مثال ۲.۳.۳. چندجمله‌ای درونیاب داده‌های زیر را با روش نیوتن به دست آورده و از آن برای تقریب در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ استفاده کنید.

تفاضلات تقسیم شده در جدول ۲.۳ آمده است. بر این اساس چندجمله‌ای درونیاب برابر است با

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
-1	-2			
		1		
1	0		2	
		7		1
2	7		6	
		19		
3	26			

جدول ۲.۳: جدول تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مثال ۲.۳.۳

$$p(x) = -2+(1)\Big(x-(-1)\Big)+2\Big((x+1)(x-1)\Big)+(1)\Big((x+1)(x-1)(x-2)\Big) = x^3-1.$$

تقریب نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ به کمک درونیاب برابر است با

$$p(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{8}.$$

□

مثال ۳.۳.۳. ابتدا چندجمله‌ای درونیاب داده‌های جدول زیر را به دست آوردید.

x_i	1	2	3
f_i	2	5	10

سپس نقطه‌ی $(4,11)$ را به داده‌ها اضافه کرده و مجددا چندجمله‌ای درونیاب را محاسبه کنید. جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
1	2		
		3	
2	5		1
		5	
3	10		

که متناظر با چندجمله‌ای درونیاب زیر است:

$$p_2(x) = 2 + 3(x-1) + 1\Big((x-1)(x-2)\Big) = x^2 + 1.$$

با اضافه‌شدن نقطه‌ی $(4, 11)$ جدول تفاضلات تقسیم‌شده‌ی جدید به صورت زیر است. این همان جدول قبل است و تنها داده‌های برجسته به آن اضافه شده‌اند. چندجمله‌ای درونیاب جدولِ به‌روزشده، نیز تنها یک

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\mathbf{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]}$
1	2			
		3		
2	5		1	
		5		$\mathbf{-1}$
3	10		$\mathbf{-2}$	
		$\mathbf{1}$		
$\mathbf{4}$	$\mathbf{11}$			

جمله بیش از $p_2(x)$ خواهد داشت:

$$p(x) = p_2(x) + (-1)\Big((x-1)(x-2)(x-3)\Big) = (x^2+1) - x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = -x^3 + 7x^2 - 11x + 7.$$

□

در این مثال، مزیت درونیابی به روش نیوتن در قیاس با روش کلاسیک لاگرانژ را از این جهت دیدیم که با اضافه‌شدنِ یک یا چندنقطه به داده‌های قبلی، می‌توان از محاسباتِ قبلی برای تعیین سریع‌ترِ چندجمله‌ای درونیاب جدید استفاده کرد.

تمرین ۷. یک تابع مهم در احتمال، ترکیبیات و زمینه‌های دیگری از ریاضیات، تابع گاما است. این تابع که با نماد $\Gamma(x)$ نشان داده می‌شود، تعمیمی از تابع فاکتوریل به ورودی‌های غیرصحیح به حساب می‌آید. جدول زیر مقدار $\Gamma(x)$ را برای یازده مقدار در بازه‌ی $[1,\ 2]$ مشخص کرده است.

x	$\Gamma(x)$
1.00	1.0000000000
1.10	0.9513507699
1.20	0.9181687424
1.30	0.8974706963
1.40	0.8872638175
1.50	0.8862269255
1.60	0.8935153493
1.70	0.9086387329
1.80	0.9313837710
1.90	0.9617658319
2.00	1.0000000000

۱. تنها با استفاده از نقاط $x = 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ چندجمله‌ای درونیاب از درجه‌ی حداکثر پنج را با روش تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن بیابید.

۲. چندجمله‌ای درونیاب قسمت قبل را برای تقریب تابع گاما در نقاط $x = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$ استفاده کرده و تقریب‌های به دست آمده را با مقادیر گزارش شده در جدول برای این نقاط مقایسه کنید.

کلیه‌ی محاسبات را در دستگاه ممیزشناور $F_{10,11}^{-8,8}$ اجرا کنید.

نکته‌ی ۴.۳.۳. ((خطای تقریب)) با چندجمله‌ای درونیاب نیوتن برابر است با خطای تقریب با چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ یعنی خطای تقریب هر دو روش برطبق قضیه‌ی ۳.۲.۳ تعیین می‌شود چراکه چندجمله‌ای درونیاب یکتاست و فرقی ندارد آن‌را با روش نیوتن بیابیم یا با روش لاگرانژ یا با هر روش دیگری. با این حال ((خطای گردکردن)) موجود در چندجمله‌ای درونیاب نیوتن با خطای گردکردن چندجمله‌ای درونیاب

لاگرانژ متفاوت است چراکه دو روش مراحل محاسباتی کاملا متفاوتی را اجرا می‌کنند و از فصل اول می‌دانیم که حتی تغییر ترتیب انجام یک دسته عمل ممیز شناور می‌تواند منجر به خطای گردکردن متفاوت شود.

۲.۳.۳ تفاضلات متناهی

روش‌های لاگرانژ و تفاضلات تقسیم‌شده‌ی نیوتن چندجمله‌ای درونیاب را در حالت کلی برای هر آرایشی از نقاط x_i می‌یابند. یک حالت خاص مهم نه فقط در درونیابی بلکه هم‌چنین در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی و جزئی و یا در انتگرال‌گیری عددی حالتی است که نقاط x_i ((هم‌فاصله)) باشند. در چنین موقعیتی فرمول‌هایی ساده‌تر از تفاضلات تقسیم‌شده موجودند که به نام ((تفاضلات متناهی)) شناخته می‌شوند. سه نوع مرسوم تفاضلات متناهی عبارتند از ((تفاضلات پیشرو))، ((تفاضلات پسرو)) و ((تفاضلات مرکزی)). ما در اینجا تنها به صورت مختصر با تفاضلات پیشرو آشنا خواهیم شد.

فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[a,\ b] = [x_0,\ x_n]$ باشد که مقدارش در تمام نقاط هم‌فاصله‌ی $x_0, x_1, \cdots, x_n$ معلوم است. برای $i = 0, 1, \cdots, n$ قرار می‌دهیم:

$$x_i = a + ih$$

که در آن

$$h = \frac{b-a}{n}$$

فاصله‌ی یکسان هر دو نقطه‌ی متوالی x_i است. تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی اول تابع f به صورت زیر برای $i = 0, 1, \cdots, n-1$ تعریف می‌شوند:

$$\Delta f_i := f_{i+1} - f_i.$$

در اینجا Δ اولین عملگر تفاضل پیشرو نام دارد:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

تفاضلات پیشروی مرتبه‌های بالاتر با اِعمال متوالی عملگر Δ به دست می‌آیند. به طور خاص، تفاضلات

پیشروی مرتبه‌ی دوم عبارتند از:

$$\Delta^2 f_i := \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1}-f_i) = \Delta f_{i+1}-\Delta f_i = (f_{i+2}-f_{i+1})-(f_{i+1}-f_i) = f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i,$$

که در آن $i = 0, 1, \cdots, n-2$. در حالت کلی نیز برای $k = 0, 1, \cdots, n-1$ داریم:

$$\Delta^{k+1} f_i := \Delta^k(\Delta f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i,$$

که در آن $i = 0, 1, \cdots, n-k-1$. واضح است که هر تفاضل پیشرو چیزی نیست جز صورت کسر تفاضل تقسیم‌شده‌ی متناظر. در مثال زیر یک جدول تفاضلات پیشرو را می‌سازیم.

مثال ۴.۳.۳. جدول تفاضلات پیشروی داده‌های زیر را تشکیل دهید:

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

جدول زیر را ببینید:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0			
		$\Delta f_0 = f_1 - f_0 = -1$		
0	-1		$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = 4$	
		$\Delta f_1 = f_2 - f_1 = 3$		$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = 0$
1	2		$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1 = 4$	
		$\Delta f_2 = f_3 - f_2 = 7$		
2	9			

جدول ۳.۳: یک جدول تفاضلات پیشرو

□

چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن

در فرمول (۹.۳) دیدیم که چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم‌شده برابر است با

$$\begin{aligned} p(x) = f_0 + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

حال اگر نقاط x_i هم‌فاصله باشند داریم:

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] &= \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}. \\ f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{\frac{\Delta f_1}{h}-\frac{\Delta f_0}{h}}{2h} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}. \\ f[x_0,x_1,x_2,x_3] &= \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} = \frac{\frac{\Delta^2 f_1}{2h^2}-\frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}}{3h} = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{6h^3} = \frac{\Delta^3 f_0}{6h^3}. \\ &\vdots \\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n] &= \cdots = \frac{\Delta^n f_0}{n!\ h^n}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید برای نقطه‌ی داده‌شده‌ی x داشته باشیم:

$$x = x_0 + s\ h.$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} & x - x_0 = sh, \\ & x - x_1 = x - (x_0 + h) = sh - h = (s-1)h, \\ & x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = sh - 2h = (s-2)h, \\ & \quad \vdots \\ & x - x_{n-1} = x - \Big(x_0 + (n-1)h\Big) = sh - (n-1)h = (s-n+1)h. \end{aligned}$$

پس داریم:

$$p(s) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(sh) + \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}(sh)(s-1)h + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n f_0}{n!\ h^n}(sh)(s-1)h(s-2)h\cdots(s-n+1)h.$$

پس چندجمله‌ای درونیاب را می‌توان به صورت زیر برحسب تفاضلات پیشرو بیان کرد:

$$p(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0. \quad (۱۰.۳)$$

نکته‌ی ۵.۳.۳. واضح است که[۱]

$$\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} = \frac{s!}{k!\ (s-k)!} = \binom{s}{k}.$$

پس فرمول (۱۰.۳) به صورت زیر نیز قابل بازنویسی است:

$$p(s) = \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0 = \binom{s}{0}f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \cdots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0.$$

مثال ۵.۳.۳. چندجمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن داده‌های زیر را یافته و از آن برای تقریب در نقطه‌ی $x = 0.5$ استفاده کنید.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	1	7	23	55	109

جدول تفاضلات پیشرو به صورت زیر است.

مطابق فرمول (۱۰.۳) داریم:

$$p(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{12}\Delta^4 f_0.$$

[۱] به یاد آورید که $\binom{s}{k}$ همان تعداد حالت‌هایی است که می‌توان از بین s شیء متمایز، k تا را (بدون توجه به ترتیب آنها) انتخاب کرد.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	1				
		6			
1	7		10		
		16		6	
2	23		16		0
		32		6	
3	55		22		
		54			
4	109				

چون $h = 1$، پس به ازای $x = 0.5$ داریم

$$s = \frac{0.5 - 0}{1} = 0.5$$

و در نتیجه مقدار چندجمله‌ای درونیاب در حساب دقیق برابر است با

$$p(0.5) = 1 + 0.5 \times 6 + \frac{0.5(-0.5)}{2} \times 10 + \frac{0.5(-0.5)(-1.5)}{6} \times 6 + 0 = 3.125.$$

□

تمرین ۸. مشابه قسمت اول تمرین ۷ که در مورد تابع گاما بود را این بار با استفاده از تفاضلات پیشروی نیوتن اجرا کرده و مقدار درونیاب را در نقطه‌ی $x = 1.1$ مشخص کنید.