

# V- Caos em Mapas Bidimensionais

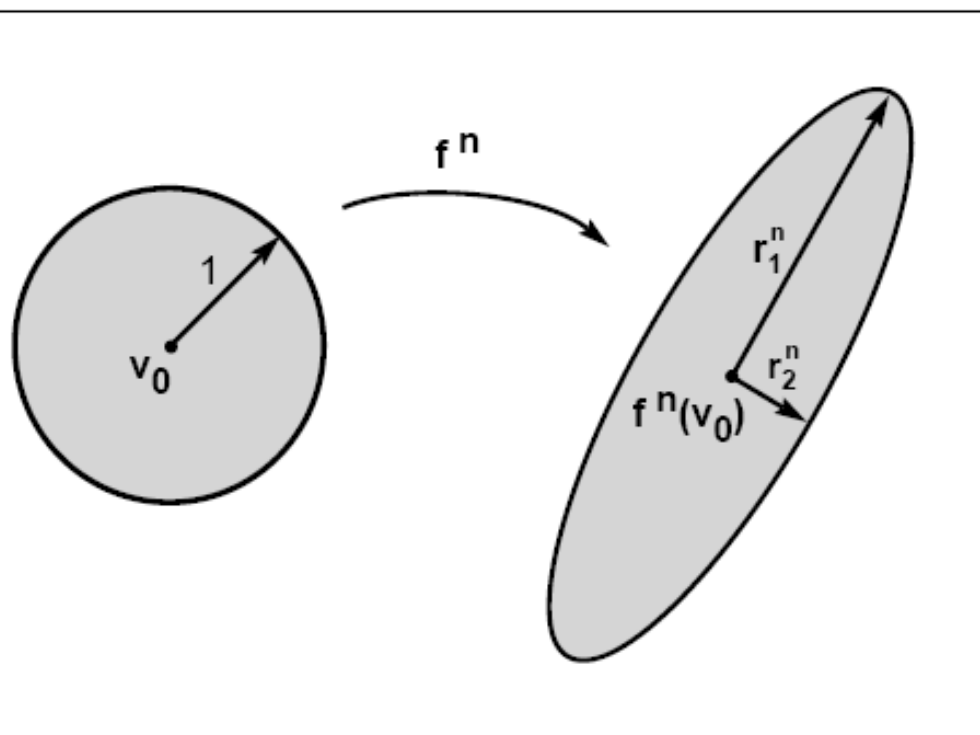
Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke  
Springer (1997)

# 1- Expoentes de Lyapunov

# Mapas Bidimensionais

Cada órbita tem dois números de Lyapunov, que medem a razão de separação, em cada um das duas direções.



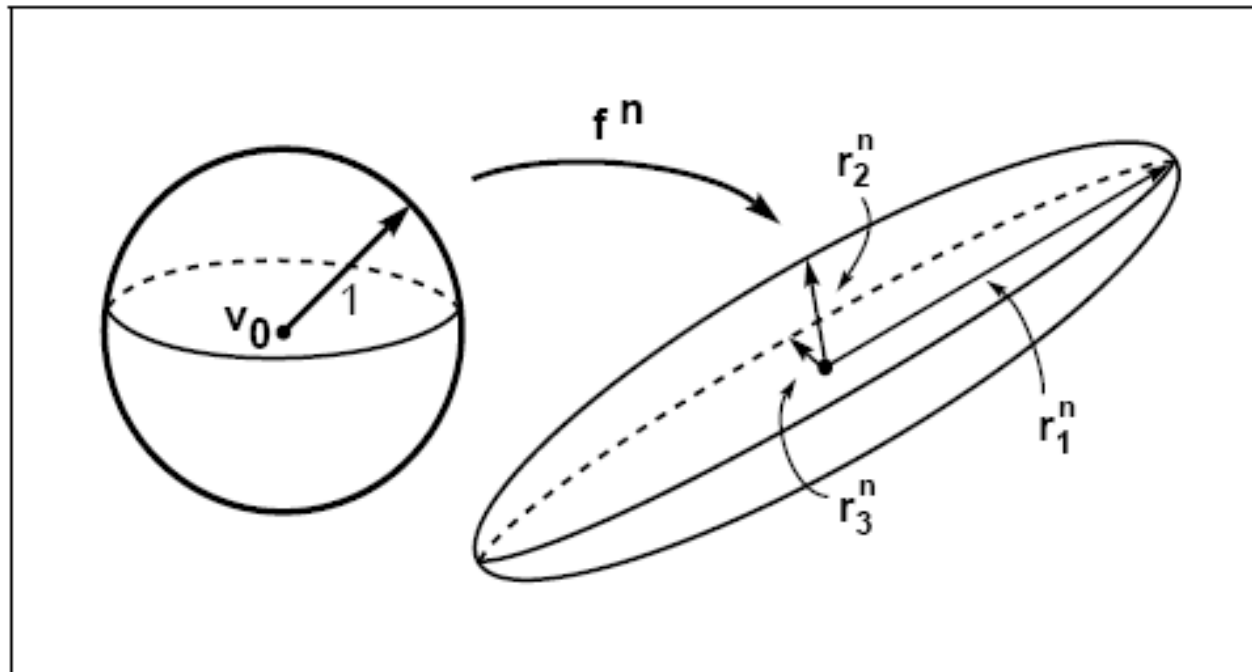
As razões entre os eixos finais e iniciais são os números de Lyapunov. Os  $\ln$  desses números são os expoentes de Lyapunov.

**Figure 5.1 Evolution of an initial infinitesimal disk.**

After  $n$  iterates of a two-dimensional map, the disk is mapped into an ellipse.

# Mapas Tridimensionais

Cada órbita tem três números de Lyapunov



**Figure 5.2** A three-dimensional version of Figure 5.1.

A small ball and its image after  $n$  iterates, for a three-dimensional map.

Definição :

$f$  mapa suave em  $\mathbb{R}^2$ ,  $J_n = D f^n(\vec{v}_0)$

$k = 1, 2$  ;  $r_k^n$  comprimento do eixo da elipse  $J_n U_1$ , para órbitas com pontos iniciais em torno de  $\vec{v}_0$ ;

$r_k^n$  mede a contração e a expansão próximas a essas órbitas.

Cada número de Lyapunov é definido como:

$$L_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{1/n}$$

Os expoentes de Lyapunov são  $h_k = \ln L_k$

Vamos usar a sequência  $L_1 > L_2 \Rightarrow h_1 > h_2$

$D f^1(\vec{v}_0)$  : primeira derivada no ponto  $\vec{v}_0 \equiv (x_0, y_0)$

$D f^n(\vec{v}_0)$  :  $n$ -ésima derivada no ponto  $\vec{v}_0$

$r_1^n$  e  $r_2^n$  são os comprimentos dos eixos maior e menor

Definição:

Mapa  $f$  suave em  $\mathbb{R}^2$

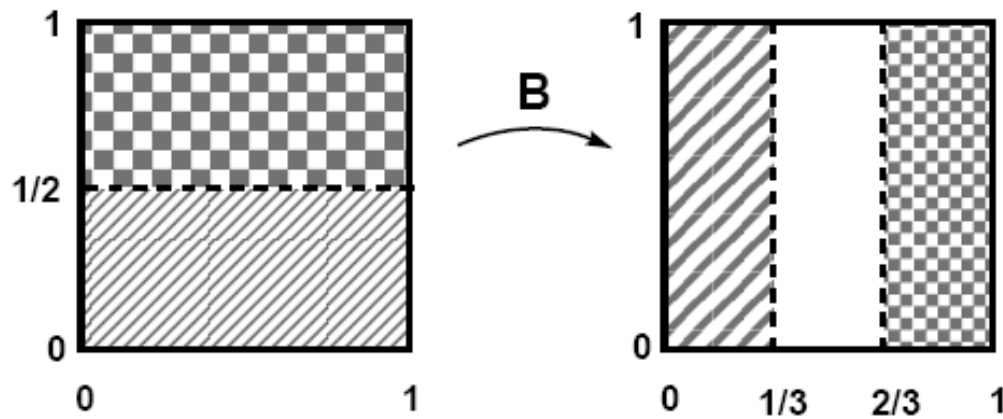
Uma órbita limitada  $\{ \vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \dots \}$  é caótica  $\Leftrightarrow$

1- ela não é periódica assintoticamente

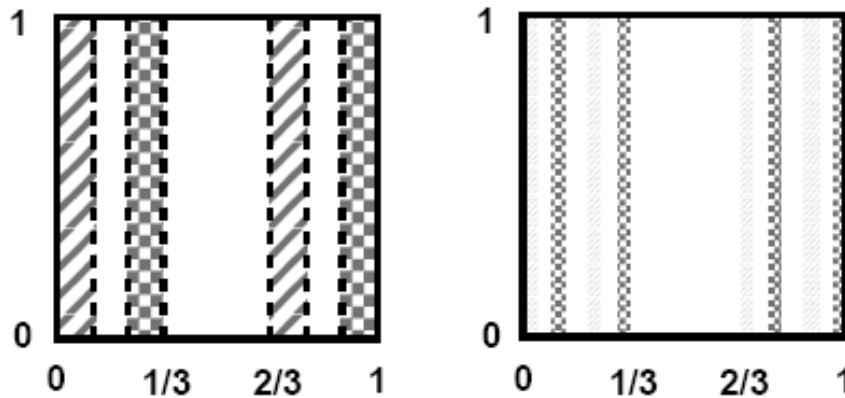
2-  $L_k \neq 1$  ( $k = 1, 2$ )

3-  $L_1(\vec{v}_0) > 1$  ( ou  $h_1(\vec{v}_0) > 0$  )

# Mapa do Padeiro



(a)



(b)

(c)

A: conjunto de Cantor  
obtido para  $n \rightarrow \infty$

**Figure 4.3 Definition of the skinny baker map.**

(a) The top half maps to the right strip. The bottom half maps to the left strip. p.  
(b) The second and (c) third iterate of the map. In the limit, the invariant set is a a Cantor middle-third set of vertical lines.

Alligood  
Chaos

Exemplo:

$$\text{Mapa do padeiro } \vec{B}(x, y) = \begin{cases} (1/3 x, 2y) & \text{para } 0 \leq y \leq 1/2 \\ (1/3 x + 2/3, 2y - 1) & \text{para } 1/2 < y \leq 1 \end{cases}$$

A cada iteração o retângulo central é removido.

O conjunto de Cantor  $A$  desse mapa é constituído pelos retângulos verticais que permanecem em  $\vec{B}^n$  para todo  $n$  ( $n > 0, n < 0$ ).

$A$  é um conjunto invariante pois  $\vec{B}^{-1}(A) = A$



Área do conjunto de Cantor A (obtido do mapa do padeiro)

Qualquer órbita do mapa do padeiro, que não seja assintoticamente periódica, é caótica

A matriz Jacobiana de uma órbita (para  $y \neq 1/2$ ) é

$$D \vec{B}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Após uma iteração, um círculo pequeno de raio  $r$  é transformado em uma elipse de raios  $1/3 r$ , na direção  $x$ , e  $2 r$ , na direção  $y$ .

Após  $n$  iterações, os raios são  $(1/3)^n r$  e  $(2)^n r$ .

Assim,  $L_1 = 2$  e  $L_2 = 1/3 \Rightarrow h_1 = \ln 2 = 0.693$  e  $h_2 = \ln 1/3 = -1.099$

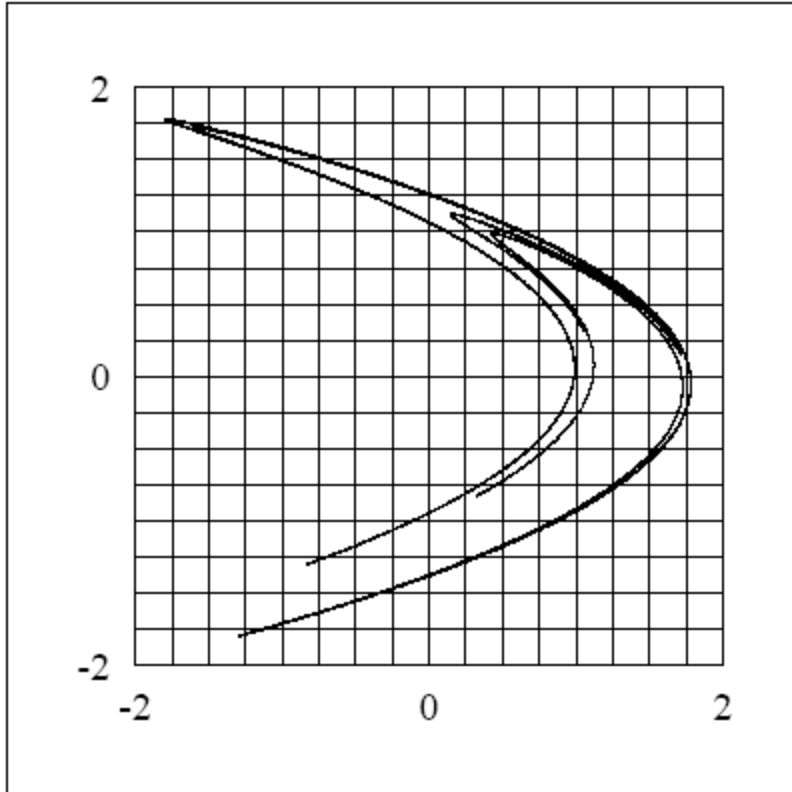
# Atrator de Hénon

$$f(x, y) = (1.4 - x^2 + 0.3y, x)$$

$$a = 1.4 \quad b = 0.3$$

Expoentes de Lyapunov

$$h_1 = 0.42 \quad \text{e} \quad h_2 = -1.62$$



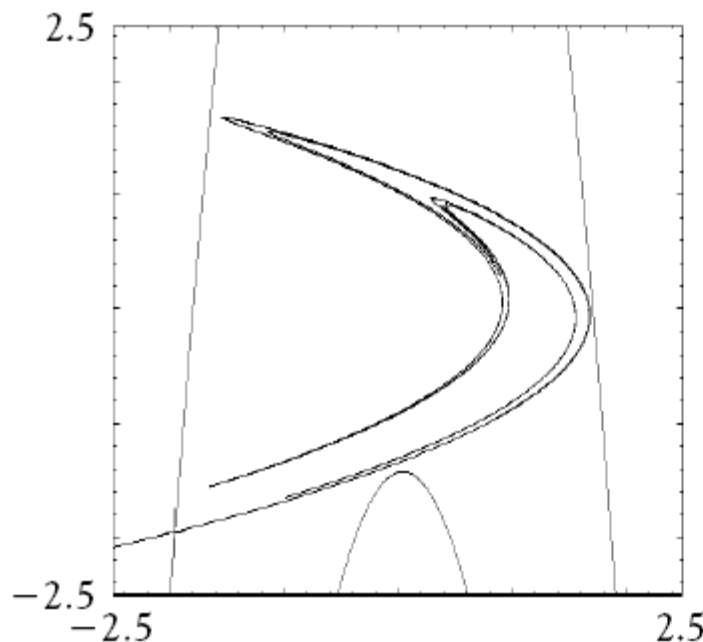
**Figure 4.13** Grid of boxes for dimension measurement.

The Hénon attractor of Example 4.10 is shown beneath a grid of boxes with side-length  $\epsilon = 1/4$ . Of the 256 boxes shown, 76 contain a piece of the attractor.

Alligood  
Chaos

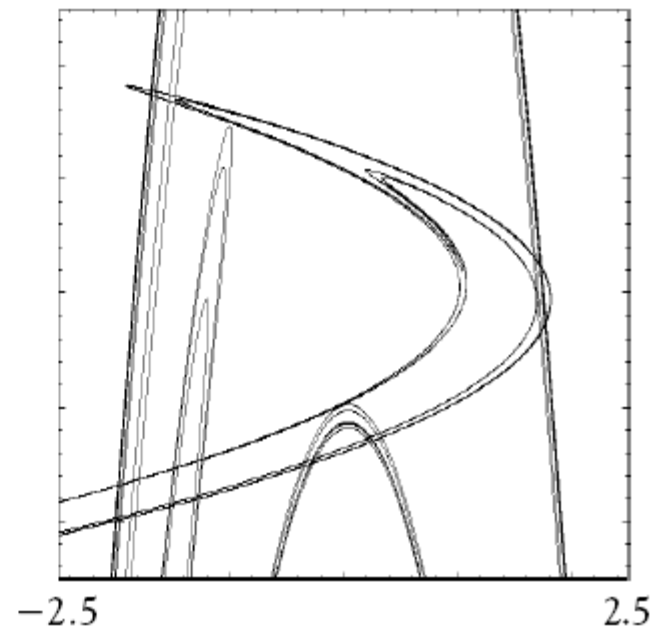
$$b = -0.3$$

$$a = 1.28$$



(a)

$$a = 1.4$$



(b)

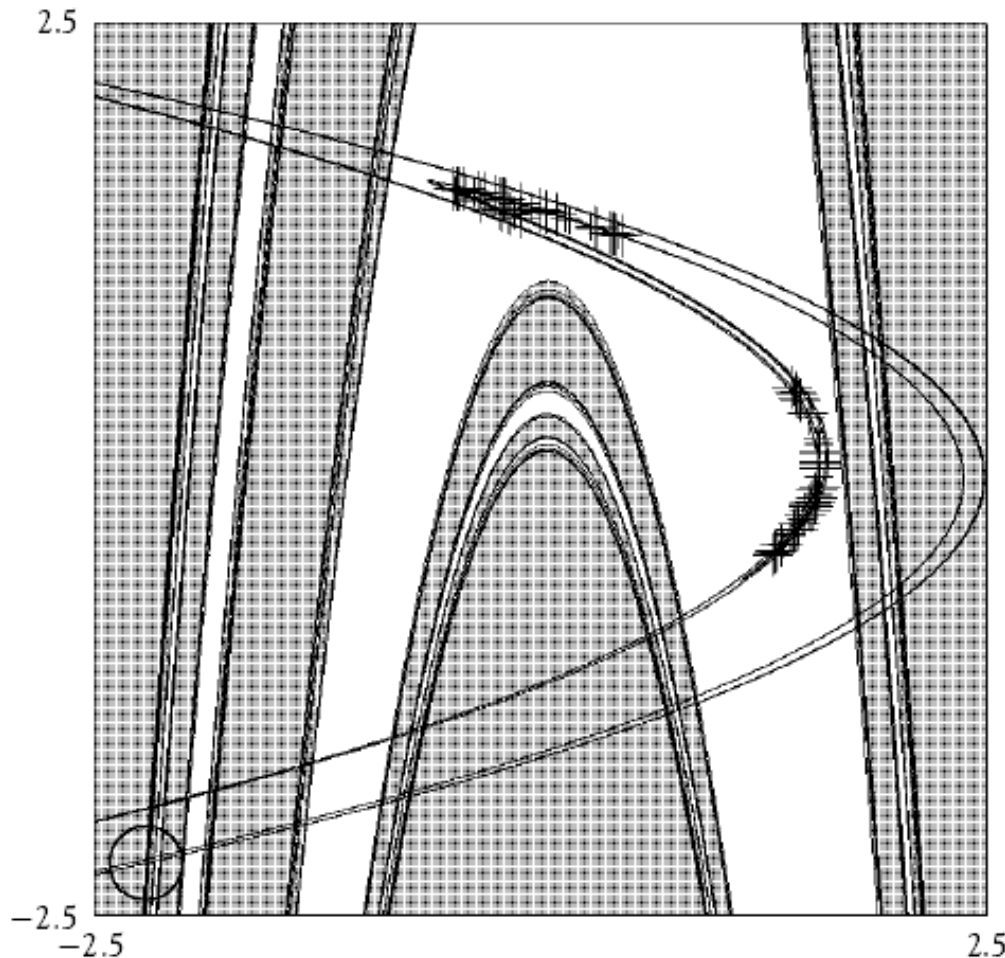
**Figure 2.21 Stable and unstable manifolds for a saddle point.**

The stable manifolds (mainly vertical) and unstable manifolds (more horizontal) are shown for the saddle fixed point (marked with a cross in the lower left corner) of the Hénon map with  $b = -0.3$ . Note the similarity of the unstable manifold with earlier figures showing the Hénon attractor. (a) For  $a = 1.28$ , the leftward piece of the unstable manifold moves off to infinity, and the rightward piece initially curves toward the sink, but oscillates around it in an erratic way. The rightward piece is contained in the region bounded by the two components of the stable manifold. (b) For  $a = 1.4$ , the manifolds have crossed one another.

Alligood  
Chaos

## Variedade Estável e Atrator Caótico no Mapa de Hénon

$$a = 1.39 \quad b = 0.3$$



**Figure 2.22** A two-piece attractor of the Hénon map.

The crosses mark 100 points of a trajectory lying on a two-piece attractor. The basin of attraction of this attractor is white; the shaded points are initial conditions whose orbits diverge to  $\infty$ . The saddle fixed point circled at the lower left is closely related to the dynamics of the attractor. The stable manifold of the saddle, shown in black, forms the boundary of the basin of the attractor. The attractor lies along the unstable manifold of the saddle, which is also in black.

Alligood  
Chaos

Mapa de Ikeda

$$F(x, y) = \begin{cases} R + C_2 (x \cos \tau - y \sin \tau) \\ C_2 (x \sin \tau + y \cos \tau) \end{cases}$$

$$\tau = C_1 + \frac{-C_3}{1 + x^2 + y^2}$$

$C_1, C_2, C_3, R$  parâmetros reais

Determinante da matriz jacobiana  $J(x, y) = C_2^2$

Números de Lyapunov:  $L_1 L_2 = C_2^2$

Dependendo dos parâmetros, há dois pontos fixos estáveis

Para  $R = 1, C_1 = 0.4, C_2 = 0.9, C_3 = 6 \Rightarrow$  atrator caótico

$L_1 = 1.66$  e  $L_2 = 0.487$  ( $h_1 = 0.51$  e  $h_2 = -0.72$ )

## Mapa de Ikeda



Atrator caótico

$$R = 1, C_1 = 0.4, C_2 = 0.9, C_3 = 6$$

Expoentes de Lyapunov

$$h_1 = 0.51 \text{ e } h_2 = -0.72$$

**Figure 5.3** The Ikeda attractor of Example 5.7.

The attractor has fractal structure and a largest Lyapunov exponent of approximately 0.51.

Chaos  
Alligod et al.

Exemplo:

$$\text{Mapa } f(x, y) = (r^2, \theta + q)$$

$r, \theta$  : coordenadas polares

$$q = (\text{número irracional}) 2\pi$$

$$r_0 > 1 \Rightarrow \text{órbitas divergem, i. e., } r \rightarrow \infty$$

$$r_0 < 1 \Rightarrow \text{órbitas convergem para } r \rightarrow 0$$

$$r_0 = 1 \Rightarrow \text{órbitas quase-periódicas}$$

$$L_1 = \frac{\partial r^2}{\partial r} (r = 1) = 2r = 2 \times 1 = 2 \Rightarrow h_1 = \ln 2$$

(sensível às condições iniciais)

$$L_2 = \frac{\partial (\theta + q)}{\partial \theta} (r = 1) = 1 \Rightarrow h_2 = \ln 1 = 0$$

## 2- Cálculo do Expoente de Lyapunov

Em geral, não se consegue obter  $h_k$  a partir do mapa e das matrizes jacobianas.

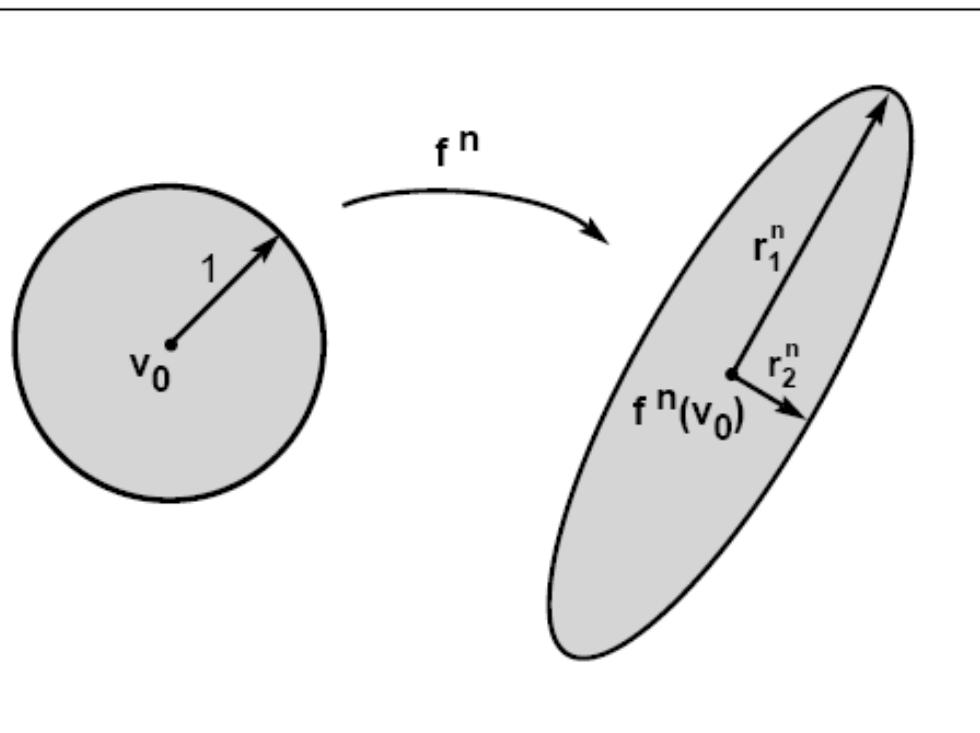
A matriz  $J_n = \vec{D}\vec{f}^n(\vec{v}_0)$  não pode ser obtida analiticamente para grandes  $n$ . Mas a elipse  $J_n U$  pode ser calculada numericamente a partir da esfera unitária.

A matriz  $J_n J_n^T$  e seus auto-valores  $s_i^2$  podem ser calculadas numericamente. Mas  $s_1$  seria muito grande e  $s_2$  muito pequeno. Isso é inconveniente.



# Mapas Bidimensionais

Cada órbita tem dois números de Lyapunov, que medem a razão de separação, em cada um das duas direções.



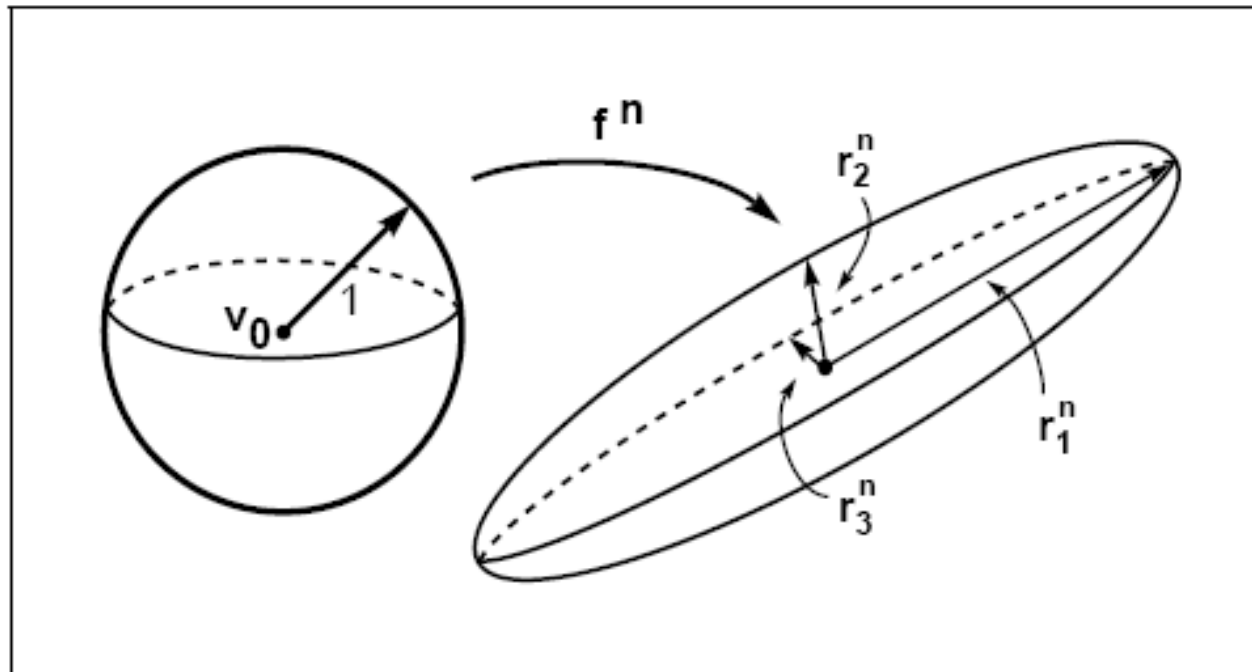
As razões entre os eixos finais e iniciais são os números de Lyapunov. Os  $\ln$  desses números são os expoentes de Lyapunov.

**Figure 5.1 Evolution of an initial infinitesimal disk.**

After  $n$  iterates of a two-dimensional map, the disk is mapped into an ellipse.

# Mapas Tridimensionais

Cada órbita tem três números de Lyapunov



**Figure 5.2** A three-dimensional version of Figure 5.1.

A small ball and its image after  $n$  iterates, for a three-dimensional map.

Definição :

$f$  mapa suave em  $\mathbb{R}^2$ ,  $J_n = D f^n(\vec{v}_0)$

$k = 1, 2$  ;  $r_k^n$  comprimento do eixo da elipse  $J_n U_1$ , para órbitas com pontos iniciais em torno de  $\vec{v}_0$ ;

$r_k^n$  mende a contração e a expansão próximas a essas órbitas.

Cada número de Lyapunov é definido como:

$$L_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{1/n}$$

Os expoentes de Lyapunov são  $h_k = \ln L_k$

Vamos usar a sequência  $L_1 > L_2 \Rightarrow h_1 > h_2$

$D f^1(\vec{v}_0)$  : primeira derivada no ponto  $\vec{v}_0 \equiv (x_0, y_0)$

$D f^n(\vec{v}_0)$  :  $n$ -ésima derivada no ponto  $\vec{v}_0$

$r_1^n$  e  $r_2^n$  são os comprimentos dos eixos maior e menor

Podemos seguir a evolução da elipse através de

$$J_n U = \vec{D} \vec{f}(\vec{v}_{n-1}) \dots \vec{D} \vec{f}(\vec{v}_0) U$$

Começamos com a base ortogonal  $\{w_1^0, w_2^0\}$  em  $R^2$

Calculamos os vetores  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$

$$\vec{z}_1 = \vec{D} \vec{f}(\vec{v}_0) \hat{W}_1^0, \quad \vec{z}_2 = \vec{D} \vec{f}(\vec{v}_0) \hat{W}_2^0$$

$\vec{z}_1$  e  $\vec{z}_2$  estão na elipse  $\vec{D} \vec{f}(\vec{v}_0) U$ , mas  
eles não são necessariamente ortogonais

Definimos, então, obter os versores ortogonais  $\hat{w}_1$  e  $\hat{w}_2$   
que geram uma elipse de área  $\vec{D} \vec{f}(\vec{v}_0) U$

## 3- Dimensão de Lyapunov

Definição:

$f$  mapa em  $\mathbb{R}^n$ ;

Órbita com expoentes de Lyapunov  $h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_m$  ;

$p$  o maior inteiro tal que  $\sum_{i=1}^p h_i \geq 0$ ;

Dimensão de Lyapunov:  $D_L = \begin{cases} 0 & \text{se } p \text{ não existe} \\ p + \frac{1}{|h_{p+1}|} \sum_{i=1}^p h_i & \text{se } p < m \\ 2 & \text{se } p = m \end{cases}$

Para o mapa de Hénon, do padeiro e outros

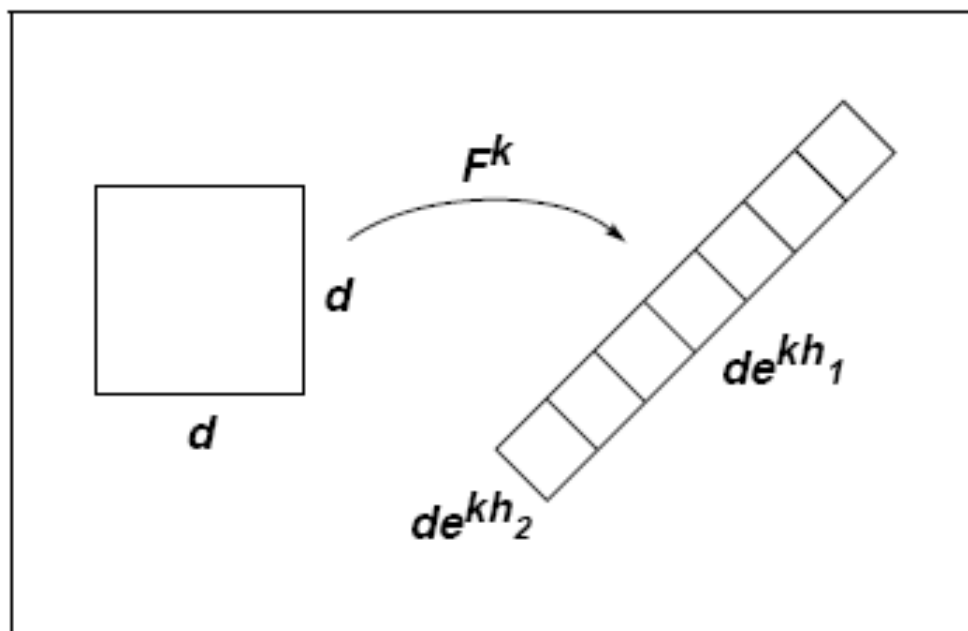
$$D_L = 1 + \frac{h_1}{|h_2|} \quad \text{pois } h_1 > 0 > h_2 \Rightarrow p=1$$

Para o mapa do padeiro

$$D_L = 1 + \frac{h_1}{|h_2|} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{pois } h_1 = \ln 2 \text{ e } h_2 = -\ln 3$$

(mesmo resultado para a dimensão obtida com a contagem de caixas)

# Iteração de Área em Torno de Uma Órbita



Expoentes de Lyapunov determinam contração e dilatação.

**Figure 5.4 Image of a square under a plane map.**

A square of side  $d$  is mapped approximately into a rectangle by  $f^k$ .



Mapa  $f$  em  $\mathbb{R}^2$

$$h_1 \geq 0 \quad h_1 + h_2 < 0$$

Área de um conjunto de pontos próximos da órbita  $\vec{v}_0$

$e^{h_1} > 1$  alongamento por iteração

$0 < e^{h_2} < 1$  contração por iteração

$e^{h_1} e^{h_2} = e^{h_1 + h_2} < 1 \Rightarrow$  contração da área por iteração

Mapa de Hénon  $h_1 = 0.42 \quad h_2 = -1.62 \rightarrow D_L = 1 - 0.42/1.62 = 1.26$

Mapa do padeiro  $h_1 = \ln 2 = 0.693 \quad h_2 = \ln 3 = -1.099 \rightarrow D_L = 1.631$

Mapa de Ikeda  $h_1 = 0.51 \quad h_2 = -0.72 \rightarrow D_L = 1.71$

# Contração da Área

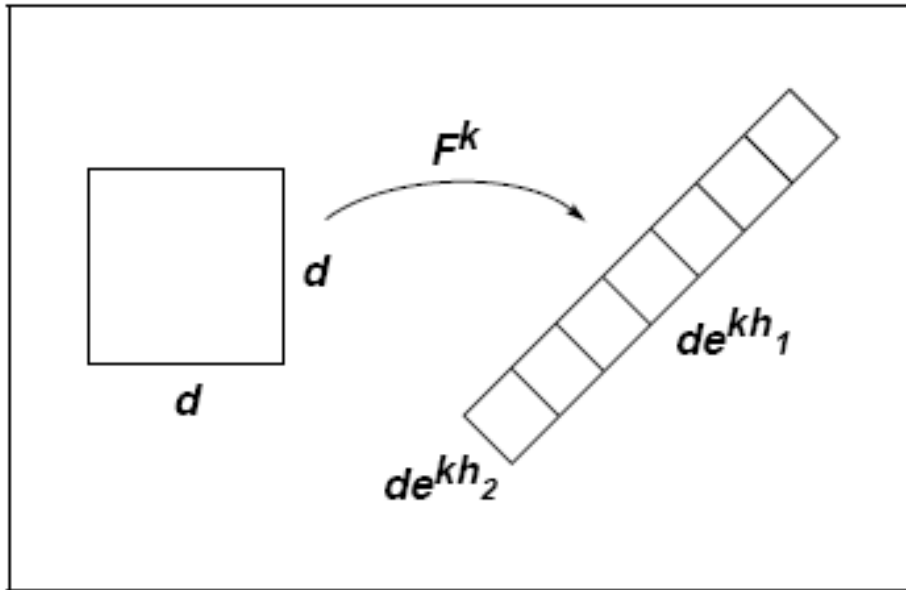
$A_0 = d^2$  : área inicial ( $k = 0$ )

$A_k = d^2 e^{k(h_1+h_2)}$  : área após  $k$  iterações

$h_1 + h_2 < 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \rightarrow 1 + \varepsilon$

1 na direção do alongamento

$\varepsilon$  na direção perpendicular (estrutura fractal)



**Figure 5.4** Image of a square under a plane map.

A square of side  $d$  is mapped approximately into a rectangle by  $f^k$ .

Chaos  
Alligood et al.

# Dimensão por Contagem de Caixas

Número inicial de caixas:  $N(d)$

Após  $k$  iterações:

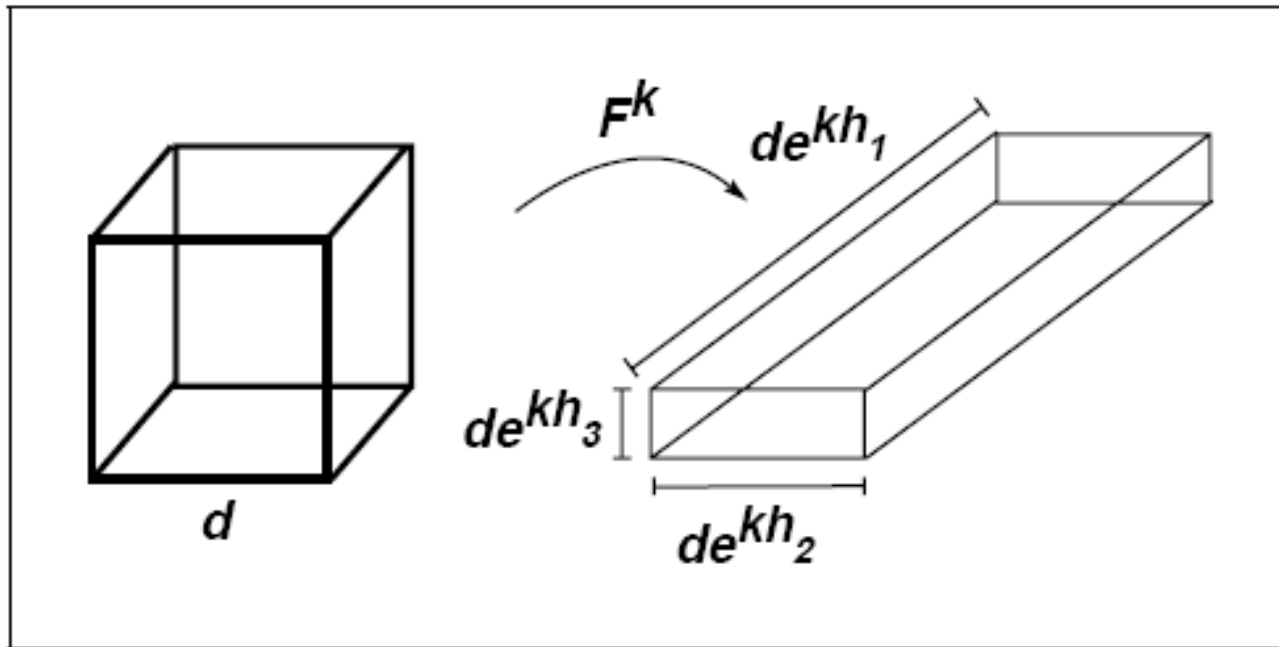
$$\text{Número de caixas: } N(\epsilon) = \frac{d e^{k h_1}}{d e^{k h_2}}$$

$$\text{Largura da caixa: } \epsilon = d e^{k h_2}$$

Para  $k \rightarrow \infty$ , obtemos a dimensão de Lyapunov

$$\begin{aligned} \frac{\ln N(\epsilon)}{-\ln \epsilon} &\approx -\frac{\ln N(d) e^{k(h_1 - h_2)}}{\ln d e^{k h_2}} = -\frac{k(h_1 - h_2) + \ln N(d)}{k h_2 + \ln d} \\ &= \frac{h_2 - h_1 + [\ln N(d)]/k}{h_2 - (\ln d)/k}. \quad \rightarrow 1 - \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{h_1}{|h_2|} \end{aligned}$$

# Iteração de Volume em Torno de Uma Órbita



**Figure 5.5** Three-dimensional version of Figure 5.4.

A small cube of side  $d$  maps into box.

f em  $\mathbb{R}^2$

$0 > h_1 \geq h_2 \Rightarrow D_L \rightarrow 0$       contração de área

f em  $\mathbb{R}^2$

$0 < h_1 < h_2 \Rightarrow D_L \rightarrow 2$       dilatação de área

Órbitas caóticas do mapa  $f$  em  $\mathbb{R}^3$

$$h_1 > 0 \quad \text{e} \quad h_2 \geq 0$$

$$h_1 + h_1 < 0$$

Plano na direção da expansão.

A dimensão pode ser estimada com caixas nesse plano.

Semelhante ao caso bidimensional.

Órbitas caóticas do mapa  $f$  em  $\mathbb{R}^3$

$$h_1 > 0 \quad e \quad h_2 \geq 0 \quad h_3 < 0$$

$$h_1 + h_2 \geq 0 \Rightarrow p = 2$$

Cubos de lado  $e^{kh_3}$

$$\frac{e^{kh_1}}{e^{kh_3}} \text{ na direção de } h_1$$

$$\frac{e^{kh_2}}{e^{kh_3}} \text{ na direção de } h_2$$

$$N(\varepsilon) = e^{kh_1 - kh_3} e^{kh_2 - kh_3}$$

$$\varepsilon = e^{kh_3}$$

$$\frac{\ln N(\varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \approx -\frac{\ln N(d)e^{k(h_1 - h_3) + k(h_2 - h_3)}}{\ln d e^{kh_3}}$$

$$= -\frac{k(h_1 + h_2 - 2h_3) + \ln N(d)}{kh_3 + \ln d}$$

$$= \frac{2h_3 - h_1 - h_2 + [\ln N(d)]/k}{h_3 - (\ln d)/k} \rightarrow \infty$$

$$D_L = 2 + \frac{h_1 + h_2}{|h_3|}$$

## 5- Partições de Markov



**Definition 5.14** Assume that  $S_1, \dots, S_r$  are rectangular subsets of a rectangle  $S$  whose interiors do not overlap. For simplicity we will assume that the rectangles are formed from segments parallel to the coordinate axes and that the map  $f$  stretches the rectangles in the direction of one axis and contracts in the direction of the other. Assume that whenever  $f(S_i)$  intersects  $S_j$  in a set of nonzero area,  $f(S_i)$  “lies across  $S_j$ ” so that stretching directions are mapped to stretching directions, and shrinking directions to shrinking directions. Then we say that  $\{S_1, \dots, S_r\}$  is a **Markov partition** of  $S$  for  $f$ .

Exemplo: Partição de Markov para o Mapa do Padeiro

$$\text{Mapa do padeiro } \vec{B}(x, y) = \begin{cases} (1/3 x, 2y) & \text{para } 0 \leq y \leq 1/2 \\ (1/3 x + 2/3, 2y - 1) & \text{para } 1/2 < y \leq 1 \end{cases}$$

(O conjunto de Cantor A desse mapa é constituído pelos retângulos verticais que permanecem em  $\vec{B}^n$  para todo n ( $n > 0$ ,  $n < 0$ ).

A é um conjunto invariante pois  $\vec{B}^{-1}(A) = A$ )

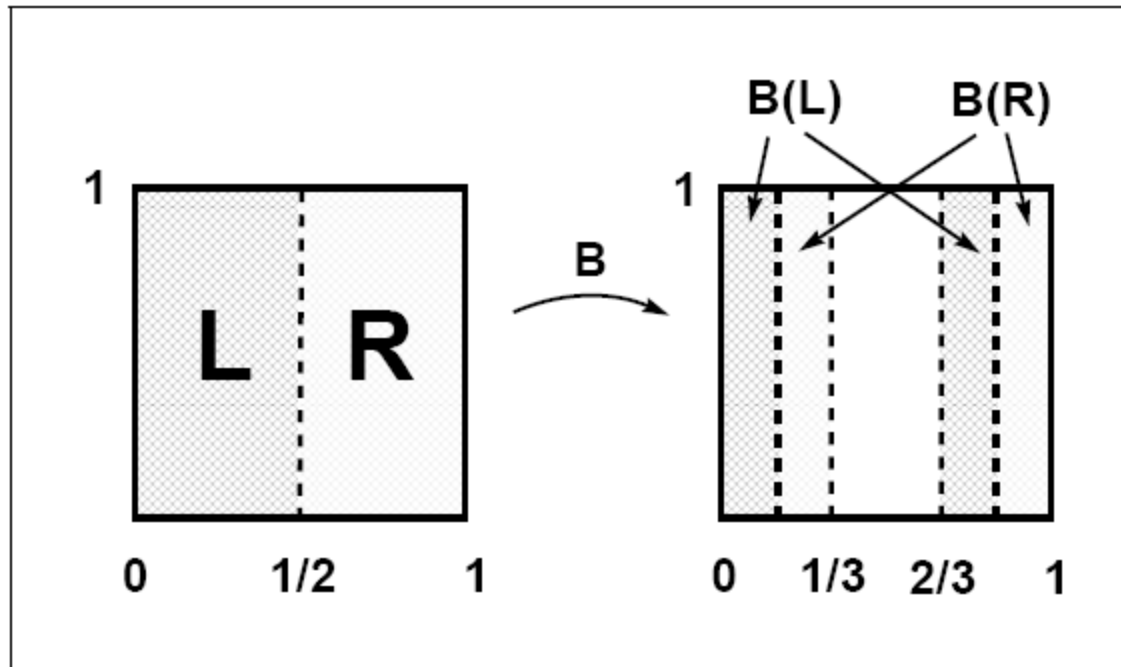
Vamos apresentar itinerários S do mapa  $\vec{B}$ , no conjunto de Cantor A.

Pontos com esses itinerários permanecem em A

após iterações com  $n > 0$  ou  $n < 0$ .

Itinerário em A  $\cdots S_{-2}S_{-1}S_0 \bullet S_1S_2S_3 \cdots$

# Partição de Markov para o Mapa do Padeiro



**Figure 5.11** A Markov partition of the skinny baker map.

The partition consists of the left and right halves of the unit square. The center third of the square has no pre-images.

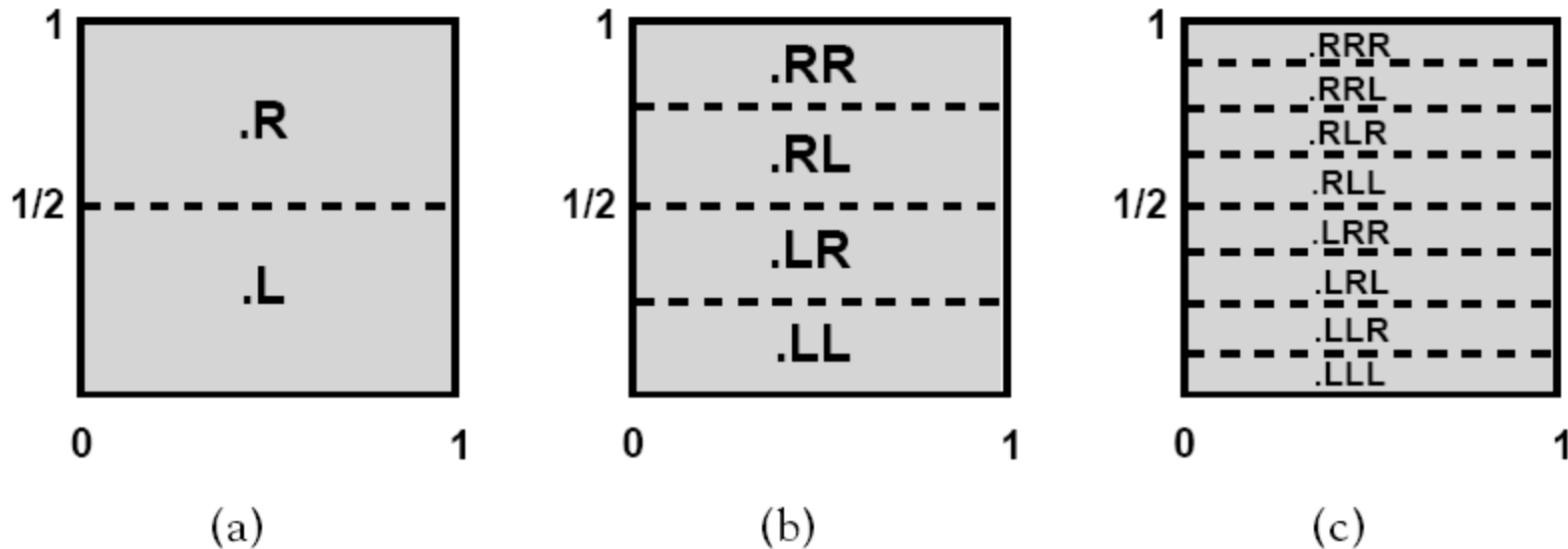
Chaos  
Alligod et al.

# Conjuntos de pontos iterados que permanecem no quadrado

Pontos em .L (.R), após uma iteração, vão para L (R)

Pontos em .RL, após duas iterações, vão para L

$$\text{Largura} = 2^{-k}$$



**Figure 5.12 Forward itineraries of points of the unit square under the skinny baker map.**

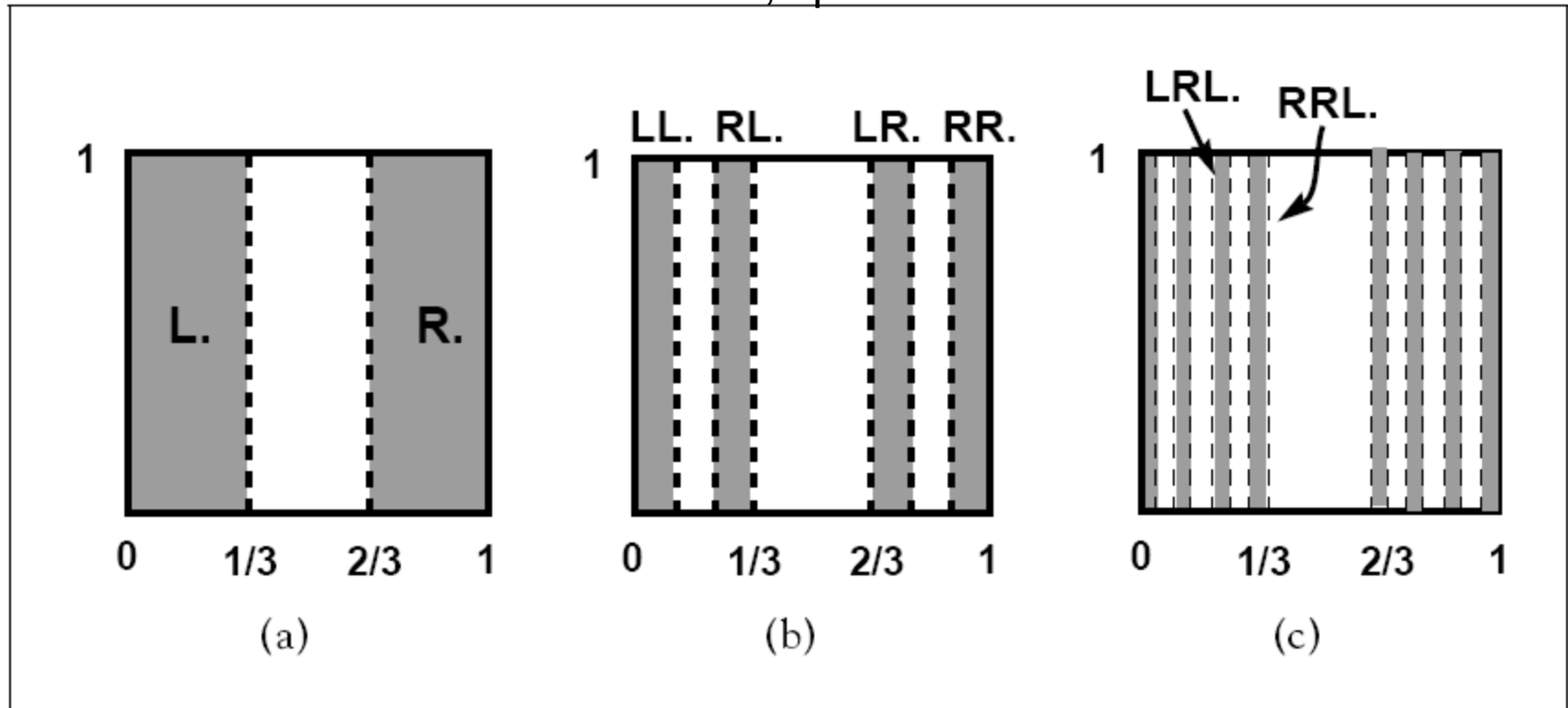
The unit squares in (a), (b), and (c) show successive refinements of regions defined by itineraries. The points in .RLR, for example, map to the right half under  $\mathbf{B}$ , the left half under  $\mathbf{B}^2$ , and the right half under  $\mathbf{B}^3$ .

Iterações com  $n > 0$

Conjuntos de pontos iterados que permanecem no quadrado

$$\text{Largura} = 3^{-(k+1)}$$

Ponto em RRL. Está em L e veio de R, após ter saído de R



**Figure 5.13** Backward itineraries of points of the unit square under the skinny baker map.

Each point  $\mathbf{p}$  in  $\text{RRL}_\bullet$ , for example, satisfies  $\mathbf{p}$  is in  $L$ ,  $\mathbf{p}$  is in  $B(R)$ , and  $\mathbf{p}$  is in  $B^2(R)$ .

Aplicação do mapa do padeiro B a um itinerário

$$\cdots S_{-k} \cdots S_{-1} S_0 \bullet S_1 S_2 \cdots S_k \cdots \rightarrow \cdots S_{-k} \cdots S_{-1} S_0 S_1 \bullet S_2 \cdots$$

Mapa de translação

$$s(\cdots S_{-2} S_{-1} S_0 \bullet S_1 S_2 S_3 \cdots) = \cdots S_{-2} S_{-1} S_0 S_1 \bullet S_2 S_3 \cdots$$

Sequência com  $k$  símbolos repetidos  $\Rightarrow$   
órbita de período  $k$

Sequência sem repetição de símbolos  $\Rightarrow$   
órbita caótica

# Mapa da Ferradura

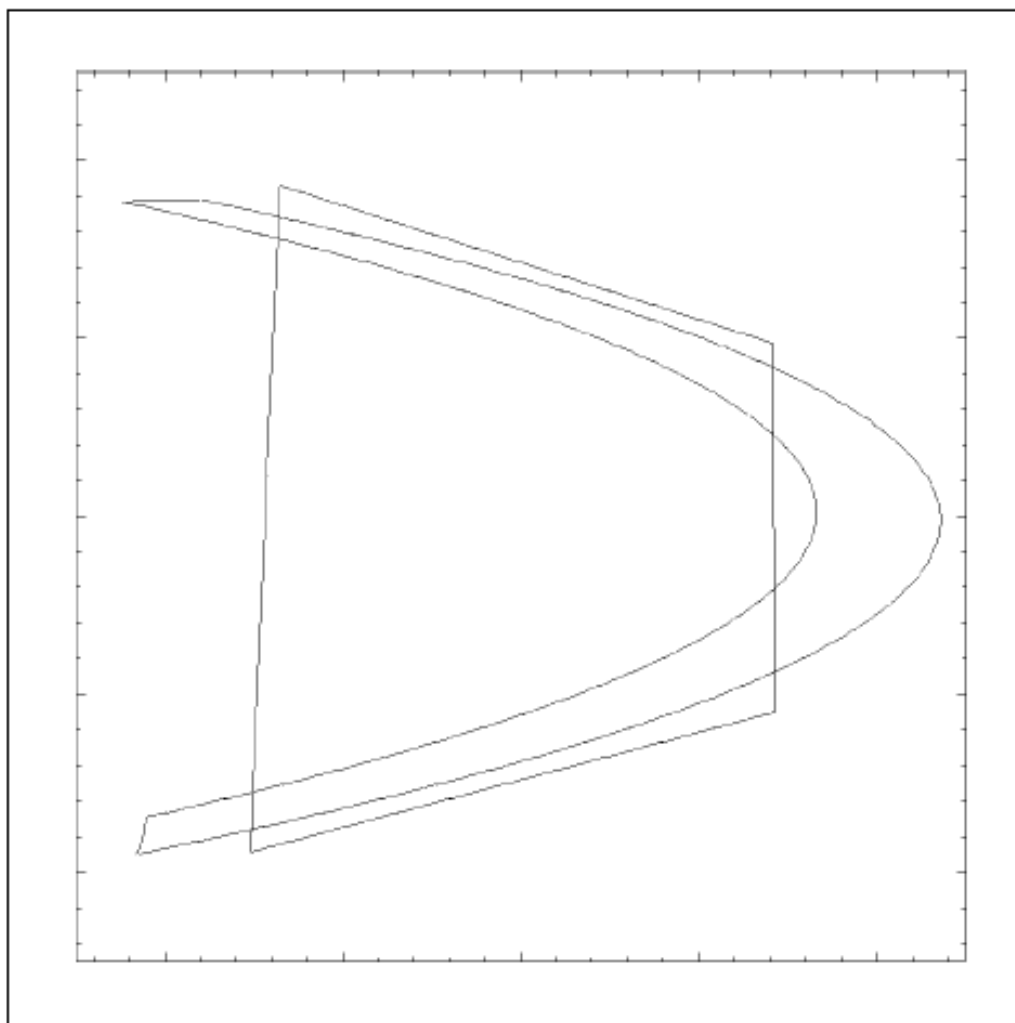
Mapa em  $\mathbb{R}^2$ , introduzido por S. Smale

Mapa aplicado à área  $ABCD \Rightarrow$  área  $A^*B^*C^*D^*$

$$h(A) = A^* \quad h(B) = B^*$$

$$h(C) = C^* \quad h(D) = D^*$$





Identificação  
de um mapa da ferradura  
no mapa de Hénon

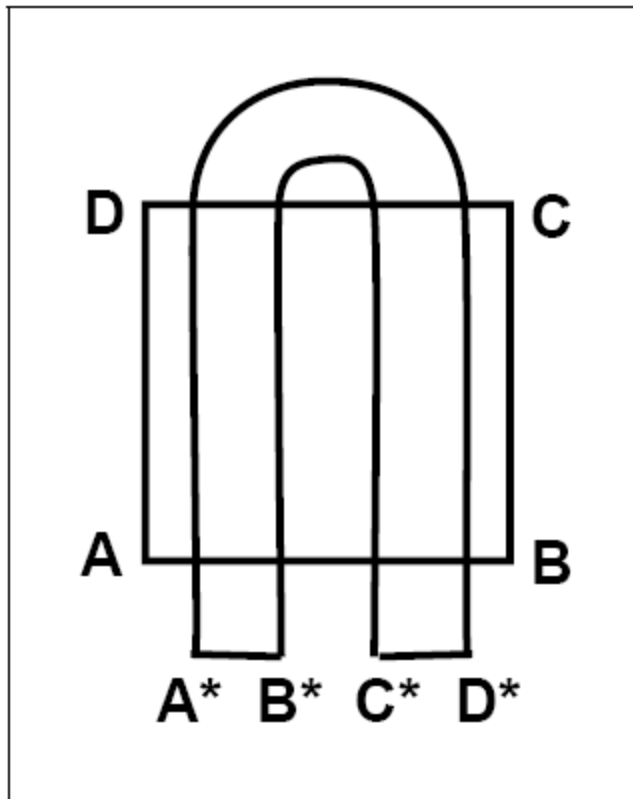
**Figure 5.14 A horseshoe in the Hénon map.**

A quadrilateral and its horseshoe-shaped image are shown. Parameter values are  $a = 4.0$  and  $b = -0.3$ .

Chaos  
Alligood et al.

# Mapa da Ferradura

Estica de uma fator 4 na vertical  
Contraí de um fator 4 na horizontal



Conjunto invariante  $H$  no quadrado  $W$   
(pontos iterados permanecem em  $W$ ,  
para  $n > 0$  e  $n < 0$ ).

**Figure 5.15 The horseshoe map.**

The map sends the square  $W = ABCD$  to its image  $A^*B^*C^*D^*$ , which is shaped like a horseshoe.

Cada ponto do conjunto invariante permanece em  $V_L$  ou  $V_R$  do conjunto  $H \cap h(H)$ .

Cada ponto tem um itinerário  $\dots S_{-3}S_{-2}S_{-1}S_0 \bullet S_1S_2 \dots$   
com etapas em  $h_i$

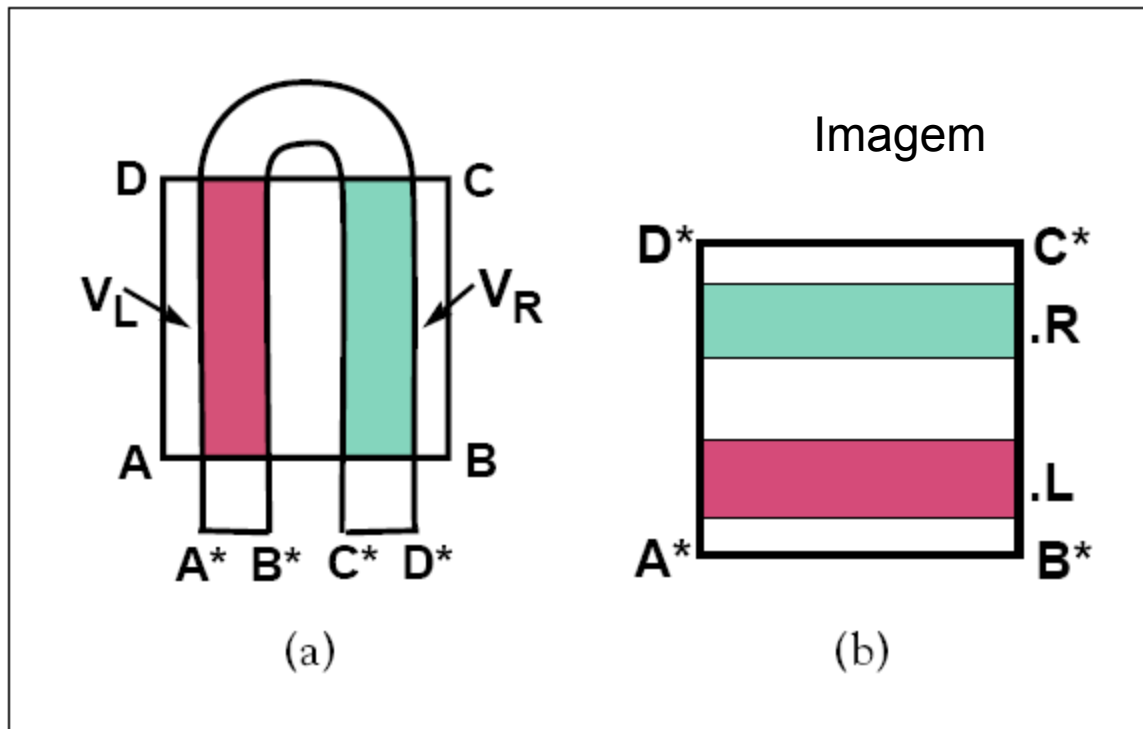
$$h^i \text{ em } V_L \Rightarrow S_i = L$$

$$h^i \text{ em } V_R \Rightarrow S_i = R$$

Mapeamento da imagem  $h(W)$

Pontos em  $.L$  mapeados em  $V_L$

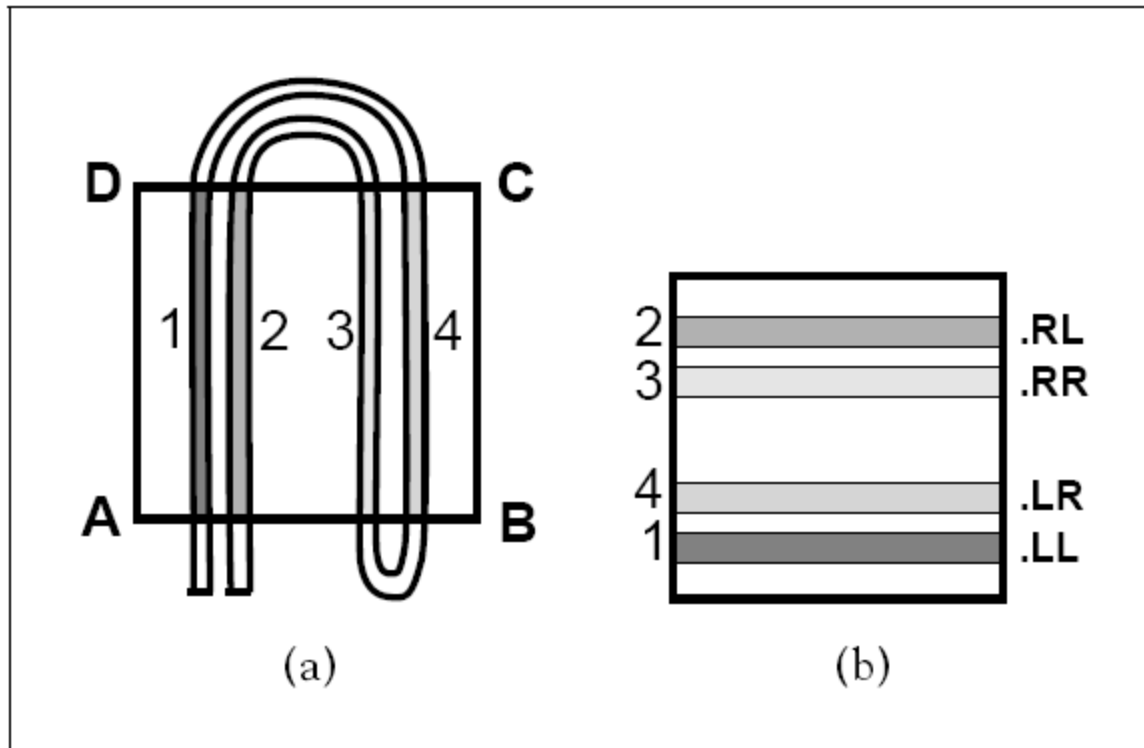
Pontos em  $.R$  mapped in  $V_R$



**Figure 5.16 Unfolding of the horseshoe map.**

The grey (resp., black) region in (b) maps to the grey (resp., black) region in (a).

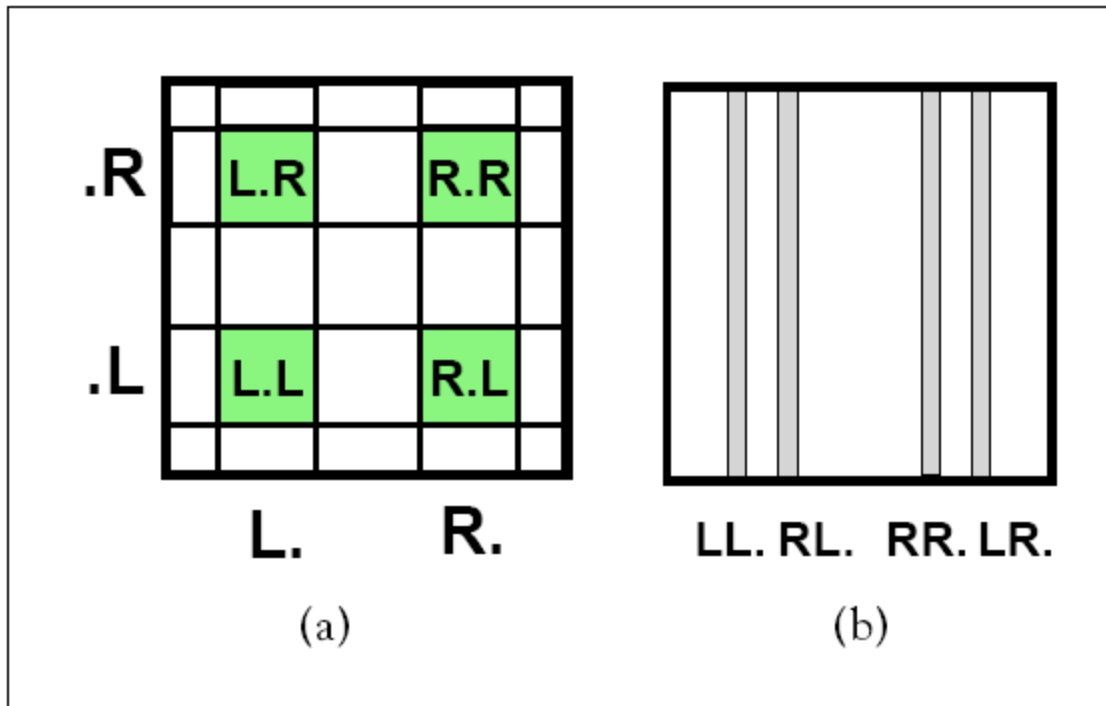
# Mapeamento $h^2(W)$



**Figure 5.17** Unfolding  $h^2(W)$ , the second iterate of the horseshoe map. Forward itineraries of points in the unit square are shown.

Mapeamento para  $n < 0$

Cruzamentos dos mapeamentos para  $n > 0$  e  $n < 0$

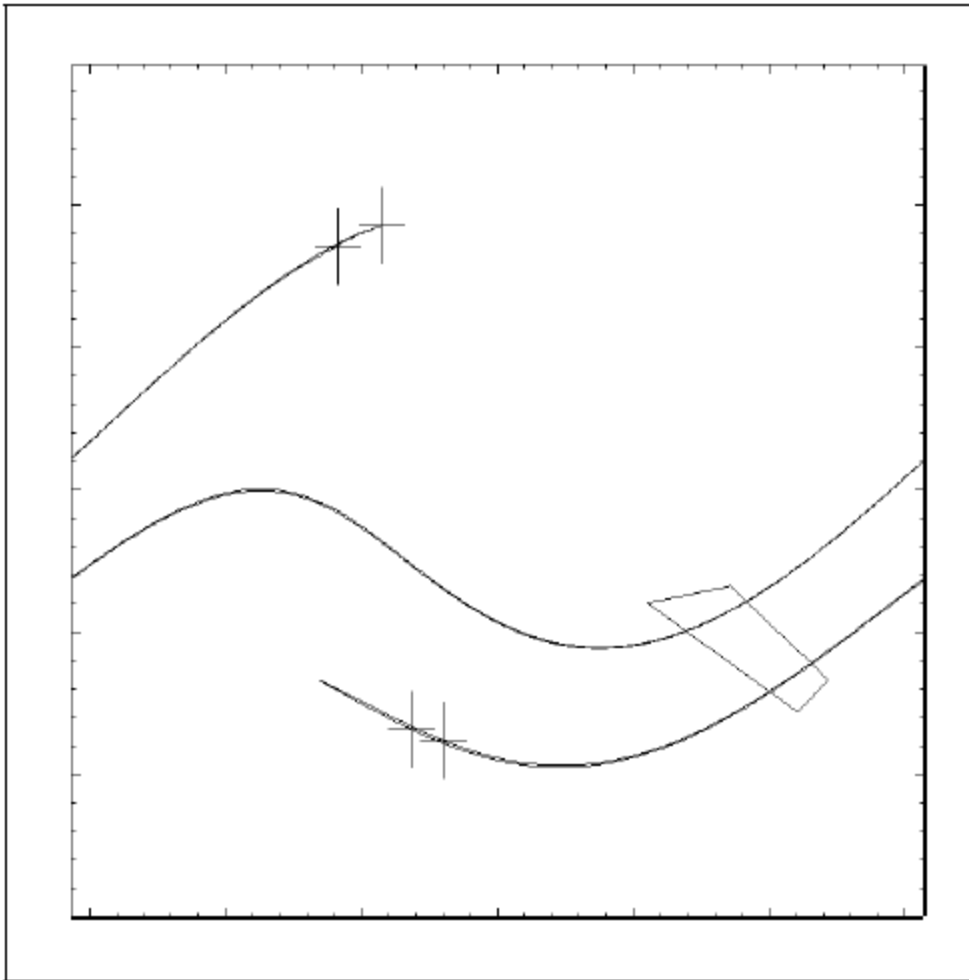


**Figure 5.18** Itineraries of the horseshoe map.

(a) Two-sided itineraries are intersections of vertical and horizontal strips. (b) Backward itineraries correspond to vertical strips.

Órbitas caóticas do mapa da ferradura (de Smale)  
com expoentes  $h_1 = \ln 4$  e  $h_1 = -\ln 4$

## Mapa da ferradura no pêndulo forçado



**Figure 5.19 Horseshoe in the forced damped pendulum.**

The rectangular-shaped region is shown along with its first image under the time- $2\pi$  map. The image is stretched across the original shape, and is so thin that it looks like a curve, but it does have width. The crosses show the image of the corner points of the domain rectangle.

Chaos  
Alligood et al.