

1 様々なケイリーグラフ

本章では本レポートで取り扱う様々なケイリーグラフに関して述べる.

1.1 ハイパーキューブ (hypercube) Q_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 0 と 1 からなる作られるビット列とする. 整数 $i (1 \leq i \leq n)$ に対して記号反転操作 $Q_i(\mathbf{u})$ を次のように定義する.

$$Q_i(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, (u_i + 1) \bmod 2, \dots, u_n)$$

無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -hypercube $Q_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 0 \text{ と } 1 \text{ からなる作られる長さ } n \text{ の全てのビット列} \}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, Q_i(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 1 \leq i \leq n\}$$

以後 n -ハイパーキューブ を Q_n とする. 図 1 に n が 4 の場合のハイパーキューブ を示す. 表 1 に Q_n の性質を示す.

表 1 n -ハイパーキューブ の性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	2^n	n	n	n

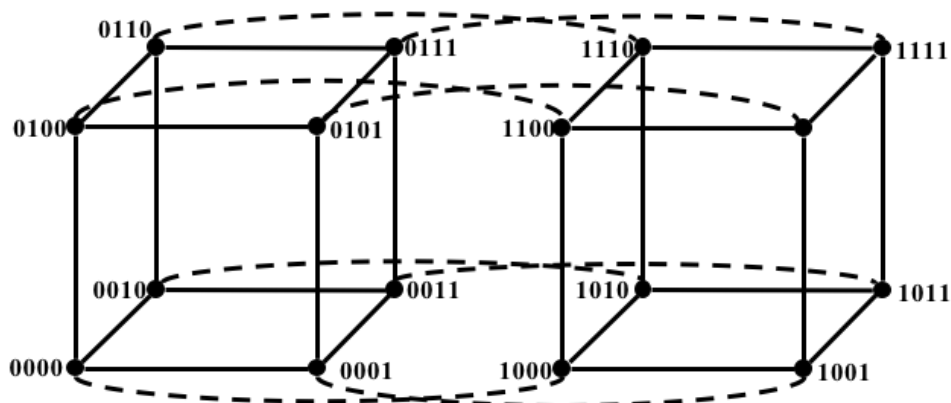


図 1 4-ハイパーキューブ

1.2 スターグラフ (star graph) S_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. $S_j(u_1 u_2 \dots u_n) = u_j, u_2 \dots u_{j-1} u_1 u_{j+1} \dots u_n$ と定義する. 無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -star graph $S_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, S_i(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 2 \leq i \leq n\}$$

以後 n -スターグラフを S_n とする. 図 2 に n が 4 の場合のスターグラフを示す. 表 2 にスターグラフの性質を示す.

表 2 n -スターグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$n - 1$	$n - 1$	$\lfloor 3(n - 1)/2 \rfloor$

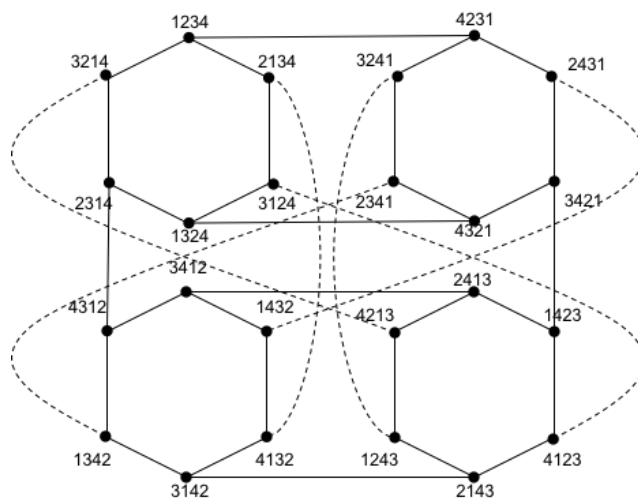


図 2 4-スターグラフ

1.3 パンケーキグラフ (pancake graph) P_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. $PR_i(u_1 u_2 \dots u_n) = u_i u_{i-1} \dots u_1 u_{i+1} u_{i+2} \dots u_n$ と定義する. 無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -パンケーキグラフ $P_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, PR_i(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 2 \leq i \leq n\}$$

以後 n -パンケーキグラフを P_n とする. 図 3 に n が 4 の場合のパンケーキグラフを示す. 表 3 に P_n の性質を示す.

表 3 n -パンケーキグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$n - 1$	$n - 1$	$\leq \lceil 5(n + 1)/3 \rceil$

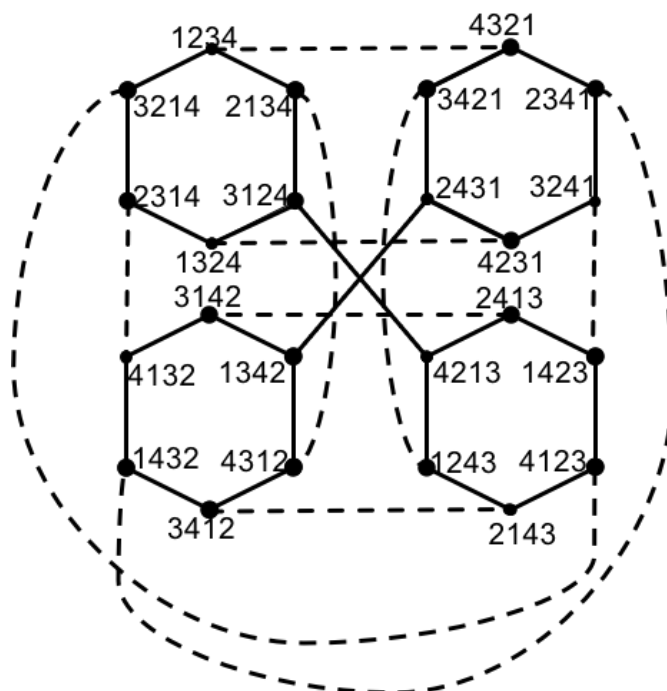


図 3 4 - パンケーキグラフ

1.4 焦げたパンケーキグラフ (burnt pancake graph) BP_n

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の符号付き記号で作られる順列とする. 次に符号付き前置反転操作 $SR_i(u_1 u_2 \dots u_n) = \overline{u_i} u_{i-1} \dots \overline{u_1} u_{i+1} u_{i+2} \dots u_n$ と定義する. 無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -焦げたパンケーキグラフ $BP_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(u, PR_i(u)) \mid u \in V, 1 \leq i \leq n\}$$

以後 n -焦げたパンケーキグラフを BP_n とする. 図 4 に n が 3 の場合の焦げたパンケーキグラフを示す. 表 4 に BP_n の性質を示す.

表 4 n -焦げたパンケーキグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n! \times 2^n$	n	n	$\leq 2n + 3$

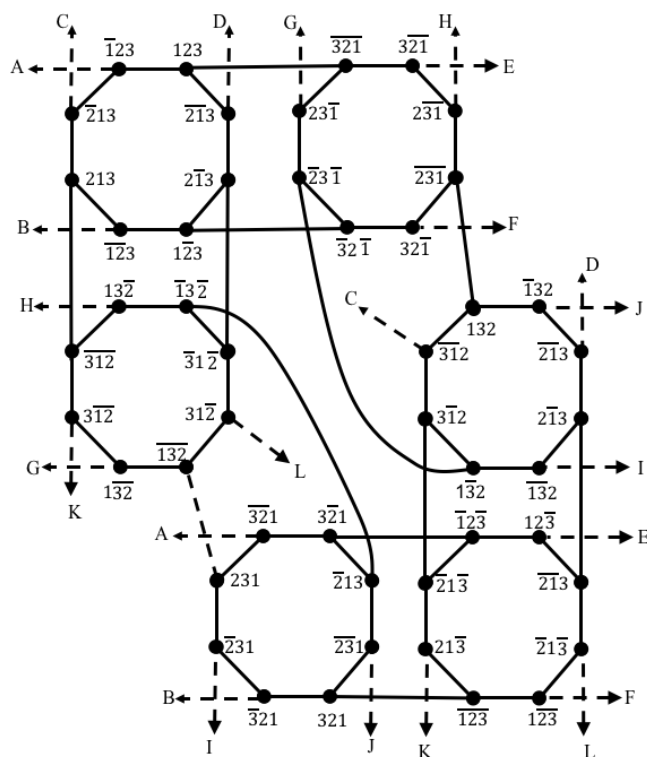


図 4 3 - 焦げたパンケーキグラフ

1.5 ローテータグラフ (rotator graph) R_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. 有向グラフ $G(V, E)$ に対して n -ローテータグラフ $R_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列} \}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ の場合} \\ \mathbf{u} \text{ に対して } \mathbf{u} \text{ から } \mathbf{v} \text{ への有向辺が}$$

$$v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{i-1} = u_i, v_i = u_1, v_{i+1} = u_{i+1}, \\ \dots, v_n = u_n \text{ を満たす } i (2 \leq i \leq n) \text{ があれば存在} \}$$

以後 n -ローテータグラフを R_n とする. 図 5 に n が 3 の場合のローテータグラフを示す. 表 5 に R_n の性質を示す.

表 5 n -ローテータグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$n - 1$	$n - 1$	$n - 1$

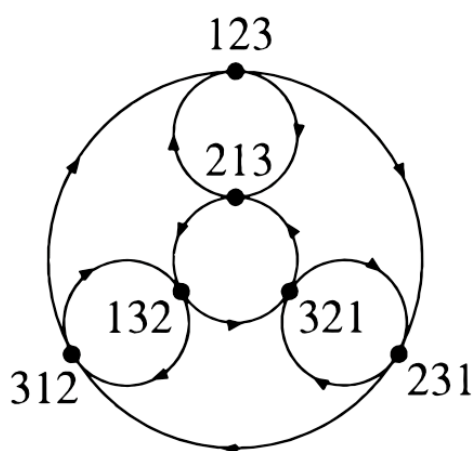


図 5 3 - ローテータグラフ

1.6 バイローテータグラフ (rotator graph) BR_n

$\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. 整数 $i (2 \leq i \leq n)$ に対して正のローテーション操作 $R_i^+(\mathbf{u})$ と負のローテーション操作 $R_i^-(\mathbf{u})$ を次のように定義する.

$$R_i^+(\mathbf{u}) = (u_2, u_3, \dots, u_i, u_1, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n)$$

$$R_i^-(\mathbf{u}) = (u_i, u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n)$$

有向グラフ $G(V, E)$ に対して n -バイローテータグラフ $BR_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in V, \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} = R_i^+(\mathbf{u}) \text{ or } \mathbf{v} = R_i^-(\mathbf{u}), 2 \leq i \leq n\}$$

以後 n -バイローテータグラフを BR_n とする. 図 6 に n が 3 の場合のローテータグラフを示す. 表 6 に BR_n の性質を示す.

表 6 n -バイローテータグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$2n - 3$	$2n - 3$	$n - 1$

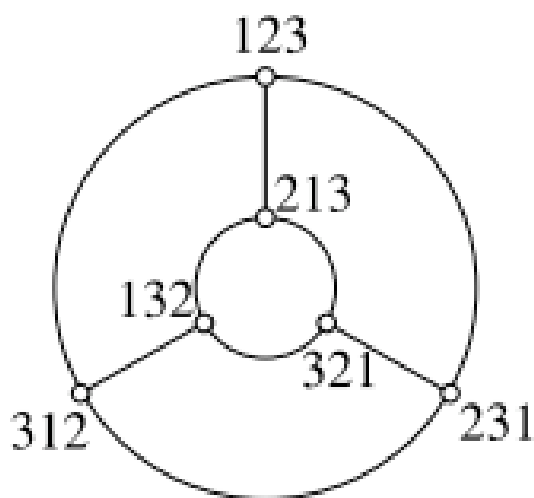


図 6 3 - バイローテータグラフ

1.7 トランスポジショングラフ (transposition graph) T_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. 整数 $i, j (1 \leq i < j \leq n)$ に対してトランスポジション操作 $T_{i,j}(\mathbf{u})$ を次のように定義する.

$$T_{i,j}(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -トランスポジショングラフ $T_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, T_{i,j}(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 1 \leq i < j \leq n\}$$

以後 n -トランスポジショングラフを T_n とする. 図 7 に n が 4 の場合のトランスポジショングラフを示す. 表 7 に T_n の性質を示す.

表 7 n -トランスポジショングラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$(n-1)(n-2)/2$	$(n-1)(n-2)/2$	$n-1$

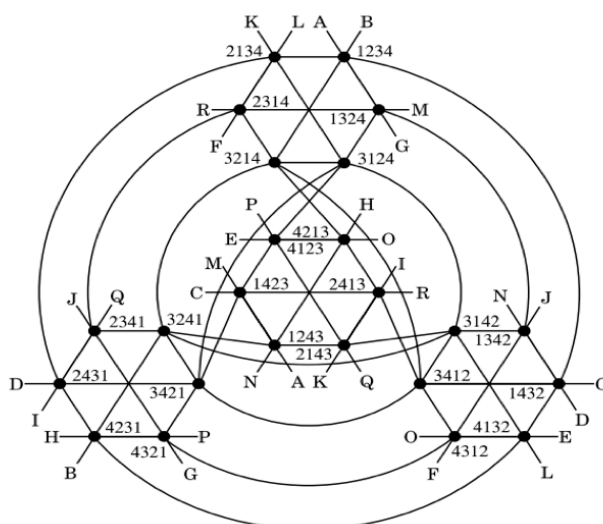


図 7 4 - トランスポジショングラフ

1.8 部分文字列反転グラフ (substring reversal graph) SR_n

$\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. 整数 $i, j (1 \leq i < j \leq n)$ に対して部分文字列反転操作 $SR_{i,j}(\mathbf{u})$ を次のように定義する.

$$SR_{i,j}(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{j-1}, \dots, u_{i+1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -部分文字列反転グラフ $SR_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, SR_{i,j}(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 1 \leq i < j \leq n\}$$

以後 n -部分文字列反転グラフを SR_n とする. 図 8 に n が 4 の場合の部分文字列反転グラフを示す. 表 8 に SR_n の性質を示す.

表 8 n -部分文字列反転グラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$(n-1)(n-2)/2$	$(n-1)(n-2)/2$	$\leq n-1$

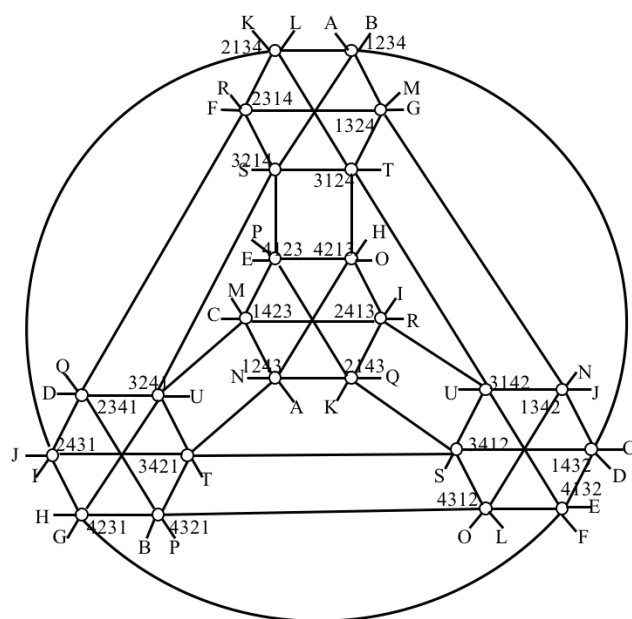


図 8 4 - 部分文字列反転グラフ

1.9 バブルソートグラフ (bubble sort graph) B_n

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ を 1 から n までの n 種類の記号で作られる順列とする. 整数 $i (1 \leq i \leq n-1)$ に対して隣接交換操作 $B_i(\mathbf{u})$ を次のように定義する.

$$B_i(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

無向グラフ $G(V, E)$ に対して n -バブルソートグラフ $B_n = (V, E)$ の V, E を以下に示す.

$$V = \{u_1 u_2 \dots u_n \mid 1, 2, \dots, n \text{ からなる全ての順列}\}$$

$$E = \{(\mathbf{u}, B_i(\mathbf{u})) \mid \mathbf{u} \in V, 1 \leq i \leq n-1\}$$

以後 n -バブルソートグラフを B_n とする. 図 9 に n が 4 の場合のバブルソートグラフを示す. 表 9 に B_n の性質を示す.

表 9 n -バブルソートグラフの性質

単純グラフ	再帰性	対称性	頂点数	次数	連結度	直径
yes	yes	yes	$n!$	$n-1$	$n-1$	$(n-1)n/2$

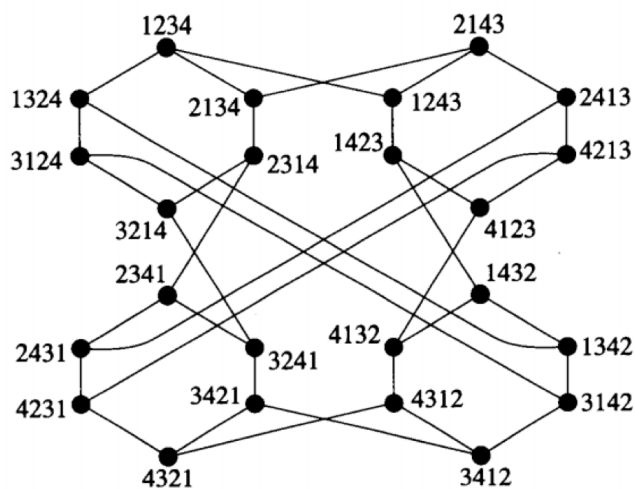


図 9 4-バブルソートグラフ