Particle Swarm Optimization

- Technika ewolucyjna wzorowana na sposobie poruszania się i inteligencji roju owadów.
- Zaproponowana w 1995 roku przez Jamesa Kennedy'ego i Russella Eberharta.
- Bardzo prosty algorytm, łatwy w implementacji, wymagający doboru jedynie kilku parametrów.
- Podobnie jak w przypadku mrówek, rój składa się z pozornie losowo zachowujących się indywiduów, niemniej jako całość rój zachowuje się w sposób „zdyscyplinowany" i nakierowany na osiągnięcie zamierzonego celu.

Particle Swarm Optimization

- Agenci (cząstki) tworzące rój poszukują optymalnego rozwiązania poruszając się w jego pobliżu w przestrzeni rozwiązań.

- Każda cząstka jest traktowana jako punkt w D-wymiarowej przestrzeni poszukiwań, która dostosowuje swój „lot" zgodnie ze swoim dotychczasowym doświadczeniem oraz doświadczeniem pozostałych uczestników roju (roju jako całości).

- Każda cząstka kontroluje swoje współrzędne w przestrzeni poszukiwań, które są związane z najlepszym dotychczas przez nią znalezionym rozwiązaniem („personal best" – ***pbest***).

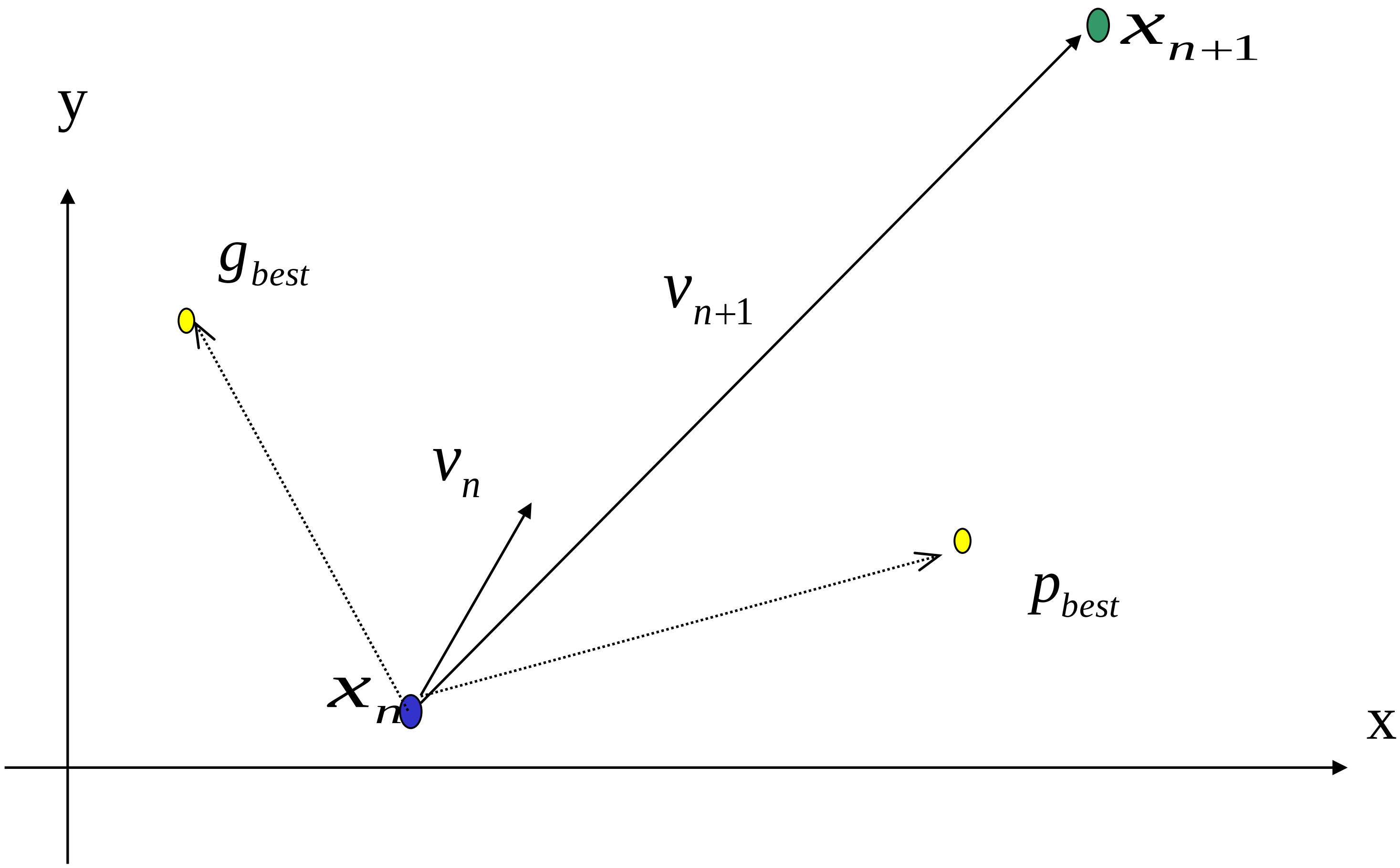
Particle Swarm Optimization

- Drugą wartością kontrolowaną przez PSO jest dotychczas najlepsza znaleziona pozycja w ramach roju (rozwiązanie) określana jako ***gbest*** (global best).

- Idea PSO polega na zmianie prędkości (przyspieszaniu) w kierunku jej pozycji *pbest* oraz globalnej pozycji *gbest* w każdym kroku czasowym.

- Każda cząstka modyfikuje swoją aktualna pozycję i prędkość zgodnie z odległością pomiędzy jej pozycją a pozycją *pbest* oraz odległością pomiędzy jej pozycją a pozycją *gbest*.

Particle Swarm Optimization



Particle Swarm Optimization

v_n : prędkość cząstki w iteracji *n*

x_n : pozycja cząstki w iteracji *n*

p_{best} : najlepsza dotychczasowa pozycja cząstki

g_{best} : najlepsza dotychczasowa pozycja cząstek w całym roju

c_1 : współczynnik przyspieszania związany z p_{best}

c_2 : współczynnik przyspieszania związany z g_{best}

W: inercja

rand( ): losowa liczba z przedziału (0, 1)

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}$$

🡰 to są wektory D-wymiarowe

Algorytm PSO

Dla każdej cząstki

Zainicjuj ją losowo (położenie i prędkość) - zwykle z określonego „dopuszczalnego” zakresu

Do *//w każdej iteracji*

{

Dla każdej cząstki *//aktualizacja pbest każdej cząstki*

{

Policz wartość dopasowania

Jeżeli wartość dopasowania jest większa od najlepszego dotychczasowego dopasowania (**pbest**) to ustaw **pbest** jako aktualną wartość dopasowania

}

Wybierz najlepsze dotychczasowe dopasowanie w całym roju jako **gbest** *//aktualizacja gbest roju*

Dla każdej cząstki *// aktualizacja położenia i prędkości cząstek*

{

Policz jej szybkość zgodnie zrównaniem szybkości

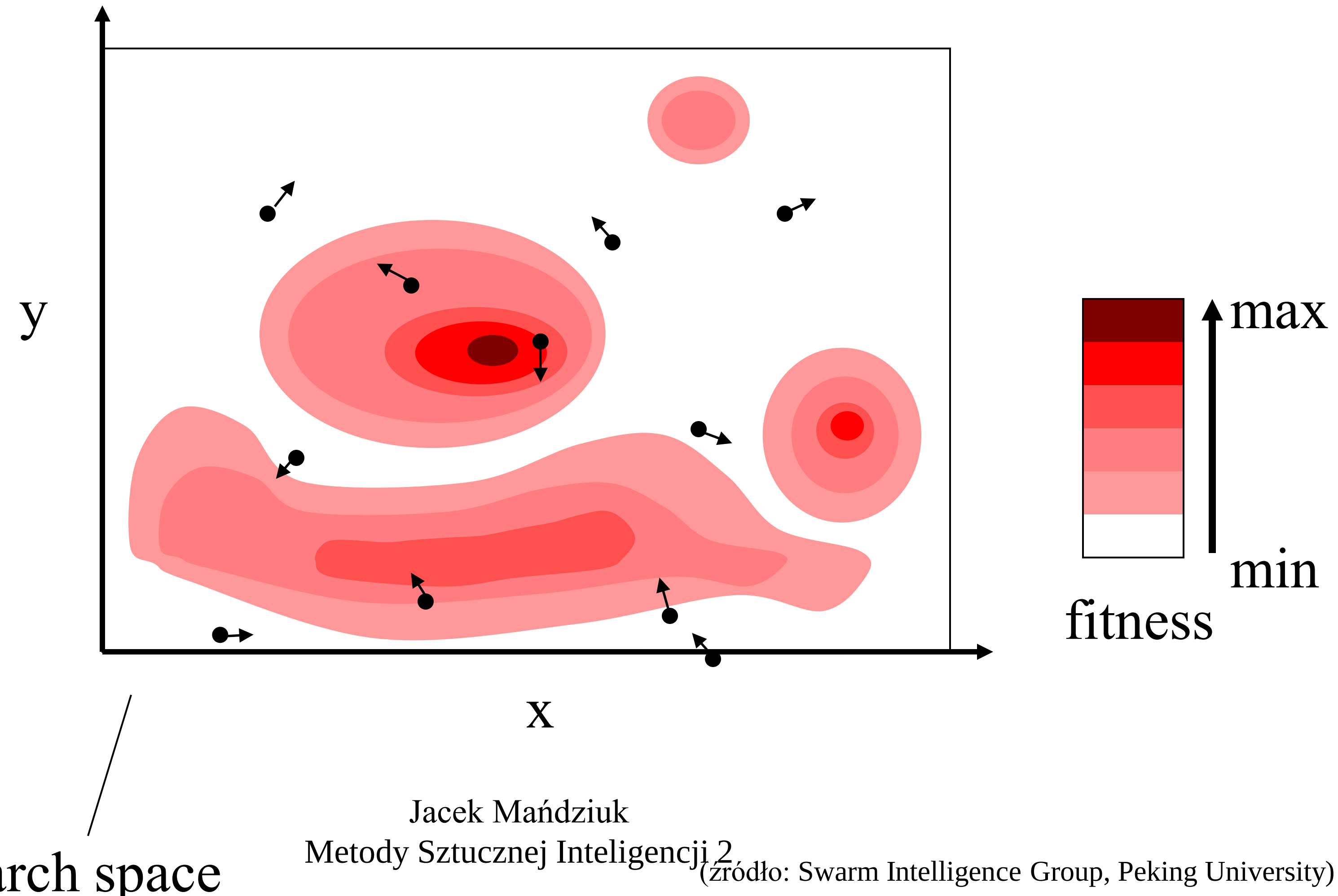
Zmodyfikuj jej pozycję zgodnie z równaniem zmiany pozycji

}

}

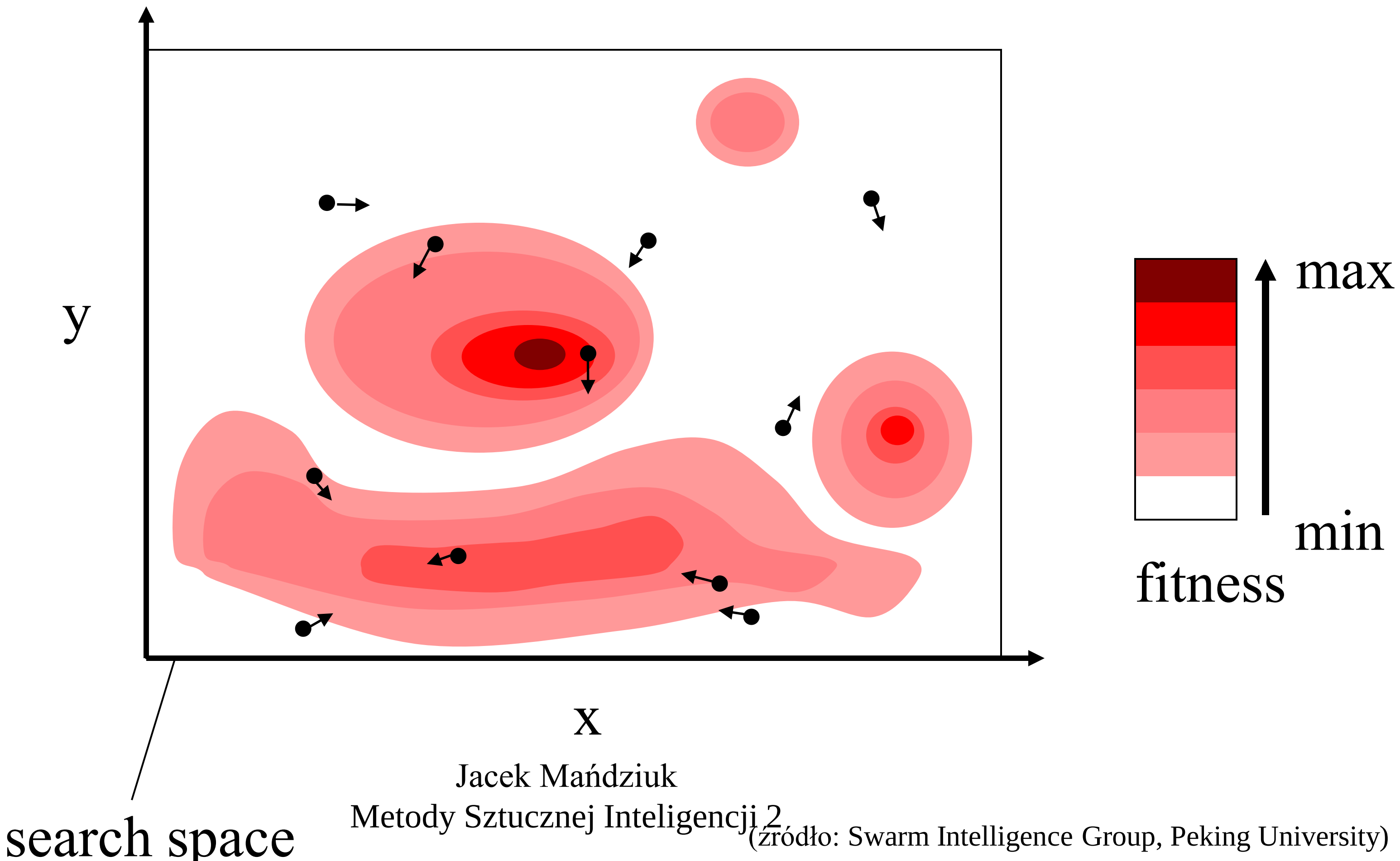
Dopóki nie przekroczono maksymalnej liczby iteracji lub błąd nie osiągnął zamierzonego minimum

Symulacja [1]



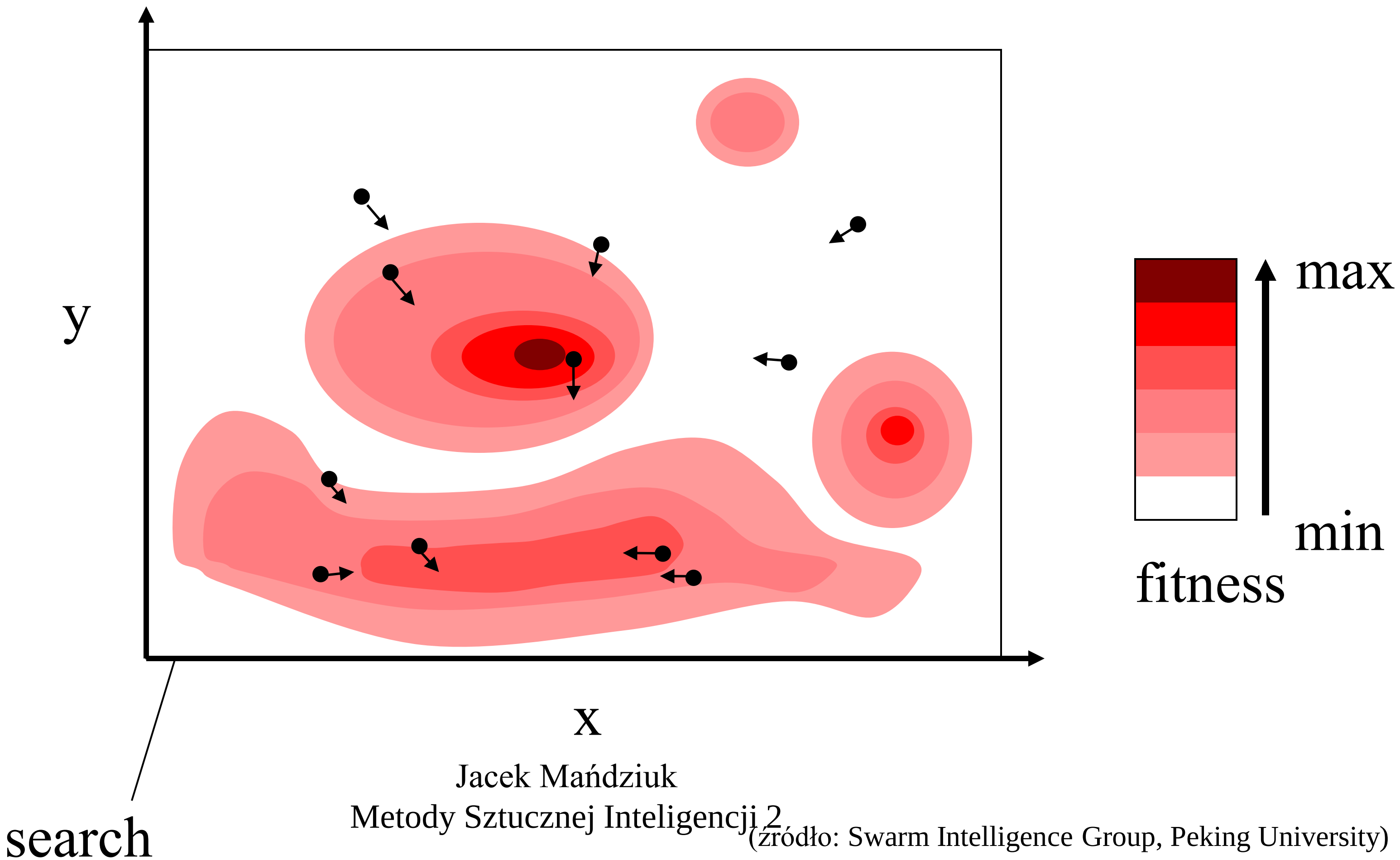
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 2



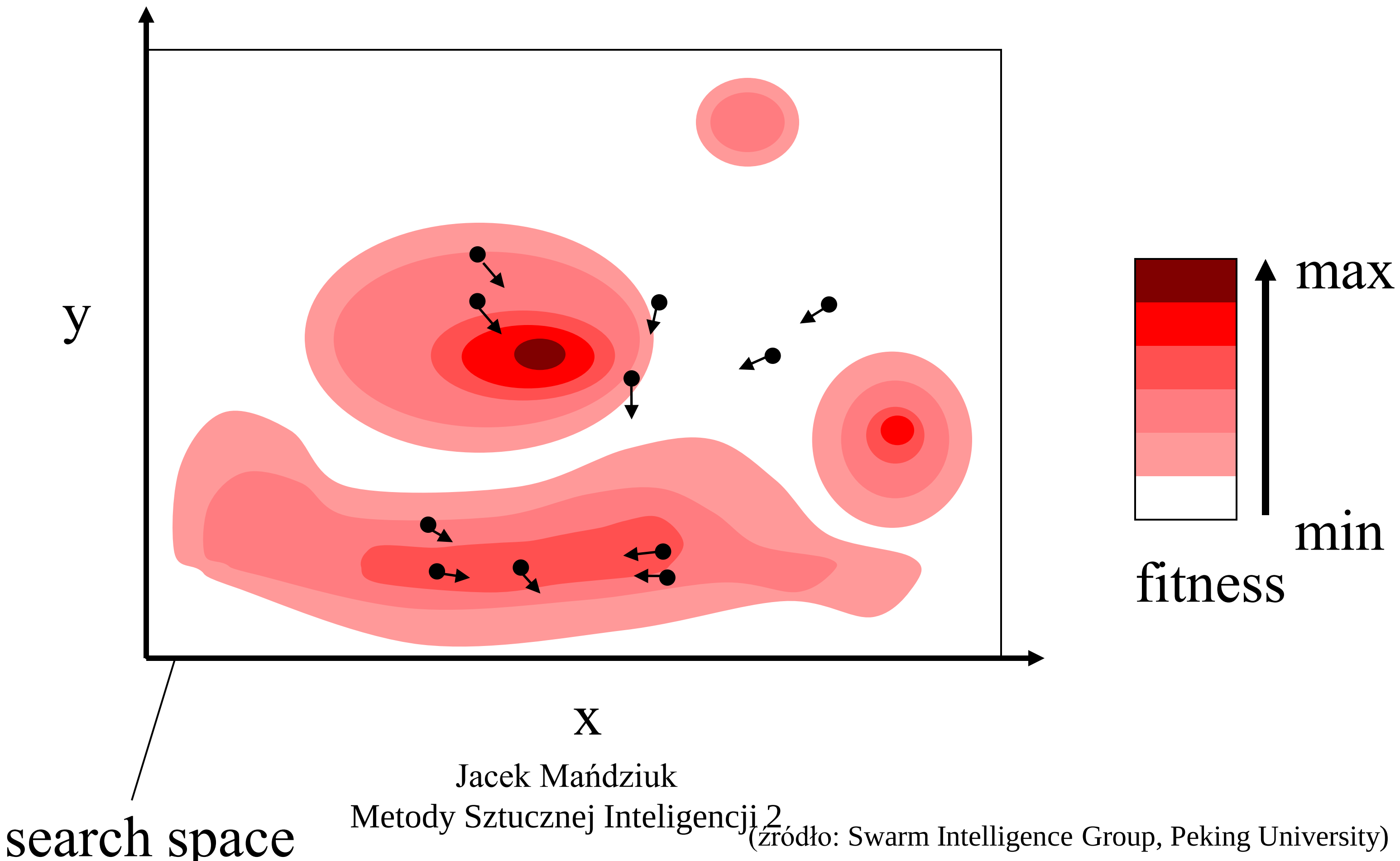
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 3



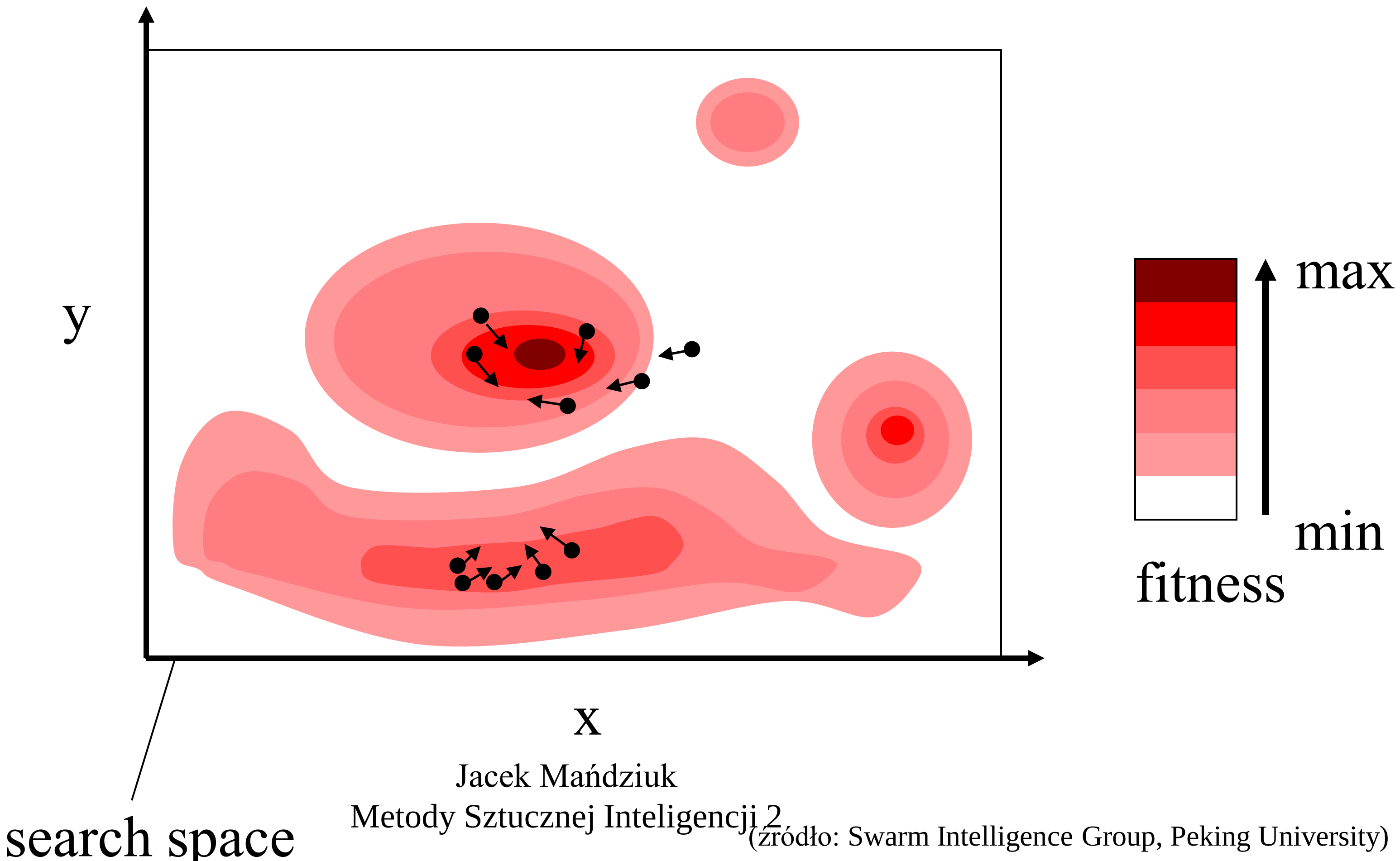
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 4



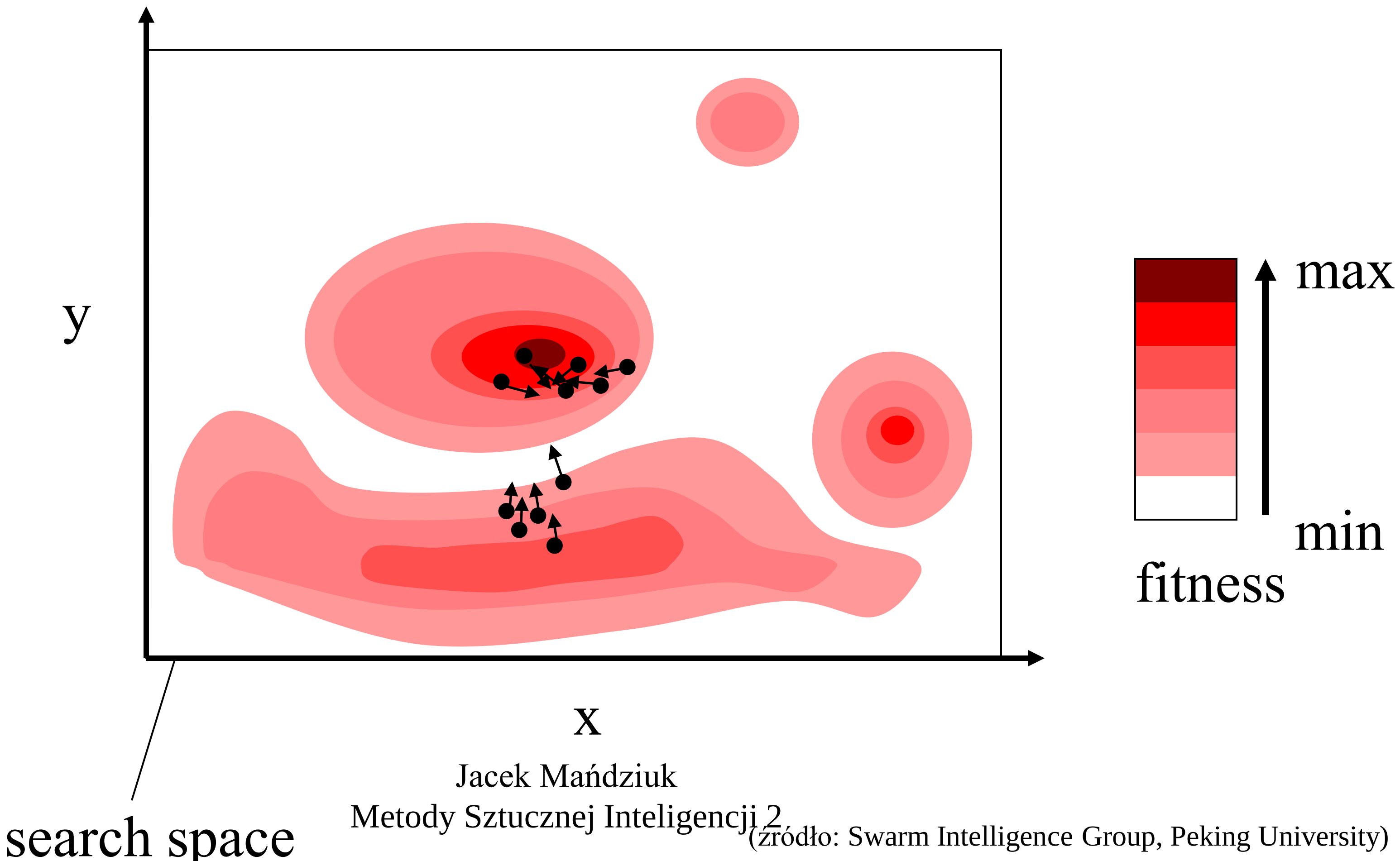
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 5



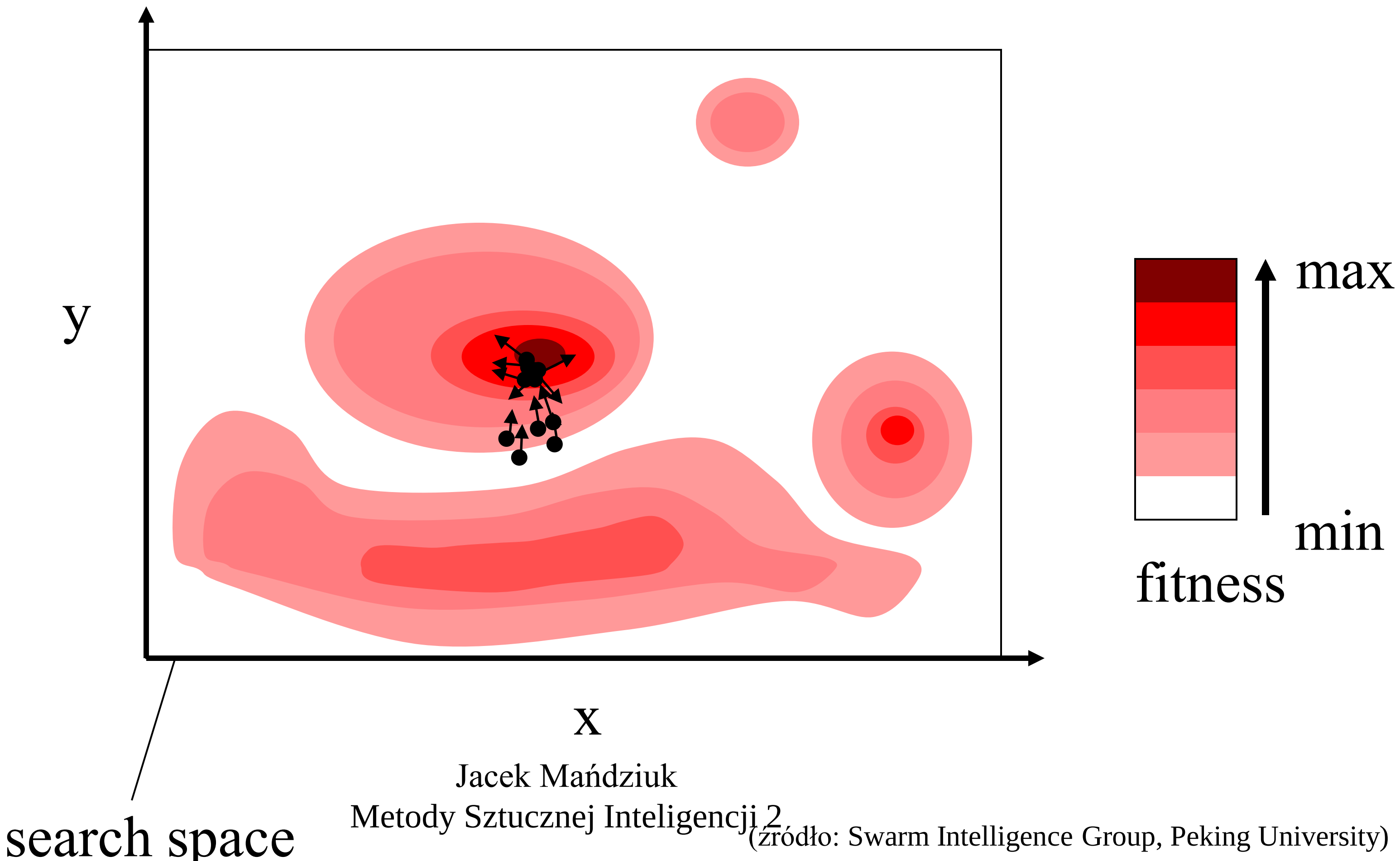
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 6



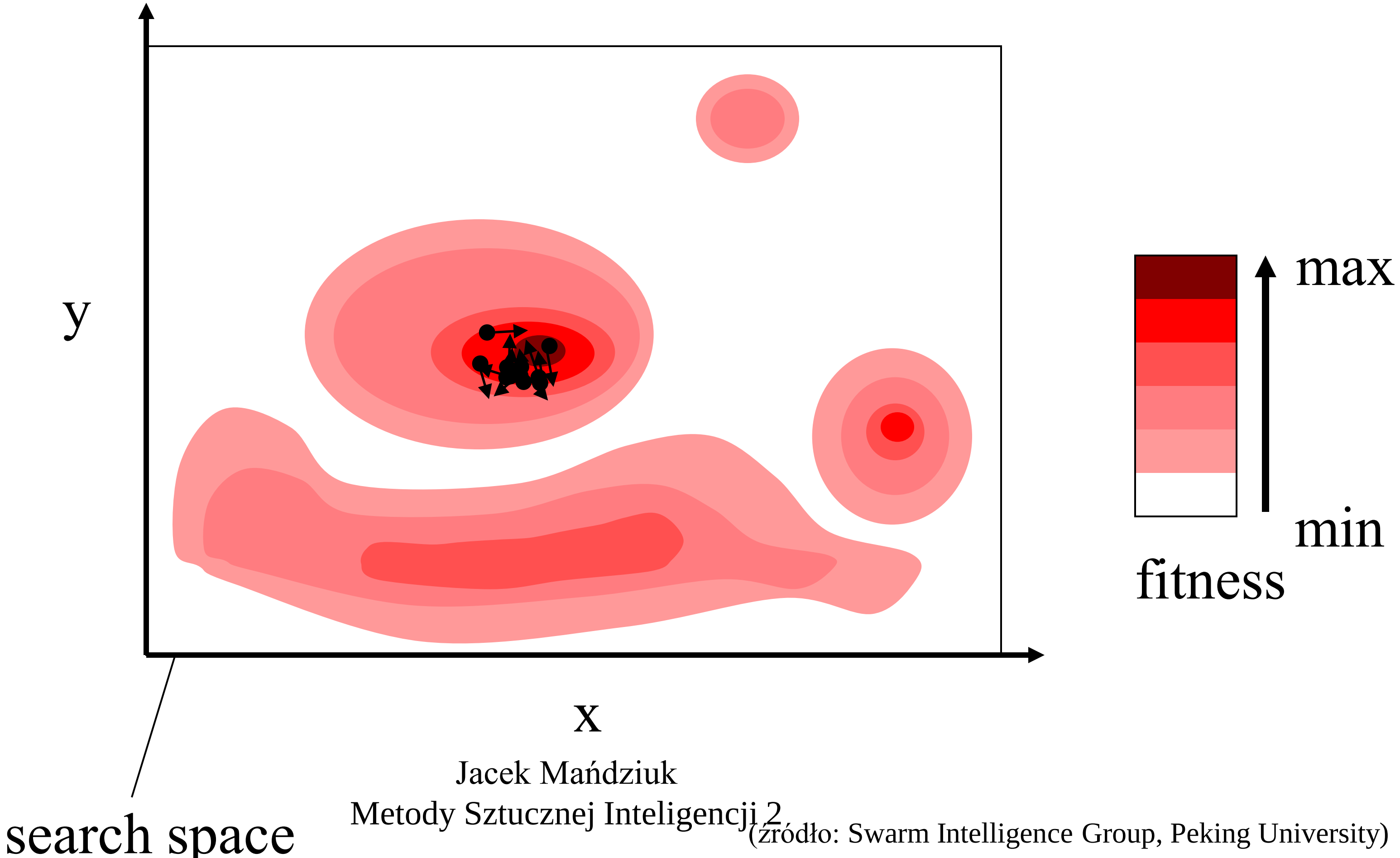
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 7



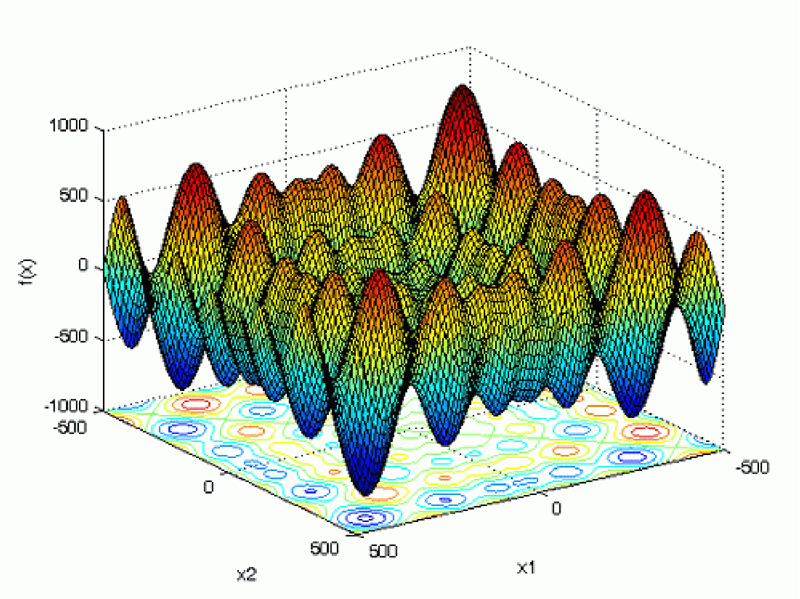
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Symulacja 8



(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Funkcja Schwefela



$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-x_i) \cdot \sin(\sqrt{|x_i|})$$

gdzie

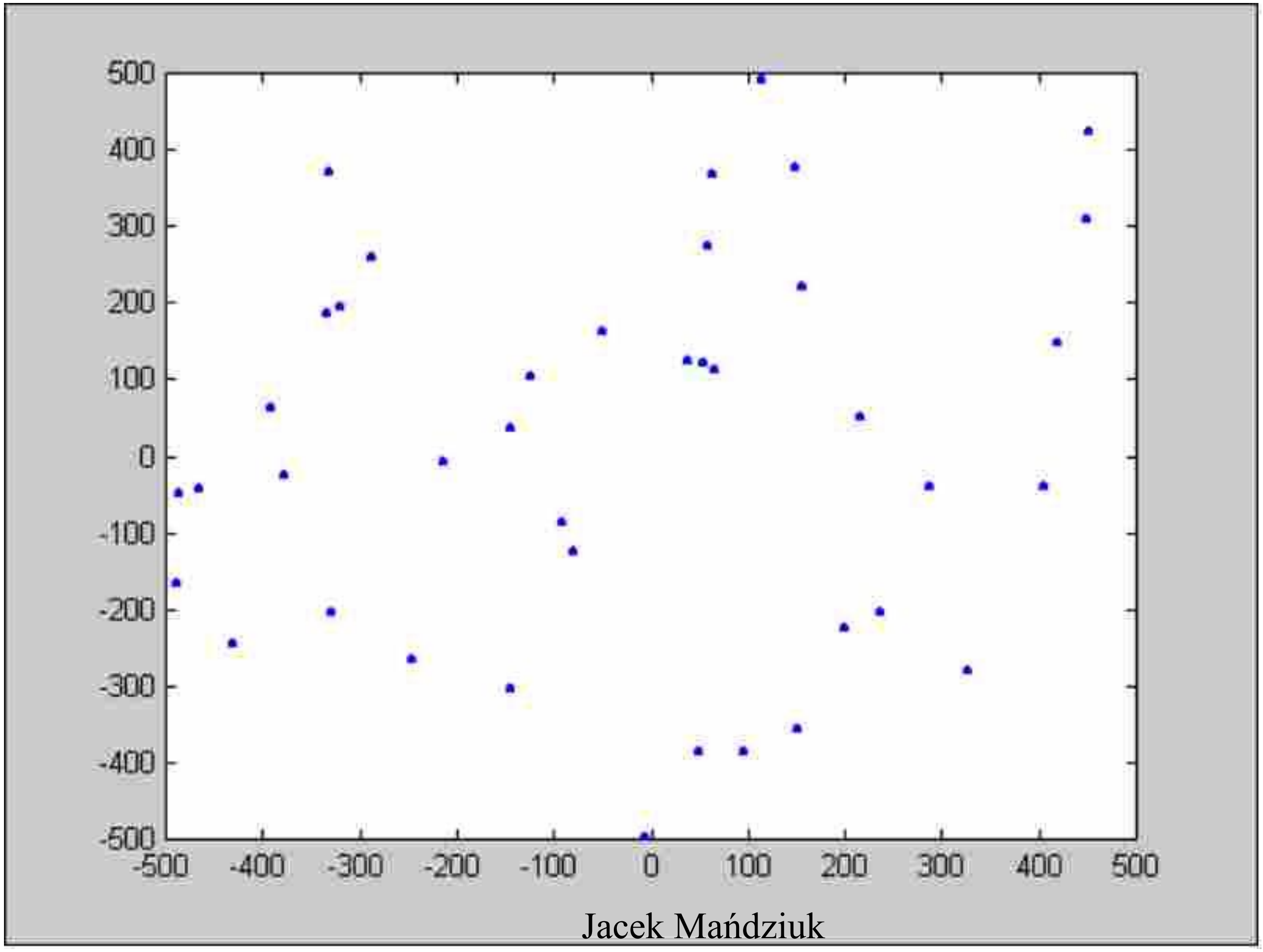
$$-500 \leq x_i \leq 500$$

minimum globalne : $-n \cdot 418.9829;$

$$x_i = -420.9687, \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

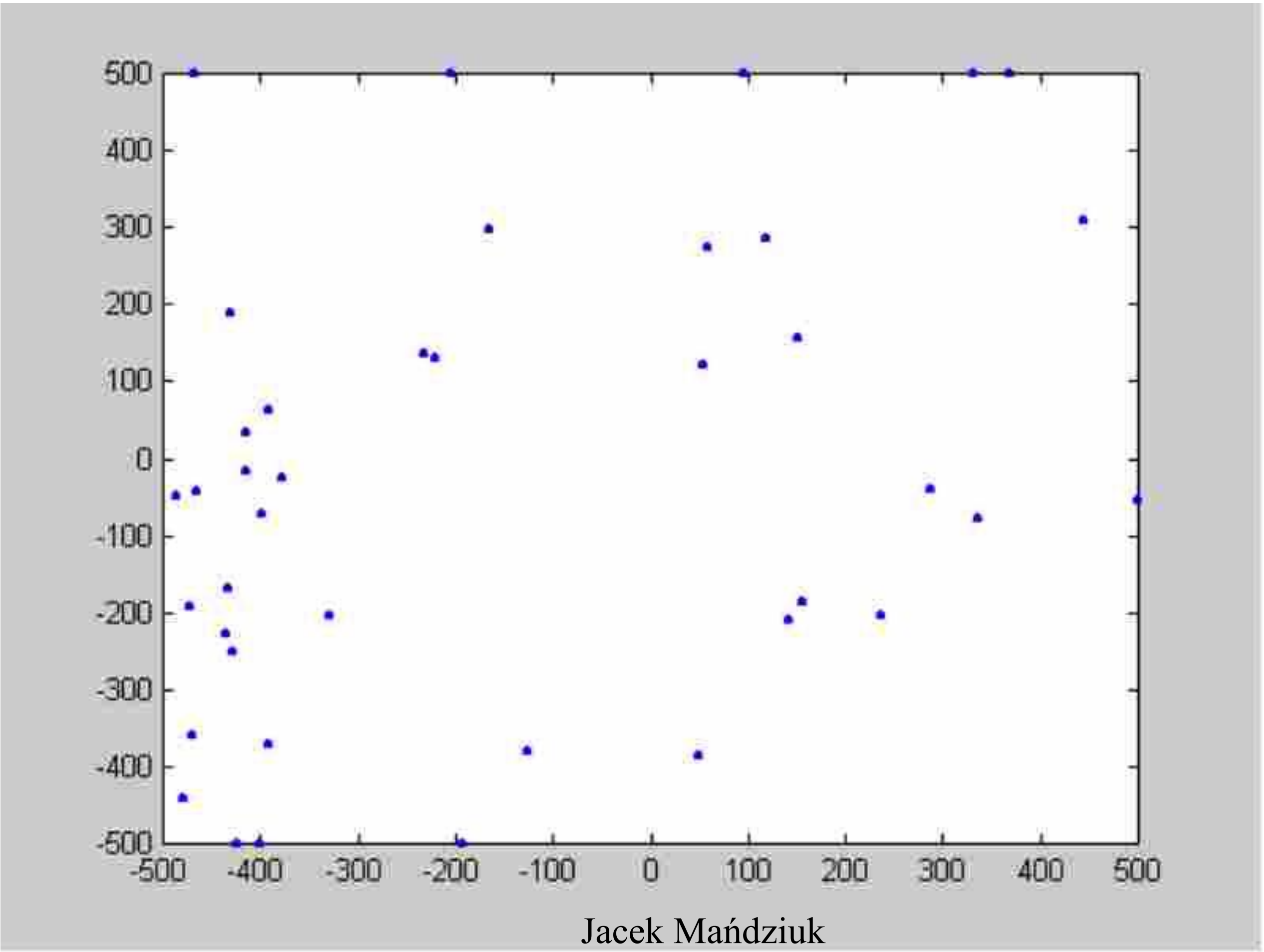
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—Inicjalizacja



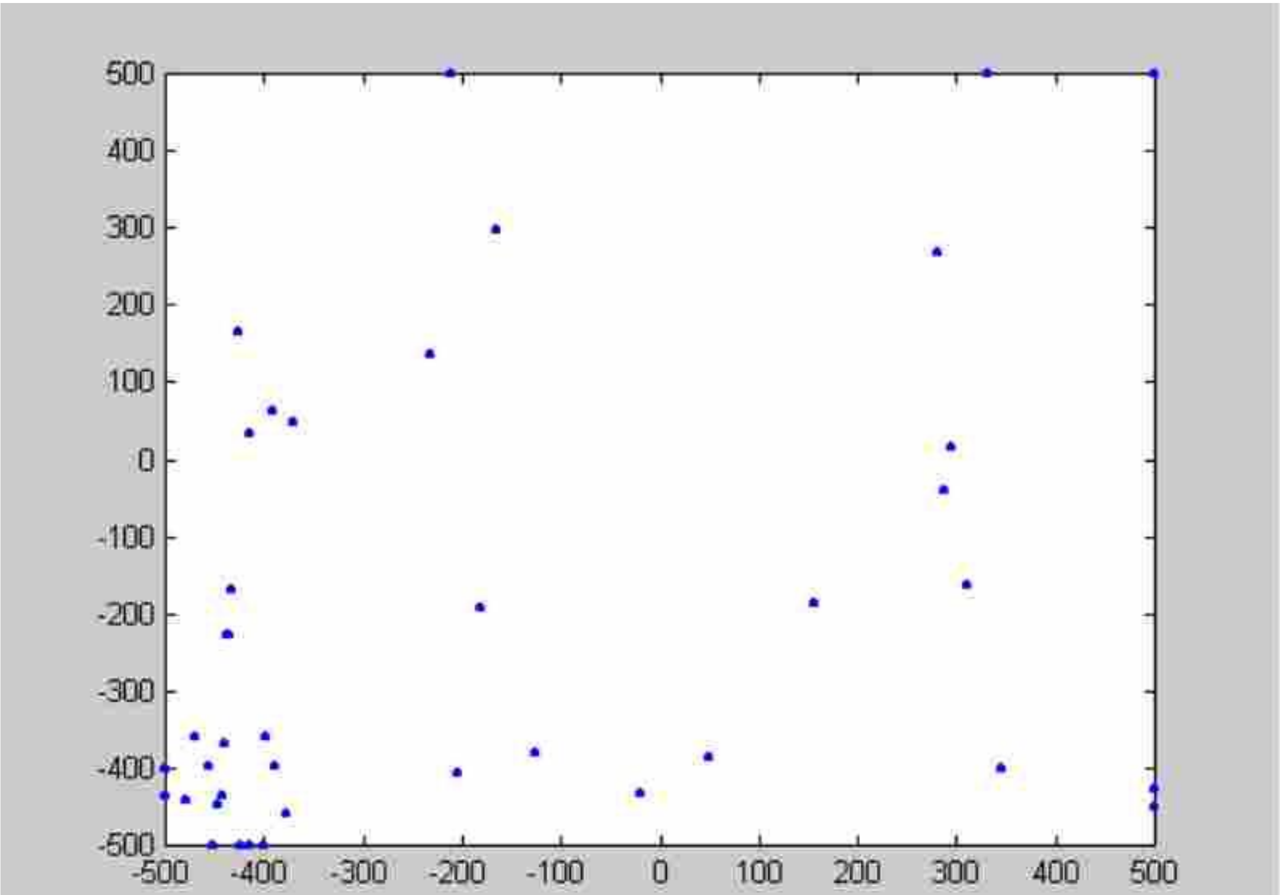
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—5 iteracja



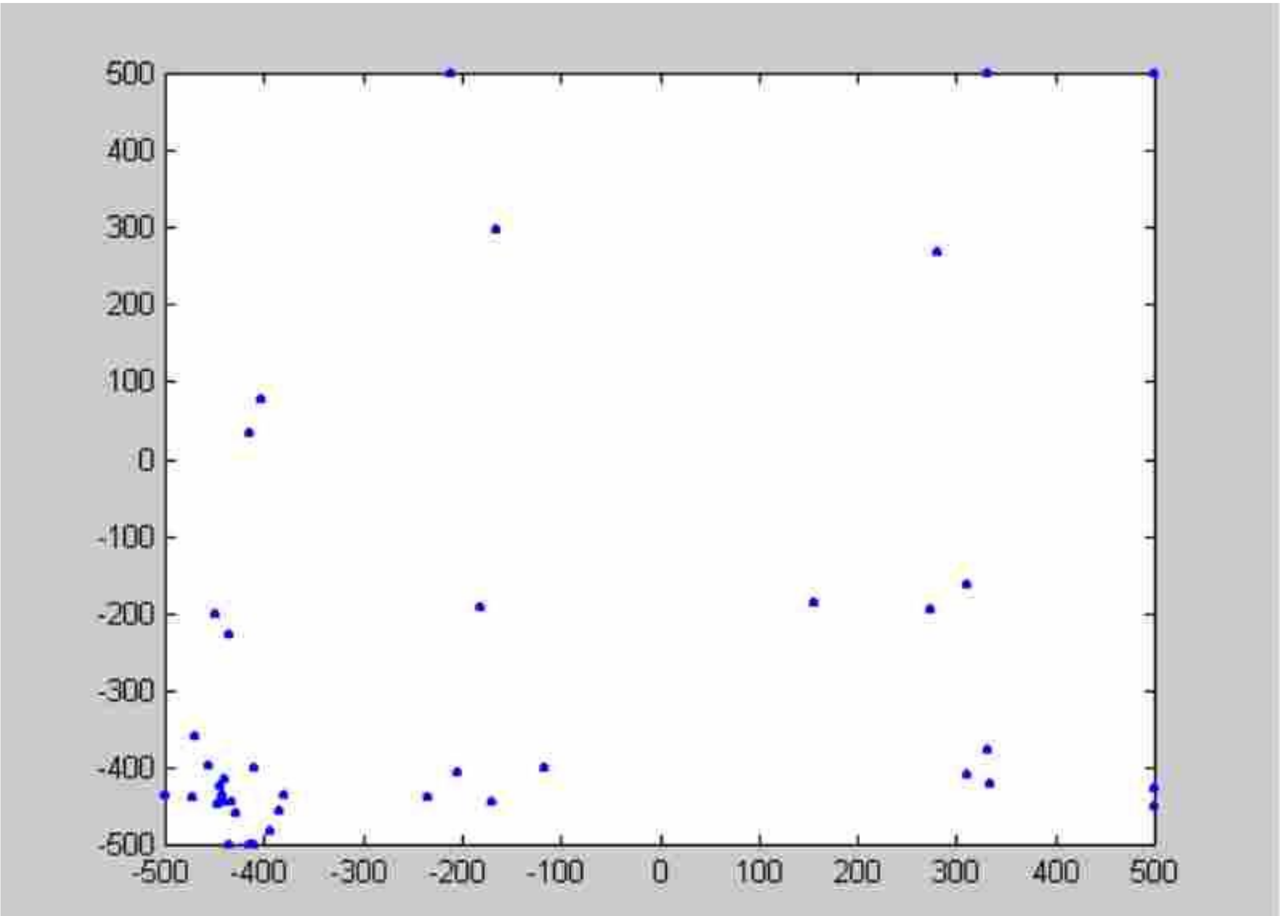
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—10 iteracja



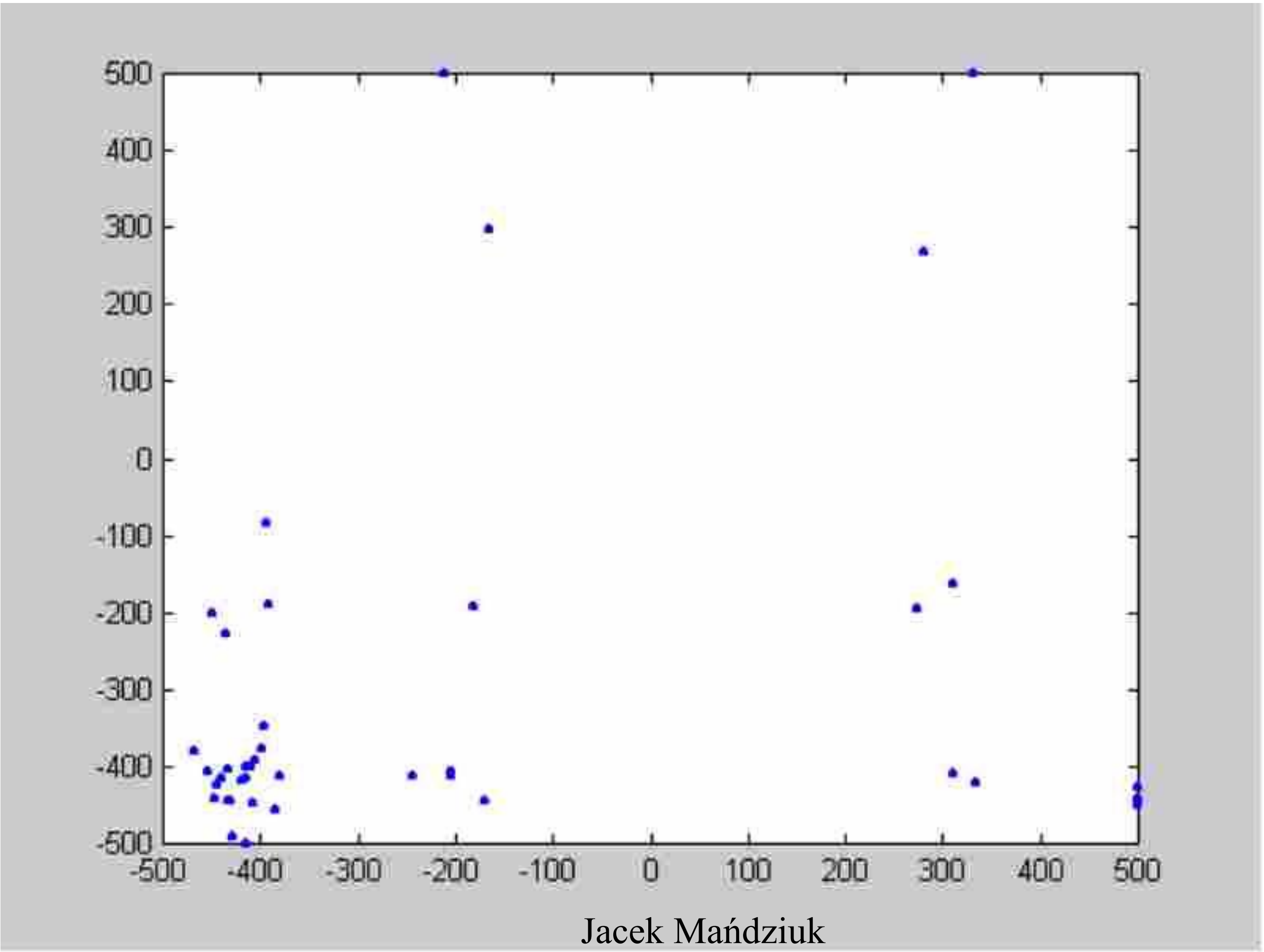
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—15 iteracja



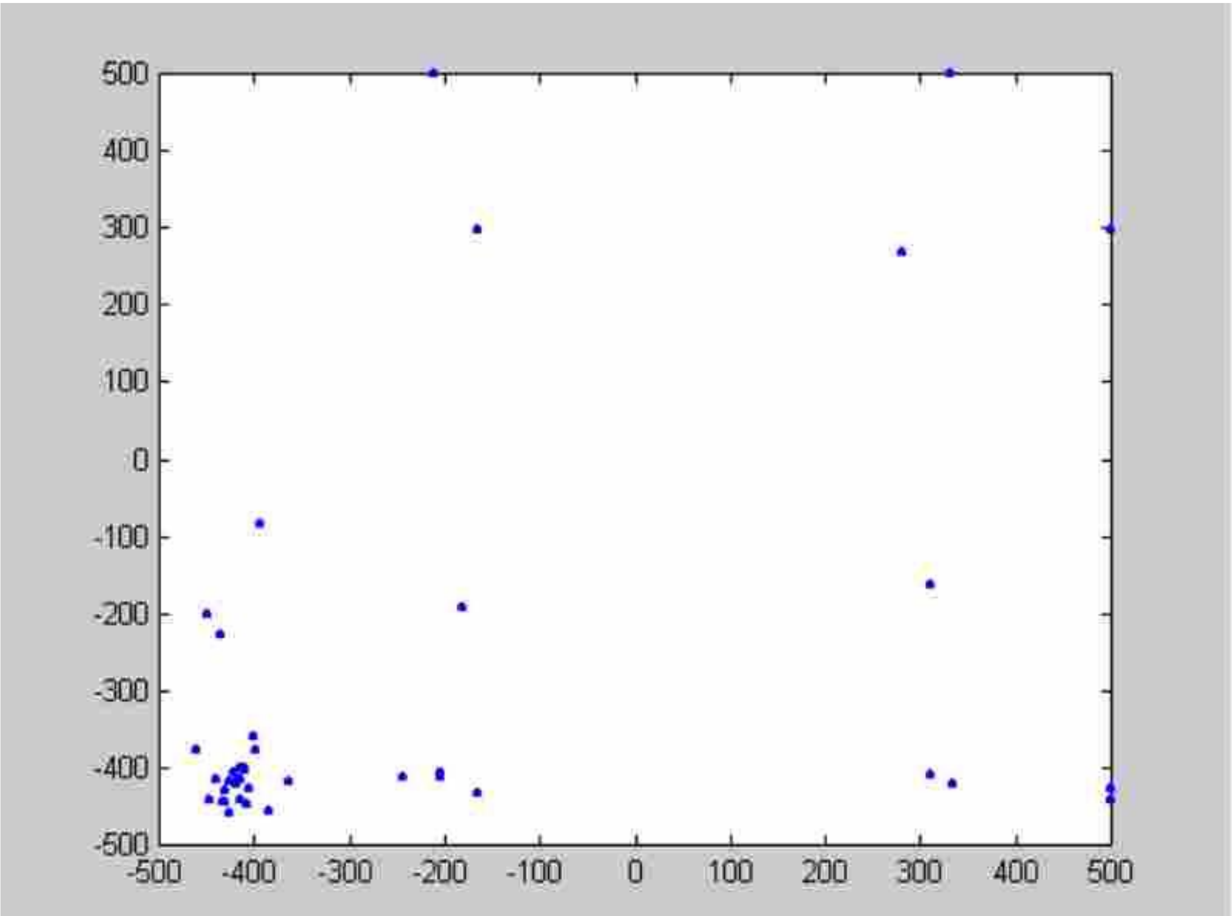
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—20 iteracja



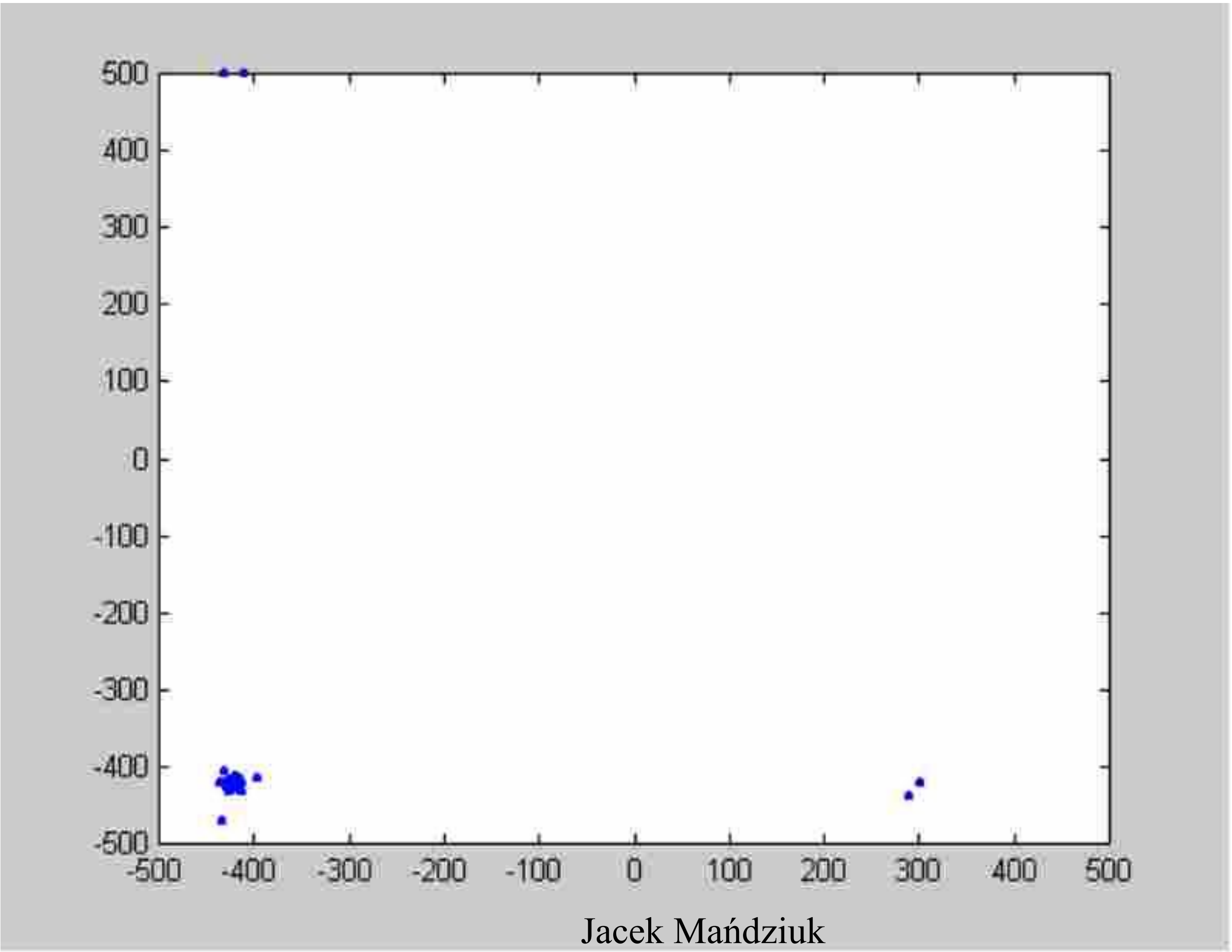
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—25 iteracja



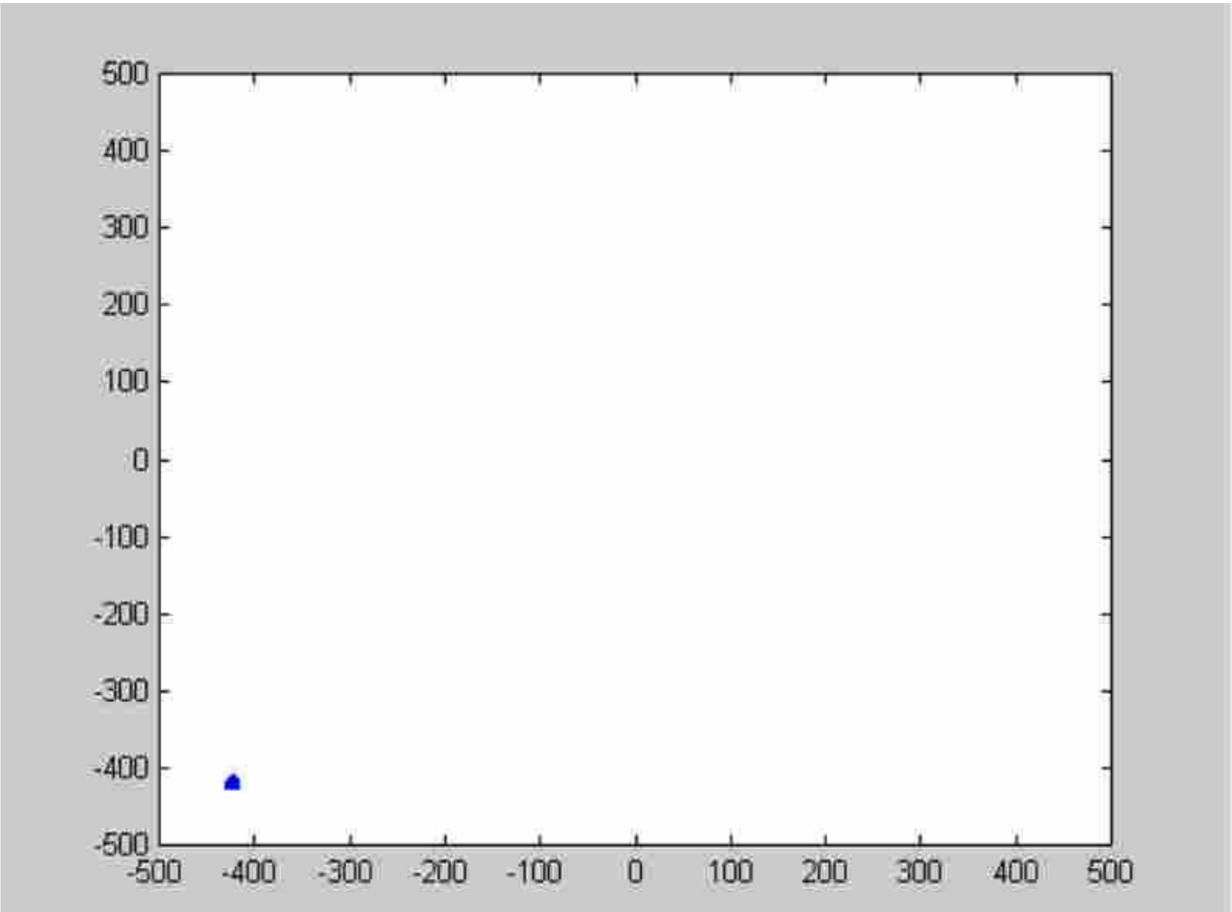
(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Ewolucja—100 iteracja



(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

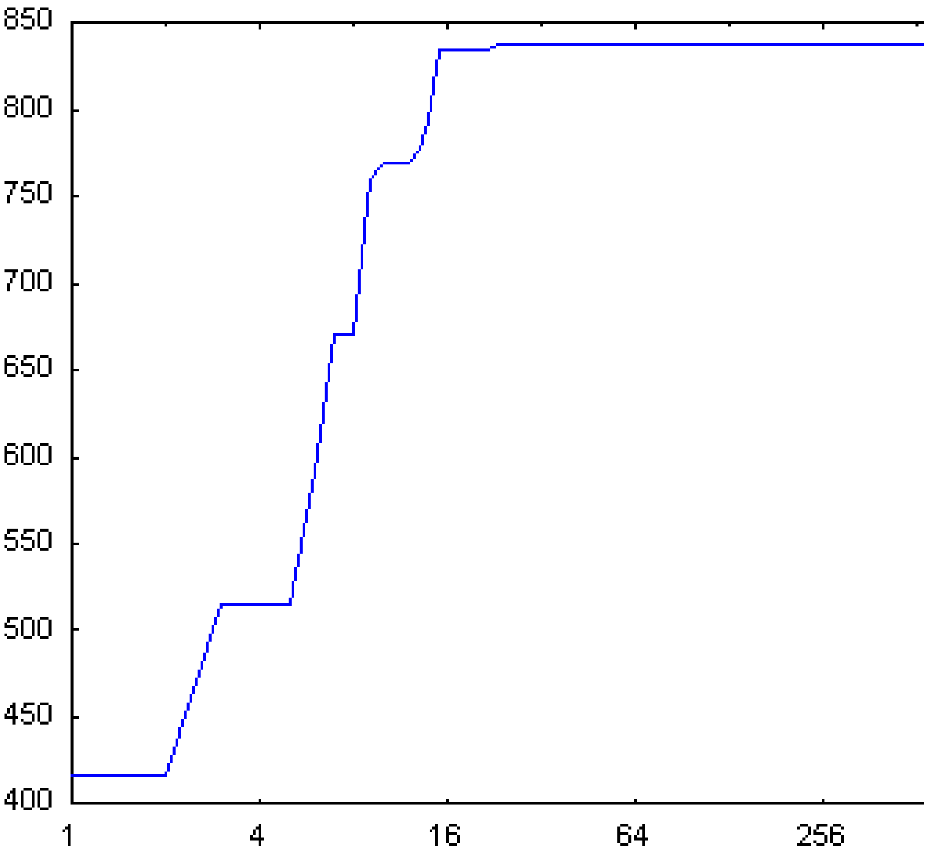
Ewolucja—500 iteracja



(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

Wyniki

Iteracja	Znalezione rozw.
0	-416.245599
5	-515.748796
10	-759.404006
15	-793.732019
20	-834.813763
100	-837.911535
5000	-837.965771
Globalne	-837.965745



(źródło: Swarm Intelligence Group, Peking University)

PSO 2011

PSO 2007 works on each dimension separately. It makes the algorithm vulnerable for function rotation. If some minimum lies on an axis (or multiple axes) it is much easier to find with PSO.
PSO 2011 proposes a solution for this problem. Speed update in PSO 2011 Clerc and Kennedy (2011):

- Calculate center of gravity of three points: 1) current position, 2) current position shifted in direction of best position in neighborhood, 3) current position shifted in direction of particle's best position.

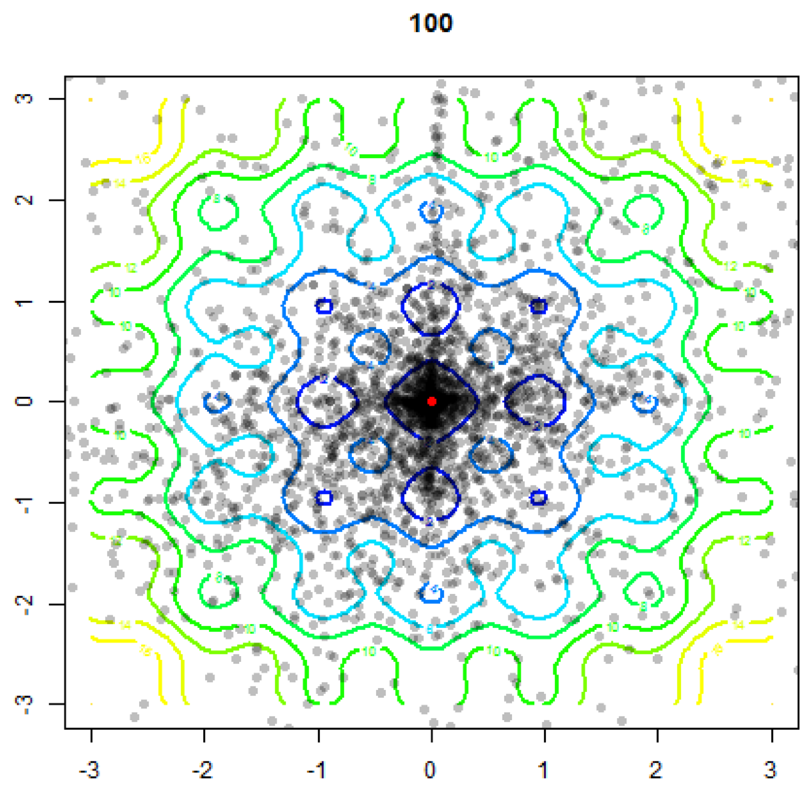
$$G = \frac{x + (x + \phi(mybest - x)) + (x + \phi(lbest - x))}{3}$$

- calculate a random point x_i' from a ball with center in G and radius $|x - G|$
- Calculate speed $v_{new} = wv_{old} + x_i' - x_i$

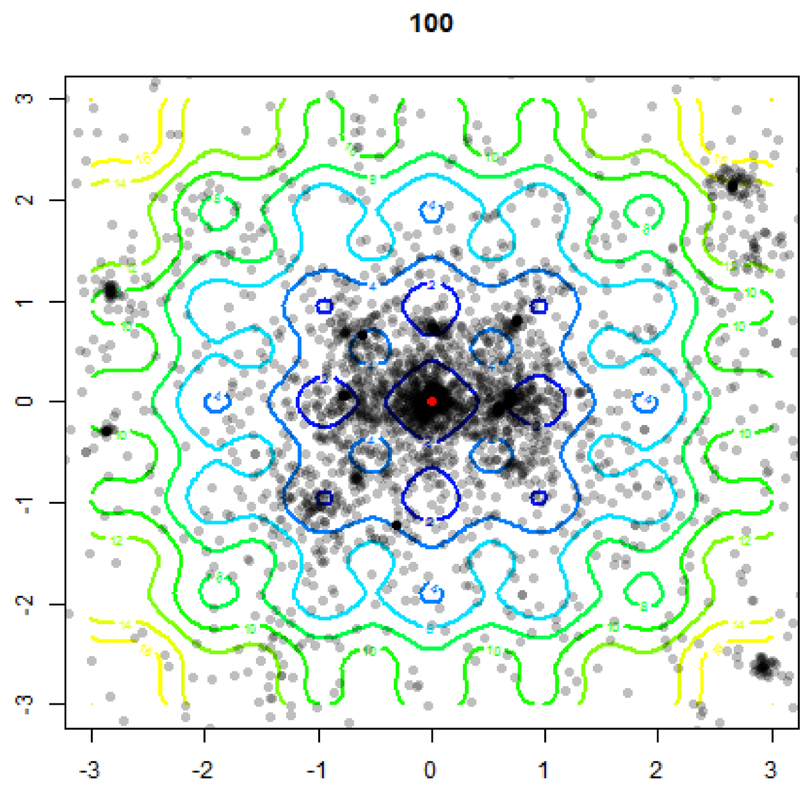
w, ϕ – parameters

PSO 2007 vs 2011

PSO 2007



PSO 2011



Source: M. Okulewicz

gbest / lbest (sąsiedztwo)

- Wersja globalna:

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (\boxed{g_{best}} - x_n)$$

- Wersja lokalna:

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (\boxed{l_{best}} - x_n)$$

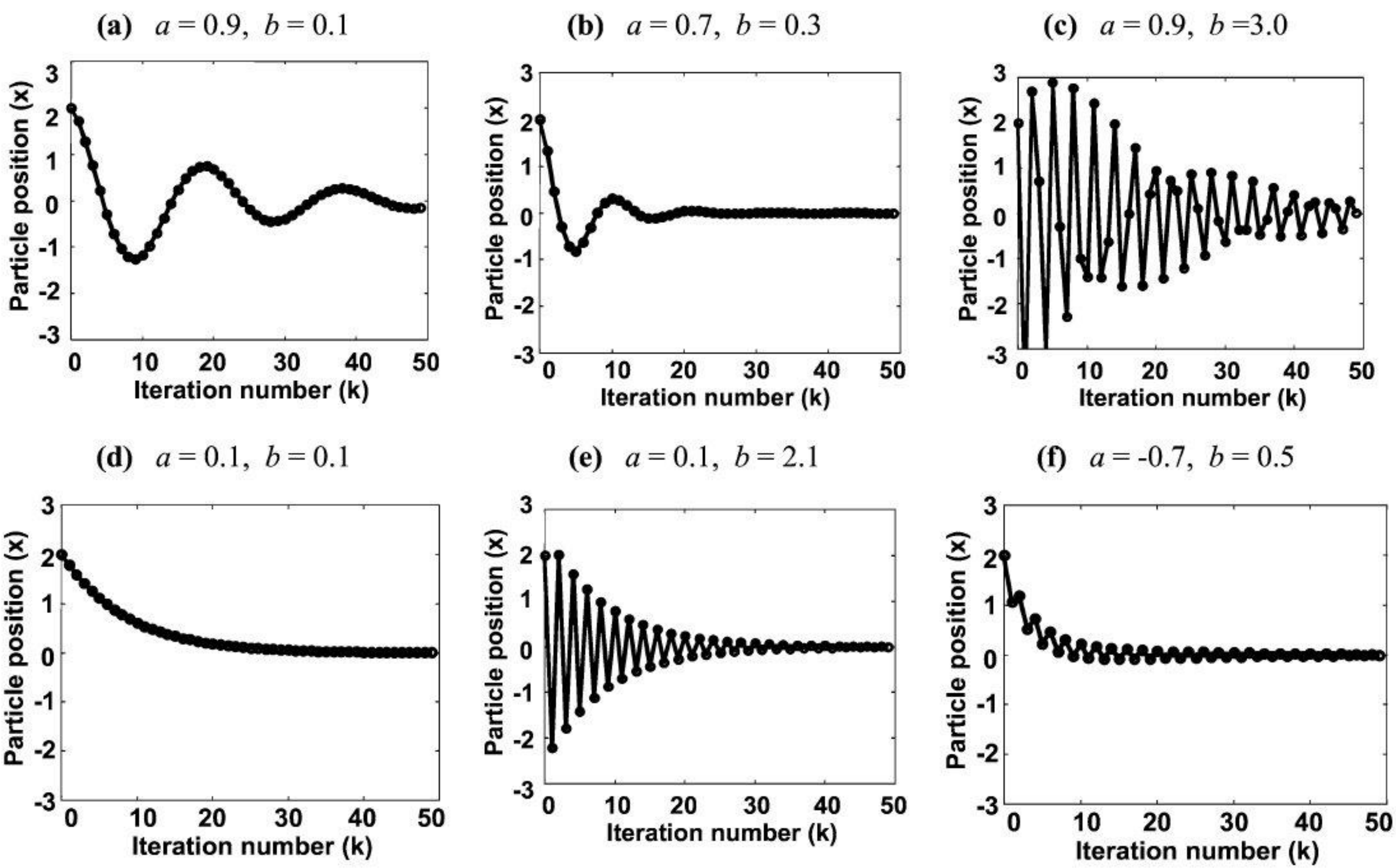
- Wersja lokalna_2:

$$v_{n+1} = w \cdot \left[v_n + \sum_{k \in Neighbors} c \cdot rand() \cdot (p_k - x_n) \right]$$

- Wersja lokalna/globalna ogólnie:

$$v_{n+1} = a \cdot v_n + b \cdot (r - x_n) \quad gdzie \quad r \approx p_{best} \quad \text{lub} \quad r \approx g_{best}$$

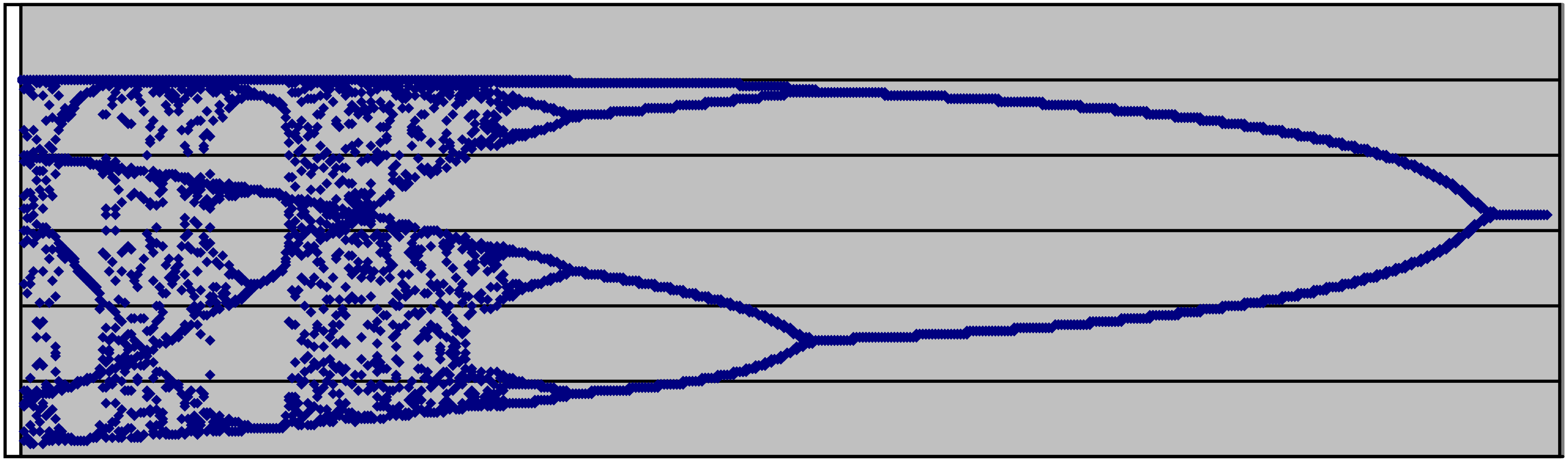
$$v_{k+1} = a \cdot v_k + b \cdot (r - x_k)$$



Pojęcie chaosu deterministycznego

System chaotyczny charakteryzuje się nieregularnym, nieprzewidywalnym zachowaniem (tzw. ***butterfly effect***).

System chaotyczny jest bardzo wrażliwy na warunki początkowe. Trajektorie zaczynające się w punktach położonych blisko siebie bardzo szybko rozchodzą się.



Przejście od zachowania liniowego do chaotycznego (bądź odwrotnie) zawiera bardzo często fazę *bifurkacji* po niej fazę *quadruplikacji*, itd. Możliwe są też inne zachowania chaotyczne.

Równanie logistyczne – przykład systemu chaotycznego

Jeden z klasycznych przykładów systemów chaotycznych to równanie logistyczne:

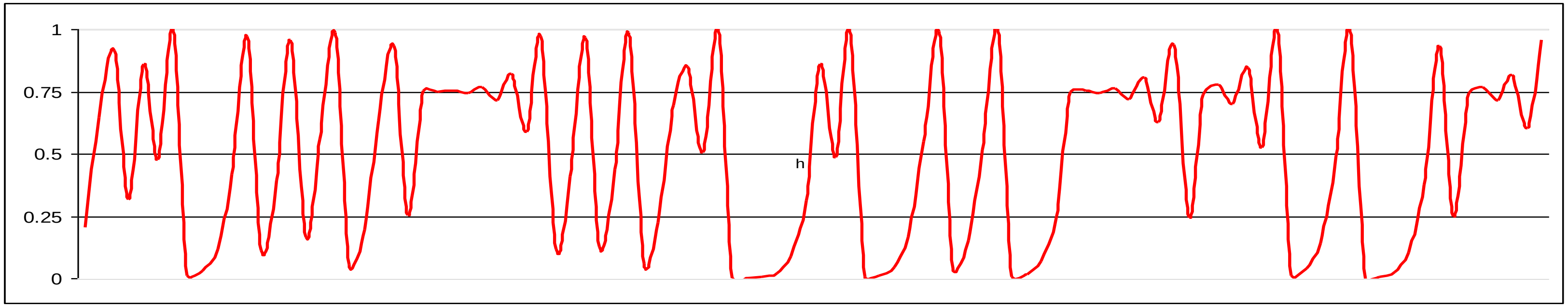
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

gdzie r > 0 jest stałą.

Własności:

- Zależnie od doboru stałej *r* oraz wyboru x_0 otrzymuje się różne zbiory punktów, które reprezentują różne zachowania chaotyczne
- Dla $x_0 \in [0,1]$ system utrzymuje się w przedziale [0,1] wtw., gdy $r \in (0,4]$

Równanie logistyczne – przykład (r = 4)



Przykłady innych systemów chaotycznych

Sunspot series: liczba zaobserwowanych plam na słońcu w kolejnych dniach (dostępne dane od XVIII wieku)

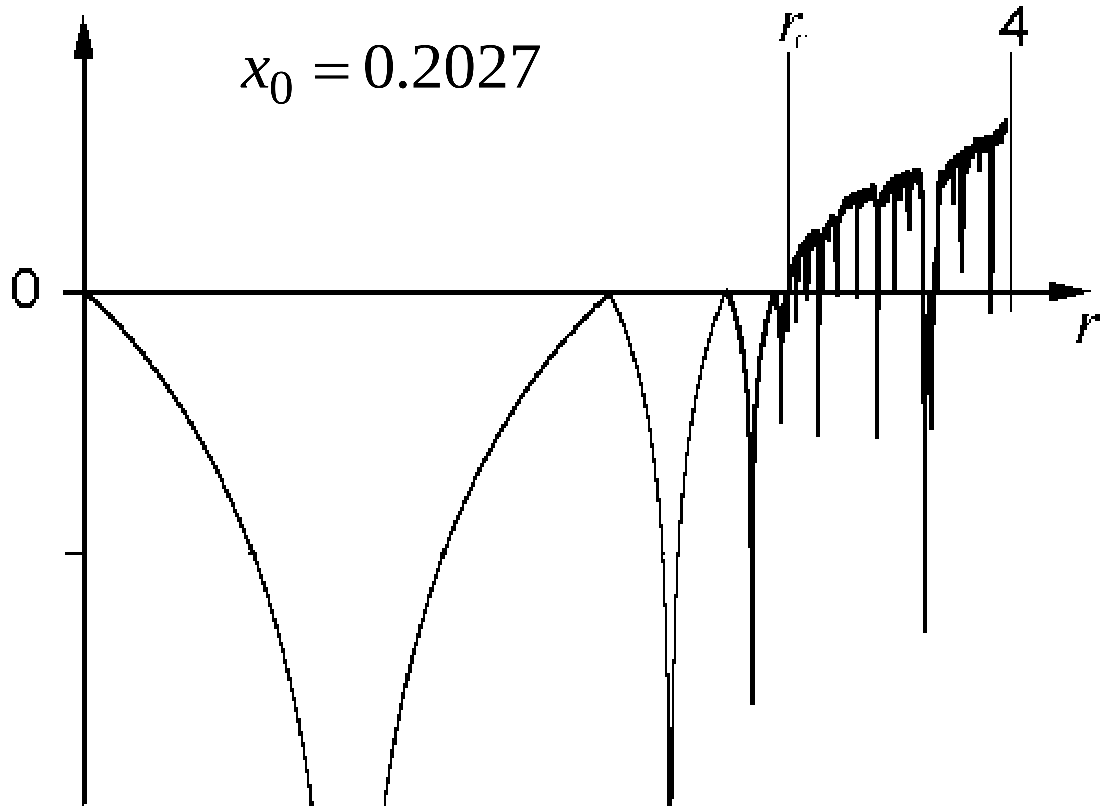
Mackey-Glass equation (model różnych zburzeń fizjologicznych, np. produkcji białych krwinek u pacjentów chorych na leukemię):

$$x'(t) = \frac{ax(t-\tau)}{1+x^c(t-\tau)} - bx(t),$$

gdzie, np. $a = 0.2, b = 0.1, c = 10, \tau = 30.$

„Miara chaotyczności” systemu

„Miarą chaotyczności” systemu jest tzw. wykładnik Lapunova, który mierzy ekspotencjalne odchylenie trajektorii systemu chaotycznego wynikające z nieznacznego odchylenia (zaburzenia) warunków początkowych.

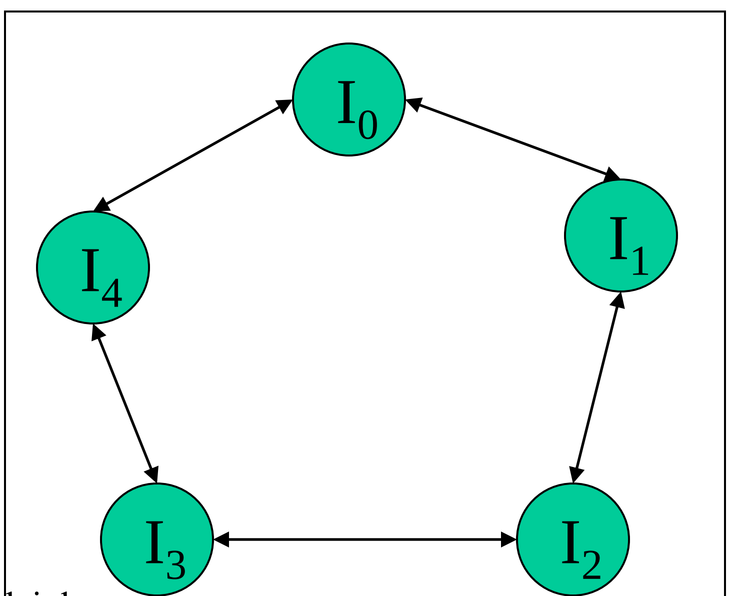


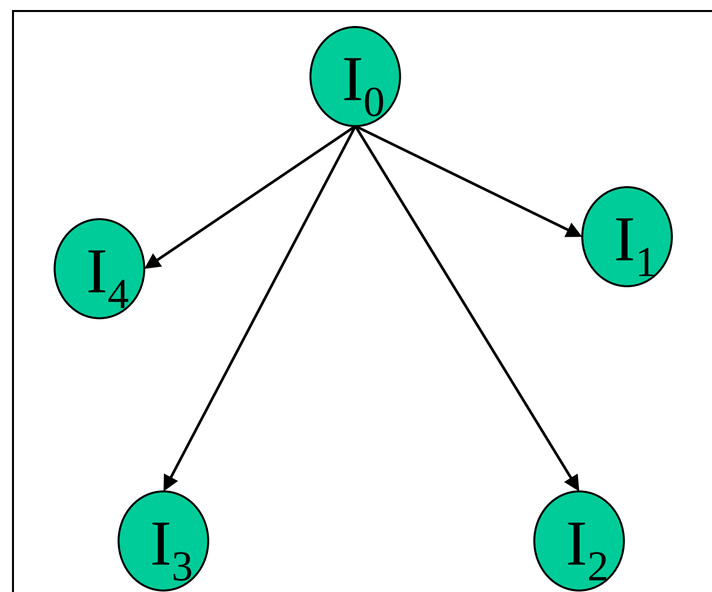
$$\lambda = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left|\frac{dx_{k+1}}{dx_k}\right|$$

PSO - topologia roju

Dwie podstawowe topologie roju rozpatrywane w literaturze:

- pierścień (sąsiedztwo lokalne - 3 cząstki)
- gwiazda (sąsiedztwo globalne)





Inne warianty metody PSO

- Klasyczna (globalna) PSO:

$$v_{n+1} = v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

lub

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

- LPSO (Liniowa zmiana współczynnika bezwładności)

$$v_{n+1} = w_n \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

$$w_n = (w_{init} - w_{final}) \frac{it_{\max} - n}{it_{\max}} + w_{final}$$

Większe wartości na początku (większa eksploracja), stopniowo malejące („dopieszczanie” rozwiązania)

Inne warianty metody PSO

- RPSO (Losowa zmiana współczynnika bezwładności)

$$w_n = 0,5 + \frac{rand()}{2}$$

wartość średnia = 0,75

- PSO with time varying acceleration coefficients (PSO-TVAC)

$$c_1 = (c_{1f} - c_{1i})\frac{t}{\max_t} + c_{1i}, \qquad c_2 = (c_{2f} - c_{2i})\frac{t}{\max_t} + c_{2i}$$

gdzie c_{1i} , c_{1f}, c_{2i} , c_{2f} są początkowymi / końcowymi wartościami

Inne warianty metody PSO

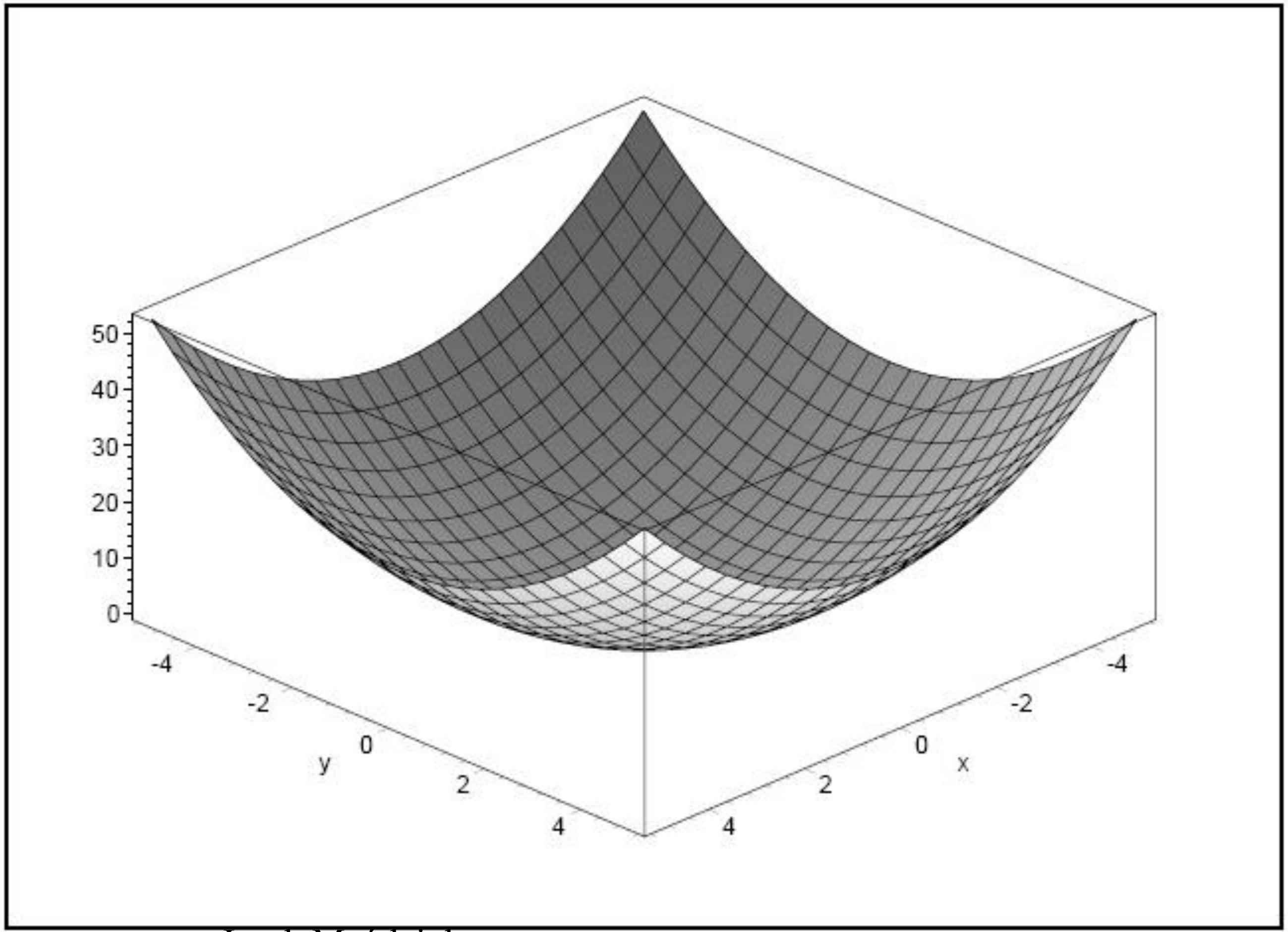
- HPSO (Hybrid PSO)
  - Wykorzystanie idei PSO w połączeniu z ideą ewolucji (selekcji) z AE
- Algorytm odkrywców/wynalazców (PSOO)
  - Idea: część populacji nie jest ograniczona przez g_best oraz l_best.
  - Większa swoboda w poszukiwaniu nowych atrakcyjnych rejonów. Jeżeli znajdą obiecujący obszar, to populacja może się w ten rejon przenieść.

Pierwsza funkcja de Jonga

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$x^* = (0,0,\ldots,0)$$

$$f(x^*) = 0$$

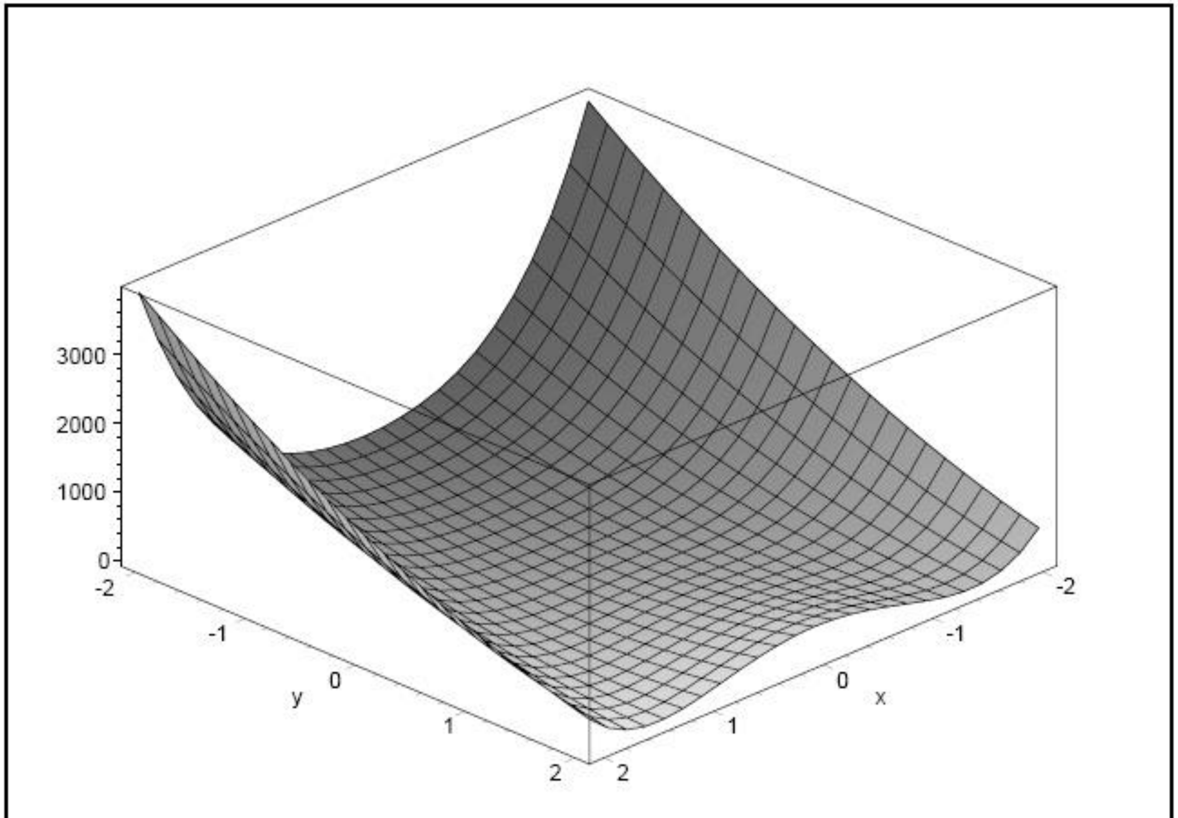


Dolina Rosenbrocka

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2 \right]$$

$$x^* = (1,1,\ldots,1)$$

$$f(x^*) = 0$$

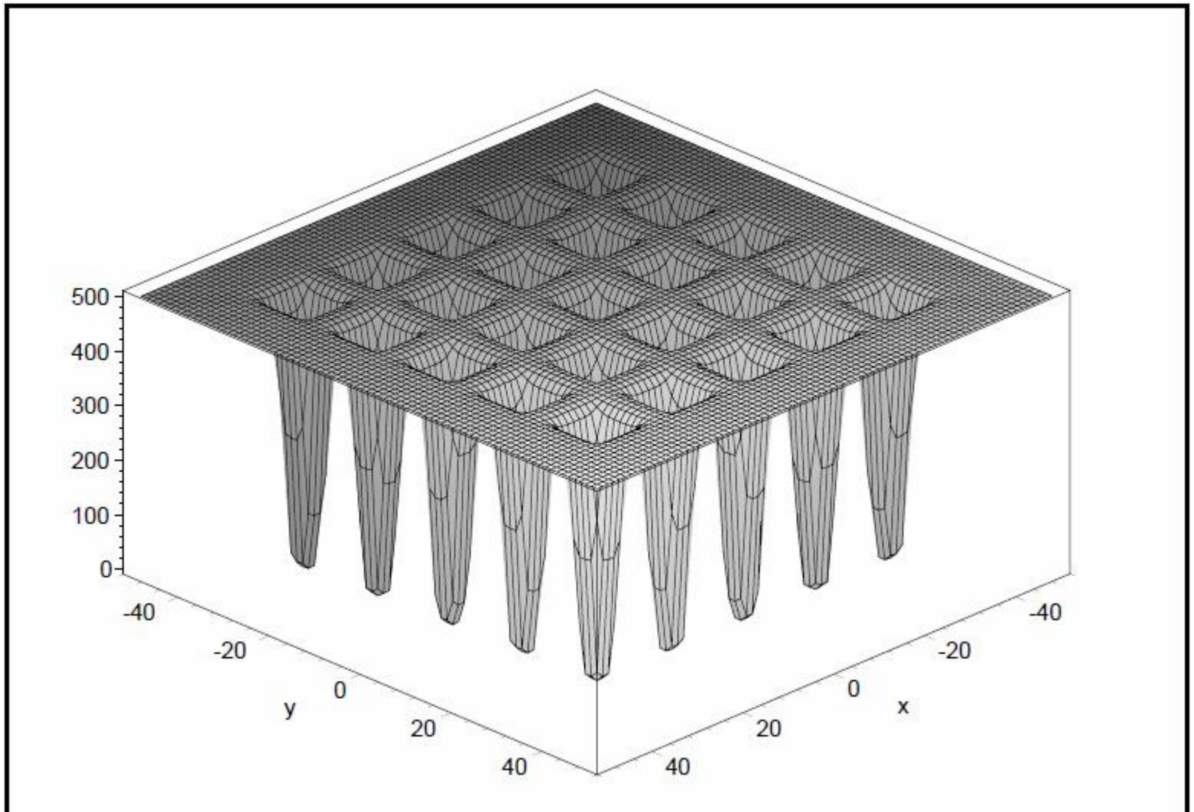


Piąta funkcja de Jonga

$$f(x) = \left(\sum_{i=-2}^{2} \sum_{j=-2}^{2} \left(5(i+2) + j + 3 + (x_1 - 16j)^6 + (x_2 - 16i)^6 \right)^{-1} \right)^{-1}$$

$$x^* = (-32, -32)$$

$$f(x^*) = 0{,}998$$

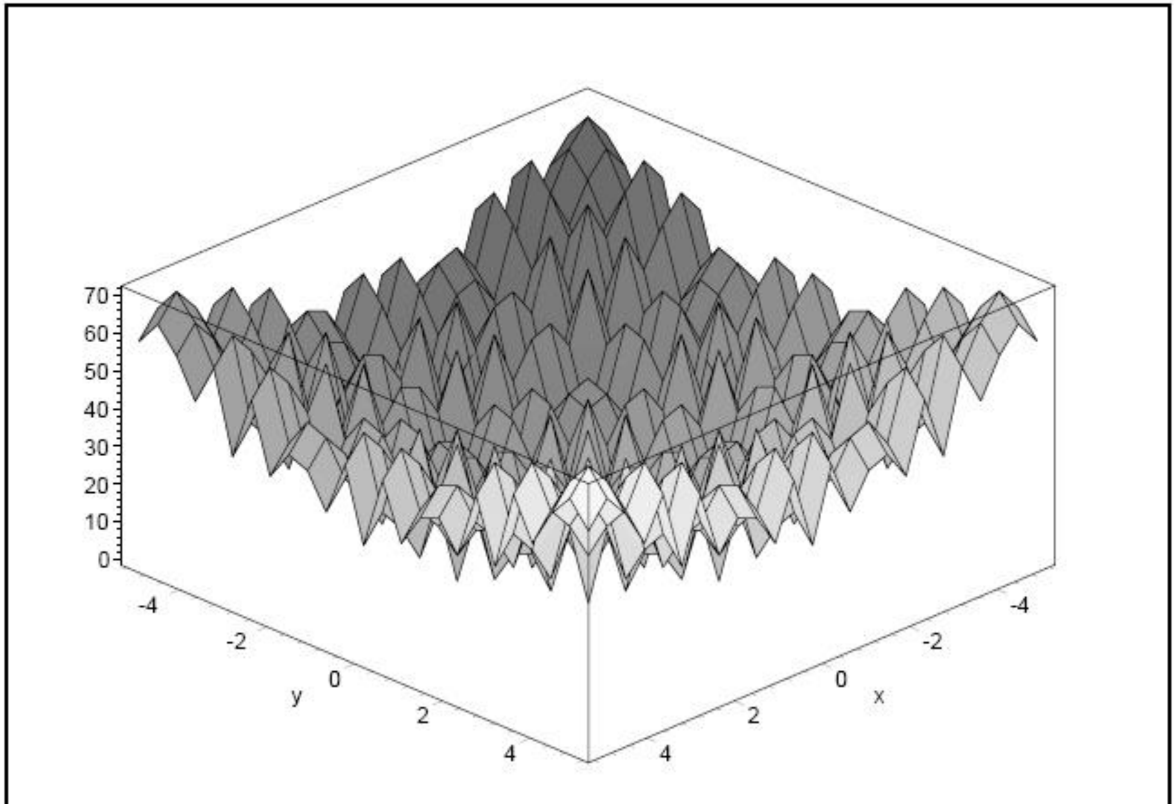


Funkcja Rastrigina

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 - 10\cos(2\Pi x_i) \right]$$

$$x^* = (0,0,\ldots,0)$$

$$f(x^*) = 0$$



Wyniki skuteczności PSOO / PSO

- Standardowa początkowa przestrzeń poszukiwań
- Początkowa przestrzeń poszukiwań nie zawiera minimum globalnego
- Początkowa przestrzeń przeszukiwań położona jest w bliskim sąsiedztwie minimum lokalnego

- Średnia ze 100 przebiegów algorytmu
- Każdy przebieg dotyczył 100 cząsteczek i trwał 100 iteracji
- Przebieg był uznawany za sukces jeżeli

$$\left\| x_{zn}^{*} - x^{*} \right\| < 0{,}05 \qquad \text{lub} \qquad \sqrt{f\left(x_{zn}^{*}\right) - f\left(x^{*}\right)} < 0{,}05$$

Wyniki skuteczności PSOO / PSO

	% sukcesu			wartość funkcji			średnia liczba iteracji		
FUNKCJA	**test 1**	**test 2**	**test 3**	**test 1**	**test 2**	**test 3**	**test 1**	**test 2**	**test 3**
Pierwsza funkcja de Jonga	100/ 100	100/ 100	-	0,00/ 0,00	0,00/ 0,00	-	27/22	32/26	-
Dolina Rosenbrocka	2/1	1/0	-	0,05/ 0,05	0,05/ 0,20	-	48/26	95/X	-
Piąta funkcja de Jonga	71/96	21/12	25/0	1,00/ 1,00	1,00/ 1,00	1,00/ 23,81	32/27	43/49	66/X
Funkcja Rastrigina	4/12	1/0	0/0	0,11/ 0,01	0,13/ 1,01	1,08/ 4,14	30/41	21/X	X/X

- Skuteczność różna dla różnych funkcji (dobór parametrów?)
- Bliskie sąsiedztwo minimum lokalnego ewidentnie przeszkadza (test 3)
- Wskazana jest inicjalizacja w obszarze zawierającym minimum globalne (testy 1 i 2)

Inne warianty metody PSO

- PSOwPPE – PSO with Particle Performance Evaluation

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1 rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

$$v_{n+1} = w \cdot v_n + c_1() \cdot rand() \cdot (p_{best} - x_n) + c_2 rand() \cdot (g_{best} - x_n)$$

$$c_1() = \begin{cases} 2 \\ 0{,}05 \end{cases}$$

zależnie od tego czy ***gbest*** była/nie była aktualizowana przez daną cząstkę w okresie ostatnich k iteracji

Większe znaczenie przypisywane jest jednostkom „aktywnie poprawiającym” rozwiązanie globalne, ponieważ to ***gbest*** stanowi „współdzieloną wiedzę w ramach roju” dotyczącą poszukiwanego rozwiązania

Algorytm PSO dla problemów z ograniczeniami

Dla każdej cząstki

Zainicjuj ją losowo ale tak by spełniała ograniczenia problemu

Do

{

Dla każdej cząstki

{

Policz wartość dopasowania

Jeżeli wartość dopasowania jest większa od najlepszego dotychczasowego dopasowania (**pbest**) i cząstka jest w dopuszczalnej podprzestrzeni (spełnia ograniczenia) to ustaw **pbest** jako aktualną wartość dopasowania

}

~~Wybierz cząstkę z najlepszym dopasowaniem w całym roju jako **gbest**~~

~~Dla każdej cząstki~~

{

Wybierz cząstkę z największą wartością **pbest** spośród jej sąsiadów i ustaw ją jako **lbest**

Policz jej szybkość zgodnie z równaniem szybkości

Zmodyfikuj jej pozycję zgodnie z równaniem zmiany pozycji

}

}

Dopóki nie przekroczono maksymalnej liczby iteracji lub błąd nie osiągnął zamierzonego minimum

Przykład: rekomendacja filmów

- Baza filmów wraz z profilami użytkowników
- Dobór na podstawie danych personalnych, oceny obejrzanych filmów oraz porównań z profilami innych użytkowników
- Baza MovieLens dostępna pod http://www.grouplens.org
  - 100,000 ocen (1-5) przez 943 użytkowników dla 1682 filmów
  - Każdy użytkownik ocenił co najmniej 20 filmów
- Pojedynczy wektor: 22 wymiary: ocena filmu, dane personalne (wiek, płeć, zawód), informacje o gatunkach filmów (18 cech)
- Odpowiednio dobrana funkcja odległości pomiędzy profilami.
- PSO z mutacją osobników

(D)CVRP(wTJ)

- $G=(V,E);\ V=\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$
- $E=\{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, i < j\}$
- v_0 – centralny magazyn;
- q_i – zapotrzebowanie klienta w lokalizacji v_i ;($q_i << Q$)
- d_{ij} – zmienia się w funkcji korka

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \sum_{k=1}^{n} x_{ij}^{k}$$

$$x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j)\ jest\ \ fragmentem\ drogi\ k-tej \\ 0, & w\ p.p. \end{cases}$$

Porównanie PSO z algorytmem mrówkowym

- Podobieństwa:
  - metoda heurystyczna,
  - iteracyjny schemat działania,
  - na zróżnicowanie populacji ma wpływ kilka parametrów, których dobór ma kluczowe znaczenie.

Porównanie PSO z algorytmem mrówkowym

- Różnice:
  - dane wejściowe - populacja losowych (PSO) / nielosowych (ANT) osobników,
  - cząstki posiadają (PSO) / nie posiadają (ANT) pamięci o najlepszym dotychczasowym położeniu (rozwiązaniu),
  - wymiana informacji poprzez interakcje z g/l best (PSO) vs wiedza całego zbiorowiska (ANT).

Porównanie PSO z algorytmem ewolucyjnym

- Podobieństwa:
  - metoda heurystyczna;
  - iteracyjny schemat działania;
  - dane wejściowe - populacja losowych osobników;
  - na zróżnicowanie populacji ma wpływ kilka parametrów, których dobór ma kluczowe znaczenie.

Porównanie PSO z algorytmem ewolucyjnym

- Różnice:
  - brak ewolucyjnego operatora mutacji;
  - w AE następowała wymiana informacji poprzez krzyżowanie (każdy z każdym), w PSO schemat (każdy z jednym: *gbest* lub *lbest*);
  - cząstki posiadają pamięć o najlepszym dotychczasowym położeniu (rozwiązaniu).

Pytania ?