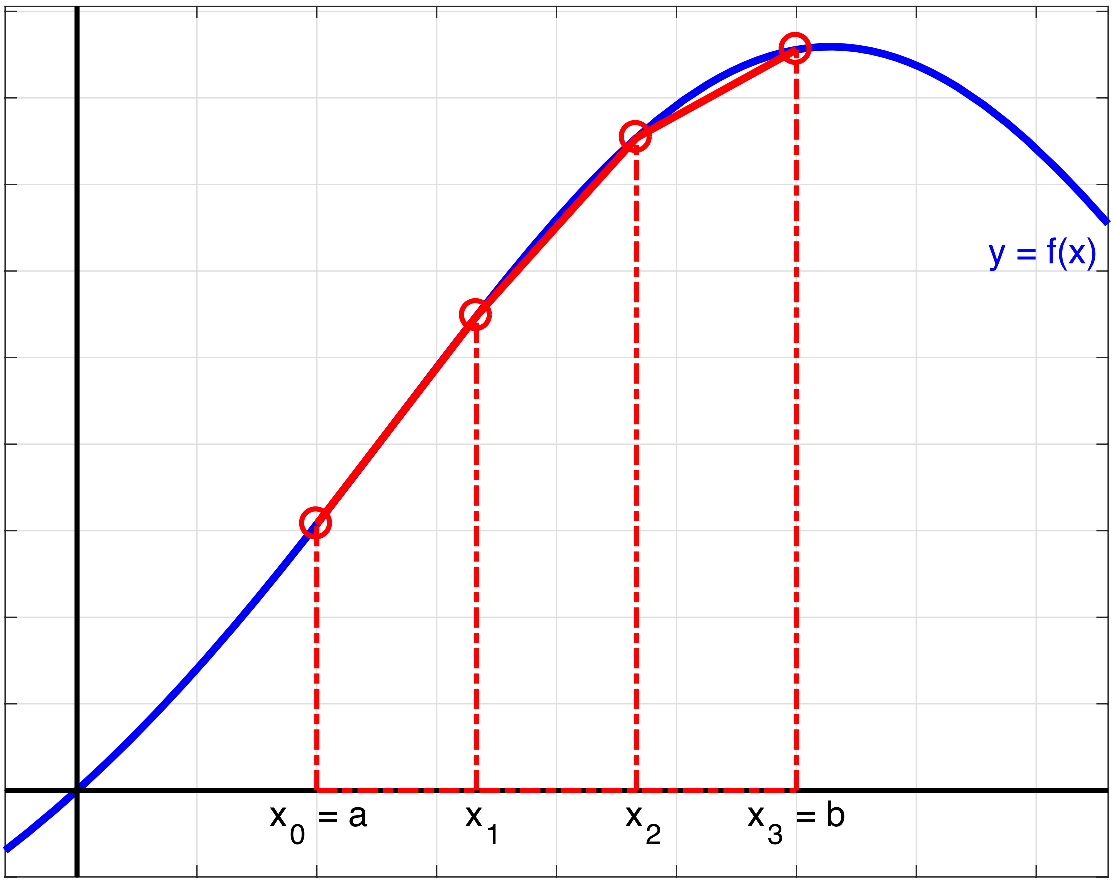
۴.۵ قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب

اکنون فرض کنید بازه‌ی $[a,b]$ به n زیربازه‌ی $[x_i,\ x_{i+1}]$ برای $i = 0, 1, \cdots, n-1$ افراز کرده و برای انتگرال‌گیری از تابع f در هر زیربازه، از قاعده‌ی ذوزنقه‌ای ساده استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &\approx \frac{h}{2}(f_0+f_1) \ + \ \frac{h}{2}(f_1+f_2) \ + \ \frac{h}{2}(f_2+f_3) \ + \cdots + \ \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)\end{aligned}$$

پس فرمول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \qquad (۸.۵)$$



شکل ۴.۵: قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب در حالتی که $n = 3$. در هر زیربازه، قاعده‌ی ذوزنقه‌ای ساده یعنی درونیابی با یک خط اجرا می‌شود.

۱.۴.۵ خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب

با جمع خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای ساده، یعنی (۵.۵)، روی تک‌تکِ زیربازه‌های $[x_i,\ x_{i+1}]$ داریم:

$$\begin{aligned}EI &:= \int_a^b f(x)\ dx - \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n)\\ &= \Big(\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)\Big) + \cdots + \Big(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx - \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n)\Big)\\ &= -\frac{h^3}{12}f''(\alpha_0) - \frac{h^3}{12}f''(\alpha_1) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\alpha_{n-1}); \qquad \alpha_i \in (x_i, x_{i+1})\\ &= -\frac{h^3}{12}\Big(f''(\alpha_0) + f''(\alpha_1) + \cdots + f''(\alpha_{n-1})\Big). \qquad (۹.۵)\end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{cases} m := \min\limits_{a\le x\le b} f''(x),\\ M := \max\limits_{a\le x\le b} f''(x).\end{cases}$$

بنابراین برای $i = 0, 1, \cdots, n-1$ داریم $m \le f''(\alpha_i) \le M$ و در نتیجه

$$nm \le f''(\alpha_0) + f''(\alpha_1) + \cdots + f''(\alpha_{n-1}) \le nM.$$

پس

$$m \le \frac{f''(\alpha_0) + f''(\alpha_1) + \cdots + f''(\alpha_{n-1})}{n} \le M.$$

بنابراین $\overline{s} := \frac{f''(\alpha_0)+f''(\alpha_1)+\cdots+f''(\alpha_{n-1})}{n}$ مقداری است که در رابطه‌ی

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \overline{s} \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

صدق می‌کند. از آنجا که هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته و متناهی، تمام مقادیر بین کمینه و بیشینه‌ی خود را در نقطه‌ای در حوزه‌ی تعریفش اختیار می‌کند و با این فرض که $f''(x)$ پیوسته بوده است، وجود دارد $\alpha \in [a, b]$ به طوری که $f''(\alpha) = \overline{s}$. بنابراین بر طبق (۹.۵) داریم

$$EI = -\frac{h^3}{12}nf''(\alpha)$$

از سوی دیگر $n = \frac{b-a}{h}$. در نتیجه خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب برابر است با

$$EI = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\alpha).$$

پس داریم $EI = \mathcal{O}(h^2)$.

نکته‌ی ۱.۴.۵. با توجه به حضور جمله‌ی $f''(\alpha)$ در خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب واضح است که این روش در حالتی که f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر یک باشد، دقیق است (به این مفهوم که خطای برشی آن صفر است).

نکته‌ی ۲.۴.۵. اگر M_2 کران بالایی برای $|f''(x)|$ روی بازه‌ی $[a, b]$ باشد آنگاه داریم

$$|EI| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2.$$

از این نامساوی می‌توان برای بدست آوردن طول گام h یا تعداد زیربازه‌ها یعنی n در روش ذوزنقه‌ای مرکب با این هدف استفاده کرد که خطای (برشی) روش از یک مقدار ϵ قابل تحملِ داده‌شده، کمتر باشد.

۵.۵ قاعده‌ی سیمسون مرکب

ایده‌ی این روش نیز سرراست است: بازه‌ی $[x_0,\ x_n] = [a, b]$ را به تعدادی زیربازه با پهنای یکسان افراز کرده و در هر زیربازه، قاعده‌ی سیمسون ساده را اجرا می‌کنیم.

از آنجا که قاعده‌ی سیمسون ساده نیاز به سه نقطه برای درونیابی درجه دو دارد، هر زیربازه باید به فرم $[x_i,\ x_{i+2}]$ باشد که در آن $i = 0, 2, 4, \cdots, n-2$. چون این اندیس‌ها دو-در-میان هستند پس تعداد زیربازه‌هایی که این‌چنین ساخته می‌شود برابر است با

$$\frac{(n-2)-0}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

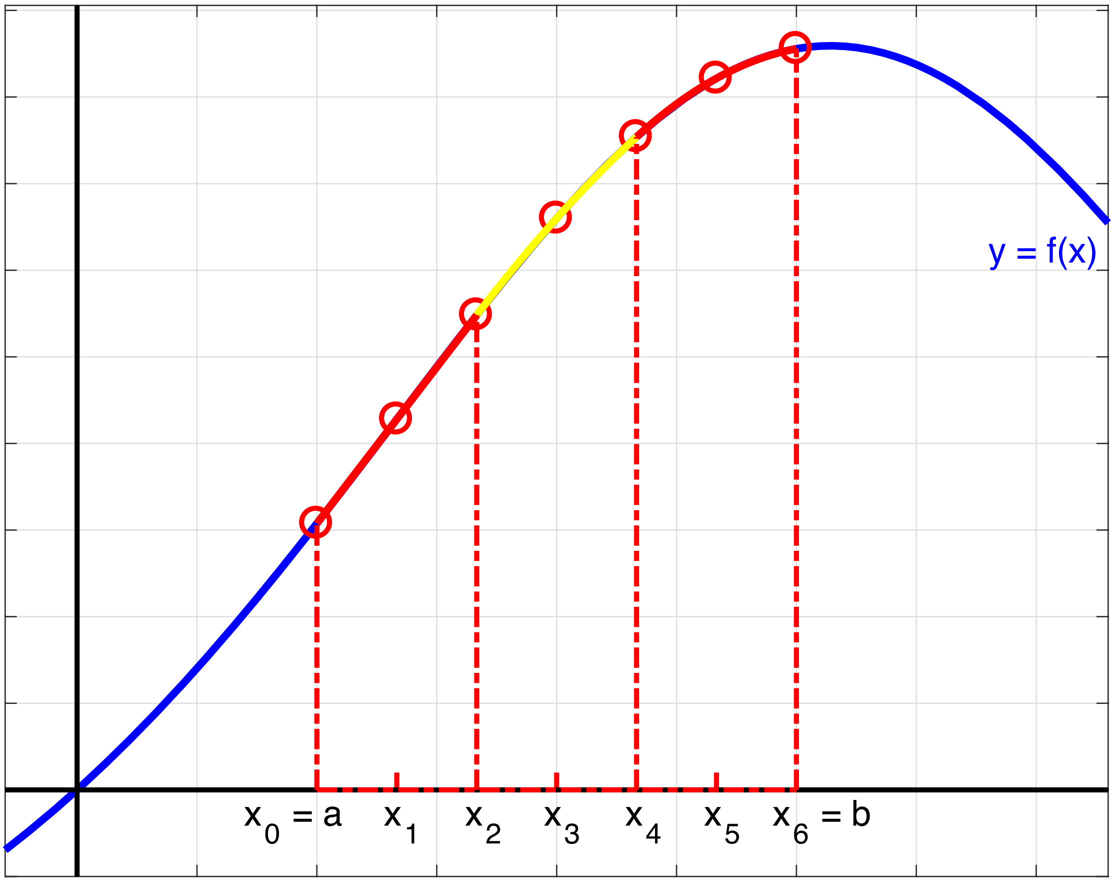
این بدان معناست که برای اجرای صحیح روش، n باید ((عددی زوج)) باشد. با این فرض، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \\ &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \frac{h}{3}(f_4 + 4f_5 + f_6) \\ &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)\end{aligned}$$

پس داریم

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\Big). \quad (۱۰.۵)}$$

شکل ۵.۵ را ببینید جایی که سهمیِ مورداستفاده برای درونیابی در دومین زیربازه، برای تمایز بهتر، با رنگ متفاوت مشخص شده است.



شکل ۵.۵: قاعده‌ی سیمسون مرکب برای $n = 6$. در هر زیربازه، قاعده‌ی سیمسون ساده یعنی درونیابی با یک سهمی اجرا می‌شود.

۱.۵.۵ خطای قاعده‌ی سیمسون مرکب

روند تعیین میزان خطا بسیار شبیه به روند تعیین خطای قاعده‌ی ذوزنقه‌ای مرکب است. با استفاده از خطای قاعده‌ی سیمسون ساده روی هر زیربازه یعنی فرمول (۷.۵) داریم

$$\begin{aligned}
EI &:= \int_a^b f(x)\ dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \\
&= \Big(\int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_1) \Big) + \cdots + \Big(\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\ dx - \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \Big) \\
&= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_1) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_3) - \cdots - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_{n-1}); \qquad \alpha_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \\
&= -\frac{h^5}{90} \Big(f^{(4)}(\alpha_1) + f^{(4)}(\alpha_3) + \cdots + f^{(4)}(\alpha_{n-1}) \Big). \qquad (۱۱.۵)
\end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{cases} m := \min\limits_{a \le x \le b} f^{(4)}(x), \\ M := \max\limits_{a \le x \le b} f^{(4)}(x). \end{cases}$$

بنابراین برای $i = 1, 3, \cdots, n-1$ داریم $m \le f^{(4)}(\alpha_i) \le M$ و در نتیجه

$$\frac{n}{2} m \le f^{(4)}(\alpha_1) + f^{(4)}(\alpha_3) + \cdots + f^{(4)}(\alpha_{n-1}) \le \frac{n}{2} M.$$

پس

$$m \le \frac{f^{(4)}(\alpha_1) + f^{(4)}(\alpha_3) + \cdots + f^{(4)}(\alpha_{n-1})}{\frac{n}{2}} \le M.$$

بنابراین $\bar{t} := \frac{f^{(4)}(\alpha_1) + f^{(4)}(\alpha_3) + \cdots + f^{(4)}(\alpha_{n-1})}{\frac{n}{2}}$ مقداری است که در رابطه‌ی

$$\min_{a \le x \le b} f^{(4)}(x) \le \bar{t} \le \max_{a \le x \le b} f^{(4)}(x)$$

صدق می‌کند. پس اگر $f^{(4)}(x)$ پیوسته باشد، $\alpha \in [a, b]$ موجود است به طوری که $f^{(4)}(\alpha) = \bar{t}$. بنابراین بر طبق (۱۱.۵) داریم

$$EI = -\frac{h^5}{90} \frac{n}{2} f^{(4)}(\alpha) = -\frac{h^5}{90} \frac{b-a}{2h} f^{(4)}(\alpha)$$

در نتیجه خطای قاعده‌ی سیمسون مرکب برابر است با

$$EI = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\alpha)$$

یعنی داریم $EI = \mathcal{O}(h^4)$.

نکته‌ی ۱.۵.۵. از آنجا که جمله‌ی $f^{(4)}(\alpha)$ در خطای قاعده‌ی سیمسون مرکب ظاهر می‌شود، پس این روش در حالتی که f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر سه باشد، ‌"دقیق" است.

نکته‌ی ۲.۵.۵. اگر M_4 کران بالایی برای $|f^{(4)}(x)|$ روی بازه‌ی $[a,b]$ باشد آنگاه داریم

$$|EI| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4. \tag{۱۲.۵}$$

معمولا از این نامساوی برای تعیین h یا تعداد زیربازه‌ها یعنی $n/2$ به گونه‌ای که خطای روش سیمسون مرکب از مقداری از پیش تعیین شده، کمتر باشد، استفاده می‌شود.

مثال ۱.۵.۵. داده‌های زیر مربوط به تابعی همچون $f(x)$ موجود هستند.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
f_i	3.1411	2.5008	2.0279	2.2710	3.3834	3.9551	2.4897

تقریبی برای $\int_0^{1.2} f(x)\,dx$ به کمک هر دو روش ذوزنقه‌ای و سیمسون به دست آورید.

با توجه به فرمول (۸.۵) تقریبی که با روش ذوزنقه‌ای به دست می‌آید برابر است با

$$\int_0^{1.2} f(x)\,dx \approx \frac{0.2}{2}(f(0)+2f(0.2)+2f(0.4)+2f(0.6)+2f(0.8)+2f(1)+f(1.2)) \approx 3.3907.$$

از سوی دیگر با روش سیمسون داریم

$$\int_0^{1.2} f(x)\,dx \approx \frac{0.2}{3}(f(0)+4f(0.2)+2f(0.4)+4f(0.6)+2f(0.8)+4f(1)+f(1.2)) \approx 3.4241.$$

توضیح اضافه اینکه داده‌های جدول قبل از تابع $f(x) = 3 + \sin(3e^x)$ گرفته شده‌اند که مقدار درست انتگرال آن تا پنج رقم بامعنا برابر است با 3.4118. بعلاوه تابع اولیه‌ی f برحسب توابع استاندارد ریاضی موجود نیست!

مثال ۲.۵.۵. به کمک قاعده‌ی سیمسون تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx$ را یک بار با طول گام $h = \frac{\pi}{4}$ و سپس با طول گام $h = \frac{\pi}{8}$ به دست آورید.

به ازای $h = \frac{\pi}{4}$ داریم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx \approx \frac{\frac{\pi}{4}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{12}(0 + 2\sqrt{2} + 1) \approx 1.00228.$$

و برای $h = \frac{\pi}{8}$ داریم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx \approx \frac{\frac{\pi}{8}}{3}(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + 2\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}) \approx 1.00013.$$

چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

پس مشاهده می‌کنیم که پاسخ نظیر با طول گام کوچک‌تر (روش سیمسون مرکب) دارای خطای کمتری است.

مثال ۳.۵.۵. طول گام h را طوری تعیین کنید که بتوان از قاعده‌ی سیمسون برای محاسبه‌ی $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\ dx$ با خطای برشی کمتر یا مساوی با 10^{-5} استفاده کرد.

برای حل مسئله از نامساوی (۱۲.۵) استفاده می‌کنیم که نیاز به کرانی برای مشتق چهارم انتگرالده دارد. داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = x\cos(x) \Longrightarrow f'(x) &= \cos(x) - x\sin(x), \\ f''(x) &= -2\sin(x) - x\cos(x), \\ f'''(x) &= -3\cos(x) + x\sin(x), \\ f^{(4)}(x) &= 4\sin(x) + x\cos(x). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ پس داریم

$$|f^{(4)}(x)| \le 4|\sin(x)| + |x|\ |\cos(x)| \le 4 + \frac{\pi}{2}(1) =: M_4$$

هدف این است که [۱] مطابق (۱۲.۵)، طول گام h در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\frac{(\frac{\pi}{2}-0)}{180}h^4(4+\frac{\pi}{2}) \leq 10^{-5},$$

یعنی $h \leq 0.1176$ که به ازای آن داریم

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{\pi/2-0}{h} \geq 13.357.$$

از سوی دیگر محدودیت اصلی در روش سیمسون، زوج‌بودن n است. به ازای $n = 14$ طول گامِ مناسب، برابر خواهد بود با

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{28} \approx 0.1122.$$

[۱] دقت کنید که M_4 تنها کران بالای بدبینانه‌ای برای مشتق چهارم f است و تعیین کران خطای بهتر، نیاز به یافتن ریشه‌ی مشتق پنجم f یعنی حل مسئله‌ی $5\cos(x) - x\sin(x) = 0$ می‌باشد. ریشه‌ی این تابع در بازه‌ی مطلوب، حدودا برابر است با $r = 1.3138$ که مقدار بیشینه‌ی مشتق چهارم f را تقریبا $f^{(4)}(r) \approx 4.2026$ نشان می‌دهد. با این حال در ادامه‌ی حل از همان کران $M_4 \approx 5.5708$ که تعیین آن بسیار ساده بود استفاده می‌کنیم.