Simulation of time-bin remote entanglement generation

March 22, 2024

Initial density matrix

$$\rho_0 = \frac{(|0\rangle + |1\rangle)(\langle 0| + \langle 1|)}{2}\rho_{\mathrm{m}} \tag{1}$$

After first kick

$$\rho_1 = (P_0\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta) + P_1)\rho_0(P_0\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta) + P_1) \tag{2}$$

After time evolution

$$\rho_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}(P_0\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta) + P_1)\rho_0(P_0\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta) + P_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \tag{3}$$

After second kick

$$\begin{aligned}\rho_3 =& (P_0 + P_1\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}(P_0\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta) + P_1)\rho_0(P_0\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta) + P_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}(P_0 + P_1\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta))\\ =& \big(P_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta) + P_1\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\big)\rho_0\big(P_0\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + P_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\big)\end{aligned} \tag{4}$$

For a thermal initial state

$$\rho_m = \frac{1}{\pi n_B}\int \mathrm{d}^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B} \tag{5}$$

where $n_B \equiv \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1}$

$$\begin{aligned}\rho_3 =& \int \mathrm{d}^2\alpha\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}}{2\pi n_B}\big(|0\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta) + |1\rangle\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\big)|\alpha\rangle\\ &\langle\alpha|\big(\langle 0|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} + \langle 1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\big)\end{aligned} \tag{6}$$

Tracing out the motion

$$\begin{aligned}\rho_{3,\mathrm{s}} =& \int \mathrm{d}^2\alpha\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}}{2\pi n_B}\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 0|\langle\alpha|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)|\alpha\rangle\\ +|0\rangle\langle 1|\langle\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)|\alpha\rangle\\ +|1\rangle\langle 0|\langle\alpha|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|\alpha\rangle\\ +|1\rangle\langle 1|\langle\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|\alpha\rangle\end{pmatrix}\\ =& \int \mathrm{d}^2\alpha\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}}{2\pi n_B}\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\\ +|0\rangle\langle 1|\langle\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)|\alpha\rangle\\ +|1\rangle\langle 0|\langle\alpha|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|\alpha\rangle\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|\alpha\rangle\\
=&\langle\alpha|\mathcal{D}(-\mathrm{i}\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\mathcal{D}(\mathrm{i}\eta)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\alpha\rangle\\
=&\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\eta\alpha^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{i}\eta\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})/2}\mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\eta\alpha^*-\mathrm{i}\eta\alpha)/2}\langle\alpha+\mathrm{i}\eta|\alpha+\mathrm{i}\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle\\
=&\exp\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\eta\alpha^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{i}\eta\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{i}\eta\alpha^*-\mathrm{i}\eta\alpha\\ -|\alpha+\mathrm{i}\eta|^2-\left|\alpha+\mathrm{i}\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right|^2+2(\alpha^*-\mathrm{i}\eta)\big(\alpha+\mathrm{i}\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)\end{pmatrix}\right)\\
=&\exp\Big(\mathrm{i}\eta\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{i}\eta\alpha^*-|\alpha|^2-\eta^2+(\alpha^*-\mathrm{i}\eta)\big(\alpha+\mathrm{i}\eta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big)\Big)\\
=&\exp\Big(2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}\big(\alpha\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+\eta^2\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-1\big)\Big)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_{3,\mathrm{s}}=&\int\mathrm{d}^2\alpha\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}}{2\pi n_B}\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\\ +|0\rangle\langle 1|\exp\big(-2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}\big(\alpha\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+\eta^2\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)\\ +|1\rangle\langle 0|\exp\big(2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}\big(\alpha\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+\eta^2\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)\end{pmatrix}\\
=&\frac{|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|}{2}\\
&+|0\rangle\langle 1|\int\mathrm{d}^2\alpha\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}}{2\pi n_B}\exp\big(-2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}\big(\alpha\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+\eta^2\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+h.c.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}\exp\big(2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}\big(\alpha\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)+\eta^2\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\big)\big)\\
=&\mathrm{e}^{\eta^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\right)}\int\mathrm{d}^2\alpha\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/n_B}\exp\left(2\mathrm{i}\eta\mathrm{Re}((\alpha_x+\mathrm{i}\alpha_y)(\cos\omega t-1-\mathrm{i}\sin\omega t))\right)\\
=&\mathrm{e}^{\eta^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1\right)}\int\mathrm{d}^2\alpha\exp\big(-\alpha_x^2/n_B+2\mathrm{i}\alpha_x\eta(\cos\omega t-1)\big)\exp\big(-\alpha_y^2/n_B+2\mathrm{i}\alpha_y\eta\sin\omega t\big)\\
=&\pi n_B\exp\big(-\eta^2\big(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+2n_B(1-\cos\omega t)\big)\big)\\
=&\pi n_B\exp\big(-\mathrm{i}\eta^2\sin\omega t\big)\exp\big(-\eta^2(1-\cos\omega t)(2n_B+1)\big)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\rho_{3,\mathrm{s}}=\frac{|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|+|0\rangle\langle 1|\exp\big(\mathrm{i}\eta^2\sin\omega t\big)\exp\big(-\eta^2(1-\cos\omega t)(2n_B+1)\big)+h.c.}{2}
\tag{11}
$$