Atividade 1: Revisão de probabilidade
FT043 (Fundamentos de ciência de dados)

Bruna Henrique Nunes - RA 197225

1) a) Calcule a probabilidade do sistema funcionar.

Sejam as probabilidades de os elementos funcionarem dados por:

$P(A) = \alpha$, $P(C) = r$

$P(B) = \beta$

A probabilidade de o sistema funcionar é dada por:

$P(func) = 1 - P(\overline{func})$, onde $P(\overline{func})$ é a probabilidade de o sistema não funcionar.

De acordo com o enunciado, para que o sistema funcione, é necessário que exista pelo menos 1 circuito fechado. Verificando as possibilidades de circuitos ABERTOS, temos:

$\bar{A} \cap \bar{C} \cap \bar{B} = (1-\alpha)(1-\beta)(1-r)$

$\bar{A} \cap C \cap \bar{B} = (1-\alpha) \cdot r \cdot (1-\beta)$

$A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = \alpha \cdot (1-r) \cdot (1-\beta)$

As falhas ocorrem de forma independente.

29/08/24

Calculando a probabilidade:

$$P(func) = 1 - [(1-\alpha)(1-\beta)(1-r) + (1-\alpha)(1-\beta)r + \alpha(1-r)(1-\beta)$$

$$= 1 + (\beta - 1)[(1-\alpha)(1-r) + r(1-\alpha) + \alpha(1-r)]$$

Substituindo valores:

$\alpha = 82\%$ $\quad 1-\alpha = 0{,}18$

$\beta = 50\%$ $\quad 1-\beta = 0{,}5$

$r = 75\%$ $\quad 1-r = 0{,}25$

$$P(func) = 1 + (-0{,}5)[0{,}18 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}18 + 0{,}82 \cdot 0{,}25]$$

$$P(func) = 0{,}8075 = 80{,}75\%$$

b) $P(C|func) = P(func|C) \cdot \dfrac{P(C)}{P(func)}$

mas $P(func|C) = \dfrac{P(func \cap C)}{P(C)}$

Logo:

$$P(C|func) = \frac{P(func \cap C)}{\cancel{P(C)}} \cdot \frac{\cancel{P(C)}}{P(func)} = \frac{P(func \cap C)}{P(func)}$$

A probabilidade da interseção dos eventos funciona e C estar funcionando é dada por:

Funciona	C funciona
$A \cap C \cap B$	$A \cap C \cap B$ ✓
$\bar{A} \cap C \cap B$	$\bar{A} \cap C \cap B$ ✓
$A \cap \bar{C} \cap B$	$A \cap C \cap \bar{B}$ ✓
$A \cap C \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap C \cap \bar{B}$
$\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$	

$$P(func \cap C) = \alpha r \beta + (1-\alpha) r \beta + \alpha r (1-\beta)$$
$$= 0,82 \cdot 0,75 \cdot 0,5 + 0,18 \cdot 0,75 \cdot 0,5 + 0,82 \cdot 0,75 \cdot 0,5$$
$$P(func \cap C) = 0,6825$$

Portanto:

$$P(C|func) = \frac{0,6825}{0,8075} \approx 0,8452 = 84,52\%$$

c) $P(B|func) = P(func|B) \cdot \dfrac{P(B)}{P(func)}$

mas $P(func|B) = \dfrac{P(func \cap B)}{P(B)}$

Dessa forma:

$$P(B|func) = \frac{P(func \cap B)}{P(func)}$$

Para os cenários em que B funciona, temos:

B funciona

$A \cap C \cap B$

$\bar{A} \cap \bar{C} \cap B$

$\bar{A} \cap C \cap B$

$A \cap \bar{C} \cap B$

, que estão todos contidos nos possíveis cenários em que o sistema funciona. Logo,

$$P(func \cap B) = \alpha r \beta + (1-\alpha)(1-r)\beta + (1-\alpha) r \beta + \alpha (1-r) \beta$$
$$= \beta\left[\cancel{\alpha r} + (1-\alpha)(1-r) + r(1-\alpha) + \alpha - \cancel{\alpha r}\right]$$
$$= \beta\left[\alpha + (1-\alpha)(1 - \cancel{r} + \cancel{r})\right]$$
$$= \beta\left[\alpha + 1 - \alpha\right] = \beta$$

29/08/24

Sendo assim:

$$P(B|func) = \frac{\beta}{P(func)} = \frac{0,5}{0,8075} = 0,6192 = 61,92\%$$

d) $P(func|A) = P(A|func) \cdot \frac{P(func)}{P(A)}$

mas $P(A|func) = \frac{P(A \cap func)}{P(func)}$

Logo:

$$P(A|func) = \frac{P(A \cap func)}{P(A)}$$

A funcionar:

$A \cap C \cap B$ ✓

$A \cap \overline{C} \cap B$ ✓

$A \cap C \cap \overline{B}$ ✓

$A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$

Sendo Assim:

$$\begin{aligned} P(A \cap func) &= \alpha r \beta + \alpha(1-r)\beta + \alpha r(1-\beta) \\ &= \cancel{\alpha r \beta} + \alpha\beta - \cancel{\alpha r \beta} + \alpha r - \alpha r \beta \\ &= \alpha(\beta - r\beta + r) \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} P(A \cap func) &= 0,82(0,5 - 0,5 \cdot 0,75 + 0,75) \\ &= 0,7175 \end{aligned}$$

Logo:

$$P(func|A) = \frac{0,7175}{0,82} = 0,875 = 87,50\%$$

2) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = ?$

Pela probabilidade condicional:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) \qquad (I)$$

Dessa forma: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_4 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Aplicando (I):

$$P(A_4 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) . P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

De forma similar:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \cap A_1 \cap A_2)$$

Utilizando (I) novamente:

$$P(A_3 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_3 | A_1 \cap A_2) . P(A_1 \cap A_2)$$

Sabendo que $P(A_1 \cap A_2)$ pode ser reescrito por (I):

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 | A_1) . P(A_1)$$

Logo, Substituindo:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) . P(A_3 | A_1 \cap A_2) . P(A_2|A_1) P(A$$