۵.۲ روش نیوتن- رَفسون

دیدیم که روش دوبخشی بجز علامت تابع در نقاط انتهایی و وسط بازه از تابع هیچ استفاده‌ای نمی‌کند و در واقع به همین دلیل دارای سرعت همگرایی کندی بود. می‌توان با استفاده از ((مقدار)) تابع در محل حدسِ فعلی، روش‌هایی با نرخ همگرایی بالاتری بدست آورد.

فرض کنید تقریبی که در حال حاضر از ریشه‌ی تابع f موجود است، x بوده و قصد داشته باشیم از نقطه‌ی x به گونه‌ای به نقطه‌ی $x+h$ گام برداریم که به ریشه‌ی دقیق f برسیم. بنابراین اگر $f(x+h)=0$، آنگاه آنچه برای یافتن ریشه‌ی $x+h$ لازم است یافتن طول گام h است که برای ما مجهول است.

یافتن طول گام مجهول h، با استفاده از سری تیلورِ بریده‌شده، آسان خواهد شد! تقریب

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x), \tag{۱۰.۲}$$

تابعی خطی از h است که مقدار f را در نقطه‌ی $x+h$ تقریب می‌زند. در روش نیوتن، برای یافتن ریشه‌ی تابع غیرخطیِ f از تابع خطی بالا استفاده می‌کنیم. اگر تابع f در محلِ تقریبِ فعلیِ ریشه یعنی x دارای مماسِ افقی نباشد (این شرط را به خاطر بسپرید!) یعنی $f'(x) \neq 0$، آنگاه طول گام مجهول h را می‌توان به سادگی با مساوی صفر قراردادن تابع $f(x)+hf'(x)$ به دست آورد:

$$h = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

اگر در رابطه‌ی (۱۰.۲) بجای تقریب، تساوی دقیق ریاضی برقرار بود، با ایده‌ی قبل می‌توانستیم (اقلا در حساب با دقت نامتناهی) با تنها یک تکرار از حدس فعلی x به مقدار دقیق ریشه یعنی

$$x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

برسیم. اما از آنجا که رابطه‌ی (۱۰.۲) تنها به صورت تقریبی درست است، نمی‌توان انتظار داشت که $x+h$، در حالت کلی ریشه‌ی دقیق تابع f باشد. با این وجود به صورت محلی (یعنی چنانچه $x+h$ به قدر کافی به x نزدیک باشد) سمت راست رابطه‌ی (۱۰.۲) تقریبی با دقت دلخواه برای $f(x+h)$ خواهد بود. پس ما روند قبل را تکرار می‌کنیم به این امید که به ریشه نزدیک و نزدیک‌تر شویم! روش نیوتن یا نیوتن-رَفسون که از نوع تکراری است، متولد شده است:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (۱۱.۲)$$

تفسیر دیگری برای روش نیوتن بدین صورت است که این روش برای یافتن ریشه‌ی f، در هر تکرار ریشه‌ی خط مماس بر f را می‌یابد. شکل ۷.۲ را درنظر گرفته و فرض کنید حدس فعلیِ ریشه، نقطه‌ی x_k باشد. معادله‌ی خط مماس بر f در x_k عبارت است از:

$$y - f(x_k) = m(x - x_k)$$

جایی‌که m شیب خط مماس در نقطه‌ی تماس $(x_k, f(x_k))$ است که مساوی است با $m = f'(x_k)$ یعنی مقدار مشتق f در این نقطه. پس معادله‌ی خط مماس بر f در نقطه‌ی x_k عبارت است از:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k).$$

حال ریشه‌ی خط مماس در حدس فعلی یعنی محل برخورد خط مماس با محور xها یعنی را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \\ \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \Rightarrow x - x_k = \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$$

پس داریم:

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

که وقتی بعنوان حدس بعدیِ یک روش تکراری یعنی x_{k+1} استفاده شود، همان روش نیوتن بالاست.

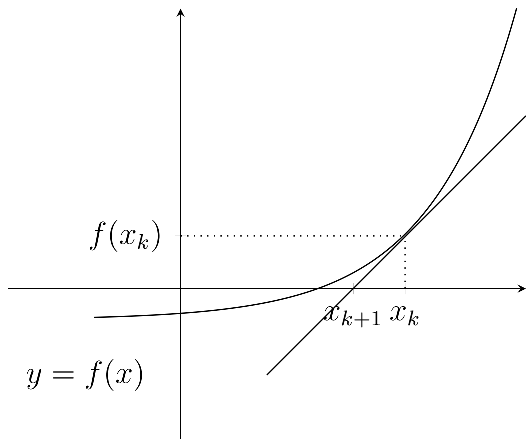
مثال ۱.۵.۲. با استفاده از روش نیوتن یک ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^2 - 4\sin x$ را محاسبه کنید.

داریم:

$$f'(x) = 2x - 4\cos x$$

پس روند تکراری عبارت است از:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 4\sin x_k}{2x_k - 4\cos x_k}$$



شکل ۷.۲: روش نیوتن برای حل معادله‌ی $f(x) = 0$، ریشه‌ی خط مماس بر تابع را در حدس فعلی می‌یابد.

اگر حدس اولیه‌ی $x_0 = 3$ را استفاده کنیم دنباله‌ی زیر بدست می آید، جایی‌که $h = \frac{-f(x)}{f'(x)}$ طول گام یعنی میزان تغییر در x در هر تکرار را نشان می‌دهد.

x	$f(x)$	$f'(x)$	h
3.00000	8.43552	9.95997	−0.84694
2.15305	1.29477	6.50577	−0.19902
1.95404	0.10843	5.40380	−0.02007
1.93397	0.00115	5.28892	−0.00022
1.93375	0.00000	5.28767	0.00000

اجرای روش را می‌توان بعنوان نمونه وقتی اندازه‌ی طول گام h در قیاس با اندازه‌ی x به اندازه‌ی قابل تحمل ε کوچک شده باشد، یعنی

$$|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}| < \varepsilon$$

متوقف کرد.

مثال ۲.۵.۲. ریشه‌ی دوم عدد a را با روش نیوتن بیابید.

برای استفاده از روش نیوتن برای یافتن جذر a، ابتدا به تابعی همچون f نیاز داریم که ریشه‌ی آن تابع، جذر a باشد. چنین تابعی به وضوح عبارت است از: $f(x) = x^2 - a$. طبق فرمول روش نیوتن داریم:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}).$$

۲.۵.۱ ارتباط روش نیوتن با روش نقطه‌ی ثابت و نرخ همگرایی روش نیوتن برای ریشه‌ی ساده

می‌توان روش نیوتن را بعنوان راهی سیستماتیک برای تغییر شکل یک معادله‌ی غیرخطی $f(x) = 0$ به یک مسئله‌ی نقطه‌ی ثابت $x = g(x)$ آنگونه که در روش نقطه‌ی ثابت انجام شد در نظر گرفت. با این دیدگاه واضح است که روش نیوتن در واقع یک روش نقطه‌ی ثابت است که همواره تابع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

را انتخاب می‌کند. بنابراین برای تحلیل همگرایی روش نیوتن، با توجه به قضیه‌ی ۲.۴.۱، مشتق تابع g را محاسبه می‌کنیم:

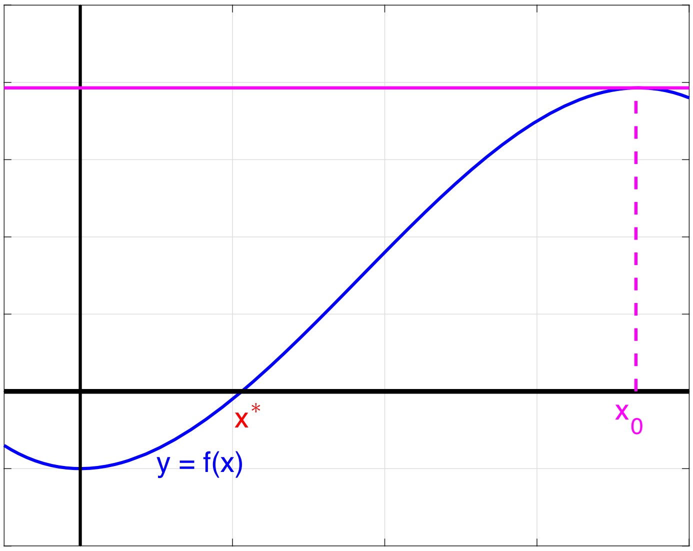
$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

پس اگر x^* یک ریشه‌ی ساده‌ی f باشد (یعنی $f(x^*) = 0$ و $f'(x^*) \neq 0$) در این صورت $g'(x^*) = 0$. پس نرخ همگرایی روش نیوتن برای یک ریشه‌ی ساده از مرتبه دو است، یعنی $r = 2$. در مثال ۲.۴.۱ برای تابع $f(x) = x^2 - x - 2$ چهارمین مسئله‌ی نقطه ثابت همان روش نیوتن بود. دیدیم که همگرایی مربعی روش نیوتن بدین معناست که تعداد ارقام دهدهی درستِ جواب تقریبی، در هر تکرار تقریبا دو برابر می‌شود.

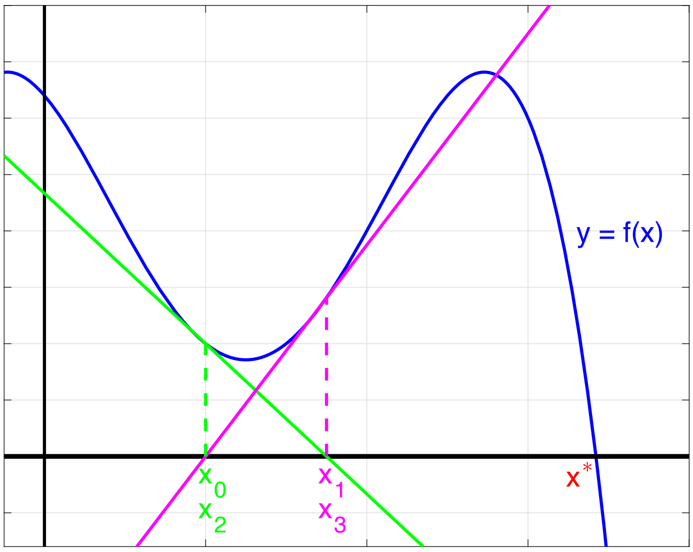
نکته‌ی ۲.۵.۱. به یاد آورید که در ابتدای معرفی روش نیوتن شرط کردیم که تابع f در محل تقریب فعلی ریشه دارای مماس افقی نباشد. شکل ۲.۸ موقعیتی را نشان می‌دهد که تابع در محل حدس فعلی دارای مماس افقی بوده و در نتیجه خط مماس برخوردی با محور xها ندارد که بتوان آنرا بعنوان تقریب بعدی ریشه در نظر گرفت.

موقعیت دیگری که واگرایی روش نیوتن و وابستگی آن به حدس اولیه‌ی مناسب را نشان می‌دهد در شکل ۲.۹ ترسیم شده. در اینجا حدس اولیه‌ی x_0 به اندازه‌ی کافی به ریشه نزدیک نبوده و تقریب‌های تولیدشده توسط روش نیوتن مرتبا بین دو نقطه‌ی x_0 و x_1 نوسان کرده و هیچگاه همگرا نخواهد شد.

نکته‌ی ۲.۵.۲. همگرایی روش نیوتن محلی است یعنی در حالت کلی این روش برای هر حدس اولیه‌ی x_0 همگرا نخواهد شد بلکه فقط برای مقادیری از x_0 که به اندازه‌ی کافی به x^* نزدیک هستند، همگرا می‌شود. در نگاه اول این شرط ممکن است بی‌معنا به نظر آید (برای محاسبه‌ی x^* که نامعلوم است باید از یک حدس اولیه‌ی به اندازه‌ی کافی نزدیک به x^* شروع کنیم.) اما در عمل می‌توان یک حدس اولیه x_0 را به کمک



شکل ۸.۲: واگرایی روش نیوتن: x_1 وجود ندارد چرا که خط مماس در x_0 افقی است.

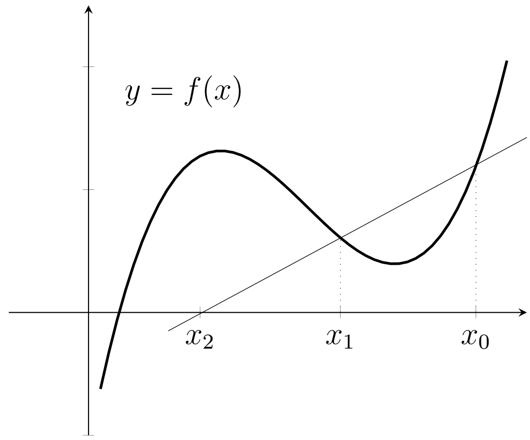


شکل ۹.۲: واگرایی روش نیوتن: نوسان همیشگی بین دو نقطه‌ی x_0 و x_1

روش دوبخشی (که همگرایی سراسری دارد) و یا کمک گرفتن از نمودار f بدست آورد. اگر x_0 بصورت مناسبی انتخاب شده باشد و x^* یک ریشه‌ی ساده باشد در این‌صورت روش نیوتن همگرا خواهد شد.

۶.۲ روش خط قاطع (وتری)

یکی از ایرادهای روش نیوتن این است که در هر تکرار هم به مقدار تابع و هم به مقدار مشتق تابع نیاز است. وقتی محاسبه $f(x_k)$ و $f'(x_k)$ پیچیده نباشد، روش نیوتن از این دیدگاه مشکلی ندارد. اما در برخی مواقع ارائه‌ی فرمولی برای $f'(x)$ از روی تابع $f(x)$ مشکل و یا ناممکن است. روش وتری گامی برای حل این



شکل ۱۰.۲: روش خط قاطع

مشکل است چراکه نیازی به محاسبه‌ی مشتق تابع در هیچ نقطه‌ای ندارد. شکل ۱۰.۲ در نظر ببینید.

فرض کنید x_0 و x_1 دو تقریب اولیه برای ریشه‌ی x^* و نزدیک به آن باشند. بعلاوه فرض کنید x_2 نقطه محل تلاقی خط گذرنده از نقاط $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ با محور xها باشد، یعنی در واقع تقریب جدید x_2 ریشه‌ی خط قاطع گذرنده از دو مقدار قبلی تابع باشد. به این دلیل این روش را خط قاطع یا وتری می‌نامیم. معادله‌ی خط قاطع گذرنده از دو نقطه‌ی قبل عبارت است از:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1), \quad m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$\Rightarrow y - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$

پس با حل این معادله برای مقداری از x که $y = 0$ است، داریم:

$$0 - f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1)$$
$$\Rightarrow -f(x_1)(x_1 - x_0) = (f(x_1) - f(x_0))(x - x_1)$$
$$\Rightarrow x = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

پس تقریب جدید ریشه یعنی x_2 برابر است با:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

با تکرار این فرایند، فرمول کلی روش خط قاطع به دست می‌آید:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

۱.۶.۲ دیدگاه دیگری برای ساختن روش خط قاطع از روی روش نیوتن

در روش نیوتن داریم:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

و چون:

$$\lim_{x\to x_k} \frac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x} = f'(x_k)$$

پس اگر x مقداری نزدیک به x_k مانند x_{k-1} باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(x_k)$$

با قرار دادن این تقریب در فرمول روش نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \\ \Rightarrow x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{aligned}$$

که همان فرمول روش خط قاطع است.

مثال ۱.۶.۲. روش خط قاطع را برای معادله‌ی $f(x) = x^2 - 4\sin x = 0$ با مقادیر اولیه‌ی $x_0 = 1$ و $x_1 = 3$ اجرا کنید. محاسبات را تا پنج رقم اعشار انجام دهید.

ابتدا مقدار تابع f را در هر یک از نقاط اولیه بدست آورده و سپس جواب تقریبی بعدی را از فرمول کلی بدست می‌آوریم. برای پیداکردن x_3 از x_2 و x_1 استفاده می‌کنیم. توجه کنید که در هر تکرارِ روش خط قاطع تنها به محاسبه‌ی مقدار تابع در نقطه‌ی جدید نیاز است. دنباله‌ی تولید شده در جدول زیر نشان داده شده است، جایی‌که h میزان تغییر در x در هر تکرار را نشان می‌دهد.

قضیه‌ی (بدون اثبات) زیر نرخ همگرایی روش خط قاطع را بیان می‌کند.

x	$f(x)$	h
1.00000	−2.365884	−
3.15305	8.435520	−1.561930
1.438070	−1.896774	0.286735
1.724805	−0.977706	0.305029
2.029833	0.534305	−0.107789
1.922044	−0.061523	0.011130
1.933174	−0.003064	0.000583
1.933757	0.000019	−0.000004
1.933754	0.000000	0.000000

قضیه‌ی ۲.۶.۱. نرخ همگرایی روش خط قاطع برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ است.

از آنجا که هر جواب تقریبی روش خط قاطع به دو مقدار قبلی بستگی دارد، رفتار همگرایی این روش کمی پیچیده است. اما به طور کلی نرخ همگرایی روش خط قاطع بیش از روش دوبخشی و کمتر از روش نیوتن است. از سوی دیگر هر مرحله از روش نیوتن به دو ارزیابی جدید مقدار تابع یعنی $f(x_k)$ و $f'(x_k)$ نیاز دارد درحالی که هر مرحله از روش خط قاطع تنها به یک ارزیابی جدید مقدار تابع نیاز دارد. بنابراین از آنجا که اصلی‌ترین مانع محاسباتی این روش‌ها ارزیابی مقدار تابع است، می‌توان هر جفت مرحله از روش خط قاطع را با یک مرحله از روش نیوتن مقایسه کرد.

یکی از مشکلات روش خط قاطع این است که به دو حدس اولیه نیاز دارد و بعلاوه این روش نیز ممکن است همگرا نباشد. مثلا اگر خط قاطع گذرنده از دو نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ و $(x_1, f(x_1))$ افقی بوده و یا خط قاطع محور xها را در دوردست قطع کند یا در جایی که احتمالا جزء حوزه تعریف f نباشد، آنگاه x_{k+1} ممکن است قابل محاسبه نباشد. این مشکل عدم همگرایی فراگیر روش خط قاطع در روش نابجایی برطرف می‌شود.

۷.۲ روش نابجایی

روش نابجایی بسیار شبیه به روش خط قاطع است با این تفاوت که به جای انتخاب خط قاطعِ گذرنده از نقاط $(x_k, f(x_k))$ و $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ، خط قاطع گذرنده از نقاط $(x_k, f(x_k))$ و $(x_{k'}, f(x_{k'}))$ انتخاب

می شود، جایی که k' بزرگ‌ترین اندیس کمتر از k است که در شرط

$$f(x_k)\ f(x_{k'}) < 0$$

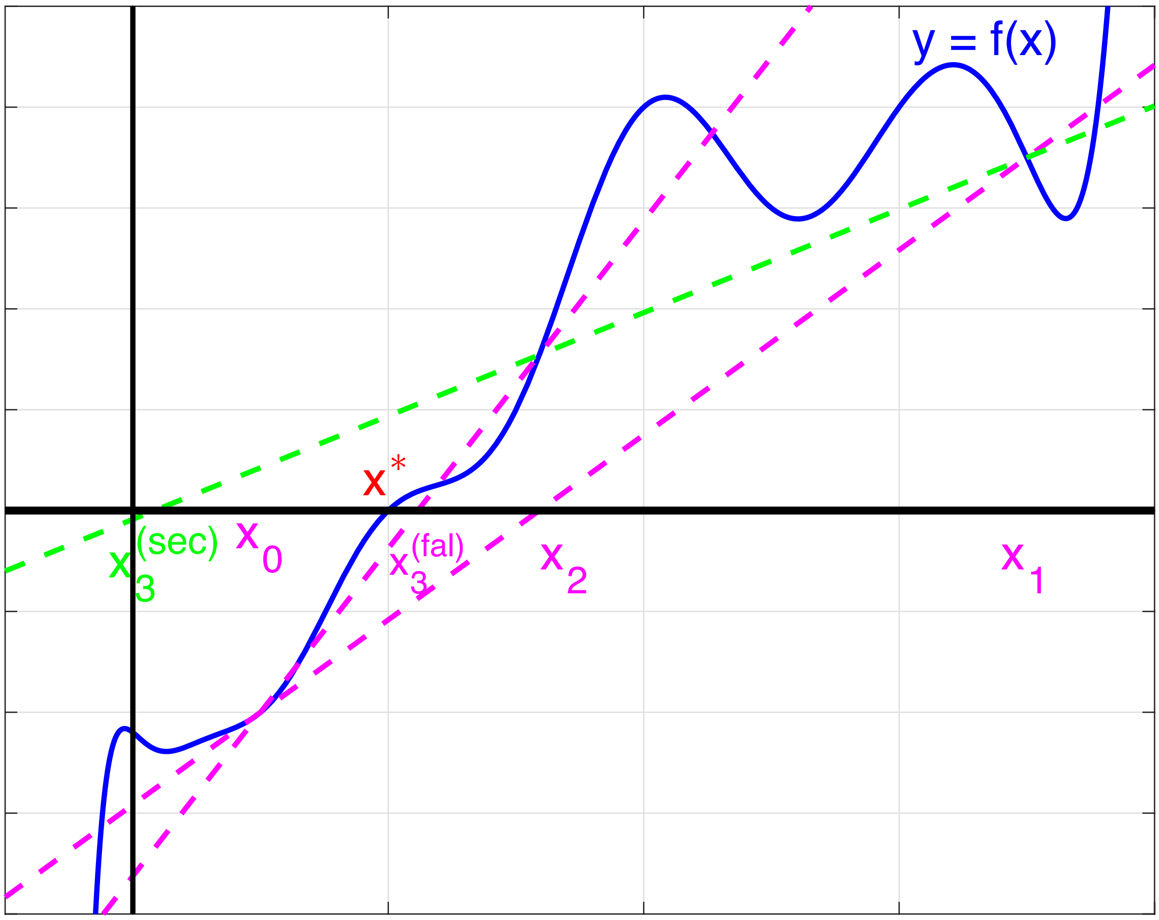
صدق می‌کند. در واقع انتخاب نقاط در روش خط قاطع تنها براساس ترتیب استفاده‌ی آنها بود و اهمیتی نداشت که در تمام تکرارهای روش خط قاطع، ریشه‌ی x^* در درون بازه‌های ساخته شده باقی بماند. ولی در روش نابجایی که ترکیبی از دو روش خط قاطع و دوبخشی است، ریشه‌ی x^* در تمام تکرارها در داخل بازه‌های ساخته شده باقی خواهد ماند. بنابراین فرمول نابجایی عبارت خواهد بود از:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

روش نابجایی دارای هزینه‌ی محاسباتی یکسانی با خط قاطع بوده و دارای نرخ همگرایی خطی است. اما برخلاف روش خط قاطع، تقریب‌های تولیدشده در تمام تکرارهای روش نابجایی در بازه‌ی اولیه‌ی $[x_0, x_1]$ قرار می‌گیرند. شکل ۱۱.۲ چگونگی تعیین x_2 و x_3 در هر دو روش نابجایی و خط قاطع را برای یک تابع خاص f نشان می‌دهد. همانگونه که در شکل مشاهده می‌کنیم، x_2 تعیین‌شده با هر دو روش یکسان است اما x_3 در دو روش متفاوت است. $x_3^{(sec)}$ تقریب مربوط به روش خط قاطع است که محل برخورد خط گذرا از دو نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ با محور xها می‌باشد و در خارج از بازه‌ی اولیه $[x_0, x_1]$ قرار گرفته است. از سوی دیگر $x_3^{(fal)}$ که مربوط به روش نابجایی است، همان محل برخورد خط گذرا از دو نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ و $(x_2, f(x_2))$ با محور xها می‌باشد و در درون بازه‌ی اولیه‌ی $[x_0, x_1]$ که شامل ریشه‌ی x^* است، قرار دارد. بر همین اساس می‌توان همگرایی فراگیر روش نابجایی را مانند روش دوبخشی توجیه کرد.

روش نابجایی معمولا سریعتر از روش دوبخشی است اما این امکان وجود دارد که از روش دوبخشی حتی کندتر نیز باشد بخصوص وقتی که x_iها همگی در یک سمت ریشه قرار داشته باشند. (شکل ۱۲.۲ را ببینید.) به همین دلیل تغییراتی در روش نابجایی پیشنهاد شده تا آن‌را سریع‌تر کند که در اینجا بحث نمی‌شود.

مثال ۱.۷.۲. دو تکرار از روش نابجایی را برای محاسبه‌ی ریشه‌ی مثبت تابع $f(x) = x^2 - 2$ اجرا کنید. (محاسبات تا پنج رقم اعشار)



شکل ۱۱.۲: روش‌های خط قاطع و نابجایی

با انتخاب $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ که $f(1)\ f(2) < 0$ داریم:

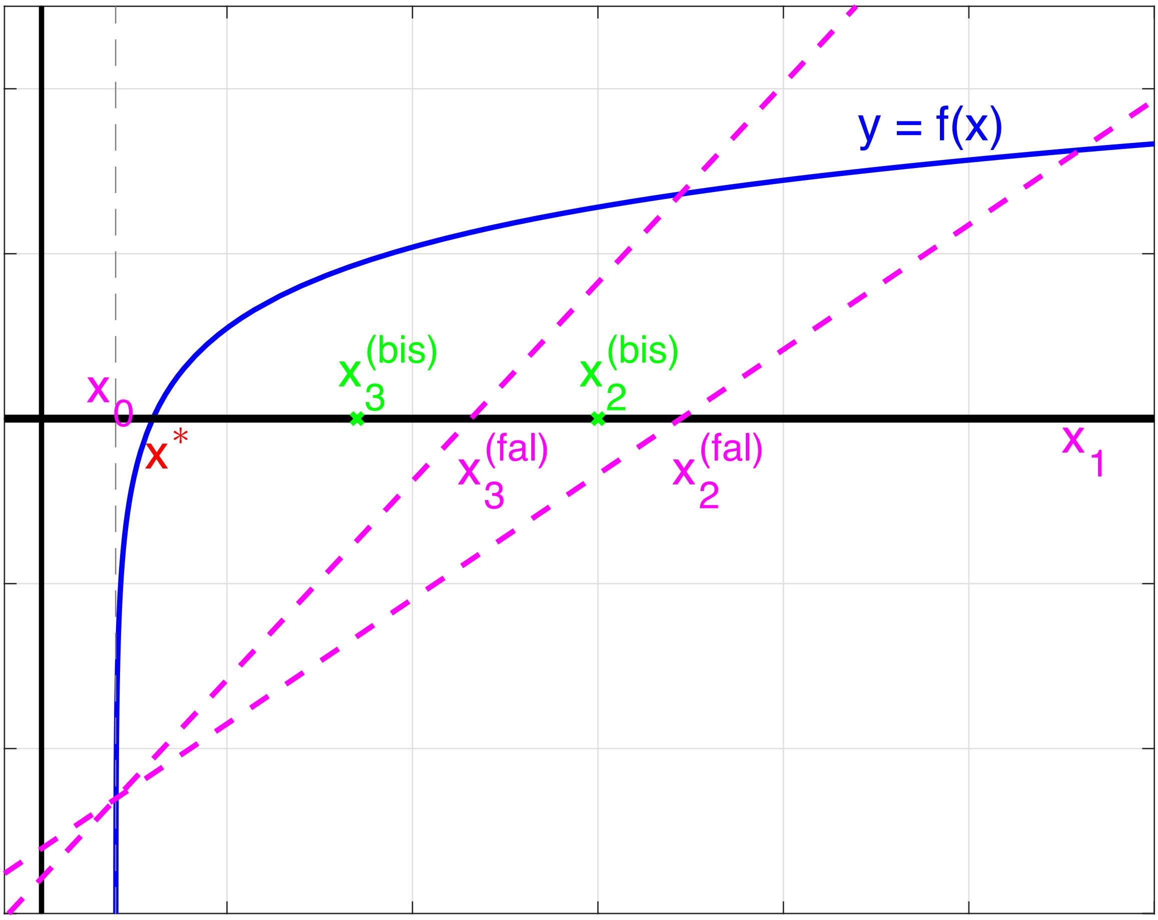
$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - 2 \times \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{4}{3} = 1.33333$$

و

$$f(\frac{4}{3}) = \frac{-2}{9} < 0$$

بنابراین ریشه در بازه $[\frac{4}{3}, 2]$ قرار دارد.

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{4}{3} - (\frac{-2}{9}) \times \frac{\frac{4}{3} - 2}{\frac{-2}{9} - 2} = \frac{7}{5} = 1.4$$



شکل ۱۲.۲: روش نابجایی ممکن است از روش دوبخشی نیز کندتر باشد!

۸.۲ اشاره‌ای به روش‌های مدرن ریشه‌یابی

در این قسمت به صورتی ساده و بسیار مختصر به روش‌هایی که امروزه عملا برای ریشه‌یابی استفاده می‌شوند اشاره می‌کنیم. بدین منظور دو مسئله‌ی کلی را درنظر می‌گیریم: ریشه‌یابی برای چندجمله‌ای‌ها و برای توابع غیرچندجمله‌ای. ابتدا مسئله‌ی یافتن جواب‌های معادله‌ی

$$p_n(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0 \qquad (۱۲.۲)$$

را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تمام n ریشه‌ی چندجمله‌ای $p_n(x)$ را بیابیم. واضح است که چنانچه ضریب جمله‌ی x^n یک نباشد می‌توان می‌توان با تقسیم طرفین رابطه‌ی (۱۲.۲) بر آن ضریب، چندجمله‌ای جدیدی ساخت که به فرم $p_n(x)$ باشد بدون اینکه ریشه‌هایش تغییر کنند. متناظر با چندجمله‌ای $p_n(x)$ ماتریسی

$n \times n$ بنام ماتریس همراه به صورت زیر موجود است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

قضیه‌ی زیر خاصیت کلیدی ماتریس A را بیان می‌کند.

قضیه‌ی ۱.۸.۲. چندجمله‌ای مشخصه‌ی A برابر است با $p_n(x)$.

اثبات. چندجمله‌ای مشخصه‌ی A برابر است با

$$\det(xI_n - A) = \det \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

که با بسط حول سطر اول آن برابر است با

$$\det(xI_n - A) = x\det\begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x+a_{n-1} \end{bmatrix} + 0 + \cdots$$

$$+ 0 + (-1)^{1+n} a_0 \det\begin{bmatrix} -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان نشان داد که دترمینان اول در سمت راست تساوی بالا برابر است با

$$a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}.$$

همچنین دومین دترمینان در رابطه‌ی بالا باتوجه به بالامثلثی‌بودن ماتریس که از اندازه‌ی $(n-1)\times(n-1)$ است برابر با ضرب درایه‌های قطری می‌باشد یعنی برابر است با $(-1)^{n-1}$. پس داریم:

$$\det(xI_n - A) = x(a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}) + (-1)^{1+n}a_0(-1)^{n-1} = p_n(x).$$

□

بنابراین مسئله‌ی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای $p_n(x)$ همان مسئله‌ی یافتن مقادیرویژه‌ی ماتریس همراه A است. برهمین اساس در عمل، تمام مقادیر ویژه‌ی A را با الگوریتم QR (که در درس جبرخطی عددی در مورد آن می‌آموزیم) و نظایر آن می‌یابند.

از سوی دیگر فرض کنید $f(x)$ یک تابع متعالی غیرچندجمله‌ای باشد که می‌خواهیم تمام ریشه‌هایش را بیابیم. در ابتدا $f(x)$ را با یک چندجمله‌ای همچون $p_n(x)$ تقریب می‌زنیم به طوری که تفاوت مقادیر $f(x)$ و $p_n(x)$ تقریبا برابر با اپسیلون ماشین باشد. این کار را می‌توان مثلا با نمونه‌های پیشرفته‌ی الگوریتم‌های درونیابی که در فصل بعد در مورد آن خواهیم آموخت انجام داد. سپس ریشه‌هایی از f که به لحاظ اندازه از

اپسیلون ماشین بزرگتر هستند را با یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای $p_n(x)$ می‌یابند که همان روند قبلی خواهد بود.