۲.۱ نمایش کامپیوتری اعداد، با دقت متناهی

قبل از پیاده‌سازی عددی یک الگوریتم برای تحلیل یک مدل نیاز است دانشی پایه‌ای از چگونگی ذخیره‌سازی و نمایش اعداد و انجام محاسبات در ماشین داشته باشیم. در زندگی روزمره از اعداد در مبنای ۱۰ استفاده می‌کنیم اما کامپیوترها معمولا بر مبنای دو استوار بوده و از حساب دودویی استفاده می‌کنند.

اعداد حقیقی را می‌توان در مبنای عدد صحیحی هم‌چون $\beta \geq 2$ به صورت یک رشته‌ی نامتناهی مانند

$$x = (-1)^{\sigma}(b_n b_{n-1} \cdots b_0 . b_{-1} b_{-2} \cdots)_{\beta} \tag{۲.۱}$$

نمایش داد جایی‌که $b_n, b_{n-1}, \cdots$ اعدادی صحیح در بازه‌ی $[0, \beta - 1]$ بوده و $\sigma \in \{0,1\}$ علامت عدد را مشخص می‌کند. عدد حقیقی متناظر برابر است با

$$x = (-1)^{\sigma} \sum_{i=-\infty}^{n} b_i \beta^i = (-1)^{\sigma}(b_n \beta^n + b_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + b_0 + b_{-1}\beta^{-1} + b_{-2}\beta^{-2} + \cdots).$$

در این نمایش برخی قراردادها درنظر گرفته شده‌اند. بعنوان نمونه اگر عددی به تعدادی نامتناهی صفر متوالی ختم شود، آن‌ها را حذف می‌کنند. مثلا بجای $(12.25000\cdots)_{10}$ از $(12.25)_{10}$ استفاده می‌شود. همچنین صفرهای قبل از قسمت صحیح عدد یعنی قبل از بخش $(-1)^{\sigma}(b_n b_{n-1} \cdots b_0)_{\beta}$ نیز حذف می‌شوند. پس بجای $(0012.25\cdots)_{10}$ از $(12.25\cdots)_{10}$ و بجای $(000.0025\cdots)_{10}$ از $(0.0025\cdots)_{10}$ استفاده می‌شود.

وقتی یک عدد حقیقی به صورت (۲.۱) بیان شود، محل قرار گرفتن ممیز بسیار مهم است. دو قالب معروف برای اعداد عبارتند از قالب ممیز ثابت و قالب ممیز شناور. به طور ساده و غیرقیق، در قالب ممیز ثابت تعداد محل‌هایی از حافظه که بعد از علامت ممیز برای ذخیره‌ی اعداد، اختصاص می‌یابد ثابت است اما در قالب ممیز شناور با وجود اینکه تعداد محل‌هایی از حافظه که به کل عدد اختصاص می یابد ثابت است اما محل علامت ممیز انعطاف‌پذیر بوده و اعداد با تعداد ارقام متفاوت در قسمت بعد از ممیز قابل ذخیره‌سازی هستند. بعنوان مثال فرض کنید یک قالب ممیز ثابت دهدهی بتواند دو رقم اعشاری را ذخیره کند. پس در این قالب چنانچه کاربر هر یک از اعداد

$$12345.67$$

$$67123.45$$

$$1.23$$

و شبیه آن را وارد کند، امکان ذخیره و نمایش آنها بدون خطا وجود داشته اما عددی مانند 1.234 نمی‌تواند بدون خطا ذخیره شود. در مقابل فرض کنید در یک قالب ممیزشناور دهدهی، هفت رقم برای ذخیره‌ی تمام ارقام عدد اختصاص یافته باشد. در چنین قالبی چنانچه کاربر هر یک از اعداد

$$1.234567$$
$$123456.7$$
$$0.00001234567$$
$$123456700000$$

را وارد کند، امکان ذخیره و نمایش آنها بدون خطا ذخیره وجود دارد. جزییات بیشتر را بعدا خواهیم دید، در این‌جا فقط به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که در قالب ممیز شناور، محل قرارگرفتن ممیز می‌تواند با استفاده از تغییر قسمت توانِ عدد، شناور باشد. از یک زیست‌شناس که با میکروسکوپ کار می‌کند تا اخترشناسی که فواصل اجرام در کهکشان‌های دوردست برایش مهم است با محاسبات علمی درگیر هستند. به همین دلیل مهم است که از قالبی در نمایش اعداد استفاده شود که بتواند اعداد با اندازه‌های از بسیار کوچک تا بسیار بزرگ را ذخیره کند. در نتیجه استفاده‌ی عملی از قالب ممیز ثابت که توان پایینی برای ذخیره‌ی اعداد با اندازه‌های متفاوت دارد بسیار محدودتر است.

یک عدد حقیقی در قالب ممیز شناور به صورت

$$x = (-1)^\sigma \; m \times \beta^e$$

نمایش داده می‌شود جایی که $(-1)^\sigma$ علامت عدد است، m را مانتیس و e را توان عدد x می‌نامند. در این قالب ممیز شناور، می‌توان در صورت لزوم با تغییری مناسب در توان عدد، مانتیس را به صورت

$$m = (b_0.b_1b_2\cdots)_\beta$$

نوشت و همین نکته مزیت بزرگی برای نوشتن اعداد در قالب ممیز شناور در قیاس با نمایش (۲.۱) به وجود می‌آورد. به بیان صریح‌تر، وقتی عدد را به صورت ممیز شناور می‌نویسیم، سیستم داخلی ماشین از شرِّ تعقیبِ محل قرارگرفتن ممیز راحت می‌شود چرا که در این قالب، ممیز همیشه بعد از اولین رقم مانتیس قرار می‌گیرد. پس برای جمع‌بندی بحث تاکنون، مجموعه‌ی اعداد حقیقی در مبنای β را می توان در قالب

ممیز شناور به صورت

$$F_\beta = \{(-1)^\sigma\ m \times \beta^e \mid m = (b_0.b_1b_2\cdots)_\beta\}$$

نشان داد جایی‌که β عدد صحیحی بزرگ‌تر یا مساوی دو، $0 \leq b_i \leq \beta - 1$ برای هر i، و e می‌تواند هر عدد صحیحی باشد. توجه کنید که نمایش اعداد با این شرایط یکتا نیست. مثلا عدد دهدهی 123.4 می‌تواند با هر یک از نمایش‌های

$$(1.234)_{10} \times 10^2 = (0.1234)_{10} \times 10^3 = (0.01234)_{10} \times 10^4$$

در این قالب ذخیره شود[۱] چراکه هر سه عدد بالا شرایط مجموعه‌ی F_{10} را داشته و در نتیجه عضو این مجموعه هستند. برای منحصربفرد شدن نمایش اعداد، اِعمال شرط دیگری نیز لازم است و آن این‌که رقم پیشروی b_0 ناصفر باشد. اعداد ممیز شناوری که در این شرط صدق می‌کنند را نرمال می‌نامند. نمایش عدد 123.4 در دستگاه اعداد ممیزشناور نرمال دهدهی به صورت یکتای $(1.234)_{10} \times 10^2$ می‌باشد. مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی ناشماراست در حالی که حافظه‌ی محدود یک کامپیوتر تنها می‌تواند مقداری متناهی از اطلاعات را ذخیره کند. پس در عمل کامپیوترها تنها خواهند توانست زیرمجموعه‌ای متناهی از اعضای F_β را ذخیره کرده و به صورت دقیق نمایش دهند. بعنوان گام بعدی برای نمایش اعداد در ماشین، مجموعه‌ی

$$F_{\beta,p} = \{x \in F_\beta \mid m = (b_0.b_1b_2\cdots b_{p-1})_\beta\}$$

را درنظر می‌گیریم که در آن p، دقت[۲] دستگاه ممیز شناور نامیده می‌شود. این مجموعه هرچند شمارا اما هم‌چنان نامتناهی است چرا که هیچ کرانی روی قسمت توان اعداد عضو آن اِعمال نشده است. مجموعه‌ای که اعضای آن با طبیعتِ محدود حافظه‌ی ماشین سازگار باشند را می‌توان با مشخص کردن کران‌های پایین و بالا برای توان اعداد عضو $F_{\beta,p}$ ساخت: بدین منظور فرض کنید L کران پایین و U کران بالای مجاز برای توان باشد. در این صورت مجموعه‌ی ممیزشناور قابل نمایش به صورت دقیق در ماشین را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$F_{\beta,p}^{L,U} = \{x \in F_{\beta,p} \mid L \leq e \leq U\}.$$

[۱] دو نمایش $(123.4)_{10} = (12.34)_{10} \times 10^1$ و نظایر آن در شرط قرارگرفتن ممیز بلافاصله بعد از اولین رقم مانتیس، صدق نکرده و مجاز نیستند.

[۲] precision

با توجه به تعاریف بالا واضح است که داریم:

$$F_{\beta,p}^{L,U} \subset F_{\beta,p} \subset F_\beta$$

یعنی از مجموعه‌ی ناشمارای نامتناهی $\mathbb{R}$ از اعداد حقیقی در ریاضیات چند مرحله عقب‌نشینی کرده‌ایم تا به مجموعه‌ی شمارای متناهی $F_{\beta,p}^{L,U}$ که مجموعه‌ی اعداد ماشین نامیده می‌شود برسیم.

مثال زیر، اهمیتی حیاتی در فهم مباحثی که مطرح شده و خواهد شد دارد و دستگاه اعداد آنرا تا آخر این فصل با نام ((دستگاه اعداد بازیچه)) خواهیم شناخت.

مثال ۲. اعداد نامنفی نرمال موجود در دستگاه $F_{2,3}^{-1,2}$ را (به صورت اعدادی در مبنای ۱۰) مشخص کنید.

چون $\beta = 2$ و $p = 3$ پس سه بیت برای ذخیره‌ی مانتیس اعداد داریم: $m = (b_0.b_1b_2)_2$ و چون بدنبال اعداد نرمال هستیم پس $b_0 \neq 0$، یعنی بیت b_0 فقط می‌تواند مقدار یک را اختیار کند. برای سادگی، توان‌ها را در مبنای ۱۰ نشان می‌دهیم. به ازای $e = L = -1$ اعداد زیر را در این دستگاه داریم:

$$\begin{aligned}
(1.00)_2 \times 2^{-1} &= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2}) \times 2^{-1} = 1 \times \frac{1}{2} = 0.5,\\
(1.01)_2 \times 2^{-1} &= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}) \times 2^{-1} = \frac{5}{8} = 0.625,\\
(1.10)_2 \times 2^{-1} &= (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2}) \times 2^{-1} = \frac{6}{8} = 0.75,\\
(1.11)_2 \times 2^{-1} &= (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}) \times 2^{-1} = \frac{7}{8} = 0.875.
\end{aligned}$$

به ازای $e = 0$، اعداد زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
(1.00)_2 \times 2^{0} &= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2}) = \frac{8}{8} = 1,\\
(1.01)_2 \times 2^{0} &= (1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}) = \frac{10}{8} = 1.25,\\
(1.10)_2 \times 2^{0} &= (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2}) = \frac{12}{8} = 1.5,\\
(1.11)_2 \times 2^{0} &= (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}) = \frac{14}{8} = 1.75.
\end{aligned}$$

به طرز مشابه برای $e = +1$ داریم:

$$
\begin{aligned}
(1.00)_2 \times 2^1 &= 2,\\
(1.01)_2 \times 2^1 &= \frac{20}{8} = 2.5,\\
(1.10)_2 \times 2^1 &= \frac{24}{8} = 3,\\
(1.11)_2 \times 2^1 &= \frac{28}{8} = 3.5.
\end{aligned}
$$

و نهایتا به ازای $e = U = +2$ اعداد زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
(1.00)_2 \times 2^2 &= \frac{32}{8} = 4,\\
(1.01)_2 \times 2^2 &= \frac{40}{8} = 5,\\
(1.10)_2 \times 2^2 &= \frac{48}{8} = 6,\\
(1.11)_2 \times 2^2 &= \frac{56}{8} = 7.
\end{aligned}
$$

بنابراین اعداد نامنفی موجود در مجموعه‌ی $F_{2,3}^{-1,2}$ عبارتند از:

$$\{0.5, 0.625, 0.75, 0.875, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6, 7\}.$$

همان‌گونه که می‌بینیم کوچک‌ترین عدد نرمال مثبت در مجموعه‌ی $F_{2,3}^{-1,2}$ برابر است با

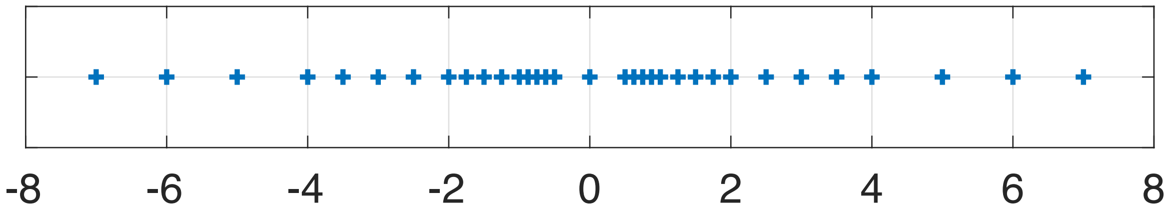
$$N_{\min} = (1.00)_2 \times 2^{-1} = 0.5$$

و بزرگ‌ترین عدد برابر است با

$$N_{\max} = (1.11)_2 \times 2^2 = 7.$$

تعداد کل اعداد (منفی و مثبت) عضو مجموعه‌ی شمارای $F_{2,3}^{-1,2}$ برابر است با ۳۲. این اعداد به انضمام صفر در شکل ۲.۱ نمایش داده شده‌اند.

نکته‌ی ۱. در مثال بالا فاصله‌ی بین اعداد متوالی متناظر با توان $e = -1$ برابر است با $0.125 = 2^{-3}$. این فاصله برای اعداد نظیر با $e = 0$ برابر است با $0.25 = 2^{-2}$. برای چهار عدد بعدی فاصله برابر است با



شکل ۲.۱: اعداد ماشین مجموعه‌ی $F_{2,3}^{-1,2}$ در مثال ۲

$2^{-1} = 0.5$ و نهایتا فاصله‌ی اعداد ماشین نظیر با توان $e = U = +2$ برابر است با $2^0 = 1$. به طور کلی هرچند فاصله‌ی بین اعداد ممیزشناور عضو دستگاه یکنواخت نیست اما برای هر توان e فیکس، فاصله‌ی بین اعداد متعلق به $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^e, \beta^{e+1}]$ یکنواخت است[1].

نکته‌ی ۲. برای هر دو توان دلخواه m و n که در آن $L \leq m, n \leq U$، تعداد اعضای (کاردینالیتی) هر دو مجموعه‌ی $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^m, \beta^{m+1}]$ و $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^n, \beta^{n+1}]$ یکسان است.

نکته‌ی ۳. مجموعه‌ی اعداد ممیزشناور عضو $F_{\beta,p}^{L,U}$ نسبت به صفر متقارن است یعنی اگر $x \in F_{\beta,p}^{L,U}$ آن‌گاه $-x \in F_{\beta,p}^{L,U}$.

تمرین ۱. تعداد کل اعداد نرمال موجود در دستگاه ممیز شناور $F_{\beta,p}^{L,U}$ را بدست آورید.

دیدیم که هر عدد دودویی $(\beta = 2)$ ممیزشناور نرمال موجود در دستگاهی با دقت p را می‌توان به صورت

$$x = \pm(1.b_1 b_2 \cdots b_{p-2} b_{p-1})_2 \times 2^e$$

نشان داد. واضح است که $(1.00 \cdots 00)_2 \times 2^0 = 1$. پس کوچک‌ترین عدد نرمال بزرگ‌تر از یک برابر است با

$$(1.00 \cdots 01)_2 \times 2^0 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + \cdots + 0 \times 2^{-(p-2)} + 1 \times 2^{-(p-1)} = 1 + 2^{-(p-1)}.$$

فاصله‌ی بین عدد یک و کوچک‌ترین عدد بزرگ‌تر از یک نقش بسیار مهمی در تحلیل خطای گردکردن در

[1] در حالت خاصی که $e = U$ باشد هرچند کران بالای بازه یعنی β^{U+1} عضو دستگاه $F_{\beta,p}^{L,U}$ نیست اما باز هم نکته‌ی ۱ به صورت مطرح‌شده صحیح است یعنی فاصله‌ی بین اعداد متعلق به $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^U, \beta^{U+1}]$ یکسان است چراکه β^{U+1} اصولا عضو این اشتراک نیست. با استدلالی مشابه نکته‌ی ۲ برای حالت خاص $m = n = U$ نیز برقرار است.

آنالیز عددی بازی می‌کند. این عدد را که اپسیلون ماشین[۱] نامیده می‌شود (در مبنای دو) برابر است با:

$$\varepsilon_M = 2^{-(p-1)}.$$

فاصله‌ی بین سایر اعداد متوالی عضو دستگاه ممیزشناور $F_{\beta,p}^{L,U}$ نیز ارتباط مستقیمی با اپسیلون ماشین دارد. این فاصله ارتباط نزدیکی با مفهوم مهم دیگری در تحلیل خطای گردکردن، به نام واحد در آخرین مکان[۲] دارد که با $ulp(x)$ نشان داده می‌شود و بیانگر وزن آخرین رقم مانتیس عدد نرمال x می‌باشد. می‌خواهیم فاصله‌ی بین هر دو عدد نرمال متوالی را در $F_{\beta,p}^{L,U}$ بیابیم. به طور کلی فاصله‌ی تمام اعداد ممیز شناور متوالی متعلق به $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^e, \beta^{e+1}]$ یکسان است (در نکته‌ی ۱ هم این موضوع را دیدیم) [۳]. پس کافی است فاصله‌ی بین دو عدد ابتدایی عضو $[\beta^e, \beta^{e+1}]$ را بیابیم. فرض کنید $\tilde{x}$ اولین عدد عضو این بازه باشد یعنی $\tilde{x} = \beta^e = (1.00\cdots00)_\beta \times \beta^e$. پس اولین عدد بزرگ‌تر از $\tilde{x}$ برابر است با

$$(1.00\cdots01)_\beta \times \beta^e = (1 + 0 + \cdots 0 + 1 \times \beta^{-(p-1)}) \times \beta^e = \tilde{x} + \beta^{-(p-1)} \times \beta^e$$

پس داریم:

$$ulp(x) = \beta^{e-p+1} = \varepsilon_M \beta^e.$$

دقت کنید که اگر $x > 0$ باشد، آن‌گاه $ulp(x)$ برابر است با فاصله‌ی بین x و عدد ممیز شناور بلافاصله بزرگ‌تر از آن و اگر $x < 0$ باشد، آن‌گاه $ulp(x)$ برابر است با فاصله‌ی بین x و عدد ممیز شناور بلافاصله کوچک‌تر از x. بعلاوه می‌توان دید که $\varepsilon_M = ulp(1)$. بار دیگر نکته‌ی ۱ را به یاد آورید. فواصلی که در آن‌جا ذکر شد همان $ulp(x)$ بودند. بعنوان نمونه دیدیم که $x = 5$ متناظر با توان $e = 2$ بود و به همین خاطر داریم:

$$ulp(5) = 2^{2-3+1} = 2^0 = 1.$$

به طرز مشابه داریم:

$$ulp(1.75) = 2^{0-3+1} = 2^{-2} = 0.25,$$

[۱] machine epsilon

[۲] unit in the last place

[۳] این فاصله در واقع برای تمام اعداد متعلق به فاصله‌ی بسته‌ی $[\beta^e, \beta^{e+1}]$ یکسان است مگر در حالت خاصی که $e = U$، که در این صورت، عدد نظیر عضو دستگاه نیست (در مثال قبل، به ازای $e = U = 2$، عدد 8 حاصل می‌شد که اصلا عضو دستگاه نبود). برای جلوگیری از ایجاد مشکل در این حالت خاص است که بحث را در مورد $F_{\beta,p}^{L,U} \cap [\beta^e, \beta^{e+1}]$ مطرح کرده‌ایم و نه فقط در مورد $[\beta^e, \beta^{e+1}]$.

که فاصله‌ی $x = 1.75$ با کوچک‌ترین عددِ بزرگ‌تر از آن است.