فصل ۲

ریشه‌یابی توابع یک‌متغیره

۱.۲ مقدمه

از جبرخطی دبیرستان می‌دانیم که وجود و یکتایی جواب دستگاهی از n معادله و n مجهول خطی (که معمولا به شکل ماتریسی $Ax = b$ بیان می‌شود) چندان پیچیده نیست: جواب یکتاست، اگر و تنها اگر ماتریس ضرایب A ناتکین (معکوس‌پذیر) باشد. با این وجود وجود و یکتایی جواب‌های یک تک‌معادله‌ی غیرخطی اغلب پیچیده‌تر است و رفتارهای متفاوتی قابل رخداد است! در اصل در مقایسه با خطوط مستقیم، منحنی‌ها (نمودارهای غیرخطی) در حالت‌های متفاوتی می‌توانند برخورد کنند. مثال زیر را ببینید.

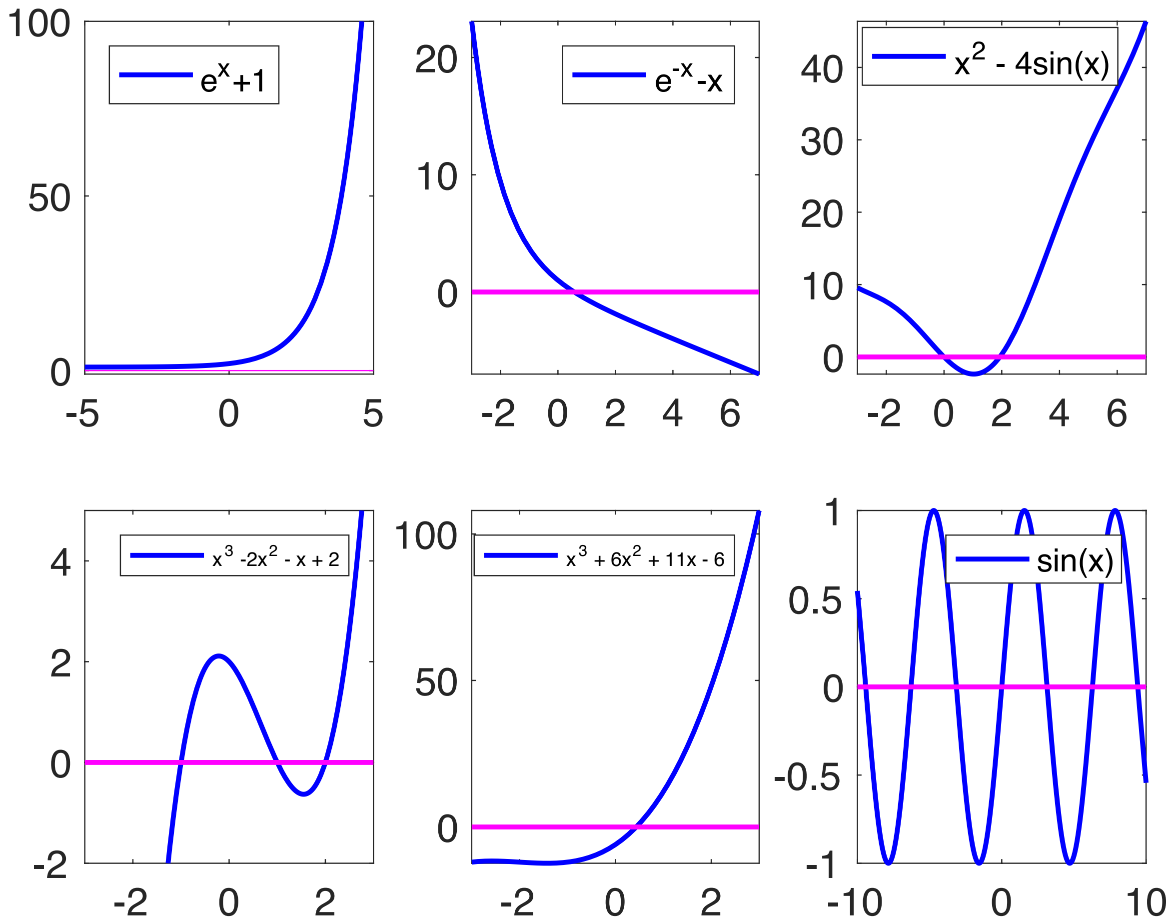
مثال ۱۰. تعداد ریشه‌های توابع غیرخطی می‌تواند بسیار متنوع باشد. در تمام نمودارهای شکل ۱.۲، محور

$$
\begin{aligned}
&e^x + 1 = 0 && \text{جواب ندارد}\\
&e^{-x} - x = 0 && \text{یک جواب دارد}\\
&x^2 - 4\sin x = 0 && \text{دو جواب دارد}\\
&x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0 && \text{سه جواب دارد}\\
&x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0 && \text{سه جواب دارد}\\
&\sin x = 0 && \text{بینهایت جواب دارد}
\end{aligned}
$$

xها با رنگ ارغوانی مشخص شده.

از سوی دیگر، یک معادله‌ی غیرخطی می‌تواند ریشه‌ی (جواب) تکراری [۱] داشته باشد.

[۱] multiple root



شکل ۲.۱: گستردگی حالت‌های ممکن برای تعداد ریشه‌های توابع غیرخطی در مثال ۱۰

تعریف ۳. اگر x یک ریشه‌ی تابع f باشد اما ریشه‌ی مشتق f نباشد یعنی $f(x)=0$ ولی $f'(x)\neq 0$، گوییم x یک ریشه‌ی ساده[1] برای f است.

از سوی دیگر اگر f و مشتق‌های تا مرتبه‌ی $m-1$ آن همگی دارای ریشه در نقطه‌ای یکسان همچون x باشند یعنی

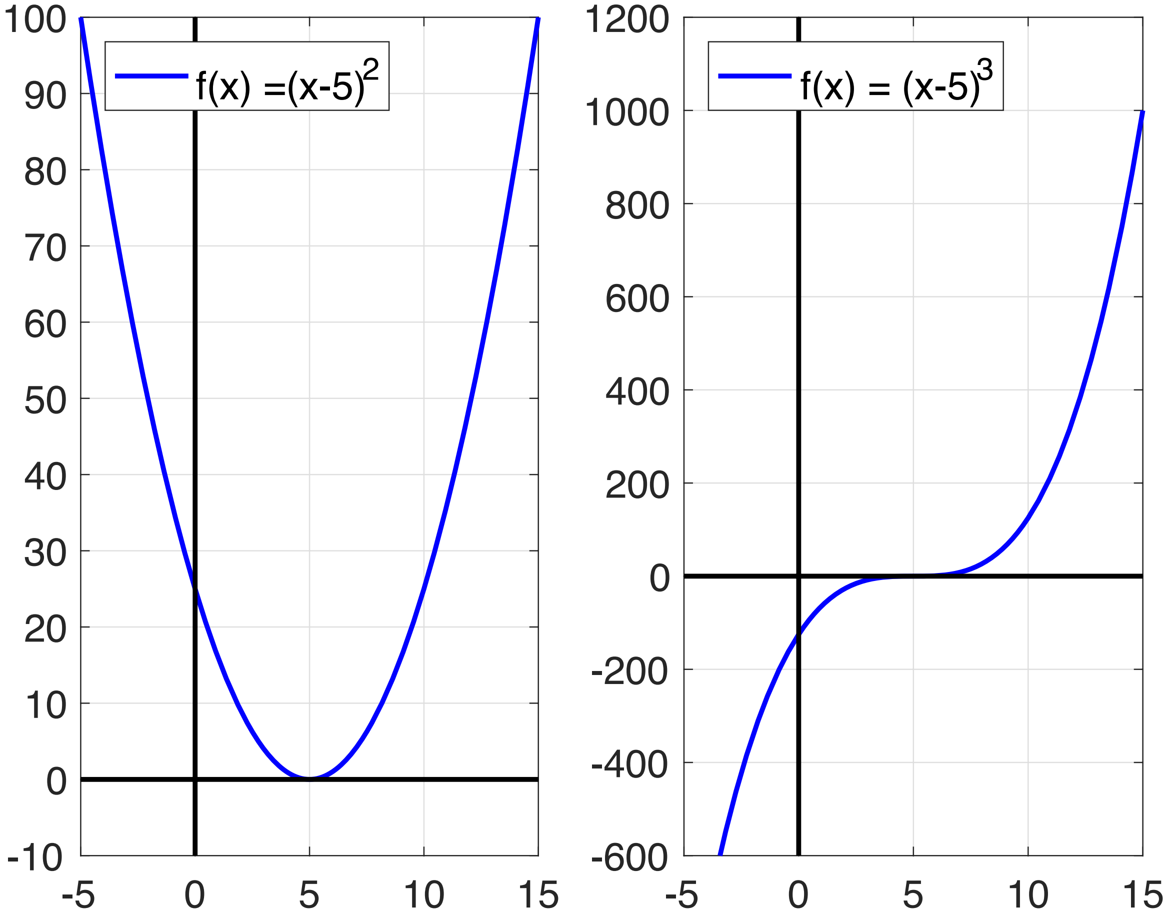
$$f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(m-1)}(x)=0$$

آنگاه x یک ریشه‌ی تکراری با مرتبه‌ی تکرار m نامیده می‌شود. بطور خاص اگر $f(x)=f'(x)=0$ آنگاه x یک ریشه‌ی تکراری با مرتبه‌ی تکرار دو نامیده می‌شود.

داشتن ریشه‌ی تکراری (در حالت یک بعدی) بدین معناست که منحنی f، در محل ریشه روی محور xها دارای خط مماس است. دو نمونه از توابع دارای ریشه‌ی تکراری در شکل ۲.۲ رسم شده‌اند.

تمرین ۴. براساس قضیه‌ی اساسی جبر می‌دانیم که هر چندجمله‌ای درجه n، دقیقا دارای n ریشه (با شمارش

[1] simple root



شکل ۲.۲: نمودار تابع $(x-5)^2$ با محور xها برخورد کرده ولی آن را قطع نمی‌کند (مرتبه‌ی تکرار زوج). از سوی دیگر نمودار تابع $(x-5)^3$ با محور xها برخورد کرده و آن را قطع می‌کند (مرتبه‌ی تکرار فرد).

تکرارها) است. با توجه به اینکه چندجمله‌ای

$$p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x - 6$$

هیچ جا روی محور xها مماس افقی نداشته و در نتیجه ریشه‌ی تکراری ندارد، چرا تنها یک ریشه را می‌توان در شکل ۱.۲ دید؟ قاعده‌ی علامت دکارت در مورد تعداد ریشه‌های این چندجمله‌ای چه می‌گوید؟

۱.۱.۲ عدد وضعیت (مطلق) مساله‌ی ریشه‌یابی

قبل از آشنایی با الگوریتم‌های ریشه‌یابی مفید است که میزان حساسیت مساله‌ی ریشه‌یابی به خطاهای گردکردن را بررسی کنیم. به یاد آورید که عدد وضعیت (نسبی) یک مساله با تقسیم اختلال نسبی خروجی بر اختلال نسبی ورودی به دست می‌آید. به همین ترتیب عدد وضعیت مطلق با تقسیم اختلال مطلق خروجی بر اختلال مطلق ورودی حاصل می‌شود.

ابتدا مساله‌ی

$$\text{یافتن } x \text{ به طوری که } y = f(x) \text{ باشد} \tag{۱.۲}$$

را در نظر می‌گیریم. این مساله، معکوسِ مساله‌ی ارزیابی مقدار تابع $y = f(x)$ به ازای x است چرا که جواب مساله‌ی (۱.۲) با فرض وجود معکوس تابع f (که مثلا اگر f در حوالی x یکنوا باشد، تضمین شده است)، برابر است با $x = f^{-1}(y)$. در مساله‌ی (۱.۲) خروجی عبارت است از x و ورودی عبارت است از y. پس با توجه به رابطه‌ی کلی (۹.۱) از فصل قبل داریم:

$$\begin{aligned}\text{عدد وضعیت نسبی مساله‌ی (۱.۲)} &= |\frac{\text{ورودی}}{\text{خروجی}} \times \text{مشتق (خروجی بر حسب ورودی)}| \\ &= |\frac{y}{x} \times (f^{-1})'(y)|,\end{aligned}$$

و همچنین از ریاضیات دبیرستان، رابطه‌ی زیر را برای مشتق تابع معکوس به یاد داریم:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

پس عدد وضعیت نسبی مساله‌ی (۱.۲) برابر است با:

$$\kappa_f(y) = |\frac{f(x)}{xf'(x)}|.$$

این عدد وضعیت نشان می‌دهد که وقتی داده‌ی ورودی y در نتیجه‌ی اختلال کوچکی هم‌چون δy به $y + \delta y$ تغییر کند، مقدار x با چه ضریبی تغییر می‌کند.

مساله‌ی اصلیِ این فصل اما ریشه‌یابی است که حالت خاص مساله‌ی (۱.۲) به ازای $y = 0$ می‌باشد. در نتیجه با جایگذاری این مقدار در فرمول بالا، عدد وضعیت نسبی برای تمام توابع f، تابع ثابت صفر خواهد شد! پس می‌توان نتیجه گرفت که عدد وضعیت نسبی (هرچند ابزار مناسبی برای تعیین میزان حساسیت مساله‌ی (۱.۲) بود)، برای تحلیل حساسیت مساله‌ی ریشه‌یابی مناسب نیست. یک راه برای غلبه بر این مشکل این است که به سراغ عدد وضعیتِ مطلق برویم. با توجه به نکته‌ی ۴ از فصل قبل و مشتق تابع معکوس، عدد وضعیتِ مطلقِ مساله‌ی ریشه‌یابی عبارت است از

$$\hat{\kappa}_f = \frac{1}{|f'(x)|}. \qquad (۲.۲)$$

پس مساله‌ی ریشه‌یابی، خوش‌وضع است اگر مشتق تابع f در نزدیکی ریشه‌ی x بزرگ باشد و بدوضع است چنانچه مشتق تابع در نزدیکی ریشه بسیار کوچک باشد. بدترین موقعیت مثلا وقتی است که x یک ریشه‌ی تکراری باشد که در این صورت عدد وضعیت مطلق (۲.۲) بینهایت می‌شود. به لحاظ شهودی می‌توان تصور کرد که وقتی ریشه‌ی x تکراری باشد، نمودار تابع در نزدیکی ریشه تقریبا افقی شده و تعیین محل دقیق برخورد منحنی با محور xها سخت‌تر خواهد بود. دقت کنید که حتی اگر x یک ریشه‌ی ساده‌ی f باشد چنانچه ریشه‌ی دیگری هم در نزدیکی x وجود داشته باشد بطور کلی این بدان معناست که نمودار تابع در نزدیکی x نمی‌تواند شیب چندان زیادی داشته باشد چرا که تابع باید قبل از اینکه فاصله‌ی زیادی از محور xها بگیرد باز هم این محور را قطع کند. در نتیجه $f'(x)$ در نزدیکی x مقداری کوچک بوده و عدد وضعیت بزرگ خواهد بود. پس میزان حساسیت مساله‌ی یافتن ریشه‌ی ساده به خطاهای کوچک گردکردن به میزان جدایی ریشه‌های f بستگی دارد: هر چه ریشه‌ها به هم چسبیده‌تر باشند عدد وضعیت بزرگ‌تر خواهد بود.

۲.۱.۲ قضیه‌ی آبل-روفینی

هدف ما در این فصل یافتن ریشه‌ی توابع غیرخطی در حالت کلی شامل توابع متعالی $f(x)$ است. با این حال فکرکردن به حالت خاص توابع چندجمله‌ای $p(x)$ گاهی بسیار مفید است چرا که در مورد یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها بسیار زیاد می‌دانیم و قاعدتا یافتن ریشه‌ی چنین توابع خاصی باید ساده‌تر از توابع متعالی به طور کلی باشد. اصولا به لحاظ تاریخی نیز شکل‌گیری علم جبرمجرد با پژوهش‌های گالوا از کار بر روی مساله‌ی ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها شروع شده است. قضیه‌ی مهم زیر در مورد ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها که به نام قضیه‌ی آبل-روفینی[۲] یا قضیه‌ی ناممکن‌بودن آبل[۱] شناخته می‌شود بسیار روشنگر است.

قضیه ۱.۱.۲. هیچ جواب جبری (شامل رادیکال‌ها) برای چندجمله‌ای‌های کلی با ضرایب دلخواه از درجه‌ی پنج یا بیشتر وجود ندارد.

عدم وجود جواب جبری بدین معناست که اصولا فرمولی بسته که در تعدادی متناهی مرحله عملیات، بتواند مساله‌ی ریشه‌یابی را به طور کلی حل کند وجود نداشته و در نتیجه باید به روش‌هایی متوسل شویم که

[۲] Abel-Ruffini theorem
[۱] Abel's impossibility theorem

شکل ۳.۲: از راست به چپ: آبل، روفینی و گالوا (تصویرها از ویکیپدیا). هر سه غول بر روی مساله‌ی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها کار کرده‌اند.

بینهایت مرحله دارند یعنی روش‌های تکراری که دنباله‌ای بینهایت-جمله‌ای مانند

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ x_{k+1},\cdots$$

را تولید می‌کنند به این امید که حد دنباله در بینهایت، ریشه‌ی تابع f باشد. هر روش تکراری دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ را با روند خاص خود می‌سازد و در واقع تفاوت روش‌های تکراری در چگونگی ساختن این دنباله است.

همانگونه که در فصل قبل نیز گفتیم، در عمل به طور کلی نمی‌توان بینهایت جمله‌ی یک دنباله را ساخت و مجبوریم تولید جملات دنباله‌ای که توسط هر روش تکراری ساخته می‌شود از جایی به بعد متوقف کنیم. این کار مفهوم ریشه‌ی تقریبی را حاصل می‌کند:

تعریف ۴. $\tilde{x}$ یک ریشه‌ی تقریبی تابع f نامیده می‌شود اگر

$$f(\tilde{x}) \approx 0$$

یا

$$|\tilde{x} - x^*| \approx 0$$

که در آن x^* جواب درست معادله‌ی $f(x) = 0$ است.

بررسیِ معیار اول معمولا ساده است چرا که در بیشتر مواقع می‌توان با هزینه‌ی کمی مقدار $f(\tilde{x})$ (که در واقع همان باقیمانده است) را محاسبه کرد. معیار دوم اما با توجه به اینکه ریشه‌ی درست x^* معمولا در دسترس نیست، به سادگی قابل بررسی نیست. با این‌حال می‌توان آن را تخمین زد یا کراندار نمود.

فرض کنید یک حدس اولیه برای جواب یک معادله‌ی غیرخطی انتخاب شده باشد. گفتیم که روش‌های تکراریِ مختلف از این حدس اولیه آغاز کرده و دنباله‌هایی مختلف از ریشه‌های تقریبی را تولید می‌کنند که امیدواریم به جواب همگرا باشند. در عمل تکرار را تا وقتی که نتیجه به اندازه کافی درست بوده پایان می دهیم. در این فصل روش‌های تکراری مختلفی را برای محاسبه‌ی عددی ریشه‌های یک معادله غیرخطی بررسی می‌کنیم. قبل از معرفی روش‌ها خوب است معیاری برای مقایسه‌ی آنها داشته باشیم.

۲.۲ نرخ همگرایی روش‌های تکراری

برای اینکه میزان کارایی روش‌های تکراری را با هم مقایسه کنیم، مفهوم نرخ همگرایی را تعریف خواهیم کرد. فرض کنید خطا در مرحله kام را با e_k نمایش دهیم:

$$e_k = x_k - x^* \qquad (۳.۲)$$

که در آن x_k جواب تقریبی بدست آمده در مرحله kام و x^* جواب دقیق هستند. توجه کنید که بعضی روش‌ها برای یافتن ریشه‌ی تابع f در واقع یک جواب تقریبی بخصوص x_k را در مرحله kام نساخته و در عوض بازه‌ای را تولید می‌کنند که جواب را در بردارد و با افزایش k پهنای این بازه کوچک و کوچک‌تر می‌شود. برای چنین روش‌هایی e_k را طول این بازه در مرحله kام در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵. گوییم روش تکراری سازنده‌ی دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ با نرخ r همگراست اگر

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = c \qquad (۴.۲)$$

جایی‌که c یک مقدار ثابت متناهی غیرصفر است.

برخی حالات خاص مهم عبارتند از:

- اگر $r = 1$ و $c < 1$، نرخ همگرایی، خطی[۱] نامیده می‌شود.

[۱] linear

- اگر $r > 1$ و $c < 1$، نرخ همگرایی، فراخطی[1] نامیده می‌شود.

- اگر $r = 2$ و $c < 1$، نرخ همگرایی، مربعی یا از مرتبه‌ی دو[2] نامیده می‌شود.

فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^r} = c \neq 0 \tag{۵.۲}$$

با گرفتن $\log$ از طرفین این رابطه داریم:

$$\log|x_{n+1} - x^*| \ \ \log c + r\log|x_n - x^*| \quad n >> 1 \tag{۶.۲}$$

این بدان معناست که نقاط

$$(\log|x_{n+1} - x^*|, \log|x_n - x^*|) \tag{۷.۲}$$

به خطی با شیب r همگرا هستند.
یک دنباله خطی همگرا، در هر تکرار، تعداد $\log_\beta c -$ رقم درست را بدست می آورد.
یک دنباله فراخطی همگرا، در هر تکرار، r برابر تعداد ارقام درست در مرحله قبل را بدست می آورد.
یک دنباله همگرای مرتبه دو، در هر تکرار، 2 برابر تعداد ارقام درست در مرحله قبل را بدست می آورد.

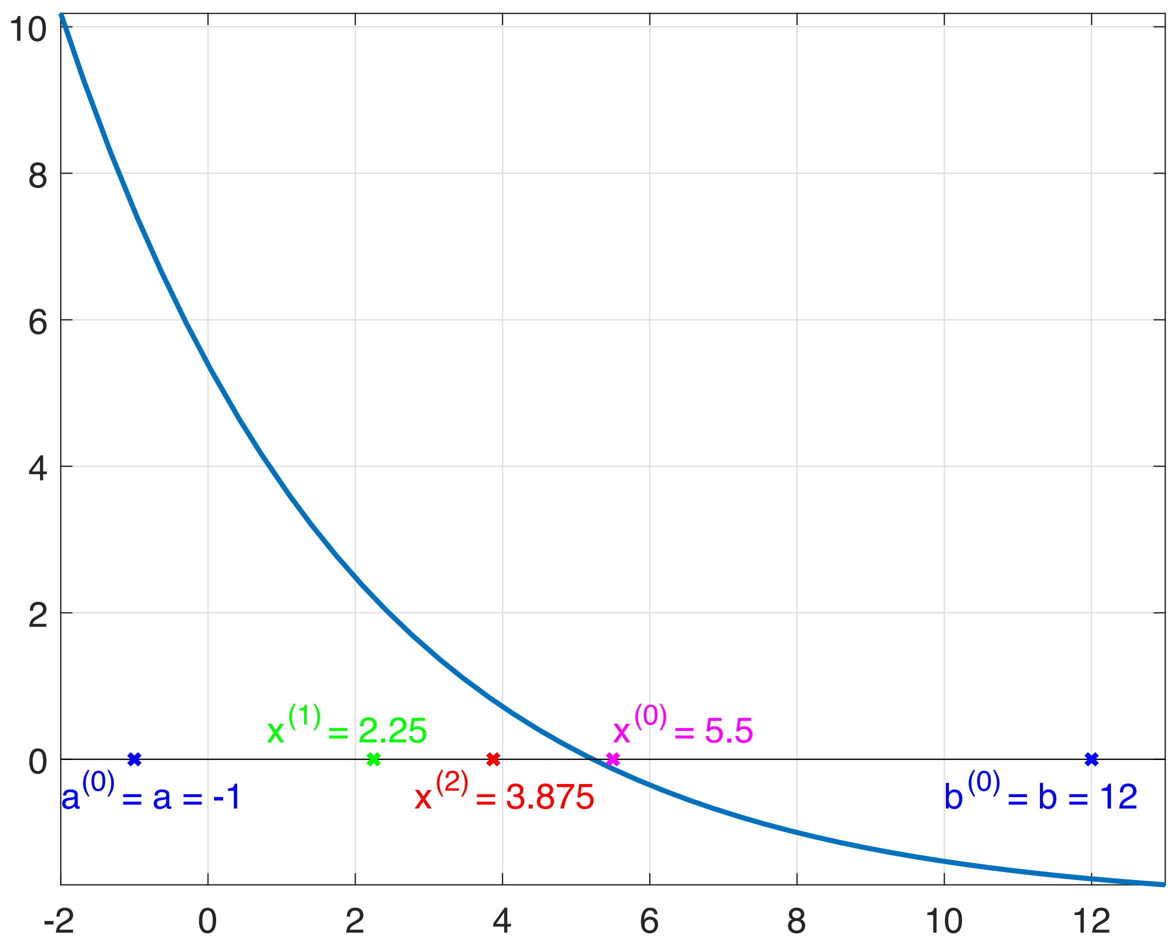
۳.۲ روش دوبخشی (تنصیف)

فرض کنید معادله غیرخطی $f(x) = 0$ داده شده است جائیکه تابع f پیوسته است. در روش دوبخشی یک بازه $[a, b]$ می یابیم که f در آن بازه تغییر علامت بدهد. اساس روش دو بخشی، قضیه‌ی مقدار میانی[3] است که آن‌را مرور می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته بوده و $f(a)f(b) < 0$. در این صورت حداقل یک $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوری‌که $f(c) = 0$.

[1] superlinear
[2] quadratic
[3] intermediate value theorem

روش دوبخشی از بازه‌ای هم‌چون $[a,b]$ که f در آن تغییر علامت می‌دهد، شروع کرده و پهنای آن بازه را بصورت متوالی کاهش می‌دهد تا وقتی‌که پهنای بازه به اندازه کافی کوچک شود. در هر مرحله (تکرار)، مقدار تابع در نقطه‌ی میانی بازه محاسبه شده و نصف بازه دور انداخته می‌شود. این‌که کدام نیمه‌ی بازه دور انداخته شود به علامت تابع در نقطه‌ی میانی بستگی دارد. فرض کنید $I^{(0)}=[a,b]$ و $I^{(k)}$ زیربازه‌ی انتخاب‌شده در مرحله kام باشد. ما زیربازه‌ی $I^{(k+1)}$ از بازه‌ی $I^{(k)}$ را بدین صورت انتخاب می‌کنیم که تابع f در نقاط انتهایی $I^{(k+1)}$ نیز مجددا تغییر علامت دهد (یعنی فرض قضیه‌ی مقدار میانی باید در هر بازه‌ی انتخابی $I^{(k)}$ برقرار باقی بماند). با ادامه‌ی این روند، قضیه‌ی مقدار میانی همگرایی روش را تعیین می‌کند چرا که در تمام مراحل، ریشه در بازه‌ی $I^{(k)}$ باقی می‌ماند و طول بازه با افزایش k به صفر نزدیک می‌شود.



شکل ۴.۲: سه جمله‌ی ابتدایی روش دوبخشی برای تابع $f(x)=\exp(\frac{8-x}{4})-2$ با شروع از بازه‌ی $[a,\ b]=[-1,\ 12]$. ریشه‌ی درست تا شش رقم برابر است با 5.22741.

الگوریتم روش دوبخشی: در گام $k = 0$ قرار دهید:

$$a^{(0)} := a,$$
$$b^{(0)} := b,$$
$$I^{(0)} := [a^{(0)},\ b^{(0)}].$$

در هر گام $k = 1, 2, \cdots$ ابتدا نقطه‌ی میانی بازه یعنی

$$x^{(k-1)} := \frac{a^{(k-1)} + b^{(k-1)}}{2}$$

را محاسبه کنید. اگر $x^{(k-1)}$ تقریب مناسبی برای ریشه است، روند تکرار را قطع کنید. در غیر این‌صورت زیربازه‌ی $I^{(k)} = [a^{(k)},\ b^{(k)}]$ از بازه‌ی $I^{(k-1)} = [a^{(k-1)},\ b^{(k-1)}]$ را به صورت زیر انتخاب کنید:

- اگر $f(a^{(k-1)})\ f(x^{(k-1)}) < 0$ تغییر علامت در نیمه‌ی اولِ بازه رخ می‌دهد. پس قرار دهید:

$$a^{(k)} = a^{(k-1)},$$
$$b^{(k)} = x^{(k-1)}.$$

- اگر $f(x^{(k-1)})\ f(b^{(k-1)}) < 0$ تغییر علامت در نیمه‌ی دومِ بازه رخ می‌دهد. پس قرار دهید:

$$a^{(k)} = x^{(k-1)},$$
$$b^{(k)} = b^{(k-1)}.$$

سپس k را یک واحد اضافه کنید.