## Euklidischer Algorithmus Proseminar Informatik "Algorithms Unplugged"

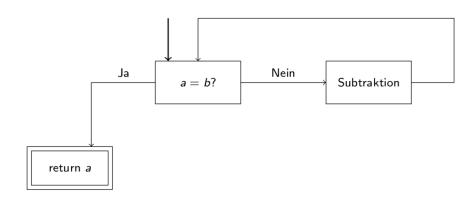
am Institut für Theoretische Informatik Leibniz Universität Hannover

> Bharat Ahuja Wintersemester 2014/15

- Der euklidische Algorithmus ist ein Algorithmus, mit dem sich der größte gemeinsame Teiler (g.g.T.) zweier natürlicher Zahlen berechnen lässt.
- Diesen Algorithmus hat Euklid ca. 300 v.Chr. in Buch VII Die Elemente (Proposition 1 und 2) als einen geometrischen Algorithmus vorgestellt.
- Berechnung von g.g.T. relevant bei Gruppierung von Objekten, Prüfen von Teilerfremdheit.
- Die Teilerfremdheit zweier Zahlen kann man alternativ durch das Vergleichen der Primfaktoren überprüfen.

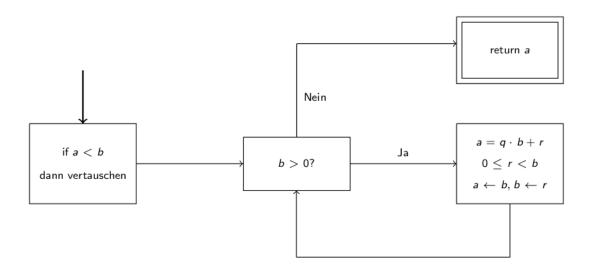
$$ggT(a,b) = \prod_{i \in \mathbb{N}} p_i^{min(a_i,b_i)}$$

- Die Bestimmung der Primfaktorzerlegung einer Zahl liegt aber in NP.
- LangsamEuklid
  - 1: while  $a \neq b$  do
  - 2: Falls a größer ist als  $b, a \leftarrow a b$
  - 3: Falls b größer ist als  $a, b \leftarrow b a$
  - 4: end while
  - 5: Gib den gemeinsamen Wert der Zahlen aus



## • Euklid

- 1: **if** a < b: vertausche a und b.
- 2: **while** b > 0 **do**
- 3: berechne q, r mit  $a = q \cdot b + r$ , wobei  $0 \le r < b$
- 4:  $a \leftarrow b, b \leftarrow r$
- 5: end while
- 6: return a



- Euklid effizienter als LangsamEuklid wegen Zusammenfassung mehrfacher Subtraktionen.
- Je schneller die Reste fallen, desto früher terminiert der Algorithmus. Die Fibonacci-Zahlen bilden den ungünstigsten Fall für diesen Algorithmus, weil alle Quotienten den kleinstmöglichen Wert annehmen, und dadurch die Reste sehr langsam fallen.
- Nach der ersten Iteration ist immer nur der Divisionsrest relevant.

$$T_b = \frac{1}{b} \sum_{0 < k \le b} T(k, b)$$

• Wenn man eine zufällig gewählte Zahl auf Teilerfremdheit mit 5 prüfen möchte, braucht man im Schnitt  $T_5 = 2,6$  Iterationen. Es gilt,

$$T_n \approx \ln n + O(1)$$