

Euklidischer Algorithmus

Proseminar Informatik “Algorithms Unplugged”

Wintersemester 2014/15

Institut für Theoretische Informatik

Leibniz Universität Hannover

Bharat Ahuja

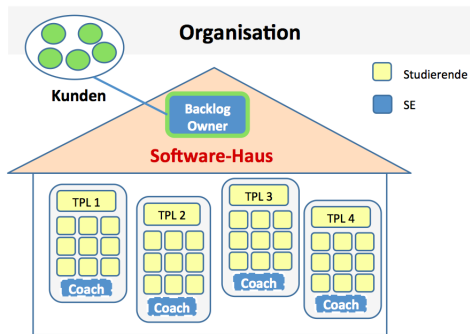
1. Dezember 2014

Überblick

- ▶ Motivation
- ▶ Vorstellung der Algorithmen
- ▶ Laufzeitanalyse
- ▶ Zusammenfassung

Problem 1: Software Projekt

Bestimmung der Anzahl von Teams



Quelle: SE-Webseite (Stand 21. Oktober 2014)

Software Projekt

Die Problemstellung

Software Projekt

Die Problemstellung

- ▶ 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.

Software Projekt

Die Problemstellung

- ▶ 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.
- ▶ Gleichmäßige Verteilung der Studiengänge in jedem Team.

Software Projekt

Die Problemstellung

- ▶ 60 Inf., 24 Math., 24 Tech. Inf.
- ▶ Gleichmäßige Verteilung der Studiengänge in jedem Team.
- ▶ Möglichst große Anzahl von Teams.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60, n|24 \text{ und } n|24 \quad (i)$$

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60, n|24 \text{ und } n|24 \quad (i)$$

Wir suchen nach der größten Zahl n , die (i) erfüllt.

Software Projekt

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Teams.

$$\Rightarrow n|60, n|24 \text{ und } n|24 \quad (i)$$

Wir suchen nach der größten Zahl n , die (i) erfüllt.

$$\Rightarrow n = \text{ggT}(60, 24, 24) = 12 \text{ Teams}$$

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- ▶ 9 Studenten

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- ▶ 9 Studenten
- ▶ 5 Informatik Studenten

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- ▶ 9 Studenten
- ▶ 5 Informatik Studenten
- ▶ 2 Mathematik Studenten

Software Projekt

Lösungsanalyse

Es gibt 12 Teams mit jeweils –

- ▶ 9 Studenten
- ▶ 5 Informatik Studenten
- ▶ 2 Mathematik Studenten
- ▶ 2 Technische-Informatik Studenten

Analog: Computerspiele

Missionsdauer

Analog: Computerspiele

Missionsdauer

20 Stunden/50 Stunden pro Woche.

Analog: Computerspiele

Missionsdauer

20 Stunden/50 Stunden pro Woche.



Quelle: blog.wirebot.com

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt



Quelle: Office Space

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt



Quelle: Office Space

- Chef macht alle 4 Stunden Pause.

Problem 2: Mit dem Teufel umgehen

Möglichst wenig Kontakt



Quelle: Office Space

- ▶ Chef macht alle 4 Stunden Pause.
- ▶ Das eigene Büro alle 3 Stunden verlassen.

Teilerfremdheit von Zahlen

Teilerfremdheit von Zahlen

- ▶ Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).

Teilerfremdheit von Zahlen

- ▶ Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).
- ▶ Schnell Zahlen auf Teilerfremdheit prüfen, ohne zu faktorisieren.

Teilerfremdheit von Zahlen

- ▶ Teilerfremdheit durch Vergleich der Primfaktoren (NP).
- ▶ Schnell Zahlen auf Teilerfremdheit prüfen, ohne zu faktorisieren.

$$ggT(a, b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{\min(a_i, b_i)}$$

wobei $p_i \in \mathbb{P}$.

Von der Problemstellung abstrahieren

Von der Problemstellung abstrahieren

Wie kann man schnell den g.g.T. bestimmen?

Von der Problemstellung abstrahieren

Wie kann man schnell den g.g.T. bestimmen?

- ▶ Euklidischer Algorithmus
- ▶ Binary GCD Algorithm von Stein
- ▶ GCD Algorithm von Lehmer

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ▶ ca. 300 v.Chr. in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ▶ ca. 300 v.Chr. in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.
- ▶ Wahrscheinlich nicht selbst erfunden.

Euklidischer Algorithmus

Historische Entwicklung

- ▶ ca. 300 v.Chr. in *Buch VII – Die Elemente* vorgestellt.
- ▶ Wahrscheinlich nicht selbst erfunden.
- ▶ Als geometrischen Algorithmus vorgestellt. Stäbe zerlegt.

Vorstellung der Algorithmen

- ▶ LANGSAM-EUKLID
- ▶ EUKLID

LANGSAMEUKLID

LANGSAMEUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

LANGSAMEUKLID

LANGSAMEUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

1: **while** $a \neq b$ **do**

LANGSAM EUKLID

LANGSAM EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

1: **while** $a \neq b$ **do**

2: Falls a größer ist als b , $a \leftarrow a - b$

3: Falls b größer ist als a , $b \leftarrow b - a$

LANGSAM EUKLID

LANGSAM EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

- 1: **while** $a \neq b$ **do**
- 2: Falls a größer ist als b , $a \leftarrow a - b$
- 3: Falls b größer ist als a , $b \leftarrow b - a$
- 4: **end while**

LANGSAM EUKLID

LANGSAM EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

- 1: **while** $a \neq b$ **do**
- 2: Falls a größer ist als b , $a \leftarrow a - b$
- 3: Falls b größer ist als a , $b \leftarrow b - a$
- 4: **end while**
- 5: Gib den gemeinsamen Wert der Zahlen aus

LANGSAM-EUKLID

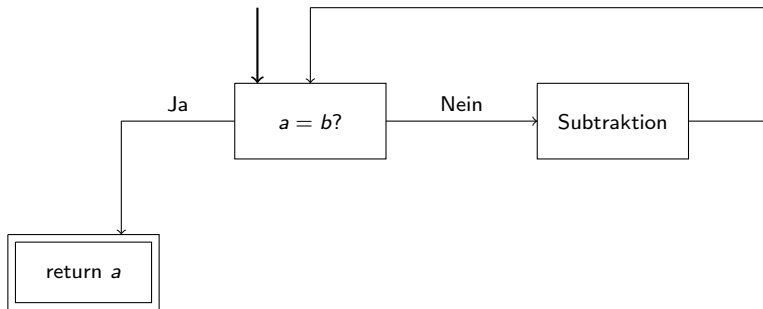


Figure: Flussdiagramm LANGSAM-EUKLID

LANGSAM EUKLID

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
1	24	9

LANGSAM EUKLID

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2		

LANGSAM EUKLID

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3		

LANGSAM EUKLID

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3	6	3
4		

LANGSAM EUKLID

Beispiel

Beispiel: $a = 24, b = 9$:

Iteration Nr.	a	b
	24	9
1	15	9
2	6	9
3	6	3
4	3	3

\Rightarrow der g.g.T. von 24 und 9 ist 3.

LANGSAM EUKLID

Endlichkeit

- ▶ Zahlen bleiben positiv beim Subtraktionsschritt.

LANGSAM EUKLID

Endlichkeit

- ▶ Zahlen bleiben positiv beim Subtraktionsschritt.
- ▶ Eine Variable wird immer um mindestens 1 verringert.

LANGSAM EUKLID

Endlichkeit

- ▶ Zahlen bleiben positiv beim Subtraktionsschritt.
- ▶ Eine Variable wird immer um mindestens 1 verringert.
- ▶ D.h. der Algorithmus terminiert nach maximal $a + b$ Durchläufen.

LANGSAM EUKLID

Korrektheit

LANGSAM EUKLID

Korrektheit

- ▶ $g.g.T.(a, b) = g.g.T.(a - b, b)$
- ▶ $g.g.T.(a, a) = a$



LANGSAM EUKLID

Verbesserungsvorschläge

► $(1069, 2) \rightarrow (1067, 2) \rightarrow \dots (3, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$

LANGSAM EUKLID

Verbesserungsvorschläge

- ▶ $(1069, 2) \rightarrow (1067, 2) \rightarrow \dots (3, 2) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 1)$
- ▶ In den meisten Iterationen braucht man nicht $a > b$ überprüfen.

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

1: **while** $b > 0$ **do**

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

1: **while** $b > 0$ **do**

2: berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

1: **while** $b > 0$ **do**

2: berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$

3: $a \leftarrow b, b \leftarrow r$

EUKLID

EUKLID: Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$

- 1: **while** $b > 0$ **do**
- 2: berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$
- 3: $a \leftarrow b, b \leftarrow r$
- 4: **end while**
- 5: **return** a

EUKLID

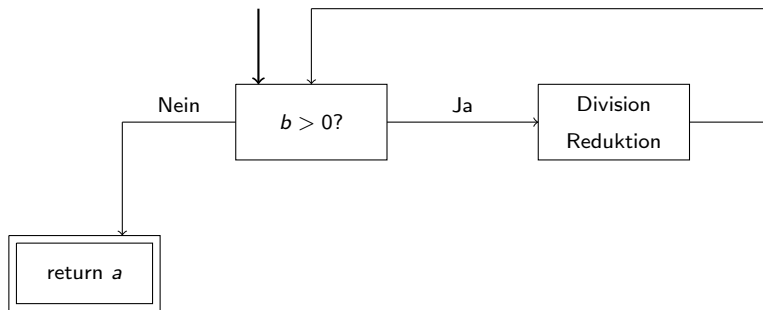


Figure: Flussdiagramm EUKLID

EUKLID

Beispiel

EUKLID

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
1	1069	2

EUKLID

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
	1069	2
1	2	1
2		

EUKLID

Beispiel

Iteration Nr.	a	b
	1069	2
1	2	1
2	1	0

\Rightarrow der *g.g.T.* von 1069 und 2 ist 1.

Laufzeitanalyse

EUKLID vs. LANGSAM EUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAM EUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.

Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \tag{1}$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAM EUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.

Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \quad (1)$$

Außerdem gilt –

$$a \geq b + r \quad (2)$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAM EUKLID

Sei ohne Einschränkung $a > b$.

Im ersten Durchlauf gilt –

$$a = q \cdot b + r, \text{ mit } r < b \quad (1)$$

Außerdem gilt –

$$a \geq b + r \quad (2)$$

Aus (1), (2) folgt

$$r < \frac{a}{2}$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAM EUKLID

$$\blacktriangleright a_2, b_2 < \frac{a}{2}$$

Laufzeitanalyse

EUKLID VS. LANGSAM EUKLID

- ▶ $a_2, b_2 < \frac{a}{2}$
- ▶ Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\frac{a}{2^k}$.

Laufzeitanalyse

EUKLID vs. LANGSAM EUKLID

- ▶ $a_2, b_2 < \frac{a}{2}$
- ▶ Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\frac{a}{2^k}$.
- ▶ $k \leq \log_2 a$

Laufzeitanalyse

EUKLID vs. LANGSAM EUKLID

- ▶ $a_2, b_2 < \frac{a}{2}$
- ▶ Nach $2 \cdot k$ Iterationen sind die Variablen höchstens so groß wie $\frac{a}{2^k}$.
- ▶ $k \leq \log_2 a$
- ▶ $2 \cdot \log_2 a$ besser als $a + b$

Worst-Case

EUKLID

Worst-Case

EUKLID

Betrachte die Fibonacci-Zahlen –

$$f_{n+1} = 1 \cdot f_n + f_{n-1}$$

$$f_n = 1 \cdot f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f_2 = 1 \cdot f_1 + 0$$

$$f_1 = 1$$

Definition

Definition

- ▶ Sei $T(a, b)$ die Anzahl der Durchläufe von $\text{EUKLID}(a, b)$.

Definition

- ▶ Sei $T(a, b)$ die Anzahl der Durchläufe von $\text{EUKLID}(a, b)$.
- ▶ z.B. $T(1069, 2) = 3$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID

Durchschnittslaufzeit

EUKLID

Wenn b feststeht und a über alle natürlichen Zahlen variiert, wieviele Durchläufe gibt es im Schnitt?

Durchschnittslaufzeit

EUKLID

Wenn b feststeht und a über alle natürlichen Zahlen variiert, wieviele Durchläufe gibt es im Schnitt?

Sei T_b diese durchschnittliche Anzahl.

T_b berechnen

$T(3, 5) = 4$	$T(718, 5) = 4$
$3 = 0 \cdot 5 + 3$	$718 = 143 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$	$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 1 + 0$	$2 = 1 \cdot 1 + 0$

T_b berechnen

$T(3, 5) = 4$	$T(718, 5) = 4$
$3 = 0 \cdot 5 + 3$	$718 = 143 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$	$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$2 = 1 \cdot 1 + 0$	$2 = 1 \cdot 1 + 0$

Nach der ersten Iteration ist immer nur der Divisionsrest relevant.

T_b berechnen

$$\Rightarrow T_b = \frac{1}{b} \sum_{0 < k \leq b} T(k, b)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (T(1, 5) + T(2, 5) \cdots + T(5, 5))$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (T(1, 5) + T(2, 5) \cdots + T(5, 5))$$

► $T(1, 5) = 2$

$$1 = 0 \cdot 5 + 1 \quad (1)$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0 \quad (2)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

$$T_5 = \frac{1}{5} \cdot (T(1, 5) + T(2, 5) \cdots + T(5, 5))$$

► $T(1, 5) = 2$

$$1 = 0 \cdot 5 + 1 \quad (1)$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0 \quad (2)$$

► $T(2, 5) = 3$

$$2 = 0 \cdot 5 + 2 \quad (1)$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad (2)$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0 \quad (3)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Analog-

- ▶ $T(3, 5) = T(8, 5) = \dots = 4^*$
- ▶ $T(4, 5) = T(9, 5) = \dots = 3$
- ▶ $T(5, 5) = T(10, 5) = \dots = 1$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Beispiel T_5

Analog-

- ▶ $T(3, 5) = T(8, 5) = \dots = 4^*$
- ▶ $T(4, 5) = T(9, 5) = \dots = 3$
- ▶ $T(5, 5) = T(10, 5) = \dots = 1$

$$\Rightarrow T_5 = \frac{2 + 3 + 4 + 3 + 1}{5} = 2.6 \text{ Iterationen}$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- ▶ Nach der ersten Iteration von $\text{EUKLID}(k, b)$ bleiben noch ungefähr T_k Iterationen.

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- ▶ Nach der ersten Iteration von $\text{EUKLID}(k, b)$ bleiben noch ungefähr T_k Iterationen.

$$k = 0 \cdot b + k$$

$$b = q_2 \cdot k + r_2$$

$$\vdots$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

Für große $b \in \mathbb{N}$ gilt

- ▶ Nach der ersten Iteration von $\text{EUKLID}(k, b)$ bleiben noch ungefähr T_k Iterationen.

$$k = 0 \cdot b + k$$

$$b = q_2 \cdot k + r_2$$

$$\vdots$$

- ▶ $T_b \approx 1 + \frac{1}{b}(T_1 + T_2 \cdots + T_b)$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

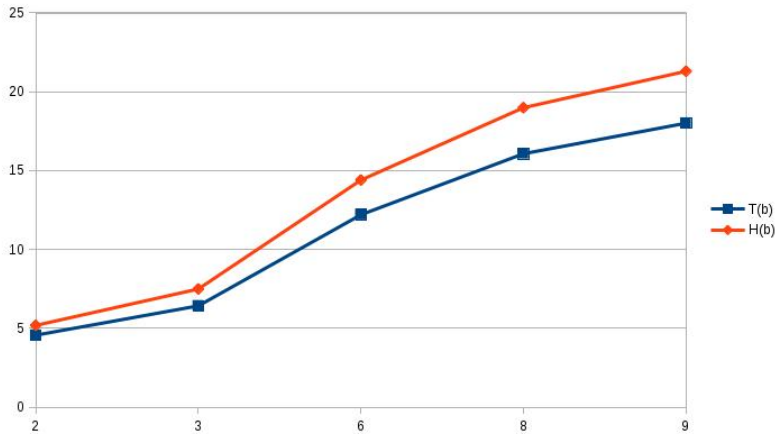
$$\Rightarrow T_b \approx H_b = \ln b + O(1)$$

Durchschnittslaufzeit

EUKLID : Abschätzung von T_b

$$\Rightarrow T_b \approx H_b = \ln b + O(1)$$

$T_{100} \approx 4.56$	$H_{100} \approx 5.18$
$T_{1000} \approx 6.42$	$H_{1000} \approx 7.49$
$T_{10^6} \approx 12.2$	$H_{10^6} \approx 14.4$
$T_{10^8} \approx 16.07$	$H_{10^8} \approx 18.99$
$T_{10^9} \approx 18.01$	$H_{10^9} \approx 21.3$



X: $\log(b)$, Y: Anzahl Durchläufe

Weiterführende Literatur

- ▶ *The Art of Computer Programming: Band 1* Kap. 1.1
- ▶ *The Art of Computer Programming: Band 2* Kap. 4.5.2

Zusammenfassung

- ▶ Euklidischer Algorithmus berechnet den $g.g.T$ zweier Zahlen.
- ▶ Teilerfremdheit mit Primfaktorzerlegung ineffizient.
- ▶ Laufzeit von `LANGSAM_EUKLID` abhängig von Zahlen.
- ▶ Laufzeit von `EUKLID` abhängig von der Anzahl der Ziffern der Zahlen.
- ▶ Nach der 1. Iteration ist nur der Divisionsrest relevant.
- ▶ Fibonacci-Zahlen bilden das Worst-Case Szenario.

Anhang

Beweis:

$T_b \approx S_b$, wobei

$$S_0 := 0, S_n := 1 + \frac{1}{n}(S_0 + S_1 \cdots + S_{n-1})$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 \cdots + S_{n-1} + S_n)$$

Anhang

$$= 1 + \frac{1}{n+1}(n \cdot (S_n - 1) + S_n)$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow T_b \approx \ln b + O(1)$$