Euklidischer Algorithmus

Proseminar Informatik “Algorithms Unplugged”
Wintersemester 2014/15
Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Bharat Ahuja

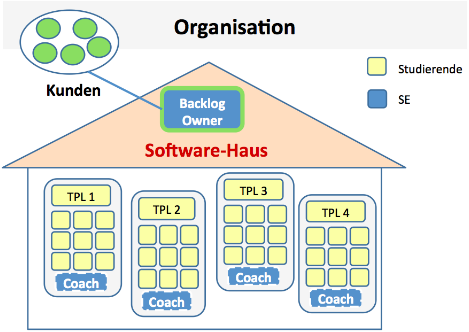
1. Dezember 2014

Überblick

- Motivation
- Vorstellung der Algorithmen
- Laufzeitanalyse
- Zusammenfassung

Problem 1: Software Projekt

Bestimmung der Anzahl von Teams



Quelle: SE-Webseite (Stand 21. Oktober 2014)

Software Projekt

Die Problemstellung

Software Projekt

Die Problemstellung

- 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.

Software Projekt

Die Problemstellung

- 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.
- Gleichmäßige Verteilung der Studiengänge in jedem Team.

Software Projekt

Die Problemstellung

- 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.
- Gleichmäßige Verteilung der Studiengänge in jedem Team.
- Möglichst große Anzahl von Teams.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60,\ n|24 \text{ und } n|24 \qquad \text{(i)}$$

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60,\ n|24 \text{ und } n|24 \qquad \text{(i)}$$

Wir suchen nach der größten Zahl n, die (i) erfüllt.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60,\ n|24 \text{ und } n|24 \tag{i}$$

Wir suchen nach der größten Zahl n, die (i) erfüllt.

$$\Rightarrow n = ggT(60, 24, 24) = 12 \text{ Teams}$$

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- 9 Studenten

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- 9 Studenten
- 5 Informatik Studenten

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- 9 Studenten
- 5 Informatik Studenten
- 2 Mathematik Studenten

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- 9 Studenten
- 5 Informatik Studenten
- 2 Mathematik Studenten
- 2 Technische-Informatik Studenten

Analog: Computerspiele

Missionsdauer

Analog: Computerspiele

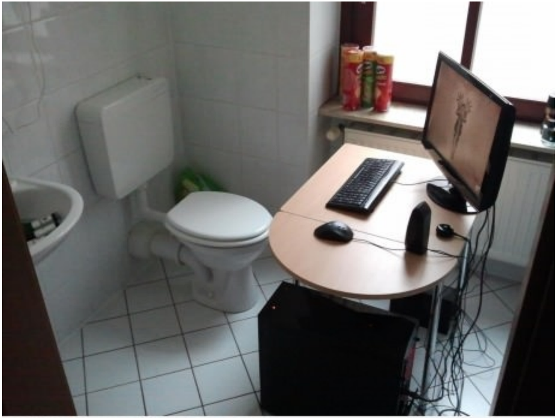
Missionsdauer

20 Stunden/50 Stunden pro Woche.

Analog: Computerspiele

Missionsdauer

20 Stunden/50 Stunden pro Woche.



Quelle: blog.wirebot.com

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt

Quelle: Office Space

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt

Quelle: Office Space

- Chef macht alle 4 Stunden Pause.

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt

Quelle: Office Space

- Chef macht alle 4 Stunden Pause.
- Das eigene Büro alle 3 Stunden verlassen.

Teilerfremdheit von Zahlen

Teilerfremdheit von Zahlen

- Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).

Teilerfremdheit von Zahlen

- Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).
- Schnell Zahlen auf Teilerfremdheit prüfen, ohne zu faktorisieren.

Teilerfremdheit von Zahlen

- Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).
- Schnell Zahlen auf Teilerfremdheit prüfen, ohne zu faktorisieren.

$$ggT(a, b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{min(a_i, b_i)}$$

wobei $p_i \in \mathbb{P}$.

Von der Problemstellung abstrahieren

Von der Problemstellung abstrahieren

Wie kann man schnell den g.g.T. bestimmen?

Von der Problemstellung abstrahieren

Wie kann man schnell den g.g.T. bestimmen?

- Euklidischer Algorithmus
- Binary GCD Algorithm von Stein
- GCD Algorithm von Lehmer

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ca. 300 *v.Chr.* in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ca. 300 *v.Chr.* in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.
- Wahrscheinlich nicht selbst erfunden.

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ca. 300 *v.Chr.* in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.
- Wahrscheinlich nicht selbst erfunden.
- Als geometrischen Algorithmus vorgestellt. Stäbe zerlegt.

Vorstellung der Algorithmen

- LangsamEuklid
- Euklid

LangsamEuklid

LangsamEuklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

LangsamEuklid

LangsamEuklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

while $a \neq b$ **do**

LangsamEuklid

LangsamEuklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

while $a \neq b$ **do**
    Falls a größer ist als b, $a \leftarrow a - b$
    Falls b größer ist als a, $b \leftarrow b - a$

LangsamEuklid

<u>LangsamEuklid</u>: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

```
while a ≠ b do
    Falls a größer ist als b, a ← a − b
    Falls b größer ist als a, b ← b − a
end while
```

LangsamEuklid

LangsamEuklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

```
while a ≠ b do
    Falls a größer ist als b, a ← a − b
    Falls b größer ist als a, b ← b − a
end while
Gib den gemeinsamen Wert der Zahlen aus
```

LangsamEuklid

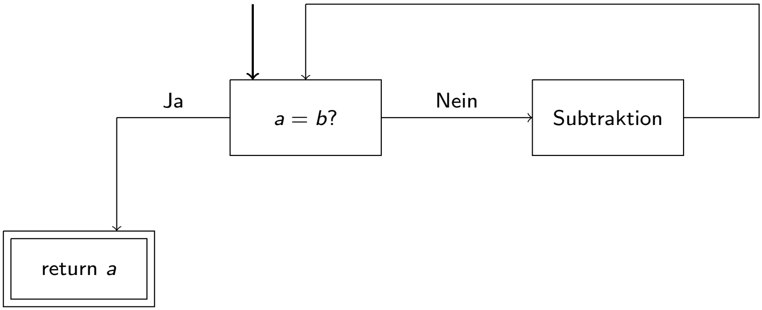


Figure: Flussdiagramm LangsamEuklid

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1		

LangsamEuklid

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2		

LangsamEuklid

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3		

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3	6	3
4		

LangsamEuklid

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3	6	3
4	**3**	**3**

$\Rightarrow$ der $g.g.T.$ von 24 und 9 ist 3.

LangsamEuklid

Endlichkeit

LangsamEuklid

Endlichkeit

- Die Zahlen bleiben positiv und ganzzahlig beim Subtraktionsschritt.

LangsamEuklid

Endlichkeit

- Die Zahlen bleiben positiv und ganzzahlig beim Subtraktionsschritt.
- Eine Variable wird in jeder Iteration um mindestens 1 verringert.

LangsamEuklid

Endlichkeit

- Die Zahlen bleiben positiv und ganzzahlig beim Subtraktionsschritt.
- Eine Variable wird in jeder Iteration um mindestens 1 verringert.
- D.h. der Algorithmus terminiert nach maximal $a + b$ Durchläufen.

LangsamEuklid

Korrektheit

LangsamEuklid

Korrektheit

- $g.g.T.(a, b) = g.g.T.(a - b, b)$
- $g.g.T.(a, a) = a$

$\square$

LangsamEuklid

Verbesserungsvorschläge

LangsamEuklid

Verbesserungsvorschläge

- $(1069, 2) \to (1067, 2) \to \ldots (3, 2) \to (1, 2) \to (1, 1)$

LangsamEuklid

Verbesserungsvorschläge

- $(1069, 2) \to (1067, 2) \to \dots (3, 2) \to (1, 2) \to (1, 1)$
- In den meisten Iterationen braucht man nicht $a > b$ überprüfen.

Euklid

Euklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

Euklid

Euklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

while $b > 0$ **do**

Euklid

Euklid: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

while $b > 0$ **do**

  berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

```
while b > 0 do
    berechne q, r mit a = q · b + r, wobei 0 ≤ r < b
    a ← b, b ← r
```

Euklid

<u>Euklid</u>: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

while $b > 0$ **do**
    berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$
    $a \leftarrow b, b \leftarrow r$
end while
return a

Euklid

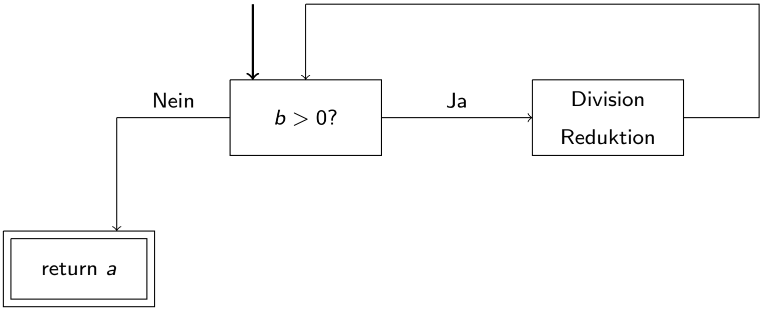


Figure: Flussdiagramm Euklid

Euklid

Beispiel

Euklid

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
1	1069	2

Euklid

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
	1069	2
1	2	1
2		

Euklid

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
	1069	2
1	2	1
2	1	**0**

$\Rightarrow$ der *g.g.T.* von 1069 und 2 ist 1.

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAMEUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.

Laufzeitanalyse

Euklid vs. LangsamEuklid

Sei ohne Einschränkung $a > b$.
Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \tag{1}$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAMEUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.
Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \tag{1}$$

Außerdem gilt –

$$a \geq b + r \tag{2}$$

Laufzeitanalyse

Euklid vs. LangsamEuklid

Sei ohne Einschränkung $a > b$.
Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \tag{1}$$

Außerdem gilt –

$$a \geq b + r \tag{2}$$

Aus $(1), (2)$ folgt

$$r < \frac{a}{2}$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAMEUKLID

- $a_2, b_2 < \frac{a}{2}$

Laufzeitanalyse

Euklid vs. LangsamEuklid

- $a_2, b_2 < \dfrac{a}{2}$
- Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\dfrac{a}{2^k}$.

Laufzeitanalyse

Euklid vs. LangsamEuklid

- $a_2, b_2 < \frac{a}{2}$
- Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\frac{a}{2^k}$.
- $k \leq \log_2 a$

Laufzeitanalyse

Euklid vs. LangsamEuklid

- $a_2, b_2 < \dfrac{a}{2}$
- Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\dfrac{a}{2^k}$.
- $k \leq \log_2 a$
- $2 \cdot \log_2 a$ besser als $a + b$

Worst-Case

EUKLID

Betrachte die Fibonacci-Zahlen –

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= 1 \cdot f_n + f_{n-1} \\
f_n &= 1 \cdot f_{n-1} + f_{n-2} \\
&\vdots \\
f_2 &= 1 \cdot f_1 + 0 \\
f_1 &= 1
\end{aligned}$$

Definition

Definition

- Sei $T(a, b)$ die Anzahl der Durchläufe von $\textsc{Euklid}(a, b)$.

Definition

- Sei $T(a, b)$ die Anzahl der Durchläufe von $\textsc{Euklid}(a, b)$.
- z.B. $T(1069, 2) = 3$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID

Durchschnittslaufzeit

Wenn b feststeht und a über alle natürlichen Zahlen variiert, wieviele Durchläufe gibt es im Schnitt?

Durchschnittslaufzeit

Euklid

Wenn b feststeht und a über alle natürlichen Zahlen variiert, wieviele Durchläufe gibt es im Schnitt?

Sei T_b diese durchschnittliche Anzahl.

T_b berechnen

$T(3,5) = 4$	$T(718,5) = 4$
$3 = 0 \cdot 5 + 3$	$718 = 143 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$	$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 1 + 0$	$2 = 1 \cdot 1 + 0$

T_b berechnen

$T(3,5) = 4$	$T(718,5) = 4$
$3 = 0 \cdot 5 + 3$	$718 = 143 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$	$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 1 + 0$	$2 = 1 \cdot 1 + 0$

Nach der ersten Iteration ist immer nur der Divisionsrest relevant.

T_b berechnen

$$\Rightarrow T_b = \frac{1}{b} \sum_{0<k\leq b} T(k, b)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Durchschnittslaufzeit

Euklid : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (\, T(1,5) + T(2,5) \cdots + T(5,5))$$

Durchschnittslaufzeit

Euklid : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (T(1,5) + T(2,5) \cdots + T(5,5))$$

- $T(1,5) = 2$

$$1 = 0 \cdot 5 + 1 \quad (1)$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0 \quad (2)$$

Durchschnittslaufzeit

Euklid : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (\, T(1,5) + T(2,5) \cdots + T(5,5))$$

- $T(1,5) = 2$

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 5 + 1 && (1) \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 && (2) \end{aligned}$$

- $T(2,5) = 3$

$$\begin{aligned} 2 &= 0 \cdot 5 + 2 && (1) \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 && (2) \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 && (3) \end{aligned}$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Analog-

- $T(3,5) = T(8,5) = \cdots = 4$*
- $T(4,5) = T(9,5) = \cdots = 3$
- $T(5,5) = T(10,5) = \cdots = 1$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Analog-

- $T(3,5) = T(8,5) = \cdots = 4$*
- $T(4,5) = T(9,5) = \cdots = 3$
- $T(5,5) = T(10,5) = \cdots = 1$

$$\Rightarrow T_5 = \frac{2+3+4+3+1}{5} = 2.6 \text{ Iterationen}$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Durchschnittslaufzeit

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- Nach der ersten Iteration von $T(k, b)$ bleiben ungefähr T_k Iterationen.

Durchschnittslaufzeit

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- Nach der ersten Iteration von $T(k, b)$ bleiben ungefähr T_k Iterationen.

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \cdot b + k \\
b &= q_2 \cdot k + r_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- Nach der ersten Iteration von $T(k, b)$ bleiben ungefähr T_k Iterationen.

$$\begin{aligned} k &= 0 \cdot b + k \\ b &= q_2 \cdot k + r_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- $T_b \approx 1 + \frac{1}{b}(T_1 + T_2 \cdots + T_b)$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

$$\Rightarrow T_b \approx H_b = \ln b + O(1)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

$$\Rightarrow T_b \approx H_b = \ln b + O(1)$$

$T_{100} \approx 4.56$	$H_{100} \approx 5.18$
$T_{1000} \approx 6.42$	$H_{1000} \approx 7.49$
$T_{10^6} \approx 12.2$	$H_{10^6} \approx 14.4$
$T_{10^8} \approx 16.07$	$H_{10^8} \approx 18.99$
$T_{10^9} \approx 18.01$	$H_{10^9} \approx 21.3$

Weiterführende Literatur

- *The Art of Computer Programming: Band 1* Kap. 1.1
- *The Art of Computer Programming: Band 2* Kap. 4.5.2

Zusammenfassung

- Euklidischer Algorithmus berechnet den $g.g.T$ zweier Zahlen.
- Teilerfremdheit mit Primfaktorzerlegung ineffizient.
- Laufzeit von LangsamEuklid abhängig von Zahlen.
- Laufzeit von Euklid abhängig von der Anzahl der Ziffern der Zahlen.
- Nach der 1. Iteration ist nur der Divisionsrest relevant.
- Fibonacci-Zahlen bilden das Worst-Case Szenario.

Anhang

Beweis:
$T_b \approx S_b$, wobei

$$S_0 := 0, S_n := 1 + \frac{1}{n}(S_0 + S_1 \cdots + S_{n-1})$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 \cdots + S_{n-1} + S_n)$$

Anhang

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(n \cdot (S_n - 1) + S_n)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow T_b \approx \ln b + O(1)$$