

۴.۲ روش نقطه‌ی ثابت (تکرار ساده)

فرض کنید فردی در حال بازی کردن با یک ماشین حساب جیبی است بطوری‌که با شروع از عدد 1 دکمه‌ی کسینوس را مرتباً فشار می‌دهد. دنباله‌ی زیر (با سبک گرد کردن به صفر تا شش رقم دهدهی بامعنا) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 x^{(0)} &= 1.00000 \\
 x^{(1)} &= \cos(x^{(0)}) = 0.540302 \dots \\
 x^{(2)} &= \cos(x^{(1)}) = 0.857553 \dots \\
 x^{(3)} &= \cos(x^{(2)}) = 0.654289 \dots \\
 &\vdots \\
 x^{(10)} &= \cos(x^{(9)}) = 0.744237 \dots \\
 &\vdots \\
 x^{(19)} &= \cos(x^{(18)}) = 0.738937 \dots \\
 x^{(20)} &= \cos(x^{(19)}) = 0.739184 \dots \\
 &\vdots \\
 x^{(25)} &= \cos(x^{(24)}) = 0.739071 \dots \\
 &\vdots \\
 x^{(30)} &= \cos(x^{(29)}) = 0.739087 \dots
 \end{aligned}$$

این دنباله به عدد حقیقی $\alpha = 0.73908513 \dots$ (تقریباً مساوی ۴۲ درجه) همگراست. از آنجا که این دنباله را با شروع از $x^{(0)} = 1$ بدین صورت ساختیم که

$$x^{(k+1)} = \cos(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$$

پس حد α در معادله‌ی $\cos(\alpha) = \alpha$ صدق می‌کند. به همین خاطر α را یک نقطه‌ی ثابت^۱ تابع کسینوس می‌نامیم. بطور دقیق‌تر اگر تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد، مقدار x که در رابطه‌ی $x = g(x)$ صدق می‌کند را یک نقطه‌ی ثابت تابع g می‌نامیم، چرا که از اعمال تابع g بر x هیچ تغییری حاصل نخواهد شد. یکی از کاربردهای نقاط ثابت در یافتن ریشه‌ی یک معادله‌ی غیرخطی مرتبط است.

در مثال قبل، α نه تنها یک نقطه‌ی ثابت تابع کسینوس بود، بلکه یک ریشه‌ی تابع $f(x) = x - \cos(x)$ نیز هست. این ایده را می‌توان برای یافتن ریشه‌ی توابع غیر خطی بکار برد. البته تمام توابع دارای نقطه ثابت نمی‌باشند. مثلاً اگر تجربه‌ی قبل را با شروع از همان مقدار $x = 1$ این بار روی تابع نمایی $y = e^x$ تکرار کنیم، پس تنها ۴ تکرار خطای سرریز رخ خواهد داد:

$$\begin{aligned}x^{(0)} &= 1 \\x^{(1)} &= \exp(1) = 2.71828\dots \\x^{(2)} &= \exp(x^{(1)}) = 15.1542\dots \\x^{(3)} &= \exp(x^{(2)}) = 3.81427\dots \times 10^{+6} \\x^{(4)} &= \exp(x^{(3)}) = \text{Inf}\end{aligned}$$

اغلب می‌توان مسئله‌ی یافتن ریشه‌ی یک معادله‌ی غیرخطی را به صورت مسئله‌ی یافتن نقطه‌ی ثابت یک تابع مرتبط مطرح کرد. در واقع بسیاری از روش‌های تکراری برای حل معادلات غیرخطی بر پایه‌ی ایده‌ی تکرار به شکل

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

هستند، جایی‌که g تابعی است که بطور مناسبی انتخاب شده است و نقطه‌ی ثابت g ریشه‌ی $f(x) = 0$ است. این روش را روش نقطه‌ی ثابت یا (با توجه به سادگی و از نوع تکراری بودنش) روش تکرار ساده می‌نامند. توجه کنید که برای معادله‌ی داده‌شده‌ی $f(x) = 0$ ممکن است تعداد زیادی مسئله‌ی نقطه‌ی ثابت معادل $x = g(x)$ با توابع g متفاوت موجود باشند ولی همه این مساله‌های نقطه‌ی ثابت بطور یکسان در بدست آوردن یک روش تکراری برای حل معادله‌ی غیرخطی $f(x) = 0$ مفید نیستند. اولاً ممکن است برخی از این اشکال نقطه‌ی ثابت اصلاً دنباله‌ای همگرا را بوجود نیاورند و ثانیاً حتی در صورت همگرایی، سرعت همگرایی آنها متفاوت باشد. پس باید به دنبال شکل نقطه‌ی ثابتی باشیم که در صورت امکان همگرایی را

^۱fixed point

به سریع‌ترین صورت نتیجه دهد.

مثال ۱۰۴.۲. مسئله‌ی یافتن جواب معادله‌ی

$$f(x) := x^2 - x - 2 = 0$$

را در نظر بگیرید. نقطه‌ی ثابت هر یک از تابع‌های زیر، جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ است:

$$g_1(x) = x^2 - 2$$

$$g_2(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

$$g_3(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$$

چراکه هر چهار تابع در رابطه‌ی

$$x = g_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

صدق می‌کنند:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = x^2 - 2.$$

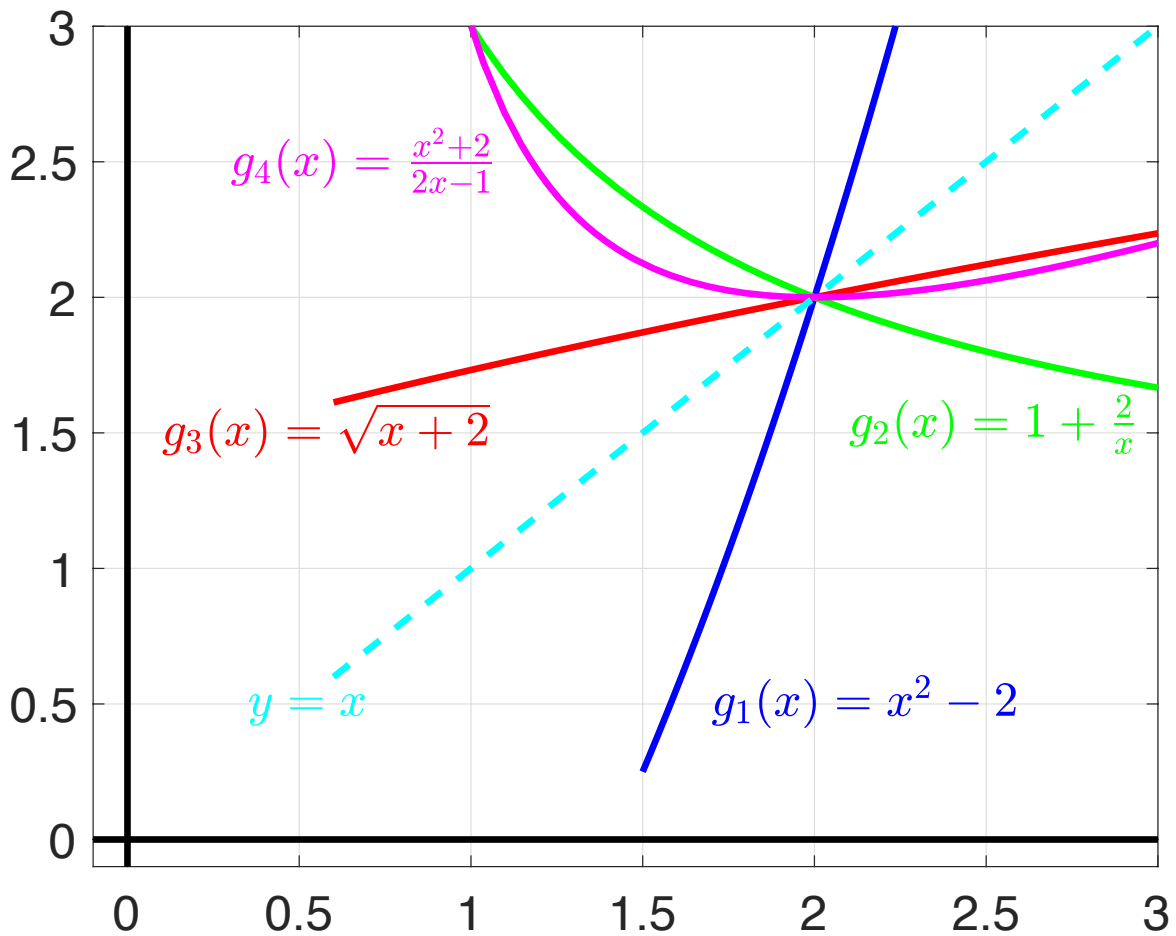
$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x - 1 - \frac{2}{x} = 0 \rightarrow x = 1 + \frac{2}{x}.$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x^2 = x + 2 \rightarrow x = \sqrt{x+2}.$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - x = 2 \rightarrow 2x^2 - x = x^2 + 2 \rightarrow x(2x - 1) = x^2 + 2 \rightarrow x = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}.$$

هر چهار تابع و محل برخورد آن‌ها با خط $y = x$ در شکل ۵.۲ رسم شده‌اند. همانگونه که می‌بینیم هر چهار تابع از نقطه‌ی $(2, 2)$ عبور می‌کنند و از سوی دیگر داریم $f(2) = 0$.

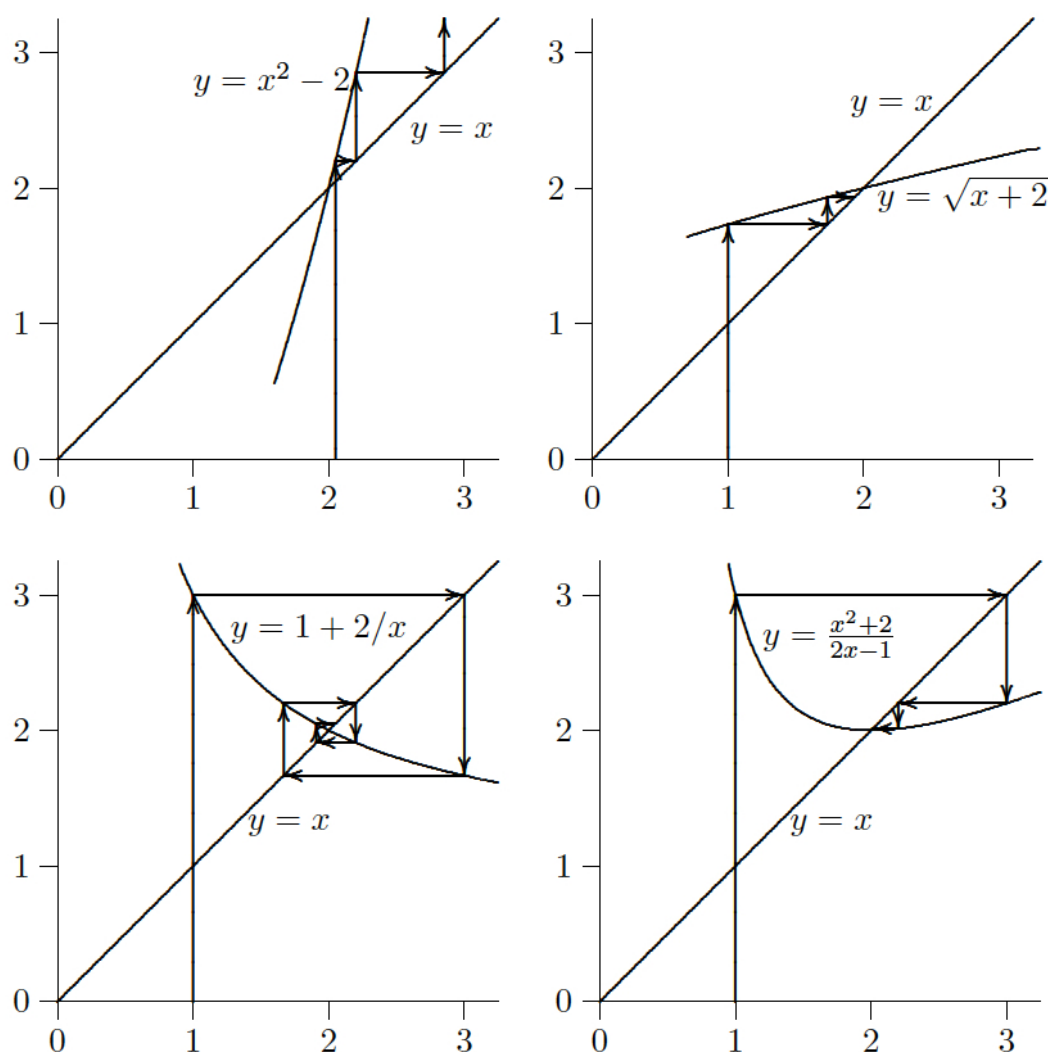
روش نقطه‌ی ثابت متناظر با هر تابع بصورت گرافیکی در شکل ۶.۲ نشان داده شده است. در این جا هر پیکان عمودی متناظر است با عمل محاسبه‌ی مقدار تابع g در نقطه‌ی مربوطه و پیکان افقی به سوی خط $y = x$ نشان می‌دهد که مقدار تابع g در نقطه‌ی فعلی بعنوان ورودی تکرار بعدی استفاده خواهد شد.



شکل ۵.۲: $x = 2$ نقطه‌ی ثابت هر چهار تابع است.

در هر یک از قسمت‌های شکل ۶.۲ روش تکرار ساده‌ی $x_{k+1} = g(x_k)$ برای یافتن نقطه‌ی ثابت یکی از چهار تابع قبل اجرا شده است. این کار در قسمت اول با شروع از حدس اولیه‌ی $x_0 = 2.1$ و در سه قسمت بعدی با شروع از حدس اولیه‌ی $x_0 = 1$ (که در مقایسه با $x_0 = 2.1$ از هدف یعنی نقطه‌ی ثابت $x = 2$ دورتر است) انجام شده. در قسمت اول واگرایی روش را مشاهده می‌کنیم اما در هر سه قسمت بعدی، روش همگراست. قطعه-کد زیر، روش نقطه‌ی ثابت را برای g_1 در متلب اجرا می‌کند:

```
kmax = 100; tol = 1e-10;
g1 = @(x) x.^2-2;
x = 2.1;
for k = 1:kmax
    x = [x, g1(x(end))];
```



شکل ۴.۲: تکرار نقطه ثابت

```

if ( abs(x(end) - x(end-1)) < tol )
    break
end
end
end

```

حداکثر تعداد تکرارها را ۱۰۰ و معیار توقف را کمتر شدن خطای (مطلق) قابل تحمل از 10^{-10} مشخص کرده‌ایم. شبیه همین قطعه-کد را برای سه تابع دیگر g_2 ، g_3 و g_4 نیز اجرا کرده و تعداد تکرارها را به همراه ۵ جمله‌ی آخر قبل از پایان اجرای هر چهار روش، به صورت ستونی چاپ کرده‌ایم:

g1: 100 iters	g2: 36 iters	g3: 18 iters	g4: 7 iters
Inf 1.999999999650754	1.999999995914762	2.011764705882353	
Inf 2.000000000174623	1.999999998978691	2.000045777065690	
Inf 1.99999999912689	1.99999999744673	2.000000000698492	
Inf 2.000000000043656	1.99999999936168	2.000000000000000	
Inf 1.99999999978172	1.99999999984042	2.000000000000000	

همانگونه که با توجه به شکل ۶.۲ انتظار داریم، روش اول واگرا و سه روش بعدی همگرا هستند. همچنین سرعت همگرایی در سه روش پایانی متفاوت بوده و به ترتیب بهتر شده است. پرسشی که مطرح می‌شود این است که آیا ابزاری ریاضی برای پیش‌بینی و فهم بهتر دلیل واگرایی یا همگرایی وجود دارد؟ و یا دلیل تفاوت سرعت همگرایی سه قسمت پایانی چیست؟ قضیه‌ی بعد این پرسش‌ها را پاسخ می‌دهد.

قضیه‌ی ۱۰.۴.۲. فرض کنید x^* نقطه ثابت تابع $g(x)$ باشد.

- اگر $|g'(x^*)| < 1$ آنگاه روش نقطه‌ی ثابت، بطور محلی (موضعی)^۱ همگراست (یعنی وجود دارد بازه‌ای شامل x^* بطوری‌که روش نقطه‌ی ثابت متناظر با شروع از درون این بازه، همگرا خواهد شد).
- اگر $|g'(x^*)| \geq 1$ آنگاه روش نقطه‌ی ثابت متناظر واگراست.

اثبات. برای بررسی همگرایی روش، خطای دو مرحله‌ی متوالی را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید:

$$\begin{cases} e_{k+1} := x^* - x_{k+1} \\ e_k := x^* - x_k \end{cases}$$

در روش نقطه‌ی ثابت داریم: $x_{k+1} = g(x_k)$. پس با استفاده از دو رابطه‌ی قبل داریم:

$$x^* - e_{k+1} = g(x^* - e_k)$$

از طرف دیگر اگر e_k کوچک باشد با استفاده از بسط تیلور تابع g حول نقطه‌ی x^* می‌توان سمت راست رابطه‌ی بالا را به صورت زیر ساده‌تر کرد:

$$x^* - e_{k+1} = g(x^*) - e_k g'(x^*) + \frac{e_k^2}{2!} g''(x^*) - \frac{e_k^3}{3!} g^{(3)}(x^*) + \dots \quad (۷.۲)$$

با نگه‌داشتن دو جمله‌ی اول سری تیلور و توجه به اینکه طبق فرض، x^* نقطه‌ی ثابت g است یعنی $x^* = g(x^*)$ تقریب زیر را برای $k = 0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$e_{k+1} \approx e_k g'(x^*) \quad (۸.۲)$$

اگر $e_0 = x^* - x_0$ خطای حدس اولیه را نشان دهد، طبق رابطه‌ی قبل داریم:

$$\begin{cases} e_1 \approx e_0 g'(x^*) \\ e_2 \approx e_1 g'(x^*) \end{cases} \Rightarrow e_2 \approx e_0 (g'(x^*))^2$$

و به همین ترتیب می‌توان دید که:

$$e_k \approx e_0 (g'(x^*))^k. \quad (۹.۲)$$

آنچه به دنبالش هستیم شرایط همگرایی حد دنباله‌ی خطاها به صفر است. با توجه به رابطه‌ی قبل اگر $|g'(x^*)| < 1$ روش همگرا و در غیر این صورت واگراست. \square

نتیجه‌ی ۱.۴.۲. با توجه به رابطه‌ی (۸.۲) می‌بینیم که نرخ همگرایی روش نقطه‌ی ثابت معمولاً خطی بوده و ثابت خطای مجانبی آن $c = |g'(x^*)|$ است.

نتیجه‌ی ۲.۴.۲. با توجه به رابطه‌ی (۹.۲) هرچه اندازه‌ی $g'(x^*)$ به صفر نزدیک‌تر باشد سرعت همگرایی بیشتر شده و حالت ایده‌آل این است که $g'(x^*) = 0$ باشد.

نتیجه‌ی ۳.۴.۲. اگر $g'(x^*) = 0$ باشد آنگاه نرخ همگرایی روش نقطه‌ی ثابت حداقل مربعی خواهد بود! فهم این موضوع به کمک بسط تیلور (۷.۲) ساده است. در این وضعیت داریم:

$$-e_{k+1} \approx 0 + \frac{e_k^2}{2!} g''(x^*).$$

چنانچه علاوه بر $g'(x^*)$ داشته باشیم $g''(x^*) = 0$ آنگاه نرخ همگرایی حداقل از مرتبه‌ی سه خواهد بود و به همین ترتیب!

اکنون بار دیگر به مثال قبل بازگشته و شرایط قضیه‌ی قبل را برای هر چهار تابع بررسی می‌کنیم:

$$g_1(x) = x^2 - 2 \Rightarrow g'_1(2) = 4 > 1 \Rightarrow \text{روش واگراست}$$

$$g_2(x) = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow |g'_2(2)| = \left| -\frac{1}{2} \right| < 1 \Rightarrow \text{روش همگراست}$$

$$g_3(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow g'_3(2) = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{روش همگراست}$$

$$g_4(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1} \Rightarrow g'_4(2) = 0 < 1 \Rightarrow \text{روش همگراست}$$

همچنین روش‌ها به ترتیب از بالا به پایین دارای کندترین تا سریع‌ترین همگرایی هستند. این تاییدکننده‌ی تعداد تکرارهایی است که در بالا برای سه روش همگرا دیدیم. به طور خاص، g_4 ، متناظر با روشی با نرخ همگرایی مربعی ($r = 2$) است. به یاد آورید که تعداد ارقام دهمی درستی که در بالا در خروجی این روش دیدیم، در هر تکرار تقریباً ((دو برابر)) می‌شد: به بیان دقیق‌تر، خروجی روش نقطه‌ی ثابت متناظر با g_4 ، در اولین تکراری که جوابش (در ستون آخر، سطر اول) چاپ شده برابر با 2.011764705882353 بود که دارای دو رقم درست است. این تعداد در تکرار بعدی جایی که 2.000045777065690 به دست آمد، به پنج رقم درست رسید. در تکرار بعد از آن، جواب تقریبی 2.000000000698492 به دست آمده که دارای ۱۰ رقم درست است و نهایتاً در تکرار ششم به حداکثر تعداد ارقام دهمی درست ممکن (که می‌دانیم در قالب دوگانه‌ی آی-تریپل-ای ۱۶ رقم است) دست یافتیم.

مثال ۲.۴.۲. دو روش نقطه‌ی ثابت را برای حل معادله‌ی $f(x) = x - e^{-x} = 0$ ساخته و در مورد همگرایی یا واگرایی هر دو روش به ریشه‌ی $x^* = 0.567$ بحث کنید.

واضح‌ترین انتخاب ممکن $g_1(x) = e^{-x}$ یعنی اجرای روش نقطه‌ی ثابت

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = e^{-x_k}$$

می‌باشد. داریم:

$$g'_1(x) = -e^{-x} \Rightarrow g'_1(x^*) = -e^{-0.567} \approx -0.567 \Rightarrow |g'_1(x^*)| < 1$$

پس با این انتخاب g_1 حتما می‌توان بازه‌ای یافت که روش، همگرا باشد. دومین تابع نقطه‌ی ثابت را می‌توان به صورت زیر ساخت:

$$f(x) = x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = x \Rightarrow -x = \log x.$$

بنابراین $g_2(x) = -\log x$ داریم:

$$g'_2(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow g'_2(x^*) = -\frac{1}{0.567} \approx -1.7637$$

چون $|g'_2(x^*)| > 1$ پس این روش، واگراست.

تمرین ۵. سه روش نقطه‌ی ثابت متفاوت را برای حل معادله‌ی $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ ساخته و همگرایی روش‌ها را برای یافتن هر دو ریشه‌ی f به صورت مجزا بررسی کنید.

یکی از پرسش‌هایی که می‌تواند در مورد قضیه‌ی ۱.۴.۲ مطرح شود این است که استفاده‌ی عملی از آن نیاز به دانستن مقدار نقطه‌ی ثابت x^* دارد حال آنکه x^* را قبل از اجرای روش نقطه‌ی ثابت (حتی به صورت تقریبی نیز) نداریم و به دنبال یافتن آن هستیم. بررسی شرایط قضیه‌ی مرتبط زیر نیازی به دانستن محل دقیق نقطه‌ی ثابت x^* ندارد.

قضیه‌ی ۲.۴.۲. فرض کنید تابع $g(x)$ بر بازه‌ی $I = [a, b]$ مشتق پذیر بوده و برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $g(x) \in I$. همچنین فرض کنید مقدار ثابت نامنفی $K < 1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم

$$|g'(x)| \leq K.$$

در این صورت g دارای نقطه‌ی ثابت یکتایی در I است به طوری که روش نقطه‌ی ثابت با شروع از هر حدس اولیه‌ای در این بازه همگراست.

اکنون نوبت به ساختن سیستماتیک حالت خاصی از روش نقطه‌ی ثابت است که دارای نرخ همگرایی مربعی است. تابع $g_4(x)$ که سریع‌ترین نرخ همگرایی را در بین چهار روش نقطه‌ی ثابتِ مثال ۱.۴.۲ داشت، در واقع روش نیوتن-رفسون بوده است.