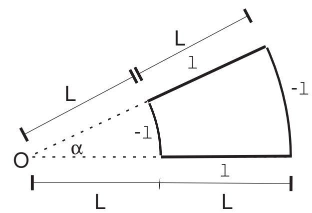
UNIVERSIDAD ADOLFO IBAÑEZ

Curso: Electromagnetismo Nombre:____________________________
Fecha: 27 de Marzo de 2012.
Tiempo: 1,5 horas.

# Solución Prueba #1

## Problema #1

El alambre de la figura está formado por dos segmentos rectilíneos de longitud $L$ y por dos arcos de circunferencia con centro en $O$. Los segmentos rectilíneos tienen una densidad lineal de carga $\lambda$ constante, en cambio, los segmentos circulares tienen una densidad de carga lineal y constante de valor $-\lambda$.¿Para qué valor del ángulo $\alpha$, el campo eléctrico es nulo en el centro $O$?




Solución
Calculemos el campo en el origen generado por las 4 secciones de alambre.

$$\vec{E}_1: \qquad \vec{r}=0 \quad \vec{r'}=x\hat{i} \quad L\leq x\leq 2L \quad dq=-\lambda dx$$

$$\vec{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L^{2L}\frac{(-x\hat{i})(-\lambda dx)}{x^3}=\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}\hat{i}$$

$$\vec{E}_2: \qquad \vec{r}=0 \quad \vec{r'}=r\hat{r} \quad L\leq r\leq 2L \quad dq=-\lambda dr \quad \hat{r}=\cos\alpha\hat{i}+\sin\alpha\hat{j}$$

$$\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L^{2L}\frac{(-r\hat{r})(-\lambda dr)}{r^3}=\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}\hat{r}=\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}(\cos\alpha\hat{i}+\sin\alpha\hat{j})$$

$$\vec{E}_3: \qquad \vec{r}=0 \quad \vec{r'}=L\hat{r} \quad dq=\lambda L d\theta \quad \hat{r}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{E}_3=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\alpha}\frac{-L(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})}{L^3}\lambda L d\theta=\frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 L}(\sin\alpha\hat{i}+(1-\cos\alpha)\hat{j})$$

$$\vec{E}_4: \qquad \vec{r}=0 \quad \vec{r'}=2L\hat{r} \quad dq=\lambda 2L d\theta \quad \hat{r}=\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{E}_4=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\alpha}\frac{-2L(\cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j})}{(2L)^3}\lambda 2L d\theta=\frac{-\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}(\sin\alpha\hat{i}+(1-\cos\alpha)\hat{j})$$

Finalmente, el campo en el origen es la suma de los 4 campos calculados.

$$\vec{E}_0=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4$$

$$\vec{E}_0=\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 L}[(1-3\sin\alpha+\cos\alpha)\hat{i}+(-3+\sin\alpha+3\cos\alpha)\hat{j}]$$

Debemos buscar $\alpha$ que anule el campo en el origen.

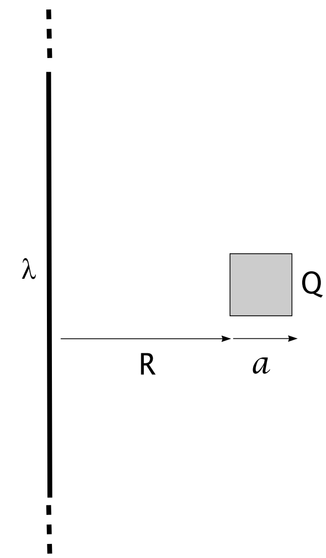
$$1 - 3\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \wedge -3 + \sin\alpha + 3\cos\alpha = 0$$
$$\implies \cos\alpha = \frac{4}{5} \implies \alpha = \arccos(\frac{4}{5})$$

## Problema #2

Considere un alambre infinito con distribución de carga $\lambda > 0$ uniforme. Se sabe que la magnitud del campo eléctrico a una distancia $r$ del alambre es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Si a una distancia $R$ del alambre se coloca una placa cuadrada, de lado $a$, con una carga $Q > 0$, uniformemente distribuida en su superficie. Calcule la fuerza que el alambre ejerce sobre la placa cuadrada. Explicite todos sus supuestos.




Solución

Sea $\sigma = \frac{Q}{a^2}$. Colocando un sistema de coordenadas cartesiano se tiene que la fuerza sobre la placa está dada por:

$$\vec{F} = \int_R^{R+a}\int_0^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{x}\sigma dz dx = \frac{\lambda\sigma}{2\pi\epsilon_0} a \ln(\frac{R+a}{R})\hat{x}$$
$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0 a}\ln(\frac{R+a}{R})\hat{x}$$

## Problema #3

Considere un cilindro circular recto de radio $R$ y altura $L$ cuyo eje coincide con el eje $Z$. El cilindro tiene una carga volumétrica de densidad $\rho = \rho_0 + \beta r$, donde $r$ se mide desde el eje del cilindro. Calcule el campo eléctrico en el eje del cilindro.

Solución

En coordenadas cilíndricas se tiene:

$$\vec{r} = z\hat{z} \qquad \vec{r'} = r\hat{r} + z'\hat{z} \qquad dq' = \rho r dr d\theta dz'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{(-r\hat{r} + (z-z')\hat{z})}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}(\rho_0+\beta r)rdzd\theta dr$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}[\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{(-r^2\hat{r})}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}(\rho_0+\beta r)dzd\theta dr$$

$$+\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^L \frac{(z-z')}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}(\rho_0+\beta r)rdzd\theta dr\hat{z}]$$

Integrando se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0}(\rho_0(\sqrt{R^2+z^2} - |z|) + \frac{\beta z^2}{2}(\frac{R\sqrt{R^2+z^2}}{z^2} + \ln(\frac{\sqrt{R^2+z^2}+R}{|z|})$$

$$+(\rho_0(\sqrt{R^2+(z-L)^2} - |z-L|) + \frac{\beta(z-L)^2}{2}(\frac{R\sqrt{R^2+(z-L)^2}}{(z-L)^2} + \ln(\frac{\sqrt{R^2+(z-L)^2}+R}{|z-L|}))\hat{z}$$