

强化段考测试卷-数学一

考试时间：180 分 总分：150 分

校区：_____ 班级：_____ 姓名：_____ 得分：_____

一、选择题（1-10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在答题纸指定位置上。）

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$ 可导，则 () .

(A) $a = 2, b = 1$ (B) $a = 2, b = -1$ (C) $a = -2, b = 1$ (D) $a = -2, b = -1$

(2) 一元函数 $f(x)$ 的下列 4 个性质：

- ① $f(x)$ 在上 $[a, b]$ 连续；
- ② $f(x)$ 在上 $[a, b]$ 可积；
- ③ $f(x)$ 在上 $[a, b]$ 可导；
- ④ $f(x)$ 在上 $[a, b]$ 存在原函数.

以 $P \Rightarrow Q$ 表示性质 P 推出 Q ，则有 () .

(A) $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ (B) $3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4)$
(C) $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 4)$ (D) $4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$

(3) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + x[f'(x)]^2 = \sin x$ ，且 $f'(0) = 0$ ，则 () .

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- (C) 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻域，曲线 $y = f(x)$ 是凹的，右侧邻域曲线 $y = f(x)$ 是凸的
- (D) 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻域，曲线 $y = f(x)$ 是凸的，右侧邻域曲线 $y = f(x)$ 是凹的

(4) 设 $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ ， $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，则下列命题正确的是 () .

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 敛散性都不定

(5) 设 A, B 是 n 阶可逆矩阵，且 $AB = A + B$ ，则下列关系中不正确的是 () .

- (A) $|A + B| = |A||B|$ (B) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (C) $(A - E)x = 0$ 只有零解 (D) $B - E$ 不可逆

(6) 已知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，其中 A 为 n 阶矩阵， P 为 n 阶可逆矩阵，则下列四个向量组中是 $Ax = 0$ 的基础解系的为 ()

- (A) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等价向量组 (B) $\xi_1, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_2 + \xi_3$
- (C) $P\xi_1, P\xi_2, P\xi_3$ (D) $(PA)x = 0$ 的一个基础解系

(7) 设 $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$ ，则以下结论正确的个数是 () .

- ① A 相似于 B ② A, B 合同 ③ A, B 等价 ④ $|A| = |B|$
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(8) 设 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ ，对于任意实数 μ ，则下列命题正确的是 () .

- (A) $P(X > \mu) = P(X \leq \mu)$ (B) $\mu X \sim N(0, \mu^2 \sigma^2)$
- (C) $X + \mu \sim N(\mu, \mu^2 + \sigma^2)$ (D) $P(X < \mu) = 1 - P(X < -\mu)$

(9) 将长度为 1 米的木棒任意截成三段，前两段的长度分别为 X 和 Y ，则 X 和 Y 的相关系数为 ()

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$

(10) 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，统计量

$T = \frac{2(X_1 + X_2 + \dots + X_4)}{\sqrt{X_5^2 + X_6^2 + \dots + X_n^2}}$ 服从 t 分布，则容量 $n =$ () .

(A) 10 (B) 15 (C) 18 (D) 20

二、填空题（11-16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上。）

(11) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{e^{2x}-1} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x} = 2$, 则曲线 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $\begin{cases} x=2t+|t|, \\ y=5t^2+4t|t|, \end{cases}$ 则当 $t=0$ 时导数 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) L 为圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 的正向, 计算曲线积分

$I = \int_L (1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}) dx + (\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}) dy \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 设 A 是 n 阶矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, 满足关系 $A^2\xi = 2\xi$, $A^3\xi = 3\xi$, 则 A 一定有特征值 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 设随机变量 X 的分布律是 $P\{X=n+1\} = \frac{1}{3} \times P\{X=n\} (n=1, 2, \dots)$,

则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题（17-22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17) (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$. 证明:

① 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使 $(\xi-1)f(\xi) = \xi f(1-\xi)$;

② 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\eta f(x) dx = 0$.

(18) (本小题满分 12 分)

求 $|z|$ 在约束条件下 $\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$ 的最大值与最小值.

(19) (本小题满分 12 分)

计算 $I = \iiint_{\Sigma} -y dz dx + (z+1) dx dy$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

(20) (本小题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n (n=1, 2, \dots)$,

试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1} \right)$.

(21) (本小题满分 12 分)

设 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$, 其中 α, β 是互相正交的 3 维单位列向量.

① 求 $|A|$;

② 验证 $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ 是 A 的特征向量;

③ 证明 A 与 Λ 相似, 并求 Λ .

(22) (本小题满分 12 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & -1 < x < 0 \\ \beta, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 α, β 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

$-0.5, 0.3, -0.2, -0.6, -0.1, 0.4, 0.5, -0.8$, 求 α 的矩估计值和最大似然估计值.