۴.۲ روش نقطه‌ی ثابت (تکرار ساده)

فرض کنید فردی در حال بازی‌کردن با یک ماشین حساب جیبی است بطوری‌که با شروع از عدد 1 دکمه‌ی کسینوس را مرتبا فشار می‌دهد. دنباله‌ی زیر (با سبک گردکردن به صفر تا شش رقم دهدهی بامعنا) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
x^{(0)} &= 1.00000\\
x^{(1)} &= \cos(x^{(0)}) = 0.540302\cdots\\
x^{(2)} &= \cos(x^{(1)}) = 0.857553\cdots\\
x^{(3)} &= \cos(x^{(2)}) = 0.654289\cdots\\
&\vdots\\
x^{(10)} &= \cos(x^{(9)}) = 0.744237\cdots\\
&\vdots\\
x^{(19)} &= \cos(x^{(18)}) = 0.738937\cdots\\
x^{(20)} &= \cos(x^{(19)}) = 0.739184\cdots\\
&\vdots\\
x^{(25)} &= \cos(x^{(24)}) = 0.739071\cdots\\
&\vdots\\
x^{(30)} &= \cos(x^{(29)}) = 0.739087\cdots
\end{aligned}$$

این دنباله به عدد حقیقی $\alpha = 0.73908513\ldots$ (تقریبا مساوی ۴۲ درجه) همگراست. از آنجا که این دنباله را با شروع از $x^{(0)} = 1$ بدین‌صورت ساختیم که

$$x^{(k+1)} = \cos(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \cdots .$$

پس حد α در معادله‌ی $\cos(\alpha) = \alpha$ صدق می‌کند. به همین خاطر α را یک نقطه‌ی ثابت[1] تابع کسینوس می‌نامیم. بطور دقیق‌تر اگر تابع $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داده شده باشد، مقدار x که در رابطه‌ی $x = g(x)$ صدق می‌کند را یک نقطه‌ی ثابت تابع g می‌نامیم، چرا که از اِعمال تابع g بر x هیچ تغییری حاصل نخواهد شد. یکی از کاربردهای نقاط ثابت در یافتن ریشه‌ی یک معادله‌ی غیرخطی مرتبط است.
در مثال قبل، α نه تنها یک نقطه‌ی ثابت تابع کسینوس بود، بلکه α یک ریشه‌ی تابع $f(x) = x - \cos(x)$ نیز هست. این ایده را می‌توان برای یافتن ریشه‌ی توابع غیر خطی بکار برد. البته تمام توابع دارای نقطه ثابت نمی‌باشند. مثلا اگر تجربه‌ی قبل را با شروع از همان مقدار $x = 1$ این بار روی تابع نمایی $y = e^x$ تکرار کنیم، پس تنها 4 تکرار خطای سرریز رخ خواهد داد:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 1 \\ x^{(1)} &= \exp(1) = 2.71828\cdots \\ x^{(2)} &= \exp(x^{(1)}) = 15.1542\cdots \\ x^{(3)} &= \exp(x^{(2)}) = 3.81427\cdots \times 10^{+6} \\ x^{(4)} &= \exp(x^{(3)}) = \text{Inf} \end{aligned}$$

اغلب می‌توان مساله‌ی یافتن ریشه‌ی یک معادله‌ی غیرخطی را به صورت مساله‌ی یافتن نقطه‌ی ثابت یک تابع مرتبط مطرح کرد. در واقع بسیاری از روش‌های تکراری برای حل معادلات غیرخطی بر پایه‌ی ایده‌ی تکرار به شکل

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

هستند، جایی‌که g تابعی است که بطور مناسبی انتخاب شده است و نقطه‌ی ثابت g ریشه‌ی $f(x) = 0$ است. این روش را روش نقطه‌ی ثابت یا (با توجه به سادگی و از نوع تکراری‌بودنش) روش تکرار ساده می‌نامند. توجه کنید که برای معادله‌ی داده‌شده‌ی $f(x) = 0$ ممکن است تعداد زیادی مساله‌ی نقطه‌ی ثابت معادل $x = g(x)$ با توابع g متفاوت موجود باشند ولی همه این مساله‌های نقطه‌ی ثابت بطور یکسان در بدست‌آوردن یک روش تکراری برای حل معادله‌ی غیرخطی $f(x) = 0$ مفید نیستند. اولا ممکن است برخی از این اشکال نقطه‌ی ثابت اصلا دنباله‌ای همگرا را بوجود نیاورند و ثانیا حتی در صورت همگرایی، سرعتِ همگراییِ آنها متفاوت باشد. پس باید به دنبال شکل نقطه‌ی ثابتی باشیم که همگرایی را به سریع‌ترین

[1] fixed point

صورت تضمین می‌کند.

مثال ۱۳. مساله‌ی یافتن جواب معادله‌ی

$$f(x) := x^2 - x - 2 = 0$$

را در نظر بگیرید. نقطه‌ی ثابت هر یک از تابع‌های زیر، جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ است:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^2 - 2 \\ g_2(x) &= 1 + \frac{2}{x} \\ g_3(x) &= \sqrt{x+2} \\ g_4(x) &= \frac{x^2+2}{2x-1} \end{aligned}$$

چراکه هرچهار تابع در رابطه‌ی

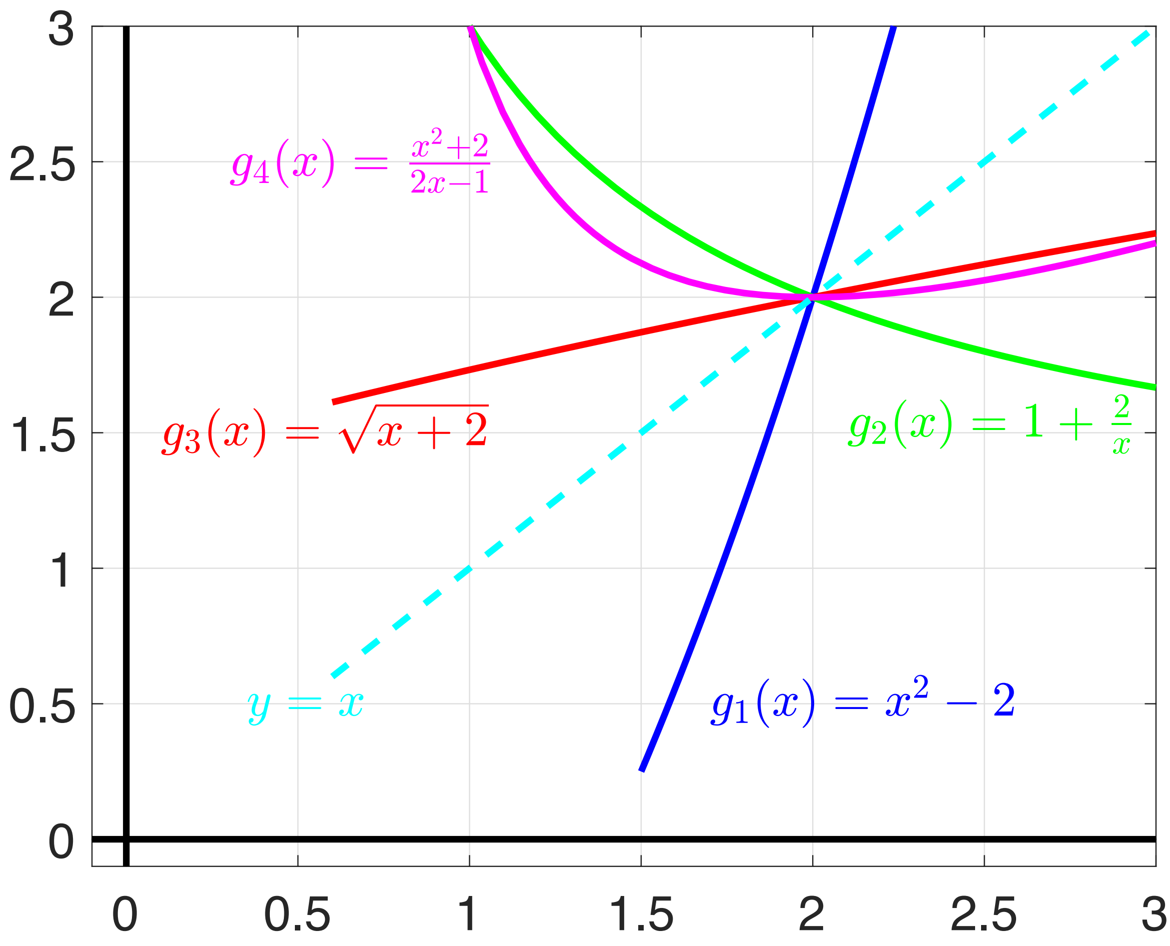
$$x = g_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

صدق می‌کنند:

$$x^2 - x - 2 = 0 \to x = x^2 - 2.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \to x - 1 - \frac{2}{x} = 0 \to x = 1 + \frac{2}{x}.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \to x^2 = x + 2 \to x = \sqrt{x+2}.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \to x^2 - x = 2 \to 2x^2 - x = x^2 + 2 \to x(2x-1) = x^2 + 2 \to x = \frac{x^2+2}{2x-1}.$$

هر چهار تابع و محل برخورد آن‌ها با خط $y = x$ در شکل ۵.۲ رسم شده‌اند. همانگونه که می‌بینیم هر چهار تابع از نقطه‌ی $(2, 2)$ عبور می‌کنند و از سوی دیگر داریم $f(2) = 0$.

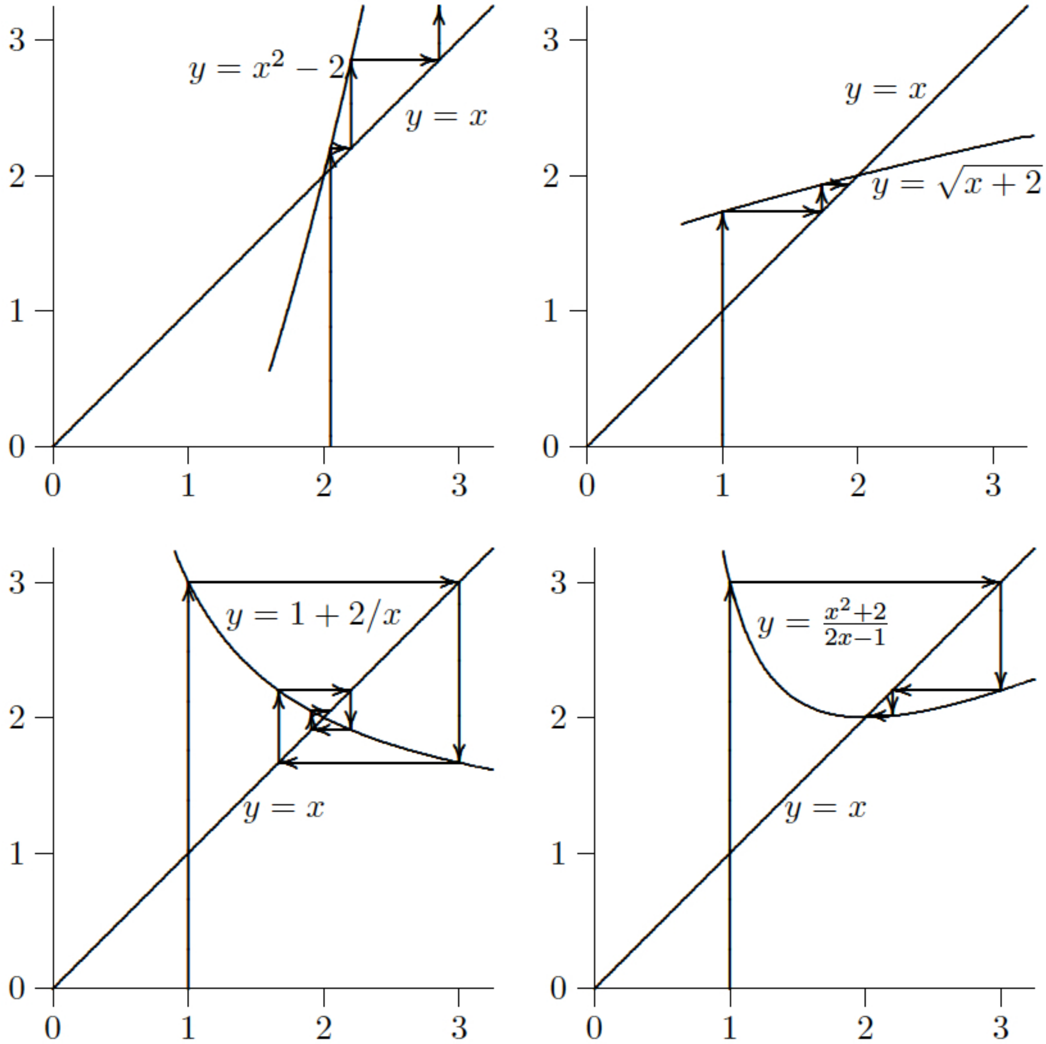
روش نقطه‌ی ثابت متناظر با هر تابع بصورت گرافیکی در شکل ۶.۲ نشان داده شده است. در این‌جا هر پیکانِ عمودی متناظر است با عمل محاسبه‌ی مقدارتابع g در نقطه‌ی مربوطه و پیکان افقی به سوی خط $y = x$ نشان می‌دهد که مقدار تابع g در نقطه‌ی فعلی بعنوان ورودیِ تکرار بعدی استفاده خواهد شد.



شکل ۵.۲: $x = 2$ نقطه‌ی ثابت هر چهار تابع است.

در هر یک از قسمت‌های شکل ۶.۲ روش تکرار ساده‌ی $x_{k+1} = g(x_k)$ برای یافتن نقطه‌ی ثابت یکی از چهار تابع قبل اجرا شده است. این کار در قسمت اول با شروع از حدس اولیه‌ی $x_0 = 2.1$ و در سه قسمت بعدی با شروع از حدس اولیه‌ی $x_0 = 1$ (که در مقایسه با $x_0 = 2.1$ از هدف یعنی نقطه‌ی ثابت $x = 2$ دورتر است) انجام شده. در قسمت اول واگراییِ روش را مشاهده می‌کنیم اما در هر سه قسمت بعدی، روش همگراست. تکه کد زیر روش نقطه‌ی ثابت را برای $g_1(x)$ اجرا می‌کند. شبیه همین کد را برای سه تابع دیگر نیز اجرا کرده و تعداد تکرارها و ۵ جمله‌ی آخر قبل از همگرایی را به صورت ستونی چاپ کرده‌ایم:

```
kmax = 100; tol = 1e-10;
g1 = @(x) x.^2-2;
x = 2.1;
```



شکل ۶.۲: تکرار نقطه ثابت

```
for k = 1:kmax
    x = [x, g1(x(end))];
    if ( abs(x(end) - x(end-1)) < tol )
        break
    end
end
```

```
g1: 100 iters      g2: 36 iters       g3: 18 iters       g4: 7 iters
            Inf  1.999999999650754  1.999999995914762  2.011764705882353
            Inf  2.000000000174623  1.999999998978691  2.000045777065690
            Inf  1.999999999912689  1.999999999744673  2.000000000698492
            Inf  2.000000000043656  1.999999999936168  2.000000000000000
            Inf  1.999999999978172  1.999999999984042  2.000000000000000
```

همانگونه که با توجه به شکل ۶.۲ انتظار داریم روش اول واگرا و سه روش بعدی همگرا هستند. همچنین سرعت همگرایی در سه روش پایانی متفاوت بوده و به ترتیب بهتر شده است. پرسشی که مطرح می شود این است که آیا ابزاری ریاضی برای پیش‌بینی و فهم بهتر دلیل واگرایی یا همگرایی وجود دارد؟ و یا دلیل تفاوت سرعت همگرایی سه قسمت پایانی چیست؟ قضیه‌ی بعد این پرسش‌ها را پاسخ می‌دهد.

قضیه‌ی ۱.۴.۲. فرض کنید x^* نقطه ثابت تابع $g(x)$ باشد.

- اگر $|g'(x^*)| < 1$ آنگاه روش نقطه‌ی ثابت، بطور موضعی همگراست (یعنی وجود دارد بازه‌ای شامل x^* بطوری‌که روش نقطه‌ی ثابتِ متناظر با شروع از درون این بازه، همگرا خواهد شد).
- اگر $|g'(x^*)| \geq 1$ آنگاه روش نقطه‌ی ثابتِ متناظر واگراست.

اثبات. برای بررسی همگراییِ روش، خطای دو مرحله‌ی متوالی را با هم مقایسه می‌کنیم. فرض کنید:

$$\begin{cases} e_{k+1} := x^* - x_{k+1} \\ e_k := x^* - x_k \end{cases}$$

در روش نقطه‌ی ثابت داریم: $x_{k+1} = g(x_k)$. پس با استفاده از دو رابطه‌ی قبل داریم:

$$x^* - e_{k+1} = g(x^* - e_k)$$

از طرف دیگر اگر e_k کوچک باشد با استفاده از بسط تیلور تابع g حول نقطه‌ی x^* می‌توان سمت راست

رابطه‌ی بالا را به صورت زیر ساده‌تر کرد:

$$x^* - e_{k+1} = g(x^*) - e_k\ g'(x^*)\ +\ \frac{e_k^2}{2!}\ g''(x^*) -\ \frac{e_k^3}{3!}\ g^{(3)}(x^*) + \cdots \tag{۷.۲}$$

با نگه‌داشتن دو جمله‌ی اول سری تیلور و توجه به اینکه طبق فرض، x^* نقطه‌ی ثابتِ g است یعنی $x^* = g(x^*)$ تقریبِ زیر را برای $k = 0, 1, 2, \cdots$ داریم:

$$e_{k+1} \approx e_k\ g'(x^*) \tag{۸.۲}$$

اگر $e_0 = x^* - x_0$ خطای حدس اولیه را نشان دهد، طبق رابطه‌ی قبل داریم:

$$e_1 \approx e_0\ g'(x^*) \Rightarrow e_2 \approx e_1\ g'(x^*) \approx e_0\ (g'(x^*))^2$$

و به همین ترتیب می‌توان دید که:

$$e_k \approx e_0\ (g'(x^*))^k. \tag{۹.۲}$$

آنچه به دنبالش هستیم شرایطی همگرایی حد دنباله‌ی خطاها به صفر است. با توجه به رابطه‌ی قبل اگر $|g'(x^*)| < 1$ روش همگرا و در غیر این‌صورت واگراست. □

نتیجه‌ی ۱. با توجه به رابطه‌ی (۸.۲) می‌بینیم که نرخ همگراییِ روش نقطه‌ی ثابت معمولا خطی است با ثابت خطای مجانبی $c = |g'(x^*)|$.

نتیجه‌ی ۲. با توجه به رابطه‌ی (۹.۲) هرچه اندازه‌ی $g'(x^*)$ به صفر نزدیک‌تر باشد سرعت همگرایی بیشتر شده و حالت ایده‌آل این است که $g'(x^*) = 0$ باشد.

نتیجه‌ی ۳. اگر $g'(x^*) = 0$ باشد آنگاه نرخ همگراییِ روش نقطه‌ی ثابت حداقل مربعی خواهد بود! فهم این موضوع به کمک بسط تیلور (۷.۲) ساده است. در این وضعیت داریم:

$$-e_{k+1} \approx 0 + \frac{e_k^2}{2!}\ g''(x^*).$$

چنانچه علاوه بر $g'(x^*)$ داشته باشیم $g''(x^*) = 0$ آنگاه نرخ همگرایی حداقل از مرتبه‌ی سه خواهد بود و به همین ترتیب!

اکنون بار دیگر به مثال قبل بازگشته و شرایط قضیه‌ی قبل را برای هر چهار تابع بررسی می‌کنیم:

$$g_1(x) = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad g_1'(2) = 4 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{روش واگراست}$$
$$g_2(x) = 1 + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad |g_2'(2)| = |-\frac{1}{2}| < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{روش همگراست}$$
$$g_3(x) = \sqrt{x+2} \quad \Rightarrow \quad g_3'(2) = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{روش همگراست}$$
$$g_4(x) = \frac{x^2+2}{2x-1} \quad \Rightarrow \quad g_1'(2) = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{روش همگراست}$$

همچنین روش‌ها به ترتیب از بالا به پایین دارای کندترین تا سریع‌ترین همگرایی هستند. این تاییدکننده‌ی تعداد تکرارهایی است که در بالا برای سه روش همگرا دیدیم.

مثال ۱۴. دو روش نقطه‌ی ثابت را برای حل معادله‌ی $f(x) = x - e^{-x} = 0$ ساخته و در مورد همگرایی یا واگرایی هر دو روش به ریشه‌ی $x^* = 0.567$ بحث کنید.

واضح‌ترین انتخاب ممکن $g_1(x) = e^{-x}$ یعنی اجرای روش نقطه‌ی ثابت

$$x_{k+1} = g_1(x_k) = e^{-x_k}$$

می‌باشد. داریم:

$$g_1'(x) = -e^{-x} \Rightarrow g_1'(x^*) = -e^{-0.567} \approx -0.567 \Rightarrow |g_1'(x^*)| < 1$$

پس با این انتخاب g_1 حتما می‌توان بازه‌ای یافت که روش همگرا باشد.
دومین تابع نقطه‌ی ثابت را می‌توان به صورت زیر ساخت:

$$f(x) = x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = x \Rightarrow -x = \log x.$$

بنابراین $g_2(x) = -\log x$. داریم:

$$g_2'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x^*) = -\frac{1}{0.567} \approx -1.7637$$

چون $|g_2'(x^*)| > 1$ پس این روش واگراست.

تمرین ۵. سه روش نقطه‌ی ثابت متفاوت را برای حل معادله‌ی $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ ساخته و همگرایی روش‌ها را برای یافتن هر دو ریشه‌ی f به صورت مجزا بررسی کنید.

یکی از پرسش‌هایی که می‌تواند در مورد قضیه‌ی ۱.۴.۲ مطرح شود این است که استفاده‌ی عملی از آن نیاز به دانستن مقدار نقطه‌ی ثابت x^* دارد حال آنکه x^* را قبل از اجرای روش نقطه‌ی ثابت (حتی به صورت تقریبی نیز) نداریم و به دنبال یافتن آن هستیم. بررسی شرایط قضیه‌ی مرتبط زیر نیازی به دانستن مقدار نقطه‌ی ثابت x^* ندارد:

قضیه‌ی ۲.۴.۲. فرض کنید تابع $g(x)$ بر بازه‌ی $I = [a,\ b]$ مشتق پذیر بوده و برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $g(x) \in I$. همچنین فرض کنید مقدار ثابت نامنفی $K < 1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in I$ داشته باشیم

$$|g'(x)| \leq K.$$

در این‌صورت g دارای نقطه‌ی ثابت یکتایی در I است به طوری که روش نقطه‌ی ثابت با شروع از هر حدس اولیه‌ای در این بازه همگراست.

اکنون نوبت به ساختن سیستماتیک حالت خاصی از روش نقطه‌ی ثابت است که دارای نرخ همگرایی مربعی است. تابع $g_4(x)$ که سریع‌ترین نرخ همگرایی را در بین چهار روش نقطه‌ی ثابتِ مثال ۱۳ داشت، در واقع روش نیوتن–رَفسون بوده است.