数学基础知识必备手册

第一章 实数及其运算

一、实数及其运算

1.实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{matrix}\text{正整数}\\0\end{matrix}\right\}\text{自然数}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}:\text{无限不循环小数，如}\sqrt{2}\text{，}\pi\cdots\end{cases}$$

2.实数相关概念

（1）自然数：我们把 0、1、2、3、4……等，非负整数叫做自然数.

（2）奇数与偶数

①能被 2 整除的整数叫做偶数，常表示成 $2k$ (k 为整数)；不能被 2 整除的整数叫做奇数，常表示成 $2k+1$ 或者 $2k-1$ (k 为整数).

②奇数与偶数的运算性质：

偶数±偶数=偶数；偶数*偶数=偶数.

奇数±奇数=偶数；奇数*奇数=奇数；

奇数±偶数=奇数；奇数*偶数=偶数；

（3）质数与合数

①质数:如果一个大于 1 的整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个数叫做质数（或素数）.例如：2、3、5、7……

②合数:一个大于 1 的整数，除了能被 1 和本身整除外，还能被其他正整数整除，这样的数叫做合数.例如：4、6、9……

【注意】1 既不是质数也不是合数，2 是最小的、唯一的偶质数.

（4）数的整除：设 $\forall a,b\in Z$ 且 $b\neq 0$ ，若 $\exists p\in Z$ 使得 $a=pb$ 成立，则 b 称能整除 a ，或 a 能被 b 整除，,此时我们把 b 叫做 a 的因数，把 a 叫做 b 的倍数.

【注意】关于整除，掌握以下几个规律：

①被 2 整除的数，个位数是偶数；

②被 3 整除的数，各位数之和为 3 的倍数；

③被 4 整除的数，末两位数是 4 的倍数；

④被 5 整除的数，个位数是 0 或 5；

⑤被 6 整除的数，既能被 2 整除又能被 3 整除；

⑥被 8 整除的数，末三位数之和是 8 的倍数；

⑦被 9 整除的数，各位数之和为 9 的倍数；

⑧被 10 整除的数，个位数为 0.

（5）公约数与公倍数

①公约数：如果一个整数同时是几个整数的约数，则称这个整数为它们的公约数；所有公约数中最大的，称为这些整数的最大公约数，比如 20 和 50 的公约数有 1、2、5、10，但是 10 是它们的最大公约数.

②公倍数：如果几个整数有相同的倍数，则称这个倍数是它们的公倍数；所有公倍数中最小的，称为这些整数的最小公倍数，如 25 和 5 的公倍数有 25、50 等，但是 25 是它们的最小公倍数.

（6）有理数与无理数

①有理数：我们把整数、分数、有限小数和无限循环小数，统称为有理数.

②无理数；无限不循环小数叫做无理数.

（7）实数:有理数和无理数统称为实数，实数集用 R 表示.

3.实数的运算

（1）实数的加、减、乘、除四则运算符合加法和乘法运算的交换律，结合律和分配律.

（2）乘方运算：

当$a \in R, a \neq 0$时，$a^0 = 1, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

负实数的奇数次幂为负数；负实数的偶数次幂为正数.

（3）开方运算：在实数范围内，负实数无偶次方根；0的偶次方根是0；正实数的偶次方根有两个，它们互为相反数；

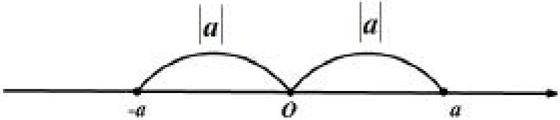
正实数的平方根有两个，它们互为相反数；其中正的平方根称为算术平方根.

在运算有意义时，$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

二、绝对值

1.实数 a 的绝对值定义为：$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

2.绝对值的几何意义：实数 a 在数轴上对应一点，这个点到原点的距离就是 a 的绝对值（如下图）.



3.绝对值性质

（1）对称性：互为相反的两个数的绝对值相等,即 $|-a| = |a|$ ；

（2）自反性：$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ ；

（3）等价性：① $|a|=\sqrt{a^2}$ ，② $|a|^2=a^2$ ；

（4）非负性：任何实数 a 的绝对值非负，即 $|a|\geq 0$.

【归纳】其他非负性的变量：

①正的偶数次方（根式）： $a^2,a^4,\cdots,a^{\frac{1}{2}},a^{\frac{1}{4}}\geq 0$ ；

②负的偶数次方（根式）： $a^{-2},a^{-4},\cdots,a^{-\frac{1}{2}},a^{-\frac{1}{4}}>0$

重要规则：若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数必然为零.

4.绝对值运算法则和三角不等式

（1） $|a|\leq b\ \ (b>0)\Leftrightarrow -b\leq a\leq b$ ；

（2） $|a|\geq b(b>0)\Leftrightarrow a\leq -b$ 或 $a\geq b$ ；

（3） $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}(a\neq 0)$ ；

（4）三角不等式

①$|a+b| \le |a|+|b|$（$ab \ge 0$ 时等号成立)；

②$|a+b| \ge |a|-|b|$（$ab \le 0$,且$|a| \ge |b|$时等号成立）；

③$|a-b| \le |a|+|b|$（$ab \le 0$ 时等号成立)；

④$|a-b| \ge |a|-|b|$（$ab \ge 0$,且$|a| \ge |b|$时等号成立）.

三、平均数

1.（算术）平均数.定义：设$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为n 个实数，称

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为这 n 个数的（算术）平均数。

（2）算术平均值常用下面方法计算：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$；

2.几何平均数：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数，称

$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ 为这 n 个数的几何平均数.

四、比和比例

1.比和比例的定义

（1）比： a 除以 b 的商，叫做 a,b 这两个数的比，记做

$a:b$ 、即 $a:b=\dfrac{a}{b}$ ，其中 a 叫做比的前项， b 叫做比的后

项，若 $\dfrac{a}{b}$ 的商为 k ，则称 k 为 $a:b$ 的值.

（2）比例：如果 $a:b$ 和 $c:d$ 的比值相等，就称 a,b,c,d

成比例，记作 $a:b=c:d$ 或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ， a 和 d 叫做比例的

外项， b 和 c 叫做比例的内项；当 $a:b=b:d$ 时，称 b 为

a 和 d 的比例中项，即 $b^2=ad$ 。

2.比和比例的性质

（1）比的基本性质

①$a:b=k\Leftrightarrow a=kb$；

②$a:b=ma:mb(m\neq 0)$.

（2）比例的基本性质

①更比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

②反比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

③合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$；

④等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$。（注意！等比定理的使用条件：$b+d+f\neq 0$）

第二章 整式与分式

一、整式及其运算

1.常用乘法公式（逆运算就是因式分解）

（1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ；

（2）$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ ；

（3）$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ；

（4）$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ ；

（5）$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$ ；

技巧提示：公式扩展①

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}\pm\sqrt{n})(\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}\mp\sqrt{n}$$

公式扩展②

$$(a\pm\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}\pm 2\Leftrightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=(a\pm\frac{1}{a})^2\mp 2$$

公式扩展③

$$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm ac\pm bc=\frac{1}{2}(a\pm b)^2+\frac{1}{2}(b\pm c)^2+\frac{1}{2}(a\pm c)^2$$

2.整式除法定理：若整式 $F(x)$ 除以 $x-a$ 的余式为 $r(x)$ ，

则 $F(x)=(x-a)\cdot g(x)+r(x)$ ，故 $r(a)=F(a)$ 成立.

二、指数和对数的运算性质

1.指数运算性质：

（1）$a^0=1(a\neq 0)$ ；　（2）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ；

（3）$a^m\div a^n=a^{m-n}$ ；（4）$(a^m)^n=a^{mn}$ ；

（5）$(ab)^m = a^m b^m$ ；　（6）$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}(a \neq 0)$.

2.对数运算性质：

（1）$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ ；

（2）$\log_a(\dfrac{M}{N}) = \log_a M - \log_a N$ ；

（3）$\log_a(M^n) = n\log_a M$ ；

（4）$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ ；

（5）$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$.

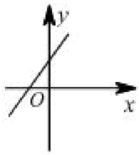
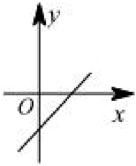
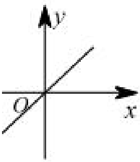
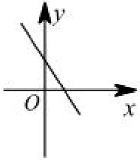
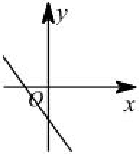
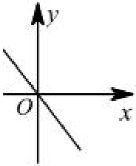
三、分式运算性质：

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}; \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}(M \neq 0)$$

第三章 函数、方程、不等式

一、函数

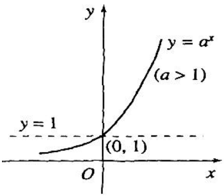
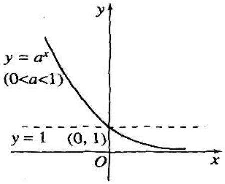
1.一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象及性质：

一次函	$y=kx+b(k\neq 0)$			性质
$k>0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$	y 随 x 的增大而增大
图象				
$k<0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$	y 随 x 的增大而减小
图象				

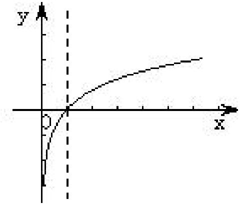
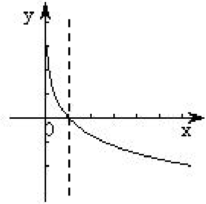
2.二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

抛物线	$y=ax^2+bx+c$（a >0）
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$
位置	由 a,b 和 c 的符号确定
开口方向	上
增减性	在对称轴的左侧,y 随 x 的增大而减小. 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而增大.
抛物线	$y=ax^2+bx+c$（a <0）
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$
对称轴	直线 $x=-\frac{b}{2a}$
位置	由 a,b 和 c 的符号确定
开口方向	下
增减性	在对称轴的左侧,y 随 x 的增大而增大. 在对称轴的右侧, y 随 x 的增大而减小.

3.指数函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）的图象和性质：

<table>
<tr><td rowspan="2">图象</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">（1）定义域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">（2）值域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">（3）过点（0, 1），即当 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td>（4）在定义域内是增函数</td><td>（4）在定义域内是减函数</td></tr>
</table>

4.对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$)的图象与性质：

<table>
<tr><td rowspan="2">图象</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">（1）定义域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">（2）值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">（3）过点$(1,0)$，即当$x=1$时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>（4）在（0，$+\infty$）上是增函数</td><td>（4）在$(0,+\infty)$上是减函数</td></tr>
</table>

二、方程

1.一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$，解法：$x=-\frac{b}{a}$.

2.二元一次方程 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ $(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$ 解法：加减消元法，代入消元法等.

3.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

（1）解法：

①分解因式：

若 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=0(a\neq 0)$，则 $x=x_1$ 或 $x=x_2$.

②公式法：方程两根为 $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）根的判别式（ $\Delta=b^2-4ac$ ）

①当 $\Delta>0$ 时，方程有两相异的实数根；

②当 $\Delta=0$ ，方程有两相等的实数根；

③当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

（3）根与系数的关系（韦达定理）

①设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根为 x_1 和 x_2 ，

则有如下结论：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

②韦达定理的应用：利用韦达定理求关于两个根的代数式的数值：

$a.$ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ ；

$b.\ x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_1^2)$

$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$$；

$c.\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ ；

$d.\ \dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$ ；

$e.\ |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 。

4.一元n次方程

形如$a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0$的方程称为一元$n$次方程，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是它的$n$个根.

三、不等式

1.不等式的基本性质

（1）如果$a>b$，那么$b<a$；

如果$b<a$，那么$a>b$；即$a>b \Leftrightarrow b<a$；

（2）如果$a>b,b>c$，那么$a>c$，即

$a>b,b>c \Leftrightarrow a>c$；

（3）如果$a>b$，那么$a+c>b+c$；

（4）如果$a>b,c>0$，那么$ac>bc$；

如果$a>b,c<0$，那么$ac<bc$；

（5）如果$a>b,c>d$，那么$a+c>b+d$；

（6）如果$a>b>0,c>d>0$，那么$ac>bd$；

（7）如果$a>b>0$，那么$a^n>b^n,(n\in N,n\geq 2)$；

（8）如果 $a > b > 0$ ，那么

$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, (n \in N, n \geq 2)$ ；

2.不等式的求解

（1）一元一次不等式 $ax > b$ (或 $ax < b$)；

解不等式时，运用不等式的性质，去分母，去括号，移项，合并同类项，最后变为 $x > c$ 或 $x < c$.

（2）一元一次不等式组；

每个一元一次不等式的解集的公共部分（交集）叫做一元一次不等式组的解集.

（3）绝对值不等式的解法

①$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$ ；

$|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ 或 $f(x) > a$ ；

②$\left|f(x)\right|^2>a\Leftrightarrow[f(x)]^2>a$；

③$\left|f(x)\right|=\begin{cases}f(x) & f(x)\geq 0,\\ -f(x) & f(x)<0\end{cases}$；

④设 $f(x)=\left|x-a\right|+\left|x-b\right|$，函数的特点为：

x 在区间$[a,b]$上取得最小值. $f(x)$ 有最小值$\left|a-b\right|$，无最大值.；

⑤设 $f(x)=\left|x-a\right|-\left|x-b\right|$，函数的特点为：

$f(x)$ 有最大值$\left|a-b\right|$，最小值$-\left|a-b\right|$，且最大值与最小值互为相反数.

（4）一元二次不等式$ax^2+bx+c>(<)0(a>0)$，一元二次不等式的解法如下表，

设$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$：

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
方程 $f(x)=0$	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$f(x)>0$的解集	$\{x\|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$f(x)<0$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	ϕ	ϕ

（5）指数、对数不等式：不等号两边同时取指数或同时取对数，变成相同的形式后，再换元成有理不等式求解：

	指数不等式	对数不等式
$a>1$	$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ $\Leftrightarrow f(x)>g(x)$	$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$
$0<a<1$	$a^{f(x)}>a^{g(x)}$ a $\Leftrightarrow f(x)<g(x)$	$\log_a f(x)>\log_a g(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

3.常用的基本不等式

（1）$a^2+b^2\geq 2ab(a,b\in R)$，

（2）$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}(a,b\in R^+)$，

（3）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2(ab>0)$，

（4）$\dfrac{1}{a}+a\geq 2(a\in R^+),\dfrac{1}{a}+a\leq -2(a\in R^-)$

第四章 应用题

一、增长率问题

1.设原值为 a ，变化率为 $p\%$ ，若上升 $p\%\Rightarrow$ 现值 $=a(1+p\%)$ ，若下降 $p\%\Rightarrow$ 现值 $=a(1-p\%)$.

2.利润问题

利润=售价−进价，$\text{利润率}=\dfrac{\text{利润}}{\text{成本(进价)}}\times 100\%$

$=\dfrac{\text{售价}-\text{成本}}{\text{成本}}\times 100\%=(\dfrac{\text{售价}}{\text{成本}}-1)\times 100\%$ ；

$\text{售价}=\text{成本}+\text{利润}=\text{成本}\times(1+\text{利润率})$.

二、行程问题

1.基本公式：路程 = 速度×时间.

2.相遇及追击问题

（1）直线运动：

①两人相向而行，在中途相遇，则$t=\dfrac{S_1+S_2}{v_1+v_2}$；

②甲乙两人从同一起点行走，甲先走了一段路程S后，乙沿同样的路程去追甲，乙追上甲所用时间$t=\dfrac{S}{v_{乙}-v_{甲}}$.

（2）圆周运动（设圆周长为S）

①同向运动：相遇一次：$S_{甲}-S_{乙}=S$.若相遇n次，则$S_{甲}-S_{乙}=n\cdot S$；

②相背运动：相遇一次：$S_{甲}+S_{乙}=S$.若相遇n次，则$S_{甲}+S_{乙}=n\cdot S$.

3.流水问题：.

$V_{顺}=V_{船}+V_{水}$，$V_{逆}=V_{船}-V_{水}$；

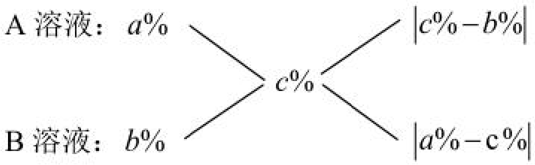
$V_{顺}+V_{逆}=2V_{船}$，$V_{顺}-V_{逆}=2V_{水}$；

三、溶液浓度问题

1.常用公式：$浓度=\frac{溶质}{溶液}\times 100\%$，$溶液=溶剂+溶质$；

2.设 x 克浓度为 $a\%$ 的 A 溶液与 y 克浓度为 $b\%$ 的 B 溶液混合，混合后的 C 溶液浓度为 $c\%$，则 $\frac{x}{y}=\frac{|c\%-b\%|}{a\%-c\%}$，

可用下面十字交叉法求 A 和 B 溶液的质量：



四、工程问题

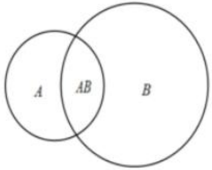
计算公式：

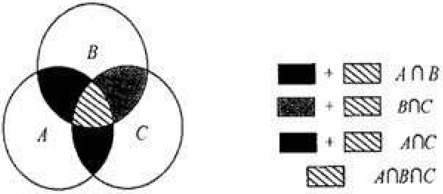
工作效率＝完成的工作量÷工作时间，总量＝部分量÷部分量所占的比例.

五、集合问题

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(AB);$$

$$m(A\cup B\cup C)=m(A)+m(B)+m(C)-m(AB)-m(AC)-m(BC)+m(ABC)$$





第五章 数列

一、基本概念

a_n 与 S_n 有如下关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2,n\in N^*)\end{cases}$$

二、等差数列

1.通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

2.前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d.$

$=\dfrac{d}{2}\cdot n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$ ，它可以抽象成关于 n 的二次函数

$$f(x)=\frac{d}{2}x^2+(a_1-\frac{d}{2})x, S_n=f(n)$$

3.等差中项：若 a, A, b 成等差数列，则 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $A=\frac{a+b}{2}$.

三、等比数列

1.通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}(n\in N)$.

2.前 n 项和公式：$S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1) \end{cases}$

3.等比中项：若 a, A, b 成等比数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等比中项，且 $A=\sqrt{ab}$.

四、等差、等比数列性质总结

等差数列	等比数列
若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$	若$m+n=p+q$，则$a_ma_n=a_pa_q$.
若$\{k_n\}$成等差数列（其中$k_n\in N$），则$\{a_{k_n}\}$成等差数列.	若$\{k_n\}$成等差数列（其中$k_n\in N$），则$\{a_{k_n}\}$成等比数列.
S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}\ldots$成等差数列.	S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}\ldots$成等比数列.
a_k,a_{k+m},a_{k+2m},$\ldots$也成等差数列,其公差$d'=md$.	a_k,a_{k+m},a_{k+2m},$\ldots$也成等比数列,其公比$q'=q^m$.

第六章 初等几何

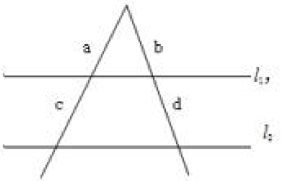
平面/立体几何部分

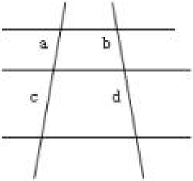
一、平行直线

1.两直线平行，内错角相等，同位角相等，同旁内角互补.

2.两条直线被一组平行线截得的线段成比例，如下图，

$$a:b=c:d.$$





二、三角形的性质

1.三角形的基本性质：

①三角形内角和定理：$\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$

②三角形三边关系：三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

③三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

④三角形的面积：

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-d)(p-c)}$$ (海仑公式)，其中 p 为周长的一半。

2.三角形的四心

（1）重心：三条中线的交点，将中线分成$1:2$两段；

（2）垂心：三条高的交点；

（3）内心：内切圆圆心，三条角平分线交点，角平分线上的点到角两边的距离相等；

（4）外心：外接圆圆心，三条边的中垂线交点.

3.三角形的全等与相似

（1）两个几何图形全等，全等的图形对应角相等，对应的线段长度也相等.

（2）两个几何图形相似，似的图形对应角相等,对应的线段长度成比例,比值称为相似比.如果两个相似图形的相似比为 k ,则面积比为 k^2

4.特殊三角形

（1）等腰三角形的性质：两底角相等，底边上的中线,底边上的高及顶角的角平分线重合，两腰上的中线相等,两腰上的高相等,两底角的角平分线相等.

（2）等边三角形的性质：三个角都为 $60°$ ，等边三角形的重心,垂心,内心,外心重合,称此点为它的中心.边长和高的比为 $2:\sqrt{3}$ ，边长等于 a 的等边三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

（3）直角三角形的性质：直角边的平方和等于斜边的平方(充分必要条件).斜边上的中线长度等于斜边的一半(充分必要条件).

①记住几组常用的勾股数：

$3,4,5;6,8,10;7,24,25;8,15,17;9,12,15;9,40,41$.

②两类特殊的直角三角形(两块三角尺)：

a.等腰直角三角形：两底角都为$45°$.直角边和斜边的长度比为$1:\sqrt{2}$.

b. $30°.60°.90°$直角三角形：斜边的长度是短直角边的 2 倍，长直角边长度是短直角边的$\sqrt{3}$倍.

三、四边形的性质

1.平行四边形：两对边都相等(充分必要条件)；两对角都相等；两条对角线互相平分.

2.矩形：四个角都是直角的四边形.

3.菱形：各边相等的四边形.其中两条对角线互相垂直平分，两条对角线都平分所在角.

4.正方形：四个角都是直角,并且各边相等的四边形.

四、圆的性质

1.关于圆周角

（1）命题：一条弧所对应的圆心角等于这段弧所对应的圆周角的 2 倍.

（2）推论 1：圆的内接四边形对角和等于$180°$.

（3）推论 2：半圆所对应的的圆周角是直角.

2.关于弦和切线：

（1）垂直于弦的直径平分此弦.

（2）如果直线和圆相切，则经过切点的半径和切线垂直.

（3）经过圆外一点的圆的切线有两条，两个切点到此点的距离

相等.

（4）推论：圆的外切四边形两双对边长度之和相等.

3.直线与圆的位置关系：设圆半径为 r,圆心到直线距离为 d ，直线与圆的位置关系分为有三种：

①直线与圆相离 $(d>r)$ ；

②直线与圆相切 $(d=r)$ ；

③直线与圆相割 $(d<r)$.

4.两个圆的位置关系：设两个圆半径分别为 r_1,r_2,两个圆心的距离为 d ，两个圆的位置关系有五种：

①两圆外离 $(d>r_1+r_2)$ ；

②两圆外切 $(d=r_1+r_2)$ ；

③两圆相割 $(|r_1-r_2|<d<r_1+r_2)$ ；

④两圆内切$\left(d=\left|r_1-r_2\right|\right)$；

⑤两圆内含$\left(d<\left|r_1-r_2\right|\right)$.

五、特殊的三角函数值

几个常用的角：

$$360^\circ=2\pi,180^\circ=\pi,90^\circ=\frac{\pi}{2},60^\circ=\frac{\pi}{3},30^\circ=\frac{\pi}{6},45^\circ=\frac{\pi}{4}.$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

六、常用几何体的周长、面积与体积

1.三角形

三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

（其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ，为三角形的半周长）；

直角三角形两直角边为 a,b ，则 $S=\dfrac{1}{2}ab$ ；等边三角形面积

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ；高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ ；

外接圆半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ ；内切圆半径 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

2.四边形

平行四边形的面积$S = ah$；

长方形的周长$L = 2(a+b)$；

长方形的面积$S = ab$；

正方形的周长$L = 4a$；

正方形的面积$S = a^2$；

梯形的面积$S = \frac{1}{2}(a+b)h$.

3.圆

圆的周长$l = 2\pi r = \pi d$；

圆的面积$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}d^2$；

设扇形的圆心角为α，半径为r，则它的弧长$l = r\theta$，面积

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$

4.空间几何体

（1）长方体的表面积 $S=2(ab+bc+ac)$；长方体的 $V=abc$；正方体的表面积 $S=6a^2$；正方体的体 $V=a^3$.

（2）圆柱的侧面积 $S=2\pi rh$；

圆柱的表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2$；

圆柱的体积 $V=\pi r^2 h$.

（3）球的表面积 $S=4\pi r^2$；球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

解析几何部分

一、直线

1.直线的方程

（1）点斜式：$y-y_{\circ}=k(x-x_{\circ})$；

（2）斜截式：$y=kx+b$；

（3）截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$；

（4）一般式：$Ax+By+C=0$．

2.两条直线的位置关系

直线方程	平行的充要条件	垂直的充要条件
$l_1: y=k_1x+b_1$ $l_2: y=k_2x+b_2$	$k_1=k_2, b_1\neq b_2$	$k_1\cdot k_2=-1$
$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$	$A_1B_2=A_2B_1$，且 $B_1C_2\neq B_2C_1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

3.距离公式

（1）两点间的距离公式：设两点的坐标为

$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，则这两点间的距离

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；

（2）点 $P(x_0.y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离：

$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$；

（3）两条平行线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$

的距离是 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

二、圆

圆的方程

（1）标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.(a,b) 圆心，

r 为半径.

特别地：当圆心为 $(0,0)$ 时，方程为 $x^2+y^2=r^2$；

第七章 数据分析

一、计数原理

1.加法（分类）原理：$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

2.乘法（分步）原理：$N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

3.排列：$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$；

当 $m = n$ 时, $P_n^m = n!$.

4.组合：$C_n^m = \dfrac{P_n^m}{P_m^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

组合数的几个公式：

① $C_n^m = C_n^{n-m}$；

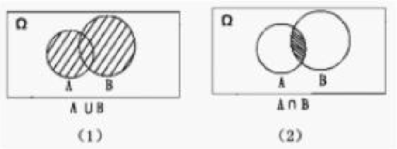
② $C_{n+1}^m = C_n^{\mathrm{m}} + C_n^{\mathrm{m}-1}$.

二、概率基本概念

1.事件间的关系与运算

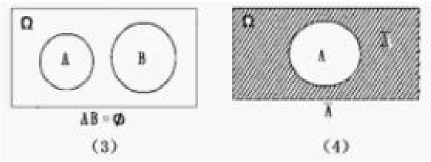
（1）A,B 的和：$A\bigcup B$ 或 $A+B$ ，如图（1）；

（2）A,B 的积：$A\bigcap B$ 或 AB ，如右图（2）；



（3）A,B 互不相容：$AB=\phi$ ，如右图（3）；

（4）对立事件：$\overline{A}\bigcup A=\Omega,\overline{A}\bigcap A=\phi$ ，如右图（4）.



2.事件的概率及其性质

（1）概率的性质：$0 \le P(A) \le 1, P(\Omega) = 1, P(\phi) = 0$..

（2）加法公式：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

推广公式：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(AB) + P(BC) + P(AC)] + P(ABC).$$

（3）对立事件公式：对任意事件 $A, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3.古典概型的概率计算公式 $P(A) = \dfrac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$.

4.事件的独立性：$P(AB) = P(A)P(B)$.如果事件

$A_1, \cdots A_n$ 相互独立，则

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_n}).$$

5.在 n 次试验中事件 A 恰好发生 $k(0\le k\le n)$ 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-p)^{n-k}$.

6.独立地做一系列的贝努利试验，直到第 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 次试验时事件 A 才首次发生的概率 $P_k=\left(1-p\right)^{k-1}p$.

三、统计中常用的特征数

1.平均数 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(i=1,2,\cdots,n)$

2.众数：在 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，出现次数最多的数.

3.中位数：将 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，按从小到大的顺序依次排列，处在最中间的那个数是这 n 个数的中位数；

4.方差： $S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

5.标准差： $s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$.