۶.۵ روش نقطه‌ی میانی ساده

هر دو روش ذوزنقه‌ای و سیمسون روش‌هایی بسته هستند به این معنی که در فرمول‌های (هر دو نسخه‌ی ساده و مرکب از این دو روش) از مقدار انتگرالده در هر دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهاییِ بازه‌ی انتگرال‌گیری یعنی $[a,\ b]$ استفاده می‌شود. بنابراین نمی‌توان روش‌های ذوزنقه‌ای و سیمسون را برای محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره‌ای همچون

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

یا

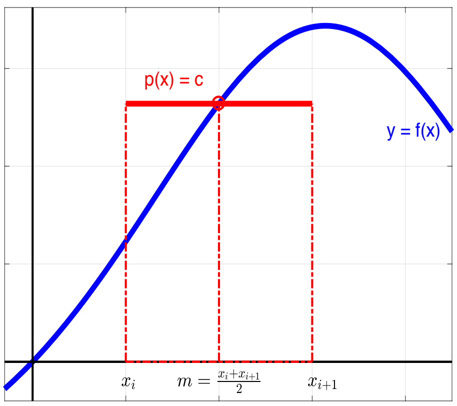
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

که در آن‌ها $f(a)$ و یا $f(b)$ بی‌کران هستند استفاده کرد (دقت کنید که هر دو انتگرال ناسره‌ی قبل همگرا هستند.) از حساب دیفرانسیل و انتگرال به یاد داریم که اگر f بعنوان مثال در $x = a$ تکینگی داشته باشد، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = \lim_{t \to a} \int_{t}^{b} f(x)\ dx.$$

برای محاسبه‌ی عددی چنین انتگرال‌هایی می‌توان از روش‌های ((باز)) نیوتن–کوتز استفاده کرد.

هر دو روش ذوزنقه‌ای ساده و سیمسون ساده حالت‌هایی خاص از خانواده‌ی روش‌های (بسته‌ی) نیوتن–کوتز هستند که به ترتیب با افراز بازه‌ی $[a,\ b]$ به تنها $n = 1$ و $n = 2$ زیربازه بدست می‌آمدند. روش نقطه‌ی میانی ساده ساده‌ترین حالت خاص از روش‌های باز نیوتن–کوتز است که با افراز بازه‌ی $[a,\ b]$ به تنها $n = 1$ زیربازه حاصل می‌شود. این روش از هیچ‌یک از دو نقطه‌ی a و b استفاده نکرده و در عوض تنها نقطه‌ی میانی بازه یعنی $m := \frac{a+b}{2}$ را به کار می‌گیرد. با استفاده از تنها این تک نقطه، می‌توان تابع f را با چندجمله‌ای درونیاب درجه صفر یعنی یک خط ثابت همچون $p(x) = c$ تقریب زد که در آن $c = f(m)$.



شکل ۶.۵: مستطیل مورداستفاده در قاعده‌ی نقطه‌ی میانی ساده

مطابق شکل ۶.۵ مساحت سطح زیر منحنی و بالای محور xها در ناحیه‌ی محدود به دو خط $x = a = x_i$ و $x = b = x_{i+1}$ با مساحت یک مستطیل تقریب زده می‌شود:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \approx (b-a) f(\frac{a+b}{2}) = hf(x_i + \frac{h}{2}),$$

که در آن $h = \frac{b-a}{1} = x_{i+1} - x_i$.

۱.۶.۵ خطای برشی قاعده‌ی نقطه‌ی میانی ساده

می‌خواهیم خطای قاعده‌ی نقطه‌ی میانی ساده یعنی

$$EI := \int_a^b f(x)\ dx - (b-a) f(\frac{a+b}{2}) \tag{۱۳.۵}$$

را تخمین بزنیم.

اگر f به حد کافی مشتق‌پذیر باشد با استفاده از بسط تیلور آن حول نقطه‌ی میانی بازه یعنی $\frac{a+b}{2}$ داریم:

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\alpha), \tag{۱۴.۵}$$

که در آن $\alpha_x \in (a,\ b)$ یعنی $\alpha_x \in (x,\ \frac{a+b}{2})$ یا $\alpha_x \in (\frac{a+b}{2},\ x)$. روش نقطه‌ی میانی ساده به وضوح با انتگرال‌گیری روی بازه‌ی $[a,\ b]$ از (فقط) اولین جمله در سمت راست سری تیلور قبل به دست می‌آید:

$$(b-a) f(\frac{a+b}{2}) = \int_a^b f(\frac{a+b}{2})\ dx.$$

پس طبق تعریف (۱۳.۵) داریم

$$EI := \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f(\frac{a+b}{2})\ dx.$$

بنابراین با توجه به (۱۴.۵) داریم

$$\begin{aligned} EI &:= \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})\ dx + \int_a^b \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\alpha_x)\ dx \\ &= f'(\frac{a+b}{2}) \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})\ dx + \frac{1}{2!}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\alpha_x)\ dx \\ &= f'(\frac{a+b}{2})(\frac{x^2}{2} - x\frac{a+b}{2})|_{x=a}^{x=b} + \frac{1}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\alpha_x)\ dx \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید که اولین انتگرال در رابطه‌ی اخیر صفر بوده و انتگرال دوم نیز به کمک قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها به صورت زیر ساده می‌شود: با توجه به ثابت‌ماندنِ علامت $(x-\frac{a+b}{2})^2$، وجود $\zeta \in (a,\ b)$ دارد به طوری که

$$EI = \frac{1}{2} f''(\zeta) \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2\ dx.$$

با محاسبه‌ای ساده می‌توان دید که

$$EI = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta).$$

تنها قسمتی از این فرمول که به h بستگی دارد $b-a$ است چرا که در روش نقطه‌ی میانی ساده داریم $h=b-a$. پس $EI = \mathcal{O}(h^3)$.

۷.۵ روش نقطه‌ی میانی مرکب

اکنون فرض کنید بازه‌ی $[a,b]$ به n زیربازه‌ی $[x_i,\ x_{i+1}]$ با پهنای یکسان برای $i=0,1,\cdots,n-1$ افراز کرده و برای انتگرال‌گیری از تابع f در هر زیربازه، از قاعده‌ی نقطه‌ی میانی ساده استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\ dx \\ &\approx\ h\Big(f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_1+\frac{h}{2}) + \cdots + f(x_{n-1}+\frac{h}{2})\Big). \end{aligned}$$

همانگونه که می‌بینیم از $f(a)=f(x_0)$ و $f(b)=f(x_n)$ در این فرمول استفاده نشده و به همین دلیل روش نقطه‌ی میانی می‌تواند در مواقعی که انتگرالده در a و یا b تکینگی دارد استفاده شود.

۱.۷.۵ خطای روش نقطه‌ی میانی مرکب

با الگویی مشابه آنچه که برای تعیین خطای روش ذوزنقه‌ای مرکب اجرا شد داریم:

$$EI = \frac{h^3}{24}f''(\alpha_0)+\frac{h^3}{24}f''(\alpha_1)+\cdots+\frac{h^3}{24}f''(\alpha_{n-1}) = \frac{h^3}{24}\Big(f''(\alpha_0)+f''(\alpha_1)+\cdots+f''(\alpha_{n-1})\Big).$$

چنانچه f'' بر $[a,\ b]$ پیوسته باشد نقطه‌ای همچون $\zeta \in (a,\ b)$ موجود است به طوری که

$$f''(\alpha_0) + f''(\alpha_1) + \cdots + f''(\alpha_{n-1}) = nf''(\zeta).$$

بنابراین خطای تقریب روش نقطه‌ی میانی مرکب برابر است با

$$EI = \frac{h^3}{24}nf''(\zeta) = \frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\zeta).$$

این بدان معناست که روش نقطه‌ی میانی مرکب یک روش از مرتبه‌ی دو است و در حالت خاصی که f یک چندجمله‌ای ثابت یا خطی باشد هیچ خطای تقریبی ندارد. به طور کلی اگر $\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)| \leq M_2$ آنگاه داریم

$$|EI| \leq \frac{(b-a)}{24}h^2 M_2.$$

مثال ۱.۷.۵. مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ را با یک روش عددی با طول گام $h = 0.1$ تقریب بزنید.

انتگرالده در نقطه‌ی $x = 0$ بیکران بوده و در نتیجه یک انتگرال ناسره داریم. پس ابتدا بازه‌ی $[0,1]$ را به زیربازه‌های $[0,0.1],\ [0.1,0.2],\ \cdots,\ [0.9,1]$ افراز کرده و سپس با استفاده از نقطه‌ی میانی هر زیربازه داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx &\approx 0.1\Big(f(0+0.05)+f(0.1+0.05)+\cdots+f(0.9+0.05)\Big)\\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{0.05}}+\frac{1}{\sqrt{0.15}}+\frac{1}{\sqrt{0.25}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{0.95}}\Big) \approx 0.9045.\end{aligned}$$

دقت کنید که مقدار دقیق انتگرال برابر است با

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}\Big|_{x=a}^{x=1} = 1 - \lim_{a\to 0^+}\sqrt{a} = 1-0 = 1.$$

تمرین ۱۳. مقدار

$$\int_0^1 -\log(x)\sin(x)\ dx$$

را با استفاده از یک روش سه‌نقطه‌ای از نوع نیوتن–کوتز تقریب بزنید. (در اینجا منظور از $\log$، لگاریتم در مبنای عدد e است.)