Resumo Aula 3 - Algoritmos em Grafos

Vinicius Bernardo Gabriel

4 de Março de 2020

1 Sobre o grafo $G - e$

Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma aresta e de G, o grafo $G - e$ é simplesmente um grafo com os mesmos vértices e sem a aresta e. Formalmente, $V(G - e) = V(G)$ e $E(G - e) = E(G) - \{e\}$.

2 Sobre o grafo $G - v$

. Similar a definição anterior, dado um grafo $G = (V, E)$ e um vértice $v \in G$, o grafo $G - v$ é simplesmente o grafo G sem o vértice v (e portanto, sem as arestas que incidiam em v). Formalmente, definimos como: $V(G - v) = V(G) - \{v\}$ e $E(G - v) = \{e = (x, y) | x \neq v \text{ e } y \neq v\}$.

3 O grafo $G - S$

Seja S um subconjunto de vértices ou arestas, também podemos definir o grafo $G - S$, usando as definições anteriores para definir os vértices e arestas do grafo $G - S$.

4 Grafos Hamiltonianos

Dizemos que um grafo é **hamiltoniano** se G possui um ciclo que contém todos os seus vértices (ou seja, passando por todos os vértices apenas 1 vez)

4.1 Sobre grafos hamiltonianos

Os grafos Hamiltonianos modelam o problema do **caixeiro viajante**, que é um problema "difícil" em questão computacional, tanto por ser difícil achar e verificar se um grafo é Hamiltoniano ou não.

5 Grafos Eulerianos

Dizemos que um grafo é **euleriano** se G possui uma trilha fechada contendo todas as suas arestas (ou seja, passando por todos as arestas apenas 1 vez).

5.1 Sobre grafos Eulerianos

Os grafos Eulerianos modelam o problema das **pontes de Königsberg**, que de certa forma, se remete a ideia do carteiro de só passar em uma rua uma única vez.

6 Teorema de Euler (sobre Grafos Eulerianos)

Um grafo G é Euleriano $\Leftrightarrow$ todos os vértices de G **tem grau par**. **PS: prova do teorema será adicionada em breve...**

7 Grafos Completos

Dizemos que um grafo é **completo** se:

$$\forall u, v \in V(G), (u, v) \in E(G)$$

Em outras palavras, o que essa definição diz é: para que um grafo seja **completo**, deve existir uma aresta conectando diretamente cada vértice aos outros vértices do grafo. Por isso, se temos vértices u e v em um grafo G completo, então a aresta (u, v) também está no grafo G.

8 Grafos Bipartidos

Dizemos que um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y tais que para toda aresta $(u, v) \in E(G)$, $u \in X$ e $v \in Y$ ou $v \in X$ e $u \in Y$. Em outras palavras, para que um grafo seja **bipartido** não podemos ter arestas entre 2 vértices em X ou 2 vértices em Y.

9 Árvores

Uma **árvore** é um grafo **conexo** e **acíclico** (um grafo que não possui nenhum ciclo).
PS: Um grafo é **conexo** se existe algum caminho conectando qualquer par de vértices no grafo.

10 Florestas

Uma **floresta** é um grafo **acíclico**. Ou seja, **toda árvore é uma floresta.**

11 Folhas

Em uma árvore, chamamos os vértices de grau 1 de **folhas.** Formalmente, dado um vértice v, se $grau(v) = 1$, v é **folha**.

12 Número de arestas de uma árvore

Uma árvore T com n vértices possui exatamente $n - 1$ arestas.
PS: Prova em breve.

13 1º Teorema sobre árvores (dos caminhos)

Um grafo T é uma árvore $\Leftrightarrow$ Existe exatamente um caminho entre qualquer par de vértices de T.

Prova. Em breve. $\square$

14 2º Teorema sobre árvores (do centro)

Seja T uma árvore com $n >= 3$ (número de vértices). A árvore T' obtida pela remoção das folhas de T tem o mesmo centro de T. Ou seja, ao remover as folhas de T e criar a árvore T', o centro de T' é o mesmo que o centro de T. **OBS:** Provas em breve.

15 Um algoritmo pra achar o centro de uma árvore T

Entrada do algoritmo: Uma árvore T
Saída do alogritmo: Uma árvore T', cujos vértices são o centro de T

Algoritmo

Enquanto T tiver pelo menos 3 vértices, remova as folhas de T

Complexidade

$O(n^2)$, pois vamos fazer n operações sobre os n vértices de G, e no pior caso, removemos $n/2$ folhas. Portanto, fazemos $0(n^2/2) = O(n^2)$ operações no pior caso.