

Sistemas Dinâmicos não Lineares

Lista de exercícios 1 - 2020

Renata Biaggi Biazzi

27 de março de 2020

1

A partir da leitura do artigo "*Simple mathematical models with very complicated dynamic*", R. M. May, *Nature*, 1976 [1], para estudar simples modelos de equações diferenciais de primeira ordem, usados em inúmeras áreas de estudo, iremos reproduzir numericamente alguns dos resultados apresentados e discutí-los. Todos os códigos dessas simulações estão disponíveis no Apêndice A.

Estudaremos o mapa (termo usado para sistemas discretos no tempo) $F(X_t)$ do Modelo Logístico, que é descrito por:

$$F(X_t) = X_{t+1} = aX_t(1 - X_t) \quad (1)$$

essa equação descreve como uma variável X_t evolui em um intervalo discreto de tempo para X_{t+1} , dependendo do próprio valor X_t e do parâmetro a . Para que esse crescimento não exploda, indo a $-\infty$, ou não fique estático na solução $X_t = X_{t+1} = 0$, a variável inicial $X_{t=0}$ deve estar entre os valores $0 < X_t < 1$, isso garantirá que a evolução da equação, conforme o número de iterações/tempo t evolui, esteja sempre dentro do intervalo $[0, 1]$. Além disso, os valores do parâmetro a também definem regimes de comportamento de $F(X_t)$. Derivando $F(X_t)$, a função toma um máximo para X_{max} :

$$\frac{\partial F(X_t)}{\partial X_t} = a - 2aX_{max} = 0, \quad X_{max} = 1/2, \quad F(X_{max}) = a/4$$

Dessa forma, para manter $F(X_t) < 1$, o parâmetro a deve ser necessariamente $a < 4$, pois de outra forma a função volta a explodir para $-\infty$. Além disso, para $a < 1$ o valor de X_{t+1} será sempre um valor $aX_t < 1$ multiplicado por outro $(1 - X_t) < 1$, de forma que irá necessariamente diminuir e tender a $X_{t+1} = 0$ depois de algumas iterações. Esse outro regime também não nos interessa, pois tem comportamento trivial. Assim, o único regime em que o comportamento da função logística não é trivial é para $1 < a < 4$ e $0 < X_t < 1$.

A primeira análise que faremos é da relação de X_t com X_{t+1} , analisaremos duas funções com parâmetros diferentes:

$$F_a(X_t) = 2.7X_t(1 - X_t) \quad F_b(X_t) = 3.414X_t(1 - X_t)$$

simuladas numericamente na Figura [1]:

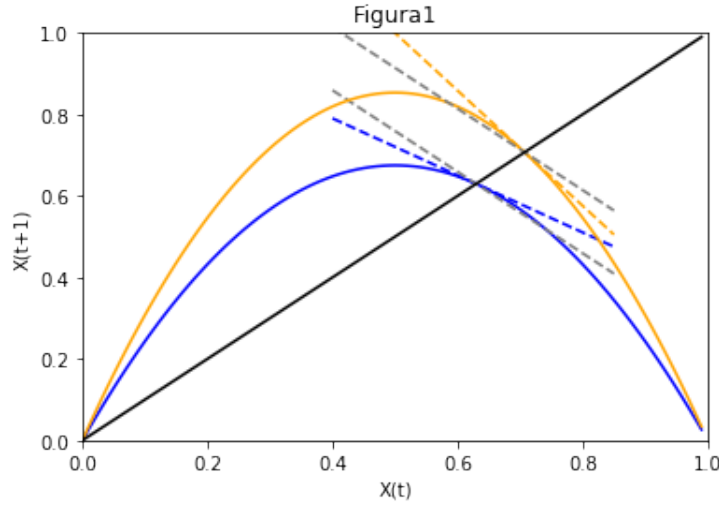


Figura 1: A linha azul corresponde à função logística F_a cujo parâmetro a tem um valor $a = 2.700$ e a linha laranja corresponde à função logística F_b cujo parâmetro a tem valor $b = 3.414$. A linha preta corresponde a função $y = x$, e as linhas azul e laranja tracejadas correspondem a reta tangente no ponto em que a diagonal $y = x$ cruza com as funções logísticas F_a e F_b . As linhas cinzas correspondem a reta -45° e não estão presentes na figura original do arquivo, porém resolvi reproduzi-las para ficar mais explícitas as diferentes inclinações das tangentes em relação a ela. (Figura 1 do artigo [1].)

Podemos observar na Figura 1 que a reta 45° cruza com as funções em dois pontos, um deles é a solução trivial $X_t = 0$, já mencionada anteriormente. Ambos os pontos obedecem a relação $F(X^*) = X^*$ e são chamados de pontos fixos, pois neles: $X_{t+1} = X_t$. Além do método gráfico, nesse caso de uma função simples também podemos obter esse ponto X^* analiticamente, resolvendo a equação:

$$X^* = aX^*(1 - X^*) \quad \rightarrow \quad X^* = \frac{a-1}{a}$$

Resta saber se esses pontos são pontos de equilíbrio instável: valores de X_t nas redondezas de um ponto fixo instável tendem a se afastar dele, e a distância $|X_t - X^*|$ tende a aumentar; ou equilíbrio estável: valores de X_t nas redondezas de um ponto fixo estável tendem a se aproximar dele, e a distância $|X_t - X^*|$ tende a diminuir.

Mais uma vez, podemos analisar a estabilidade tanto graficamente quanto analiticamente. Graficamente, a estabilidade é dada pela inclinação da tangente no ponto X^* : se a inclinação for menor do que a reta de inclinação -45° , então é um ponto estável. Se a inclinação for mais aguda do que a da reta -45° , então é um ponto instável.

Analiticamente, a estabilidade é dada pelo cálculo da derivada no ponto fixo

$$\lambda(X^*) = \frac{\partial F}{\partial X}(X = X^*) = 2 - a$$

que nos dá a inclinação da reta tangente no ponto X^* : se $-1 < \lambda(X^*) < 1$ então é um ponto pelo menos localmente estável, se $\lambda(X^*) > 1$ ou $\lambda(X^*) < -1$, então é um ponto instável. Esses valores foram calculados na simulação: $\lambda(X^*)_a = -0.700$ e $\lambda(X^*)_b = -1.414$, confirmando a análise feita graficamente.

Nesse modelo logístico, como $\lambda(X^*) = 2 - a$, só teremos um ponto localmente estável no regime $1 < a < 3$. Esse ponto estável atrairá todas as trajetórias (uma trajetória é o conjunto de pontos $X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots$, dado o ponto inicial X_t) para $0 < X_t < 1$.

Com essas ferramentas de análise, podemos então imaginar que conforme reduzimos o valor de a , até valores $a < 1$, a curva azul da figura iria ficando cada vez mais baixa, até ficar abaixo da reta $y = x$ para $a < 1$ e não ter intersecção com ela além do ponto $X = 0$, ou seja, só teríamos o valor nulo como ponto estável. Em contrapartida, se aumentamos o valor de a , a inclinação da reta tangente $\lambda(X^*)_a$ iria aumentando, até chegar em inclinações maiores do que -45° a partir de $a > 3$, de forma que esse ponto passaria a ser instável. Nesse regime o ponto $X^* = 0$ é instável

também, basta olhar que a derivada nele é maior do que a reta $y = x$).

Para estudar melhor o que ocorre para $3 < a < 4$, iremos olhar o mapa logístico com passo de duas iterações, $t = 2$, para os dois parâmetros a e b :

$$X_{t+2} = F[F(X_t)] \quad \text{ou} \quad X_{t+2} = F^{(2)}(X_t)$$

(as figuras estão trocadas no artigo, então mantive a ordem de Figura 2: parâmetro a ; Figura 3: parâmetro b).

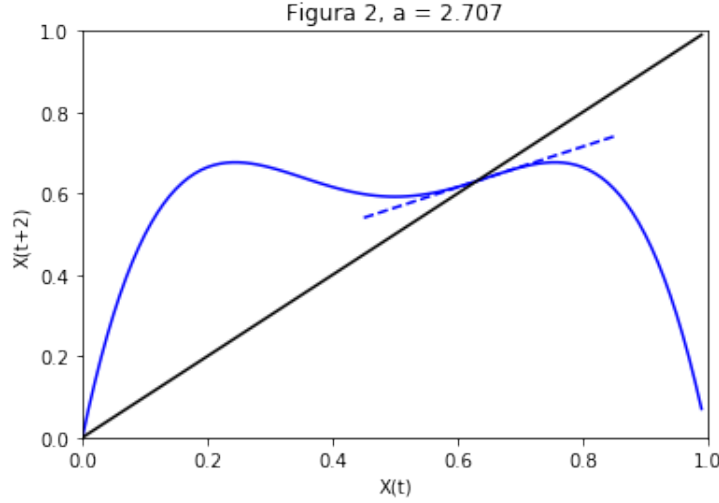


Figura 2: A linha azul corresponde à função logística $F_a^{(2)}(X_t)$ cujo o parâmetro tem valor $a = 2.707$. A linha preta corresponde a função $y = x$, e a linha azul tracejada corresponde a reta tangente no ponto X_2^* em que a diagonal $y = x$ cruza com a função $F_a^{(2)}(X_t)$. (Figura 3 do artigo [1].)

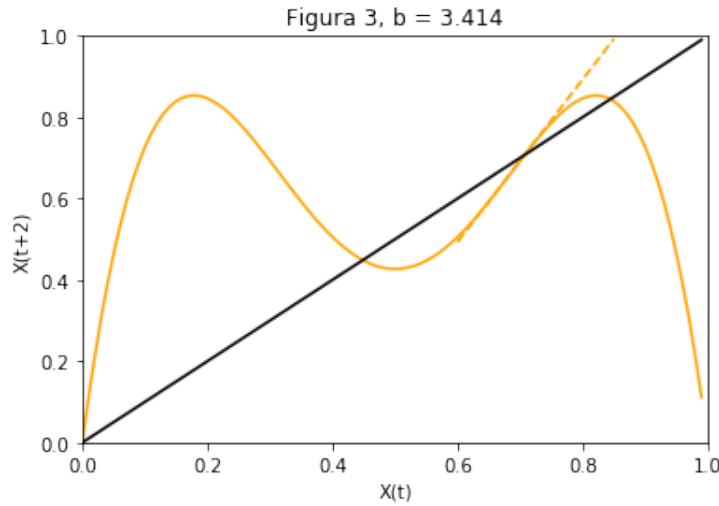


Figura 3: A linha laranja corresponde à função logística $F_b^{(2)}(X_t)$ cujo o parâmetro tem valor $b = 3.414$. A linha preta corresponde a função $y = x$, e a linha laranja tracejada corresponde a reta tangente nos pontos X_2^* em que a diagonal $y = x$ cruza com a função $F_b^{(2)}(X_t)$. (Figura 2 do artigo [1].)

Como vemos em ambos os casos, o ponto fixo de $F(X_t)$, X^* , também é de $F^{(2)}(X_t)$. Uma relação muito útil para analisar a estabilidade dele é dada por:

$$\lambda^{(2)}(X^*) = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2$$

Na Figura 2 ($a = 2.707$), vemos que a tangente menos inclinada do que a reta $y = x$ indica que o ponto fixo continua estável. Além disso, analiticamente pela relação definida acima podemos perceber que se $|\lambda^{(1)}(X^*)| < 1$, então $\lambda^{(2)}(X^*) < 1$. Ou seja, um ponto estável em $F(X_t)$ continua sendo em $F^{(2)}(X_t)$.

Na Figura 3 ($b = 3.414$), vemos que a tangente mais inclinada do que a reta $y = x$ indica que o ponto fixo presente também no caso $F(X_t)$ continua instável. Além disso, vemos que conforme b aumenta, a partir de $b > 3$, a inclinação das "corcundas" da função aumenta e essa inclinação faz com que dois novos pontos fixos apareçam, necessariamente, um acima e outro abaixo do ponto fixo existente previamente. Esses dois novos pontos fixos tem período 2, e inicialmente são estáveis, pois inicialmente eles surgem com inclinação tangente menor do que a reta de 45° . Entretanto, conforme você aumenta o valor de b , a inclinação da tangente dos novos pontos fixos de período 2 aumenta também até ficar maior do que a reta de 45° . Também podemos usar a relação acima para prever analiticamente que se $|\lambda^{(1)}(X^*)| > 1$, então $\lambda^{(2)}(X^*) > 1$. Ou seja, um ponto instável em $F(X_t)$ também continua sendo em $F^{(2)}(X_t)$.

Para estudar o que ocorre com esses novos pontos fixos de período 2, conforme você continua aumentando o valor de a , simulamos o Diagrama de Bifurcação dos trechos $2.5 < a < 3.57$ e $3.8284 < a < 3.85$ (códigos disponíveis no Apêndice A).

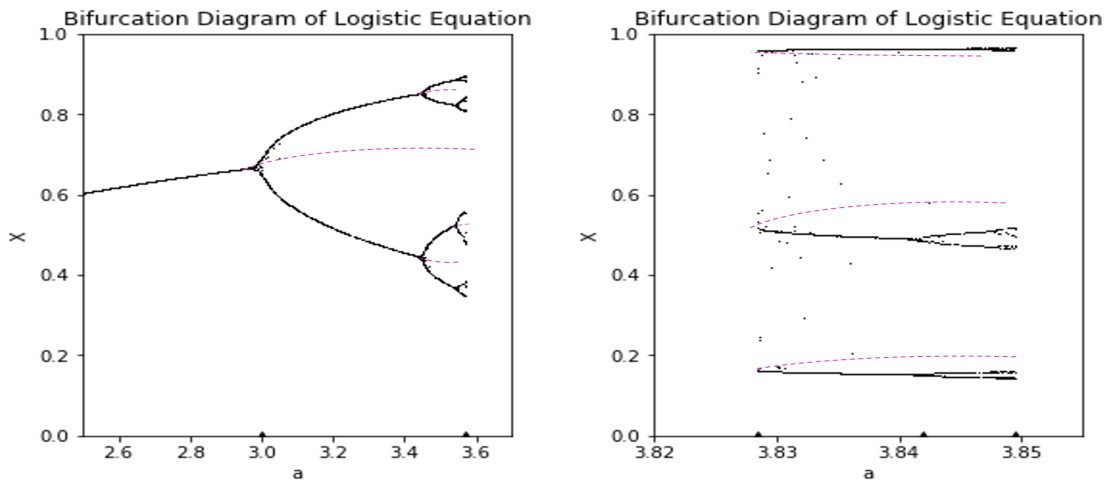


Figura 4: As linhas pretas foram feitas simulando cada ponto estável X após 100 iterações de cada valor inicial sorteado numa distribuição uniforme $X_t \in [0, 1]$. As linhas tracejadas em rosa são uma aproximação manual de onde estariam localizados os pontos instáveis. Na primeira figura (4.1), as setas pretas no eixo x apotam os pontos: $a = 3.0000$ e $a = 3.5700$. Na segunda figura (4.2), os pontos: $a = 3.8284$, $a = e$ e $a = 3.8495$. (Figura 4 do artigo [1].)

Um Diagrama de Bifurcação é feito calculando-se um valor aleatório para X_t inicial, no caso foi utilizada a função uniforme no intervalo $[0, 1]$. Fazendo várias iterações com esse valor de forma que a trajetória de cada um desses pontos iniciais deva ter "tempo suficiente" para ser sugada para o ponto estável (ralo), com o valor de X depois de várias iterações tendendo para os valores dos pontos fixos estáveis. É necessário dar tempo suficiente para efeitos transientes devido às condições iniciais se dissiparem. No nosso caso, viu-se que um tempo $t = 100$ iterações foi suficiente para o valor de X convergir para os pontos fixos estáveis. Assim, na Figura [4] foi simulado esse algoritmo e é possível notar (visível em preto) esses pontos fixos estáveis. Não é possível, através de simulações desse tipo, achar os pontos fixos instáveis, pois por definição eles se comportam como "fontes" e os valor de X tendem a se afastar deles, de forma que a simulação não irá tender para esses valores.

Analisando a Figura 4.1, podemos ver que conforme aumentamos a , a partir de $a = 3$ o único ponto fixo existente, que inicialmente era estável, passa a ser instável. Surgem mais dois pontos fixos, estáveis. Eles continuam assim até que o valor de a é aumentado e, mais uma vez, chega a um patamar por voltar de $a = 3.5$ em que há novamente uma bifurcação em cada ponto fixo estável, que passam a ser instáveis e dois novos pontos fixos estáveis surgem. Esse processo se repete com o aumento de a , de forma que cada ciclo estável de período k passa a ser instável e se bifurcam cada um em 2 novos pontos críticos estáveis de período $2k$. Esse é um processo de bifurcação de pontos críticos estáveis, gerando ciclos estáveis de período 2^k .

Conforme aumentamos a , esse processo de produzir ciclos de período 2^k depois de k bifurcações continua infinitamente, com $k \rightarrow \infty$. Entretanto, o processo se mantém convergente, pois o intervalo de valores em que cada X estável se mantém estável diminui, de forma que o processo não diverge e é limitado por um valor crítico do parâmetro $a = a_c$ no qual há uma acumulação de ciclos de período 2^k , ou seja, até esse valor os intervalos em que pontos fixos são estáveis são bem definidos em relação a a para cada ponto fixo, não havendo intersecções, e têm períodos bem definidos. Para a equação logística, esse valor é $a_c = 3.5700$, marcado no diagrama de bifurcação acima. A partir desse valor, nenhum dos ciclos anteriores se mantém estável, pois há um número infinito de pontos fixos com diferentes periodicidades e um número infinito de ciclos periódicos diferentes, como discutido no artigo 1. Também é apresentado no artigo o termo "caótico", representando uma dinâmica de pontos indistinguíveis de processos estocásticos, e que passou a ser utilizado para definir o regime em que há infinitas possibilidades de órbitas diferentes, pois há um número incontável de pontos iniciais X_0 que têm trajetórias limitadas e totalmente aperiódicas, nunca se repetindo independente do tempo de iteração da séries.

A partir do valor crítico até o valor $a = 3.8284$, temos esse regime caótico em que surgem infinitos ciclos de período par e, conforme aumenta-se mais o valor de a , aparecem também a partir de $a = 3.6786$, segundo o artigo 1, ciclos de período ímpar com longos períodos, que vão diminuindo até o aparecimento do menor ciclo ímpar possível, de período três, no ponto $a = 3.8284$. A Figura 4.2, a direita, começa com esse valor, em que surgem órbitas de periodicidade $3 \cdot 2^k$. Cada bifurcação de pontos fixos com órbita de período 3 tem um ponto fixo estável, simulado e visível como os pontos pretos na Figura 4.2, e um instável, feito manualmente como uma aproximação na Figura 4.2 e visíveis como a linha pontilhada rosa. A partir desse ponto, conforme aumentamos a , teremos novamente bifurcações por volta de $a = 3.8420$, quando os pontos fixos de período 3 se tornam instáveis e geram duplas de pontos um estável e outro instável de período $3 \cdot 2^k$ a cada nova bifurcação k , e assim por diante, até chegar em um novo ponto de acumulação $a = 3.8495$, a partir do qual o comportamento voltará a ser classificado como uma dinâmica caótica, com ciclos de todo número inteiro de períodos e um número incontável de trajetórias assintoticamente (pois não é possível fazer simulações infinitamente) aperiódicas.

Para entender melhor como ciclos de período 3 surgem, foi simulada a Figura 5 do artigo 1 a partir da função:

$$X_{t+3} = F^{(3)}(X_t)$$

representando a dinâmica dos pontos estáveis de período 3.

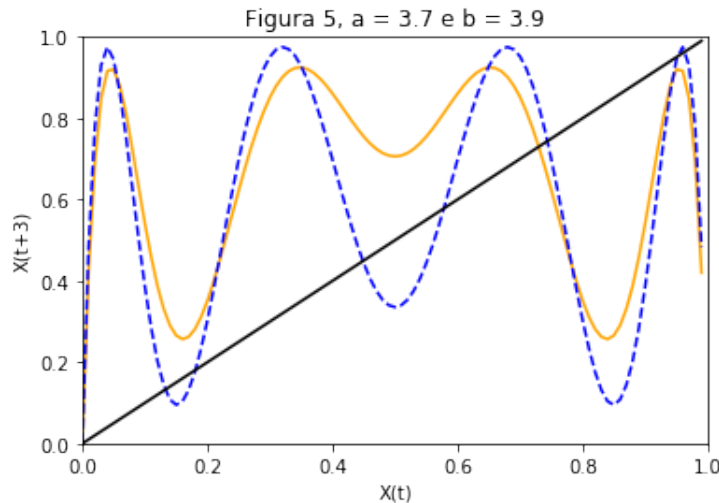


Figura 5: A linha laranja corresponde à função logística $F_a^{(3)}(X_t)$ cujo o parâmetro tem valor $a = 3.7$. A linha azul corresponde à função logística $F_b^{(3)}(X_t)$ cujo o parâmetro tem valor $b = 3.9$. A linha preta corresponde a função $y = x$. (Figura 5 do artigo [1].)

Como podemos observar na Figura 5, a linha laranja tem apenas uma intersecção (diferente de zero) com a reta $y = x$, representando apenas um ponto fixo de período 3. Conforme aumentamos a , podemos imaginar que as 4 corcundas da função laranja vão se acentuando, de forma que os dois

primeiros vales, ao "abaixar" tocam e passam a reta $x = y$ e o último pico "sobe" e faz o mesmo, todos simultaneamente. Quando isso ocorre, para cada vale/pico dois novos pontos fixos surgem, um será instável e o outro estável (conforme discutimos na Figura anterior).

Essa análise da estabilidade pode ser feita graficamente, através das derivadas nos pontos fixos, com base nos mesmo critério de estabilidade usados no caso de pontos de período 2: inicialmente, 3 dos pontos assim que surgem tem inclinação $\lambda = 1$, e conforme a aumenta, irão para 0 e depois $\lambda = -1$, sendo estáveis durante nesse intervalo. Os outros 3 pontos também começam com $\lambda = 1$, porém conforme a aumenta vão para $\lambda > 1$, nunca se tornando estáveis. Quando os 3 pontos estáveis, chegando a $\lambda = -1$ passam a ter valor de $\lambda < -1$, eles se tornam instáveis e a partir deles mais pontos são gerados, com ciclos estáveis de período 6, e esse processo se repete, semelhante ao 2^k , mas com $3 \cdot 2^k$, gerando ciclos de período 6, 12, 24,... até o ponto de acumulação, como descrito na Figura 4, em que novamente a dinâmica é dominada pelo comportamento caótico.

2

Para estudar o mesmo cenário anterior da Equação Logística, porém de forma mais geral, baseado no Capítulo.1 do livro "CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems, Alligood, Sauer and Yorke, Springer, 1996 ". Foi simulado (código disponível no Apêndice B) o Diagrama de bifurcação para todos os valores de $1 < a < 4$, em que o comportamento do modelo não é trivial:

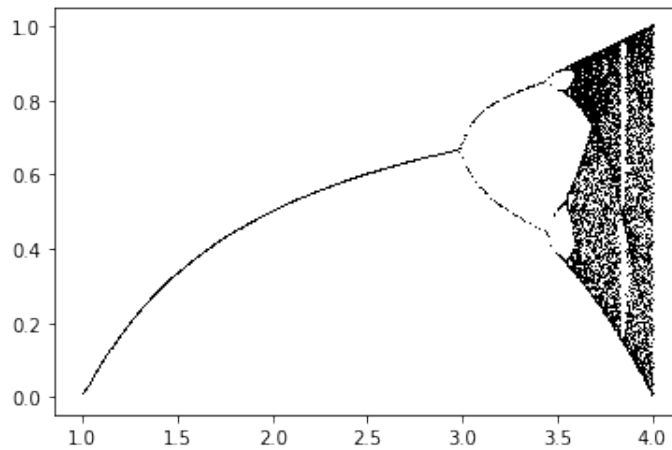


Figura 6: Diagrama de Bifurcação da Equação Logística. No eixo y: valor de X_t , no eixo x: valores do parâmetro a . Foram simulados 600 pontos entre $1 < a < 4$ e 10000 pontos (para aumentar a resolução) entre $3.5 < a < 4$. Em todos os casos, cada valor de X_t plotado é o resultado 101 de 100 iterações. (Figura 1.6 do livro [2].)

Conforme discutido na questão anterior, vemos nessa figura apenas os pontos estáveis, pois eles atraem as órbitas e são os valores que elas passam a ter depois de várias iterações. Os pontos instáveis não atraem as órbitas, então não são visíveis nesse tipo diagrama.

Essa figura representa o nascimento, a evolução e a morte de conjuntos de pontos fixos estáveis (atratores). Nesse Diagrama de Bifurcação completo, os dois tipos de bifurcação descritos na questão anterior estão presentes: bifurcação tangente, quando a "corcunda" de curvas se acentua e novos trechos de $F(X)$ passam a cruzar a reta $y = x$ e nascem com inclinação $\lambda = 1$, e conforme a aumenta um deles é estável e o outro instável, como mostrado na Figura 5; bifurcação "forçada" (traduzindo do inglês pitchfork) em que um ponto estável, com o aumento de a , chega a inclinação $\lambda = -1$ e, a partir desse ponto, com o aumento da inclinação, passa a ser instável e gera um novo ciclo inicialmente estável de período 2^k , como mostrado na Figura 4.

Para estudar melhor as órbitas caóticas, ou seja, órbitas que nunca são atraídas por nenhum "ralo", por nenhum ponto ou conjunto de pontos estáveis bem definidos, introduziremos o número/expoente de Lyapunov.

Na questão anterior, determinamos a estabilidade através do valor λ , ou seja, da derivada de $F(X)$ com respeito a X no ponto estável ou nos pontos de órbita periódica. Se $|\lambda| < 1$, a distância entre X_{t+1} e X_t irá diminuir, classificamos o ponto como estável, o que significa que ele "atrai" as

órbitas para seu valor. Se $|\lambda| > 1$, quer dizer que essa distância está aumentando, ou seja, esse ponto não é um atrator, não é estável e sim instável. Utilizando essa ideia, definimos o número de Lyapunov de um ponto fixo x_1 como a derivada: $|\lambda(x_1)| = |f'(x_1)|$. Portanto, o expoente de Lyapunov de um ponto fixo x_1 será simplesmente o expoente desse número:

$$h(x_1) = \ln(|f'(x_1)|)$$

Já para o caso de um ponto periódico x_1 de período k , definimos o expoente de Lyapunov como:

$$h(x_1) = \frac{\ln|f'(x_1)| + \ln|f'(x_2)| + \dots + \ln|f'(x_k)|}{k} \quad (2)$$

Uma explicação mais detalhada de porque no caso periódico o expoente tem essa forma, está disponível na seção 3.1 do livro 2. De forma resumida, ela está relacionada com a divergência de um ponto X do seu vizinho, no caso de órbitas de período k , ser uma divergência cumulativa de cada iteração t que vai de $t = 1$ até $t = k$. Assim, o expoente de Lyapunov mede essa média da taxa de separação de um ponto $F(X)$ (que é periódico para $F^k(X)$) em relação a algum ponto X . Caos é definido por um expoente de Lyapunov maior do que zero, ou seja, $f'(x_1) > 1$, o que significa que em uma iteração a distância de $F(X)$ em relação a X dos pontos estáveis está aumentando, e que no caso de pontos k periódicos, depois de k iterações, essa distância está aumentando também. Ou seja, as órbitas não serão atraídas por pontos estáveis ou ciclos estáveis k periódicos bem determinados.

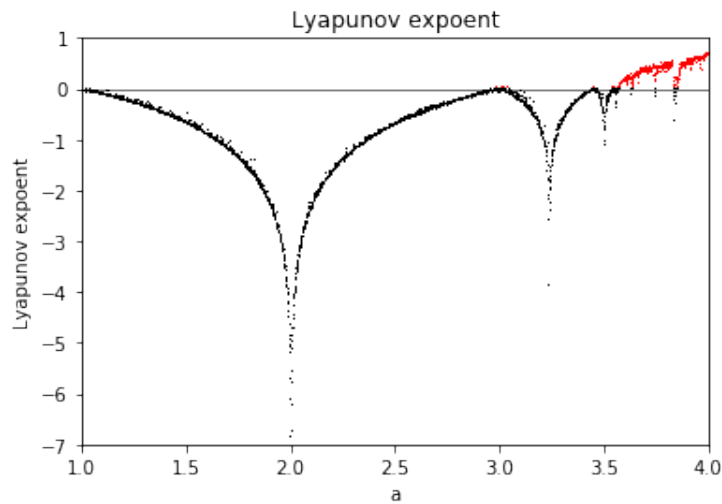


Figura 7: Expoente de Lyapunov como função do parâmetro a calculado a partir da equação 2. O código está disponível no Apêndice B. Em vermelho, os valores $h > 0$.

A Figura 7, com base no que foi discutido sobre o Expoente de Lyapunov, nos confirma o que também visualizamos no Diagrama de Bifurcação: as trajetórias para valores de a aproximadamente maiores do que $a > 3.5$ apresentam comportamento caótico ($h > 0$ em vermelho). Além disso, outra visualização marcante desse gráfico é que em $a = 3$, onde há uma bifurcação (vide Diagrama de Bifurcação acima), o expoente de Lyapunov vai para zero e depois volta a ser negativo novamente. Ou seja, os pontos em que o sistema se bifurca é ponto limite antes do sistema ficar caótico, voltando então a se distanciar do regime caótico quando o período das órbitas dobra. Além disso, o sistema está "mais longe do caos", é mais negativo, nos pontos de a em que λ está mais próximo de zero, ou seja, pontos em que de uma iteração para outra se varia muito pouco a distância dos pontos da órbita. No caso $a = 2$, temos o caso limite $\lambda = 0$, com a derivada completamente horizontal, então nas vizinhanças desse ponto, $h \rightarrow -\infty$, como vemos na Figura 7.

Para estudar melhor essa região, fazemos um zoom, reproduzindo a Figura 1.7 do livro e fazendo novamente o gráfico do Expoente de Lyapunov para essa região ampliada:

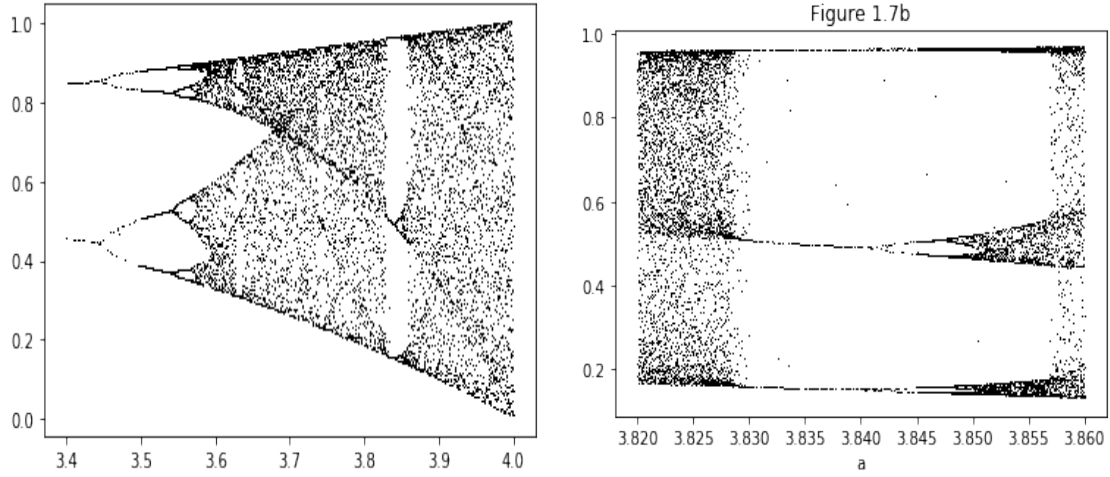


Figura 8: Diagrama de Bifurcação da Função Logística, calculado da mesma forma que os diagramas anteriores, para os intervalos de: $3.4 < a < 4$ e $3.82 < a < 3.86$. (Figura 1.7 do livro [2].)

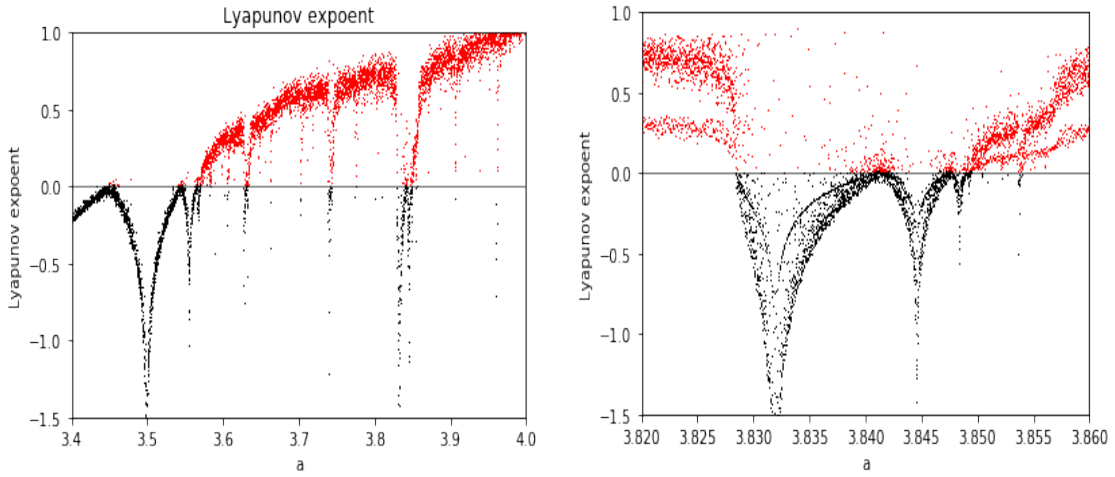


Figura 9: Expoente de Lyapunov como função do parâmetro a calculado a partir da equação 2. O código está disponível no Apêndice B. Em vermelho, os valores $h > 0$. Foram calculados para os intervalos: $3.4 < a < 4$ e $3.82 < a < 3.86$

Vemos que nas regiões caóticas existem algumas "ilhas" de estabilidade, com intervalos muito pequenos de valores de a . Novamente observamos o padrão de que a curva de pontos estáveis (pretos) do Expoente de Lyapunov vai a zero nos pontos em que ocorre bifurcação, retornando então a valores negativos.

Por motivos de tempo computacional na máquina que tenho disponível, não foi possível fazer simulações com grande tempo de iteração, de forma a obter valores longe o suficiente do regime em que ainda ocorrem variações transientes significativas devido ao valor inicial, então há alguns pontos da simulação em que deveria haver $h < 0$ somente, mas temos alguns pontos "ruídos" $h > 0$, que se tivessem sido calculados com base em um número de iterações maiores, existiriam em menor número, tendendo a zero com um número de iterações suficientemente grande.

Reconhecendo a existência desses ruídos a análise não fica prejudicada, pois é possível notar as tendências de comportamento da maior parte dos pontos e perceber, por exemplo, que os gráficos da direita das Figuras 8 e 9, na região aproximadamente $3.8275 < a < 3.575$, indicam que esse é um intervalo estável, com pontos estáveis de período 3.2^k como analisado na questão anterior, que conforme a aumenta vai se bifurcando até um a crítico de acumulação, a partir do qual o regime passa a ser caótico $h > 0$ novamente.

3

Agora estudaremos outro modelo, baseado no artigo "A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor, M. Henon, 1976".

A ideia do artigo consiste em construir empiricamente um modelo simples, 2d, que reproduz resultados de modelos mais complexos, especificamente nesse caso o modelo de Lorenz (1963). O mapa T definido, então, foi:

$$x_{i+1} = y_i + 1 - ax_i^2, \quad y_{i+1} = bx_i \quad (3)$$

que tem propriedades interessantes como um Jacobiano constante:

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = -b$$

Além disso, T tem dois pontos invariantes:

$$x = (2a)^{-1} \left[-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a} \right], \quad y = bx$$

Que são reais para:

$$a > a_0 = \frac{(1-b)^2}{4}$$

Sendo um deles linearmente instável sempre, e o outro somente para:

$$a > a_0 = \frac{3(1-b)^2}{4}$$

A escolha dos parâmetros, nesse artigo 3, foi feita para garantir que o modelo servisse para as análises propostas. Assim, b deveria ser pequeno suficiente para que o comportamento de "dobra" da função, descrito no artigo, ocorra com as interações. Entretanto, b não pode ser pequeno demais de forma que impeça a observação da estrutura fina do atrator. Assim, foi escolhido o valor $b = 0.3$. O valor de a mais adequado foi encontrado depois de algumas tentativas. O valor a deveria estar entre $a_c < a < a_3$, sendo o valor a crítico o limite para o qual o atrator ainda é simples, pois acima desse valor o comportamento dos pontos começa a parecer errático, e é esse regime que queremos estudar. Para $b = 0.3$, $a_c = 1.06$. Já $a_3 = 1.55$ para esse valor de b é um valor para o qual, $a > a_3$ sempre vai para infinito (diverge) e uma região onde aparentemente não existem atratores. Assim, foram definidos os valores: $a = 1.4$ e $b = 0.3$.

Para começar a análise, plotamos a Figura 10 com $n=10000$ pontos iterados no mapa T, começando de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, e depois a Figura 11 com $n=10000$ também, começando de $x_0 = 0.63135448$ e $y_0 = 0.18940634$.

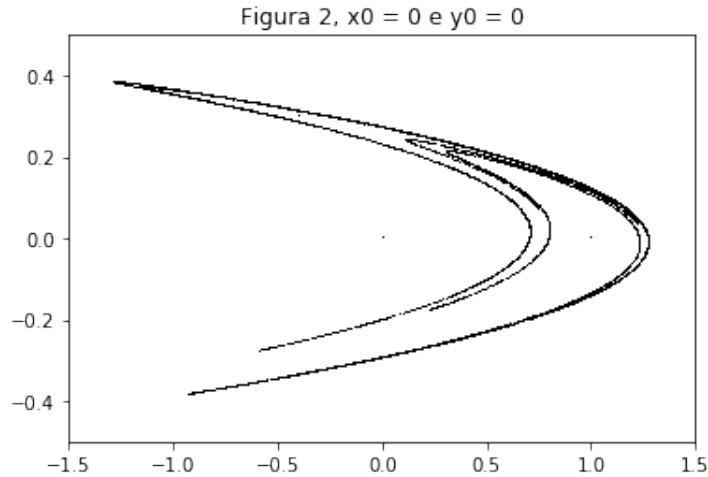


Figura 10: Mapa T iterado em $n=10000$ pontos, começando de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ (Figura 2 do artigo [3].)

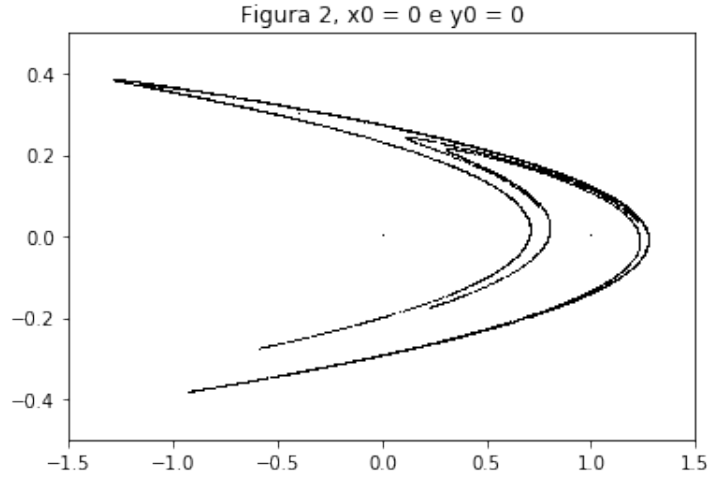


Figura 11: Mapa T iterado em $n=10000$ pontos, começando de $x_0 = 0.63135448$ e $y_0 = 0.18940634$. (Figura 3 do artigo [3].)

Como podemos observar, ambos as Figuras 10 e 11 são praticamente iguais, o que significa que representam bem o conjunto de pontos atratores do mapa T com os parâmetros $a = 1.4$ e $b = 0.3$ escolhidos. É possível notar na figura 10 o ponto inicial $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, o primeiro ponto de iteração $x_1 = 1$ e $y_1 = 0$ e o segundo $x_2 = -0.4$ e $y_2 = 0.3$ são bem distinguíveis na órbita. A partir desse, o terceiro $x_3 = 1.076$ e $y_3 = -0.12$ é difícil de visualizar e o quarto $x_4 = -0.7408864$ e $y_4 = 0.3228$ se perde dentro dos pontos do atrator, e daí para frente os pontos todos pertencem ao atrator e se espalham por ele de forma aparentemente errática. Assim, podemos concluir que a região transiente dura pouco, pois já na quarta iteração o comportamento dos pontos está localizado na região atratora.

O outro ponto inicial, usado para fazer a Figura 11, é um arredondamento na oitava casa decimal dos pontos invariantes instáveis obtidos com a equação mencionada anteriormente, que parece pertencer à região atratora. Arredondando esse ponto invariante, e utilizando ele como ponto inicial, nós iniciamos as iterações na vizinhança do ponto instável e eliminamos o regime transiente em que os pontos tendem para o atrator e que não representam propriedades interessantes do modelo.

Assim, analisando essas duas figuras, podemos concluir que o atrator tem um formato, aproximado, de algumas curvas paralelas que, com mais pontos plotados, provavelmente se definiriam ainda melhor, sem haver grandes mudanças de formato. Assim, a estrutura longitudinal do atrator, se seguirmos ao longo das linhas, aparentam ser simples e semelhantes entre as curvas. Entretanto, transversalmente, seguindo através das curvas, vemos que várias curvas são visíveis e aparentam ter uma estrutura interna. Para estudar isso, damos um zoom na Figura 11:

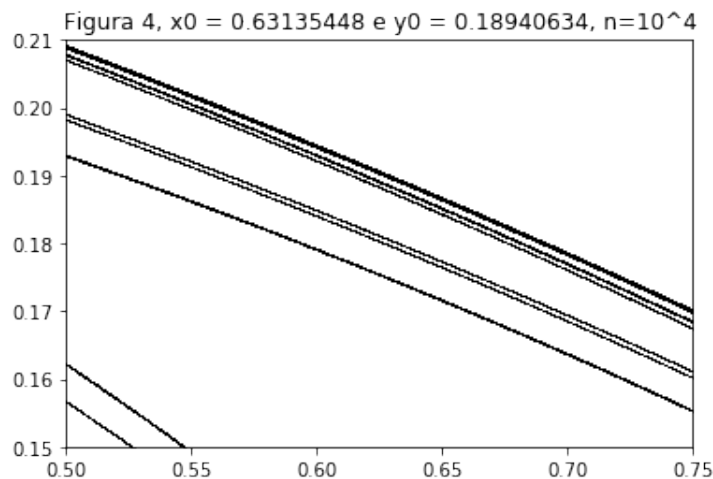


Figura 12: Mapa T iterado em $n=20000$ pontos, começando de $x_0 = 0.63135448$ e $y_0 = 0.18940634$ - Zoom.(Figura 4 do artigo [3].)

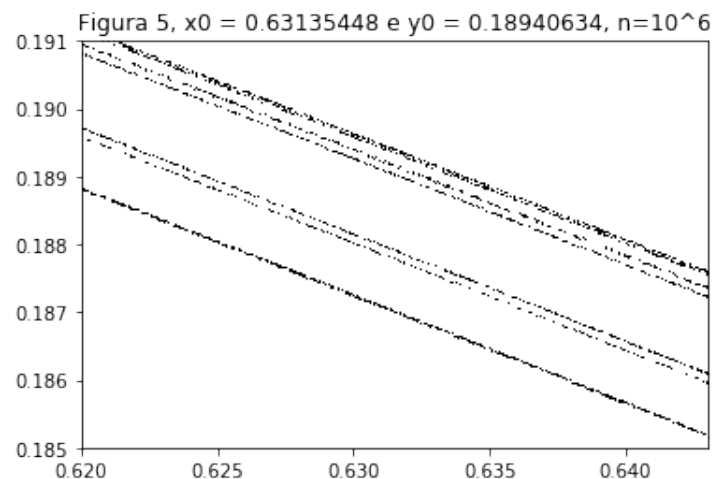


Figura 13: Mapa T iterado em $n=40000$ pontos, começando de $x_0 = 0.63135448$ e $y_0 = 0.18940634$ - Zoom (Figura 5 do artigo [3].)

Conforme damos um "zoom" nas figuras, perdemos a resolução se não aumentamos o número de pontos.

É possível observar que conforme você aumenta a resolução em uma pequena área do atrator, o que antes parecia uma curva passa a ser duas ou mais, e isso sugere que esse processo tende ao infinito conforme você, infinitamente, aumentar o zoom em linhas menores e muda a escala em que está olhando.

Essa é uma estrutura fractal, que tem uma estrutura interna que se repete, invariante, de forma praticamente idêntica em cada nível, de acordo com um fator de escala. Esse tipo de estrutura é descrito pelo conjunto de pontos da forma de um Cantor Set (Conjunto de Cantor).

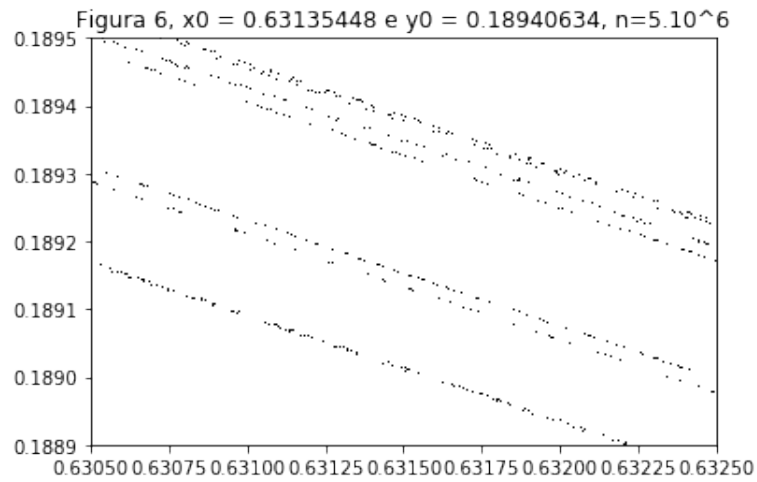


Figura 14: Mapa T iterado em $n=10000$ pontos, começando de $x_0 = 0.63135448$ e $y_0 = 0.18940634$.(Figura 6 do artigo [3].)

4

Continuando o estudo do mapa T anterior, que aqui chamaremos de mapa de Hénon, iremos plotar o diagrama de bifurcação desse mapa T para $b = 0.4$ e $0 < a < 1.25$.

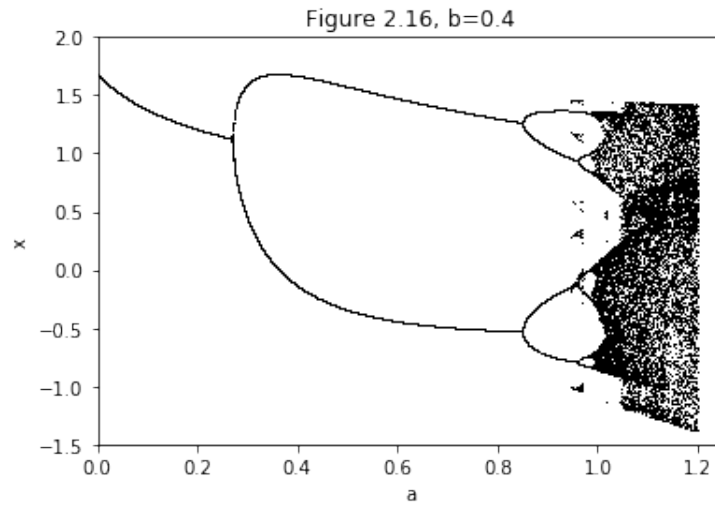


Figura 15: Diagrama de Bifurcação da variável x do mapa de Hénon para $b = 0.4$ e $0 < a < 1.25$.(Figura 2.16 do livro [2].)

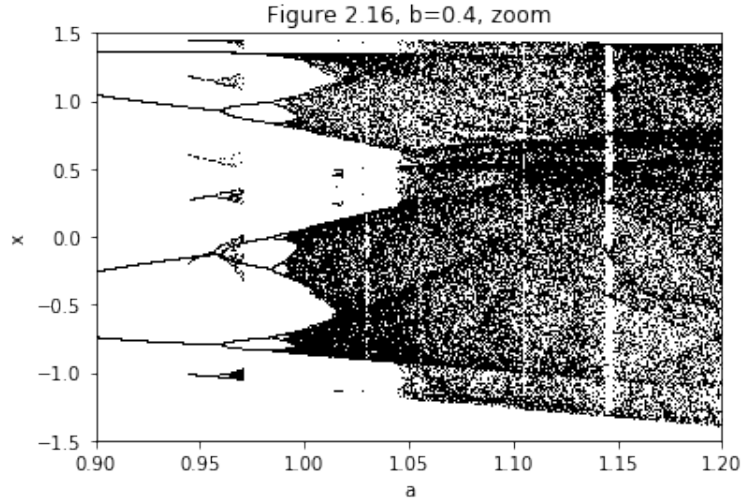


Figura 16: Diagrama de Bifurcação da variável x do mapa de Hénon para $b = 0.4$ e $0.9 < a < 1.25$.

Para analisar a trajetória única de diferentes valores de $0.9 < a < 1.20$ para $b = 0.4$, podemos comparar alguns trechos desse último diagrama de bifurcação (Figura 16) com os pontos da Figura 17. Para $a = 0.9$, vemos no diagrama 4 valores de X , o que significa que temos 4 pontos estáveis periódicos. Na figura onde está plotada a órbita, podemos ver que para esses valores de a , depois de 1500 iterações, calculando 1500 pontos, o valor que X obtém é sempre um dos 4 pontos da órbita.

Para $a = 0.988$ na Figura 17 temos 16 pontos estáveis periódicos. Com a resolução que temos para esse diagrama de bifurcação, não é possível distinguir perfeitamente os 16 pontos, mas é possível ver que nessa região, um pouco anterior a 1, os pontos estáveis do período anterior de 8 pontos bifurcam, logo haverá 16 pontos periódicos estáveis.

Para $a = 1$ vemos no Diagrama que há 4 regiões separadas entre si, com vários pontos estáveis cada, o que é confirmado pela Figura 17, com 4 regiões atratoras claramente independentes.

Para $a = 1.0293$, na Figura 17 temos 10 pontos estáveis periódicos. Isso é um pouco visível com a resolução que temos, numa faixa vertical branca entre a massa de pontos preta. Não é possível distinguir esses 10 únicos perfeitamente, dentre os outros pontos estáveis vizinhos, mas é possível distinguir essa faixa de valores de a dentre as outras.

Para $a = 1.045$ vemos na Figura 17 duas regiões atratoras distintas, e no Diagrama de Bifurcação vemos que há uma ampliação dos pontos atratores, que passam a estar presentes em uma região maior. Entretanto, não é possível distinguir as duas regiões uma da outra no diagrama de bifurcação, o que é compreensível na medida que vemos na Figura 17 que as regiões atratores estão muito próximas.

Para $a = 1.2$, na Figura 17 vemos que as duas regiões atratoras se fundem para uma só, o que é claro no diagrama de bifurcação, pois nesse regime não parece haver nenhuma diferença preferencial entre as regiões ocupadas pelos pontos estáveis, formando somente uma grande região atratora.

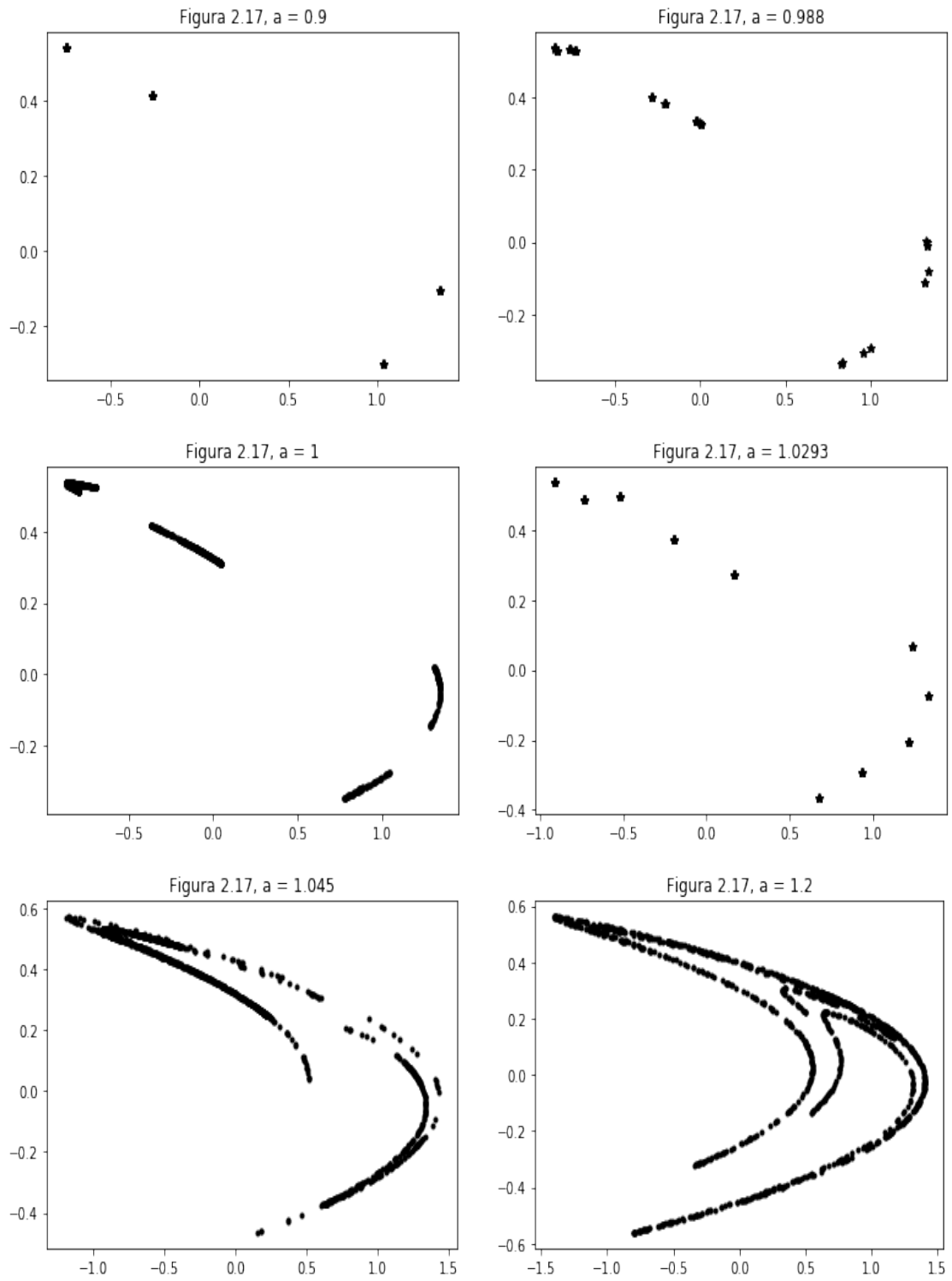


Figura 17: Órbitas atratoras para diferentes valores de a e $b = 0.4$. Em todos os casos, foram simulados 1500 iterações antes de pegar o valor final para o ponto. (Figura 2.17 do livro [2].)

O modelo de Henón tem duas variáveis, o que significa que ele gera uma superfície de pontos estáveis, que chamamos de atratora, diferente do Modelo Logístico estudado aqui, que é unidimensional.

A Figuras Questão 1

Códigos feitos em Python 3 para gerar as figuras numericamente:

Figura 1.1

```
#Pontos para cálculo das funções
x = np.arange(0,1,0.01) #pontos para função linha inteira
x_ = np.arange(0.4,0.86,0.01) #pontos para função linha tracejada

#Funções que serão plotadas
fa = 2.7*x*(1-x)
fb = 3.414*x*(1-x)
y = x

#Cálculo dos pontos estáveis:  $x = ax(1-x)$ 
xa = (2.7-1)/2.7
ya = 2.7*xa*(1-xa)

xb = (3.414 - 1)/3.414
yb = 3.414*xb*(1-xb)

#Derivada (inclinação da reta) nos pontos estáveis
dfa = 2.7 - 2*2.7*xa
dfb = 3.414 - 2*3.414*xb

#Reta de inclinação:
ia = ya + dfa*(x_-xa)
ib = yb + dfb*(x_-xb)

iat = ya - 1*(x_- xa)
ibt = yb - 1*(x_- xb)

plt.plot(x,fa, color='blue')
plt.plot(x_,ia,'--', color='blue')
#plt.plot(x_,iat,'--', color='gray')
plt.plot(x,fb, color='orange')
plt.plot(x_,ib,'--', color='orange')
#plt.plot(x_,ibt,'--', color='gray')
plt.plot(x,y, color='black')
plt.ylabel('X(t+1)')
plt.xlabel('X(t)')
plt.ylim(0,1)
plt.xlim(0,1)
plt.title('Figura1')
```

Figuras 1.2 e 1.3

O mesmo código serve para ambas as figuras, é só trocar o valor do parâmetro a pelo valor do parâmetro b .

```
#Pontos para cálculo das funções
x = np.arange(0,1,0.01)
x_ = np.arange(0.45,0.86,0.01)

a = 2.707

f1 = a*x*(1-x)
f2 = a*f1*(1-f1)
y = x
```



```

#Cálculo dos pontos estáveis:  $x = ax(1-x)$ 
xa = (a-1)/a
ya1 = a*xa*(1-xa)
ya2 = a*ya1*(1-ya1)

#Derivada (inclinação da reta) nos pontos estáveis
dfa = (a - 2*a*xa)**2
#3*xa**2*a**3 - 2*xa*(a**3 + a**2) + a**2

#Reta de inclinação:
ia = ya2 + dfa*(x_-xa)

iat = ya2 - 1*(x_- xa)

plt.plot(x,f2, color='orange')
plt.plot(x_,ia, '--',color='orange')
plt.plot(x,y, color='black')
plt.ylabel('X(t+2)')
plt.xlabel('X(t)')
plt.ylim(0,1)
plt.xlim(0,1)
plt.title('Figura 2, a = 2.707')

```

Figuras 1.4

O mesmo código serve para ambas as figuras. Para a segunda figura, é só trocar o valor de onde começa o parâmetro a e os passos em que esse valor está sendo calculado para $a = 3.8284 + 0.00001*i$ e o número de iterações para: *foriinrange*(2110) Além disso, deve-se mudar os limites do eixo x.

```

plt.figure(figsize=(4, 5))
for i in range (2040): #Subdivide o eixo 'a' em x intervalos para calcular cada a, dentro do int
    a = 2.5 + 0.0005*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0) #sorteia um valor inicial x
    for n in range (101): #faz n=100 iterações de x, e pega o último valor,
        g = a*x*(1-x)
        x = g
    plt.plot(a,g,'k,') #Plota esse valor

for i in range (1700): #aumentar a resolucao do termo final
    a = 3.4 + 0.0001*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    for n in range (101):
        g = a*x*(1-x)
        x = g
    plt.plot(a,g,'k,')

plt.plot(3.57,0,'k^')
plt.plot(3,0,'k^')
plt.xlim(2.5,3.7)
plt.ylim(0,1)
plt.ylabel('X')
plt.xlabel('a')
plt.title('Bifurcation Diagram of Logistic Equation')

```

B Figuras Questão 2

Códigos feitos em Python 3 para gerar as figuras numericamente:

Figuras 6 e 8 O mesmo código foi usado para ambas as figuras, só precisando ser mudados os intervalos do parâmetro a .

```
for i in range (600):
    a = 1 + 0.005*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    for n in range (101):
        g = a*x*(1-x)
        x = g
    plt.plot(a,g,'k,')

for i in range (10000):    #aumentar a resolucao do termo final
    a = 3.5 + 0.00005*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    for n in range (101):
        g = a*x*(1-x)
        x = g
    plt.plot(a,g,'k,')
```

Figuras 7 e 9

```
for i in range (3000):
    a = 1 + 0.001*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    hsum = 0
    for n in range (150):
        x = a*x*(1-x)
        derivg = a*(1-2*x)
        h = np.log(abs(derivg))
        hsum += h
        if n>50:
            hsum += h
    if hsum>0:
        plt.plot(a,hsum/n,'r,')
    else:
        plt.plot(a,hsum/n,'k,')

for i in range (100):    #aumentar a resolucao do termo final
    a = 3.5 + 0.005*i
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    hsum = 0
    for n in range (150):
        x = a*x*(1-x)
        derivg = a*(1-2*x)
        h = np.log(abs(derivg))
        hsum += h
        if n>50:
            hsum += h
    if hsum>0:
        plt.plot(a,hsum/n,'r,')
    else:
        plt.plot(a,hsum/n,'k,')

plt.axhline(0, color='k', lw=.5)
plt.ylabel('Lyapunov expoent')
plt.xlabel('a')
plt.ylim(-7,1)
plt.xlim(1,4)
```

```
plt.title('Lyapunov expoent' )
```

C Figuras Questão 3

Códigos feitos em Python 3 para gerar as figuras numericamente:

Figuras 2 a 6 O mesmo código foi usado para todas as figuras, só precisando ser mudados o valor dos eixos para dar "zoom" às figuras, e o número de pontos/iterações de T .

```
x = 0
y = 0
plt.plot(x,y,'k,')

a = 1.4
b = 0.3
for i in range (10000):    #aumentar a resolucao
    xm = y + 1 -a*x*x
    ym = b*x
    plt.plot(xm,ym,'k,')
    x = xm
    y = ym

plt.ylim(-0.5,0.5)
plt.xlim(-1.5,1.5)
plt.title('Figura 2, x0 = 0 e y0 = 0, n=10^4')
```

D Figuras Questão 4

Códigos feitos em Python 3 para gerar as figuras numericamente:

Figuras 15 e 16

```
b = 0.4
xpoint = []
ypoint = []
apoint = []
for i in range (100000):
    a = 0.9 + 0.000003*i
    y = rd.uniform(0.0,1.0)
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    for n in range (1000):
        xm = y + 1 -a*x*x
        ym = b*x
        x = xm
        y = ym
        apoint.append(a)
        xpoint.append(x)
        ypoint.append(y)

plt.plot(apoint,xpoint,'k,')
plt.xlabel('a')
plt.ylabel('x')
plt.ylim(-1.5,1.5)
plt.xlim(0.9,1.2)

plt.title('Figure 2.16, b=0.4,' )
```

Figuras 17 Para cada figura, é necessário modificar o parâmetro a e, em alguns casos, o número de pontos para aumentar a resolução.

```
a = 1.2
b = 0.4
for i in range (1500):    #aumentar a resolucao do termo final
    y = rd.uniform(0.0,1.0)
    x = rd.uniform(0.0,1.0)
    for n in range (1500):
        xm = y + 1 -a*x*x
        ym = b*x
        x = xm
        y = ym
    plt.plot(x,y,'k.')

plt.title('Figura 2.17, a = 1.2')
```