CIRCUITOS DE EULER

Caminho de Euler: caminho que visita cada aresta exatamente uma vez

Circuito de Euler: caminho de Euler que começa e acaba no mesmo vértice

Condições necessárias e suficientes:

Um grafo <u>não dirigido</u> contém um **circuito de Euler** sse

1. é conexo e
2. cada vértice tem grau (número de arestas incidentes) par.

Um grafo <u>não dirigido</u> contém um **caminho de Euler** sse

1. é conexo e
2. todos menos dois vértices têm grau par (estes dois vértices serão os vértices de início e fim do caminho).

> ⚠ Nota:
> Circuito = Caminho + Identificação da origem e do destino
> Circuito mais restrito que Caminho

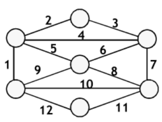
Um grafo <u>dirigido</u> contém um **circuito de Euler** sse

1. é (fortemente) conexo e
2. cada vértice tem o mesmo grau de entrada e de saída.

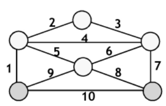
Um grafo <u>dirigido</u> contém um **caminho de Euler** sse

1. é (fortemente) conexo e
2. todos menos dois vértices têm o mesmo grau de entrada e de saída, e os dois vértices têm graus de entrada e de saída que diferem de 1.

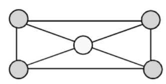
Circuito de Euler



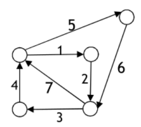
Caminho de Euler



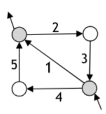
Sem caminho ou circuito de Euler



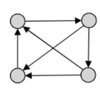
Com circuito de Euler



Com caminho de Euler



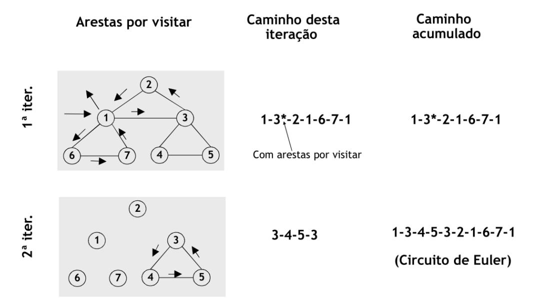
Sem circuito ou caminho de Euler



⋙ Pesquisa Em Profundidade

Se o grafo satisfizer as condições necessárias e suficientes, esta pesquisa termina necessariamente no vértice de partida, formando um circuito, embora não necessariamente de Euler

1. Escolher um vértice qualquer e efetuar uma pesquisa em profundidade a partir desse vértice
2. Enquanto existirem arestas por visitar
    1. Procurar o primeiro vértice no caminho (circuito) obtido até ao momento que possua uma aresta não percorrida
    2. Lançar uma sub-pesquisa em profundidade a partir desse vértice (sem voltar a percorrer arestas já percorridas)
    3. Inserir o resultado (circuito) no caminho principal



> ⚠ Nota:
> Tempo de execução: O(|E| + |V|)
> Cada vértice e aresta é percorrido uma única vez - Usam-se listas ligadas para efetuar inserções em tempo constante

> Problema do carteiro chinês

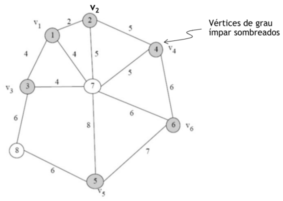
Dado um grafo pesado conexo G=(V,E), encontrar um caminho fechado (i.e., com início e fim no mesmo vértice) de peso mínimo que atravesse cada aresta de G pelo menos uma vez é o **percurso ótimo do carteiro Chinês**. A um caminho fechado (não necessariamente de peso mínimo) que atravesse cada aresta pelo menos uma vez chama-se **percurso do carteiro**.

> ⚠ Nota:
> Se o grafo G não for Euleriano, pode-se construir um grafo Euleriano G* duplicando algumas arestas de G, selecionadas por forma a conseguir um grafo Euleriano com peso total mínimo.

⋙ Grafos Não Dirigidos

1. Achar todos os vértices de grau ímpar em G. Seja k o número (par!) destes vértices. Se k=0, fazer G*=G e saltar para o passo 6.
2. Achar os caminhos mais curtos e distâncias mínimas entre todos os pares de vértices de grau ímpar em G.

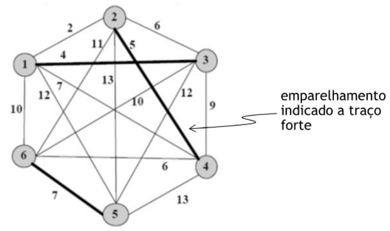
G:



$d(v_i,v_j)$	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	-	2	4	7	12	10
v2		-	6	5	13	11
v3			-	9	12	10
v4				-	13	6
v5					-	7
v6						-

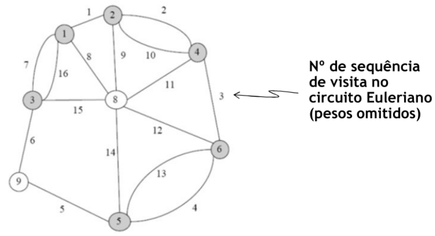
3. Construir um grafo completo G' com os vértices de grau ímpar de G ligados entre si por arestas de peso igual à distância mínima calculada no passo 2.
4. Encontrar um emparelhamento perfeito (envolvendo todos os vértices) de peso mínimo em G'. Isto corresponde a emparelhar os vértices de grau ímpar de G, minimizando a soma das distâncias entre vértices emparelhados.

G':



5. Para cada par (u, v) no emparelhamento perfeito obtido, adicionar pseudo-arestas (arestas paralelas duplicadas) a G ao longo de um caminho mais curto entre u e v. Seja G* o grafo resultante.
6. Achar um circuito de Euler em G*. Este circuito é um percurso ótimo do carteiro Chinês.

G*:

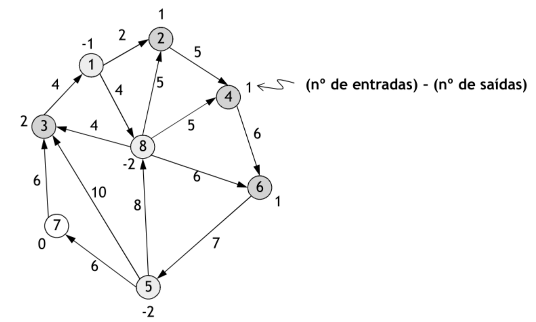


⋙ Grafos Dirigidos

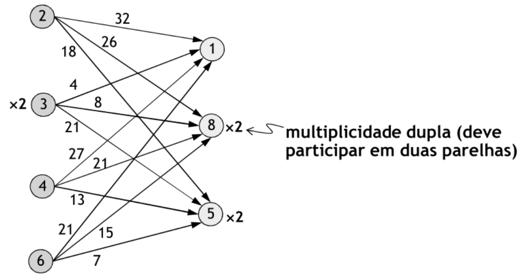
1. No grafo G dado, identificar os vértices com nos diferentes de arestas a entrar e a sair
2. Determinar os caminhos mais curtos de vértices que têm défice de saídas para vértices que têm défice de entradas e representar as distâncias respetivas num grafo bipartido G'.

> ⚠ Nota:
> Os Vértices são anotados com multiplicidade (número de parelhas em que deve participar) igual ao défice absoluto

G:

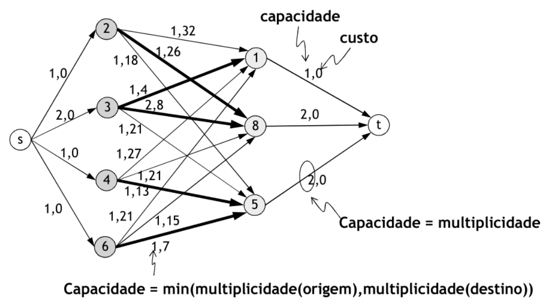


G':



3. Formular problema de emparelhamento óptimo como problema de fluxo máximo de custo mínimo e resolver.

G'':



4. Obter grafo Euleriano G*, duplicando em G os caminhos mais curtos entre os vértices emparelhados no passo 3, e obter um circuito Euleriano.

G*: