Resumo Aula 4 - Algoritmos em Grafos

Vinicius Bernardo Gabriel

14 de Março de 2020

1 Árvore Geradora

Uma árvore geradora de um grafo G é um **subgrafo gerador** que é uma **árvore**.
Lembrando: Árvore é um grafo conexo e aciclico, e subgrafo gerador é um subgrafo contendo todos os vértices do grafo original. **PS**: Grafos desconexos **não possuem árvore geradora** e todo grafo conexo **possui uma árvore geradora.** **PS**^{2}: Um grafo G pode admitir várias árvores geradoras (pois você pode ter ciclos e então você escolhe as arestas que vão ser removidas para formar a árvore geradora).

2 Elos

Seja G um grafo conexo e T_G uma árvore geradora de G, dizemos que as arestas $e \in E(G) - E(T_G)$ são **elos**. Em outras palavras, os elos são arestas que estão no grafo original, mas não estão na árvore geradora. Como G é um grafo qualquer, ele pode ter alguns ciclos, então na árvore geradora precisamos remover esses ciclos, e pra fazer isso temos que remover essas arestas que formam os ciclos, essas arestas removidas são exatamente os elos.

2.1 Ciclos fundamentais

Observe que $T_G + e$ (onde e é um **elo**) possui exatamente um ciclo (pois T_G era aciclico, adicionando mais uma aresta, criamos mais um caminho entre algum par de vértices, criando um ciclo no grafo), chamamos esse ciclo de **ciclo fundamental**.

2.2 Número de ciclos fundamentais

Todo grafo G conexo possui $m-n+1$ ciclos fundamentais. Esse número também é o número de **elos** de G. Como G possui m arestas e n vértices, e que uma árvore geradora de G também tem n vértices[1], essa árvore geradora terá $n-1$ arestas[2]. Sendo assim, teremos $m-(n-1) = m-n+1$ elos[3]. Logo, podemos ter $m-n+1$ ciclos fundamentais (pois cada elo cria um ciclo fundamental).

[1]Uma árvore geradora é um subgrafo gerador, e subgrafo gerador tem o mesmo número de vértices do grafo original, ou seja, se G tem n vértices, seu subgrafo gerador S_G também tem n vértices.
[2]Toda árvore com n vértices possui $n-1$ arestas.
[3]Pra formar uma árvore geradora, precisamos remover os ciclos do grafo G original, portanto, temos que remover arestas. Como o grafo original G tem m arestas e sua árvore geradora tem $n-1$ arestas, nós removemos $m-(n-1)$ arestas.

3 Árvore Enraizada

Uma árvore enraizada é uma **árvore com um vértice destacado chamado de raiz**. Denotamos como T_r uma árvore enraizada no vértice r.

3.1 Nível de um vértice $v \in V(T_r)$

É o **número de vértices do caminho entre** v **e** r (contando as extremidades).

3.2 Altura de T_r

A **altura** de uma árvore T_r enraizada em r é o maior nível de T_r.

3.3 Subárvore enraizada

Dada uma árvore T_r enraizada em r, uma subárvore T_y enraizada em y, onde $y \in V(T_r)$ é uma árvore enraizada em y contendo y e todos os seus **sucessores (ou descendentes)**.

4 Cortes

4.1 De vértices

Seja G um grafo conexo, um corte de vértices é um **subconjunto minimal** S de vértices de G cuja remoção desconecta G. Resumidamente, um corte (de vértices) é um subconjunto minimal de vértices de G que se removidos desconecta G.

4.2 De arestas

Seja G um grafo conexo, um corte de arestas é um **subconjunto minimal** S de arestas de G cuja remoção desconecta G. Resumidamente, um corte (de arestas) é um subconjunto minimal de arestas de G que se removidos desconecta G.

PS: Lembrando que um conjunto é minimal quando a remoção de qualquer elemento faz com que ele perca uma propridade P. Não confundir com mínimo (menor conjunto possível com prop. P)!!

5 Conectividade

5.1 Em vértices

A **conectividade** $c(G)$ em vértices de um grafo G é o **tamanho do seu menor corte de vértices**.

5.2 Em arestas

A **conectividade** $c'(G)$ em arestas de um grafo G é o **tamanho do seu menor corte de arestas**.

5.3 Grafo K-Conexo

5.3.1 Em vértices

Um grafo G é K-conexo em vértices se $c(G) >= K$. Ou seja, a remoção de até $k - 1$ vértices não desconecta G. Alternativamente, temos que é necessário remover K vértices para desconectar G.

5.3.2 Em arestas

Um grafo G é K-conexo em arestas se $c(G) >= K$. Ou seja, a remoção de até $k - 1$ arestas não desconecta G. Alternativamente, temos que é necessário remover K arestas para desconectar G.

PS: Lembre que $c(G)$ e $c'(G)$ se referem ao menor corte possível de G, pois é possível ter vários cortes de tamanhos diferentes em um grafo G.

5.4 Articulações

Um vértice $v \in V(G)$ é uma **articulação de** G se $G - v$ é desconexo. Ou seja, v é articulação se a remoção de v desconecta o grafo.

5.5 Pontes

Uma aresta $e \in E(G)$ é uma **ponte de** G se $G - e$ é desconexo. Ou seja, e é ponte se a remoção de e desconecta o grafo.

6 Um algoritmo para achar uma árvore geradora de um grafo G

Ideia do algoritmo: Remover arestas de G até que G seja minimalmente conexo, assim, ainda existe um caminho entre qualquer par de vértices, porém não temos mais ciclos (pois um ciclo implica em existir dois ou mais caminhos entre algum par de vértices).

6.1 Algoritmo

$\forall e \in E(G)$ faça	$O(m) = O(n^2)$[1]
Se $G - e$ for conexo	$O(n^2)$[2]
Faça $G = G - e$	

[1]$O(m) = O(n^2)$ porque com m arestas, no pior caso temos um grafo completo (ou seja, possui uma aresta entre todo par de vértices do grafo), o que leva a $\binom{N}{2}$ subconjuntos distintos de pares de vértices (arestas) possíveis. Esse número é $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ pares. Portanto, é da ordem de $O(n^2)$.

[2]$O(n^2)$ por uma razão semelhante a de cima. Em um grafo completo, é preciso achar um caminho entre cada par de vértices do grafo. Como são $O(n^2)$ pares, precisamos testar $O(n^2)$ pares para verificar se há um caminho entre eles.