Resumo Aula 1 - Algoritmos em Grafos

Vinicius Bernardo Gabriel

25 de Fevereiro de 2020

1 Definição de Grafo

Formalmente, um grafo (não direcionado) denotado por $G = (V, E)$ é formado por dois conjuntos: V de vértices e E de arestas. Cada aresta $e \in E$ é um par (u, v), onde $u, v \in V$.

2 Nomenclaturas

Dado uma aresta $e = (u, v)$, dizemos que:

- u e v **são as extremidades (ou extremos)** de e
- u e v **são adjacentes, vizinhos** ou que u **vê** v e vice-versa
- A aresta e **incide sobre** u **e** v. Além disso, dizemos que u e v **incidem** em e

3 Cardinalidade

Dado um grafo $G = (V, E)$, a quantidade de arestas é $|E| = M$ e a quantidade de vértices é $|V| = N$.

4 Laços

Também podemos ter arestas da forma $e = (u, u)$,
que chamamos de **laço**, que é uma aresta ligando um vértice com ele mesmo.

5 Arestas paralelas

Além de laços, também podemos ter arestas paralelas, que são arestas diferentes que incidem nos mesmos vértices.
Por exemplo: $e1 = (u, v)$ e $e2 = (u, v)$.
Embora essas arestas sejam formadas pelo mesmo par de vértices, elas representam duas arestas distintas no grafo.

6 Rotulando arestas

Como arestas paralelas são formadas por pares repetidos de vértices, e conjuntos não possuem repetição (um grafo é formado por dois conjuntos, V e E), usamos rótulos para diferenciar as arestas, e uma função T relacionando cada rótulo com o seu respectivo par de vértices.
Por exemplo: $V = \{a, b\}$ e $E = \{(a, b), (a, b)\}$. Rotulando as arestas, temos agora $E = \{e1, e2\}$ e $T(e1) = (a, b)$ e $T(e2) = (a, b)$.

7 Igualdade de grafos

Dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (V, E)$, com funções T_G e T_H respectivamente são iguais se:

- $V(G) = V(H)$ - O conjunto de vértices dos dois grafos são iguais
- $E(G) = E(H)$ - O conjunto de arestas dos dois grafos são iguais
- $T_G = T_H$ - As funções dos dois grafos são iguais.

8 Grafos isomorfos

Dizemos que dois grafos são isomorfos se:

- Existe uma função bijetora $F : V(G) \to V(H)$, que associa cada vértice de G com seu respectivo vértice em H
- Existe uma função bijetora $G : E(G) \to E(H)$, que associa cada aresta de G com sua respectiva aresta em H
- As funções F e G satisfazem a condição $e = (u, v) \in E(G) \Leftrightarrow G(e) = (F(u), F(v)) \in H$. Essa condição verifica se para cada aresta em G, é possível obter uma aresta em H usando as funções F e G.

Quando dois grafos são isomorfos, é possível "redesenhar" um grafo no outro e vice versa. Os grafos não são estritamente "iguais", mas essencialmente, eles são de certa maneira, o mesmo grafo.

9 Grau

O grau de um vértice v é **o número de arestas incidentes em** v, com os laços contando duas vezes.
Exemplo:
Um grafo com os vértices $\{a, b, c\}$ e
arestas $\{(a, b), (b, c), (a, c), (a, a)\}$.

- O vértice a tem grau 4, pois as arestas $(a, b), (a, c), (a, a)$ incidem em a, com o laço (a, a) contando duas vezes.
- Os vértices b e c possuem grau 2, pois cada uma incide em duas arestas.

10 Grau Maximo

Dizemos que o **grau maximo** de um grafo G, denotado por $\Delta(G)$, é **o maior valor entre os graus de seus vértices**.

11 Grau Minimo

Dizemos que o **grau minimo** de um grafo G, denotado por $\delta(G)$, é **o menor valor entre os graus de seus vértices**.

12 Teorema 1: Soma dos graus de um grafo

Dado um grafo $G = (V, E)$, o somatório do grau de seus vértices é $2M$. (Lembrando que $M = |E|$, o número de arestas)

$$\sum_{\forall v \in V(G)} grau(v) = 2M$$

13 Prova do teorema 1 - Usando indução

Caso base: Vamos verificar se vale pra $M = 1$
Com $M = 1$, podemos ter 1 aresta sendo um laço (e portanto temos 1 vértice com grau 2), ou dois vértices, cada um com grau 1, e portanto sua soma é 2.

Hipótese: Suponha que o teorema vale para $M = n - 1$

Passo: Vamos provar que também vale para $M = n$
Temos n arestas. Removendo uma aresta do grafo, ficamos com $n - 1$ arestas, então a soma do grau dos seus vértices é $2(n - 1) = 2n - 2$. Adicionando novamente a aresta, existem duas possibilidades:
A aresta era um laço, e adiciona 2 no grau de algum vértice, fazendo com que a soma agora seja $2n$. Caso contrário, a aresta incide em 2 vértices, portanto ela aumenta em 1 o grau de 2 vértices, fazendo com que a soma agora seja $2n$.