فصل ۲

ریشه‌یابی توابع یک‌متغیره

۱.۲ مقدمه

از جبرخطی دبیرستان می‌دانیم که وجود و یکتایی جواب دستگاهی از n معادله و n مجهول خطی (که معمولا به شکل ماتریسی $Ax = b$ بیان می‌شود) چندان پیچیده نیست: جواب یکتاست، اگر و تنها اگر ماتریس ضرایب A ناتکین (معکوس‌پذیر) باشد. با این وجود وجود و یکتایی جواب‌های یک تک‌معادله‌ی غیرخطی اغلب پیچیده‌تر است و رفتارهای متفاوتی قابل رخداد است! در اصل در مقایسه با خطوط مستقیم، منحنی‌ها (نمودارهای غیرخطی) در حالت‌های متفاوتی می‌توانند برخورد کنند. مثال زیر را ببینید.

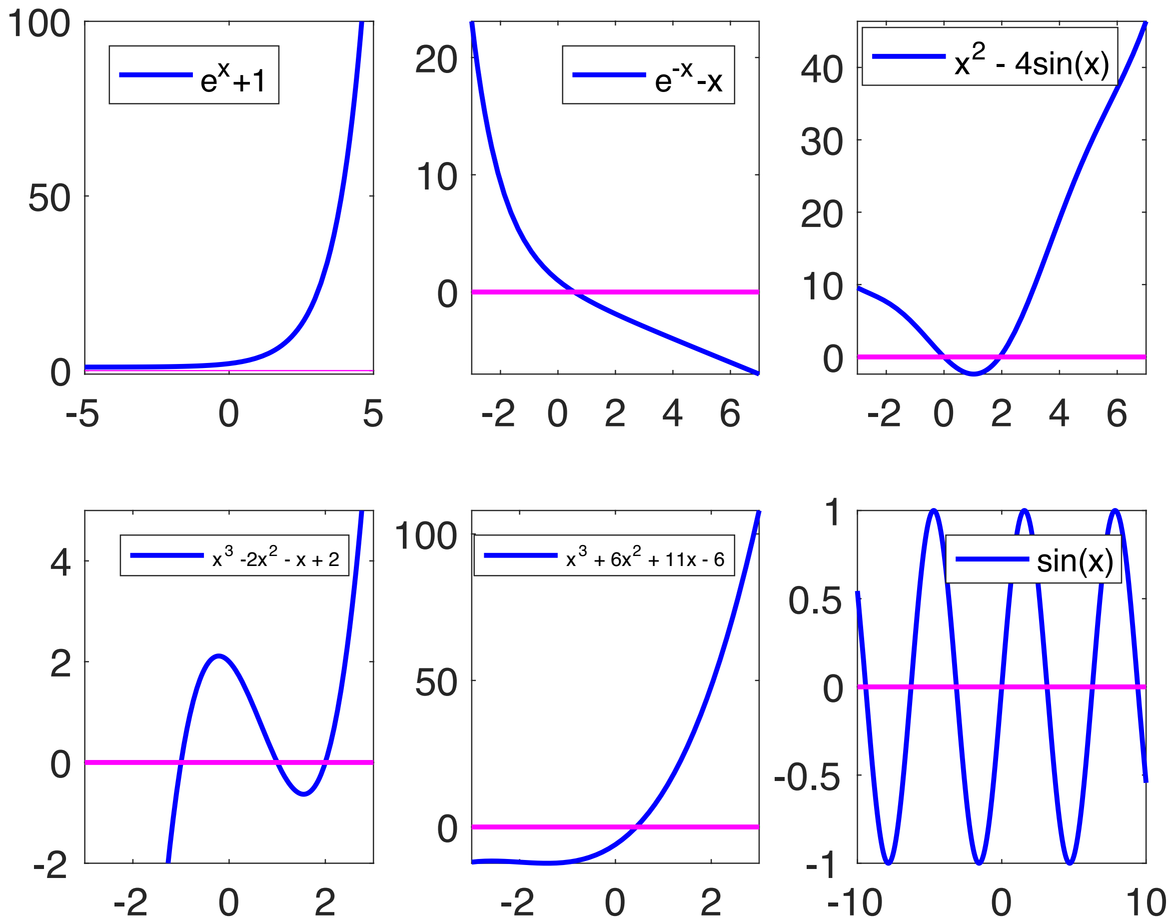
مثال ۱.۱.۲. تعداد ریشه‌های توابع غیرخطی می‌تواند بسیار متنوع باشد. در تمام نمودارهای شکل ۱.۲،

$$
\begin{aligned}
e^x + 1 = 0 &\quad \text{جواب ندارد} \\
e^{-x} - x = 0 &\quad \text{یک جواب دارد} \\
x^2 - 4\sin x = 0 &\quad \text{دو جواب دارد} \\
x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0 &\quad \text{سه جواب دارد} \\
x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0 &\quad \text{سه جواب دارد} \\
\sin x = 0 &\quad \text{بینهایت جواب دارد}
\end{aligned}
$$

محور xها با رنگ ارغوانی مشخص شده.

از سوی دیگر، یک معادله‌ی غیرخطی می‌تواند ریشه‌ی (جواب) تکراری [1] داشته باشد.

[1] multiple root



شکل ۱.۲: گستردگی حالت‌های ممکن برای تعداد ریشه‌های توابع غیرخطی در مثال ۱.۱.۲

تعریف ۱.۱.۲. اگر x یک ریشه‌ی تابع f باشد اما ریشه‌ی مشتق f نباشد یعنی $f(x)=0$ ولی $f'(x)\neq 0$، گوییم x یک ریشه‌ی ساده[۱] برای f است.

از سوی دیگر اگر f و مشتق‌های تا مرتبه‌ی $m-1$ آن همگی دارای ریشه در نقطه‌ای یکسان همچون x باشند یعنی

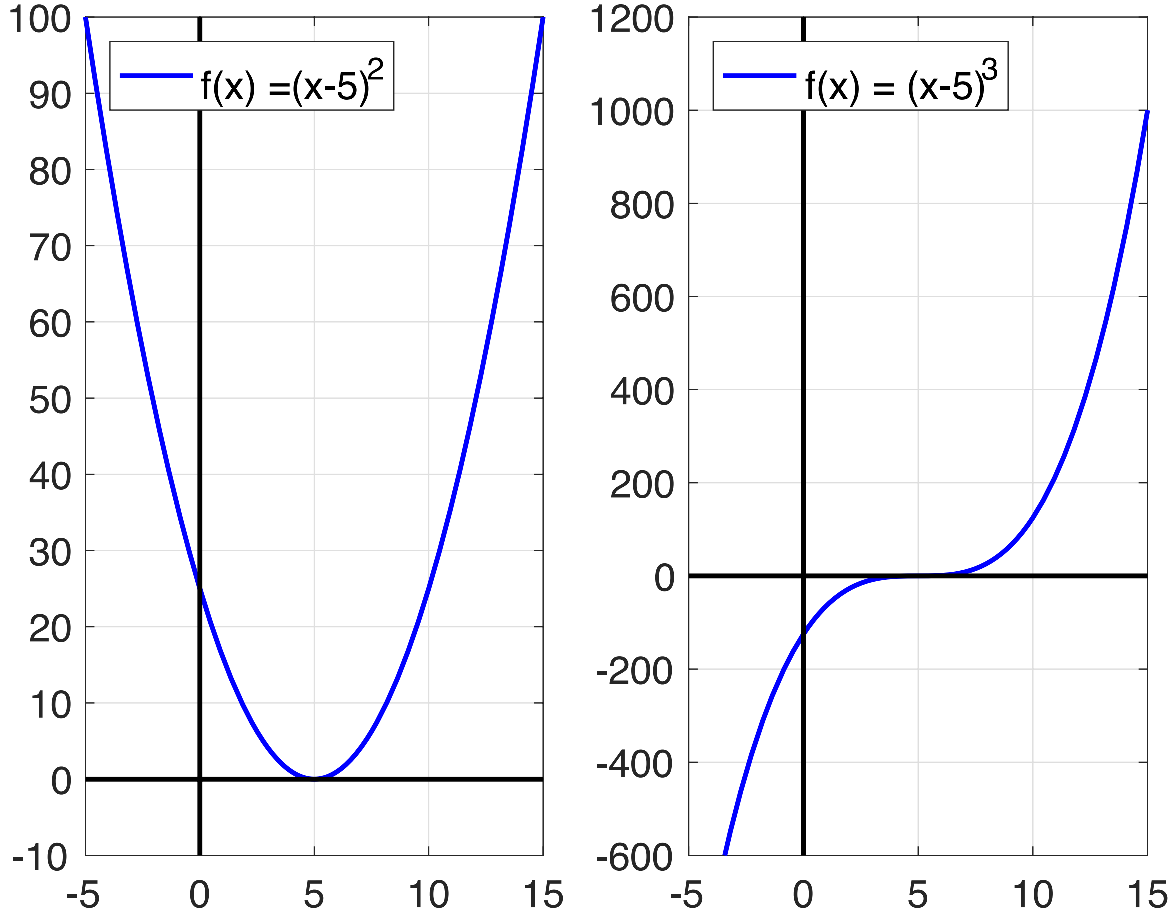
$$f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(m-1)}(x)=0$$

آنگاه x یک ریشه‌ی تکراری با مرتبه‌ی تکرار m نامیده می‌شود. بطور خاص اگر $f(x)=f'(x)=0$ آنگاه x یک ریشه‌ی تکراری با مرتبه‌ی تکرار دو نامیده می‌شود.

داشتن ریشه‌ی تکراری (در حالت یک بعدی) بدین معناست که منحنی f، در محل ریشه روی محور xها دارای خط مماس است. دو نمونه از توابع دارای ریشه‌ی تکراری در شکل ۲.۲ رسم شده‌اند.

تمرین ۴. براساس قضیه‌ی اساسی جبر می‌دانیم که هر چندجمله‌ای درجه n، دقیقا دارای n ریشه (با شمارش

---
[۱] simple root



شکل ۲.۲: نمودار تابع $(x-5)^2$ با محور xها برخورد کرده ولی آن را قطع نمی‌کند (مرتبه‌ی تکرار زوج). از سوی دیگر نمودار تابع $(x-5)^3$ با محور xها برخورد کرده و آن را قطع می‌کند (مرتبه‌ی تکرار فرد).

تکرارها) است. با توجه به اینکه چندجمله‌ای

$$p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x - 6$$

هیچ‌جا روی محور xها مماس افقی نداشته و در نتیجه ریشه‌ی تکراری ندارد، چرا تنها یک ریشه را می‌توان در شکل ۱.۲ دید؟ قاعده‌ی علامت دکارت در مورد تعداد ریشه‌های این چندجمله‌ای چه می‌گوید؟

۱.۱.۲ عدد وضعیت (مطلق) مسئله‌ی ریشه‌یابی

قبل از آشنایی با الگوریتم‌های ریشه‌یابی مفید است که میزان حساسیت مسئله‌ی ریشه‌یابی به خطاهای گردکردن را بررسی کنیم. به یاد آورید که عدد وضعیت (نسبی) یک مساله با تقسیم اختلال نسبی خروجی بر اختلال نسبی ورودی به دست می‌آید. به همین ترتیب عدد وضعیت مطلق با تقسیم اختلال مطلق خروجی بر اختلال مطلق ورودی حاصل می‌شود.

ابتدا مسئله‌ی

$$\text{یافتن } x \text{ به طوری که } y = f(x) \text{ باشد} \tag{۱.۲}$$

را در نظر می‌گیریم. این مساله، معکوسِ مسئله‌ی ارزیابی مقدار تابع $y = f(x)$ به ازای x است چرا که جواب مسئله‌ی (۱.۲) با فرض وجود معکوس تابع f (که مثلا اگر f در حوالی x یکنوا باشد، تضمین شده است)، برابر است با $x = f^{-1}(y)$. در مسئله‌ی (۱.۲) خروجی عبارت است از x و ورودی عبارت است از y. پس با توجه به رابطه‌ی کلی (۱۰.۱) از فصل قبل داریم:

$$\begin{aligned} \text{عدد وضعیت نسبی مسئله‌ی (۱.۲)} &= |\frac{\text{ورودی}}{\text{خروجی}} \times \text{مشتق (خروجی بر حسب ورودی)}| \\ &= |\frac{y}{x} \times (f^{-1})'(y)|, \end{aligned}$$

و همچنین از ریاضیات دبیرستان، رابطه‌ی زیر را برای مشتق تابع معکوس به یاد داریم:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

پس عدد وضعیت نسبی مسئله‌ی (۱.۲) برابر است با:

$$\kappa_f(y) = |\frac{f(x)}{xf'(x)}|.$$

این عدد وضعیت نشان می‌دهد که وقتی داده‌ی ورودی y در نتیجه‌ی اختلال کوچکی هم‌چون δy به $y + \delta y$ تغییر کند، مقدار x با چه ضریبی تغییر می‌کند.

مسئله‌ی اصلیِ این فصل اما ریشه‌یابی است که حالت خاص مسئله‌ی (۱.۲) به ازای $y = 0$ می‌باشد. در نتیجه با جایگذاری این مقدار در فرمول بالا، عدد وضعیت نسبی برای تمام توابع f، تابع ثابت صفر خواهد شد! پس می‌توان نتیجه گرفت که عدد وضعیت نسبی (هرچند ابزار مناسبی برای تعیین میزان حساسیت مسئله‌ی (۱.۲) بود)، برای تحلیل حساسیت مسئله‌ی ریشه‌یابی مناسب نیست. یک راه برای غلبه بر این مشکل این است که به سراغ عدد وضعیتِ مطلق برویم[1]. با توجه به نکته‌ی ۱.۴.۱ از فصل قبل و مشتق

[1]توجیه ساده‌تری برای مناسب‌نبودن عدد وضعیتِ نسبی برای مسئله‌ی ریشه‌یابی این است که عدد وضعیت نسبی از روی خطای نسبی ساخته می‌شود و در مسئله‌ی ریشه‌یابی، خطای نسبیِ ورودی نیاز به تقسیم بر صفر خواهد داشت که تعریف نشده است (شرط بی‌معنی‌نبودن فرمول (۳.۱) از فصل قبل را به یاد آورید.) در چنین مواقعی خطای مطلق را باید جایگزین کرد که

تابع معکوس، عدد وضعیتِ مطلقِ مسئله‌ی ریشه‌یابی عبارت است از

$$\hat{\kappa}_f = \frac{1}{|f'(x)|}. \qquad (۲.۲)$$

پس مسئله‌ی ریشه‌یابی، خوش‌وضع است اگر مشتق تابع f در نزدیکی ریشه‌ی x بزرگ باشد و بدوضع است چنانچه مشتق تابع در نزدیکی ریشه بسیار کوچک باشد. بدترین موقعیت مثلا وقتی است که x یک ریشه‌ی تکراری باشد که در این صورت عدد وضعیت مطلق (۲.۲) بینهایت می‌شود. به لحاظ شهودی می‌توان تصور کرد که وقتی ریشه‌ی x تکراری باشد، نمودار تابع در نزدیکی ریشه تقریبا افقی شده و تعیین محل دقیق برخورد منحنی با محور xها سخت‌تر خواهد بود. دقت کنید که حتی اگر x یک ریشه‌ی ساده‌ی f باشد چنانچه ریشه‌ی دیگری هم در نزدیکی x وجود داشته باشد بطور کلی این بدان معناست که نمودار تابع در نزدیکی x نمی‌تواند شیب چندان زیادی داشته باشد چرا که تابع باید قبل از اینکه فاصله‌ی زیادی از محور xها بگیرد باز هم این محور را قطع کند. در نتیجه $f'(x)$ در نزدیکی x مقداری کوچک بوده و عدد وضعیت بزرگ خواهد بود. پس میزان حساسیت مسئله‌ی یافتن ریشه‌ی ساده به خطاهای کوچک گردکردن به میزان جدایی ریشه‌های f بستگی دارد: هر چه ریشه‌ها به هم چسبیده‌تر باشند عدد وضعیت بزرگ‌تر خواهد بود.

۲.۱.۲ قضیه‌ی آبل–روفینی

هدف ما در این فصل یافتن ریشه‌ی توابع غیرخطی در حالت کلی شامل توابع متعالی $f(x)$ است. با این حال فکرکردن به حالت خاص توابع چندجمله‌ای $p(x)$ گاهی بسیار مفید است چرا که در مورد یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها بسیار زیاد می‌دانیم و قاعدتا یافتن ریشه‌ی چنین توابع خاصی باید ساده‌تر از توابع متعالی به طور کلی باشد. اصولا به لحاظ تاریخی نیز شکل‌گیری علم جبرمجرد با پژوهش‌های گالوا از کار بر روی مسئله‌ی ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها شروع شده است. قضیه‌ی مهم زیر در مورد ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها که به نام قضیه‌ی آبل–روفینی[2] یا قضیه‌ی ناممکن‌بودن آبل[1] شناخته می‌شود بسیار روشنگر است.

قضیه‌ی ۱.۱.۲. هیچ جواب جبری (شامل رادیکال‌ها) برای چندجمله‌ای‌های کلی با ضرایب دلخواه از درجه‌ی پنج یا بیشتر وجود ندارد.

نهایتا منجر به عدد وضعیت مطلق می‌شود.

[2] Abel-Ruffini theorem

[1] Abel's impossibility theorem

شکل ۳.۲: از راست به چپ: آبل، روفینی و گالوا (تصویرها از ویکیپدیا). هر سه غول بر روی مسئله‌ی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها کار کرده‌اند.

عدم وجود جواب جبری بدین معناست که اصولا فرمولی بسته[۱] که در تعدادی متناهی مرحله عملیات، بتواند مسئله‌ی ریشه‌یابی را به طور کلی حل کند وجود نداشته و در نتیجه باید به روش‌هایی متوسل شویم که بینهایت مرحله دارند یعنی روش‌های تکراری که دنباله‌ای بینهایت-جمله‌ای مانند

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ x_{k+1},\cdots$$

را تولید می‌کنند به این امید که حد دنباله در بینهایت، ریشه‌ی تابع f باشد. هر روش تکراری دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ را با روند خاص خود می‌سازد و در واقع تفاوت روش‌های تکراری در چگونگی ساختن این دنباله است.

همانگونه که در فصل قبل نیز گفتیم، در عمل به طور کلی نمی‌توان بینهایت جمله‌ی یک دنباله را ساخت و مجبوریم تولید جملات دنباله‌ای که توسط هر روش تکراری ساخته می‌شود را از جایی به بعد متوقف کنیم. این کار مفهوم ریشه‌ی تقریبی را حاصل می‌کند:

تعریف ۲.۱.۲. $\tilde{x}$ یک ریشه‌ی تقریبی تابع f نامیده می‌شود اگر

$$f(\tilde{x}) \approx 0$$

[۱] مانند فرمول دلتا برای چندجمله‌ای‌های درجه دو

یا

$$|\tilde{x} - x^*| \approx 0$$

که در آن x^* جواب درست معادله‌ی $f(x) = 0$ است.

بررسیِ معیار اول معمولا ساده است چرا که در بیشتر مواقع می‌توان با هزینه‌ی کمی مقدار $f(\tilde{x})$ (که در واقع همان باقیمانده است) را محاسبه کرد. معیار دوم اما با توجه به اینکه ریشه‌ی درست x^* معمولا در دسترس نیست، به سادگی قابل بررسی نیست. با این‌حال می‌توان آن را تخمین زد یا کراندار نمود.

فرض کنید یک حدس اولیه برای جواب یک معادله‌ی غیرخطی انتخاب شده باشد. گفتیم که روش‌های تکراریِ مختلف از این حدس اولیه آغاز کرده و دنباله‌هایی مختلف از ریشه‌های تقریبی را تولید می‌کنند که امیدواریم به جواب همگرا باشند. در عمل تکرار را تا وقتی که نتیجه به اندازه کافی درست بوده پایان می دهیم. در این فصل روش‌های تکراری مختلفی را برای محاسبه‌ی عددی ریشه‌های یک معادله غیرخطی بررسی می‌کنیم. قبل از معرفی روش‌ها خوب است معیاری برای مقایسه‌ی آنها داشته باشیم.

۲.۲ نرخ همگرایی روش‌های تکراری

مفهوم نرخ همگرایی ابزاری است برای مقایسه‌ی میزان کارایی روش‌های تکراری مختلفی که همگرا هستند. فرض کنید خطا در مرحله kام را با e_k نمایش دهیم:

$$e_k = x_k - x^* \tag{۳.۲}$$

که در آن x_k جواب تقریبی بدست آمده در مرحله kام و x^* جواب دقیق هستند. توجه کنید که بعضی روش‌ها برای یافتن ریشه‌ی تابع f بجای تولید یک جواب تقریبی مانند x_k در مرحله kام، بازه‌ای را تولید می‌کنند که جواب را در بردارد و با افزایش k پهنای این بازه کوچک و کوچک‌تر می‌شود. برای چنین روش‌هایی e_k را طول این بازه در مرحله kام در نظر می‌گیریم. تعریف زیر معیاری برای سنجش سرعت همگرایی خطای e_k به صفر ارائه می‌کند.

تعریف ۱.۲.۲. گوییم روش تکراری سازنده‌ی دنباله‌ی $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ با نرخ $r \geq 1$ همگراست اگر

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = c \tag{۴.۲}$$

که در آن c یک مقدار متناهی غیرصفر است که ثابت خطای مجانبی نامیده می‌شود.

برای فهم بهتر رابطه‌ی بالا می‌توان آن را بدین صورت تفسیر کرد که $|e_{k+1}| = c|e_k|^r$ وقتی $k \to \infty$.
واضح است که هرچه r بزرگ‌تر و c کوچک‌تر باشد دنباله‌ی خطای $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ سریع‌تر به صفر همگرا می‌شود.
به طور خاص حالت‌های زیر مهم هستند:

- اگر $r = 1$ و $c < 1$ داریم $|e_{k+1}| = c|e_k| < |e_k|$ و نرخ همگرایی، خطی[۱] نامیده می‌شود.

- اگر $r > 1$ نرخ همگرایی، فراخطی[۲] نامیده می‌شود.

- اگر $r = 2$ داریم $|e_{k+1}| = c|e_k|^2$ و نرخ همگرایی، مربعی یا از مرتبه‌ی دو[۳] نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲.۲. نشان دهید که

۱. دنباله‌ی $a_n = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ با نرخ خطی $r = 1$ به $a = 0$ همگراست.

۲. دنباله‌ی $b_n = \{10^{-2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ با نرخ مربعی $r = 2$ به $b = 0$ همگراست.

چون

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1} - a|}{|a_k - a|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1} - 0}{\frac{1}{k} - 0} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

پس دنباله‌ی a_n با نرخ خطی (و ثابت خطای مجانبی $c = 1$) همگراست. در مورد دنباله‌ی b_n داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1} - b|}{|b_k - b|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{10^{-2^{k+1}}}{\left(10^{-2^k}\right)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{0.1^{2^{k+1}}}{(0.1^{2^k})(0.1^{2^k})} = \lim_{k\to\infty} \frac{0.1^{2^{k+1}}}{0.1^{2^{k+1}}} = 1.$$

پس دنباله‌ی b_n با نرخ مربعی $r = 2$ (و ثابت خطای مجانبی $c = 1$) همگراست.

۳.۲ روش دوبخشی (تنصیف)

فرض کنید معادله غیرخطی $f(x) = 0$ داده شده است جائیکه تابع f پیوسته است. در روش دوبخشی یک بازه $[a, b]$ می یابیم که f در آن بازه تغییر علامت بدهد. اساس روش دو بخشی، قضیه‌ی مقدار میانی[۴] است که آن‌را مرور می‌کنیم.

---
[۱] linear
[۲] superlinear
[۳] quadratic
[۴] intermediate value theorem

قضیه‌ی ۱.۳.۲. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته بوده و $f(a)f(b) < 0$. در این صورت حداقل یک $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوری‌که $f(c) = 0$.

روش دوبخشی از بازه‌ای هم‌چون $[a, b]$ که f در آن تغییر علامت می‌دهد، شروع کرده و پهنای آن بازه را بصورت متوالی کاهش می‌دهد تا وقتی‌که پهنای بازه به اندازه کافی کوچک شود. در هر مرحله (تکرار)، مقدار تابع در نقطه‌ی میانی بازه محاسبه شده و نصف بازه دور انداخته می‌شود. این‌که کدام نیمه‌ی بازه دور انداخته شود به علامت تابع در نقطه‌ی میانی بستگی دارد. فرض کنید $I^{(0)} = [a, b]$ و $I^{(k)}$ زیربازه‌ی انتخاب‌شده در مرحله kام باشد. ما زیربازه‌ی $I^{(k+1)}$ از بازه‌ی $I^{(k)}$ را بدین صورت انتخاب می‌کنیم که تابع f در نقاط انتهایی $I^{(k+1)}$ نیز مجددا تغییر علامت دهد (یعنی فرض قضیه‌ی مقدار میانی باید در هر بازه‌ی انتخابی $I^{(k)}$ برقرار باقی بماند). با ادامه‌ی این روند، قضیه‌ی مقدار میانی همگرایی روش را تعیین می‌کند چرا که در تمام مراحل، ریشه در بازه‌ی $I^{(k)}$ باقی می‌ماند و طول بازه با افزایش k به صفر نزدیک می‌شود.

الگوریتم روش دوبخشی: در گام $k = 0$ قرار دهید:

$$a^{(0)} := a,$$
$$b^{(0)} := b,$$
$$I^{(0)} := [a^{(0)},\ b^{(0)}].$$

در هر گام $k = 1, 2, \cdots$ ابتدا نقطه‌ی میانی بازه یعنی

$$x^{(k-1)} := \frac{a^{(k-1)} + b^{(k-1)}}{2}$$

را محاسبه کنید. اگر $x^{(k-1)}$ تقریب مناسبی برای ریشه است، روند تکرار را قطع کنید. در غیر این‌صورت زیربازه‌ی $I^{(k-1)} = [a^{(k-1)},\ b^{(k-1)}]$ از بازه‌ی $I^{(k)} = [a^{(k)},\ b^{(k)}]$ را به صورت زیر انتخاب کنید:

- اگر $f(a^{(k-1)})\ f(x^{(k-1)}) < 0$ تغییر علامت در نیمه‌ی اولِ بازه رخ می‌دهد. پس قرار دهید:

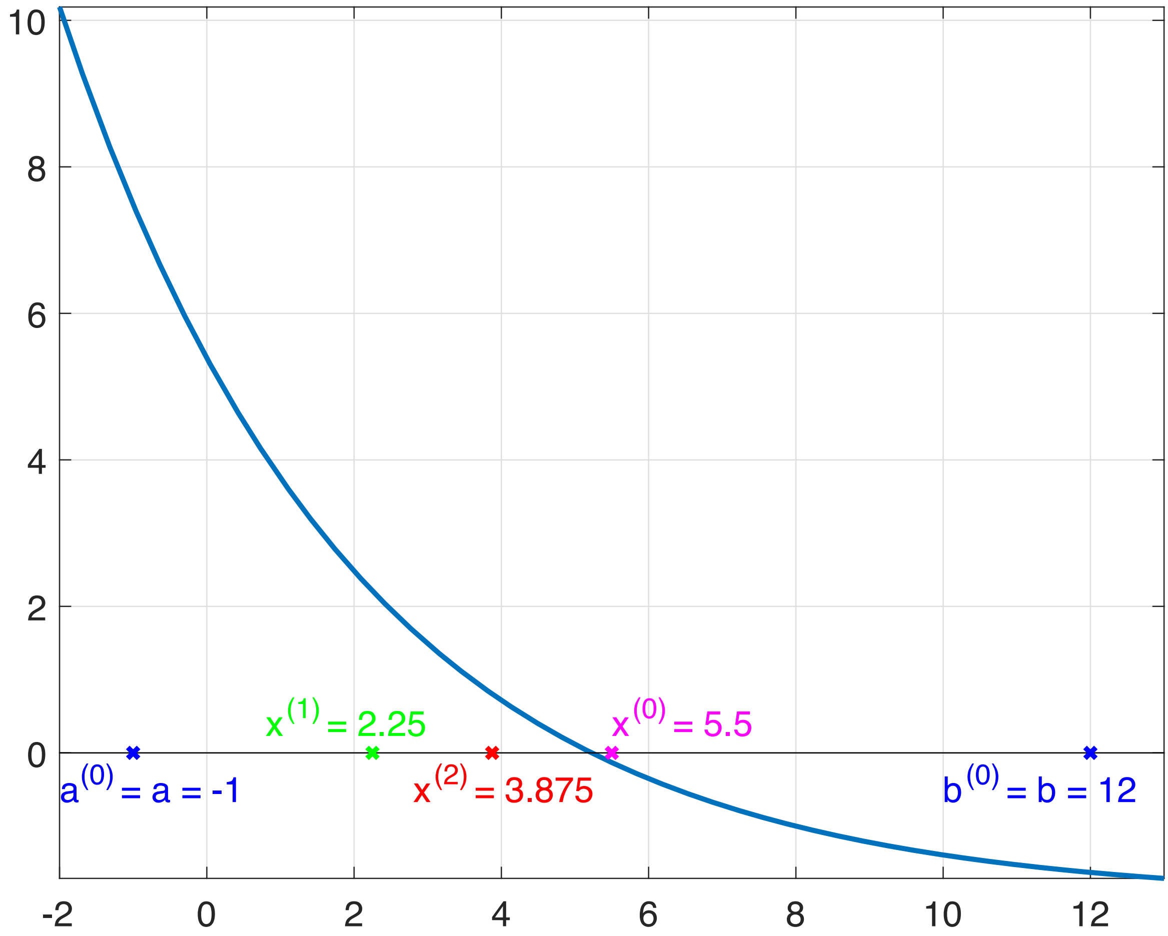
$$a^{(k)} = a^{(k-1)},$$
$$b^{(k)} = x^{(k-1)}.$$

• اگر $f(x^{(k-1)})\ f(b^{(k-1)}) < 0$ تغییر علامت در نیمه‌ی دومِ بازه رخ می‌دهد. پس قرار دهید:

$$a^{(k)} = x^{(k-1)},$$
$$b^{(k)} = b^{(k-1)}.$$

قرار دهید $k = k + 1$.

در شکل ۴.۲ سه جمله‌ی اول الگوریتم بالا را برای یافتن ریشه‌ی تابع $f(x) = \exp(\frac{8-x}{4}) - 2$ در بازه‌ی $[a,\ b] = [-1,\ 12]$ مشاهده می‌کنیم. ریشه‌ی درست تا شش رقم برابر است با 5.22741.



شکل ۴.۲: سه جمله‌ی ابتدایی روش دوبخشی با شروع از بازه‌ی $[a,\ b] = [-1,\ 12]$.

۱.۳.۲ چگونه یک الگوریتم تکراری را متوقف کنیم؟

همانگونه که در الگوریتم روش دوبخشی دیدیم، نیاز به یک روند مشخص برای توقف الگوریتم داریم. بعنوان مثال لازم است این جمله را که "اگر $x^{(k-1)}$ تقریب مناسبی برای ریشه است، روند تکرار را قطع کنید"

دقیق‌تر توضیح دهیم.

فرض کنید $\epsilon > 0$ یک میزان خطای قابل تحمل[1] باشد که از قبل داده شده و روش تکراری در حال اجرا، دنباله‌ی $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k$ را تولید کرده است. در عمل می‌توان الگوریتمِ تکراری را وقتی که دنباله در یکی از شرایط زیر صدق کرد، خاتمه داد:

- $|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}| < \epsilon$
- $|f(x_k)| < \epsilon$

بعلاوه هنگام استفاده از یک کامپیوتر برای تولید دنباله‌ی تقریب‌ها، افزودن شرطی که یک مقدار بیشینه را روی تعداد تکرارهای اجرا شده قرار دهد، نیز می‌تواند مفید باشد. این کار را می‌توان با شمارش تعداد تکرارهای اجرا شده‌ی k و اتمام روند در صورت رسیدن به $k \geq k_{max}$ انجام داد جایی که k_{max} از قبل تعیین شده است.

مثال ۱.۳.۲. معادله‌ی غیرخطی ساده‌ی $f(x) = x^2 - 1 = 0$ را بر بازه‌ی $[-0.25, 1.25]$ در نظر بگیرید. از آنجا که $f(-0.25) < 0$ و $f(1.25) > 0$ پس بازه‌ی داده شده شرایط قضیه‌ی مقدار میانی را داشته و می‌توان روش دوبخشی را با شروع از آن اجرا کرد. داریم:

$$
\begin{aligned}
&I^{(0)} = [-0.25, 1.25], && x^{(0)} = 0.5, && f(x^{(0)}) < 0 \\
&I^{(1)} = [0.5, 1.25], && x^{(1)} = 0.875, && f(x^{(1)}) < 0 \\
&I^{(2)} = [0.875, 1.25], && x^{(2)} = 1.0625, && f(x^{(2)}) > 0 \\
&I^{(3)} = [0.875, 1.063525], && x^{(3)} = 0.96875, && f(x^{(3)}) < 0 \\
&\quad\vdots \\
&I^{(8)} = [0.998046875, 1.00390625], && x^{(8)} = 1.0009765625
\end{aligned}
$$

از آن‌جا که در هر مرحله، پهنای بازه‌ی $I^{(k)}$ یعنی $b^k - a^{(k)}$ نصف می‌شود، دنباله $x^{(k)}$ به ریشه همگرا خواهد بود یعنی روش دوبخش دارای خاصیت اطمینان‌بخش همگراییِ تضمین‌شده است. قضیه‌ی زیر نهایتا این امکان را به ما خواهد داد تا ((قبل از)) اجرای روش دوبخشی، بتوانیم تعداد تکرارهای لازم برای دستیابی به خطایی کمتر از مقدار مشخص‌شده را پیش‌بینی کنیم!

[1] tolerance

قضیه‌ی ۲.۳.۲. فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ بوده و $f(a)\ f(b) < 0$. دنباله‌ی $\{x^{(k)}\}$ از تقریب‌های x که توسط الگوریتم دوبخشی تولید می‌شود در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$|x^{(k)} - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

اثبات. با توجه به همگرایی تضمین‌شده‌ی روش دوبخشی، ریشه‌ی دقیق از بازه‌هایی که تولید می‌شوند خارج نمی‌شود. پس برای هر $k = 0, 1, 2, \cdots$ داریم:

$$x \in [a^{(k)}, b^{(k)}].$$

از آنجا که همواره $x^{(k)}$ نقطه‌ی میانی بازه‌ی فعلی است

$$x^{(k)} = \frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$$

پس فاصله‌ی $x^{(k)}$ از ریشه‌ی دقیق x که جایی در همین بازه‌ی $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ است، حداکثر برابر است با نصف فاصله‌ی دو سر بازه:

$$|x^{(k)} - x| \leq \frac{b^{(k)} - a^{(k)}}{2} \tag{۵.۲}$$

از سوی دیگر در هر مرحله از اجرای الگوریتم، پهنای بازه‌ی $I^{(k)}$ نصف می‌شود، یعنی داریم:

$$b^{(k)} - a^{(k)} = \frac{b^{(k-1)} - a^{(k-1)}}{2} = \frac{\frac{b^{(k-2)} - a^{(k-2)}}{2}}{2} = \frac{b^{(k-2)} - a^{(k-2)}}{2^2} = \cdots = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^k}. \tag{۶.۲}$$

پس طبق دو رابطه‌ی (۵.۲) و (۶.۲) داریم:

$$|x^{(k)} - x| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

□

نتیجه: دیدیم که خطای روش دوبخشی در مرحله‌ی kام برای $k = 0, 1, 2, \cdots$ در رابطه‌ی زیر صدق

می‌کند:

$$e^{(k)} = |x^{(k)} - x| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

بنابراین اگر ϵ میزان خطای قابل تحملِ تعیین‌شده باشد، تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به خطایی کمتر از ϵ بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} 2^{-(k+1)}(b-a) < \epsilon &\Rightarrow 2^{-(k+1)} < \frac{\epsilon}{b-a} \\ &\Rightarrow -(k+1)\log_2 2 < \log_2(\frac{\epsilon}{b-a}) \\ &\Rightarrow (k+1) > \log_2(\frac{b-a}{\epsilon}) \\ &\Rightarrow k > -1 + \log_2(\frac{b-a}{\epsilon}). \end{aligned}$$

توجه کنید که سطر دوم بخاطر صعودی بودن تابع $\log_2(x)$ درست است. بعلاوه اگر از $\log_{10}$ بجای $\log_2$ استفاده می‌کردیم، پاسخ نهایی تغییر می‌کرد.

مثال ۲.۳.۲. تعداد تکرارهای لازم برای یافتن ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ را با خطای قابل تحمل $\epsilon = 10^{-5}$ به ازای $a^{(0)} = 1, b^{(0)} = 2$ با روش دوبخشی، بطور تقریبی تعیین کنید.

باید عدد صحیح k را طوری بیابیم که

$$k > -1 + \log_2(\frac{b-a}{\epsilon})$$

جایی‌که k را از صفر شروع کرده‌ایم. پس داریم:

$$\begin{aligned} k &> -1 + \log_2(\frac{b-a}{10^{-5}}) \\ &= -1 + \log_2 10^5 \\ &= -1 + 5\log_2(10) \\ &= -1 + 5(\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2}) \\ &= -1 + 5(\frac{1}{0.30}) = 15.6 \end{aligned}$$

پس باید $k \geq 16$ باشد تا به خطایی کمتر از $\epsilon = 10^{-5}$ دست یابیم.
به طرز مشابه می‌توان دید که برای رسیدن به درستیِ $\epsilon = 10^{-3}$ کافیست $k \geq 9$ تکرار اجرا شود. مجددا تاکید می‌کنیم که تعداد تکرارهای $k \geq 9$ را با شروع از $k = 0$ بدست آوردیم: اگر قرارداد می‌کردیم که در شروع اجرای روش دوبخشی قرار دهیم $k = 1$ آنگاه $k \geq 10$ بدست می‌آمد.

نکته‌ی ۱.۳.۲. چون بازه‌ی $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ همواره ریشه را در بردارد، می‌دانیم که $e^{(k)} \leq \frac{1}{2}|b^{(k)} - a^{(k)}|$ و چون پهنای بازه‌ی $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ در هر مرحله نصف می‌شود پس داریم:

$$e^{(k)} \approx \frac{e^{(k-1)}}{2}$$

که نشان‌دهنده‌ی همگرایی خطی (از مرتبه‌ی یک) با ثابت خطای مجانبی $c = \frac{1}{2}$ می‌باشد.

نکته‌ی ۲.۳.۲. بعد از اجرای هر 10 تکرار از روش دوبخشی، درستی جوابِ تقریبی، تقریبا سه رقمِ دهدهی بیشتر می‌شود چرا که $|b^{(k)} - a^{(k)}| = 2^{-k}|b^{(0)} - a^{(0)}|$ و $2^{-10} \approx 10^{-3}$.