۴.۳ پدیده‌ی رونگه

بار دیگر مسئله‌ی تقریب تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ به کمک درونیابی در $n+1$ نقطه در نظر می‌گیریم. در قضیه‌ی ۳.۲.۳ فرمولی برای

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

که خطای تقریب با درون‌یاب از درجه‌ی حداکثر n باشد است دیدیم. معیار مرسوم برای بررسی خطای تقریب، نرم بینهایت است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||e_n||_\infty := \max_{a\leq x\leq b} |e_n(x)|.$$

از قضیه‌ی ۳.۲.۳ به سادگی نتیجه می‌شود که

$$||e_n||_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\Big(\max_{a\leq x\leq b}|l(x)|\Big)\Big(\max_{a\leq x\leq b}|f^{(n+1)}(x)|\Big),$$

که در آن

$$l(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

صریحا ((بستگی به نقاط $x_0, x_1, \cdots, x_n$ دارد)) که برای عمل درونیابی استفاده می‌شوند. پس میزان خطای تقریب می‌تواند با تغییر نقاط درونیابی کم یا زیاد شود.

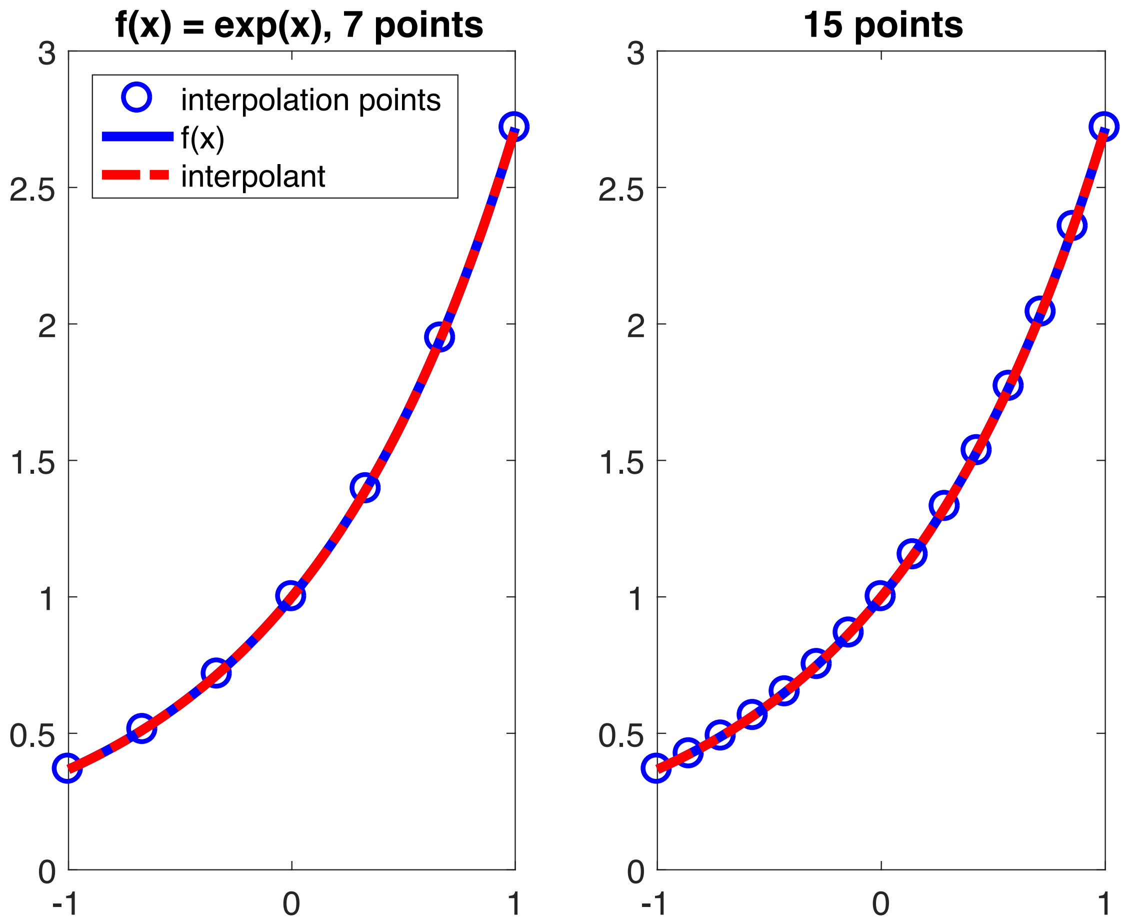
پرسشی که قبلا نیز مطرح کردیم این بود که ((آیا با افزایش n، خطای تقریب یعنی $e_n(x)$، به صفر میل می‌کند؟)) ممکن است وجود جمله‌ی $\frac{1}{(n+1)!}$ در سمت راستِ کران بالا این تصورِ شیرین را به وجود آورد که همیشه با افزایش تعداد نقاط، خطای تقریب صفر خواهد شد. اما واقعیت این است که دو جمله‌ی $f^{(n+1)}(x)$ و $l(x)$ نیز در میزان خطا نقش بازی می‌کنند.

هرچند با افزایش n، جمله‌ی $\frac{1}{(n+1)!}$ به سرعت به صفر نزدیک می‌شود، اما این امکان وجود دارد که (با افزایش n) جمله‌ی

$$\Big(\max_{a\leq x\leq b}|l(x)|\Big)\Big(\max_{a\leq x\leq b}|f^{(n+1)}(x)|\Big) \tag{۱۱.۳}$$

به بینهایت میل کرده و در نتیجه خطای تقریب به صفر میل نکند! به طور کلی اگر نرخ نزول $\frac{1}{(n+1)!}$ به صفر، سریعتر از نرخ رشد (۱۱.۳) به سمت بینهایت باشد، آنگاه دنباله‌ی تقریب‌های $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ به تابع f میل

کرده و متناظر با آن دنباله‌ی $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ از خطاهای تقریب به صفر میل می‌کند. این موضوع برای توابعی همچون $\sin(x)$ یا $\exp(x)$ که همه‌ی مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر آنها با یک ثابت M کراندار می‌شوند برقرار است. در شکل ۵.۳ درونیاب تابع $f(x) = \exp(x)$ در $n+1$ ((نقطه‌ی هم‌فاصله)) در بازه‌ی $[-1, +1]$ برای $n+1 = 7$ و $n+1 = 15$ رسم شده است. با افزایش n، درونیاب در نقاط هم‌فاصله به تابع f نزدیکتر شده است. در واقع بیشترین میزان اختلاف تابع و درونیابش در سرتاسر بازه به ترتیب تقریبا برابر با 10^{-6} و 10^{-15} است یعنی با افزایش n خطای تقریب نهایتا صفر خواهد شد. دقت کنید که این موضوع فارغ از اینکه چه روشی (اعم از لاگرانژ یا نیوتن یا ...) برای درونیابی استفاده شود درست است چرا که بحث در مورد خطای تقریب است که موضوعی است صرفا ریاضی که ربطی به خطاهای گردکردنِ احتمالی ندارد.



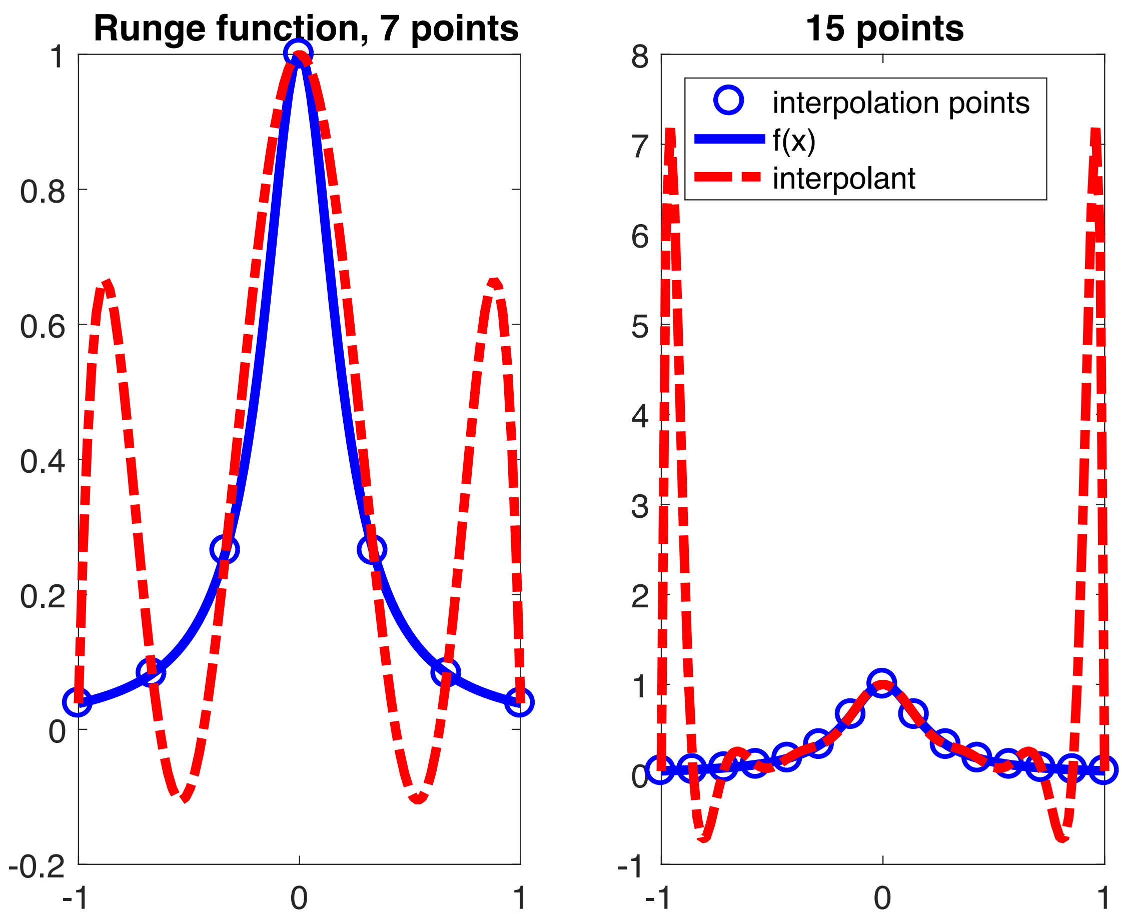
شکل ۵.۳: تقریب تابع نمایی با درونیابی در نقاط هم‌فاصله همگراست: با افزایش تعداد نقاط، خطا کمتر می‌شود.

اما توابعی هم موجودند که نرخ رشد جمله‌ی آمده در (۱۱.۳) برای آن‌ها چنان زیاد است که نزول $\frac{1}{(n+1)!}$ را بی‌اثر کرده و نهایتا با افزایش n، دنباله‌ی $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ به تابع $f(x)$ نچسبیده و در نتیجه دنباله‌ی خطای

$\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ به صفر میل نمی‌کند. این موضوع با نام پدیده‌ی رونگه[۱] شناخته می‌شود. یک مثال از چنین توابعی تابع

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

بر بازه‌ی $[-1, +1]$ است که به نام ((تابع رونگه)) شناخته می‌شود[۲]. در شکل ۶.۳ درونیاب تابع رونگه با استفاده از هفت و پانزده نقطه‌ی هم‌فاصله رسم شده است. این بار همانطور که می‌بینیم با افزایش n،



شکل ۶.۳: تقریب تابع رونگه با استفاده از درونیابی در نقاط هم‌فاصله، واگرایی را نتیجه می‌دهد: با افزایش تعداد نقاط، خطا بیشتر می‌شود.

خبری از همگرایی درونیاب در نقاط هم‌فاصله به تابع f نیست. بیشترین میزان اختلاف تابع و درونیابش در سرتاسر بازه به ترتیب تقریبا برابر با 0.6 و 7.2 است یعنی با افزایش n، خطای تقریب بیشتر هم شده است. به افزایش شدید نوسان‌های درونیاب در نزدیکی دو انتهای بازه دقت کنید.

برای تجزیه و تحلیل بیشتر واگرایی درونیاب در نقاط هم‌فاصله برای تابع رونگه می‌توان بار دیگر به کران خطای تقریب با درونیابی نگریست. نمودار مشتق‌های اول، هفتم، پانزدهم و بیستم تابع رونگه را در شکل

[۱] Runge's phenomenon

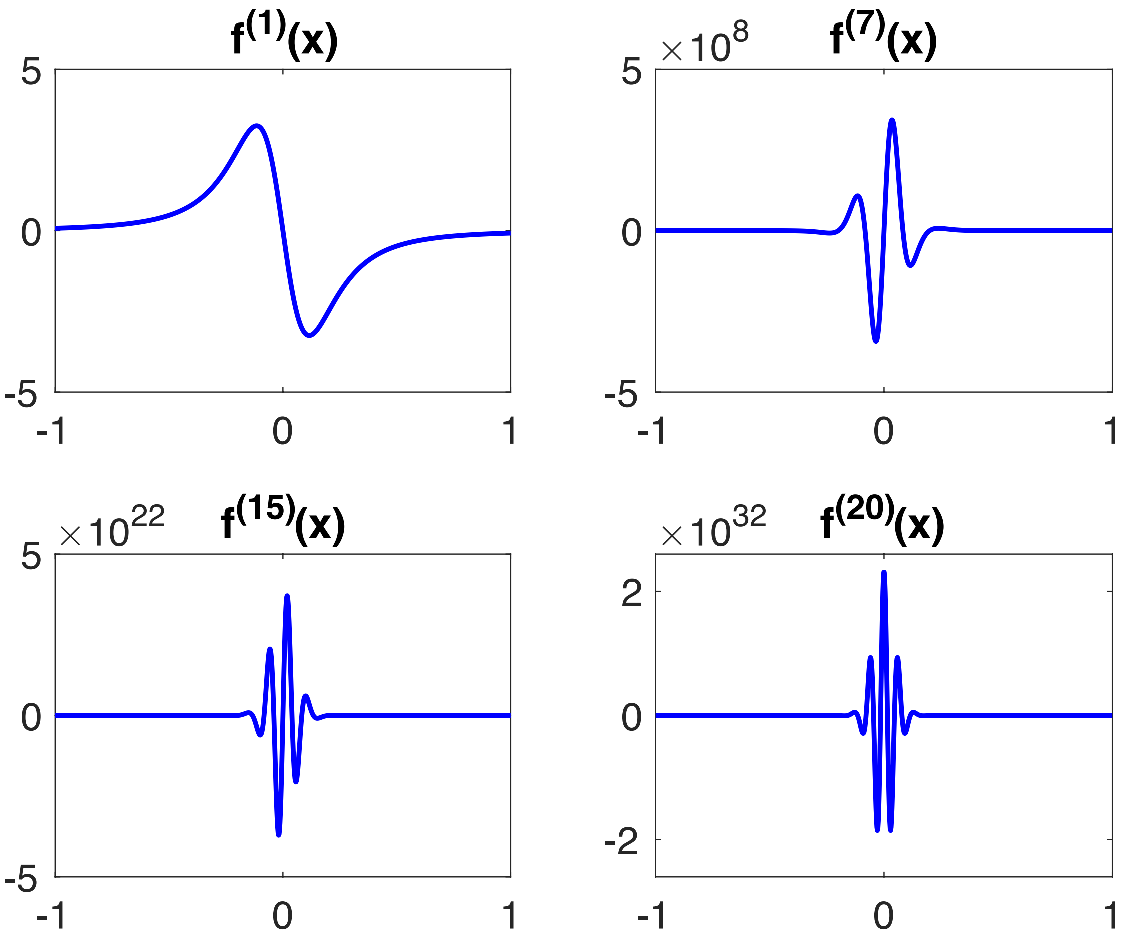
[۲] تابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ بر بازه‌ی $[-5, 5]$ نیز همین خاصیت را دارد.

۷.۳ مشاهده می‌کنیم. نکته‌ی مهم، مقیاس محور عمودی است. به طور خاص کران بالای خطای تقریب با درونیابی در هفت نقطه عبارت است از:

$$|e_6(x)| \le \underbrace{\frac{1}{7!}}_{2\times 10^{-4}} \left(\max_{-1\le x\le 1} |l(x)|\right) \underbrace{\left(\max_{-1\le x\le 1} |f^{(7)}(x)|\right)}_{3\times 10^{8}} \approx 6\times 10^{+4}\left(\max_{-1\le x\le 1} |l(x)|\right).$$

وضعیت در مورد درونیابی با پانزده نقطه (هم‌فاصله) بدتر هم می‌شود: داریم:

$$|e_{14}(x)| \le \underbrace{\frac{1}{15!}}_{7\times 10^{-13}} \left(\max_{-1\le x\le 1} |l(x)|\right) \underbrace{\left(\max_{-1\le x\le 1} |f^{(15)}(x)|\right)}_{3\times 10^{22}} \approx 2\times 10^{+10}\left(\max_{-1\le x\le 1} |l(x)|\right).$$



شکل ۷.۳: اندازه‌ی مشتق مراتب بالای تابع رونگه به سرعت بزرگ و بزرگ‌تر شده و خطای تقریب را بیشتر می‌کند.

با مشاهدات بالا رابطه‌ی زیر (که آن‌را بدون اثباتِ صریح می‌پذیریم) برای خطای تقریب تابع رونگه با

درونیابی در نقاط هم‌فاصله منطقی به نظر می‌رسد:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)-p_n(x)|\Big)=\infty.$$

این اما به هیچ‌وجه با تضمینی که قضیه‌ی تقریب وایراشتراس برای همگرایی دنباله‌ی تقریب‌های چندجمله‌ای به ((هر تابع پیوسته)) شامل تابع رونگه می‌داد جور نیست! یکی از راه‌هایی که برای کوچک‌شدن خطای تقریب با درونیابی چندجمله‌ای و درنتیجه همگرایی درونیاب به توابعی همچون تابع رونگه به ذهن می‌رسد این است که جمله‌ی

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|l(x)|=\max_{-1\leq x\leq 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

کمینه شود! این تنها قسمتی از فرمول خطاست که تاکنون زیاد با آن کلنجار نرفته‌ایم! مسئله‌ی کمینه‌کردنِ بیشینه‌ی اندازه‌ی تابع $l(x)$ یعنی

$$\min_{x_0,\cdots,x_n}\max_{-1\leq x\leq 1}|l(x)|$$

که به یک ((مسئله‌ی مینیماکس)) معروف است، توسط ریاضیدان برجسته‌ی روس ((پَفْنوتی چِبیشِف[1])) حل شده است. بار دیگر توجه کنید که تابع $l(x)$ به وضوح به نقاط

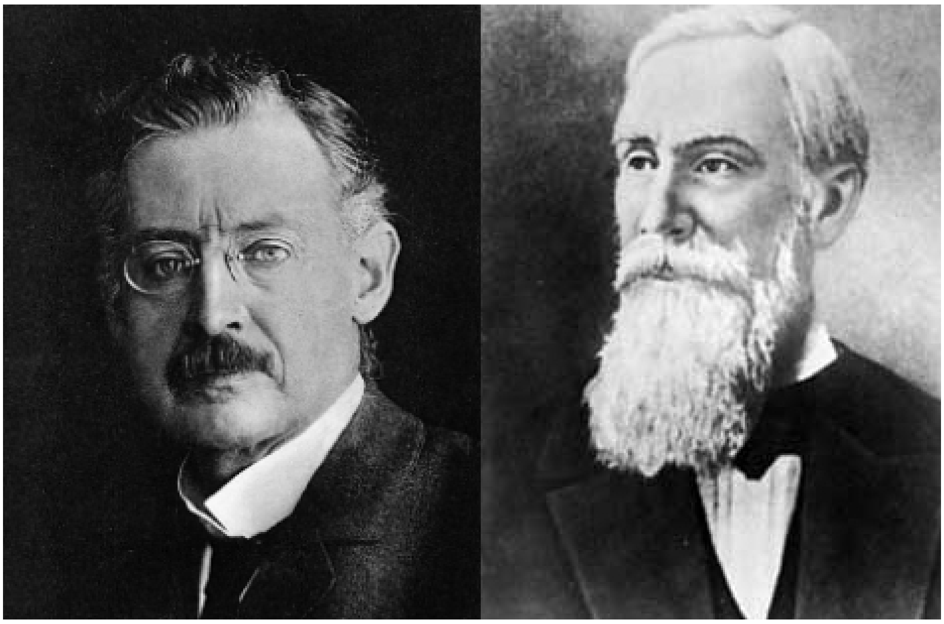
$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

که برای درونیابی انتخاب شده‌اند، وابستگی دارد. این بدان معناست که برای تضمین همگراییِ دنباله‌ی درونیاب‌های چندجمله‌ای به یک تابع یعنی حل مسئله‌ی مینیماکس، باید $n+1$ ((نقطه‌ی بهینه)) برای درونیابی را بیابیم. اینها همان $n+1$ نقطه‌ای هستند که بیشترین اندازه‌ی تابع $l(x)$ را برای $x\in[-1,\ 1]$ کمینه می‌کنند.

نقاطی که $l(x)$ را کمینه می‌کنند ریشه‌های چندجمله‌ای‌های خاصی هستند که به نام چندجمله‌ای‌های چبیشف شناخته می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها (که به تنهایی موضوع چندین کتاب مهم در ریاضیات هستند) در بازه‌ی $[-1,1]$ در رابطه‌ی

$$T_n(x)=\cos\Big(n\cos^{-1}x\Big),\quad n=0,1,2,\cdots$$

[1] Pafnuty Chebyshev



شکل ۸.۳: کارل رونگه (چپ) ریاضیدان و اخترشناس معروف آلمانی. نام او بجز نظریه‌ی تقریب، در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی نیز جاودانه است. وی دکتری را تحت نظر وایراشتراس در برلین گذراند و سپس در گوتینگِن مشغول کار شد. پفنوتی چبیشف (راست) استاد دانشگاه سن‌پترزبورگ و از تاثیرگذارترین ریاضی‌دانان قرن نوزده بود. تحقیقات وی از نظریه‌ی تقریب تا نظریه‌ی اعداد و مکانیک تا قانون ضعیف اعداد بزرگ در آمار و احتمال را به صورت اساسی تحت تاثیر قرار داده است. الکساندر لیاپونوف (که گرایش کنترل از رشته‌ی مهندسی برق بدون نام وی ناقص است) از دانشجویان دکتری چبیشف بود. (عکس‌ها از ویکیپدیا)

صدق می‌کنند. رابطه‌ی بالا فرمولی جمع و جور برای $T_n(x)$ است که قابل بازنویسی برحسب پایه‌های توانی می‌باشد. بعنوان مثال به کمک فرمول‌های ساده‌ی مثلثات می‌توان نشان داد که شش چندجمله‌ایِ ابتدایی چبیشف عبارتند از

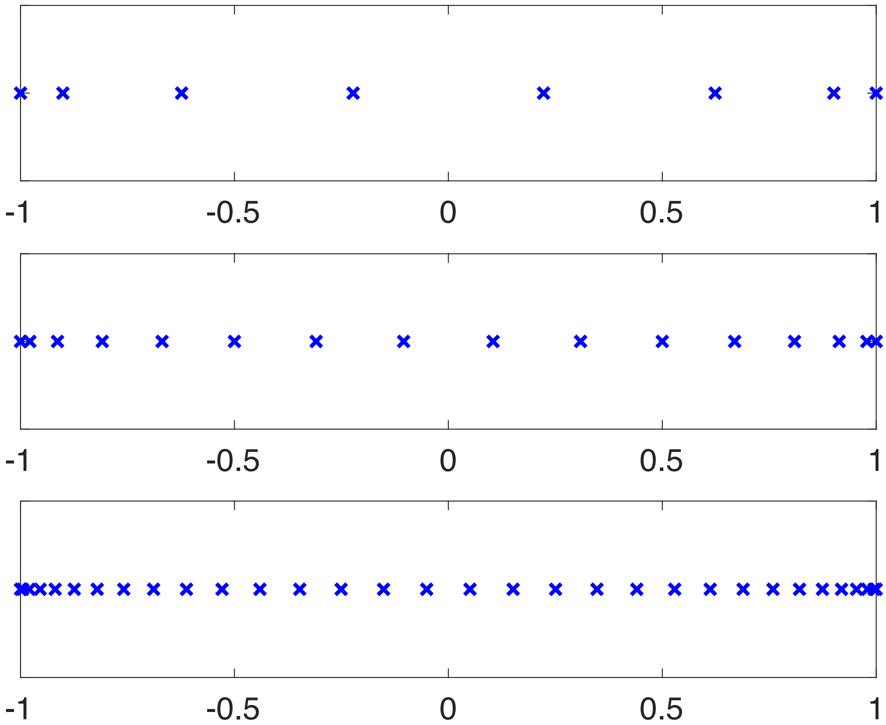
$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos\left(0\cos^{-1}x\right) = \cos(0) = 1,\\
T_1(x) &= \cos\left(\cos^{-1}x\right) = x,\\
T_2(x) &= \cos\left(2\cos^{-1}x\right) = 2\cos^2\left(\cos^{-1}x\right) - 1 = 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x.
\end{aligned}$$

برای $n = 2$ از تساوی ساده‌ی $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ با جایگذاری $\theta := \cos^{-1}x$ استفاده کردیم. چندجمله‌ای $T_{n+1}(x)$ که از درجه‌ی $n+1$ است به وضوح دارای $n+1$ ریشه در بازه‌ی $[-1,1]$ خواهد بود.

ریشه‌های $T_{n+1}(x)$ که به نقاط چبیشفی معروف هستند عبارتند از[۱]

$$x_k = \cos(\frac{k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

شکل ۹.۳ نقاط چبیشفی را برای درونیابی با چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر $n = 7$، $n = 15$ و $n = 31$ ترسیم کرده است. پیام مهمی که باید از این شکل به خاطر بسپاریم این است که بیشتر نقاط چبیشفی



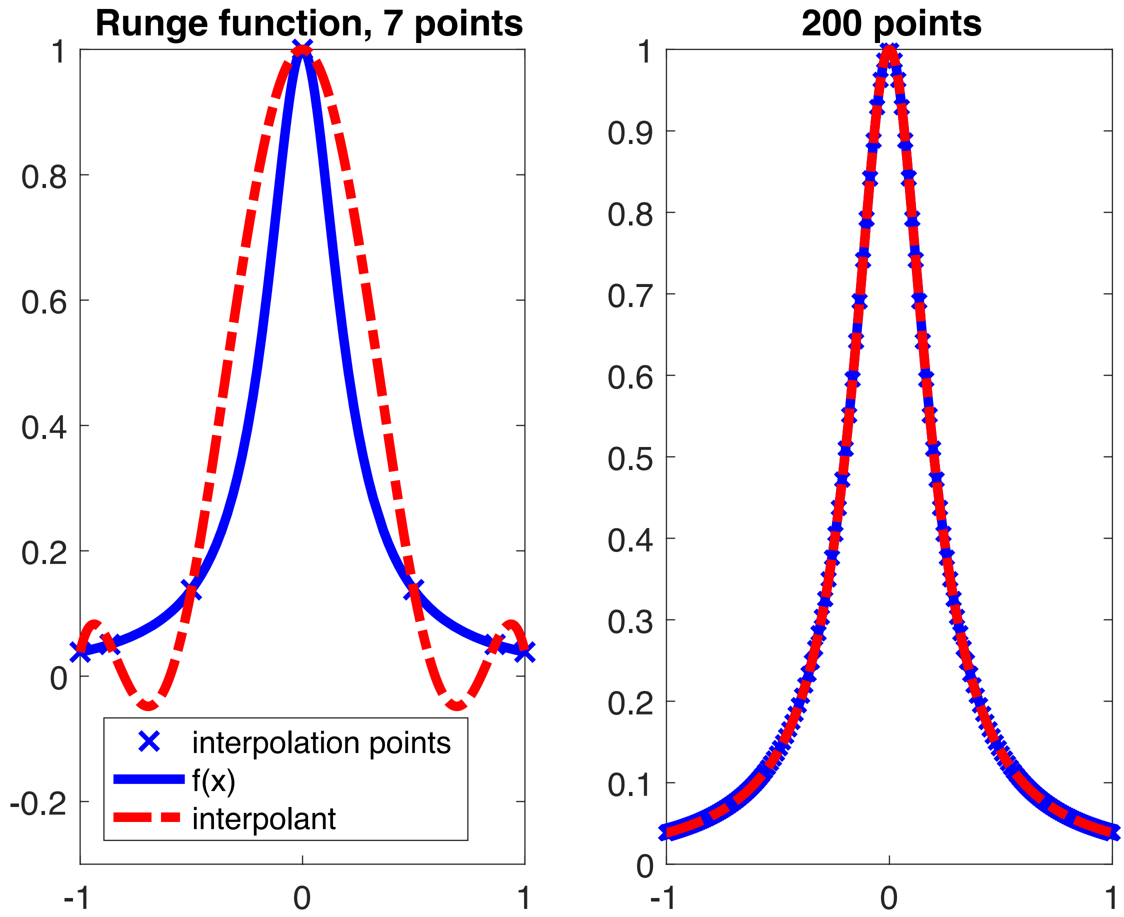
شکل ۹.۳: هشت، شانزده و سی‌ودو نقطه‌ی چبیشفی در بازه‌ی $[-1, 1]$

(برخلاف نقاط هم‌فاصله) در نزدیکی دو انتهای بازه جمع شده‌اند! جالب اینکه دو انتهای بازه همان منطقه‌ای است که چندجمله‌ای‌های درونیاب تابع رونگه در نقاط هم‌فاصله بیشترین میزان خطا را داشتند! شکل ۶.۳ را بار دیگر ببینید.

در شکل ۱۰.۳ می‌بینیم که چنانچه از نقاط چبیشفی برای تقریب تابع رونگه استفاده کنیم، همگرایی حاصل می‌شود. در سمت چپ درونیاب از درجه‌ی حداکثر شش را داریم. این درونیاب، خطای تقریب حدودا 3×10^{-1} را می‌دهد که تنها به طور ناچیزی بهتر از خطای تقریب با هفت نقطه‌ی هم‌فاصله (که قبلا گفتیم 0.6 بود) است. اما وقتی از درونیاب از درجه‌ی حداکثر 199 (سمت راست) استفاده می‌کنیم خطا به 3×10^{-16} کاهش می‌یابد!

توجه کنید که میزان نزول تابع $l(x)$ برای n نقطه‌ی چبیشفی سریع‌تر از نقاط هم‌فاصله است و همین

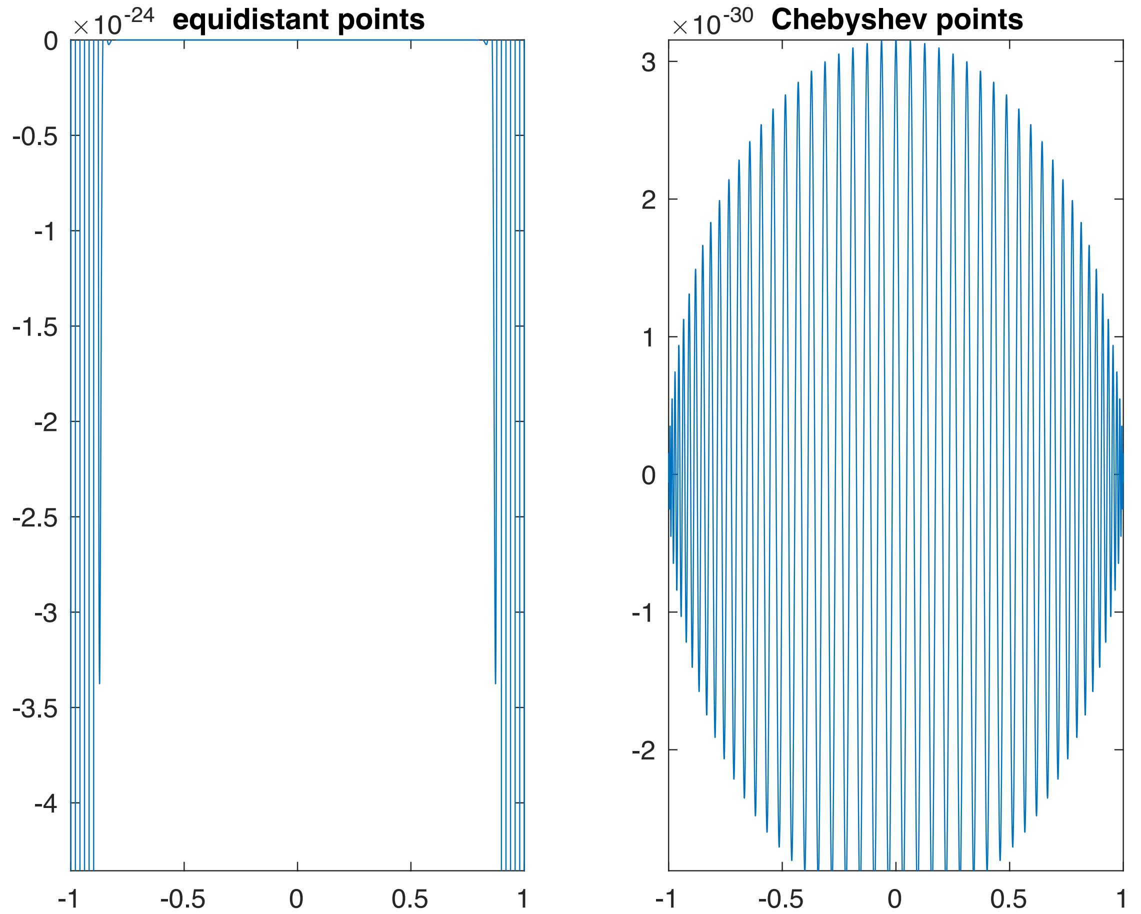
[۱] هم چندجمله‌ای‌های چبیشف و هم نقاط چبیشفی در هر بازه‌ی حقیقی کلی مانند $[a, \ b]$ نیز قابل تعریف هستند.



شکل ۱۰.۳: تقریب تابع رونگه با استفاده از درونیابی در نقاط چیبیشفی، همگرایی را نتیجه می‌دهد. این دقیقا برخلاف درونیابی در نقاط هم‌فاصله است که (همانگونه که در شکل ۶.۳ دیدیم) منجر به واگرایی می‌شد.

نکته نیز بخش مهمی از دلیل همگرایی درونیاب چیبیشفی تابع رونگه در شکل ۱۰.۳ است. شکل ۱۱.۳ نشان می‌دهد میزان نزول تابع $l(x)$ برای 100 نقطه‌ی چیبیشفی در بازه‌ی $[-1,\ 1]$ سریعتر از نقاط هم‌فاصله است. این اختلاف با افزایش n بیشتر هم خواهد شد.

قسمت مهمی از جادوی روشی که منجر به کاهش چشمگیر خطای تقریب بخصوص در سمت راست شکل ۱۰.۳ شده، مدیون استفاده از پایه‌ی چندجمله‌ای‌های چیبیشف (بجای پایه‌های لاگرانژ کلاسیک یا توانی انتقال‌یافته در روش نیوتن) برای نمایش و ارزیابیِ درونیاب است که در اینجا جزییات آنرا بیان نکردیم. چنانچه از نقاط چیبیشفی فقط برای اجرای درونیابی استفاده کرده از اما چندجمله‌ای درونیابِ حاصل را بر حسب پایه‌هایی بجز چندجمله‌ای‌های چیبیشف بیان کنیم آنگاه عملا وضعیت وقتی n کمی بزرگ باشد بازهم ایده‌آل نخواهد بود: ارزیابی چندجمله‌ای درونیاب می‌تواند عملی ناپایدار به لحاظ عددی بوده و با خطاهای گردکردن بزرگی همراه شود. به بیان دقیق‌تر برای درونیابی چندجمله‌ای روی یک بازه‌ی حقیقی نیاز است که



شکل ۱۱.۳: تابع $l(x)$ برای ۱۰۰ نقطه‌ی هم‌فاصله (سمت چپ) و ۱۰۰ نقطه‌ی چبیشفی (سمت راست) روی بازه‌ی $[-1,1]$. به مقیاس محور عمودی توجه کنید.

هم از نقاط چبیشفی استفاده کرده و هم درونیاب را به فرمی مانند

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) \tag{۱۲.۳}$$

نمایش داده و ارزیابی کرد. در اینجا ضرایب c_k از روی مقدار تابع $f(x)$ در نقاط چبیشفی محاسبه می‌شوند[1].
سه موردِ مهم مرتبط با درونیابی چبیشفی که در اینجا در مورد آن بحث نکردیم - و لازم است در یک درس

[1] بهترین ((درونیاب)) از درجه‌ی حداکثر n برای تابع f را چندجمله‌ای درونیابی درنظر گرفتیم که خطای درونیابی را کمینه می‌کرد و گفتیم که این همان درونیاب در نقاط چبیشفی است. توجه کنید که بهترین درونیاب یک تابع را نباید با بهترین تقریب از درجه‌ی n آن تابع اشتباه گرفت. این دو لزوما یکی نیستند به این مفهوم که اصولا روند یافتن بهترین تقریب از درجه‌ی n با روند یافتن یک چندجمله‌ای درونیاب در دسته‌ای مشخص از نقاط متفاوت است. پیداکردن بهترین تقریب از درجه‌ی n، به یافتن جواب یک مساله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی نیاز دارد که هرچند شدنی است اما به سادگیِ درونیابی چبیشفی نیست. الگوریتمی که پاسخش، بهترین تقریب از درجه‌ی n برای تابع f است، با نام الگوریتم رِمِز شناخته می‌شود. می‌توان ثابت کرد که چندجمله‌ای درونیاب در نقاط چبیشفی، خطای تقریب تابع f را ((نزدیک به)) کمینه می‌کند.

پیشرفته‌تر آنالیز عددی معرفی شوند – عبارتند از:

- محاسبه‌ی سریع ضرایب c_k به کمک تبدیل کسینوسی گسسته[۱] با هزینه‌ی محاسباتی $\mathcal{O}(n \log n)$.
- الگوریتم کلینشا برای ارزیابی سریع نمایش (۱۲.۳) از چندجمله‌ای درونیاب با هزینه‌ی محاسباتی $\mathcal{O}(n)$. الگوریتم کلینشا تعمیمی از الگوریتم هورنر است که قبلا معرفی شد.
- نمایش گرانیگاهی چندجمله‌ای درونیاب که بعضا بعنوان جایگزین نمایش (۱۲.۳) مطرح می‌شود. این نمایش نیز می‌تواند به صورتی پایدار عددی و در عین حال کارا مورد استفاده قرار گیرد.

تمام روش‌هایی که تاکنون معرفی کردیم، درونیاب چندجمله‌ای را به صورت سراسری[۲] می‌یابند. این بدان معناست که رویکرد فعلی منجر به یک چندجمله‌ای دارای تنها یک ضابطه در سرتاسر بازه‌ی $[a, b]$، شده و از این تک ضابطه برای تقریب در سرتاسر بازه استفاده می‌شود. با همان رویکردِ سراسری، درونیابی چبیشفی را برای غلبه بر پدیده‌ی رونگه (امکان عدم همگرایی درونیاب در نقاط هم‌فاصله) معرفی کردیم. راهکار دیگری نیز برای غلبه بر پدیده‌ی رونگه مطرح است که مبتنی بر رویکرد محلی (موضعی)[۳] است. در این رویکرد، بازه‌ی $[a, b]$، به چند زیربازه شکسته شده و در هر زیربازه از یک چندجمله‌ای از درجه‌ی پایینِ مخصوص برای درونیابی استفاده می‌شود. این راهکار که منجر به درونیابِ چندضابطه‌ای می‌شود به نام درونیابی اسپلاین معروف است.

[۱] discrete cosine transform (DCT)

[۲] global

[۳] local