Algèbre de base

Chapitre 6

Polynômes formels

Pré-requis

- ☐ Le corps $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ☐ Polynômes du second degré : racines réelles et complexes.
- ☐ Notation $\sum$ pour les sommes.

Objectifs

- ☐ Savoir identifier un polynôme.
- ☐ Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
- ☐ Connaître les opérations simples sur les polynômes : addition, multiplication et évaluation de polynômes.
- ☐ Savoir effectuer la division euclidienne de deux polynômes.
- ☐ Savoir décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Sommaire

Chapitre 6 - Séquence 1

Les polynômes formels

La notion de polynôme formel est une généralisation de la notion de polynôme vue au lycée. Celle-ci est introduite par l'utilisation des suites qui permet de définir simplement les opérations sur les polynômes.

1 Définitions

Définition : *Polynôme*

On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$, toute suite $P := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Les termes d'une telle suite sont appelés **coefficients du polynôme**.

Remarque

L'expression « tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang » signifie qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, appelé le **rang**, tel que si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n \geq N$ alors $a_n = 0$.
Autrement dit,

$$\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies a_n = 0.$$

Exemples – *Polynômes particuliers*

- ▷ Le polynôme $P := (0, 0, 0, \ldots)$ est appelé le **polynôme nul** et est noté simplement $P = 0$.
  Rigoureusement, celui-ci est défini par $P := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n := 0$.
- ▷ Tout polynôme $Q := (a, 0, 0, \ldots)$, avec $a \in \mathbb{K}$, est appelé un **polynôme constant**.
  Rigoureusement, celui-ci est défini par $Q := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $b_0 := a \in \mathbb{K}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n := 0$.

Définition : *Degré d'un polynôme*

Pour P un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$, le rang à partir duquel tous les termes sont nuls est appelé **degré** du polynôme et est noté $\deg(P)$. Autrement dit,

$$\deg(P) := \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}.$$

Par convention, si P est le polynôme nul, on pose $\deg(P) := -\infty$.

Exemples – *Degré de polynômes*

- ▷ Soit $P_0 := (a, 0, 0, \ldots)$, avec $a \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$, un polynôme constant. Alors $\deg(P_0) = 0$ (ne pas oublier que le premier terme est a_0).
- ▷ Soit $P_1 := (a, b, 0, 0, \ldots)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $b \neq 0$. Alors, P_1 est un polynôme de degré 1,

c'est-à-dire $\deg(P_1) = 1$.

- ▷ Soit $P_2 := (a, b, c, 0, 0, \dots)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $c \neq 0$. Alors, P_2 est un polynôme du second degré, c'est-à-dire $\deg(P_2) = 2$.
- ▷ Le polynôme $Q := (a_0, a_1, 0, 0, 0, a_5, 0, 0, \dots)$, avec $(a_0, a_1, a_5) \in \mathbb{K}^3$ et $a_5 \neq 0$, est de degré 5.

Définitions : *L'indéterminée X*

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit X^k de la façon suivante :

- ▷ si $k = 0$, X^k est le polynôme constant $(1, 0, 0, \dots)$ noté simplement 1,
- ▷ si $k = 1$, X^k est le polynôme $X := (0, 1, 0, 0, \dots)$ et est appelé l'**indéterminée** X,
- ▷ si $k \geq 2$, X^k est le polynôme $X^k := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que

$$a_k := 1 \quad \text{et} \quad a_n := 0 \text{ pour tout } n \neq k.$$

Remarque

De façon moins rigoureuse, on a par exemple :

- ▷ $X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$,
- ▷ $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$,
- ▷ $X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$.

Cette notation permet d'écrire les polynômes plus simplement sans les écrire comme des suites.

Exemples – *Notation des polynômes*

On reprend les polynômes vus dans l'exemple précédent.

- ▷ Soit $P_1 := (a, b, 0, 0, \dots)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $b \neq 0$. Alors,

$$P_1 = a\,(1, 0, 0, 0, \dots) + b\,(0, 1, 0, 0, \dots) = a + bX,$$

et $\deg(P_1) = 1$.

- ▷ Soit $P_2 := (a, b, c, 0, 0, \dots)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et $c \neq 0$. Alors,

$$P_2 = a\,(1, 0, 0, 0, \dots) + b\,(0, 1, 0, 0, \dots) + c\,(0, 0, 1, 0, 0, \dots) = a + bX + cX^2,$$

et $\deg(P_2) = 2$.

- ▷ Le polynôme $Q := (a_0, a_1, 0, 0, 0, a_5, 0, 0, \dots)$, avec $(a_0, a_1, a_5) \in \mathbb{K}^3$ et $a_5 \neq 0$, s'écrit

$$Q = a_0 + a_1 X + a_5 X^5,$$

et $\deg(Q) = 5$.

D'après la notation donnée précédemment et les exemples ci-dessus, on obtient une notation simple pour les polynômes.

Notation : *Polynôme de l'indéterminée X*

Soit $P \coloneqq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $N \in \mathbb{N}^*$. Alors, P s'écrit

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_N X^N = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k.$$

On dit alors que P est un **polynôme de l'indéterminée** X.
Le polynôme P peut aussi être noté $P(X)$.

Exemples — *Polynômes*

- ▷ $P \coloneqq 2 + 3X$ est un polynôme à coefficients réels, de degré 1.
- ▷ $P \coloneqq iX^2 + X^3$ est un polynôme à coefficients complexes de degré 3.

Remarque

Puisqu'un polynôme est une suite, l'égalité entre deux polynômes se déduit de l'égalité des suites.

Proposition : *Égalité de polynômes*

Soient $P \coloneqq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q \coloneqq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors, P et Q sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients. Autrement dit,

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad a_k = b_k.$$

Exemples — *Égalité de polynômes*

- ▷ Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, $P \coloneqq aX + bX^2 + cX^3 + dX^4$ et $Q \coloneqq 2X + 3X^3 + 5X^4$.
  Alors, $P = Q$ si et seulement si

  $$a = 2, \quad b = 0, \quad c = 3 \quad \text{et} \quad d = 5.$$

  On dit alors que l'on a déterminé a, b, c et d **par identification**.
- ▷ On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

  $$(a-1)X^2 + (a+b)X + b + c = 2X + 1.$$

  Par identification, on a :

  $$(a-1)X^2 + (a+b)X + b + c = 2X + 1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} a & - & 1 & = & 0, \\ a & + & b & = & 2, \\ b & + & c & = & 1. \end{array}\right.$$
- ▷ Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $P \coloneqq aX + bX^3$ et $Q \coloneqq 2X + X^2$. Alors, $P \neq Q$ car P ne contient pas de terme X^2.

Exercice 1.
Déterminer les réels a, b, c et d tels que les polynômes

$$P \coloneqq X^4 - X^3 + X^2 + 11X + 8 \quad \text{et} \quad Q \coloneqq aX^4 + (b+a)X^3 + (c+b)X^2 + (d+c)X + d$$

soient égaux.

2 L'espace $\mathbb{K}[X]$

Dans toute la suite, on notera les polynômes sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Notation

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes de l'indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque

Nous verrons plus tard que dans un polynôme, l'indéterminée X peut représenter un nombre réel, un nombre complexe, un polynôme, ou encore des matrices.

Important

Dans l'écriture $\mathbb{K}[X]$, la lettre X est une lettre réservée tout comme i est réservée dans $\mathbb{C}$. Il ne faut donc jamais écrire des phrases comme « *en posant* $X = \ldots$ » car cela n'a aucun sens.

Définitions

Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ donné par

$$P \coloneqq a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

Soit $k \in [\![0; n]\!]$.

- ▷ Le coefficient a_k est appelé **coefficient de degré** k.
- ▷ L'expression $a_k X^k$ est appelée le **terme de degré** k ou **monôme de degré** k.
- ▷ Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient de degré le plus élevé (égal au degré) est égal à 1.

Exemples

- ▷ Soit P le polynôme $P \coloneqq 3X + 10X^2 + 5X^3$.
  - Le coefficient de degré 0 de P est 0, tandis que celui de degré 2 est 10.
  - Le terme de degré 1 de P est $3X$.
  - P n'est pas unitaire car son coefficient de degré le plus élevé est 5 et non 1.
- ▷ Soit $P \coloneqq iX^2 + X^3$. Alors, $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = 3$ et P est unitaire car son terme de

degré 3 est X^3.

Définitions : *Opérations sur les polynômes*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ donnés par

$$P := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q := \sum_{k=0}^{n} b_k X^k.$$

▷ **La somme** de P et de Q est le polynôme, noté $P+Q$, donné par

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k.$$

▷ **Le produit par un scalaire** λ de P est le polynôme, noté λP, donné par

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k.$$

▷ **Le produit** de P et de Q est le polynôme, noté PQ donné par

$$PQ = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k.$$

Remarques

Les formules données précédemment se résument simplement :

▷ pour additionner deux polynômes, on effectue des additions terme à terme,

▷ pour la multiplication de deux polynômes, même si l'écriture ci-dessus parait complexe, il s'agit ni plus ni moins de développer des produits et de regrouper les termes de même degré.

Exemples – *Somme et produits*

Soient P et Q les deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ donnés par

$$P := 2 + 3X + 4X^2 \quad \text{et} \quad Q := X + iX^2 + 5X^3.$$

▷ La somme de ces deux polynômes est le polynôme $P+Q$ de $\mathbb{C}[X]$ donné par

$$(P+Q) = (2+0) + (3+1)X + (4+i)X^2 + (0+5)X^3 = 2 + 4X + (4+i)X^2 + 5X^3.$$

▷ Le produit de 3 par P est le polynôme $6 + 9X + 12X^2$.

▷ Le produit de ces deux polynômes est le polynôme PQ de $\mathbb{C}[X]$ donné par

$$\begin{aligned} PQ &= (2 + 3X + 4X^2)(X + iX^2 + 5X^3) \\ &= 2X + 2iX^2 + 10X^3 + 3X^2 + 3iX^3 + 15X^4 + 4X^3 + 4iX^4 + 20X^5 \\ &= 2X + (2i+3)X^2 + (14+3i)X^3 + (15+4i)X^4 + 20X^5. \end{aligned}$$

Proposition : *Degré de la somme et des produits*

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, on a

- $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

Exemples

On reprend l'exemple précédent.

- $\deg(P+Q) = 3 \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) = \deg(Q)$.
- $\deg(3P) = 2 = \deg(P)$.
- $\deg(PQ) = 5 = \deg P + \deg Q$.

Exercice 2.

Soient $P := X^2 + 1$ et $Q := X + 1$.

1) Calculer $P + Q$ et donner $\deg(P+Q)$.

2) Calculer PQ et donner $\deg(PQ)$.

Propriétés

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. **Propriétés de l'addition de polynômes**

(a) l'addition est commutative : $P + Q = Q + P$,

(b) l'addition est associative : $P + (Q + R) = (P + Q) + R$,

(c) l'addition vérifie : $P + 0 = 0 + P = P$,
on dit alors que le polynôme nul 0 *est un* **élément neutre** *pour l'addition,*

(d) tout polynôme admet un **opposé** *:* $P + (-P) = 0$, *où* $-P := (-1)P$.

2. **Propriétés de la multiplication par un scalaire**

(a) la multiplication par un scalaire vérifie $1\,P = P$,
on dit alors que 1 *est un* **élément neutre** *pour la multiplication par un scalaire,*

(b) la multiplication pas un scalaire est associative et commutative :

$$\lambda\,(\mu\,P) = (\lambda\mu)\,P = \mu\,(\lambda\,P).$$

3. **Distributivité entre l'addition et la multiplication par un scalaire**

$$\lambda\,(P+Q) = \lambda\,P + \lambda\,Q \qquad \text{et} \qquad (\lambda+\mu)\,P = \lambda\,P + \mu\,P.$$

Remarque

Il s'agit des mêmes propriétés que celles vues pour l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Pour cette raison, $\mathbb{K}[X]$ est lui-même un espace vectoriel (ce qui sera vu plus en détails au second semestre).

L'espace $\mathbb{K}[X]$ est muni de plus d'une multiplication (contrairement à $\mathbb{K}^n$), celle-ci lui confère les propriétés supplémentaires ci-dessous.

Propriétés

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. **Propriétés de la multiplication de polynômes**
   (a) *la multiplication est commutative :* $PQ = QP$,
   (b) *la multiplication est associative :* $(PQ)R = P(QR)$,
   (c) *le polynôme* $P_1 := 1$ *est l'élément neutre pour la multiplication :* $PP_1 = P$.
2. **Distributivité de l'addition et la multiplication de polynômes**

$$P(Q+R) = PQ + PR \quad \textit{et} \quad (P+Q)R = PR + QR.$$

Remarque

Les propriétés précédentes font de $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication un **anneau** (notion qui sera étudiée en deuxième année).

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ étant muni d'une multiplication, on peut définir les puissances d'un polynôme.

Définition : *Puissances d'un polynôme*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit les **puissances** de P par

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad P^k := PP^{k-1} \quad \text{et} \quad P^0 := 1.$$

La formule du binôme de Newton vue au chapitre précédent s'étend aux polynômes

Proposition : *Formule du binôme de Newton*

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}.$$

Exemples — *Puissances*

- ▷ Soit $P := 1 + X^2$. Alors

$$P^2 = (1+X^2)(1+X^2) = 1 + X^2 + X^2 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4.$$

- ▷ D'après la formule du binôme de Newton,

$$(2+X)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 X + 3 \times 2X^2 + X^3 = 8 + 12X + 6X^2 + X^3.$$

3 Composition et évaluation de polynômes

Au delà de la somme et du produit de deux polynômes on peut aussi les composer.

Définition : *Composition de polynômes*

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec

$$P \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors, on note $P(Q)$ le polynôme défini par

$$P(Q) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Exemple – *Composition de polynômes*

Soient $P \coloneqq X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q \coloneqq X + 1$. Alors,

$$P(Q) = (X+1)^3 + (X+1)^2 + (X+1) + 1.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$P(Q) = (X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + (X^2 + 2X + 1) + (X + 1) + 1 = X^3 + 4X^2 + 6X + 4.$$

Exercice 3.

Soit $P \coloneqq X^3$. Déterminer le polynôme $Q \coloneqq P(X+1) - P(X)$.

Un cas particulier de composition de polynômes est celui où le polynôme Q est constant.

Définition : *Évaluation*

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme constant $Q \coloneqq b \in \mathbb{K}$.
Le polynôme $P(Q)$ se note alors simplement $P(b)$ et on dit que $P(b)$ est la valeur de P en b.
Autrement dit, « évaluer P en b » signifie « calculer $P(b)$ ».

Exemple – *Évaluation*

Soit $P \coloneqq X^3 + X^2 + X + 1$. Évaluer P en -1 (ou calculer $P(-1)$) revient à substituer -1 à X dans l'expression de P.
Ainsi, $P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 1 + 1 = 0$. De même, $P(0) = 1$.

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

Si $P = Q$, alors on a

$$X^4 - X^3 + X^2 + 11X + 8 = aX^4 + (b+a)X^3 + (c+b)X^2 + (d+c)X + d.$$

Par identification, on obtient

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c - 3 \quad d = 8$$

Correction de l'Exercice 2.

1) On a

$$P + Q = X^2 + X + 2,$$

d'où $\deg(P+Q) = 2$.

2) On a

$$PQ = (X^2+1)(X+1) = X^3 + X^2 + X + 1$$

d'où $\deg(PQ) = 3$.

Correction de l'Exercice 3.

On a

$$Q(X) = P(X+1) - P(X) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.$$

Chapitre 6

Feuille d'exercices : Séquence 1

Exercice 1.

Soient $P \coloneqq 2X^2 - 3 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \coloneqq X^4 - 7X^3 + X - 5 \in \mathbb{K}[X]$.
Donner les polynômes $P + Q$, PQ et $P - 2Q$.

Exercice 2.

1) Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P \coloneqq 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$.
Écrire P avec la notation somme.

2) Même question avec $Q \coloneqq 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3$.

Exercice 3.

Déterminer le degré du polynôme $P \coloneqq (X + 1)^5 - 1 - X^5$.

Exercice 4.

Soient $P \coloneqq 2 + 3X + 4X^2$, $Q_1 \coloneqq X + iX^2 + 5X^3$ et $Q_2 \coloneqq 2i$, des polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Donner le degré des polynômes $P + Q_1$, PQ_1 et Q_2P.

Exercice 5.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $P + Q$ et donner $\deg(P + Q)$.

a) $P \coloneqq X^2 + 1$, $Q \coloneqq X + 1$

b) $P \coloneqq X^2 + 1$, $Q \coloneqq 2X^2 + 1$

c) $P \coloneqq X^2 + 1$, $Q \coloneqq -X^2 + 1$

2) Dans chacun des cas ci-dessous, calculer PQ et donner $\deg(PQ)$.

a) $P \coloneqq X^2 + 1$, $Q \coloneqq -X^2 + X - 1$

b) $P \coloneqq X^4 + 1$, $Q \coloneqq -X$

c) $P \coloneqq X^3 + 1$, $Q \coloneqq 2$

Exercice 6.

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

1) Montrer que $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Que dire si $\deg(P) \neq \deg(Q)$?

2) Montrer que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exercice 7.

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$. En raisonnant sur les degrés, montrer que si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 8.

Trouver le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que :

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4.$$

Exercice 9.

On cherche s'il existe un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

1) Montrer que $2X^2 + 3X + 1 = 2(X+1)(X+\frac{1}{2})$.

2) On suppose qu'il existe un polynôme P de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

- **a)** Donner $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ $P(3)$.
- **b)** En déduire un système de 4 équations dont les inconnues sont les coefficients de P.
- **c)** En déduire P.

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 10.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \coloneqq P(X+1) - P(X)$.

1)
- **a)** Exprimer Q lorsque P est un polynôme de degré 0, de degré 1, de degré 2 et comparer $\deg(Q)$ et $\deg(P)$ sur ces trois cas particuliers.
- **b)** Formuler un résultat général reliant $\deg(Q)$ et $\deg(P)$ si $\deg(P) \geq 1$ et démontrer ce résultat.

2)
- **a)** Donner une expression du polynôme $R \coloneqq Q(X+1) - Q(X)$.
- **b)** Donner une expression analogue pour $S \coloneqq R(X+1) - R(X)$.
- **c)** Que peut-on dire du polynôme S lorsque $\deg(P) = 2$, puis lorsque $\deg(P) = 3$?

3) Montrer que pour tout polynôme P de degré 3, on a :

$$P(X+4) + 6P(X+2) + P(X) = 4(P(X+3) + P(X+1)).$$

4) Application.
Existe-t-il un polynôme P de degré 3 vérifiant :
$P(-3) = P(-1) = P(1)$ et $P(-2) = P(0)$?

Chapitre 6 - Séquence 2

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

4 Division euclidienne

Il existe sur $\mathbb{K}[X]$ une division euclidienne analogue à celle de $\mathbb{Z}$. Elle est présentée par le théorème suivant.

Théorème : *Théorème de la division euclidienne*

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B.$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le **quotient** *et le* **reste** *de la division euclidienne de A par B.*

Remarque

Avec les notations du théorème, on dit aussi que

- ▷ A est le **dividende** (c'est le polynôme divisé),
- ▷ B est le **diviseur** (c'est le polynôme qui divise).

Exemples

- ▷ On a
$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X-2)(X^2+1) + 2X.$$
Puisque $\deg(2X) = 1 < 2 = \deg(X^2+1)$,
  - $X - 2$ est le quotient,
  - $2X$ est le reste,

  de la division euclidienne de $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ par $X^2 + 1$.
- ▷ On a
$$X^2 - 2X + 2 = (X-1)(X-2) + X.$$
Puisque $\deg(X) = 1 = \deg(X-1) = \deg(X-2)$, X n'est
  - ni le reste de la division euclidienne de $X^2 - 2X + 2$ par $X - 1$,
  - ni celui de la division euclidienne de $X^2 - 2X + 2$ par $X - 2$.

Exemple – *Méthode de division euclidienne*

Effectuons la division euclidienne de $A \coloneqq 2X^3 + 1 \in \mathbb{K}[X]$ par $B \coloneqq X^2 + 1 \in \mathbb{K}[X]$.

1) On pose la division :

- ▷ le dividende, $2X^3+1$, à gauche,
- ▷ le diviseur, X^2+1, à droite,

où les deux polynômes sont rangés selon les puissances décroissantes.
Remarquons aussi qu'à gauche, on a prévu de la place pour tous les termes de chaque degré.

$$\begin{array}{cccc|cc} 2X^3 & +0X^2 & +0X & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{5-6} & & & & & \end{array}$$

2) On ne considère que les deux termes de plus haut degré (en bleu) et on fait la division de ces deux termes :

$$2X^3 = (X^2)(\mathbf{2X}).$$

$$\begin{array}{cccc|cc} \mathbf{2X^3} & & & +1 & \mathbf{X^2} & +1 \\ \cline{5-6} & & & & \mathbf{2X} & \end{array}$$

3) On multiplie X^2+1 par $2X$:

$$(2X)(X^2+1) = \mathbf{2X^3} + \mathbf{2X}.$$

$$\begin{array}{cccc|cc} 2X^3 & & & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{5-6} -(\mathbf{2X^3} & +0X^2 & +\mathbf{2X}) & & 2X & \end{array}$$

4) On fait la soustraction et on obtient un premier reste

$$R_1 = \mathbf{-2X+1}.$$

$$\begin{array}{ccccc|cc} & 2X^3 & & & +1 & X^2 & +1 \\ \cline{6-7} - & (2X^3 & +0X^2 & +2X & +0) & 2X & \\ \cline{2-5} & +0X^3 & +0X^2 & \mathbf{-2X} & \mathbf{+1} & & \end{array}$$

5) Si $\deg(R_1) < \deg(B)$, on s'arrête (ce qui est le cas ici) et on a :

$$\underbrace{2X^3+1}_{A} = \underbrace{(X^2+1)}_{B}\underbrace{(2X)}_{Q} + \underbrace{(-2X+1)}_{R}.$$

Sinon, on refait la division de ce reste par B et cela jusqu'à ce que l'on obtienne un reste de degré strictement inférieur à $\deg(B)$.

Exemple

Effectuons maintenant la division euclidienne de $A := X^5+2X^4+3X^3+2X^2+3X+2$ par $B := X^3+X+1$.

$$\begin{array}{ccccccccc|ccc} & & X^5 & +2X^4 & +3X^3 & +2X^2 & +3X & +2 & & X^3 & +X & +1 \\ \cline{10-12} & - & (X^5 & +0X^4 & +X^3 & +X^2 & +0X & +0) & & X^2 & & \\ \cline{3-8} (R_1) & & & 2X^4 & +2X^3 & +X^2 & +3X & +2 & & & +2X & \\ & & - & (2X^4 & +0X^3 & +2X^2 & +2X & +0) & & & & \\ \cline{4-8} (R_2) & & & & 2X^3 & -X^2 & +X & +2 & & & & +2 \\ & & & - & (2X^3 & +0X^2 & +2X & +2 & & & & \\ \cline{5-8} (R) & & & & & -X^2 & -X & & & & & \end{array}$$

$$\underbrace{X^5+2X^4+3X^3+2X^2+3X+2}_{A} = \underbrace{(X^3+X+1)}_{B}\underbrace{(X^2+2X+2)}_{Q} + \underbrace{(-X^2-X)}_{R}.$$

Exercice 1.

Faire la division euclidienne de $X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ par X^4+X^2.

Définition : *Polynôme divisible*

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que le polynôme A est **divisible par** le polynôme B ou que le polynôme B **divise** le polynôme A, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ,$$

ou encore si le reste de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul.

Remarque

Avec les notations de la définition précédente, si A et B sont non nuls alors $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q)$, implique $\deg(B) \leq \deg(A)$.

Exemples

Le polynôme $X^2 + 1$ divise le polynôme $X^3 - X^2 + X - 1$ car en effectuant la division euclidienne de $X^3 - X^2 + X - 1$ par $X^2 + 1$, on obtient :

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X^2 + 1).$$

Exercice 2.

Montrer que le polynôme $X^3 + 27$ est divisible par le polynôme $X + 3$.

5 Racines d'un polynôme

Définition : *Racine*

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. On dit que x_0 est **racine** de P si :

$$P(x_0) = 0.$$

Autrement dit, si l'évaluation de P en x_0 est égale à 0.

Exemple

Le polynôme $P \coloneqq X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire

$$P = (X - 1)^2(X^2 + 1).$$

Il admet ainsi pour racines les nombres 1 et i puisque les polynômes $X - 1$ et $X^2 + 1$ s'annulent respectivement en 1 et i.

Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. Alors,

x_0 est racine de P si et seulement si le polynôme $(X - x_0)$ divise P.

Remarques

- ▷ Si x_0 est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$, alors nécessairement, $x_0 \in \mathbb{K}$.
  Par exemple, si $P := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ (vu comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$), alors i n'est pas une racine de P bien que l'on ait $P(i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
- ▷ Si x_0 est racine de P, alors P s'écrit $P = (X - x_0)Q$, où Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X - x_0)$.

Exemples

- ▷ Soit $P := a_0 + a_1X \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 1 ($a_1 \neq 0$). Alors, son unique racine est $x_0 = -\dfrac{a_0}{a_1}$ et on a $P = a_1(X - x_0)$.
- ▷ Soit $P := X^2 - 1 \in \mathbb{K}[X]$. Il est clair que les seules racines de P sont -1 et 1 :
$$P = (X - 1)(X + 1).$$
- ▷ Soit $P := X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{K}[X]$. On vérifie aisément que 1 est racine de P. Alors, en effectuant la division euclidienne de P par $X - 1$, on a $P = (X - 1)(X^2 + 1)$.
  - Si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X - 1)(X^2 + 1)$.
  - Si $\mathbb{K} := \mathbb{C}$, $P = (X - 1)(X - i)(X + i)$.

Définitions : *Ordre de multiplicité*

Soient $k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$.

- ▷ On dit que x_0 est **racine d'ordre de multiplicité** k de P si $(X - x_0)^k$ divise P et $(X - x_0)^{k+1}$ ne divise pas P, c'est-à-dire il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$$P = (X - x_0)^k Q \quad \text{et} \quad Q(x_0) \neq 0.$$
- ▷ On dit que x_0 est **racine simple** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 1.
- ▷ On dit que x_0 est **racine double** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 2.
- ▷ On dit que x_0 est **racine triple** de P si x_0 est racine d'ordre de multiplicité 3.

Remarque

L'ordre de multiplicité d'une racine $x_0 \in \mathbb{K}$ d'un polynôme P est le plus grand entier k tel que $(X - x_0)^k$ divise P.

Exemples

- ▷ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 2 et soit Δ son discriminant.
  - Si $\Delta > 0$, P a deux racines simples.
  - Si $\Delta = 0$, P a une racine double.
  - Si $\Delta < 0$, P n'a pas de racine.
- ▷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2 et soit Δ son discriminant.
  - Si $\Delta \neq 0$, P a deux racines simples.
  - Si $\Delta = 0$, P a une racine double.

▷ Le polynôme $P \coloneqq (X-2)(X-1)^2(X+2)^3$ admet

- 2 pour racine simple,
- 1 pour racine double,
- -2 pour racine triple.

Le nombre de racines d'un polynôme est lié à son degré comme le montre le résultat suivant.

Proposition

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P admet au plus n racines (comptées avec multiplicité) dans $\mathbb{K}$.

Remarques

▷ Le seul polynôme admettant une infinité de racines est par conséquent le polynôme nul.

▷ L'expression « comptées avec multiplicité » signifie qu'une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ est comptée k fois (une racine simple n'est comptée qu'une fois, une racine double est comptée deux fois, etc.)

Exemple

Soit $P \coloneqq (X-1)^2(X^2+1) \in \mathbb{K}[X]$. Alors, $\deg(P) = 4$.

▷ Si $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{R}$, P n'admet que 1 pour racine et 1 est une racine double. Le nombre de racines de P est donc $2 < \deg(P)$.

▷ Si $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{C}$, $P = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ donc P admet 1 pour racine double et a deux racines simples : i et $-i$. Donc le nombre de racines de P est $2+1+1 = 4 = \deg(P)$.

Dans le dernier exemple, le nombre de racines du polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est égal à son degré. Ce résultat est vrai pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ d'après le théorème fondamental ci-dessous.

Théorème : *d'Alembert-Gauss*

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.
En particulier, tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet exactement n racines (comptées avec multiplicité) dans $\mathbb{C}$.

Pour pouvoir déterminer toutes les racines d'un polynôme, il n'existe pas de formule générale (à l'instar du discriminant des polynômes de degré 2). Néanmoins, il est possible de déterminer toutes les racines à partir des racines évidentes (définies ci-dessous) et de la division euclidienne.

Définition : *Racine évidente*

L'expression **racine évidente** d'un polynôme P désigne toute racine de P que l'on peut trouver sans faire appel à une méthode élaborée.
En général, une racine évidente est trouvée par tentative en évaluant P en certaines valeurs dites simples de X (par exemple, 0, ± 1, ou ± 2 ou $\pm i$).

Exemple – *Racines évidentes*

Soit $P \coloneqq X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X \in \mathbb{R}[X]$.

- ▷ On cherche une racine évidente de P : $P(0) = 0$ donc 0 est une racine de P.
- ▷ On factorise P par $X - 0 = X$, on obtient

$$P = X \underbrace{\left(X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1\right)}_{Q_1}.$$

- ▷ En évaluant Q_1 en 1, on obtient que 1 est racine évidente de Q_1. On effectue alors la division euclidienne de Q_1 par $X - 1$ et on obtient :

$$X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 = (X-1)\underbrace{\left(X^3 - X^2 + X - 1\right)}_{Q_2}.$$

- ▷ En évaluant encore Q_2 en 1, on obtient que 1 est racine évidente de Q_2. Alors, en effectuant la division euclidienne de Q_2 par $X - 1$, on a encore :

$$X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1).$$

- ▷ Or $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$.
- ▷ Au final, on a :

$$P = X(X-1)^2(X^2+1).$$

  Ainsi, les racines de P sont 0 qui est racine simple et 1 qui est racine double (en particulier, P, qui est de degré 5, a 3 racines dans $\mathbb{R}$ comptées avec multiplicité).

Exercice 3.

Trouver toutes les racines de $X^6 + 2X^5 - 2X^3 - X^2$.

6 Décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles

Définition : *Polynôme irréductible*

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme non constant, $P \in \mathbb{K}[X]$, n'ayant comme diviseurs que des polynômes constants et les polynômes λP, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Exemples

- ▷ $P \coloneqq 3X + 3$ est un polynôme irréductible.
- ▷ $P \coloneqq X^2 + 2X + 1$ n'est pas irréductible car il s'écrit $P = (X+1)^2$.
- ▷ $P \coloneqq X^2 + 1$ est irréductible en tant qu'élément de $\mathbb{R}[X]$ **mais** n'est pas irréductible en tant qu'élément de $\mathbb{C}[X]$ puisqu'il est égal à $(X+i)(X-i)$.

Le dernier exemple montre qu'il est important ici de distinguer les cas $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{C}$.

Théorème

- ▷ *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
- ▷ *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminants strictement négatifs.*

Exemples

- ▷ Le polynôme $2X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ car il est de degré 1.
- ▷ Le polynôme $X^2 - 2X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car son discriminant est négatif, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ car il n'est pas de degré 1.

Remarque

Les polynômes irréductibles jouent le même rôle dans $\mathbb{K}[X]$ que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, par analogie avec la décomposition d'un nombre en produit de nombres premiers, les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ peuvent se décomposer en produit de polynômes irréductibles.

Théorème : *Décomposition en polynômes irréductibles*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant.
Alors, P s'écrit de manière unique sous la forme suivante :

$$P = \prod_{k=1}^{p} P_k^{m_k},$$

où, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $m_k \in \mathbb{N}^*$ et P_k est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$.
On dit que P est décomposé en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.

Exemples

- ▷ Soit $P := X^3 - X^2 + X - 1$. On remarque que 1 est racine évidente de P. En factorisant par $X - 1$, on obtient
$$P = (X^2 + 1)(X - 1).$$
Le polynôme $X - 1$ est de degré 1 donc irréductible. Il suffit alors d'étudier $X^2 + 1$ suivant si $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.
  - Dans $\mathbb{R}[X]$, puisque $X^2 + 1$ a un discriminant négatif, il est irréductible. La décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P = (X^2 + 1)(X - 1)$.
  - Dans $\mathbb{C}[X]$, $X^2 + 1$ n'est pas de degré 1 donc n'est pas irréductible. Mais
  $$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$
  et $X - i$, $X + i$ sont irréductibles.
  On en déduit que la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est $P = (X - i)(X + i)(X - 1)$.
- ▷ Soit $P := (X - 1)(X^2 - 3X + 2) \in \mathbb{R}[X]$. Puisque $X - 1$ est irréductible, pour obtenir la décomposition de P il suffit de considérer $X^2 - 3X + 2$. Ce polynôme a pour discriminant 1 et a deux racines simples : 1 et 2. Ainsi, la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ (mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$) est
$$P = (X - 1)(X - 1)(X - 2) = (X - 1)^2(X - 2).$$

Avec les notations du théorème on a

$$p = 2, \quad P_1 = X - 1, \quad P_2 = X - 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 1.$$

Correction des exercices

Correction de l'Exercice 1.

On a

$$X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^4 + X^2)(X^2 + X + 1) + (X + 1).$$

Correction de l'Exercice 2.

On effectue la division euclidienne de $X^3 + 27$ par $X + 3$, ce qui donne

$$X^3 + 27 = (X + 3)(X^2 - 3X + 27).$$

Puisque le reste est nul, on en déduit que $X^3 + 27$ est divisible par le polynôme $X + 3$.

Correction de l'Exercice 3.

On a

$$X^6 + 2X^5 - 2X^3 - X^2 = X^2(X^4 + 2X^3 - 2X - 1).$$

Le polynôme $X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ a pour racine évidente 1. En effectuant la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 - 2X - 1$ par $X - 1$, on obtient

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X - 1)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1),$$

d'où

$$X^6 + 2X^5 - 2X^3 - X^2 = X^2(X - 1)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1).$$

Le polynôme $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ a pour racine évidente -1. En effectuant la division euclidienne de $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ par $X + 1$, on obtient

$$X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)(X^2 + 2X + 1) = (X + 1^3),$$

d'où

$$X^6 + 2X^5 - 2X^3 - X^2 = X^2(X - 1)(X + 1^3).$$

On en déduit que $X^6 + 2X^5 - 2X^3 - X^2$ a pour racines : 0 (racine double), -1 (racine triple) et 1 (racine simple).

Chapitre 6

Feuille d'exercices : Séquence 2

Exercice 1.

Effectuer la division euclidienne de A par B :

1) $A := 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B := X^2 + 2X + 3$

2) $A := 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B := X^3 + X + 2$

3) $A := X^4 - X^3 + X - 2,\ B := X^2 - 2X + 4$

4) $A := X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B := X^2 - 5X + 4$

Exercice 2.

Justifiez le fait que $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ divise $P_1 \in \mathbb{K}[X]$ dans les cas suivants :

1) $P_0(X) := X + 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) := -X^2 + 2X + 3,$

2) $P_0(X) := X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) := 2X^3 + X^2 + X - 1,$

3) $P_0(X) := X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) := X^4 + X^3 - X - 1.$

Exercice 3.

À quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4.

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le polynôme

$$P(X) := X^3 + \lambda X^2 + (\lambda + 1)X + \lambda + 2 \in \mathbb{K}[X]$$

est-il divisible par $(X + 3)$?

Exercice 5.

Soit $P(X) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont tous les coefficients sont réels et soit α une racine de P. Montrer que $\bar{\alpha}$ est une racine de P.

Exercice 6.

Soit $P(X) := \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **polynôme dérivé** de P, le polynôme P' défini par :

$$P'(X) := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Soit P un polynôme $\mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P, $m \geq 2$.

1) Exprimer grâce au cours, P en fonction de α et de m.

2) Montrer que α est une racine d'ordre $m - 1$ de P' le polynôme dérivée de P sur $\mathbb{K}$.

Exercice 7.

On considère le polynôme $P(X) \coloneqq 2X^3 + 3X^2 - 8X + 3 \in \mathbb{K}[X]$.

1) Calculer $P(1)$.

2) En déduire la factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 8.

Décomposer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ci-dessous en facteurs irréductibles pour $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{R}$, puis pour $\mathbb{K} \coloneqq \mathbb{C}$.

1) $2X^3 - 3X^2 - 5X + 6$.

2) $X^4 - 1$.

3) $X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$.

4) $X^3 - 27$.

Exercice 9.

Dans cet exercice, on souhaite décomposer un polynôme en produit de polynômes irréductibles.

1) Effectuer la division euclidienne de $P(X) \coloneqq X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6 \in \mathbb{R}[X]$ par $Q(X) \coloneqq X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$.

2) Calculer $Q(X) + 1$. Montrer que P est un polynôme de degré 2 en $Q(X)$.

3) Décomposer le polynôme $Y^2 + Y - 6$ dans $\mathbb{R}[Y]$.

4) En déduire une expression de P en produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ du second degré.

5) Donner la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 1.

1) Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant qui divise P. Donner $\deg(B)$.

2) On note Q le quotient de la division euclidienne de P par B. Donner $\deg(Q)$.

3) En déduire que P est irréductible.

Exercice 11.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$.

1) Montrer que P admet au moins une racine complexe x_0.

2) En déduire un polynôme Q diviseur de P.

3) En déduire que P n'est pas un polynôme irréductible.