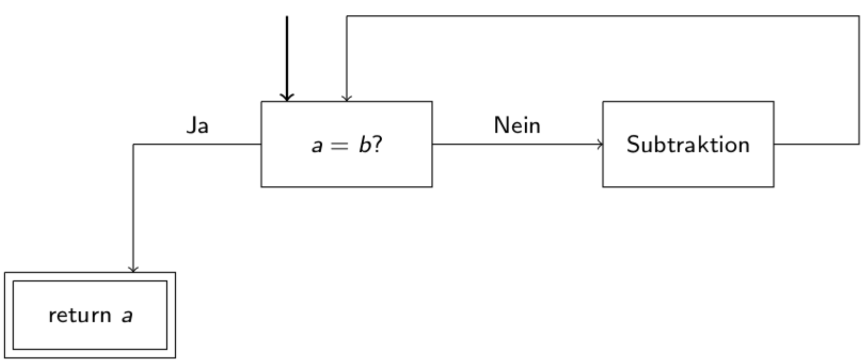
Euklidischer Algorithmus
Proseminar Informatik "Algorithms Unplugged"

am Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Bharat Ahuja
Wintersemester 2014/15

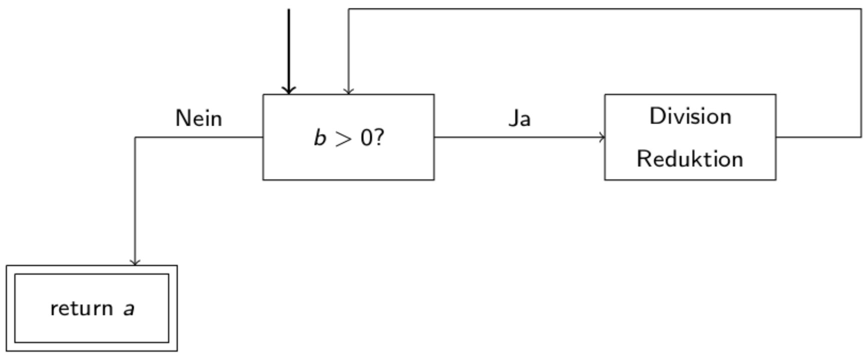
- Der euklidische Algorithmus ist ein Algorithmus, mit dem sich der größte gemeinsame Teiler ($g.g.T.$) zweier natürlicher Zahlen berechnen lässt.
- Diesen Algorithmus hat Euklid ca. 300 *v.Chr.* in *Buch VII – Die Elemente* (Proposition 1 und 2) als einen geometrischen Algorithmus vorgestellt.
- Die Berechnung vom $g.g.T.$ ist relevant für die Gruppierung von Objekten und das Prüfen auf Teilerfremdheit.
- Die Teilerfremdheit zweier Zahlen kann man alternativ durch das Vergleichen der Primfaktoren überprüfen.
$$ggT(a,b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{min(a_i,b_i)}$$
wobei $p_i \in \mathbb{P}$.
- Die Bestimmung der Primfaktorzerlegung einer Zahl liegt aber in NP.
- LangsamEuklid

while $a \neq b$ **do**
    Falls a größer ist als $b, a \leftarrow a - b$
    Falls b größer ist als $a, b \leftarrow b - a$
end while
Gib den gemeinsamen Wert der Zahlen aus



- Euklid

while $b > 0$ **do**
    berechne q, r mit $a = q \cdot b + r$, wobei $0 \leq r < b$
    $a \leftarrow b, b \leftarrow r$
end while
return a



- Euklid ist effizienter als LangsamEuklid wegen Zusammenfassung mehrfacher Subtraktionen.

- Je schneller die Reste fallen, desto früher terminiert der Algorithmus. Die Fibonacci-Zahlen bilden den ungünstigsten Fall für diesen Algorithmus, weil alle Quotienten den kleinstmöglichen Wert annehmen, und dadurch die Reste sehr langsam fallen.

- Nach der ersten Iteration ist immer nur der Divisionsrest relevant.

$$\therefore T_b = \frac{1}{b} \sum_{0<k\leq b} T(k,b)$$

- Wenn man eine zufällig gewählte Zahl auf Teilerfremdheit mit 5 prüfen möchte, braucht man im Schnitt $T_5 = 2{,}6$ Iterationen. Es gilt,

$$T_n \approx \ln n + O(1)$$