Ejercicio 2

1. Sea el siguiente PPL estándar con X_3 y X_4 como variables de holgura

   Máx $Z = 5X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4$

(Maximización de beneficios)

$$
\begin{array}{llll}
\text{s.a.:} & 3X_1 + 2X_2 + X_3 = 120 & & \text{(Insumo 1)} \\
 & 4X_1 + 6X_2 + X_4 = 260 & & \text{(Insumo 2)} \\
 & X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \geq 0 & & \text{(Restricciones de signo)}
\end{array}
$$

El cual tiene el siguiente tabla óptima:

Base	**Z**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**LD**
Z	1	0	0	3/5	4/5	280
X_1	0	1	0	3/5	- 1/5	20
X_2	0	0	1	- 2/5	3/10	30

Según el cual debieran producirse 20 unidades del bien A y 30 unidades del bien B, con un beneficio de $280 y sin que exista sobrante de los insumos 1 y 2.

Resultado Solver

x1	x2	Z	
20	30	280	
5	6		
3	2	120	120
4	6	260	260

Resultado PHP Simplex

Tabla 1			5	6	0	0
Base	**C_b**	**P_0**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**P_4**
P_1	5	20	1	0	0.6	-0.2
P_2	6	30	0	1	-0.4	0.3
Z		280	0	0	0.6	0.8

Análisis de sensibilidad con Solver

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
A4	X1	20	0	5	4	1
B4	X2	30	0	6	1.5	2.666666667

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C8	Z	120	0.6	120	75	33.33333333
C9	Z	260	0.8	260	100	100

Se Pide:

a. Combinación óptima de la producción, si se dispusiese de 80 unidades adicionales del insumo 1 y de 20 unidades adicionales del insumo 2

- insumo 1 = 120 + 80 = 200
- insumo 2 = 260 + 20 = 280

Verificación de la factibilidad

$$(A_J)^{-1} \times b'$$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 4 \end{pmatrix} > 0 \text{ (factible)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 64 \\ 4 \end{pmatrix} = 344$$

$\{X_1, X_2\}$

$$B = \begin{pmatrix} 200 \\ 280 \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = A_j^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

$$A_j^{-1} B = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 - 56 \\ -80 + 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Factible}$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z	1	0	0	3/5	4/5	344
X_1	0	1	0	3/5	-1/5	64
X_2	0	0	1	-2/5	3/10	4

$$Z = 5.(64) + 6.(4) = 344$$

Respuesta

X1	X2	Z
64	4	344

0.60	-0.20	x	200	=	64	>	0
-0.40	0.30		280		4		factible
5	6	x	64	=	344		
			4				

X1	X2	Z
64	4	344

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
A4	X1	20	0	5	4	1
B4	X2	30	0	6	1.5	2.666666667

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
C8	Z	120	0.6	120	75	33.33333333
C9	Z	260	0.8	260	100	100

Comprobación :

Table 3	C_j	5	6	0	0	
C_b	Base	X_1	X_2	S_1	S_2	R
5	X_1	1	0	3/5	-1/5	64
6	X_2	0	1	-2/5	3/10	4
	Z	0	0	3/5	4/5	344

ECONÓMICAMENTE : Económicamente le conviene a la empresa que los insumos aumentan porque por cada unidad del insumo 1 que aumente se ganan 0.6$ y por cada unidad que el insumo 2 aumente se ganan 0.8$. Por ende si los insumos 1 y 2 se aumentan a 200 y 280 respectivamente los beneficios son de 344$

b. Determinar en cuánto podría variar la disponibilidad de insumo 2, sin que dejase de convenir la producción conjunta del bien A y del bien B

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir		min	max
D17	Z insumo1	120	0.6	120	75	33.3333333		86.6666667	153.333333
D18	Z insumo2	260	0.8	260	100	100		160	360

260		100	100
		160	360

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 260+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha+100}{5} \\ \frac{3\alpha+300}{10} \end{pmatrix}$$

-100 <= α-260 <= 100

160 <= α <= 360

Según la tabla de análisis de sensibilidad de solver se puede decir que la disponibilidad del insumo 2 actual es de 260, sin embargo puede aumentar en 100 unidades su capacidad, lo significa que la nueva capacidad sería de 360, del mismo modo la capacidad se puede disminuir en 100 unidades, siendo la nueva capacidad 160 unidades del insumo 2.

c. **Combinación óptima de la producción, si la contribución unitaria al beneficio del bien A aumentase a $10 y la contribución unitaria al beneficio del bien B aumentase a $8**

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir		min	max
B11	X1	20	0	5	4	1		4	9
C11	X2	30	0	6	1.5	2.66666667		3.33333333	7.5

10	8	x	0.60	-0.20	=	2.80	0.40
			-0.40	0.30			
0	0	-	2.80	0.40	=	-2.80	-0.40
						Se mantiene la optimalidad	

X1	X2	Z
10	8	440

I	$B^{-1}D$	$B^{-1}b$
0	$C_D^{\ T} - C_B^{\ T} B^{-1} D$	$-C_B^{\ T} B^{-1} b$

$$\bar{r}_D = \bar{C}_D - C_B^T B^{-1} D \geq 0$$

$$\bar{r}_D = \begin{array}{c} \quad x_3 \quad x_4 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} \quad x_1 \quad x_2 \\ \begin{pmatrix} -10 & -8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \quad X_3 \qquad X_4 \\ \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -2/5 & 3/10 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 + \frac{16}{5} & 2 - \frac{24}{10} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -\frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	LD
Z		1	0	14/5	2/5	440
x_1		0	1	3/5	-1/5	20
x_2		0	6	-2/5	3/10	30

$$Z = 10 \cdot (20) + 8(30) = 440$$ ✓

Z= 440

$x1 = 20$
$X2 = 30$

Se mantiene la optimalidad, por lo que no varía la base óptima, aunque sí varía el valor de la función objetivo

ECONÓMICAMENTE : Por lo tanto modificando las utilidades de los productos, la cantidad de productos a producir no varía, pero sus utilidades si aumentando hasta 440