### ۱.۲.۳ خطای (تقریب با) درون‌یابی چندجمله‌ای

فرض کنید تابع $f$ که بر بازه‌ی $[a,\ b]$ تعریف‌شده موجود باشد و $y_i = f(x_i)$ مقادیر تابع در $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_i \in [a,\ b]$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باشند. می‌دانیم که چندجمله‌ای یکتای از درجه‌ی حداکثر $n$ همچون $p_n(x)$ موجود است به طوری که اقلا در حساب دقیق (یعنی با دقت نامتناهی و در نتیجه عاری از خطاهای گردکردن) $p_n(x_i)$ دقیقا مساوی با $y_i$ خواهد بود، یعنی اختلاف بین $p_n(x_i)$ و $y_i$ مساوی صفر می‌باشد. پرسش این است که چنانچه $p_n(x)$ را بعنوان تقریبی برای تابع $f(x)$ در سرتاسر بازه‌ی $[a,\ b]$ درنظر بگیریم، اختلاف بین مقادیر $f(x)$ و $p_n(x)$ چقدر خواهد بود؟ به وضوح انتظار نداریم مقدار دو تابع در نقاط متفاوت با $x_i$ها یکسان باشد یعنی حتی در حساب دقیق نیز خطای ناصفر خواهیم داشت. علاقمندیم خطای

$$f(x) - p_n(x)$$

را برای $x \in [a,\ b]$ تخمین زده یا کراندار کنیم. این همان خطای تقریب (برشی یا گسسته‌سازی) است که در فصل اول با آن آشنا شدیم که در اینجا حتی در غیاب خطاهای گردکردن نیز حاضر می‌باشد. برای اثبات فرمول خطای درون‌یابی به قضیه‌ی رول تعمیم‌یافته نیاز داریم:

**قضیه‌ی ۲.۲.۳.** فرض کنید $f$ بر بازه‌ی $[a,\ b]$ پیوسته و بر بازه‌ی $(a,\ b)$ نیز $n$ بار مشتق‌پذیر باشد. اگر $f$ در $k+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0, x_1, \ldots, x_k$ از $[a,\ b]$ ریشه داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی $c \in (a,\ b)$ یافت می‌شود به طوری که $f^{(k)}(c) = 0$.

در قضیه‌ی زیر، منظور از نماد $\mathbb{C}^{n+1}[a,\ b]$، فضای تمام تابع‌هایی است که مشتق تا مرتبه‌ی $n+1$ آنها در بازه‌ی $[a,\ b]$ موجود بوده و پیوسته است.

**قضیه‌ی ۳.۲.۳.** اگر $p_n$ چندجمله‌ای درون‌یاب تابع $f \in \mathbb{C}^{n+1}[a,\ b]$ در نقاط متمایز $x_0, x_1, \cdots, x_n$ باشد، آنگاه خطای درون‌یابی برابر است با

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x), \qquad (۲.۳)$$

که در آن $\zeta_x$ نقطه‌ای در بازه‌ی شامل نقاط $x_i$ و نقطه‌ی $x$ است.

*اثبات.* اگر $x = x_i$ که با توجه به درون‌یاب‌بودنِ چندجمله‌ای $p_n$، خطای تقریب صفر بوده و حکم برقرار است چرا که هر دو سمت رابطه‌ی (۲.۳) برابر با صفر می‌باشند. پس آنچه می‌ماند اثبات حکم برای حالتی است که $x \neq x_i$. پس فرض می‌کنیم $x \neq x_i$ متعلق به بازه‌ی $[a,\ b]$ و از این به بعد مقداری ثابت باشد.

مقدار ثابت

$$\phi(x) := \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)},$$

را در نظر بگیرید. تابع $g$ از متغیر $t$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) := f(t) - p_n(t) - \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)\phi(x).$$

واضح است که $g$ تابعی $n+1$ بار مشتق‌پذیر است که دارای $n+2$ ریشه‌ی $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ در بازه‌ی $[a,\ b]$ می‌باشد. پس طبق قضیه‌ی رول تعمیم‌یافته نقطه‌ای همچون $\zeta \in [a,\ b]$ وجود دارد به طوری که $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$. از سوی دیگر به سادگی می‌توان دید که $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)!\phi(x)$ چرا که $\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ دارای جمله‌ی پیشروی $t^{n+1}$ است و $\phi(x)$ نیز مقداری ثابت است. پس با جایگذاری $t = \zeta$ در رابطه‌ی قبل داریم $g^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - (n+1)!\phi(x)$ که به کمک رابطه‌ی $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\phi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}.$$

بنابراین داریم:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

□

یک برداشت (نه کاملا دقیق) از قضیه‌ی بالا و در واقع سمت راست فرمول (۲.۳) این است که (در تئوری) چنانچه از کیفیت یعنی میزان خطای تقریبی که با درونیاب درجه $n$ به دست آورده‌ایم، راضی نبودیم، می‌توان امیدوار بود که با افزایش تعداد نقاط (و در نتیجه درجه)، چندجمله‌ای درونیاب جدیدی بیابیم که میزان خطای (تقریب) آن کمتر باشد.

نتیجه‌ی ۱.۲.۳. اگر برای $x \in [a,\ b] = [x_0,\ x_n]$ داشته باشیم: $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|}{(n+1)!}M_{n+1} \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}. \quad (۳.۳)$$

مثال ۲.۲.۳. تابع $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{2})$ و نقاط $x_0 = 0$، $x_1 = 1$، $x_2 = 2$ را در نظر بگیرید.

۱. چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ برای تابع $f(x)$ را در نقاط داده‌شده بیابید.

۲. کران بالایی برای میزان خطای تقریب تابع $f(x)$ با چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ که در قسمت قبل یافته‌اید بدست آورید.

۳. مقدارکران بالایی که در قسمت قبل یافته‌اید به ازای نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ را با خطای واقعی در این نقطه یعنی $|f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})|$ مقایسه کنید.

برای حل مسئله ابتدا تابع جدولی نقاط داده‌شده را می‌سازیم:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 0 | $-1$ |

پس چندجمله‌ای‌های لاگرانژ عبارتند از:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1.\\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2 + 2x.\\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

پس داریم

$$p(x) = l_0(x) - l_2(x) = 1 - x.$$

طبق فرمول (۳.۳) برای یافتن کران بالایی برای خطای تقریب با درونیاب سه نقطه‌ی داده‌شده باید ابتدا کران بالایی برای مشتق سوم تابع $f$ بر بازه‌ی $[0,2]$ بیابیم. داریم:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2}),\\
f''(x) &= \frac{-\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi x}{2}),\\
f^{(3)}(x) &= \frac{\pi^3}{8}\sin(\frac{\pi x}{2}),
\end{aligned}$$

آنچه لازم است مقادیر مینیموم و ماکزیموم تابع $f^{(3)}(x)$ بر بازه‌ی $[0,2]$ است. پس نقاط بحرانی تابع $f^{(3)}(x)$ را نیاز داریم یعنی کافی است بجز دو نقطه‌ی صفر و دو، نقاطی که مشتق تابع $f^{(3)}(x)$ در درون

این بازه صفر می‌شوند را بررسی کنیم. چون

$$f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{16}\cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$$

بدین معناست که

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} \to x = 1$$

پس بیشترین مقدار تابع $|f^{(3)}(x)|$ در یکی از سه نقطه‌ی صفر، یک و دو حاصل خواهد شد. داریم:

$$\begin{aligned}
&f^{(3)}(0) = 0,\\
&f^{(3)}(1) = \frac{\pi^3}{8}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^3}{8},\\
&f^{(3)}(2) = \frac{\pi^3}{8}\sin(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$|f^{(3)}(x)| \geq |f^{(3)}(1)| = \frac{\pi^3}{8} =: M_3,$$

و در نتیجه پاسخ قسمت دوم عبارت است از:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^3}{8\times 3!}|(x-0)(x-1)(x-2)|$$

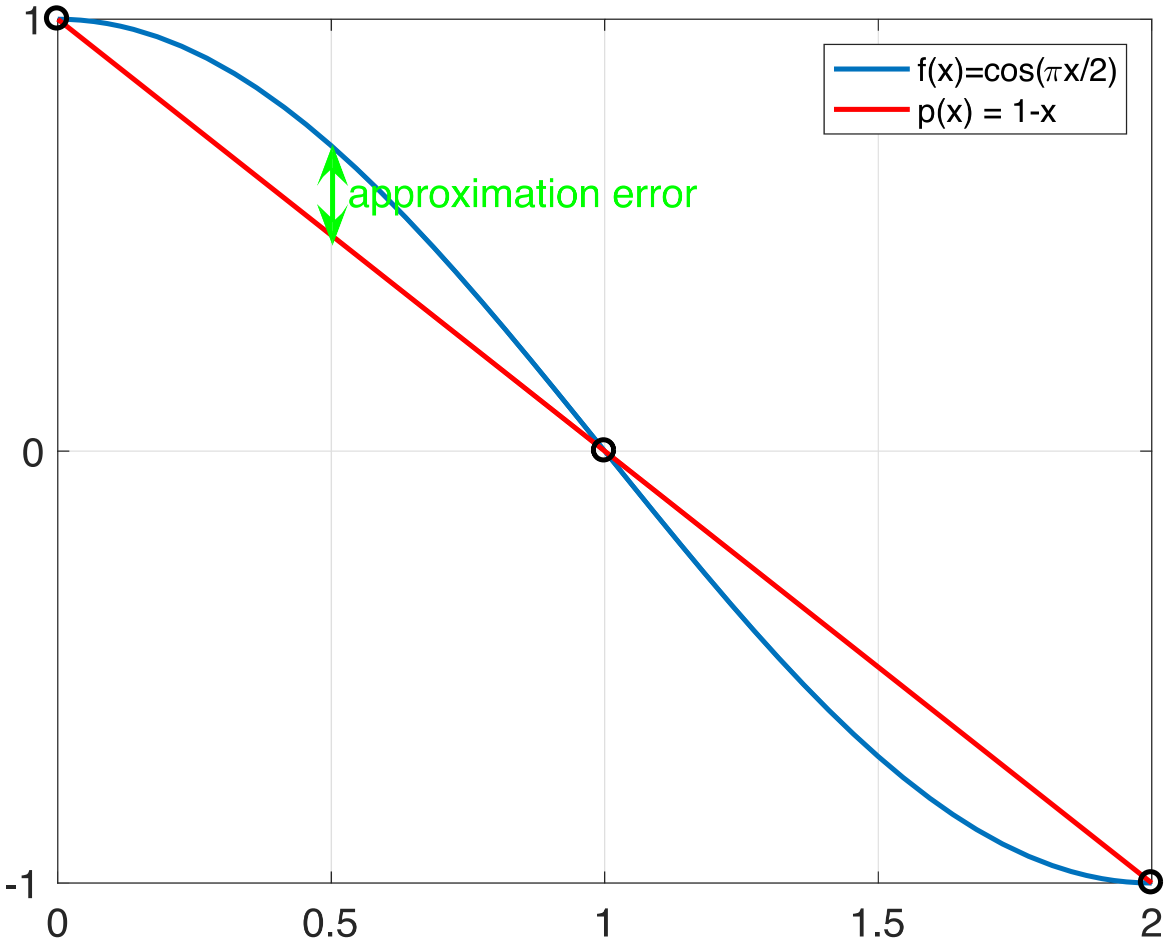
برای حل قسمت سوم ابتدا میزان واقعی خطای تقریب را در نقطه‌ی $x = 0.5$ تعیین می‌کنیم:

$$|f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})| = |\cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}| = |\frac{\sqrt{2}-1}{2}| \approx 0.207.$$

کران خطای تقریب که از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود عبارت است از:

$$\frac{\pi^3}{8\times 3!}|\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})\frac{-3}{2}| \approx 0.242.$$

شکل ۳.۳ را ببینید. طول پیکان سبزرنگ در واقع حدودا 0.207 است.




شکل ۳.۳: تابع $f$ و چندجمله‌ای درونیاب $p$ در سه نقطه مربوط به مثال ۲.۲.۳. خطای تقریب در نقطه‌ی $x = 0.5$ با پیکان دوسو مشخص شده است.

## ۲.۲.۳ روش هورنر برای ارزیابی چندجمله‌ای‌ها در پایه‌ی توانی

فرض کنید چندجمله‌ای $q(x)$ از درجه $n$ به صورت بسطی متناهی بر حسب پایه‌های توانی $1, x, x^2, \cdots, x^n$ داده شده باشد یعنی

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

می‌خواهیم مقدار چندجمله‌ای $q(x)$ را در یک نقطه‌ی مشخص $x$ بیابیم. ساده‌ترین کار برای حل این مسئله به صورت زیر است: ابتدا مقدار $x^n$ را با $n-1$ بار ضرب متوالی $x$ در خودش یافته و حاصل را در $a_n$ ضرب کنیم. تا اینجا $n$ ضرب انجام داده‌ایم. سپس حاصل $a_{n-1}x^{n-1}$ را با $n-1$ ضرب به دست می‌آوریم و به طرز مشابه حاصل $a_1x$ را با یک ضرب به دست می‌آوریم. تعداد کل عملیات ضربی که تاکنون انجام

داده‌ایم برابر است با

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

نهایتا به $n$ جمع برای یافتن $q(x)$ نیز نیاز است که کل تعداد عملیات حسابی را به

$$n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n.$$

می‌رساند.

البته که می‌توان هوشمندانه‌تر از روش قبل هم عمل کرد: بجای شروع از جمله‌ی $a_n x^n$ از کوچک‌ترین توان کار را شروع کرد تا بتوان بعد از محاسبه‌ی $x^i$ با توجه به موجود بودن این مقدار حاصل $x^{i+1}$ را با تنها با یک بار ضرب به صورت $x^i x$ به دست آورد و نه با $i$ بار ضرب! چنانچه این کار را انجام دهیم تعداد کل عملیات ضرب عبارت خواهد بود از:

$$\underbrace{0}_{a_0} + \underbrace{1}_{a_1 x} + \underbrace{2}_{a_2 x^2} + \underbrace{2}_{a_3 (x^2) x} + \underbrace{2}_{a_4 (x^3) x} + \cdots + \underbrace{2}_{a_n (x^{n-1}) x} = 0 + 1 + 2(n-2+1) = 2n-1.$$

در نتیجه کل تعداد جمع‌ها و ضرب‌ها عبارت خواهد بود از:

$$n + (2n-1) = 3n-1.$$

اما مشهور است که سریع‌ترین روشی که برای ارزیابی یک چندجمله‌ای کلی به فرم $q(x)$ موجود می‌باشد، روش هورنر است. برای آشنایی با این روش از یک مثال شروع می‌کنیم.

**مثال ۳.۲.۳.** می‌خواهیم مقدار چندجمله‌ای $q(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ را در نقطه‌ی $x = -2$ بیابیم. این کار با روش بالا نیاز به $3n - 1 = 11$ عمل محاسباتی دارد. در روش هورنر ابتدا چندجمله‌ای داده‌شده را با استفاده از ضرب‌های تودرتو بازنویسی می‌کنند. در این مثال خاص قرار می‌دهیم

$$q(x) = 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 1 + x\Bigg(3 + x\Big(-2 + x\big(4 + x(3)\big)\Big)\Bigg).$$

سپس از داخلی‌ترین پرانتز، شروع به جایگذاری مقدار $x$ داده‌شده کرده و پاسخ‌های مراحل میانی را ذخیره

و مجددا استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&q_4 = 3,\\
&q_3 = 4 + x \times q_4 = -2,\\
&q_2 = -2 + x \times q_3 = +2,\\
&q_1 = 3 + x \times q_2 = -1,\\
&q_0 = 1 + x \times q_1 = +3.
\end{aligned}
$$

همانگونه که می‌بینیم $q_0$ همان مقدار $q(-2)$ بوده و برای ارزیابی چندجمله‌ای درجه چهار داده‌شده نیاز به چهار ضرب و چهار جمع یعنی کلا هشت عمل محاسباتی است.

به طرز مشابه در حالت کلی برای ارزیابی چندجمله‌ای

$$q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

با روش هورنر ابتدا قرار می‌دهیم:

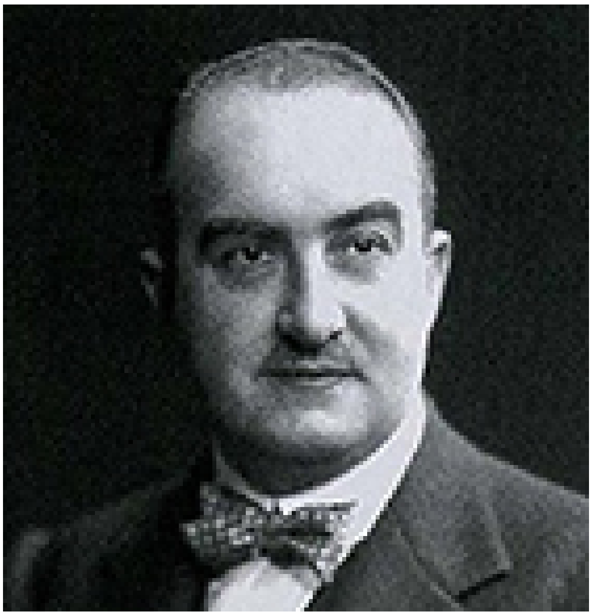
$$q(x) = a_0 + x\Bigg(a_1 + x\Big(a_2 + \cdots + x\big(a_{n-1} + x(a_n)\big)\cdots\Big)\Bigg).$$

سپس قرار می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
&q_n = a_n,\\
&q_{n-1} = a_{n-1} + x \times q_n,\\
&q_{n-2} = a_{n-2} + x \times q_{n-1},\\
&\cdots\\
&q_1 = a_1 + x \times q_2,\\
&q_0 = a_0 + x \times q_1.
\end{aligned}
$$

در هر یک از عبارت‌های $q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$ یک ضرب و یک جمع ظاهر شده یعنی کلا به $n$ جمع و $n$

ضرب و درنتیجه در مجموع با روش هورنر تنها نیاز به $2n$ عمل محاسباتی می‌باشد[۱].



شکل ۴.۳: ویلیام جورج هورنر ریاضیدان بریتانیایی قرن نوزدهم. ابداع زنده‌گرد یا زُوئِترُپ (از دستگاه‌های اولیه‌ی نمایش تصویر متحرک) نیز به وی نسبت داده می‌شود.

[۱] تصویر هورنر در شکل ۴.۳ از http://vfxmagazine.com/portfolio/wheel-of-life/ گرفته شده است.