Bruna Henrique Neves
RA: 197225

1 - a) Determine α de modo que a probabilidade de o circuito funcionar seja superior a 80%.

$P(A) = 92\% = \gamma$
$P(B) = 85\% = \beta$
$P(C) = \alpha = \alpha$

Para o circuito temos 2^3 possíveis configurações.

Entrada	Saída
$A \cap B \cap C$	funciona
$\bar{A} \cap B \cap C$	funciona
$A \cap \bar{B} \cap C$	funciona
$A \cap B \cap \bar{C}$	ñ funciona
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$	ñ funciona
$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$	ñ funciona
$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	ñ funciona
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	ñ funciona

onde $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ são os eventos onde os dispositivos não funcionam.

Pela probabilidade complementar:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$
$P(\bar{C}) = 1 - P(C)$

Como estamos tratando de eventos independentes:

$$P(\text{funcionar}) = r\beta\alpha + (1-r)\beta\alpha + r(1-\beta).\alpha$$
$$= \cancel{r\beta\alpha} + \beta\alpha - r\beta\alpha + r\alpha - \cancel{r\beta\alpha}$$
$$= \alpha(\beta + r - \beta r)$$

Para $P(\text{funcionar}) > 80\%$:

$$\alpha(\beta + r - \beta r) > 0{,}8 \therefore \alpha > \frac{0{,}8}{\beta + r - \beta r}$$

Substituindo por valores numéricos:

$$\alpha > \frac{0{,}8}{0{,}85 + 0{,}92 - 0{,}85 \cdot 0{,}92} \quad \therefore \alpha > 0{,}8097$$

Logo, precisamos de $P(C) > 0{,}8097$ //

B) Para um valor de $\alpha = 90\%$, obtenha a probabilidade de B funcionar, dado que o sistema funciona.

Pela regra de Bayes:

$$P(B|\text{funcionar}) = P(\text{funcionar}|B) \cdot \frac{P(B)}{P(\text{funciona})}$$

mas $P(\text{funcionar}|B) = \dfrac{P(\text{funcionar} \cap B)}{P(B)}$

Logo $P(B|\text{funcionar}) = \dfrac{P(\text{funciona} \cap B)}{P(\text{funciona})}$

Da contagem de configurações, para $P(\text{funcionar} \cap B)$, temos:

$$P(\text{funciona} \cap B) = r\beta\alpha + (1-r)\beta\alpha$$

e do resultado anterior, para $P(\text{funcionar})$:

$$P(B \mid \text{funcionar}) = \frac{r\beta\alpha + (1-r)\beta\alpha}{\alpha(\beta + r - \beta r)}$$
$$= \frac{\cancel{\alpha}(\cancel{r\beta} + \beta - \cancel{r\beta})}{\cancel{\alpha}(\beta + r - \beta r)}$$

Dessa forma:

$$P(B \mid \text{funcionar}) = \frac{\beta}{\beta + r - \beta r} = \frac{1}{1 - r + \frac{r}{\beta}}$$

Substituindo valores:

$$P(B \mid \text{funcionar}) = \frac{1}{1 - 0{,}92 + \frac{0{,}92}{0{,}85}} \cong 0{,}8603$$

Logo, a probabilidade de B funcionar dado que o sistema funciona é de 86,03%

2) a) Obtenha um intervalo de confiança, de nível de confiança 92%, para a estimação do gasto médio anual dos clientes do aplicativo. Determine a respectiva margem de erro.

$\sigma_{população} = 100$ reais $= \sigma_x$
$n = 121$ clientes
$E_{amostra} = 645$ reais $= M$

Para o cálculo do intervalo de confiança, temos:

$$P\left(M - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \le \mu_x \le M + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

onde a margem de erro (ME) é dada por: $M_E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$

Substituindo valores:

$$P\left(645 - Z_{\alpha/2}\cdot\frac{100}{\sqrt{121}} \le \mu_x \le 645 + Z_{\alpha/2}\cdot\frac{100}{\sqrt{121}}\right)$$

Precisamos agora encontrar o z crítica que corresponda a uma área de 92%. Como a curva normal é simétrica, precisamos de z tal que a área seja 96% ou 0,96. Utilizando python, vemos que esse valor é:

$z = 1,7506$

Substituindo:

$$P\left(655 - \frac{1,7506 . 100}{\sqrt{121}} \leq \mu x \leq 655 + \frac{1,7506 . 100}{\sqrt{121}}\right) = 92\%$$

Calculando a margem de erro:

$$ME = \frac{1,7506 . 100}{\sqrt{121}} = 15,9155 \text{ reais}$$

Portanto, o intervalo de confiança é:

$[629,0845 ; 670,9155]$ reais

b) Para a situação inicial, com $n_1 = 121$ amostras

$$m_E = \frac{z_{\alpha/2}\,\sigma_x}{\sqrt{n_1}} \Rightarrow n_1 = \frac{z_{\alpha/2}^2\,\sigma_x^2}{m_e^2}$$

Para uma margem de erro inferior a $m_e/4$, devemos ter:

$m_e' < \frac{m_e}{4}$ ou seja:

$$\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma_x}{\sqrt{n'}} < \frac{1}{4} \cdot \frac{z_{\alpha/2}\,\sigma_x}{\sqrt{n_1}}$$; Logo

$$\frac{1}{\sqrt{n'}} < \frac{1}{4\sqrt{n_1}} \quad \therefore \quad 4\sqrt{n_1} < \sqrt{n'}$$; Logo:

$n' > 16.n_1$, portanto, para atingir uma redução na margem de erro de 75% precisamos de uma amostra 16 vezes maior. Sendo 121 a quantidade amostral inicial, precisaremos de uma amostra nova de tamanho 1936 //