21.4. Интегралы от дифференциальных биномов

Выражение $x^m(a+bx^n)^p dx (a \neq 0, b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом.* Будем рассматривать случаи, когда n, m и p — рациональные, a a и b — действительные числа.

Положим
$$x = t^{1/n}, \tag{21.12}$$
Тогда $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1} dt$ и, следовательно,
$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}} dt.$$
Таким образом, интеграл
$$\int x^m (a+bx^n)^p dx \tag{21.13}$$
сводится подстановкой (21.12) к интегралу типа
$$\int (a+bt)^p t^q dt, \tag{21.14}$$
где p и q рациональны. В рассматриваемом случае
$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Первый случай: p — целое число. Пусть $q = r/s$, где r и s — целые числа. Согласно результатам п. 21.2, в этом случае подстановка $z = t^{1/s}$ сводит интеграл (21.14) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q — целое число. Пусть теперь $p = r/s$, r и s — целые числа. Согласно результатам п. 21.2, интеграл (21.14) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{1/s}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p + q$ — целое. Пусть $p = r/s$, где s -целое. Запишем для наглядности интеграл (21.14) в виде
$$\int (a+bt^n)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p\,+\,q}\, dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 21.2. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка $z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/s}$.

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p + q$ является целым, интеграл (21.14) при помощи указанных выше подстановок приводиться к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (21.13) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (21.13) может быть сведён к интегралу от рациональной дроби. При этом в том случае, когда p целое, это сведение осуществляет подстановка $z = x^{n/s}$, где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, т.е. $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в том случае, когда $\frac{m+1}{n}$ — целое, подстановка

$$(z = a + bx^n)^{1/s},$$

где число s является знаменателем дроби p, т.е. $p = \frac{r}{s}$, а в том случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ — целое, — подстановка

$$z = (ax^{-n} + b)^{1/s},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

Этот факт был известен ещё И. Ньютону. Л. Эйлер высказал предположение, что ни для каких других показателей m, интеграл от дифференциального бинома нельзя свести к интегралу от рациональных функций. Для рациональных показателей m, n и p, не удовлетворяющих указанным выше условиям, это было доказано П. Л. Чебышёвым, а для иррациональных — Д. Д. Мордухай-Болотовским.[1]

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \sqrt{x}\sqrt[4]{1 - 1/\sqrt{x^3}}dx = \int x^{1/2}(1 - x^{-3/2})^{1/4}dx.$$

Здесь $m = 1/2$, $n = -3/2$, $p = 1/4$ и $(m+1)/n = -1$; имеем второй случай.

Сделаем указанную выше подстановку:

$$z = (1 - x^{-3/2})^{1/4}; \tag{21.15}$$

[1]Д. Д. мордухай-Болотовский (1876-1952) - русский математик.

отсюда $x = (1 - z^4)^{-2/3}$, $dx = \frac{8}{3}(1 - z^4)^{-5/3}\, z^3 \; dz$, поэтому

$$I = \frac{8}{3}\int \frac{z^4}{(1-z^4)^2}dz = \frac{2}{3}\int z\, d\frac{1}{1-z^4} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{1-z^4} - \int \frac{dz}{1-z^4}\right) =$$

$$= \frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$\frac{2z}{3(1-z^4)} - \frac{1}{6}ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} z + C,$$

где z выражается через x по формуле (21.15).