فرض کنید با استفاده از روش لاگرانژ به فرم کلاسیک آن که تاکنون آموخته‌ایم، چندجمله‌ای درونیاب $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$ برای نقاط داده‌شده را یافته‌ایم. مشکل اصلی روش لاگرانژ، نه تا اینجا بلکه از اینجا به بعد یعنی در زمان استفاده از چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ که با این روش یافته‌ایم، است! وقتی بخواهیم از $p(x)$ با هدف تقریب، یعنی یافتن مقدار چندجمله‌ای درونیاب در نقطه‌ای هم‌چون x بین نقاط x_i که $x \neq x_i$ است استفاده کنیم، با دو مشکل عمده برخورد خواهیم کرد: یکی هزینه‌ی ارزیابی $p(x)$ در هر نقطه‌ی جدید و دیگری پایداری عددی. ابتدا مشکل اول را به بحث می‌گذاریم.

۳.۲.۳ هزینه‌ی ارزیابی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ (در فرم کلاسیک)

برای تعیین مقدار $p(x)$ در نقطه‌ی داده‌شده‌ی x، ابتدا مقدار چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)},$$

را برای $i = 0, 1, \ldots, n$ می‌یابیم. در صورت کسر بالا که $l_i(x)$ را می‌سازد نیاز به اجرای n عمل تفریق و سپس $n-1$ ضرب داریم یعنی تاکنون نیاز به اجرای $2n-1$ عمل محاسباتی پایه‌ای داریم. همین تعداد عمل را نیز باید در مخرج $l_i(x)$ اجرا کرده و نهایتا حاصلِ یک تقسیم را بیابیم. پس در مجموع، تعیین مقدار هر یک از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $l_i(x)$ نیاز به $4n-1$ عمل محاسباتی دارد. چون $n+1$ چندجمله‌ای لاگرانژ $l_i(x)$ در $p(x)$ وجود دارد پس در مجموع، ارزیابی $p(x)$ در هر تک نقطه‌ی x، نیاز به ((بیش از))

$$n(4n-1) = 4n^2 - n$$

عمل محاسباتی دارد[1].

به طور کلی در آنالیز عددی مرسوم است که تعداد کل عملیات موردنیاز در اجرای یک الگوریتم را ساده‌سازی می‌کنند: در موقعیت فعلی آنچه که در تعداد عملیات $4n^2 - n$ مهم‌تر است قسمت n^2 است چرا که با افزایش تعداد نقاط درونیابی این قسمت است که غالب می‌باشد. به طور خلاصه و به بیان ساده می‌گوییم: تعداد کل عملیات لازم برای ارزیابی فرم کلاسیک چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ در هر نقطه ((از مرتبه‌ی n^2 است)) و می‌نویسیم: هزینه، $\mathcal{O}(n^2)$ است[2].

[1] چرا که بجای $n+1$ نوشتیم n و ضرب y_i در $l_i(x)$ و سپس مجموع‌های لازم را هم درنظر نگرفته‌ایم. اما شمارش تعداد عملیات تا همین جا برای درست‌بودن نتیجه‌ای که می‌خواهیم در سطرهای بعدی بگیریم کفایت می‌کند.

[2] نماد اُوی بزرگ $\mathcal{O}$، نشان‌دهنده‌ی حرف ابتدای کلمه‌ی $order$ به معنای مرتبه است.

برای اینکه تصور بهتری از تعداد عملیات محاسباتی روشی با پیچیدگی محاسباتی $\mathcal{O}(n^2)$ در مقایسه با روشی که هزینه‌ی آن $\mathcal{O}(n)$ است داشته باشیم جدول زیر را ببینید. در این جدول برخی مقادیر n را با n^2 مقایسه کرده‌ایم.

n	1	2	4	8	16	32	64	128
n^2	1	4	16	64	256	1024	4096	16384

همانگونه که می‌بینیم چنانچه درجه‌ی n چندجمله‌ای درونیاب کوچک نباشد، هزینه‌ی محاسباتی $\mathcal{O}(n^2)$ قابل‌قبول نخواهد بود چرا که در مقایسه با روش هورنر که می‌تواند برای حل همین مسئله (البته در پایه‌های توانی) استفاده شود بسیار پرهزینه‌تر است.

دیدیم که درجه‌ی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ تا قبل از آخرین مرحله از محاسبات قابل پیش‌بینی نیست: در مثال ۲.۲.۳ دیدیم که درونیاب سه نقطه از درجه‌ی یک شد. با روش لاگرانژ تنها چیزی که قبل از حل مسئله در مورد درجه‌ی جواب می‌دانیم این است که درجه‌ی چندجمله‌ای درونیاب $n+1$ نقطه، ((حداکثر)) n است.

از سوی دیگر موقعیتی را درنظر بگیرید که چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ $p_k(x)$ برای $k+1$ نقطه را یافته و از میزان خطای آن ناراضی هستیم. برای کمترشدن خطا ممکن است یک نقطه به نقاط قبلی درونیابی اضافه کنیم. با این کار هرچند ممکن است بتوان انتظار داشت که خطای تقریب کمتر شود اما نمی‌توان از $p_k(x)$ برای یافتن چندجمله‌ای درونیاب جدید یعنی $p_{k+1}(x)$ استفاده‌ی چندانی کرد یعنی هدفِ کاستن از میزان محاسبات برآورده نمی‌شود.

در روش بعدی یعنی تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن می‌توان هر دو مورد قبل را به سادگی انجام داد. بعلاوه خواهیم دید که چنانچه چندجمله‌ای درونیاب نیوتن، محاسبه‌شده و در دسترس باشد، ارزیابی آن در هر نقطه تنها نیاز به $\mathcal{O}(n)$ عمل محاسباتی دارد!

۳.۳ روش تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن

روش لاگرانژ چندجمله‌ای درونیاب را به صورت بسطی متناهی از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $l_i(x)$ بیان می‌کرد به گونه‌ای که ضرایب بسط یعنی y_iها، واضح بوده و تعیین آن‌ها نیاز به هیچ محاسبه‌ای ندارد:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

اما برای محاسبه‌ی چندجمله‌ای درونیاب $p(x)$ می‌توان از پایه‌های دیگری بجز $l_i(x)$ها نیز استفاده کرد. در روش تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن، چندجمله‌ای درونیاب به صورت بسطی از توابع زیر - که به نام پایه‌ی توانیِ انتقال‌یافته[1] معروف است- بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&1 \\
&(x-x_0) \\
&(x-x_0)(x-x_1) \\
&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\cdots \\
&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

این بدان معناست که در این روش قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
p(x) = a_0(1) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \\
a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (۴.۳)
\end{aligned}$$

که در آن a_iها ضرایبی ثابت و مجهول هستند. این ضرایب باید به گونه‌ای تعیین شوند که $p(x)$ درونیاب نقاط

$$(x_i,\ f_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

[1] shifted monomial basis

باشد یعنی شرایط

$$p(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{۵.۳}$$

برقرار باشند. پس منطقی است که انتظار داشته باشیم a_iها برحسب x_iها و f_iها بیان شوند. در ابتدا تنها محاسبه‌ی سه ضریب ابتدایی a_0، a_1 و a_2 را بررسی می‌کنیم.

اولا با جایگذاری $x = x_0$ در رابطه‌ی (۴.۳) داریم:

$$p(x_0) = a_0$$

پس با توجه به شرایط درونیابی یعنی (۵.۳) داریم:

$$\boxed{a_0 = f_0.} \tag{۶.۳}$$

ثانیا با جایگذاری $x = x_1$ در رابطه‌ی (۴.۳) و با توجه به (۵.۳) داریم:

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

و چون $a_0 = f_0$ پس داریم:

$$\boxed{a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.} \tag{۷.۳}$$

به طرز مشابه برای $x = x_2$ داریم:

$$p(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

که در آن $a_0 = f_0$ و $a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ معلوم هستند و مجهول a_2 را با استفاده از شرط درونیابی (۵.۳) تعیین می‌کنیم:

$$f_2 = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{f_2 \pm f_1 - f_0 - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{(f_2-f_1)+(f_1-f_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}}{x_2-x_0} + \frac{f_1-f_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{f_1-f_0}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}}{x_2-x_0} + \frac{(x_1-x_0)-(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_0)}(f_1-f_0) \\
&= \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}}{x_2-x_0} + \frac{(-1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}(f_1-f_0) \\
&= \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}}{x_2-x_0} - \frac{\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}.
\end{aligned}$$

یعنی:

$$a_2 = \frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1} - \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}. \tag{۸.۳}$$

به همین ترتیب می‌توان سایر ضرایب مجهول a_i را نیز تعیین کرد. همانگونه که در بالا دیدیم فرمول‌های a_1 و a_2 شامل تعدادی تفریق و تقسیم است یعنی تعدادی ((تفاضل تقسیم‌شده)) داریم. برای پرهیز از سردرگمی در فرمول مجهول‌های بعدی a_3 تا a_n، ابتدا نمادگذاری تفاضلات تقسیم‌شده را به صورتی بازگشتی معرفی می‌کنیم.

تفاضلات تقسیم‌شده[۱]

فرض کنید $x_0, x_1, \cdots, x_n$ نقاطی دو به دو متمایز و $f_0, f_1, \cdots, f_n$ مقدار تابع f به ترتیب در هر یک از این نقاط باشد. در این صورت تفاضلات تقسیم‌شده‌ی ((مرتبه‌ی صفر)) تابع f بدین صورت ((تعریف)) می‌شود:

$$f[x_i] := f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

[۱] divided differences

تفاضلات تقسیم‌شده‌ی ((مرتبه‌ی اول)) تابع f برای نقاط x_i و x_{i+1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}] := \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i},$$
$$= \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

همچنین تفاضلات تقسیم‌شده‌ی ((مرتبه‌ی دوم)) تابع f برای نقاط x_i، x_{i+1} و x_{i+2} عبارت است از:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-2.$$

به طور کلی $n+1$ نقطه می‌توانند تفاضلات تقسیم‌شده‌ی تا ((مرتبه‌ی n)) را تولید کنند. مشابه قبل، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی nام تابع f برای نقاط $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}$ عبارت است از:

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}] := \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}, \quad i = 0.$$

یعنی

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

نهایتا اگر x نقطه‌ی دلخواهی از بازه‌ی $[x_0,\ x_n]$ باشد به طوری که $x \neq x_i$ در این صورت تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نقاط $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ عبارت است از:

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_n] - f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x}.$$

نکته‌ی ۱.۳.۳. تفاضلات تقسیم‌شده نسبت به آرگومان‌های ورودی متقارن هستند. بعنوان مثال

$$f[x_i, x_{i+1}] = f[x_{i+1}, x_i]$$

و یا

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = f[x_{i+1}, x_i, x_{i+2}] = f[x_i, x_{i+2}, x_{i+1}] = \cdots$$

مثال ۱.۳.۳. با استفاده از تابع جدولی زیر، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی تابع f را بیابید.

تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی صفر تابع f همان مقادیر آمده در تابع جدولی هستند. برای تفاضلات

x_i	-1	0	1	2	4
f_i	-1	1	1	5	19

تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی اول داریم:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = +2 \\
f[x_1, x_2] &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 1}{1} = 0 \\
f[x_2, x_3] &= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 - 1}{1} = 4 \\
f[x_3, x_4] &= \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{19 - 5}{2} = 7
\end{aligned}
$$

تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی دوم عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{0 - 2}{1 - (-1)} = -1 \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = +2 \\
f[x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{7 - 4}{4 - 1} = +1
\end{aligned}
$$

به همین ترتیب جدول ۱.۳ که به ((جدول تفاضلات تقسیم‌شده)) معروف است، تمام تفاضلات مربوط به این مثال را دربر دارد.

با نمادهای تفاضلات تقسیم‌شده و با توجه به فرمول‌های (۶.۳)، (۷.۳) و (۸.۳) واضح است که: $a_0 = f[x_0]$، $a_1 = f[x_0, x_1]$ و $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$. قضیه‌ی زیر فرمول تمام ضرایب فرم نیوتن درونیاب چندجمله‌ای را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۱.۳.۳. فرض کنید f_iها مقادیر تابع f در $n + 1$ نقطه‌ی متمایز $x_0, x_1, \cdots, x_n$ باشند. در این صورت چندجمله‌ای درونیاب از درجه‌ی حداکثر n برای تابع f در این نقاط برابر است با

$$
\begin{aligned}
p(x) = f_0 &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\
&+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}). \qquad (۹.۳)
\end{aligned}
$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
-1	-1				
		$\frac{1-(-1)}{0-(-1)} = +2$			
0	1		$\frac{0-2}{1-(-1)} = -1$		
		$\frac{1-1}{1-0} = 0$		$\frac{2-(-1)}{2-(-1)} = 1$	
1	1		$\frac{4-0}{2-0} = +2$		$\frac{\frac{-1}{4}-1}{4-(-1)} = \frac{-1}{4}$
		$\frac{5-1}{2-1} = 4$		$\frac{1-2}{4-0} = \frac{-1}{4}$	
2	5		$\frac{7-4}{4-1} = +1$		
		$\frac{19-5}{4-2} = 7$			
4	19				

جدول ۱.۳: جدول تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مثال ۱.۳.۳

دقت کنید در مورد مثال قبل، ضرایبی که در (۹.۳) لازم هستند همگی روی قطر اصلی جدول ۱.۳ ظاهر می‌شوند. به بیان دیگر چنانچه جدول تفاضلات تقسیم‌شده محاسبه شده باشد، برای ساختن چندجمله‌ای درونیاب در فرم تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن، تنها درایه‌های روی قطر اصلی این جدول را نیاز خواهیم داشت.

با این حال واضح است که تعیین ضرایب روی قطر اصلی جدول ۱.۳ بدون محاسبه‌ی سایر ضرایب که در پایین قطر اصلی جدول هستند ممکن نیست!

نکته‌ی ۲.۳.۳. قبل از شروع بحث روش تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن گفتیم که ارزیابی چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ در هر نقطه نیاز به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل محاسباتی دارد. حال فرض کنید چندجمله‌ای درونیاب (۹.۳) ((محاسبه شده و معلوم باشد)). می‌خواهیم بدانیم که آیا در این موقعیت ارزیابی $p(x)$ در هر نقطه کاراتر از درونیاب لاگرانژ می‌باشد یا خیر؟

- در جمله‌ی اول (۹.۳)، تعداد صفر عمل تفریق و صفر عمل ضرب لازم است.
- در جمله‌ی دوم یعنی $f[x_0, x_1](x - x_0)$ به یک عمل تفریق و یک عمل ضرب نیاز است.
- در جمله‌ی سوم یعنی $f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$ به دو عمل تفریق و دو عمل ضرب نیاز است.
- چنانچه قسمت $(x-x_0)(x-x_1)$ در جمله‌ی سوم را ذخیره کنیم، می‌توان از آن برای محاسبه‌ی جمله‌ی چهارم (۹.۳) که عبارت است از $f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ استفاده کرده و آن‌را

با یک تفریق جدید و دو ضرب جدید انجام داد: $(x-x_2)\Big((x-x_0)(x-x_1)\Big)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$.

- به همین ترتیب چنانچه عبارت $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})$ در جمله‌ی ماقبل پایانیِ (۹.۳) را ذخیره کنیم، آنگاه خواهیم توانست جمله‌ی پایانی را نیز با تنها یک تفریق و دو ضرب تعیین کنیم.

پس تعداد کل تفریق‌ها و ضرب‌های لازم برای ارزیابی $p(x)$ در هر نقطه‌ی معلومِ x برابر است با:

$$0+(1+1)+(2+2)+(1+2)+\cdots+(1+2)=0+2+4+3(n-3+1)=3n.$$

بنابراین برخلاف چندجمله‌ای درونیاب در فرم لاگرانژ که ارزیابی آن در هر نقطه به $\mathcal{O}(n^2)$ عمل نیاز داشت، ارزیابی چندجمله‌ای درونیاب در فرم تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن به تنها $\mathcal{O}(n)$ عمل محاسباتی نیاز دارد.

نکته‌ی ۳.۳.۳. نکته‌ی قبل با فرض معلوم‌بودنِ فرم تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن برای چندجمله‌ای درونیاب درست بود. پرسش دیگری که مطرح می‌شود این است که اصولا تعیین فرم تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن، خود به چند عمل محاسباتی نیاز دارد؟ یعنی برای تعیین ضرایب $f[x_0]$، $f[x_0,x_1]$، $f[x_0,x_1,x_2]$ تا $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ در بسط متناهی (۹.۳) چند عمل محاسباتی نیاز است؟ دقت کنید که جدول تفاضلات تقسیم‌شده، جدولی است با $n+1$ سطر و $n+1$ ستون. در جدول ۱.۳ حالت خاص $n=4$ را داشتیم. تعیین درایه‌های اولین ستون در جدول تفاضلات تقسیم‌شده واضح است و نیاز به هیچ عمل محاسباتی ندارد چرا که تعریف کردیم $f[x_i]=f(x_i)=f_i$. در ستون‌های بعدیِ جدول لازم است به ترتیب n $n-1$ تا نهایتا 1 تفاضلِ تقسیم‌شده محاسبه شوند. پس تعداد کل تفاضلات تقسیم‌شده‌ی غیربدیهی برابر است با

$$n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

از سوی دیگر محاسبه‌ی هر تفاضل تقسیم‌شده به سه عمل (دو تفریق و یک تقسیم) نیاز دارد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی تعیین چندجمله‌ای درونیاب در فرم تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن برابر است با

$$\frac{3n(n+1)}{2}=\mathcal{O}(n^2).$$