1　諸定義

本章では、本レポートで使用する用語の定義を行う。

定義 1. グラフ (graph) は頂点 (vertex, node) を要素と持つ空でない集合と, 二つの頂点を要素とする辺 (edge, link) を要素と持つ集合からなる. 頂点集合が V, 辺集合が E であるグラフ G を $G(V,E)$ と書く.

定義 2. 各辺を定義する頂点の対が順序対であるとき, そのグラフを有向グラフ (directed graph), 非順序対のとき, 無向グラフ (undirected graph) と呼ぶ.

定義 3. 二つの頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ と辺 e に対して,$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}\in$, e のとき,e は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に接続しているという. また,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ は隣接している (adjacent),e の端点 (end point) は $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ である, という. 以後, 頂点 $\boldsymbol{v}$ の隣接頂点集合を $N(\boldsymbol{v})$ で表す.

定義 4. 無向グラフの頂点 $\boldsymbol{v}$ において,$\boldsymbol{v}$ に接続している辺の数を $\boldsymbol{v}$ の次数 (degree) という. 次数が 0 である頂点を孤立頂点 (isolated vertex) という.

定義 5. 無向グラフ G において, 任意の頂点の次数のうち, 最大のものを G の最大次数 (maximum degree), 最小のものを G の最小次数 (minimum degree) と言う.

定義 6. 有向グラフの頂点 $\boldsymbol{v}$ において, $\boldsymbol{v}$ から出る辺の集合を $out(\boldsymbol{v})$,$\boldsymbol{v}$ へ入る辺の集合を $in(\boldsymbol{v})$ とする. $|out(\boldsymbol{v})|$, $|in(\boldsymbol{v})|$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ の出次数 (out degree), 入次数 (in degree) という. 出次数, 入次数が共に 0 である頂点を孤立頂点という.

定義 7. 全ての頂点の次数が等しいグラフを正則グラフ (regular graph) と言う.

定義 8. グラフ G の任意の二頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し、$\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{v}$ へ写す G の自己同型写像があるとき,G を頂点対称 (vertex transitive, vertex symmetric) という.G の任意の二辺 e_1, e_2 に対し, e_1 を e_2 へ写す G への自己同型写像があるとき,G を辺対称 (edge transitive, edge symmetric) という.

定義 9. 無向グラフ $G(V,E)$ の k 個の頂点の系列 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\ldots$, $\boldsymbol{v_k}$ が $1 \le i \le k-1$ となる i に対して $(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_{i+1}}) \in E$ を満たすとき, この系列を G の $\boldsymbol{v_1}$ から $\boldsymbol{v_k}$ への長さ $k-1$ の経路 (path) という. 有向グラフにおいては, 有向経路 (directed path) という.

定義 10. 先頭の頂点と最後の頂点が同じ経路を閉路 (cycle) という.

定義 11. 両端の頂点が同じ辺を自己閉路 (self loop) という.

定義 12. 有向グラフ G において, 各辺の向きを無くして得られるグラフを G の基礎グラフ (underlying graph) という.

定義 13. 任意の二頂点間に有向経路が存在する有向グラフを強連結 (strongly connected) という. 任意の二頂点間に経路が存在する無向グラフを連結 (connected) という. 有向グラフは, その基礎グラフが連結であるとき, 連結という. 強連結でも連結でもないグラフを非連結 (unconnected) という.

定義 14. 閉路を含まない連結なグラフを木 (tree) という.

定義 15. 無向グラフにおいて, 隣接するある二頂点間に複数の辺が存在するとき, これらの辺を多重辺 (multiple edge) という. 有向グラフにおいて, 隣接するある二頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間に, $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ への複数の辺が存在する場合, これらの辺を多重辺という.

定義 16. 自己閉路と多重辺を持たないグラフを単純グラフ (simple graph) という.

定義 17. グラフ G の二頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間の経路のうち, 長さが最も短いものを G における $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間の最短経路 (shortest path) という.

定義 18. 二頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間の最短経路の長さを $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間の距離 (distance) という. $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間に経路が存在しない場合は, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 間の距離を ∞ とする.

定義 19. 連結グラフ G の任意の二頂点間の距離のうち, 最大のものを G の直径 (diameter) という. 以降グラフ G の直径を $D(G)$ で表す.

定義 20. グラフ $G(V, E)$ に対し, 次の条件を全て満たすグラフ $G'(V', E')$ を G の部分グラフ (subgraph) という.

- $V' \subseteq V$
- $E' \subseteq E$

定義 21. 部分グラフのうち, 木であるものを部分木 (subtree) という.

定義 22. グラフ G の部分木のうち, その頂点が G のすべての頂点からなるものを G の全域木 (spanning tree) という.

定義 23. 連結なグラフ G に対して, 以下の二つの条件をともに満たす最小の k を G の連結度 (connectivity) という.

- G の任意の $k-1$ 個の頂点を取り除いたグラフは連結である.
- G のある k 個の頂点を取り除いたグラフが非連結に, あるいはたったひとつの頂点からなるグラフになる.

定義 24. 連結度が k であるグラフを k-連結 (k-connected) という.

定義 25. 複数の経路が頂点を共有しないとき, これらの経路を互いに素な経路 (disjoint path) という.

定義 26. 二頂点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を結ぶ複数の経路が $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を除いて頂点を共有しないとき, これらの経路を内素な経路 (internally-disjoint paths) もしくは頂点間素な経路 (node-to-node disjoint paths) という.

定義 27. 頂点 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ を含まない頂点集合 V を結ぶ複数の経路が $\boldsymbol{u}$ を端点とした場合を除いて頂点を共有しないとき, これらの経路を頂点と頂点集合間素な経路 (node-to-set disjoint paths) という.

定義 28. 頂点 $\boldsymbol{v_1}$,..., $\boldsymbol{v_n}$ を要素として持つ集合 V と V の頂点を含まない頂点 $\boldsymbol{u_1}$,..., $\boldsymbol{u_n}$ を要素として持つ集合 U に対して $\boldsymbol{u_i}$, $\boldsymbol{v_j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ 間を結ぶ複数の経路が頂点を共有しないとき, これらの経路を頂点集合間素な経路 (set-to-set disjoint paths) という.

定義 29. 集合 B に演算 $\circ$ が定義されていて次の性質を全て満たす時, $\langle B, \circ \rangle$ を群 (group) という.

- B の任意の元 x, y, z に対して,
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$
を満たす.
- B の任意の元 x に対して,
$$x \circ e = e \circ x = x$$
を満たす B の元 e が存在する. この e を群 $\langle B, \circ \rangle$ の単位元 (unit element, identity) という.
- B の任意の元 x, y, z に対して,
$$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$$
を満たす B の元 x^{-1} が存在する.

定義 30. $B = \langle B, \circ \rangle$ を群とし, B の元の部分集合を X とする.B の任意の元を X の元と演算 $\circ$ の組み合わせで表すことができるとき, X を B の生成元集合 (generator set) という.

定義 31. $B = \langle B, \circ \rangle$ を群,X を B の生成元集合とする. 有向グラフ $C * (B, X)$ は, その頂点集合 $V(C * (B, X))$ と辺集合 $E(C * (B, X))$ をそれぞれ
$$V(C * (B, X)) = B$$
$$E(C * (B, X)) = \{\{b, x \circ b\} | b \in B, x \in X\}$$
とするとき, 有向ケイリーグラフと呼ばれる.

定義 32. $B = \langle B, \circ \rangle$ を群,X を B の生成元集合とする. X の任意の要素 x に対して $x^{-1} \in X$ であるとする. 無向グラフ $C(B, X)$ はその頂点集合 $V(C * (B, X))$ と辺集合 $E(C * (B, X))$ をそれぞれ
$$V(C * (B, X)) = B$$
$$E(C * (B, X)) = \{\{b, x \circ b\} | b \in B, x \in X\}$$

とするとき, ケイリーグラフと呼ばれる.