۵.۳ درونیابی اسپلاین

گاهی مواقع این آزادی را نداریم که نقاط درونیابی را چبیشفی انتخاب کنیم. ممکن است مجبور باشیم با نقاط هم‌فاصله کار کنیم آنهم به تعداد زیاد. در چنین وضعیتی نمی‌توان با درونیابی سراسری از پدیده‌ی رونگه اجتناب کرد. راه درمانِ جایگزین، همانگونه که قبلا گفتیم، رویکرد محلی است: استفاده از چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای به طوری که در هر قطعه از بازه‌ی اصلی، از درونیاب با درجه‌ی نه چندان بزرگ بهره برده شود. می‌توان دید که این رویکرد به کاهش سرعت همگرایی درونیاب در مقایسه با رویکرد سراسری با درونیابی چبیشفی منجر می‌شود.

اسپلاین‌ها دسته‌ی معروفی از درونیاب‌های چندجمله‌ای قطعه‌ای هستند که مشکل عدم همواری تقریب‌های قطعه‌ای را تا حدودی برطرف می‌کنند. نام اسپلاین[۱] از ابزاری می‌آید که طراحان کشتی از آن برای ترسیم منحنی‌های هموار با دست استفاده می‌کردند.

به طور کلی یک اسپلاین درجه k، یک چندجمله‌ای قطعه‌ای است که $k-1$ بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد.

فرض کنید نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ که گره‌های اسپلاین نام دارند داده شده باشند. در اینصورت قرار می‌دهیم

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & x_0 \le x \le x_1, \\ s_2(x) & x_1 \le x \le x_2, \\ \cdots & \cdots \\ s_n(x) & x_{n-1} \le x \le x_n, \end{cases}$$

برای $i = 1, 2, \cdots, n$، تابع s_i روی قطعه‌ی i–ام از بازه‌ی $[a,\ b] = [x_0,\ x_n]$ که همان $[x_{i-1},\ x_i]$ است تعریف می‌شود.

اسپلاین‌ها اساس نرم‌افزارهای طراحی به کمک کامپیوتر[۲] مانند اتوکد[۳] یا سآلیدوُرکز[۴] که در مهندسی عمران، مهندسی مکانیک، مهندسی پزشکی و ... استفاده می‌شوند بوده و در طراحی فونت‌های کامپیوتری نیز کاربرد دارند. ما در اینجا تنها با اسپلاین‌های ((خطی)) و ((مربعی)) آشنا شده و به معروف‌ترین نوع

[۱] spline
[۲] Computer-Aided Design (CAD)
[۳] AutoCAD
[۴] SolidWorks

آن‌ها که اسپلاین‌های مکعبی است نمی‌پردازیم!

۱.۵.۳ اسپلاین خطی

تابع s، یک اسپلاین خطی بر بازه‌ی $[x_0,\ x_n]$ نامیده می‌شود اگر

۱. s بر هر زیربازه‌ی $[x_{i-1},\ x_i]$ از $[x_0,\ x_n]$ یک چندجمله‌ای خطی (خط) باشد.

۲. s بر سرتاسر بازه‌ی $[x_0,\ x_n]$ پیوسته باشد.

هدف ما البته درونیابی با اسپلاین‌ها است. پس شرط سومی هم برای اسپلاین‌ها درنظر می‌گیریم و آن اینکه داده‌های جدول زیر را درونیابی کنند.

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

با سه شرط قبل، هر اسپلاین خطی به طور یکتا قابل تعیین است. در واقع کافی است بر هر زیربازه‌ی $[x_{i-1},\ x_i]$، معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی (x_{i-1}, y_{i-1}) و (x_i, y_i) را به دست آوریم:

$$s_i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i+1}).$$

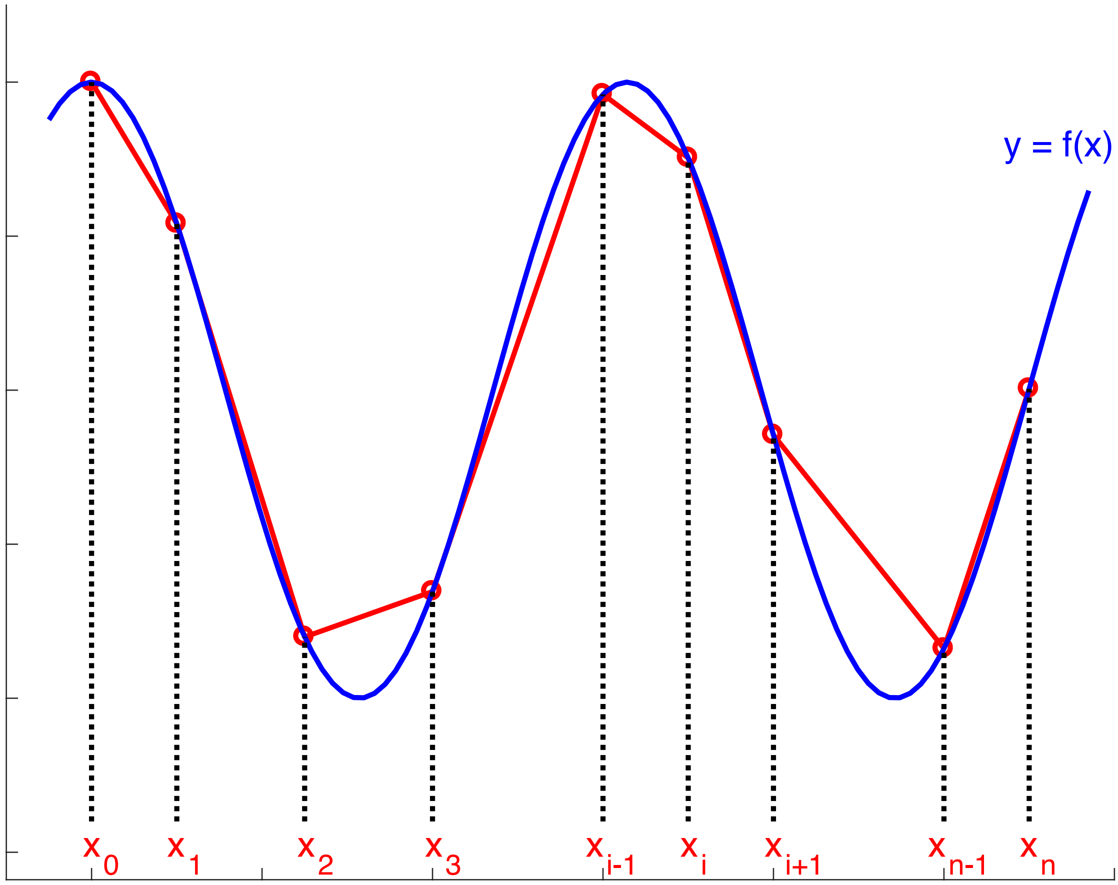
خطای تقریب با اسپلاین‌های خطی

همانطور که در شکل ۱۳.۳ می‌بینیم، در برخی بازه‌ها درونیاب اسپلاین خطی به تابع f نزدیک و در برخی بازه‌ها اختلاف آنها زیاد است. می‌خواهیم کرانی برای این اختلاف در هر زیربازه و همچنین در سرتاسر $[a,\ b]$ پیدا کنیم. ابتدا خطا را در یک زیربازه‌ی دلخواه بررسی می‌کنیم. فرض کنید f دوبار بطور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. بر طبق فرمول خطای تقریب با درونیابی چندجمله‌ای در دو نقطه، می‌دانیم که برای $x \in [x_{i-1},\ x_i]$ داریم:

$$f(x) - s_i(x) = \frac{f''(\zeta_x)}{2!}(x - x_{i-1})(x - x_i), \quad \zeta_x \in [x_{i-1},\ x_i].$$

ابتدا کرانی برای اندازه‌ی $(x - x_{i-1})(x - x_i)$ می‌یابیم. از آنجا که گره‌های اسپلاین لزوما هم‌فاصله نیستند، قرار دهید

$$h_i := x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 1, \cdots, n$$



شکل ۳.۱۳: یک اسپلاین خطی

چون x در بازه‌ی $[x_{i-1},\ x_i]$ متغیر است، اگر قرار دهیم

$$x - x_{i-1} =: \alpha h_i$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ آنگاه خواهیم داشت:

$$x - x_i = (1-\alpha) h_i.$$

در نتیجه داریم

$$(x - x_{i-1})(x - x_i) = \underbrace{\alpha(1-\alpha)}_{g(\alpha)} h_i^2$$

برای یافتن بیشینه‌ی تابع $g(\alpha)$ قرار می‌دهیم $g'(\alpha) = 0$ که نتیجه می‌دهد $\alpha = \frac{1}{2}$. بیشینه‌ی $g(\alpha)$ برای

$\alpha \in [0,\ 1]$ برابر با $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ است. بنابراین داریم

$$|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leq \frac{h_i^2}{4}.$$

همچنین اگر برای $x \in [x_{i-1},\ x_i]$ داشته باشیم $|f''(x)| \leq M_i$ آنگاه خواهیم داشت:

$$|f(x) - s_i(x)| \leq \frac{M_i}{8} h_i^2$$

و اگر برای $x \in [x_0,\ x_n]$ داشته باشیم $|f''(x)| \leq M$ و بیشترین طول شبکه‌ی گره‌ها

$$h_{\max} := \max\{h_i \mid i = 1, 2 \cdots, n\}$$

باشد، آنگاه

$$\boxed{|f(x) - s(x)| \leq \frac{M}{8} h_{\max}^2.}$$

بنابراین چنانچه فاصله‌ی شبکه‌ی گره‌ها به صفر میل کند، تقریب اسپلاین خطی همگرا بوده و نرخ همگرایی نیز مربعی است یعنی متناسب با مربع $h_{\max}$ است. بر همین اساس گفته می‌شود که خطای اسپلاینِ خطی $\mathcal{O}(h^2)$ است که در آن $h := h_{\max}$.

میزان خطای اسپلاین خطی در زیربازه‌های مختلف از شکل ۱۳.۳ یکنواخت نبود. اما اگر این شانس را داشته باشیم که خودمان گره‌ها را انتخاب کنیم به طوری که خطای اسپلاینِ خطی در سرتاسر بازه بین گره‌ها تقریبا یکسان باشد، می‌توانیم از کران خطای قبل راهنمایی بگیریم: چون کران خطا متناسب است با $M_i h_i^2$ که در آن M_i از مشتق دوم f در بازه‌ی جاری i-ام می‌آید، پس گره‌ها را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که h_i متناسب با $\frac{1}{\sqrt{M_i}}$ باشد. از آنجا که انحنای تابع f با مشتق دومِ آن متناسب است (فرمول $\kappa = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ برای انحنا را به یاد آورید) پس جایی که انحنای f بیشتر است اندازه‌ی شبکه باید کوچکتر انتخاب شود تا تعداد گره‌ها افزایش یافته و میزان خطا کاهش یابد.

۲.۵.۳ اسپلاین مربعی

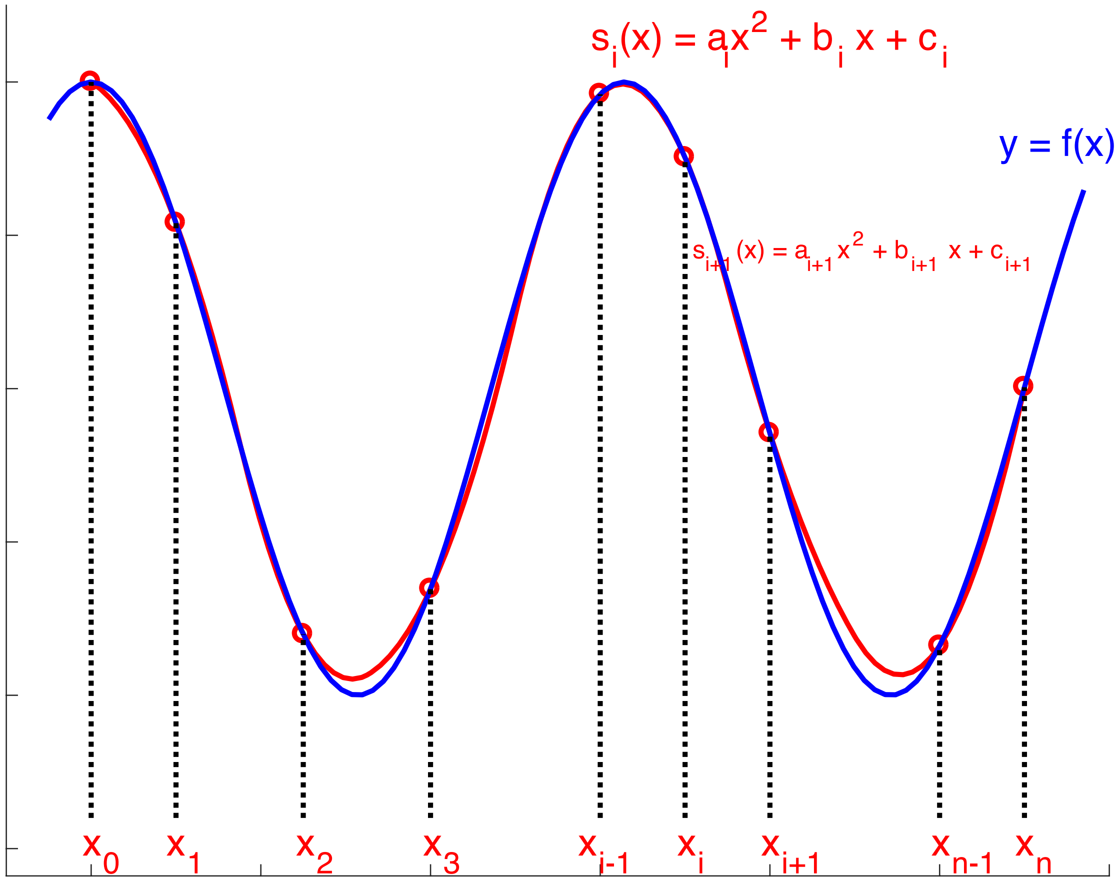
فرض کنید نقاط $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ داده شده‌اند. اسپلاین مربعی $s(x)$، برای درونیابی در این نقاط یک تابع قطعه‌ای است به طوری که

۱. s بر هر زیربازه‌ی $[x_i,\ x_{i+1}]$ از $[x_0,\ x_n]$ یک چندجمله‌ای درجه دو باشد.

۲. s بر سرتاسر بازه‌ی $[x_0,\ x_n]$ پیوسته باشد.

۳. s' بر $(x_0,\ x_n)$ پیوسته باشد.

۴. s نقاط داده شده را درونیابی کند.



شکل ۱۴.۳: یک اسپلاین مربعی

با توجه به شرط اول می‌توان قرار داد

$$s_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

چون تعداد نقاط $n+1$ و در نتیجه تعداد توابع قطعه‌ای n بوده و هر تابع قطعه‌ای $s_i(x)$ دارای سه ضریب مجهول $a_i,\ b_i, c_i$ است، پس در اسپلاین مربعی کلا $3n$ ضریب مجهول داریم و برای محاسبه‌ی یکتای اسپلاین مربعی $s(x)$ به $3n$ معادله‌ی مستقل خطی نیاز خواهد بود.

با توجه به شرط‌های دوم و چهارم، تابع $s_i(x)$ باید از دو نقطه‌ی انتهایی زیربازه‌ی $[x_i,\ x_{i+1}]$ عبور کند. یعنی برای $i = 1, 2, \cdots, n$ باید داشته باشیم:

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}. \tag{۱۳.۳}$$

و

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i. \tag{۱۴.۳}$$

که $2n$ معادله را حاصل می‌کنند. از سوی دیگر با توجه به شرط سوم لازم است $s'(x)$ در (x_0, x_n) پیوسته باشد یعنی هر تابع قطعه‌ای شیب یکسانی در تمام گره‌های غیرمرزی داشته باشد. به بیان دقیق‌تر می‌خواهیم (شکل ۱۴.۳ را ببینید) دو تابع $s_i(x)$ و $s_{i+1}(x)$ شیب یکسانی در نقطه‌ی $x = x_i$ داشته باشند:

$$\frac{d}{dx}(a_i x^2 + b_i x + c_i)|_{x=x_i} = \frac{d}{dx}(a_{i+1} x^2 + b_{i+1} x + c_{i+1})|_{x=x_i}$$

یعنی:

$$2x_i a_i + b_i = 2x_i a_{i+1} + b_{i+1}$$

پس باید برای $i = 1, 2, \cdots, n-1$ داشته باشیم:

$$2x_i a_i - 2x_i a_{i+1} + b_i - b_{i+1} = 0. \tag{۱۵.۳}$$

سه معادله‌ی (۱۳.۳)، (۱۴.۳) و (۱۵.۳) روی هم رفته $3n-1$ شرط را مشخص می‌کنند و همچنان برای تعیین یکتای اسپلاین مربعی نیاز به یک معادله‌ی دیگر هم هست. مرسوم است که آخرین معادله را به صورت $a_1 = 0$ یا $a_n = 0$ اختیار می‌کنند یعنی در یکی از دو قطعه‌ی اول یا آخر، بجای چندجمله‌ای درجه دو، یک خط تعیین می‌شود. معمولا چنانچه فاصله‌ی دو نقطه‌ی ابتدایی کمتر از فاصله‌ی دو نقطه‌ی انتهایی باشد یعنی $h_1 < h_n$، شرط $a_1 = 0$ بعنوان آخرین معادله‌ی موردنیاز انتخاب می‌شود تا آزادی عمل بیشتری در قطعه‌ی انتهایی که پهن‌تر است داشته باشیم.