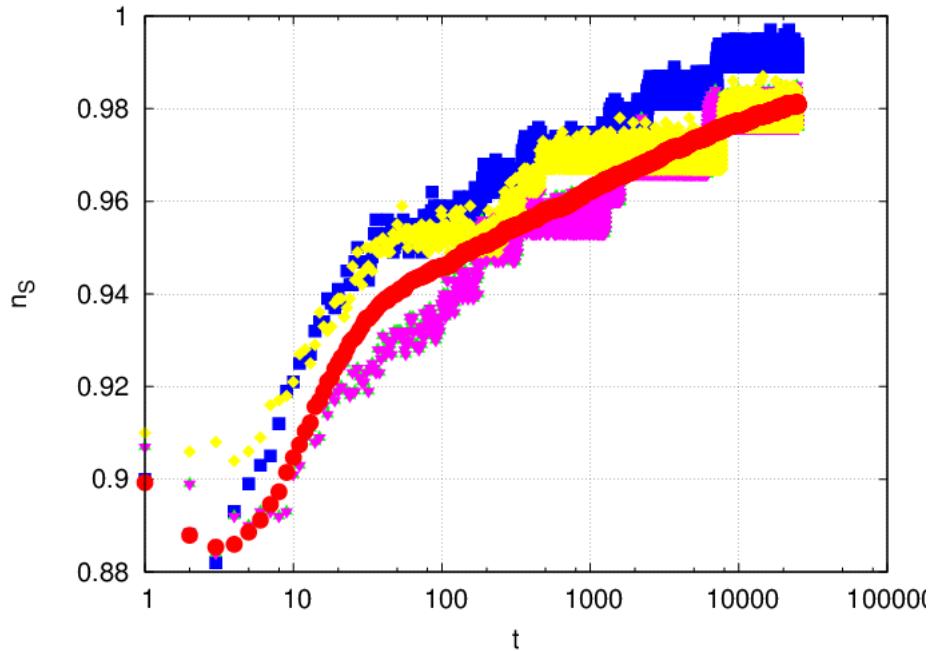
Również dla sieci o współczynnikach gronowania mniejszych od 0,5, dla różnych prawdopodobieństw p_S procesu S i różnych początkowych udziałów węzłów typu S w sieci zostały wygenerowane pojedyncze przebiegi czasowe.

Przykładowe przebiegi czasowe dla przełączonej sieci Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania równym 0,3, umieszczone na wykresie na Rysunku 6-1.

Na każdym z trzech wykresów przedstawionych na tym rysunku, zostały umieszczone losowo wybrane, cztery pojedyncze przebiegi czasowe. Dodatkowo został naniesiony przebieg będący średnią ze stu pojedynczych przebiegów, przy ustalonym początkowym udziale węzłów typu S w sieci.

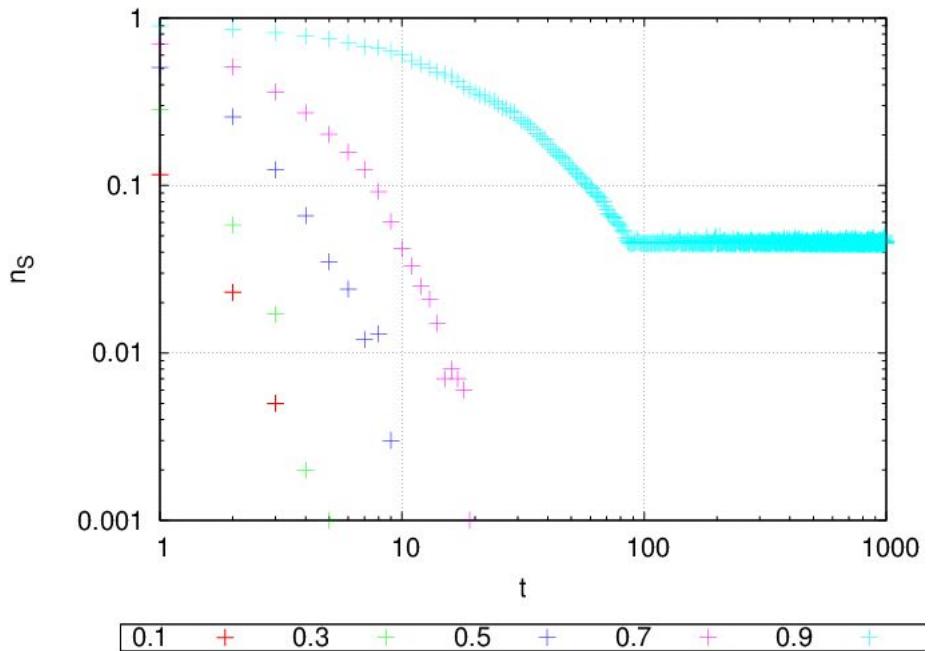
Każdy z trzech wykresów przedstawionych na Rysunku 6-1 został wygenerowany dla tej samej sieci i prawdopodobieństwa p_S procesu S. Różnica jest w początkowym udziale n^0_S węzłów typu S: wykres górnny odpowiada n^0_S wynoszącemu 0,1, środkowy — 0,5, zaś wykres dolny — n^0_S wynoszącemu 0,9. Widać, że na wszystkich wykresach ustalona liczba kroków symulacji nie okazała się wystarczająca do osiągnięcia stanu stacjonarnego.





Rysunek 6-1. Pojedyncze (jeden rozkład początkowy węzłów S na jednej sieci) przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza liczącej 1000 węzłów. Każda krzywa, z wyjątkiem czerwonych kół odpowiadających średniej po 100 przebiegach, przedstawia inny pojedynczy przebieg czasowy. Wykresy różnią się początkowym udziałem węzłów S n^0_S , który wynosi: 0,1 — wykres górnego, 0,5 — wykres środkowy oraz 0,9 — wykres dolny. Współczynnik gronowania $C=0,3$, prawdopodobieństwo procesu S wynosi $p_S=0,1$.

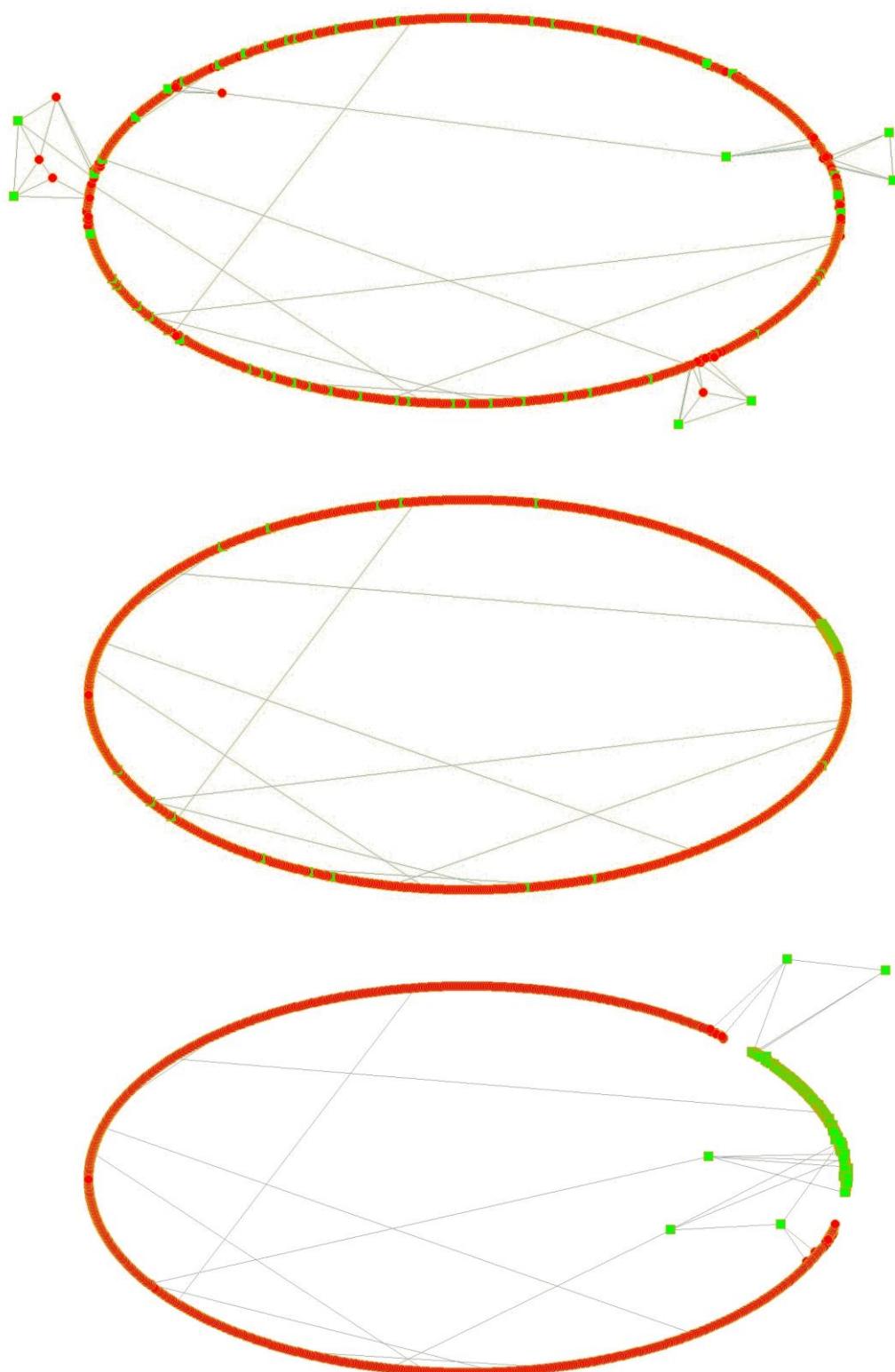
Inaczej prezentują się pojedyncze przebiegi dla sieci „lekkie przełączonej”, o współczynniku gronowania równym 0,49. W zdecydowanej większości przebiegi kończą się 100% udziałem węzłów D w sieci z jednym istotnym wyjątkiem — dla małego prawdopodobieństwa p_S procesu S równego 0,1 oraz dużego udziału początkowego n^0_S węzłów typu S równego 0,9, zostało zaobserwowane, że w ostatnim ustalonym kroku T_{max} symulacji, w stanie stacjonarnym współistnieją w sieci zarówno węzły typu S i jak i typu D. Ilustruje to Rysunek 6-2.



Rysunek 6-2. Pojedyncze (jeden rozkład początkowy węzłów S na jednej sieci) przebiegi czasowe udziału węzłów S w sieci Wattsa-Strogatza liczącej 1000 węzłów. Każda krzywa odpowiada innemu początkowemu udziałowi n^0_S węzłów S (wartości są umieszczone na legendzie pod wykresem). Współczynnik gronowania $C=0,49$, prawdopodobieństwo procesu S wynosi $p_S=0,1$.

W celu wytłumaczenia tego efektu, zostały wygenerowane „migawki” sieci w poszczególnych chwilach symulacji, które przedstawia Rysunek 6-3. Widać na nim, że to topologia przełączonej sieci jest przyczyną tego, iż pojedyncze przebiegi czasowe nie kończą się ani zerowym udziałem węzłów typu S ($n^0_S \neq 0$), ani udziałem tych węzłów równym jeden ($n^0_S \neq 1$) — proces dwuwęzłowy zostaje „zablokowany” na węzłach, które mają tylko jednego sąsiada typu D.

Obserwowany dla $C=0,49$ efekt jest tutaj wyjątkiem — generalnie dla tych zestawów parametrów symulacji, dla których udało się osiągnąć stan stacjonarny, analiza pojedynczych przebiegów czasowych pokazała, że obserwowany jest brak zależności końcowego udziału węzłów typu S od udziału początkowego tych węzłów w sieci, zaś przebiegi kończyły się albo zerowym albo 100% udziałem węzłów typu S w sieci.



Rysunek 6-3. „Migawki” stanu sieci W-S dla $C=0,49$, $p_s=0,1$, $n^0_s=0,9$ w chwili początkowej (góra), w chwili $t=10$ (środek) i odpowiadającej stanowi stacjonarnemu $t=120$ (dół). Węzły typu S oznaczone są na czerwono, węzły typu D — na zielono. Wyeksponowane zostały obszary sieci będące kluczowe dla wystąpienia efektu „zablokowania” procesu dwuwęzłowego D na węzłach, które mają tylko jednego sąsiada typu D.

Generalnie, z analizy pojedynczych przebiegów widać, że ze względu na oscylowanie udziałów węzłów typu S w poszczególnych iteracjach w pojedynczych przebiegach, konieczne jest zwiększenie statystyki i bazowanie w dalszych obliczeniach na średnich wartościach z przynajmniej stu pojedynczych przebiegów czasowych.

Ponieważ dla sieci o przełączonych wiązaniach pomiędzy węzłami zaobserwowano, że w zależności od wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S i współczynnika gronowania C , przy ustalonym T_{max} w niektórych przypadkach udaje się osiągnąć stan stacjonarny zaś w innych nie — skupiono się na zbadaniu wpływu współczynnika gronowania C oraz prawdopodobieństwa p_S procesu S na osiągnięcie stanu stacjonarnego. Zbadano również właściwości fazowe układu, czyli spróbowano znaleźć takie wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S i współczynnika gronowania C , poniżej/powyżej których w końcowej chwili symulacji T_{max} , obserwowany był stan stacjonarny układu.

6.3 Uśrednione przebiegi czasowe

Analiza pojedynczych przebiegów czasowych pokazała, że dalsze badania modelu „z sąsiedztwem” na sieci Wattsa-Strogatza należy zróżnicować w zależności od tego czy sieć jest regularna o współczynniku gronowania równym 0,5, czy też posiada przełączone wiązania pomiędzy węzłami i w rezultacie zredukowany współczynnik gronowania.

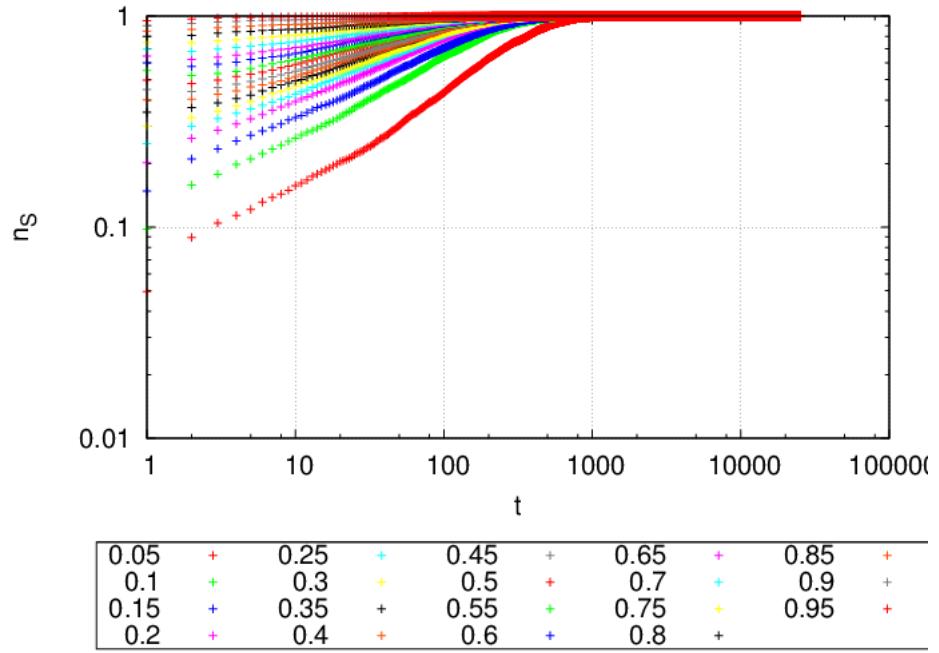
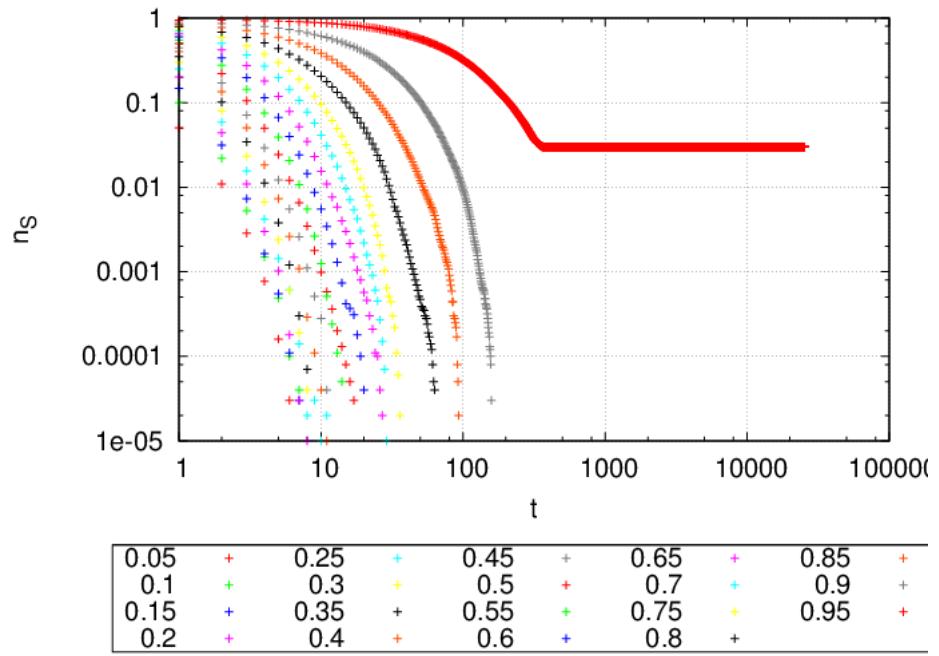
6.3.1 Przebiegi dla sieci regularnej

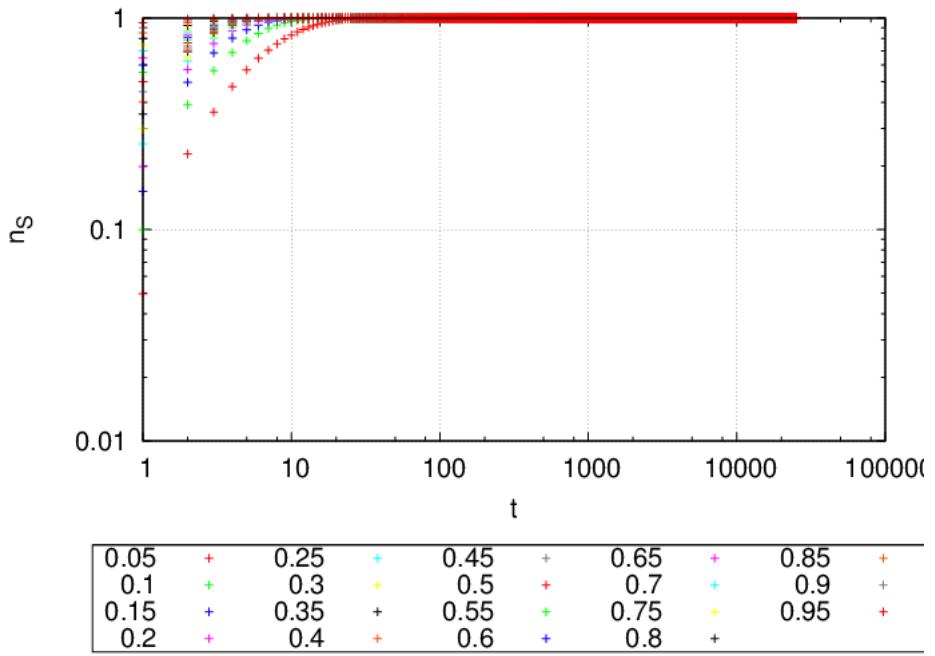
Dla sieci regularnej o współczynniku gronowania $C=0,5$, ustalonych wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S i początkowego udziału n^0_S węzłów typu S w sieci, przebiegi czasowe były uśredniane po $s_{1/2} = 100$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci.

Wartości pozostałych parametrów były następujące:

- $N = 1000$,
- $\Delta C = 0,01$,
- $T_{max} = 25000$.

Uzyskane w symulacjach zależności $n_S(t)$ ewolucji średniego udziału węzłów S od czasu dla sieci regularnej, przedstawione są na Rysunku 6-4.





Rysunek 6-4. Zależności czasowe udziału węzłów typu S w sieci regularnej Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C = 0,5$. Każdy wykres odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa procesu S: $p_S = 0,1$ — góra, $p_S = 0,5$ — środek, $p_S = 0,9$ — dół. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n^S_0 węzłów S — poszczególne wartości znajdują się na legendzie pod wykresem.

Analiza przebiegów czasowych pokazała, że w sprawdzonym zakresie wartości prawdopodobieństw procesu S i początkowych udziałów węzłów typu S, obserwowany jest brak zależności końcowego udziału węzłów tego typu od ich udziału początkowego w sieci.

Wyjątkiem jest przebieg czasowy dla prawdopodobieństwa procesu S wynoszącego 0,1 oraz początkowego udziału węzłów S stanowiącego 95% wszystkich węzłów w sieci, przedstawiony na górnej części Rysunku 6-4. Przebieg ten odróżnia się od pozostałych przebiegów czasowych niezerową wartością udziału węzłów S w chwili końcowej. Jest to spowodowane występowaniem stanów absorbujących S ($n^T_S = 1$), spowodowanych bardzo dużym początkowym udziałem tych węzłów $n^S_0 \approx 1$. Zostało sprawdzone, że w tym przypadku trzy na sto symulacji zakończyły się 100% udziałem węzłów S w sieci, wszystkie pozostałe symulacje zakończyły się 100% udziałem węzłów D. Ponieważ przebiegi czasowe z Rysunku 6-4 reprezentują wartość średnią ze wszystkich stu symulacji, udział końcowy S musiał być różny od zera.

Ilustruje to Rysunek 6-5, przedstawiający konfigurację początkową „absorbującą”, powodującą że proces typu D się nie aktywuje oraz konfigurację pozwalającą na aktywację tego procesu i w efekcie opanowanie całej sieci przez węzły typu D.

Konfiguracja absorbująca jest przede wszystkim obserwowana wtedy, gdy w chwili początkowej nie występuje w sieci ani jedna para węzłów typu D. Żeby ocenić prawdopodobieństwo wystąpienia takiej konfiguracji, posłużymy się założeniem że stany par

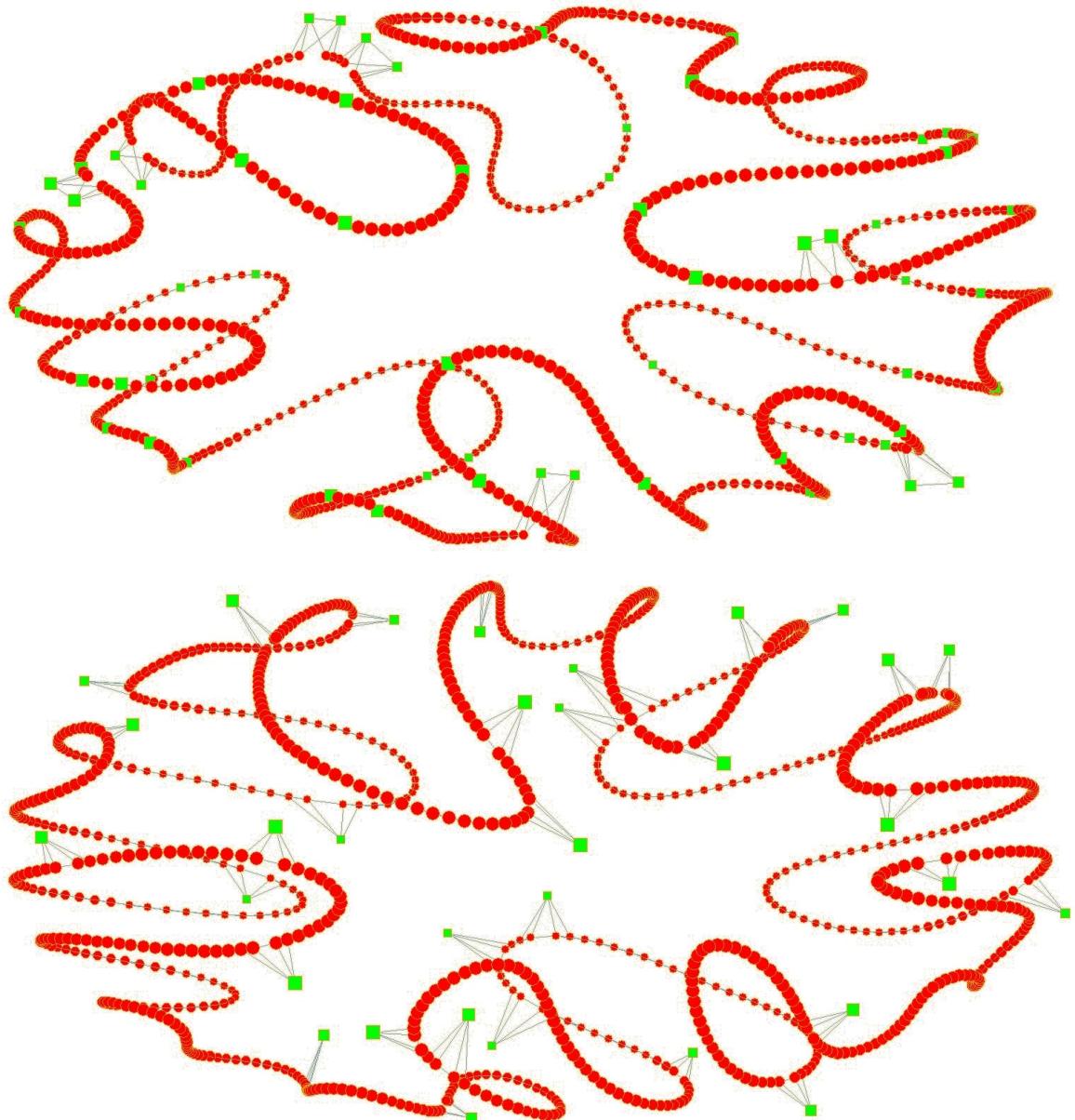
węzłów są niezależne. Prawdopodobieństwo p^* , że w sieci nie istnieje w chwili początkowej żadna para węzłów D można wtedy zapisać jako

$$p^* = (1 - n_D^{0,2})^M,$$

gdzie $M = \frac{kN}{2}$, zaś $n_D^{0,2}$ jest początkowym udziałem węzłów typu D w sieci.

Podstawiając $k=4$, $N=1000$, $n_D^{0,2}=0,05$, otrzymuje się $p^*=0,0066$, które jest mniejsze niż numeryczne otrzymane 0,03 (trzy na sto symulacji zakończyło się 100% udziałem węzłów typu S w sieci).

Można to wytłumaczyć zauważając, iż podejście analityczne nie uwzględnia przypadków kiedy w chwili początkowej istnieją w sieci pary węzłów D-D, jednakże jeden z węzłów tej pary staje się węzłem typu S, zanim para zdąży zainfekować jakikolwiek inny węzeł typu S w sieci.



Rysunek 6-5. Konfiguracja początkowa sieci W-S dla $C=0,5$, $p_s=0,1$, $n^0_s=0,95$ która pozwala na aktywację procesu D (góra) oraz uniemożliwiającą jego aktywację (dół). Węzły typu S oznaczone są na czerwono, węzły typu D — na zielono. Widać, że w tym drugim przypadku, w sieci nie występuje ani jedna para połączonych węzłów typu D.

Przebiegi uśrednione (Rysunek 6-4 — przebieg górnny i dolny) pokazały również, że celowe będzie poszukiwanie progowej wartości prawdopodobieństwa procesu S, poniżej którego udział węzłów typu S w chwili końcowej symulacji wynosi zero, zaś powyżej — wynosi 100%.

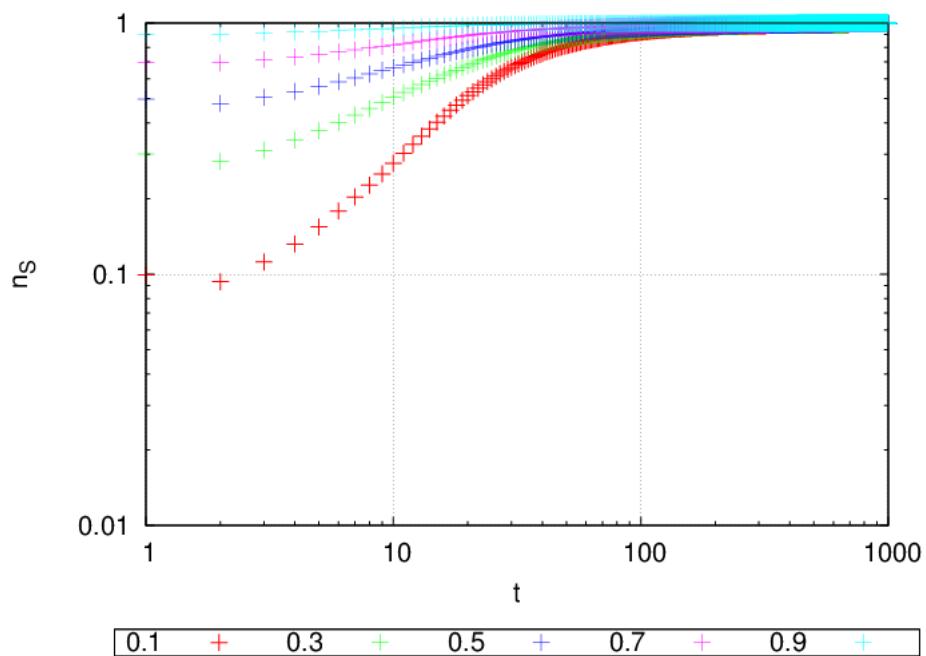
6.3.2 Przebiegi dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania

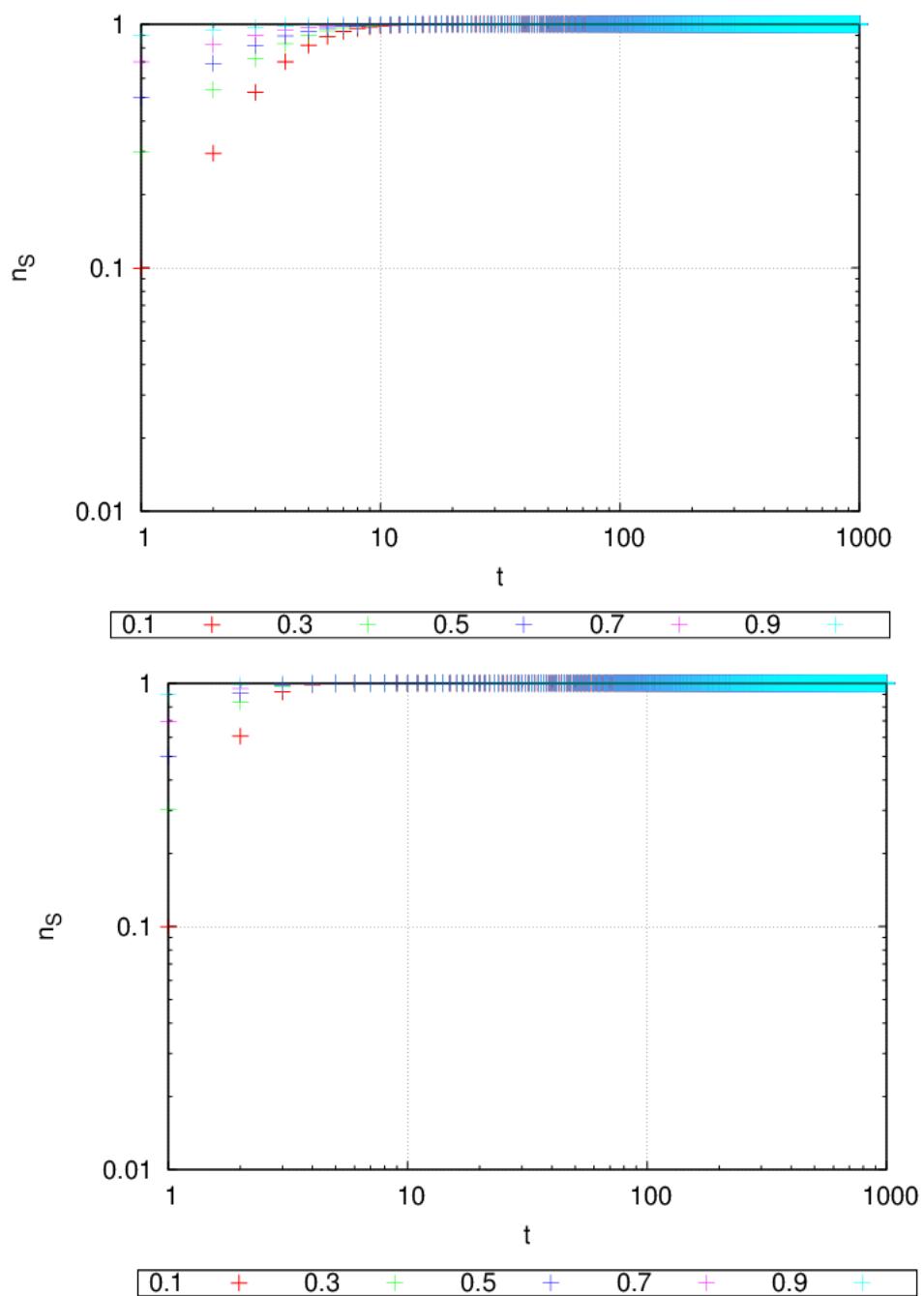
Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa p_s procesu S i początkowego udziału n^0_s węzłów typu S w sieci, przebiegi czasowe były uśredniane po $n = 10$ rozkładach początkowych węzłów S i D na $s = 10$ realizacjach sieci, różniących się między sobą topologią.

Wartości pozostałych parametrów zostały ustawione identycznie jak dla sieci regularnej:

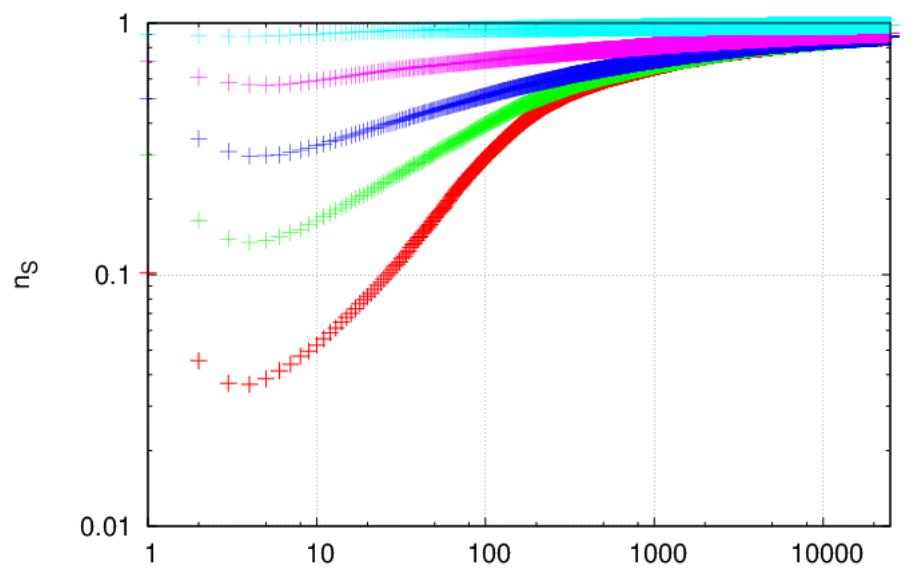
- $N = 1000$,
- $\Delta C = 0,01$,
- $T_{max} = 25000$.

Uzyskane w symulacjach zależności $n_s(t)$ ewolucji średniego udziału węzłów S od czasu, przedstawione są na rysunkach 6-6 oraz 6-7.

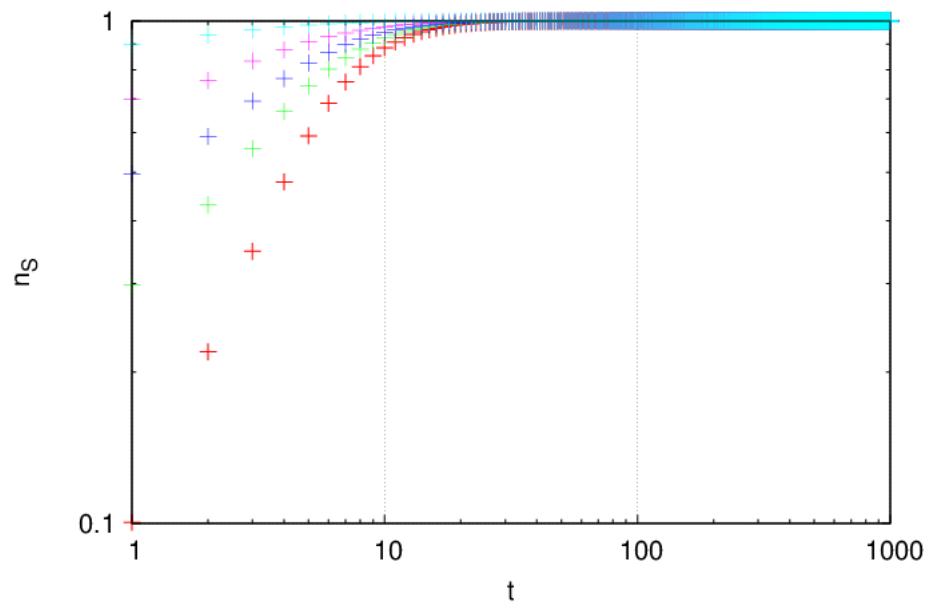




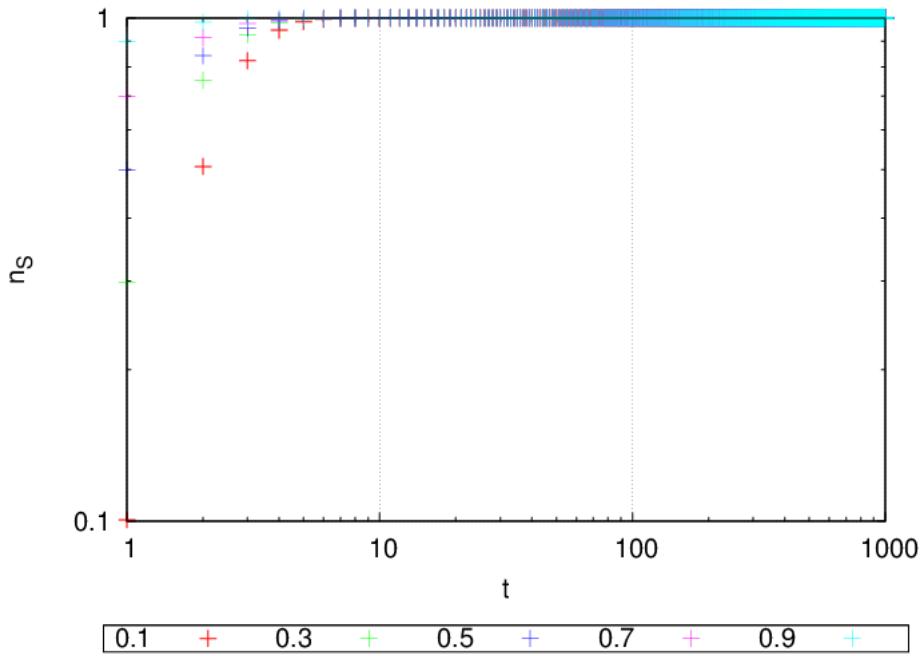
Rysunek 6-6. Zależności czasowe $n_S(t)$ średniego udziału węzłów typu S w sieci Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C = 0,1$. Każdy wykres odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa procesu S: $p_s = 0,1$ — góra, $p_s = 0,5$ — środek, $p_s = 0,9$ — dół. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n^0_S węzłów S — poszczególne wartości są podane się na legendzie pod wykresem.



0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.7 + 0.9 +



0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.7 + 0.9 +



Rysunek 6-7. Zależności czasowe $ns(t)$ udziału węzłów typu S w sieci Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C = 0,3$. Każdy wykres odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa procesu S: $ps = 0,1$ — góra, $ps = 0,5$ — środek, $ps = 0,9$ — dół. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n^0s węzłów S — poszczególne wartości znajdują się na legendzie pod wykresem.

Analiza przebiegów czasowych pokazała, że w sprawdzonym szerokim zakresie początkowych parametrów symulacji, nie została zaobserwowana zależność końcowego udziału węzłów typu S w sieci od udziału początkowego tych węzłów.

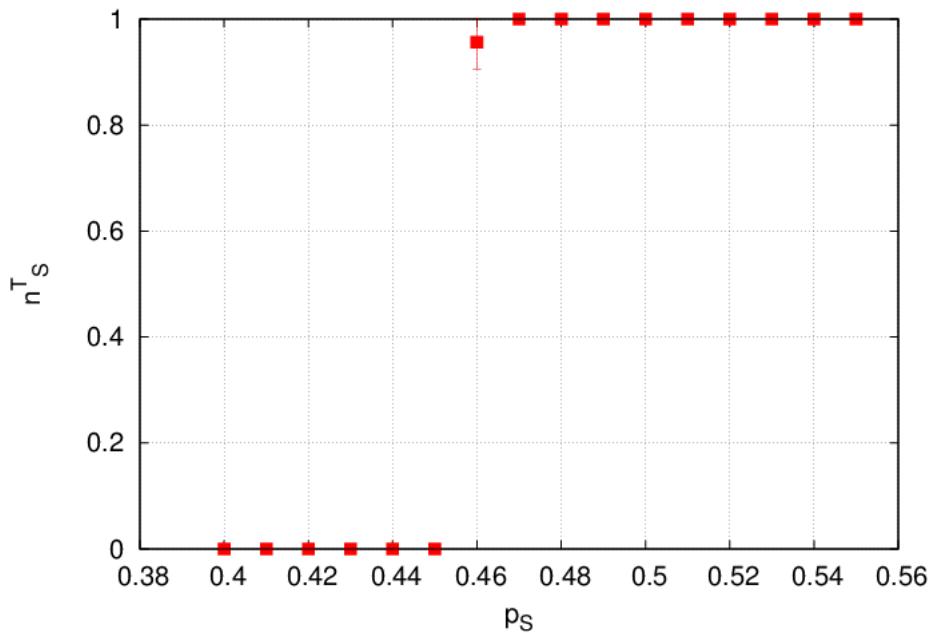
Ponadto, podobnie jak dla sieci Erdős-a-Rényiego, uśrednione przebiegi czasowe przypominają bardzo wyglądem przebiegi pojedyncze — również w tym przypadku polepszenie statystyki spowodowało jedynie „wygładzenie” krzywych na wykresie.

6.4 Wykres fazowy dla sieci regularnej

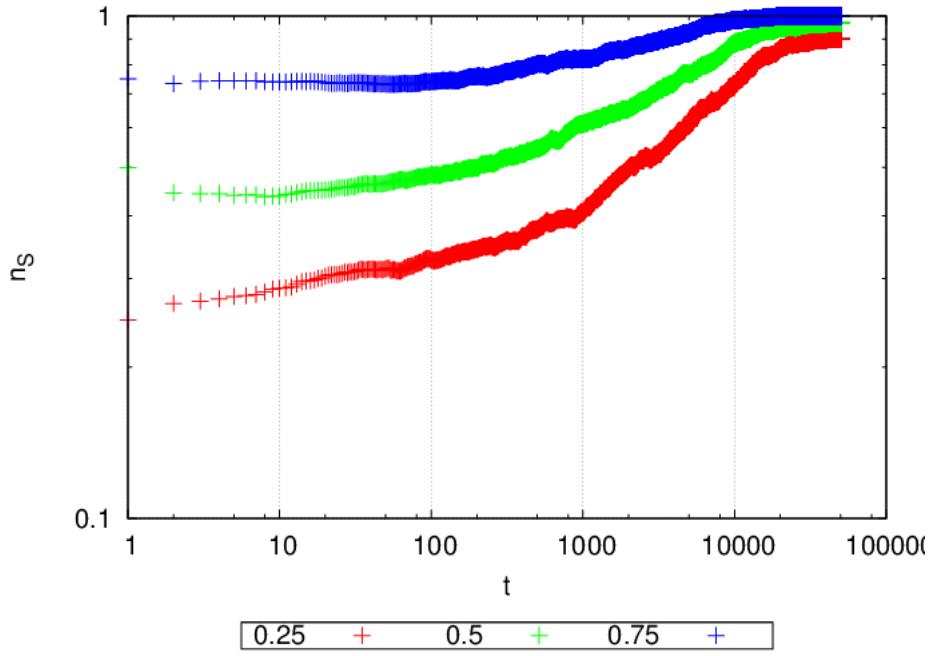
Dodatkowej uwagi wymaga nieprzełączona sieć Wattsa-Strogatza. Jak pokazuje Rysunek 6-4, w zależności od wartości prawdopodobieństwa procesu S, symulacje kończą się otrzymaniem fazy stacjonarnej, w której 100% wszystkich węzłów w sieci stanowią węzły w stanie D (górnny wykres) bądź węzły w stanie S (wykresy środkowy i dolny). Nie jest natomiast obserwowana faza niestacjonarna, tak jak dla wszystkich przełączonych sieci Wattsa-Strogatza. Pojawia się zatem pytanie czy istnieje wartość graniczna prawdopodobieństwa procesu S, poniżej której wszystkie węzły w chwili końcowej są węzłami typu D, natomiast powyżej — węzłami typu S. Oczywiście w tej sytuacji kryterium wskaźnika stacjonarności, stosowanego wcześniej do znalezienia prawdopodobieństwa procesu S rozdzielającego fazy niestacjonarną i stacjonarną S nie jest wystarczające, gdyż istotna jest tutaj nie wartość pochodnej z przebiegu czasowego lecz sam udział węzłów S w chwili końcowej symulacji.

Odpowiedź na pytanie o istnienie granicznej wartości p_S oddzielającej fazy S i D, daje Rysunek 6-8: dla nieprzełączonej sieci Wattsa-Strogatza, o wartości współczynnika gronowania równej 0,5, obserwowana jest wartość graniczna prawdopodobieństwa procesu S. Wartość ta wynosi około 0,46 — dla prawdopodobieństw procesu S większych od niej, w chwili końcowej udział węzłów S w sieci wynosi 100%, zaś dla prawdopodobieństw mniejszych — zero.

Dodatkowo, Rysunek 6-9 przedstawia uśrednione przebiegi czasowe właśnie dla $p_S=0,46$. Charakterystyczne jest, że dla tej wartości p_S czasy dojścia do stanu stacjonarnego są znacznie dłuższe niż dla pozostałych wartości, ponieważ jest to otoczenie punktu krytycznego.



Rysunek 6-8. Wykres zależności końcowego udziału n^T_S węzłów S od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla nieprzełączonej sieci Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C = 0,5$, liczącej $N = 1000$ węzłów. Każdy punkt na wykresie jest średnią wartością n^T_S dla wartości początkowych udziałów n^0_S węzłów S równych: 0,25, 0,5 oraz 0,75.



Rysunek 6-9. Zależności czasowe $ns(t)$ średniego udziału węzłów typu S w sieci Wattsa-Strogatza o współczynniku gronowania $C = 0,55$, liczącej $N = 1000$ węzłów. Prawdopodobieństwo $ps = 0,46$. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału n^0_s węzłów S — poszczególne wartości są podane na legendzie pod wykresem.

6.5 Wykres fazowy w przestrzeni parametrów (ps, C) dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania

Na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych, tworzony jest wykres fazowy w przestrzeni parametrów (ps, C). Generacja tego wykresu przedstawia się następująco:

1. Zależności czasowe są grupowane według wartości C oraz n^0_s , tzn. dla każdej z sieci tworzony jest wykres na którym znajdują się przebiegi czasowe dla każdej wartości prawdopodobieństwa ps , należącego do zadanego przedziału wartości (czyli każdy przebieg różni się wartością ps). Ilustruje to Rysunek 6-10.
2. Dla każdego przebiegu czasowego obliczany jest wskaźnik stacjonarności α , czyli pochodna czasowa z udziału $ns(t)$ węzłów S w przedziale czasowym obejmującym ostatnie 5000 ze wszystkich 25000 kroków symulacji. Jest to współczynnik kierunkowy prostej dopasowanej do wykresu, znalezionej za pomocą metody najmniejszych kwadratów we wspomnianym przedziale. Zostało przyjęte, że stan stacjonarny ma miejsce gdy wartość bezwzględna wskaźnika stacjonarności jest mniejsza niż 0,001.
3. Wynikiem tej procedury jest wykres, na którym na osi odciętych umieszczone są w rosnącej kolejności wartości prawdopodobieństwa ps , a na osi rzędnych wartości wskaźnika stacjonarności α , odpowiadające tym wartościom ps . Wykres ten pozwala

określić dla ustalonej wartości C wartość graniczną prawdopodobieństwa p_c rozdzielająca fazę stacjonarną S i fazę niestacjonarną.

Przykładowe zależności $\alpha(p_S)$ przedstawia Rysunek 6-11.

4. Następnie z wykresu $\alpha(p_S)$ odczytywane są dwie wartości prawdopodobieństw: p_{CL} — największa wartość prawdopodobieństwa dla której wartość bezwzględna wskaźnika stacjonarności jest większa niż 0,001 oraz p_{CR} — najmniejsza wartość prawdopodobieństwa dla której wartość bezwzględna wskaźnika stacjonarności α jest mniejsza niż 0,001. Wartość p_c oszacowano jako:

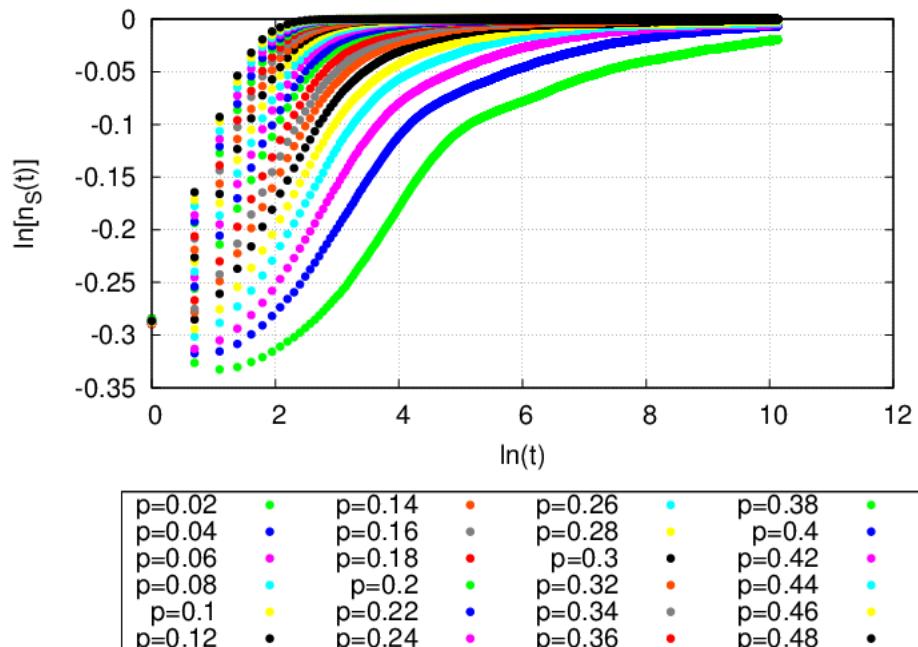
$$p_c = \frac{p_{CR} + p_{CL}}{2}, \quad (6-1)$$

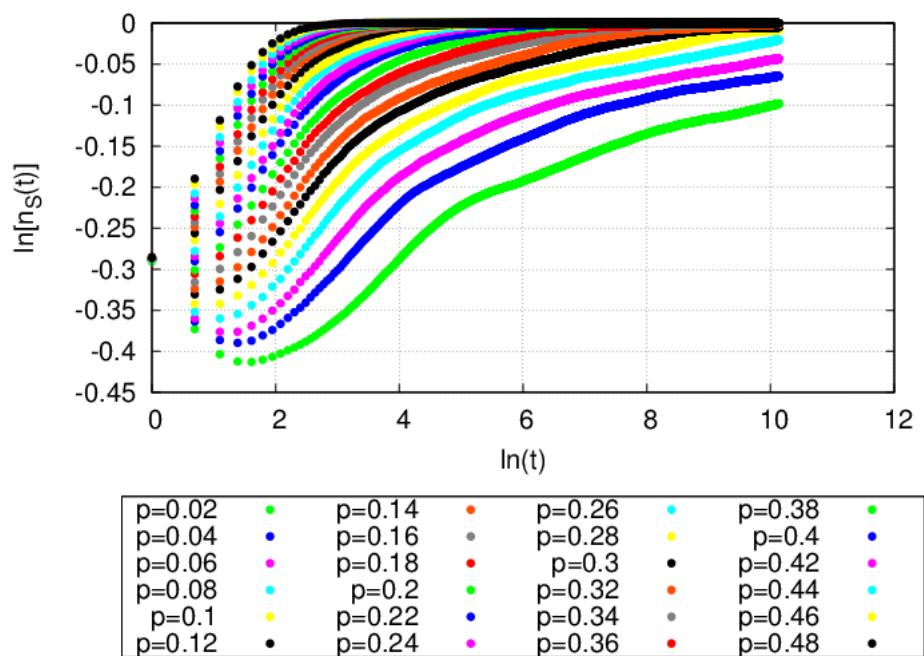
natomiast niepewność wyznaczenia wartości p_c :

$$u(p_c) = \frac{p_{CR} - p_{CL}}{\sqrt{3}}, \quad (6-2)$$

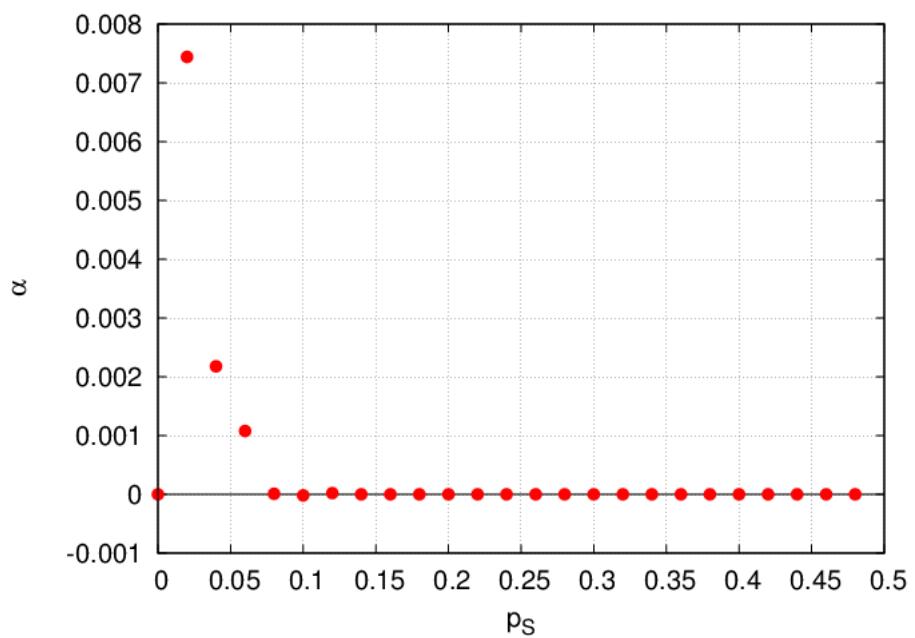
zakładając że rzeczywista wartość p_c znajduje się w przedziale $[p_{CL}; p_{CR}]$ z rozkładem równomiernym.

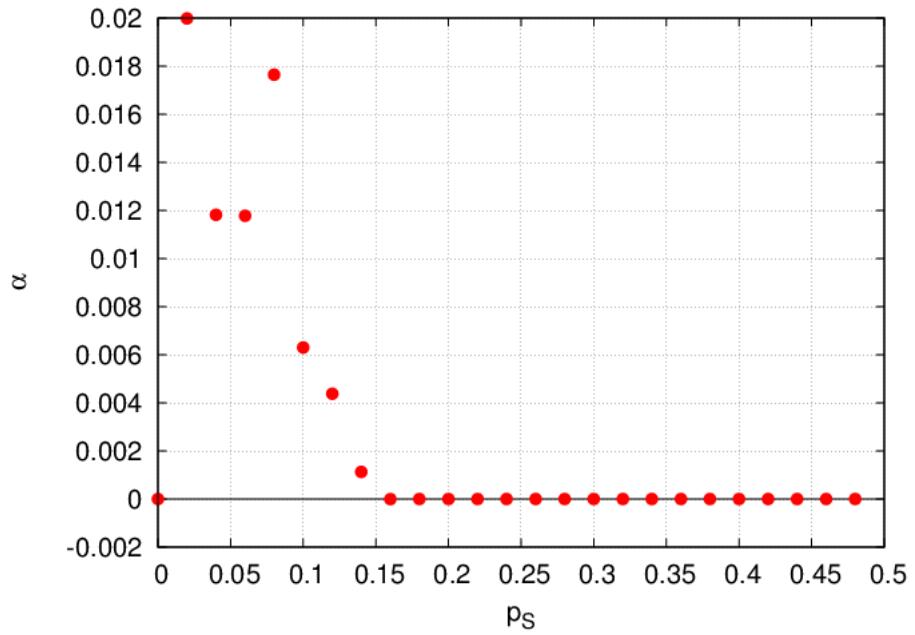
Otrzymany diagram fazowy, prezentujący zależność prawdopodobieństwa krytycznego p_c od współczynnika gronowania C , przedstawia Rysunek 6-12.



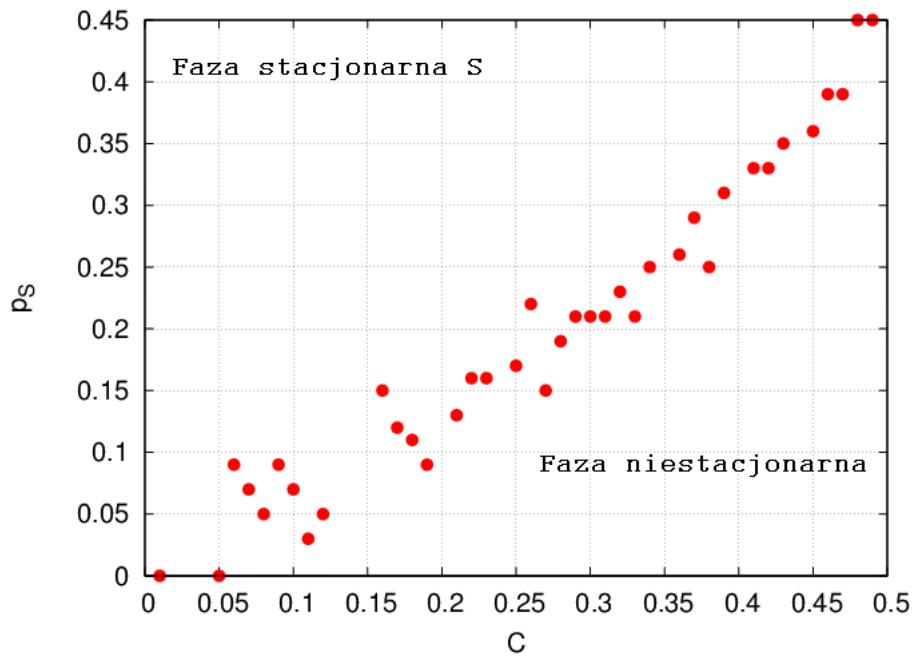


Rysunek 6-10. Zależności czasowe udziału węzłów typu S w sieci Wattsa-Strogatza o początkowym udziale węzłów S wynoszącym $n_0^S = 75\%$. Każdy wykres odpowiada innej wartości współczynnika gronowania: $C = 0,1$ — wykres górnny, $C = 0,2$ — wykres dolny. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S — poszczególne wartości znajdują się na legendzie pod wykresem.





Rysunek 6-11. Zależność wskaźnika stacjonarności α od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci Wattsa-Strogatza o początkowym udziale węzłów S wynoszącym $n^0S = 75\%$. Każdy wykres odpowiada innej wartości współczynnika gronowania: $C = 0,1$ — wykres górnny, $C = 0,2$ — wykres dolny.



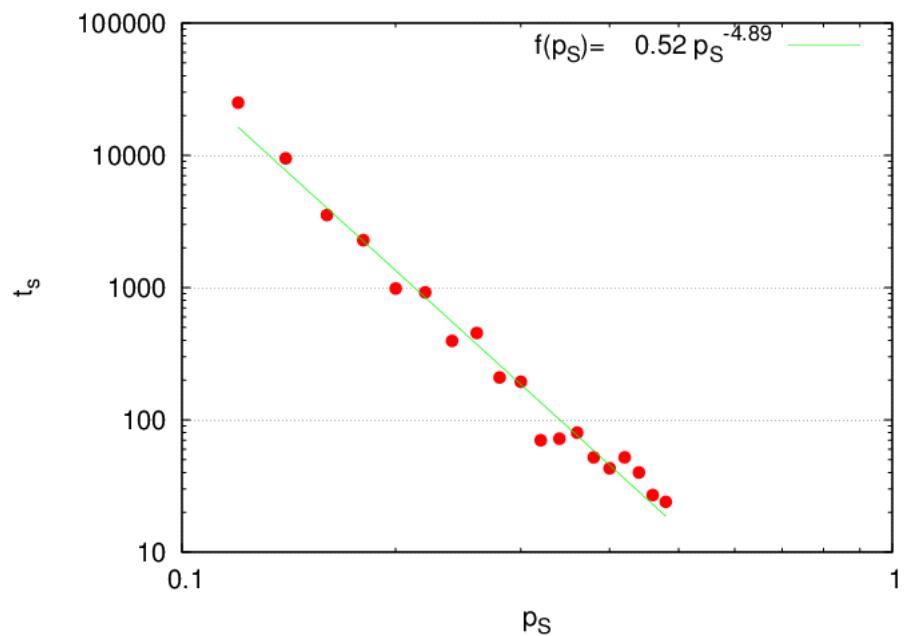
Rysunek 6-12. Diagram fazowy w przestrzeni parametrów (C, p_S) dla sieci Wattsa-Strogatza. Początkowy udział węzłów S w sieci wynosi 75%.

Na Rysunku 6-12, można zaobserwować dwie fazy: fazę niestacjonarną (obszar pod krzywą) i fazę stacjonarną S (obszar nad krzywą). Można również zauważać, że wartości prawdopodobieństwa granicznego rosną wraz ze wzrostem współczynnika gronowania. Jest to

zgodne z oczekiwaniami — duży współczynnik gronowania sprzyja procesowi dwuwęzłowemu D, który do aktywacji wymaga pary wzajemnie połączonych węzłów typu D. Aby zrekompensować ten efekt, prawdopodobieństwo procesu jednowęzłowego S musi zatem wzrastać ze wzrostem współczynnika gronowania.

Nie można wykluczyć, że faza niestacjonarna przy odpowiednim wydłużeniu czasu symulacji stanie się fazą stacjonarną S. Diagram wskazuje również, że proces D jest aktywowany przez niezerowy współczynnik gronowania, około 0,05 — co jest również zgodne z oczekiwaniami, gdyż jak wcześniej wspomniano, proces D wymaga do rozprzestrzeniania się dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D.

Dla wartości prawdopodobieństwa p_S procesu S, dla których zaobserwowano fazę stacjonarną oraz wybranej wartości współczynnika gronowania C , został sporządzony wykres przedstawiający zależność czasu dojścia do stanu stacjonarnego od prawdopodobieństwa procesu S dla sieci Wattsa-Strogatza z dopasowaniem, będącym funkcją potęgową. Widać z niego, że wraz ze zmniejszaniem wartości prawdopodobieństwa, w zakresie najmniejszych prawdopodobieństw czasы dojścia do stanu stacjonarnego znacznie się zwiększały. Powoduje to, że dla ustalonego czasu symulacji wynoszącego 25000 iteracji, obserwujemy fazę niestacjonarną. Wykres został przedstawiony na rysunku 6-13.



Rysunek 6-13. Wykres zależności czasu dojścia do stanu stacjonarnego t_s od prawdopodobieństwa p_S procesu S dla sieci Wattsa-Strogatza z dopasowaniem funkcją potęgową. Współczynnik gronowania $C = 0,1$, początkowy udział węzłów S $n^0 s = 0,75$. Linia ciągła odpowiada dopasowaniu metodą najmniejszych kwadratów funkcji potęgowej postaci p^γ , gdzie $\gamma = 4,89 \pm 0,16$ (%RSD = 3,4).

6.6 Podsumowanie

Podsumowując otrzymane wyniki dla sieci regularnej i sieci o zredukowanym współczynniku gronowania widać, że wyniki dla sieci regularnej wykazują ostre przejście między fazą S i fazą D. Jednak już niewielkie prawdopodobieństwo przełączania połączeń między węzłami sprawia, że dla sieci o zredukowanym współczynniku gronowania faza D jest niestabilna. Jednakże czas dojścia do fazy S może być bardzo długi. Jeżeli ten czas jest dłuższy niż czas obliczeń, mówimy o fazie niestacjonarnej.

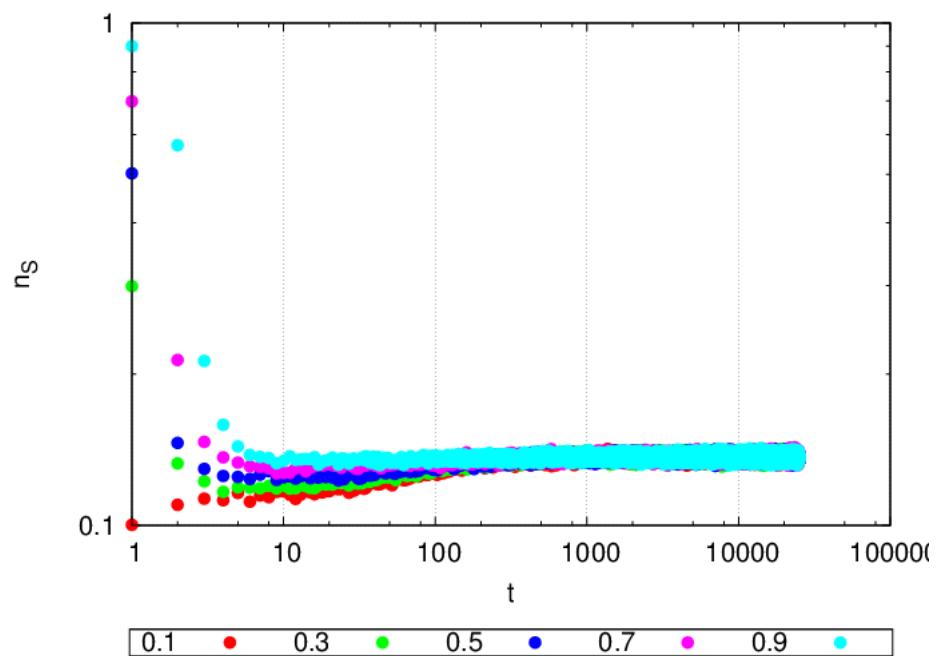
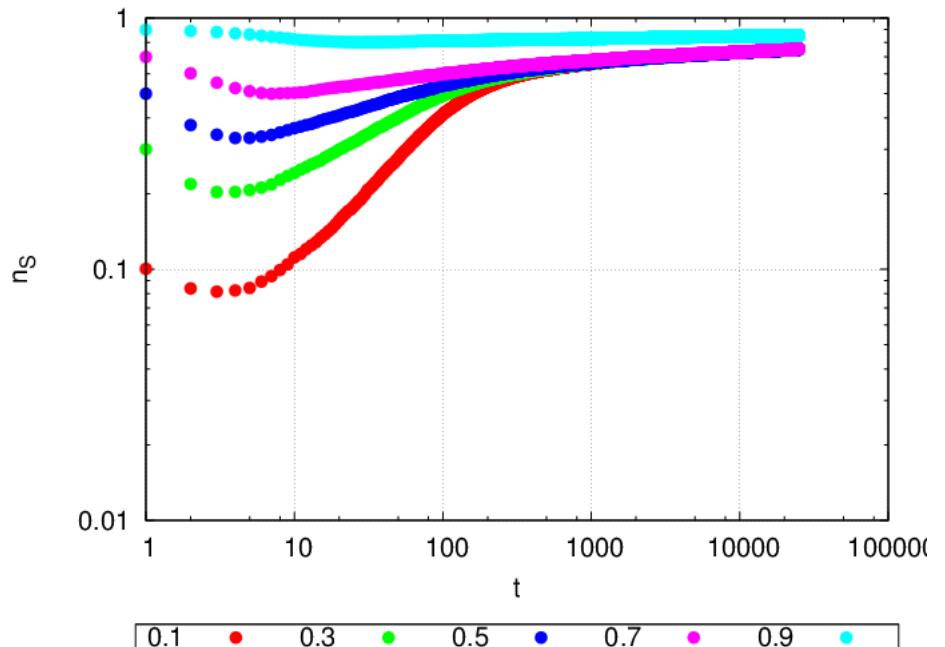
7 Porównanie wyników symulacji modelu „z sąsiedztwem” na sieci Erdős-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza

Symulacje procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu „z sąsiedztwem”, zostały przeprowadzone dla sieci Erdős-Rényiego oraz sieci Wattsa-Strogatza. Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa przejścia p_S procesu S oraz początkowego udziału n^0_S węzłów typu S w sieci, wyniki symulacji procesu kontaktowego (czyli udział węzłów S w sieci w danym kroku czasowym) zostały uśrednione po $n = 10$ rozkładach początkowych węzłów S i D na $s = 10$ realizacjach sieci, różniących się między sobą topologią. Odstępstwem od tej reguły była nieprzełączona sieć Wattsa-Strogatza ($q = 0$, $C_{1/2} = 0,5$) – w tym przypadku generowana była tylko jedna sieć, gdyż istnieje tylko jedna możliwa topologia takiej sieci i uśrednianie odbywało się po $s_{1/2} = 100$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci. Ilość kroków czasowych dla obu rodzajów sieci została ustalona na 25000 iteracji.

Zarówno dla sieci Erdős-Rényiego jak i Wattsa-Strogatza, analiza przebiegów czasowych pokazała, że w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji obserwowany jest brak zależności końcowego udziału węzłów typu S od udziału początkowego tych węzłów. Wyjątkiem był przebieg czasowy dla sieci Wattsa-Strogatza, współczynnika gronowania $C=0,5$, prawdopodobieństwa procesu S wynoszącego 0,1 oraz początkowego udziału węzłów S stanowiącego 95% wszystkich węzłów w sieci. Przebieg ten odróżniał się od pozostałych przebiegów czasowych niezerową wartością udziału węzłów S w chwili końcowej, co wynikało z wielokrotnego występowania stanu absorbującego S ($n^r_S = 1$), spowodowanego bardzo dużym początkowym udziałem tych węzłów $n^0_S \approx 1$ (górnny przebieg na rysunku 6-4).

Następnie, dla przełączonych sieci Wattsa-Strogatza — zatem o współczynniku gronowania C mniejszym od 0,5 — został sporządzony wykres fazowy w przestrzeni parametrów (p_S , C), na którym zostały zaobserwowane dwie fazy: faza niestacionarna oraz faza stacjonarna S. Taki podział nie został zaobserwowany dla sieci Erdős-Rényiego — wszystkie przebiegi czasowe kończyły się osiągnięciem stanu stacjonarnego. Nie można jednak wykluczyć, że liczba 25000 kroków czasowych dla sieci Erdős-Rényiego jest wystarczająca do osiągnięcia stanu stacjonarnego podczas gdy dla sieci Wattsa-Strogatza nie jest. Możliwe też, że dla tej drugiej sieci faza niestacionarna również zaniknie przy odpowiednim wydłużeniu czasu symulacji i stanie się fazą stacjonarną S. Wydaje się, że w tym przypadku dużą rolę odgrywa średni stopień wierzchołka sieci, który jest dwa i pół raza większy dla sieci Erdős-Rényiego i wynosi dziesięć (cztery dla Wattsa-Strogatza). Potwierdzeniem powyższej hipotezy są przebiegi czasowe dla sieci Erdős-Rényiego o różnych wartościach średniego stopnia wierzchołka (cztery oraz dziesięć) i identycznych wartościach pozostałych parametrów symulacji, które przedstawia Rysunek 7-1. Widać, że dla większego średniego stopnia wierzchołka przebiegi czasowe dla różnych

początkowych udziałów węzłów S wypłaszczyły i pokryły się, podczas gdy dla mniejszego — udział węzłów S wciąż rośnie w kolejnych iteracjach.



Rysunek 7-1. Zależności czasowe udziału węzłów typu S w sieci Erdős-a-Rényiego o wartości współczynnika gronowania $C = 0,4$, prawdopodobieństwie p_S procesu S równym 0,2 i różnych średnich stopniach wierzchołka: $k = 4$ — wykres górny, $k = 10$ — wykres dolny. Każda krzywa na wykresie odpowiada innej wartości początkowego udziału węzłów S — poszczególne wartości są podane na legendzie pod wykresem.

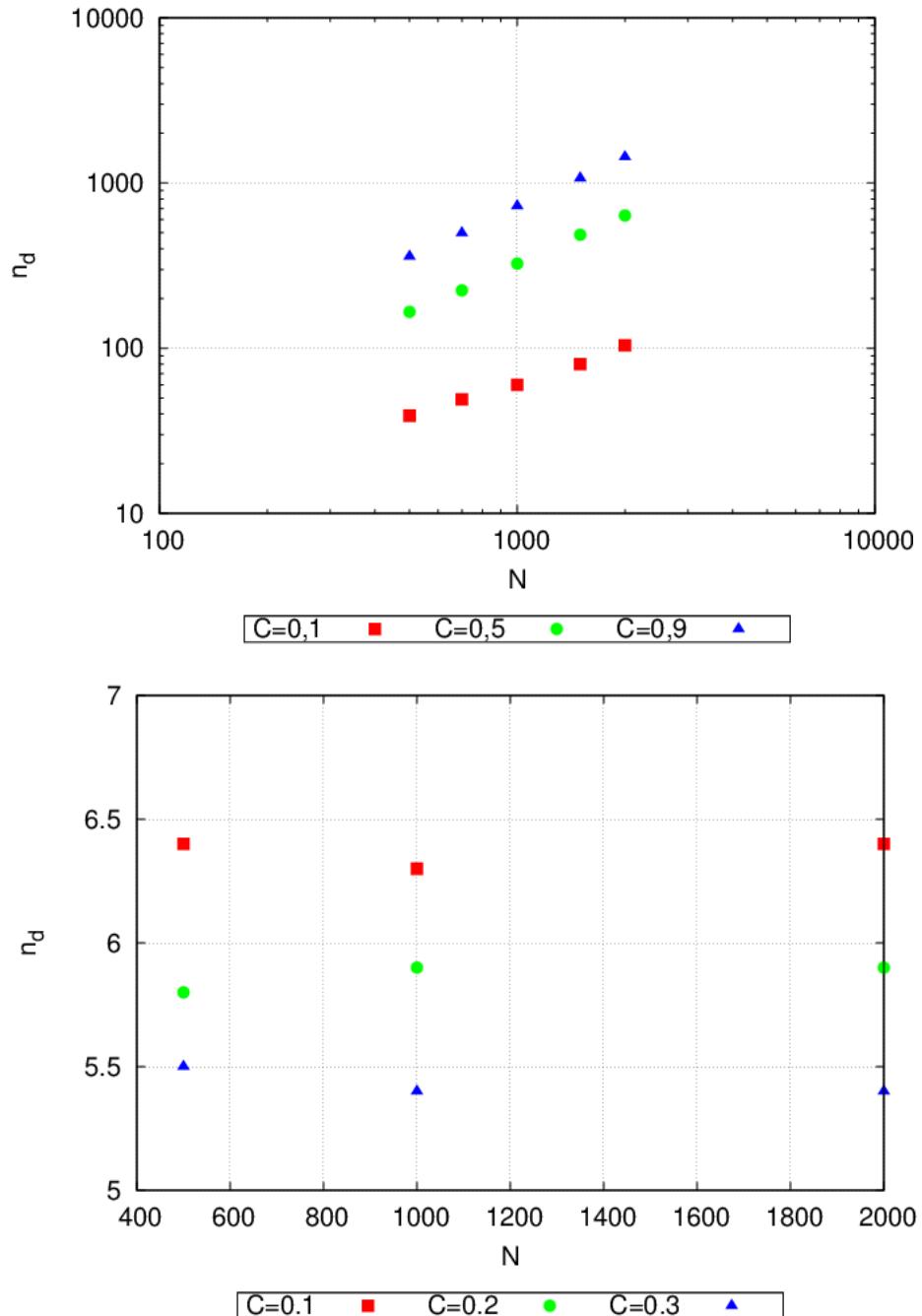
Wracając do diagramu fazowego dla sieci Wattsa-Strogatza, można było zauważyc, że wartości prawdopodobieństwa granicznego p_S (Rysunek 5-10) rosną wraz ze wzrostem współczynnika gronowania. Jest to zgodne z oczekiwaniami — duży współczynnik gronowania sprzyja procesowi dwuwęzłowemu D, który do aktywacji wymaga pary wzajemnie połączonych węzłów typu D. Aby zrekompensować ten efekt, prawdopodobieństwo procesu jednowęzłowego S musi zatem wzrastać ze wzrostem współczynnika gronowania. Podobne wnioski można było wysnuć z analizy wykresów przedstawiających zależność końcowego udziału n^T_S węzłów S od parametrów p_S , oraz C dla sieci Erdős-Rényiego (Rysunek 5-8). Wartość n^T_S malała wraz ze wzrostem współczynnika gronowania. Jest to również zgodne z oczekiwaniami: jak zostało wcześniej wspomniane, wyższy współczynnik gronowania wzmacnia proces dwuwęzłowy D. Wzmocnienie procesu D przy ustalonej aktywności procesu S, powoduje, że końcowy udział węzłów D w sieci wzrasta, czyli jednocześnie końcowy udział węzłów S musi maleć. Zostało również zaobserwowane, że końcowa ilość n^T_S węzłów S rosła wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p_S procesu S: wyższe prawdopodobieństwo bowiem wzmacnia aktywność procesu jednowęzłowego S, co powoduje, że końcowy udział węzłów S w sieci musiał być większy.

8 Porównanie wyników symulacji modelu Sznajdów na sieci Watts-Strogatza oraz Albert-Barabásiego

Symulacje procesu kontaktowego z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu Sznajdów zostały przeprowadzone zarówno dla sieci Watts-Strogatza jak i Albert-Barabásiego. Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa przejścia p_D procesu D oraz początkowego udziału n^0_S węzłów typu S w sieci, wyniki symulacji procesu kontaktowego (czyli udział węzłów S w sieci w danym kroku czasowym) w przypadku sieci Watts-Strogatza zostały uśrednione po $s = 1000$ realizacjach sieci, różniących się między sobą topologią. Odstępstwem od tej reguły była nieprzełączona sieć Watts-Strogatza ($q = 0$, $C_{1/2} = 0,5$) — w tym przypadku generowana była tylko jedna sieć, gdyż istnieje tylko jedna możliwa topologia takiej sieci i uśrednianie odbywało się po $s_{1/2} = 1000$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci. Natomiast dla sieci Albert-Barabásiego wyniki symulacji procesu kontaktowego zostały uśrednione po $s = 10$ przebiegach realizowanych na $n = 100$ sieciach różniących się topologiami. Zatem zarówno dla sieci Watts-Strogatza jak i Albert-Barabásiego iloczyn n oraz s wynosi 1000, co pozwala na wiarygodne porównanie wyników symulacji dla tych sieci. Ilość kroków czasowych dla obu rodzajów sieci została ustalona na 500 iteracji.

Zarówno dla sieci Watts-Strogatza jak i Albert-Barabásiego, analiza przebiegów czasowych pokazała, że w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji obserwowana jest zależność końcowego udziału n^s_S węzłów typu S od początkowego udziału n^0_S tych węzłów.

Natomiast z analizy wykresów zależności końcowego udziału węzłów typu S od początkowego udziału tych węzłów w sieci dla sieci liczących $N=500$, 1000 i 2000 węzłów wynika, że dla sieci Watts-Strogatza odczytana z wykresu wartość n^*_S nie zależy od rozmiaru sieci (Rysunek 3-11 oraz Rysunek 3-12). Zupełnie inaczej było w przypadku sieci Albert-Barabásiego, dla której zostało sprawdzone, że dla ustalonej pary parametrów współczynnika gronowania C oraz prawdopodobieństwa p procesu D, wartości n^*_S rosną wraz ze wzrostem rozmiaru sieci (Rysunek 4-16). Fakt, że n^*_S dąży do jedynki oznacza, że ze wzrostem rozmiaru sieci rośnie dominacja procesu dwuwęzłowego D i dominacja procesu S miałaby miejsce tylko wtedy gdyby udział węzłów S w chwili początkowej wynosiłby 100%. Efekt wzrostu n^*_S wraz ze wzrostem wielkości sieci wynika z tego, że wraz ze wzrostem rozmiaru sieci rośnie średnia ilość sąsiadów pary węzłów, co wzmacnia proces dwuwęzłowy D, wymagający właśnie jak największej liczby sąsiadów pary D-D aby się rozprzestrzenić w sieci. Takiej zależności nie obserwujemy dla sieci Watts-Strogatza co tłumaczy stałą wartość n^*_S dla sieci o różnych rozmiarach. Ilustruje to Rysunek 8-1.



Rysunek 8-1. Zależność średniej ilości sąsiadów pary węzłów n_d od wielkości sieci N dla różnych wartości współczynnika gronowania C (wartości podane w legendzie pod rysunkiem) dla sieci Albert-Barabásiego (wykres górnny) oraz sieci Wattsa-Strogatza (wykres dolny).

W związku z brakiem zależności n_s^* od rozmiaru sieci, zasadnym było sporządzenie dla sieci Wattsa-Strogatza wykresu fazowego, przedstawiającego przejście pomiędzy fazą dominacji procesu S, kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów S w sieci i fazą dominacji procesu D, kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów D w sieci. Z analizy wykresów na rysunkach 4-13 oraz 4-14 widać było zależność n_s^* od parametrów p oraz C : n_s^* rośnie wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p_D procesu D — wynika to z tego, że wyższe

prawdopodobieństwo wzmacnia aktywność procesu dwuwęzłowego D, a co za tym idzie, początkowy udział węzłów S w sieci musi wzrosnąć aby zrównoważyć ten efekt.

Również dla sieci Albert-Barabásiego n_s^* rośnie wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p_D procesu D.

W przypadku obu badanych sieci, monotoniczność zależności n_s^* od współczynnika gronowania C zależy od p_D . Istnieje przedział wartości p_D dla których wartości n_s^* rosną wraz z C , natomiast w innych przedziale wartości p_D , wartości n_s^* maleją wraz ze współczynnikiem gronowania.

Co ciekawe nie gra tutaj decydującej roli zależność średniej liczby sąsiadów pary węzłów od współczynnika gronowania. Zależności tej nie widać dla sieci Wattsa-Strogatza, natomiast istnieje ona dla sieci Albert-Barabásiego, co więcej jest ona liniowa dla $C=0,9$ i zbliżona do liniowej dla pozostałych C. Przedstawia to Rysunek 8-1 (wykres górnny).

Pomimo tego, dla obu typów sieci monotoniczność zależności n_s^* od współczynnika gronowania C zależy od p_D . Niestety na obecnym etapie badań nie udało się wyjaśnić natury tej zależności.

9 Porównanie wyników symulacji modelu Sznajdów i modelu z sąsiedztwem na sieci Watts-Strogatza

Symulacje procesu kontaktowego na sieci Watts-Strogatza zostały przeprowadzone zarówno z regułami przejścia zdefiniowanymi na podstawie modelu Sznajdów jak i modelu z sąsiedztwem. Dla ustalonych wartości parametrów: współczynnika gronowania C , prawdopodobieństwa przejścia p_D procesu D (dla modelu Sznajdów) bądź procesu S (dla modelu z sąsiedztwem) oraz początkowego udziału n^S węzłów typu S w sieci, wyniki symulacji procesu kontaktowego (czyli udział węzłów S w sieci w danym kroku czasowym) w przypadku modelu Sznajdów zostały uśrednione po $n = 1000$ realizacjach sieci, różniących się między sobą topologią. Odstępstwem od tej reguły była nieprzełączona sieć Watts-Strogatza ($q = 0$, $C_{1/2} = 0,5$) — w tym przypadku generowana była tylko jedna sieć, gdyż istnieje tylko jedna możliwa topologia takiej sieci i uśrednianie odbywało się po $s_{1/2}=1000$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci. Natomiast dla modelu z sąsiedztwem, wyniki symulacji procesu kontaktowego zostały uśrednione po $s = 10$ rozkładach początkowych generowanych na $n = 10$ sieciach różniących się topologiami, zaś dla sieci nieprzełączonej, uśrednianie odbywało się po $s_{1/2}=100$ różnych rozkładach początkowych węzłów S i D tej jednej sieci.

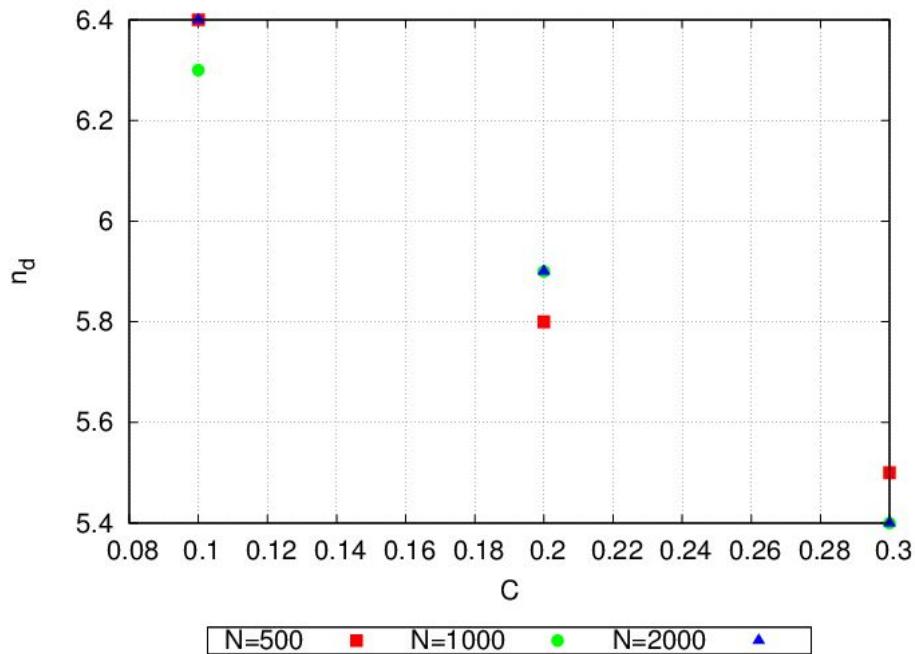
Na podstawie wstępnej obserwacji przebiegów czasowych i czasów dojścia do stanu stacjonarnego, ilość kroków czasowych dla modelu Sznajdów została ustalona na 500 iteracji, natomiast dla modelu z sąsiedztwem — na 25000 iteracji.

Analiza pojedynczych przebiegów czasowych ujawniła zasadniczą różnicę pomiędzy porównywanymi modelami. W przypadku modelu Sznajdów, pojedyncze przebiegi czasowe kończą się albo udziałem węzłów S w sieci bliskim zeru, albo 100% udziałem tych węzłów w sieci. Nie jest to obserwowane dla modelu „z sąsiedztwem”: pojedyncze przebiegi czasowe przypominają bardzo wyglądem przebiegi uśrednione — w tym przypadku polepszenie statystyki powoduje jedynie „wygładzenie” krzywych na wykresie.

Badanie uśrednionych przebiegów czasowych doprowadziło do konkluzji, że w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji w przypadku zaaplikowania reguł przejścia opartych na modelu Sznajdów obserwowana jest zależność końcowego udziału n^S węzłów typu S od początkowego udziału n^S tych węzłów, natomiast dla modelu „z sąsiedztwem” taka zależność nie była obserwowana, z wyjątkiem przebiegu czasowego dla współczynnika gronowania $C=0,5$, prawdopodobieństwa procesu S wynoszącego 0,1 oraz początkowego udziału węzłów S stanowiącego 95% wszystkich węzłów w sieci. Przebieg ten odróżniał się od pozostałych przebiegów czasowych niezerową wartością udziału węzłów S w chwili końcowej, co było spowodowane wielokrotnym występowaniem stanu absorbującego S ($n^S = 1$), wynikającego z bardzo dużego początkowego udziału tych węzłów $n^S \approx 1$.

Zupełnie inne charakterystyki przebiegów czasowych dla badanych modeli reguł przejść zdeterminowały dalsze badania. W przypadku modelu Sznajdów zasadne było badanie zależności

końcowego udziału węzłów typu S od początkowego udziału tych węzłów w sieci dla sieci liczących $N=500$, 1000 i 2000 węzłów. Zostało sprawdzone, że wartość n_s^* nie zależy od rozmiaru sieci (Rysunek 3-11). W związku z brakiem zależności n_s^* od rozmiaru sieci, zasadnym było sporządzenie wykresu fazowego (Rysunek 3-13), przedstawiającego przejście pomiędzy fazą dominacji procesu S, kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów S w sieci i fazą dominacji procesu D, kiedy większość symulacji kończy się 100% udziałem węzłów D w sieci. Z analizy wykresu widać było zależność n_s^* od parametrów p oraz C : n_s^* rośnie wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p_D procesu D — wynika to z tego, że wyższe prawdopodobieństwo wzmacnia aktywność procesu dwuwęzłowego D, a co za tym idzie, początkowy udział węzłów S w sieci musi wzrosnąć aby zrównoważyć ten efekt. Natomiast zależność n_s^* od współczynnika gronowania C nie jest zależnością monotoniczną w całym zakresie parametrów symulacji. Są wartości p_D dla których wartości n_s^* rosną wraz ze wzrostem C , natomiast dla innych wartości p_D — wartości n_s^* maleją ze wzrostem współczynnika gronowania. Okazało się że tego efektu nie można wytlumaczyć na podstawie zależności średniej liczby sąsiadów pary węzłów od współczynnika gronowania. Co prawda, jak ilustruje to Rysunek 9-1, dla ustalonej wielkości sieci wraz ze wzrostem współczynnika gronowania średnia ilość sąsiadów pary węzłów spada, ale jak się okazuje nie przekłada się to bezpośrednio na relację n_s^* od C .



Rysunek 9-1. Zależność średniej ilości sąsiadów pary węzłów n_d od współczynnika gronowania C dla różnych wielkości sieci N (wartości podane w legendzie pod rysunkiem) dla sieci Wattsa-Strogatza.

Natomiast dla symulacji z zastosowaniem reguł przejść zdefiniowanych na podstawie modelu „z sąsiedztwem”, został sporządzony wykres fazowy (Rysunek 6-6.) w przestrzeni parametrów (p , C), na którym zostały zaobserwowane dwie fazy: faza niestacjonarna oraz faza stacjonarna S. Możliwe jest, że faza niestacjonarna również zaniknie przy odpowiednim wydłużeniu czasu symulacji i stanie się fazą stacjonarną S. Należy tu zauważyć dla modelu Sznajdów, że mimo 5-

krotnie krótszego czasu symulacji, faza stacjonarna zawsze była osiągana. Wynika to z przyjętych reguł przejść: w przypadku modelu Sznajdów para węzłów D-D infekowała wszystkich sąsiadów pary, natomiast w przypadku modelu „z sąsiedztwem” — tylko jednego sąsiada, połączonego z dwoma węzłami D jednocześnie.

Z analizy diagramu fazowego wynikało, że wartości prawdopodobieństwa granicznego rosną wraz ze wzrostem współczynnika gronowania. Jest to zgodne z oczekiwaniami — duży współczynnik gronowania sprzyja procesowi dwuwęzłowemu D, który do aktywacji wymaga pary wzajemnie połączonych węzłów typu D. Aby zrekompensować ten efekt, prawdopodobieństwo procesu jednowęzłowego S musi zatem wzrastać ze wzrostem współczynnika gronowania.

Zaobserwowane różnice w wynikach symulacji mogą mieć źródło w różnicach pomiędzy regułami przejść procesów opartych na modelu Sznajdów i na modelu „z sąsiedztwem”, jak również w różnicach pomiędzy procesami współzawodniczącymi z powyższymi. W przypadku modelu Sznajdów procesem konkurencyjnym był tutaj proces o regułach zdefiniowanych na podstawie modelu inwazji: motywacją wyboru współzawodniczącego procesu opartego na modelu inwazji był fakt, że tak jak w przypadku procesu opartego na modelu Sznajdów, to wylosowany węzeł (bądź para węzłów) zmienia stan sąsiada bądź sąsiadów.

Natomiast w modelu „z sąsiedztwem” procesem współzawodniczącym był proces o regułach inspirowanych modelem wyborcy: w tym przypadku wybór współzawodniczącego procesu opartego na modelu wyborcy był motywowany tym, że tak jak w przypadku procesu opartego na modelu „z sąsiedztwem”, to wylosowany węzeł zmienia swój stan, przyjmując stan sąsiada bądź pary wzajemnie połączonych sąsiadów.

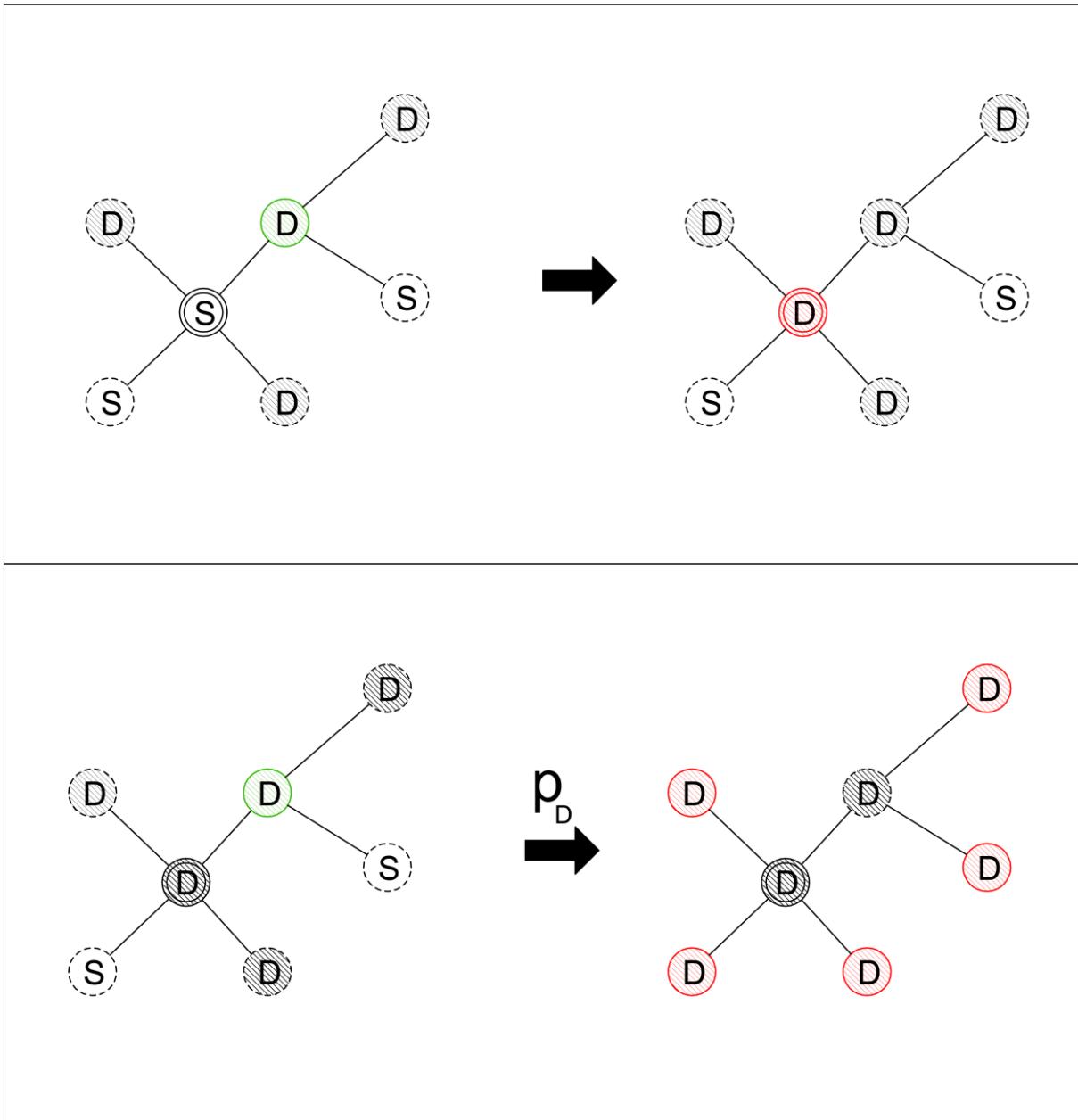
Podjęto zatem próbę konstrukcji algorytmów opisujących współzawodnictwo procesu o regułach przejść opartych na modelu Sznajdów z procesem o regułach przejść inspirowanych modelem wyborcy oraz procesu o regułach przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” z procesem opartym na modelu inwazji.

9.1 Konkurencja procesów o regułach opartych na modelu Sznajdów i modelu wyborcy

Zostały sprawdzone dwie możliwości implementacji konkurencji procesu o regułach przejść opartych na modelu Sznajdów z procesem o regułach przejść inspirowanych modelem wyborcy.

Pierwszy algorytm mógłby przedstawać się następująco (obrazuje go Rysunek 9-2):

- Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z prawdopodobieństwem równym jedności zmieniany jest typ wylosowanego węzła z S na D.
- Jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D (zgodnie z istniejącą już implementacją reguł modelu Sznajdów).



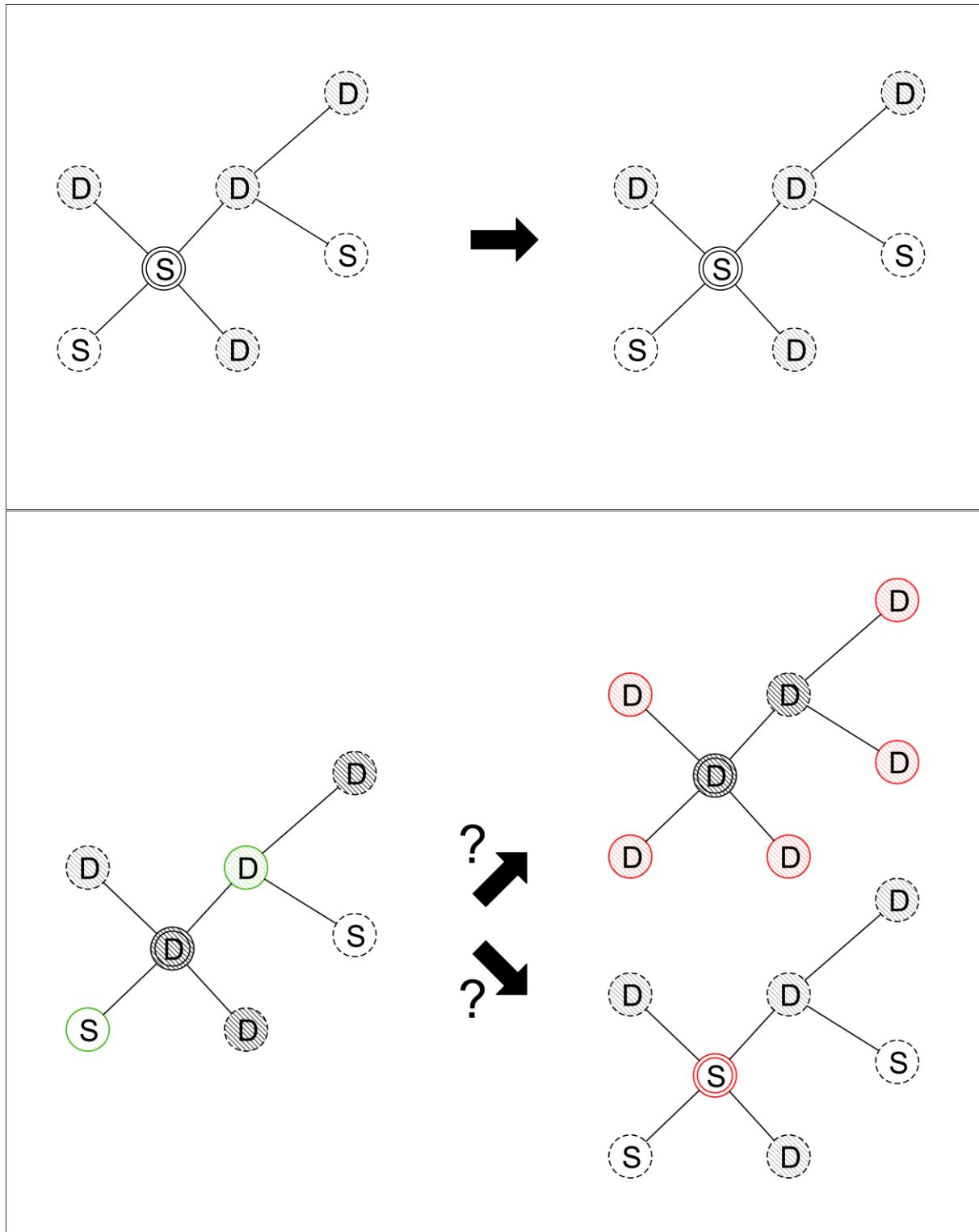
Rysunek 9-2. Ilustracja reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół). Górnny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony kolorem zielonym). Jeżeli tak, to z prawdopodobieństwem jeden zmieniany jest typ wylosowanego węzła z S na D (kolor czerwony). Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony kolorem zielonym). Jeżeli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D (oznaczone na czerwono).

Widać, że przy zaimplementowaniu powyższych reguł ilość węzłów S w sieci byłaby co najwyżej nierosnącą funkcją czasu, co nie pozwoliłaby na jakikolwiek konkurencję ze strony procesu S.

Podjęto zatem próbę opracowania innego algorytmu (ilustruje go Rysunek 9-3):

- Jeżeli został wylosowany węzeł typu S — niepodejmowana jest żadna akcja.

- Jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to sprawdzane jest:
 - czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D.
 - czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S. Jeśli tak, to typ węzła zostaje zmieniony na S.



Rysunek 9-3. Ilustracja alternatywnych reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół). Górnny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem) — niepodejmowana

jest żadna akcja. Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest: czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony kolorem zielonym). Jeżeli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ wszystkich sąsiadów tej pary na D (oznaczone na czerwono); czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S (oznaczony kolorem zielonym). Jeżeli tak, to typ węzła zostaje zmieniony na S (kolor czerwony).

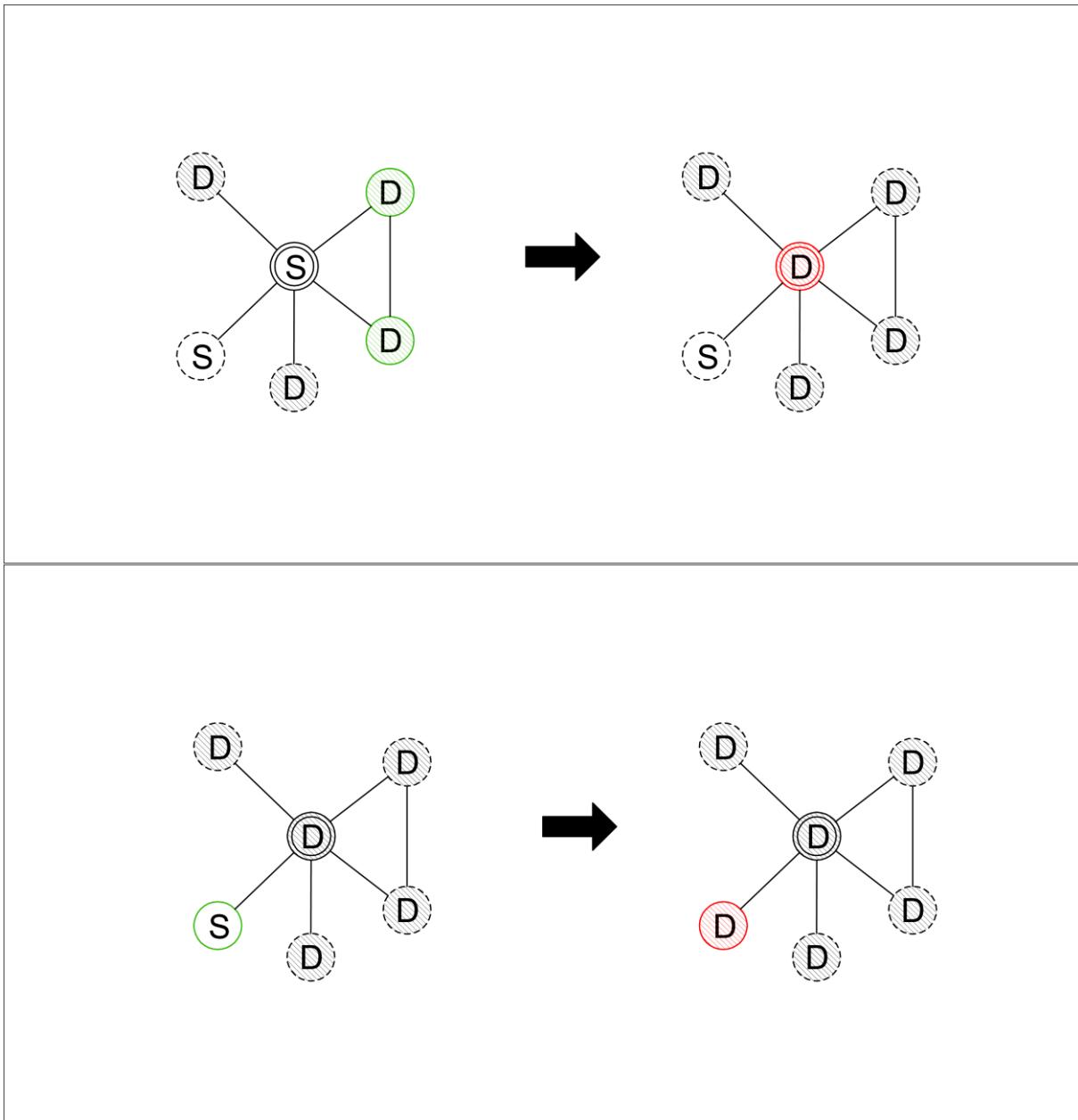
Ta implementacja pozwoliłaby na konkurencję ze strony procesu S, jednakże algorytm znacznie różni się od obecnie zaimplementowanej konkurencji procesów opartych na regułach przejść modelu Sznajdów i inwazji: nie jest podejmowana żadna akcja po wylosowaniu węzła typu S, decyzja czy zastosować reguły modelu Sznajdów czy wyborcy podejmowana by była arbitralnie w drugim kroku. Często bowiem spełnione są oba warunki reguł przejść jednocześnie i nie jest jasne którą regułę należałoby zastosować.

9.2 Konkurencja procesów o regułach opartych na modelu „z sąsiedztwem” i modelu inwazji

Również sprawdzono dwie możliwości implementacji konkurencji procesu o regułach przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” z procesem o regułach przejść opartych na modelu inwazji.

Pierwszy algorytm (ilustrowany przez Rysunek 9-4) przedstawałby się następująco:

- Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D. Jeżeli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D (zgodnie z istniejącą już implementacją reguł modelu „z sąsiedztwem”).
- Jeżeli został wylosowany węzeł typu D, to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S. Jeżeli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ sąsiadującego węzła z S na D.



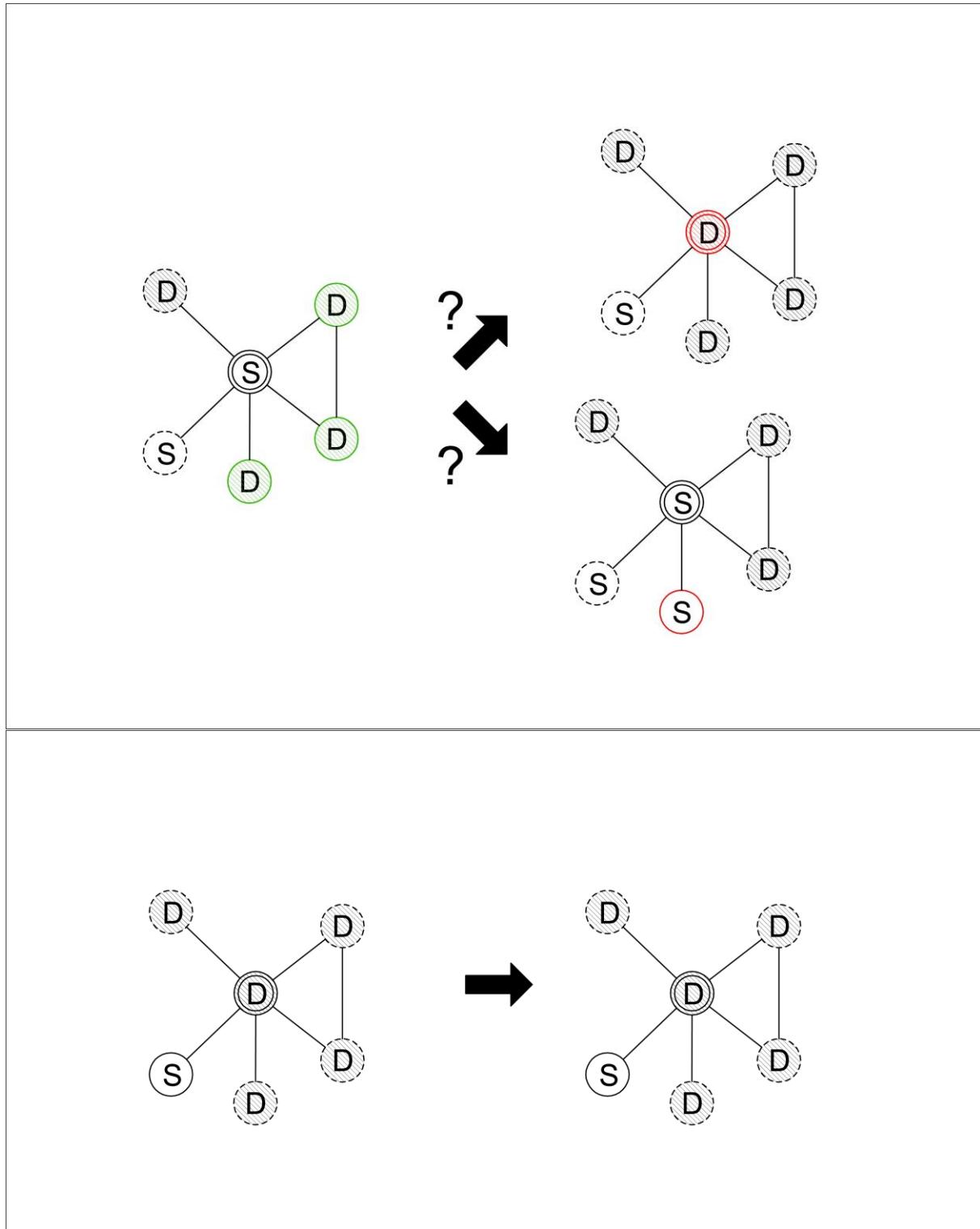
Rysunek 9-4. Ilustracja reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół). Górnny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D (oznaczonych kolorem zielonym). Jeżeli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D (kolor czerwony). Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu S (oznaczony kolorem zielonym). Jeżeli tak, to z zadanym prawdopodobieństwem zmieniany jest typ sąsiadującego węzła z S na D (kolor czerwony).

Niestety powyższa implementacja nie pozwoliłaby na jakikolwiek konkurencję ze strony procesu S, ponieważ udział węzłów S w sieci byłby co najwyżej nierosnącą funkcją czasu.

Alternatywny algorytm, umożliwiający konkurencję ze strony procesu S, przedstawałby się następująco (Rysunek 9-5):

- Jeżeli został wylosowany węzeł typu S, to sprawdzane jest:

- i. czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D. Jeśli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D.
- ii. czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D. Jeśli tak, to typ sąsiada zostaje zmieniony na S.
- Jeżeli został wylosowany węzeł typu D — niepodejmowana jest żadna akcja.



Rysunek 9-5. Ilustracja alternatywnych reguł przejść współzawodniczących procesów kontaktowych, aplikowanych gdy został wylosowany węzeł typu S (góra) lub węzeł typu D (dół). Górnny rysunek:

Jeżeli został wylosowany węzeł typu S (wyróżniony podwójnym obramowaniem), to sprawdzane jest: czy ma dwóch wzajemnie połączonych sąsiadów typu D (oznaczone kolorem zielonym). Jeśli tak, to zmieniany jest typ tego węzła z S na D (kolor czerwony); czy ma przynajmniej jednego sąsiada typu D (oznaczony kolorem zielonym). Jeśli tak, to typ sąsiada zostaje zmieniony na S (kolor czerwony). Dolny rysunek: Jeżeli został wylosowany węzeł typu D (wyróżniony podwójnym obramowaniem) — niepodejmowana jest żadna akcja.

Niestety powyższy algorytm bardzo odbiega od obecnie zaimplementowanej konkurencji procesów opartych na regułach przejść modelu „z sąsiedztwem” i wyborcy. Podstawowymi różnicami są brak podjęcia jakiejkolwiek akcji po wylosowaniu węzła typu D oraz niejednoznaczność reguł, które miały być zastosowane po wylosowaniu węzła typu S – nie wiadomo czy zastosować wtedy reguły modelu „z sąsiedztwem” czy inwazji.

Konkluzje

Algorytmy opisane w rozdziałach 9.1 oraz 9.2 pokazują, że możliwe jest zaimplementowanie współzawodnictwa procesu o regułach przejść opartych na modelu Sznajdów z procesem o regułach przejść inspirowanych modelem wyborcy oraz procesu o regułach przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” z procesem opartym na modelu inwazji.

Niestety ich skomplikowanie oraz znaczące różnice między nimi a obecnie zaimplementowanymi algorytmami współzawodnictwa procesu o regułach przejść opartych na modelu Sznajdów z procesem o regułach przejść bazujących na modelu inwazji oraz procesu o regułach przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” z procesem inspirowanym regułami modelu wyborcy, powodują że niemożliwe jest znalezienie odpowiedzi na pytanie co jest źródłem różnic pomiędzy wynikami dla modelu „z sąsiedztwem” i modelu Sznajdów na sieci Watts-Strogatza, opisanych w niniejszym rozdziale: reguły procesu D czy reguły procesu konkurencyjnego S.

10 Podsumowanie

W rozprawie badano dynamikę konkurencyjnych procesów kontaktowych na sieciach złożonych, zarówno w kontekście topologii tych sieci jak i reguł przejść pomiędzy stanami węzłów sieci dla poszczególnych procesów kontaktowych.

Zostały zbadane dwa modele reguł przejść: bazujące na modelu Sznajdów i modelu „z sąsiedztwem”.

Reguły przejść oparte na modelu Sznajdów zbadano na sieciach Wattsa-Strogatza i Albert-Barabásiego, natomiast modelu „z sąsiedztwem” na sieciach Erdősa-Rényiego oraz Wattsa-Strogatza. W obu przypadkach, reguły przejść powodowały zmianę stanu węzła bądź węzłów sieci ze stanu S na stan D.

Procesy kontaktowe, których dynamika została zdefiniowana na podstawie powyższych modeli, współzawodniczyły z procesem, którego dynamika opiera się na prostych regułach modelu wyborcy bądź modelu inwazji. Reguły przejść tego procesu powodowały zmianę stanu wylosowanego (bądź sąsiada wylosowanego węzła) węzła sieci z D na S.

Początkowym etapem pracy było przygotowanie sieci o szerokim spektrum wartości współczynnika gronowania, ponieważ badanie wpływu tego współczynnika na dynamikę procesów kontaktowych było istotnym punktem niniejszej rozprawy. Współczynniki gronowania sieci Erdősa-Rényiego oraz Albert-Barabásiego są bliskie zeru, zaś dla sieci regularnej Wattsa-Strogatza możliwa jest tylko jedna wartość tego współczynnika wynosząca 0,5. Konieczne stało się więc sięgnięcie po algorytmy pozwalające na sterowanie współczynnikiem gronowania dla poszczególnych sieci.

Pojawiło się zatem pytanie, jak sterowanie tym współczynnikiem wpłynie na inne charakterystyki sieci, jak np. rozkład stopni wierzchołków.

Sprawdzono, że wygenerowana na podstawie algorytmu zaproponowanego w publikacji Holme'a [7] sieć Albert-Barabásiego, zachowuje charakterystyki sieci bezskalowej, takie jak rozkład stopni wierzchołków w sieci.

Zostało również sprawdzone, że dla sieci Wattsa-Strogatza zwiększenie prawdopodobieństwa przełączania połączeń między wierzchołkami sieci regularnej o współczynniku gronowania równym 0,5, powoduje zmniejszanie się współczynnika gronowania do zera. W granicznym przypadku rozkład stopni wierzchołków znacznie przełączonej sieci praktycznie przypomina rozkład stopni wierzchołków sieci Erdősa-Rényiego.

Sprawdzono również, że zaaplikowanie algorytmu zwiększania współczynnika gronowania sieci Erdősa-Rényiego powoduje zmianę charakterystyki sieci: następuje zwiększenie średniego stopnia wierzchołka sieci oraz zmiana rozkładu stopni wierzchołków, który przestaje być poissonowski.

Jedno z podstawowych pytań jakie zostały postawione w pracy badawczej dotyczyło wpływu danego modelu reguł przejść jak i typu sieci na charakterystyki przebiegów czasowych udziału węzłów typu S w sieci. Zostało sprawdzone, że w zależności od wyboru modelu reguł przejść, czas dojścia układu do stanu stacjonarnego dla większości konfiguracji pozostałych parametrów symulacji (prawdopodobieństwa p przejść między stanami, współczynnik gronowania C , początkowy udział węzłów typu S w sieci n^0_S) dla modelu „z sąsiedztwem” jest kilkakrotnie dłuższy niż dla modelu Sznajdów. Dla tego drugiego, w większości przypadków, zarówno dla sieci Wattsza-Strogatza jak i Albert-Barabásiego, ilość kroków czasowych potrzebna do osiągnięcia stanu stacjonarnego wynosiła nie więcej niż 500 kroków czasowych, podczas gdy dla modelu „z sąsiedztwem” było to już 25000 kroków a i tak dla pewnej liczby konfiguracji parametrów symulacji na sieci Wattsza-Strogatza okazało się to czasem niewystarczającym.

Analiza pojedynczych przebiegów czasowych ujawniła zasadniczą różnicę pomiędzy porównywanyymi modelami. W przypadku modelu Sznajdów, zarówno dla sieci Wattsza-Strogatza jak i Albert-Barabásiego zostało zaobserwowane, że pojedyncze przebiegi czasowe kończą się albo udziałem węzłów S w sieci bliskim zeru, albo 100% udziałem tych węzłów w sieci. Nie jest to obserwowane dla modelu „z sąsiedztwem” zbadanego na sieciach Erdős-Rényiego i Wattsza-Strogatza: tutaj pojedyncze przebiegi czasowe przypominają bardzo wyglądem przebiegi uśrednione – w tym przypadku polepszenie statystyki powoduje jedynie „wygładzenie” krzywych na wykresie.

Postawiono również za cel zbadanie charakterystyki zależności końcowego udziału węzłów danego typu w sieci od początkowego udziału tych węzłów. W przypadku zastosowania reguł modelu „z sąsiedztwem”, zarówno dla sieci Erdős-Rényiego jak i Wattsza-Strogatza w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji obserwowany był brak zależności końcowego udziału węzłów typu S od udziału początkowego tych węzłów. Wyjątkiem był przypadek dla nieprzełączonej sieci Wattsza-Strogatza zawierającej 95% węzłów typu S w chwili początkowej, przy zdefiniowanym prawdopodobieństwie procesu S wynoszącym 0,1. Odróżniał się on od pozostałych niezerową wartością udziału węzłów S w chwili końcowej, co wynikało z występowania stanów absorbujących S ($n^T_S = 1$), spowodowanych bardzo dużym początkowym udziałem tych węzłów w sieci $n^0_S \approx 1$.

Przeciwne wyniki zostały otrzymane przy zastosowaniu reguł przejść na podstawie modelu Sznajdów – tutaj zarówno dla sieci Wattsza-Strogatza jak i Albert-Barabásiego, w sprawdzonym zakresie początkowych parametrów symulacji, obserwowana była zależność końcowego udziału n^T_S węzłów typu S od początkowego udziału n^0_S tych węzłów.

W przypadku zaobserwowania istnienia zależności końcowego udziału węzłów danego typu w sieci od początkowego udziału tych węzłów dla przypadku zastosowania reguł przejść zdefiniowanych na podstawie modelu Sznajdów, kolejnym celem było zbadanie charakterystyki zależności udziału węzłów typu S n^*_S w sieci od wielkości tej sieci.

Sprawdzono, że dla sieci Wattsza-Strogatza wartość n^*_S , nie zależy od rozmiaru sieci. Natomiast dla sieci Albert-Barabásiego zostało sprawdzone, że dla ustalonej pary parametrów:

współczynnika gronowania C oraz prawdopodobieństwa p procesu D, wartości n_s^* rosną wraz ze wzrostem rozmiaru sieci. To oznacza, że ze wzrostem rozmiaru sieci rośnie dominacja procesu dwuwęzłowego D i dominacja procesu S miałaby miejsce tylko wtedy gdyby udział węzłów S w chwili początkowej wynosiłby 100%.

W niniejszej rozprawie postawiono również pytanie o charakterystyki fazowe układu — a mianowicie czy można zaobserwować fazy dominacji węzłów poszczególnych typów w sieci w zależności od wartości parametrów symulacji, takich jak prawdopodobieństwa przejść między stanami węzłów oraz współczynnik gronowania sieci.

W przypadku reguł przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” na sieci Wattsa-Strogatza, zbadano charakterystyki n_s^* w przestrzeni parametrów (p, C). Zostały zaobserwowane dwie fazy: faza niestacjonarna oraz faza stacjonarna, w której dominują węzły typu S. Taki podział nie został natomiast zaobserwowany dla sieci Erdősa-Rényiego — wszystkie przebiegi czasowe kończyły się osiągnięciem stanu stacjonarnego. Nie można jednak wykluczyć, że ustalone maksymalne czasy symulacji nie były wystarczające do osiągnięcia stanu stacjonarnego dla sieci Wattsa-Strogatza i przy dłuższym czasie obliczeń faza niestacjonarna ewoluowałaby w fazę stacjonarną S.

Natomiast dla reguł przejść opartych na modelu Sznajdów, w związku z brakiem zależności n_s^* od rozmiaru sieci, zasadnym było zbadanie charakterystyk fazowych n_s^* w przestrzeni parametrów p oraz C dla sieci Wattsa-Strogatza. Zaobserwowano fazy dominacji procesu S oraz fazy dominacji procesu D. Wartości n_s^* rosły wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa p procesu D, natomiast nie została zaobserwowana bezpośrednia zależność od współczynnika gronowania C .

Istotną obserwacją płynącą z przeprowadzonych badań, był wpływ innych właściwości sieci na dynamikę procesów kontaktowych dla reguł przejść opartych na modelu Sznajdów a innych dla reguł przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem”.

W przypadku tego pierwszego decydujący okazał się wpływ średniego stopnia pary węzłów sieci. Dla sieci Albert-Barabásiego został zaobserwowany efekt wzrostu n_s^* wraz ze wzrostem wielkości sieci wynikający z tego, że wraz ze wzrostem rozmiaru sieci rośnie średnia ilość sąsiadów pary węzłów. Zgodnie z założeniami modelu reguł przejść, wzmacnia to proces dwuwęzłowy D, wymagający właśnie jak największej liczby sąsiadów pary D-D aby się rozprzestrzenić w sieci. Taka zależność nie została zaobserwowana dla sieci Wattsa-Strogatza co tłumaczy stałą wartość n_s^* dla sieci o różnych rozmiarach.

Natomiast w przypadku reguł przejść opartych na modelu „z sąsiedztwem” został zaobserwowany wzrost udziału węzłów typu D i wiążący się z tym spadek udziału węzłów typu S n_s^* w chwili końcowej wraz ze wzrostem współczynnika gronowania. Jest to zgodne z oczekiwaniami – duży współczynnik gronowania sprzyja procesowi dwuwęzłowemu D, który do aktywacji wymaga par wzbogacających połączonych węzłów typu D.

Dodatkowo został zaobserwowany wpływ średniego stopnia wierzchołka na czas dojścia do stanu stacjonarnego. Dla sieci Erdősa-Rényiego o różnych wartościach średniego stopnia wierzchołka (cztery oraz dziesięć) zaobserwowano, że czas ten maleje wraz ze wzrostem tego

parametru. Sugeruje to, że faza niestacjonarna obserwowana dla sieci Wattsa-Strogatza o średnim stopniu wierzchołka równym cztery, wynika z niewystarczającego czasu symulacji dla tak małej wartości tego stopnia.

Z interpretacją wyników w tym przypadku wiąże się podstawowy problem, z którym muszą zmierzyć się badacze procesów kontaktowych, a mianowicie kwestię nieredukowalności obliczeniowej [47]. Powoduje to, że symulacje tego typu procesów wymagają znacznych zasobów czasowych i niemożliwe jest pójście „na skróty” — za każdym razem symulacja dla ustalonego zestawu parametrów musi zostać przeprowadzona od początku i przejść wszystkie wymagane kroki czasowe. Wymusza to pójście na kompromis pomiędzy czasami poświęconymi na symulacje a kompletnością wyników i powoduje konieczność pisania o niektórych wnioskach w trybie przypuszczającym.

W ramach podsumowania podajemy najważniejsze wyniki pracy w formie tabeli.

Konkurujące procesy	Sieć	Wnioski
<ul style="list-style-type: none"> Dynamika modelu Sznajdów Dynamika modelu inwazji 	Wattsa-Strogatza	<ul style="list-style-type: none"> istnienie zależności końcowego od początkowego udziału węzłów S n_S^* nie zależy od rozmiaru sieci n_S^* rośnie ze wzrostem prawdopodobieństwa procesu D
<ul style="list-style-type: none"> Dynamika modelu Sznajdów Dynamika modelu inwazji 	Albert-Barabásiego	<ul style="list-style-type: none"> istnienie zależności końcowego od początkowego udziału węzłów S n_S^* rośnie ze wzrostem rozmiaru sieci (dąży do jedności w granicy termodynamicznej) -> bo średnia liczba sąsiadów pary rośnie z wielkością sieci n_S^* rośnie ze wzrostem prawdopodobieństwa procesu D
<ul style="list-style-type: none"> Dynamika modelu „z sąsiedztwem” Dynamika inspirowana modelem wyborcy 	Erdős-Rényiego	<ul style="list-style-type: none"> brak zależności końcowego od początkowego udziału węzłów S stan stacjonarny osiągany za każdym razem końcowy udział węzłów S rośnie ze wzrostem prawdopodobieństwa procesu S i maleje ze wzrostem wsp. gronowania
<ul style="list-style-type: none"> Dynamika modelu „z sąsiedztwem” Dynamika inspirowana modelem wyborcy 	Wattsa-Strogatza	<ul style="list-style-type: none"> brak zależności końcowego od początkowego udziału węzłów S obserwowana faza stacjonarna i niestacjonarna – wymagane bardzo długie czasy symulacji końcowy udział węzłów S rośnie ze wzrostem prawdopodobieństwa procesu S i maleje ze wzrostem wsp. gronowania

Tabela 10-1. Zestawienie najważniejszych wniosków niniejszej pracy.

Bibliografia

1. R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN (Warszawa, 2002).
2. T.H. Cormen, *Wprowadzenie do algorytmów*, WNTW (Warszawa, 2005).
3. A.-L. Barabási, Z. N. Oltvai, *Network biology: understanding the cell's functional organization*, Nat. Rev. Genet. **5** (2): 101-113 (2004).
4. A.-L. Barabási, E. Bonabeau, *Scale-free networks*, Scientific American **288** (5): 50-59 (2003).
5. A.-L. Barabási, *From the topology of the www to the cell's genetic network*, 16th Annual Meeting of Academia Europaea: Europein Change, Helsinki, Finland (September 2004).
6. D. Stauffer, A.O. Sousa, *Discretized opinion dynamics of Deffuant on scale-free networks*, J. Artif. Soc. Soc. Simulat. **7** (3), 7 (2004).
7. P. Holme, B. J. Kim, *Growing scale-free networks with tunable clustering*, Phys. Rev. E **65** (2): 026107 (2002).
8. R. Ross, *An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Part I*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **92**: 204-230 (1916).
9. R. Ross, H. P. Hudson, *An application of the theory of probabilities to the study of a priori pathometry. Parts II and III*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **93**: 212-240 (1917).
10. J. Brownlee, *An investigation into the periodicity of measles epidemics in London from 1703 to the present day by the method of the periodogram*, Philos. Trans. Roy. Soc. London B **208**: 225-250 (1918).
11. R. M. Ziff, E. Gulari, Y. Barshad, *Kinetic phase transitions in an irreversible surface-reaction model*, Phys. Rev. Lett. **56** (24): 2553-2556 (1986).
12. K. Nagel, M. Schreckenberg, *A cellular automaton model for freeway traffic*, J. Phys. I France **2** (12): 2221-2229 (1992).
13. K. Nagel, H. J. Herrmann, *Deterministic models for traffic jams*, Physica A **199** (2): 254-269 (1993).
14. T. E. Harris, *Contact interactions on a lattice*, Ann. Prob. **2** (6): 969-988 (1974).
15. P. Grassberger, *On the critical behavior of a general epidemic process and dynamic percolation*, Math. Biosci. **63** (2): 157-172 (1983).
16. R. M. Anderson, R. M. May, *Infectious diseases of humans: Dynamics and control*, Oxford University Press (Oxford, 1991).
17. H. W. Hethcote, *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Rev. **42** (4): 599-653 (2000).
18. A. Gautreau, A. Barrat, M. Barthélemy, *Global disease spread: statistics and estimation of arrival times*, J. Theor. Biol. **251** (3): 509-522 (2008).
19. S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, *Critical phenomena in complex networks*, Rev. Mod. Phys. **80** (4): 1275-1335 (2008).
20. S. Parongama, B.K. Chakrabarti, *Sociophysics: An introduction*, Oxford University Press (Oxford, 2013).

21. W. O. Kermack, A. G. McKendrick, *A Contribution to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **115**: 700-721 (1927).
22. S. P. Hubbell, *The unified neutral theory of biodiversity and biogeography*, Princeton University Press (Princeton, 2001).
23. P. Barkham, C. E. Hance, *Population dynamics of the wild daffodil (narcissus pseudonarcissus): III. implications of a computer model of 1000 years of population change*, J. Ecol. **70** (1): 323-344 (1982).
24. E. McCauley, W. G. Wilson, A. M. De Roos, *Dynamics of age-structured and spatially structured predator-prey interactions individual-based models and population-level formulations*, Am. Nat. **142** (3): 412-442 (1993).
25. B. Chopard, M. Droz, *Cellular automata modelling of physical systems*, Cambridge University Press (New York, 1998).
26. J. Marro, R. Dickman, *Nonequilibrium phase transitions in lattice models*, Cambridge University Press (New York, 2005).
27. I. Jensen, H. Fogedby, R. Dickman, *Critical exponents for an irreversible surface reaction model*, Phys. Rev. A **41** (6): 3411-3414 (1990).
28. M. Henkel, H. Hinrichsen, S. Lübeck, *Non-equilibrium phase transitions: Volume 1: Absorbing phase transitions*, Springer (New York, 2008).
29. C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, *Statistical physics of social dynamics*, Rev. Mod. Phys. **81** (2): 591-646 (2009).
30. W. Goffman, V. A. Newill, *Generalization of epidemic theory: An application to the transmission of ideas*, Nature **204** (495): 225-228 (1964).
31. K. Malarz, Z.Szvetelszky, B.Szekfu, K.Kułakowski, Gossip in random networks, Acta Phys. Pol. B **37** (11): 3049 (2006)
32. G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. Compl. Sys. **3** (1-4): 87-98 (2000).
33. R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation*, J. Artif. Soc. Soc. Simulat. **5** (3): 2 (2002).
34. B. J. Prettejohn, M. D. McDonnell, *Collaborative Agents - Research and Development: International Workshops*, Springer Berlin Heidelberg (Berlin, 2011).
35. D. Denteneer, F. Hollander, E. Verbitskiy, *Dynamics & stochastics*, IMS (Beachwood, 2006).
36. S.P. Obukhov, *The problem of directed percolation*, Physica A **101** (1): 145-155 (1980).
37. T. M. Liggett, *Interacting particle systems*, Springer (New York, 1985).
38. P. Grassberger, A. De La Torre, *Reggeon field theory (Schlögl's first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour*, Ann. Phys. **122** (2): 373-396 (1979).
39. R. Dickman, I. Jensen, *Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models*, Phys. Rev. Lett. **67** (17): 2391-2394 (1991).
40. R. C. Brower, M. A. Furman, M. Moshe, *Critical exponents for the reggeon quantum spin model*, Phys. Lett. B **76** (2): 213-219 (May 1978).

41. I. Jensen, R. Dickman, *Time-dependent perturbation theory for nonequilibrium lattice models*, J. Stat. Phys. **71** (1-2): 89-127 (1993).
42. I. Jensen, *Low-density series expansions for directed percolation on square and triangular lattices*, J. Phys. A **29** (22): 7013-7040 (1996).
43. P. Grassberger, *Directed percolation in 2+1 dimensions*, J. Phys. A **22** (17): 3673-3679 (1989).
44. J. Adler, J. Berger, J. A. M. S. Duarte, Y. Meir, *Directed percolation in 3+1 dimensions*, Phys. Rev. B **37** (13): 7529-7533 (1988).
45. K. Kułakowski, *Automaty komórkowe*, OEN AGH (Kraków, 2000).
46. G. A. Kohring, M. Schreckenberg, *The Domany-Kinzel cellular automaton revisited*, J. Phys. I **2** (11): 2033-2037 (1992).
47. S. Wolfram, *Undecidability and intractability in theoretical physics*, Phys. Rev. Lett. **54** (8): 735-738 (1985).
48. S. Wolfram, *Computer software in science and mathematics*, Scientific American **251** (3): 188-203 (1984).
49. A. Kemper, A. Schadschneider, J. Zittartz, *Transfer-matrix density-matrix renormalization group for stochastic models: the Domany-Kinzel cellular automaton*, J. Phys. A **34** (19): 279-287 (2001).
50. P. L. Krapivsky, S. Redner, E. Ben-Naim, *A kinetic view of statistical physics*, Cambridge University Press (New York, 2010).
51. D. Stauffer, A biased review of sociophysics, J. Stat. Phys. **151** (1-2): 9-20 (2013).
52. C. Castellano, M. A. Muñoz, R. Pastor-Satorras, *Non-linear q-voter model*, Phys. Rev. E **80** (4): 041129 (2009).
53. T. Hadzibeganovic, D. Stauffer, C. Schulze, *Boundary effects in a three-state modified voter model for languages*, Physica A **387** (13): 3242-3252 (2008).
54. V. Sood, T. Antal, S. Redner, *Voter models on heterogeneous networks*, Phys. Rev. E **77** (4): 041121 (2008).
55. C. Castellano, *Modeling Cooperative Behavior in the Social Sciences*, AIP Conf. Proc. **779**, American Institute of Physics (New York, 2005).
56. K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, *Opinion evolution in closed community*, Int. J. Mod. Phys. C **11** (6): 1157-1165 (2000).
57. K. Sznajd-Weron, *Sznajd model and its applications*, Acta. Phys. Pol. B **36** (8): 2537-2547 (2005).
58. J. Sanchez, *A modified one-dimensional Sznajd model*, eprint arXiv:cond-mat/0408518 (2004).
59. D. Stauffer, *Sociophysics: the Sznajd model and its applications*, Comput. Phys. Commun. **146** (1): 93-98 (2002).
60. D. Stauffer, A. O. Sousa, S. Moss de Oliveira, *Generalization to square lattice of Sznajd sociophysics model*, Int. J. Mod. Phys. C **11** (6): 1239-1245 (2000).

61. <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/>
62. M. Matsumoto, T. Nishimura, *Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator*, ACM Trans. Model. Comput. Simul. **8** (1): 3-30 (1998).
63. G. Marsaglia, *The Marsaglia Random Number CDROM including the Diehard Battery of Tests of Randomness*, Department of Statistics, Florida State University (Tallahassee, 1995).
64. M. Matsumoto, T. Nishimura, *Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator*, ACM Trans. Model. Comput. Simul. **8** (1): 3-30 (1998).
65. P. L'Ecuyer, R. Simard, *TestU01: A C library for empirical testing of random number generators*, ACM Trans. Math. Softw. **33** (4) Art. 22 (2007).
66. M. Rybak, K. Kułakowski, *Competing of Sznajd and voter dynamics in the Watts-Strogatz network*, Acta. Phys. Pol. B **44** (5): 1007 (2013).
67. M. Rybak, K. Malarz, K. Kułakowski, *Competing contact processes in the Watts-Strogatz network*, Eur. Phys. J. B **89** (6): 145 (2016).
68. A. Mańka, K. Malarz and K. Kułakowski, *Clusterization, frustration and collectivity in random networks*, Int. J. Mod. Phys. C **18** (11): 1765-1733 (2007).
69. C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, Springer-Verlag (Berlin, 1985).
70. M. Rybak, K. Kułakowski, *Competing contact processes on homogeneous networks with tunable clusterization*, Int. J. Mod. Phys. C **24** (3): 1350012 (2013).
Errata: **27** (5): 1692002 (2016).