Aula 1 - Algoritmos em Grafos

Vinicius Bernardo

19 de Fevereiro de 2020

1 Assunto

Definições iniciais de grafos: vértices, arestas, representação, extremos, adjacentes/vizinhos, incidencia, cardinalidade. Também foi abordado laços e a ideia de arestas paralelas. Por fim, foi dada a definição de grau e o teorema da soma dos graus.

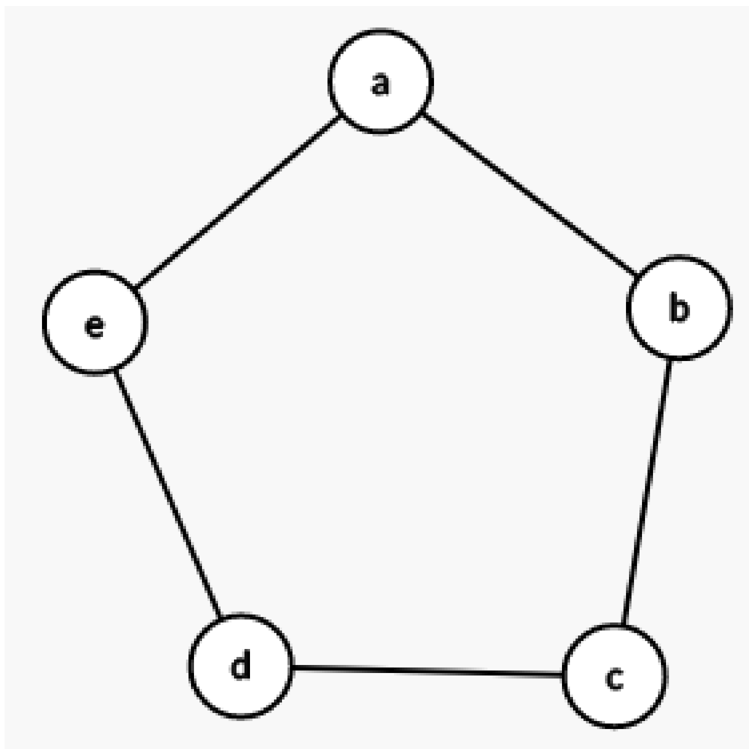
2 Anotações

Definição 1: Um grafo (não direcionado, depois será abordado grafos direcionados) $G = (V, E)$ é formado por dois conjuntos: V, de vértices e E, de arestas. Cada elemento $e \in E$ é um par (u, v) de vértices de V.

Exemplo: $G = (V, E)$, com $V = \{a, b, c, d, e\}$ e
$E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (a, e)\}$

Todo grafo admite uma representação geométrica (ou gráfica), onde cada vértice é representado por um ponto no plano (ou outra superfície qualquer) e cada aresta é representada por uma linha unindo os pontos correspondentes ao seu par de vértices.

Representando o grafo do exemplo anterior:



Se $e = (u, v)$ é uma aresta do grafo G, **dizemos que u e v são as extremidades (ou extremos) de e**. Também dizemos ainda que **u e v são adjacentes ou vizinhos, ou ainda que u vê v e vice-versa.** Finalmente, também dizemos que **a aresta** e **incide sobre** u **e** v**, ou que** u **e** v **incidem em** e.

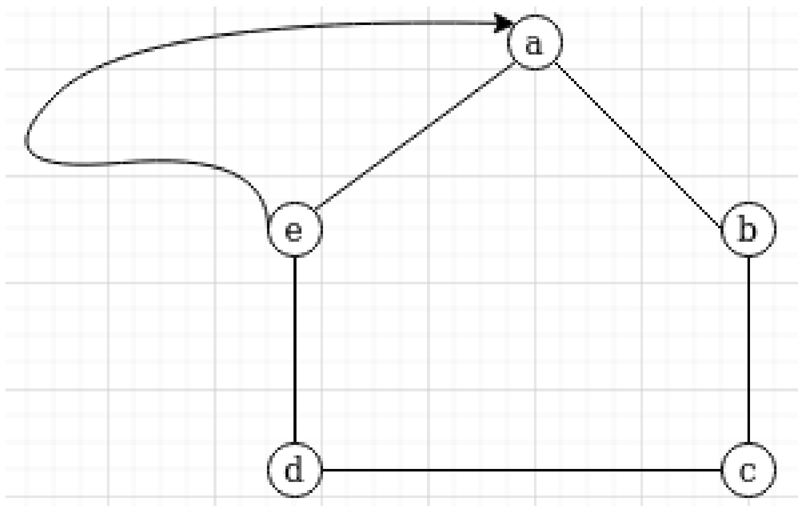
Definição 2: Dado um grafo G = (V, E), $|E|$ = M e $|V|$ = n. (Cardinalidade)

Definição 3: Podemos relaxar a definição de grafos e permitir arestas $e = (u, u)$ para um **u** qualquer pertencente a V. E esse tipo de aresta é chamada de **laço**. Podemos permitir também arestas **paralelas**, que são arestas distintas que incidem no mesmo par de vértices, nesse caso, para bem definir o grafo, precisamoso rotular as arestas e acrescentar uma função T, que identifica o par de vertices.

NOTA: Esclarecendo o problema das arestas paralelas

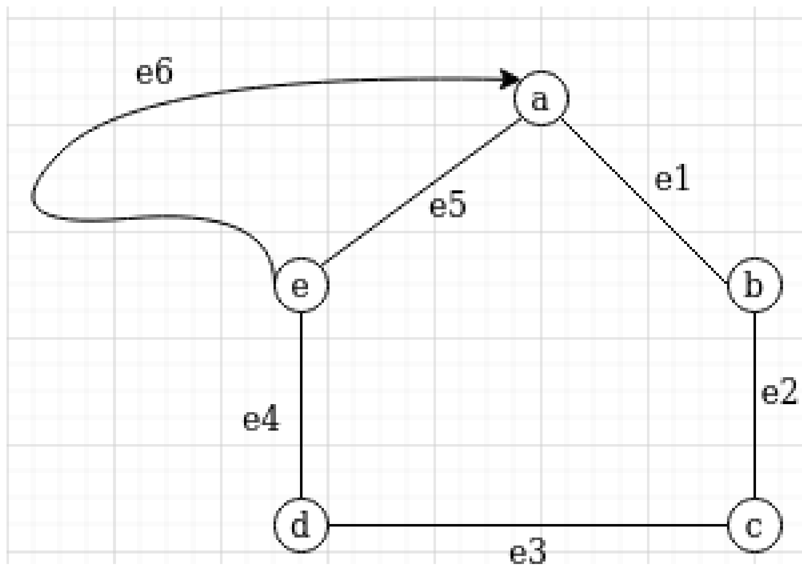
Como um grafo é formado por um **conjunto** de vertices e arestas, e conjuntos não tem repetições, não temos como diferenciar arestas paralelas. Um exemplo de grafo com arestas paralelas: G = (V, E), com $V = \{a, b, c\}$ e $E = \{(a, b), (b, c), (a, b)\}$

Exemplo, rotulando as arestas para resolver o problema:



Observe que temos duas arestas (a, b), porém, como conjuntos não tem repetição, esse grafo em notação de conjunto seria equivalente a: $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (a, e)\}$

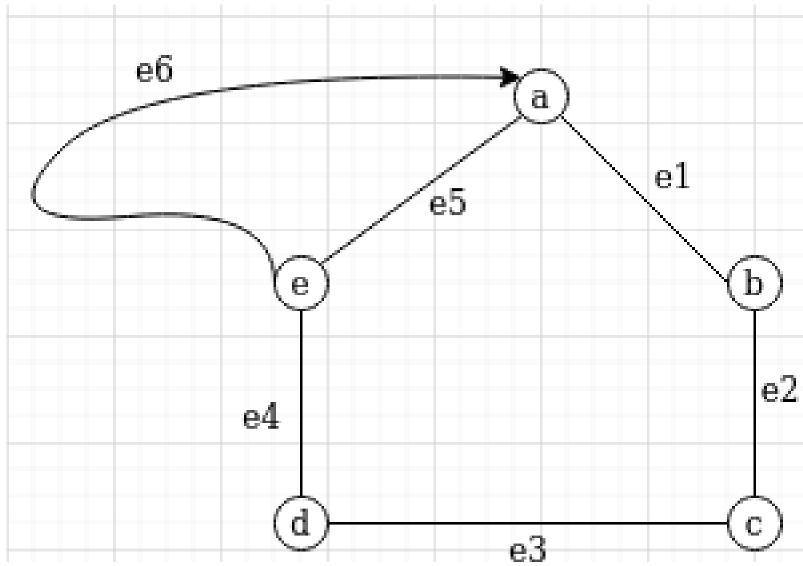
Que seria "igual" ao grafo apresentado anteriormente, na página 2. Para resolver isso, rotulamos nossas arestas e então usamos uma função para indicar o par relacionado a cada aresta. Nesse caso: $E = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6\}$, e a agora teriamos uma função T tal que: $T(e1) = (a, b)$, $T(e2) = (b, c)$, $T(e3) = (c, d)$, $T(e4) = (d, e)$, $T(e5) = (e, a)$, $T(e6) = (a, b)$. Graficamente, o grafo agora seria (figura na proxima pagina):



Definição 4: Dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (V, E)$, com funções T_G e T_H respectivamente, são iguais se: $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ e $T_G = T_H$.
Por outro lado, dizemos que G e H são isomorfos se existem funções bijetoras $F : V(G) \to V(H)$ e $G : E(G) \to E(H)$ tais que $e = (u, v) \in E(G) \Leftrightarrow G(e) = (F(u), F(v)) \in H$.

De forma simplificada, grafos isomorfos são grafos que possuem a mesma representação gráfica, bastando apenas modificar/rotacionar o grafo original de tal forma que o grafo resultante seja o segundo.

Definição 5: Dado um grafo $G = (V, E)$, o grau de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $grau(v)$, é o **número de arestas incidentes a v, com os laços contando duas vezes.** O grau máximo de G, denotado por $\Delta(G)$ é **o maior valor entre os graus de seus vértices**. E o grau mínimo de G, denotado por $\delta(G)$ é **o menor valor entre os graus de seus vértices**.



Exemplo de grau:

O grau do vértice a é 3, pois a possui 3 arestas incidindo em a, que são $e6, e5, e1$. De maneira similar, o grau dos vértices b, c, d é 2, e por fim o vértice e também tem grau 3.

É interessante notar que a soma dos graus desse grafo da 12 e ele possui 6 arestas. Isso não é uma coincidência, isso ocorre devido ao seguinte teorema (na proxima pagina).

Teorema 1: Dado um grafo $G = (V, E)$, o somatório do grau de seus vértices é dado por $2m$, onde $m = |E|$ (o número de arestas).

$$\sum_{\forall v \in V(G)} grau(v) = 2m$$

Prova (ideia): Cada aresta $e = (u, v)$ acrescenta uma unidade em grau(u) e em grau(v), logo, cada aresta acaba contando duas vezes. O mesmo ocorre para laços, que contam 2 vezes no grau de um mesmo vértice.