فصل ۳

درونیابی

۱.۳ مقدمه

فرض کنید $n+1$ نقطه‌ی متمایز

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

داده شده باشند و بخواهیم تابعی همچون $y = f(x)$ را به گونه‌ای بیابیم که از تمام $n+1$ نقطه‌ی داده‌شده عبور کند یعنی برای $i = 0, 1, \ldots, n$ داشته باشیم $f(x_i) = y_i$. نقاط x_i را ((نقاط درونیابی)) یا گره‌های درونیابی[1] نامیده و f را ((تابع درونیاب نقاط داده‌شده)) می‌نامیم[2].

برای $n+1$ نقطه‌ی داده‌شده، ممکن است تابع‌های درونیاب متفاوتی موجود باشد. بعنوان مثال ممکن است تابع درونیاب به فرم یک چندجمله‌ای باشد

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

[1] interpolation nodes

[2] با توجه به اینکه در بحث اسپلاین‌ها مفهوم گره یا knot را داریم که لزوما با گره‌های درونیابی در اینجا یکی نیستند، ترجیح می‌دهیم که لغت ((گره)) را برای مبحث اسپلاین‌ها نگه داشته و در اینجا از نام نقاط درونیابی (بجای گره‌های درونیابی) استفاده کنیم.

و یا یک تابع کسری باشد که صورت و مخرجش دو چندجمله‌ای هستند[۳]

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_px^p}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_qx^q},$$

یا یک درونیاب مثلثاتی داشته باشیم

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + \cdots + a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx),$$

و انواع دیگر تابع‌های درونیاب نیز موجودند. اینکه چه نوع تابع درونیابی را استفاده کنیم بستگی به عوامل مختلفی از جمله خصوصیات داده‌های (x_i, y_i) دارد. بعنوان نمونه اگر داده‌ها تناوبی باشند یعنی $y_0 = y_n$ آنگاه می‌توان تصور کرد که درونیاب مثلثاتی مناسب است. انواع درونیابی در ابعاد بالاتر نیز مهم است. بعنوان مثال ممکن است نقاط داده‌شده به صورت (x_i, y_i, z_i) باشند و بخواهیم تابعی دومتغیره همچون $z = f(x, y)$ را بیابیم به طوری که $f(x_i, y_i) = z_i$.

تمرکز ما در این فصل فقط بر روی ساده‌ترین نوع درونیابی یعنی ((درونیابی چندجمله‌ای یک متغیره)) است. در انتهای فصل، موقعیتی را درنظر خواهیم گرفت که بجز مقدار تابع در هر نقطه‌ی x_i، مشتق تابع نیز موجود باشد.

هرگاه معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی (x_0, y_0) و (x_1, y_1) را می‌یابیم، در واقع حالت خاص ساده‌ای از مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای را با درجه‌ی $n = 1$ حل می‌کنیم.

درونیابی در دو موقعیت متفاوت اهمیت دارد. یکی سناریوی قبل یعنی وقتی داده‌های گسسته‌ی (x_i, y_i) موجود باشند و بخواهیم تابعی که از تمام نقاط عبور می‌کند را بیابیم. موقعیت مهم دیگر مسئله‌ی تقریب است. بعنوان نمونه ممکن است تابع $y = f(x)$ موجود باشد اما f چنان پیچیده باشد که ارزیابی آن هزینه‌ی زیادی به لحاظ محاسباتی داشته باشد. مثلا

$$li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

که به نسخه‌ی ریمان انتگرال لگاریتمی معروف است و یا تابع گاما

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1}\exp(-x)\ dx$$

[۳] به طور کلی لزومی ندارد صورت و مخرج درونیاب کسری، چندجمله‌ای باشند.

را درنظر بگیرید. گاهی مطلوب است بجای کار با یک تابع پیچیده، از تابعی ساده‌تر که آن را تقریب می‌زند استفاده کنیم. برای تقریب می‌توان مقدار تابع را در برخی نقاط یافته و سپس (چندجمله‌ای) درونیاب داده‌های گسسته را یافته و بعنوان تقریب تابع اصلی استفاده کرد. اما این پرسش که آیا اصولا می‌توان به کمک چندجمله‌ای‌ها تقریبی با درستی قابل قبول برای یک تابع یافت را قضیه‌ی تقریب وایراشتراس پاسخ می‌دهد:

قضیه‌ی ۳.۱.۱. فرض کنید f بر بازه‌ی بسته‌ی متناهی $[a,\ b]$ پیوسته بوده و $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. در این صورت چندجمله‌ای p وجود دارد به طوری که برای هر $x \in [a,\ b]$ داریم:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

قضیه‌ی تقریب وایراشتراس می‌گوید هر تابع ((پیوسته)) را می‌توان ((با میزان درستی دلخواه)) با چندجمله‌ای‌ها تقریب زد! این فرم از قضیه، درجه‌ی n چندجمله‌ای را مشخص نمی‌کند اما n به میزان درستی موردنظر ϵ بستگی دارد. اهمیت اصلی قضیه‌ی وایراشتراس در این است که نشان می‌دهد ((تنها شرط)) موردنیاز، پیوستگی تابع است. اگر تابع f چندین مرتبه مشتق‌پذیر هم باشد آنگاه می‌توان در عمل به سرعت چندجمله‌ای تقریب‌زننده را یافته و یا (آنچنان که خواهیم دید) میزان خطای تقریب را نیز تخمین زده یا کراندار کرد. با اولین روش برای یافتن چندجمله‌ای درونیاب که (فرم کلاسیک) لاگرانژ است شروع می‌کنیم.

۲.۳ درونیابی لاگرانژ

مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای به صورت زیر است:

$n+1$ داده‌ی

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

موجودند به طوری که x_iها متمایز هستند و می‌خواهیم معادله‌ی چندجمله‌ای $p(x)$ را به گونه‌ای بیابیم که

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1,\ \cdots, \quad p(x_n) = y_n.$$

چون حل این مسئله به یکباره در اولین نگاه ساده نیست پس از استراتژیِ ((تفرقه بینداز و حکومت کن)) استفاده می‌کنیم: ابتدا مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای را به $n+1$ مسئله‌ی خاص و آسان‌تر می‌شکنیم، سپس مسئله‌های آسان را حل کرده و در گام سوم به حل مسئله‌ی اصلی بازمی‌گردیم.

مسئله‌ی صفر: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ داده شده‌اند. معادله‌ی چندجمله‌ای $l_0(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = l_0(x_2) = \cdots = l_0(x_n) = 0.$$

اجازه دهید به سراغ حل مسئله‌ی صفر برویم. همانگونه که در صورت این مسئله مشخص است $l_0(x)$ دارای n ریشه‌ی معلوم $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ است. پس $l_0(x)$ باید شامل ضربی از عامل‌های به فرم

$$(x-x_1), \quad (x-x_2),\ \cdots, \quad (x-x_n)$$

بوده ولی عاملی به فرم $(x-x_0)$ نداشته باشد. به بیان دقیق‌تر $l_0(x)$ باید به فرم زیر باشد:

$$l_0(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

که در آن c یک مقدار ثابت است که می‌توان با اِعمال تنها شرطی از مسئله‌ی صفر که هنوز برآورده نشده یعنی شرط $l_0(x_0) = 1$ آنرا نیز تعیین کرد. داریم:

$$l_0(x_0) = c(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)$$

پس برای برقراری شرط $l_0(x_0) = 1$ کافی است قرار دهیم:

$$c = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}.$$

بنابراین پاسخ مسئله‌ی صفر به صورت زیر است:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}.$$

حال به سراغ مسئله‌ی مشابه زیر می‌رویم:

مسئله‌ی یک: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ داده شده‌اند. معادله‌ی چندجمله‌ای $l_1(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_0) = l_1(x_2) \cdots = l_1(x_n) = 0.$$

پاسخ زیر تمام شرایط مسئله‌ی یک را برآورده می‌کند:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}.$$

نهایتا به طرز مشابه داریم

مسئله‌ی اِن: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ داده شده‌اند. معادله‌ی چندجمله‌ای $l_n(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$l_n(x_0) = l_n(x_1) = \cdots = l_n(x_{n-1}) = 0, \quad l_n(x_n) = 1.$$

به سادگی می‌توان دید که چندجمله‌ای زیر مسئله‌ی اِن را حل می‌کند:

$$l_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

تنها تفاوت مسئله‌ی زیر با مسئله‌ی صفر این است که مقدار پاسخ آن در نقطه‌ی x_0 بجای یک، باید مساوی y_0 شود:

مسئله‌ی وای-صفر: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ داده شده‌اند. چندجمله‌ای $u_0(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$u_0(x_0) = y_0, \quad u_0(x_1) = u_0(x_2) = \cdots = u_0(x_n) = 0.$$

حل این مسئله نیز ساده است چرا که چندجمله‌ای

$$u_0(x) = y_0 \; l_0(x)$$

مسئله‌ی وای-صفر را حل می‌کند.

به طرز مشابه چندجمله‌ای

$$u_1(x) = y_1 \; l_1(x)$$

مسئله‌ی وای-یک در زیر را حل می‌کند:

> مسئله‌ی وای-یک: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0, \; x_1, \; \ldots, \; x_n$ داده شده‌اند. چندجمله‌ای $u_1(x)$ را به گونه‌ای بیابید که
>
> $$u_1(x_1) = u_1(x_2) = \cdots = u_1(x_n) = 0, \quad u_1(x_1) = y_1.$$

همچنین چندجمله‌ای

$$u_n(x) = y_n \; l_n(x)$$

مسئله‌ی وای-اِن در زیر را حل می‌کند:

> مسئله‌ی وای-اِن: $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0, \; x_1, \; \ldots, \; x_n$ داده شده‌اند. چندجمله‌ای $u_n(x)$ را به گونه‌ای بیابید که
>
> $$u_n(x_0) = u_n(x_1) = \cdots = u_n(x_{n-1}) = 0, \quad u_n(x_n) = y_n.$$

از سوی دیگر داریم:

پاسخ مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای = پاسخ مسئله‌ی وای-صفر + پاسخ مسئله‌ی وای-یک + $\cdots$ + پاسخ مسئله‌ی وای-اِن.

یعنی

$$p(x) = y_0 \; l_0(x) + y_1 \; l_1(x) + \cdots + y_n \; l_n(x).$$

به طور خلاصه ((چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ)) برابر است با:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; l_i(x),$$

جایی‌که

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

$l_i(x)$ها را چندجمله‌ای‌های کاردینال لاگرانژ یا چندجمله‌ای‌های پایه‌ای لاگرانژ یا به طور خلاصه ((چندجمله‌ای‌های لاگرانژ)) می‌نامند. درجه‌ی هر چندجمله‌ای لاگرانژ، دقیقا مساوی n است. همچنین با توجه به فرمول بالا و یا با توجه به مسئله‌های صفر تا اِن، واضح است که داریم

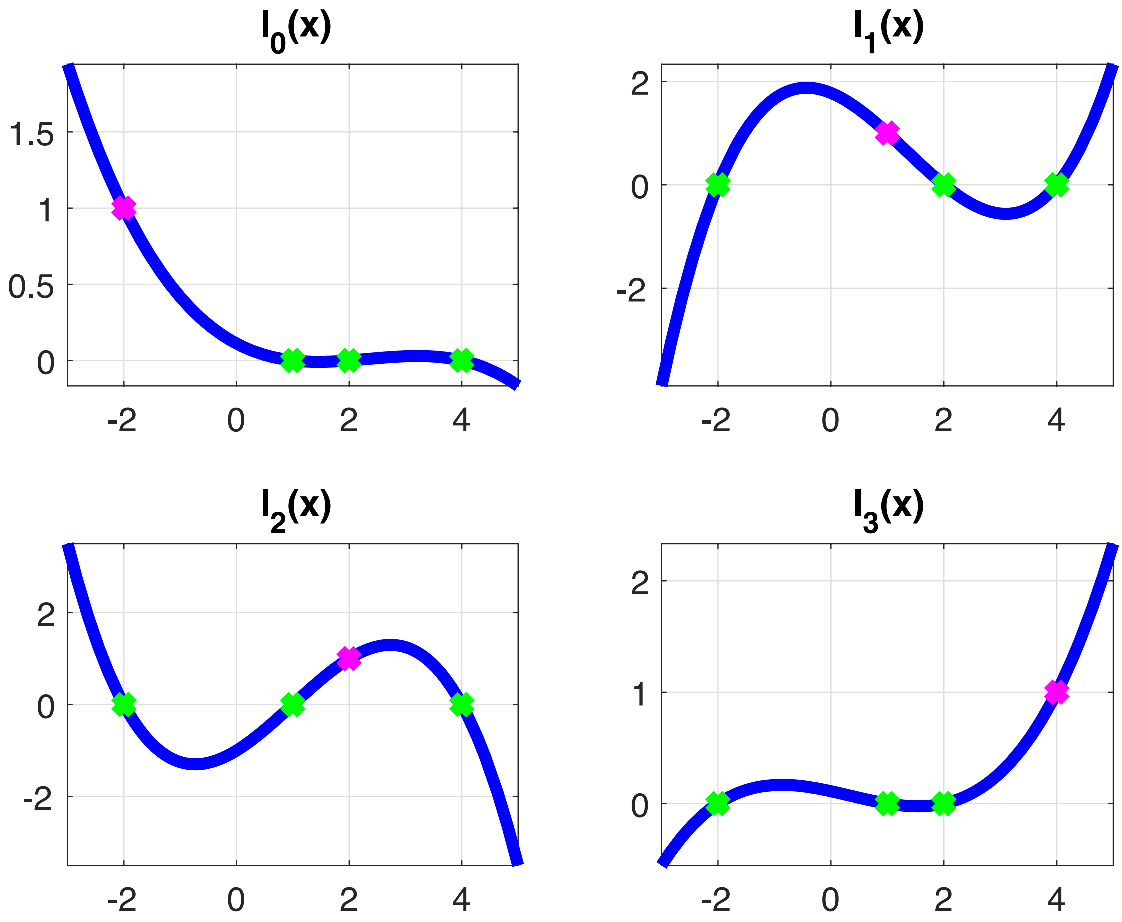
$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{۱.۳}$$

مثال ۱.۲.۳. چندجمله‌ای درونیاب نقاط زیر را بیابید.

x_i	-2	1	2	4
y_i	1	-1	5	3

ابتدا چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $l_0(x)$، $l_1(x)$، $l_2(x)$ و $l_3(x)$ را می‌یابیم. چنانچه محاسبات را در حساب دقیق (یعنی با دقت نامتناهی) اجرا کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} \\
&= -\frac{x^3}{72} + \frac{7x^2}{72} - \frac{7x}{36} + \frac{1}{9}. \\
l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x^3}{9} - \frac{4x^2}{9} - \frac{4x}{9} + \frac{16}{9}. \\
l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{8} + \frac{3x}{4} - 1. \\
l_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{36} - \frac{x}{9} + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$



شکل ۱.۳: چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در مثال ۱.۲.۳

همانگونه که در شکل ۱.۳ مشاهده می‌کنیم، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در رابطه‌ی (۱.۳) صدق می‌کنند. حال چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ را تعیین می‌کنیم:

$$p(x) = y_0\ l_0(x) + y_1\ l_1(x) + y_2\ l_2(x) + y_3\ l_3(x) = -\frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{3} + \frac{11x}{3} - \frac{19}{3}.$$

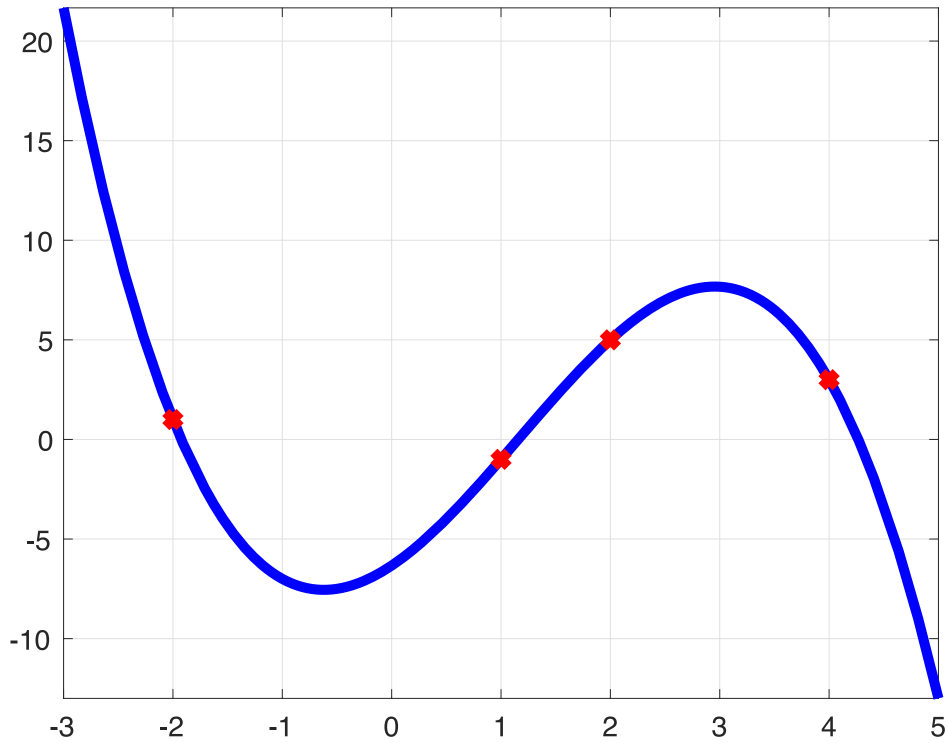
$p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه سه است که چهار نقطه‌ی داده‌شده را درونیابی می‌کند. شکل ۲.۳ را ببینید.

تمرین ۶. ثابت کنید چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $l_i(x)$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$، توابعی مستقل خطی از x هستند.

در قضیه‌ی ساده‌ی زیر، وجود و یکتایی چندجمله‌ای درونیاب را بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱.۲.۳. برای هر مجموعه از $n+1$ نقطه‌ی متمایز، چندجمله‌ای درونیاب از درجه‌ی حداکثر n وجود داشته و یکتاست.

اثبات. فرض کنید نقاط (x_i, y_i) برای $i = 0, 1, \ldots, n$ داده شده باشند به طوری که x_iها متمایز هستند. وجود حداقل یک چندجمله‌ای درونیاب واضح است چرا که دیدیم چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ این مسئله



شکل ۲.۳: چندجمله‌ای درونیاب (لاگرانژ) در مثال ۱.۲.۳

را حل می‌کند. برای اثباتِ یکتاییِ چندجمله‌ای درونیاب از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $p_n(x)$ و $q_n(x)$ دو چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n باشند که هر دو، درونیاب نقاط داده شده هستند یعنی

$$\begin{cases} p_n(x_i) = y_i, \\ & i = 0, 1, \dots, n. \\ q_n(x_i) = y_i. \end{cases}$$

پس $r(x) = p_n(x) - q_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر n است که دارای حداقل $n+1$ ریشه‌ی x_i است چراکه $r(x_i) = y_i - y_i = 0$ و این در تناقض با قضیه‌ی اساسی جبر است (که می‌گوید هر چندجمله‌ای از درجه‌ی n که همه‌جا صفر نباشد، دقیقا دارای n ریشه با شمارش تکرارها می‌باشد). پس $r(x) = 0$ و درنتیجه $p_n(x) = q_n(x)$. □

راهکار زیبای دیگری که می‌توان برای اثبات قضیه‌ی بالا بکارگرفت، دیدگاه جبرخطی است که مسئله‌ی درونیابی چندجمله‌ای را به مسئله‌ی حل یک دستگاه از معادله‌های خطی تبدیل کرده و از ناصفربودن دترمینان ماتریس ضرایب - که ماتریس وَندِرموند نام دارد- استفاده می‌کند.

۱.۲.۳ خطای (تقریب با) درونیابی چندجمله‌ای

فرض کنید تابع f که بر بازه‌ی $[a,\ b]$ تعریف‌شده موجود باشد و $y_i = f(x_i)$ مقادیر تابع در $n+1$ نقطه‌ی متمایز $x_i \in [a,\ b]$ برای $i = 0, 1, \ldots, n$ باشند. می‌دانیم که چندجمله‌ای یکتای از درجه‌ی حداکثر n همچون $p_n(x)$ موجود است به طوری که اقلا در حساب دقیق (یعنی با دقت نامتناهی و در نتیجه عاری از خطاهای گردکردن) $p_n(x_i)$ دقیقا مساوی با y_i خواهد بود، یعنی اختلاف بین $p_n(x_i)$ و y_i مساوی صفر می‌باشد. پرسش این است که چنانچه $p_n(x)$ را بعنوان تقریبی برای تابع $f(x)$ در سرتاسر بازه‌ی $[a,\ b]$ درنظر بگیریم، اختلاف بین مقادیر $f(x)$ و $p_n(x)$ چقدر خواهد بود؟ به وضوح انتظار نداریم مقدار دو تابع در نقاط متفاوت با x_iها یکسان باشد یعنی حتی در حساب دقیق نیز خطای ناصفر خواهیم داشت. علاقمندیم خطای

$$f(x) - p_n(x)$$

را برای $x \in [a,\ b]$ تخمین زده یا کراندار کنیم. این همان خطای تقریب (برشی یا گسسته‌سازی) است که در فصل اول با آن آشنا شدیم که در اینجا حتی در غیاب خطاهای گردکردن نیز حاضر می‌باشد. برای اثبات فرمول خطای درونیابی به قضیه‌ی رول تعمیم‌یافته نیاز داریم:

قضیه‌ی ۲.۲.۳. فرض کنید f بر بازه‌ی $[a,\ b]$ پیوسته و بر بازه‌ی $(a,\ b)$ نیز n بار مشتق‌پذیر باشد. اگر f در $k+1$ نقطه‌ی متمایز $x_0, x_1, \ldots, x_k$ از $[a,\ b]$ ریشه داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی $c \in (a,\ b)$ یافت می‌شود به طوری که $f^{(k)}(c) = 0$.

در قضیه‌ی زیر، منظور از نماد $\mathbb{C}^{n+1}[a,\ b]$، فضای تمام تابع‌هایی است که مشتق تا مرتبه‌ی $n+1$ آنها در بازه‌ی $[a,\ b]$ موجود بوده و پیوسته است.

قضیه‌ی ۳.۲.۳. اگر p_n چندجمله‌ای درونیاب تابع $f \in \mathbb{C}^{n+1}[a,\ b]$ در نقاط متمایز $x_0, x_1, \cdots, x_n$ باشد، آنگاه خطای درونیابی برابر است با

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x), \tag{۲.۳}$$

که در آن ζ_x نقطه‌ای در بازه‌ی شامل نقاط x_i و نقطه‌ی x است.

اثبات. اگر $x = x_i$ که با توجه به درونیاب‌بودنِ چندجمله‌ای p_n، خطای تقریب صفر بوده و حکم برقرار است چرا که هر دو سمت رابطه‌ی (۲.۳) برابر با صفر می‌باشند. پس آنچه می‌ماند اثبات حکم برای حالتی است که $x \neq x_i$. پس فرض می‌کنیم $x \neq x_i$ متعلق به بازه‌ی $[a,\ b]$ و از این به بعد مقداری ثابت باشد.

مقدار ثابت

$$\phi(x) := \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)},$$

را در نظر بگیرید. تابع g از متغیر t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) := f(t) - p_n(t) - \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)\phi(x).$$

واضح است که g تابعی $n+1$ بار مشتق‌پذیر است که دارای $n+2$ ریشه‌ی $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ در بازه‌ی $[a,\ b]$ می‌باشد. پس طبق قضیه‌ی رول تعمیم‌یافته نقطه‌ای همچون $\zeta \in [a,\ b]$ وجود دارد به طوری که $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$. از سوی دیگر به سادگی می‌توان دید که $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - 0 - (n+1)!\phi(x)$ چرا که $\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$ دارای جمله‌ی پیشروی t^{n+1} است و $\phi(x)$ نیز مقداری ثابت است. پس با جایگذاری $t = \zeta$ در رابطه‌ی قبل داریم $g^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}(\zeta) - (n+1)!\phi(x)$ که به کمک رابطه‌ی $g^{(n+1)}(\zeta) = 0$ نتیجه می‌دهد:

$$\phi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}.$$

بنابراین داریم:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

□