

# I - Mapas Unidimensionais

Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke  
Springer (1997)

# 1- Introdução

- **Sistemas Dinâmicos:** Conjunto de estados possíveis com uma regra de evolução determinística discreta (mapa) ou contínua (equação diferencial).
- **Modelo:** idealização simples, descreve algumas características do processo. Essas características são do processo e não devido às aproximações.

## 2- Mapas Unidimensionais

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

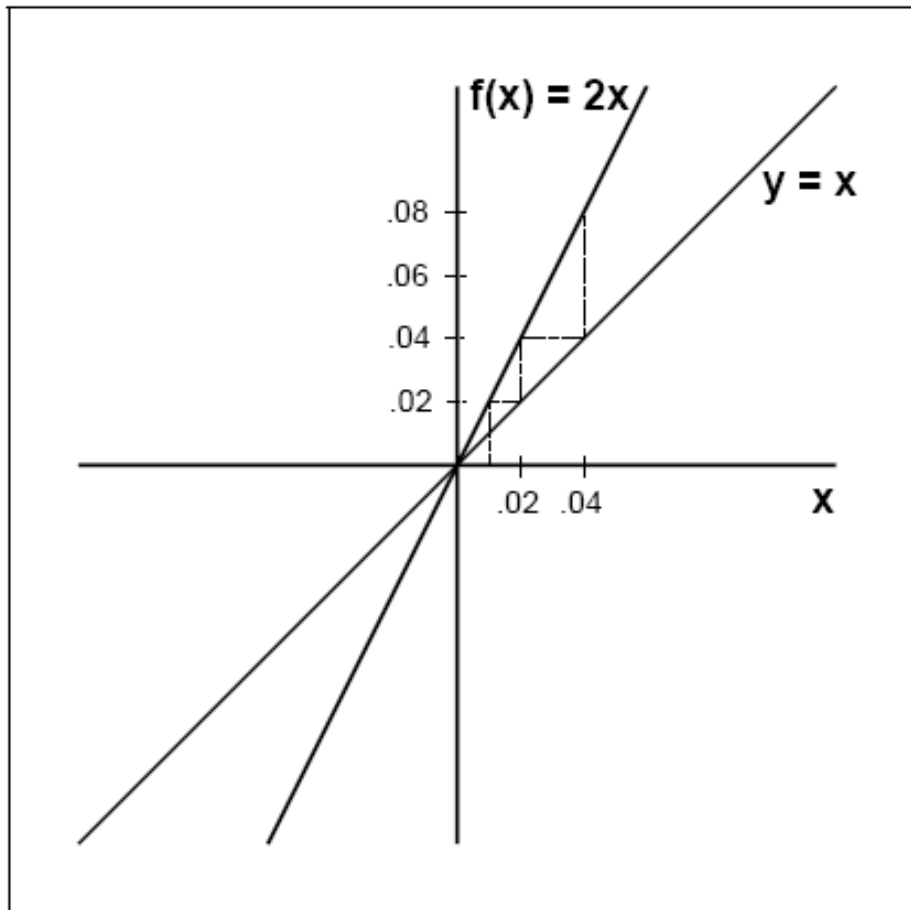
Exemplos:

$$f = 2 x_n$$

$$g = 2 x_n (1 - x_n)$$

n	$f(x_n)$	$g(x_n)$
0	0,0100000000	0,0100000000
3	0,0800000000	0,0746184887
12	40,9600000000	0,5000000000

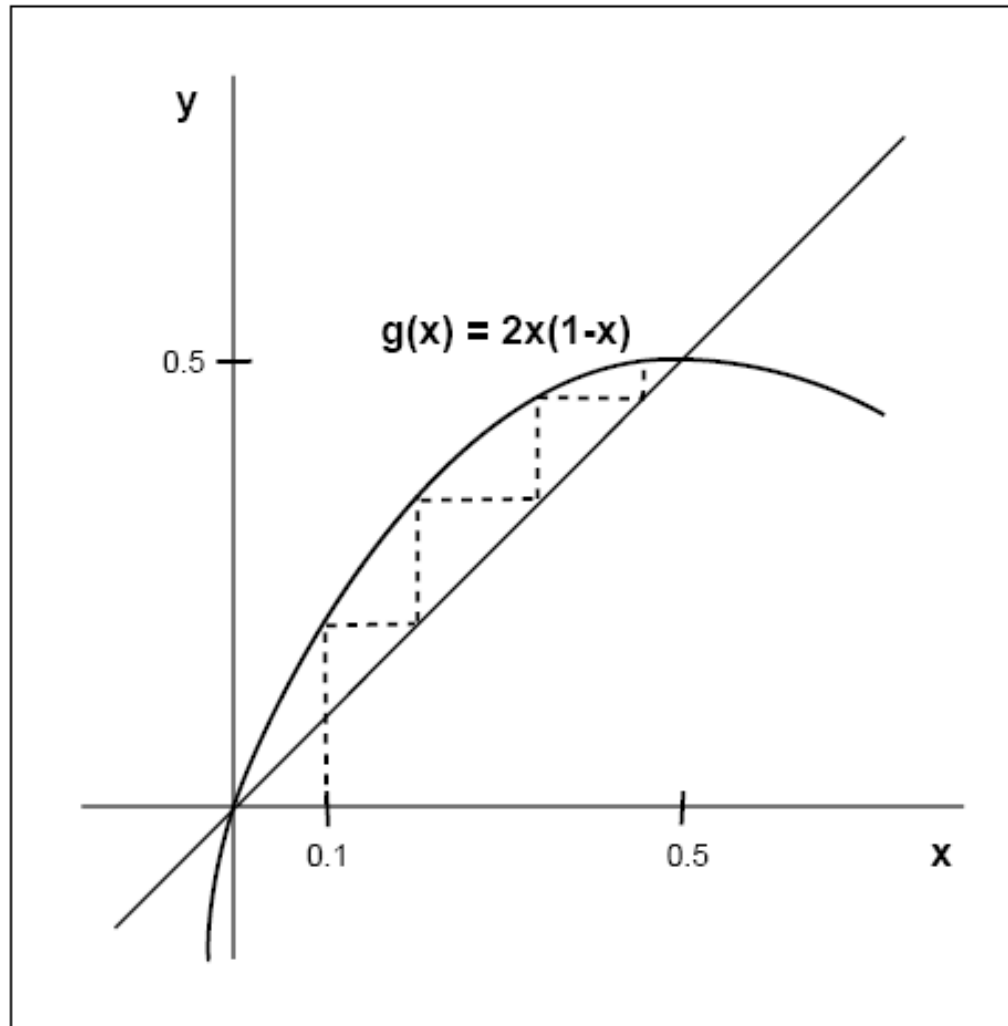
# Construção Gráfica de uma Trajetória



**Figure 1.1** An orbit of  $f(x) = 2x$ .

The dotted line is a cobweb plot, a path that illustrates the production of a trajectory.

# Construção Gráfica de uma Trajetória



**Figure 1.2** A cobweb plot for an orbit of  $g(x) = 2x(1 - x)$ .  
The orbit with initial value .1 converges to the sink at .5.

## Órbita / Ponto Fixo

$$\text{Órbita} : \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

$x_0$ : ponto inicial

$$\text{Ponto fixo } p : f^k(p) = p$$

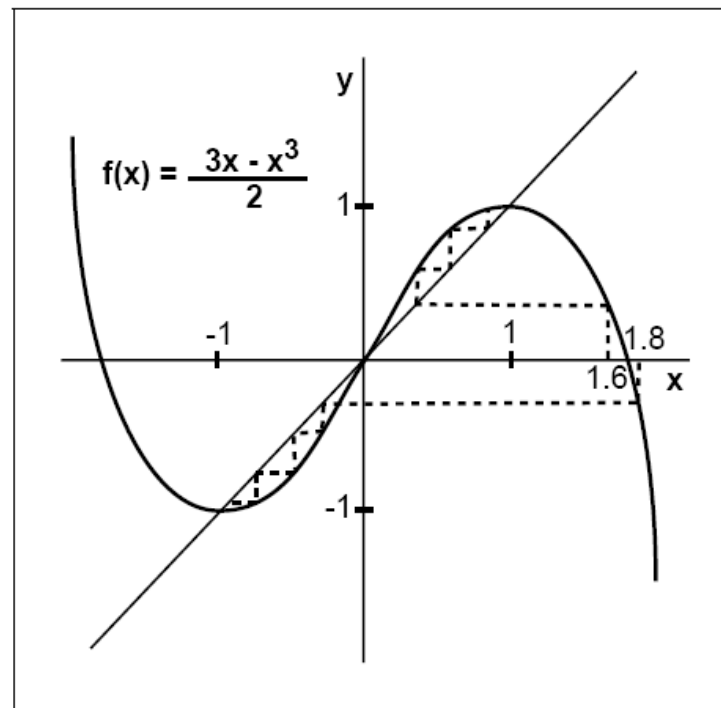
Para encontrar o ponto fixo usamos :  $x_{n+1} = x_n$

Para o Mapa Logístico,  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) \Rightarrow x_n = 0; 0,5$

## Exemplo

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad f = \frac{3x - x^3}{2}$$

Para obter os pontos fixos :  $x = \frac{3x - x^3}{2} \Rightarrow x = 1; 0; -1$



Alligood et al.  
Chaos

**Figure 1.3** A cobweb plot for two orbits of  $f(x) = (3x - x^3)/2$ .

The orbit with initial value 1.6 converges to the sink at 1; the orbit with initial value 1.8 converges to the sink at -1.

### 3- Estabilidade de Pontos Fixos

$N_\varepsilon(p)$  : vizinhança  $\varepsilon$  em torno de  $x = p$  ( $\varepsilon \cong 0$  e  $\varepsilon > 0$ )

$$N_\varepsilon(p) \equiv \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \varepsilon\}$$

Ponto fixo de atração :

$$\text{Para } \varepsilon > 0 \text{ e } x \in N_\varepsilon(p) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = p$$

Ponto fixo de repulsão :

$$\text{Para } \varepsilon > 0 \text{ e } x \in N_\varepsilon(p) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) \notin N_\varepsilon(p)$$

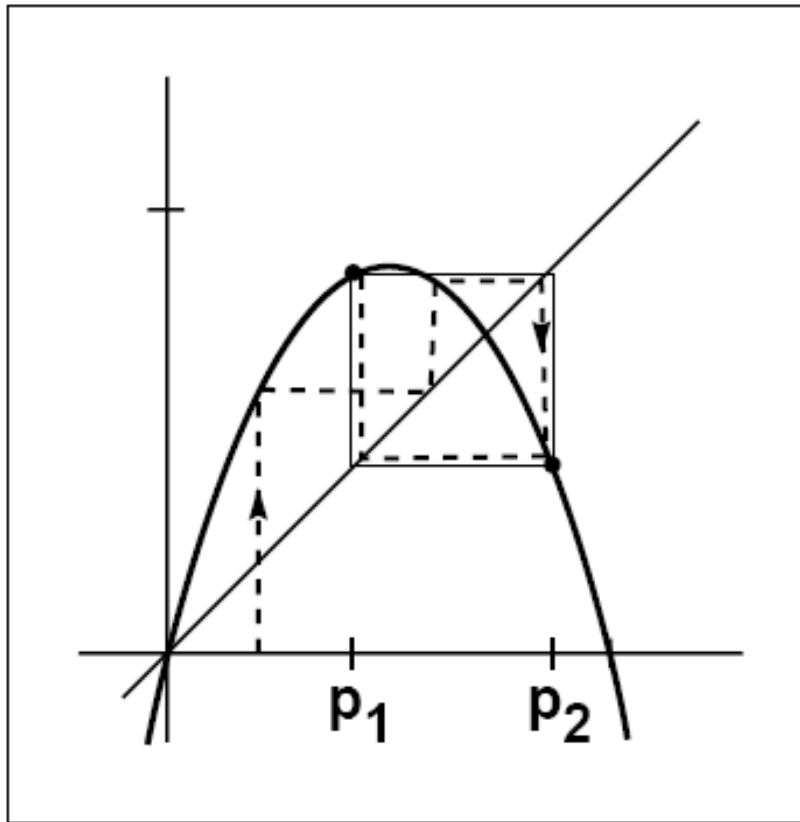


## Órbita Estável de Período 2

$n$	$g^n(x)$	$g^n(x)$	$g^n(x)$
0	0.2000	0.5000	0.9500
1	0.5280	0.8250	0.1568
2	0.8224	0.4764	0.4362
3	0.4820	0.8232	0.8116
4	0.8239	0.4804	0.5047
5	0.4787	0.8237	0.8249
6	0.8235	0.4792	0.4766
7	0.4796	0.8236	0.8232
8	0.8236	0.4795	0.4803
9	0.4794	0.8236	0.8237
10	0.8236	0.4794	0.4792
11	0.4794	0.8236	0.8236
12	0.8236	0.4794	0.4795
13	0.4794	0.8236	0.8236
14	0.8236	0.4794	0.4794

**Table 1.2** Three different orbits of the logistic model  $g(x) = 3.3x(1 - x)$ . Each approaches a period-2 orbit.

# Órbita Estável de Período 2



Alligood et al.  
Chaos

**Figure 1.4** Orbit converging to a period-two sink.

The dashed lines form a cobweb plot showing an orbit which moves toward the sink orbit  $\{p_1, p_2\}$ .

## Estabilidade de Um Ponto Fixo / Bacia de Atração

### *Teorema*

Seja  $f$  um mapa (suave) em  $\mathbb{R}$ , com um ponto fixo  $x = p$

se  $|f'(p)| < 1$ ,  $p$  é um ponto fixo estável

se  $|f'(p)| > 1$ ,  $p$  é um ponto fixo instável

Bacia de atração :

conjunto das condições iniciais cujas órbitas

convergem para  $x = p$

## Exemplo

*Mapa Logístico*  $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$

*Pontos fixos* :  $0; 0,5$       *Exemplo*  $f(0)=0$  e  $f(1)=0$

$f'(0) = 2 > 1 \Rightarrow$  *ponto de repulsão*

$f'(0,5) = 0 < 1 \Rightarrow$  *ponto de atração*

*Abacia de atração* de  $x=0,5$  é o intervalo  $0 < x < 1$

# Exemplo

$$\text{Mapa } x_{n+1} = \frac{3x - x^3}{2}$$

Pontos fixos:  $-1$ ;  $0$ ;  $1$

$f'(0) = 3/2 > 1 \Rightarrow$  ponto de repulsão

$f'(-1) = f'(1) = 0 < 1 \Rightarrow$  ponto de atração

A bacia de atração de  $x = 1$  contém os intervalos

$(0, \sqrt{3})$  e  $[-2, -\sqrt{3})$  e outros no intervalo  $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

## 4- Pontos periódicos

Mapa Logístico  $x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$   $a = 3,3$

Pontos fixos instáveis :  $x = 0; 0,696969...$

Órbitas periódicas estáveis com período 2 :

$$f^2(0,4794) = 0,4794 \quad f^2(0,8236) = 0,8236$$

$$f^{2'}(0,4794) = |-0,2904| < 1 \quad f^{2'}(0,8236) < 1$$

Mapa Logístico  $x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$   $a = 3,5$

Pontos fixos instáveis:

$$f'(0) = 3.5 \quad f'(5/7) = -1.5 \quad f(0) = 0 \text{ e } f(5/7) = 0$$

Órbita periódica instável com período 2:

$$f^2(3/7) > 1 \quad f^2(6/7) > 1 \quad ff(3/7) = 6/7 \text{ e } ff(6/7) = 3/7$$

Órbitas com período  $k > 2$

$$(f^k(p_1))' = f'(p_k) f'(p_{k-1}) \dots f'(p_1)$$

Note que  $(f^k(p_i))' = (f^k(p_j))'$



## 5- Mapa Logístico

$$\text{Mapa Logístico } x_{n+1} = g_a(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

$$\text{Para } 0 < a < 1, \quad \forall x_0 \in 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x \rightarrow 0$$

$$\text{Para } 1 < a < 3, \quad \forall x_0 \in 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x \rightarrow 0; \frac{a-1}{a}$$

$$g'(0) = a > 1 \Rightarrow \text{ponto de repulsão}$$

$$\left| g'\left(\frac{a-1}{a}\right) \right| = |-a + 2| < 1 \Rightarrow \text{ponto de atração}$$

Para  $3 < a < 4$ , novas órbitas periódicas  
(além das caóticas).

Para  $a = 3$  período 1  $\rightarrow$  período 2

Para  $a = 3,45$  período 2  $\rightarrow$  período 4

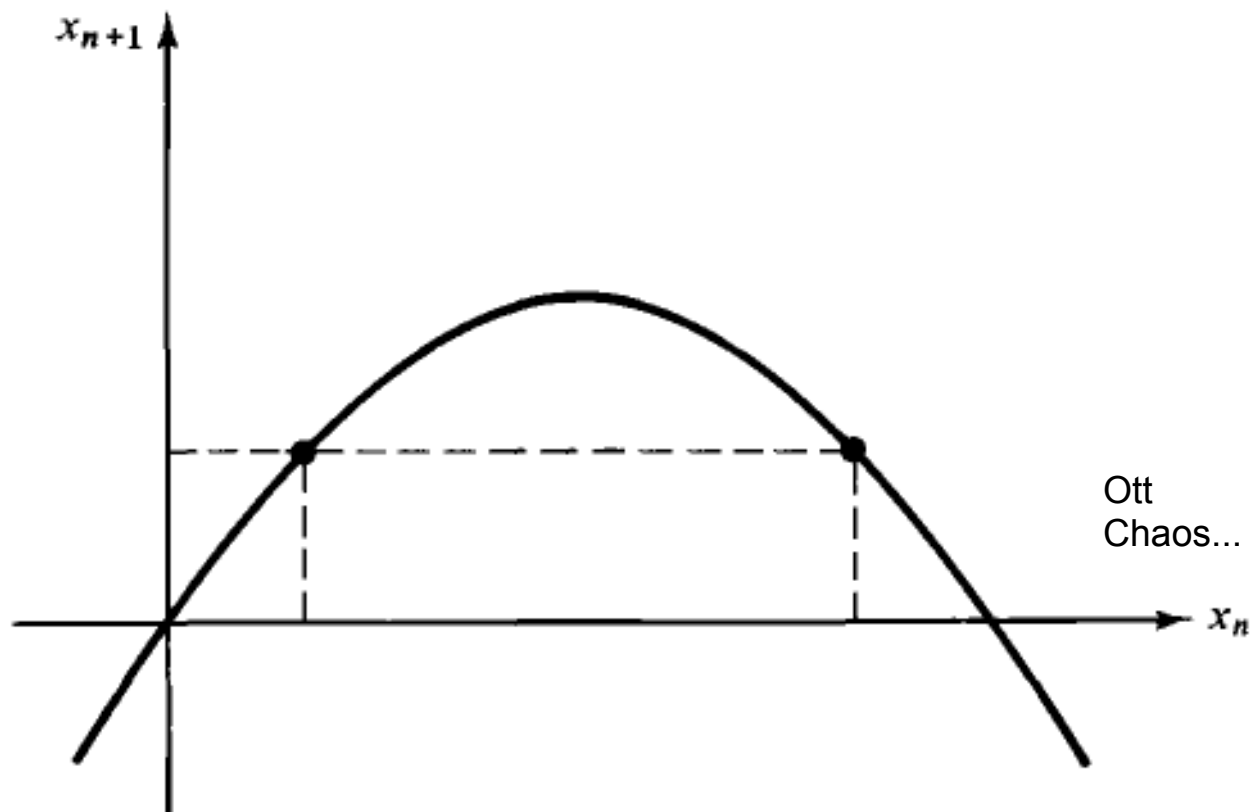
Duplicação de períodos : período  $2^n$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

Para  $a > 4$ , não há atrator ( $x \rightarrow \infty$ )

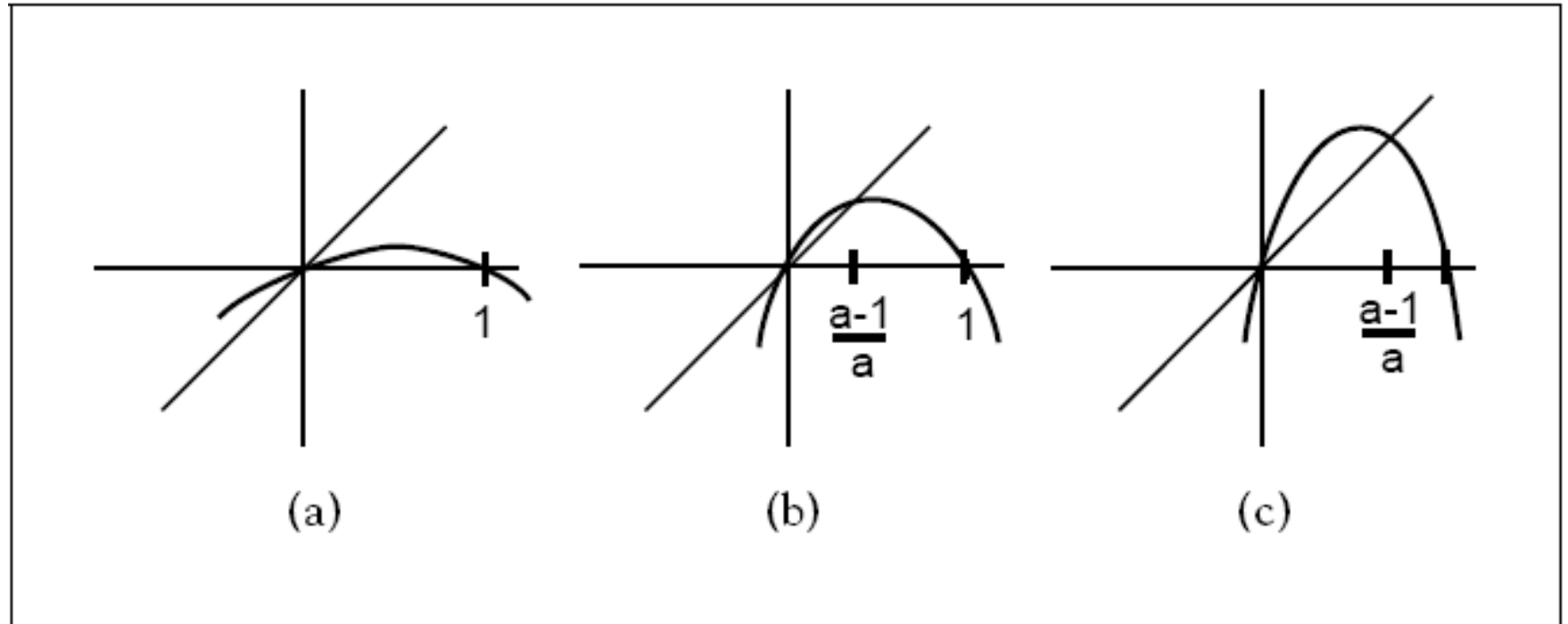
Mesmo atrator  $\forall x_0$  (para qualquer  $a$ )

Numericamente observamos as órbitas estáveis

# Não Invertibilidade do Mapa Logístico



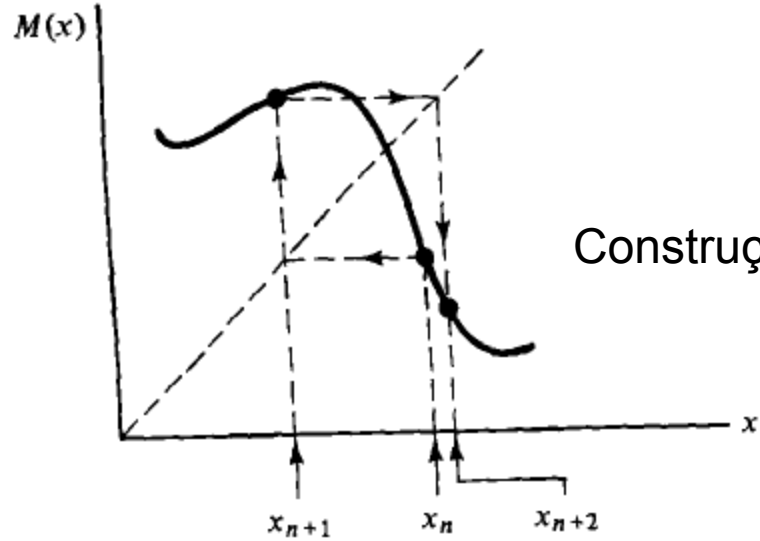
## Dependência com o Parâmetro de controle



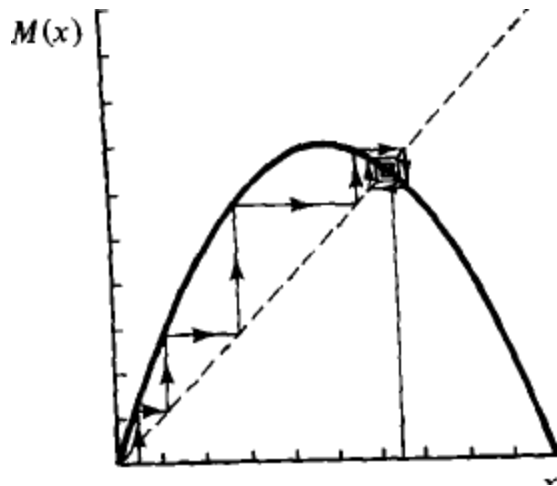
**Figure 1.5 The logistic family.**

(a) The origin attracts all initial conditions in  $[0, 1]$ . (b) The fixed point at  $(a - 1)/a$  attracts all initial conditions in  $(0, 1)$ . (c) The fixed point at  $(a - 1)/a$  is unstable.

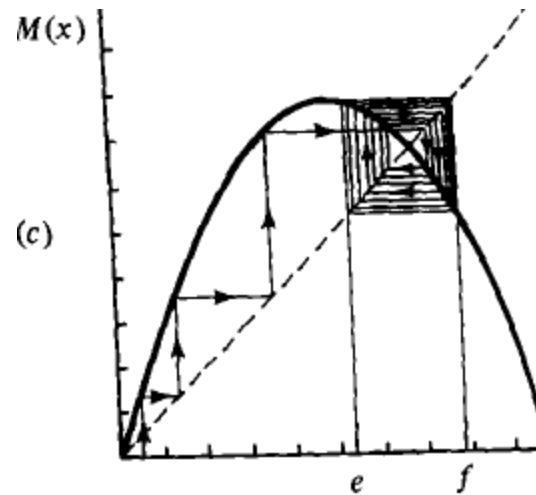
# Órbitas Periódicas do Mapa Logístico



Construção gráfica de uma órbita



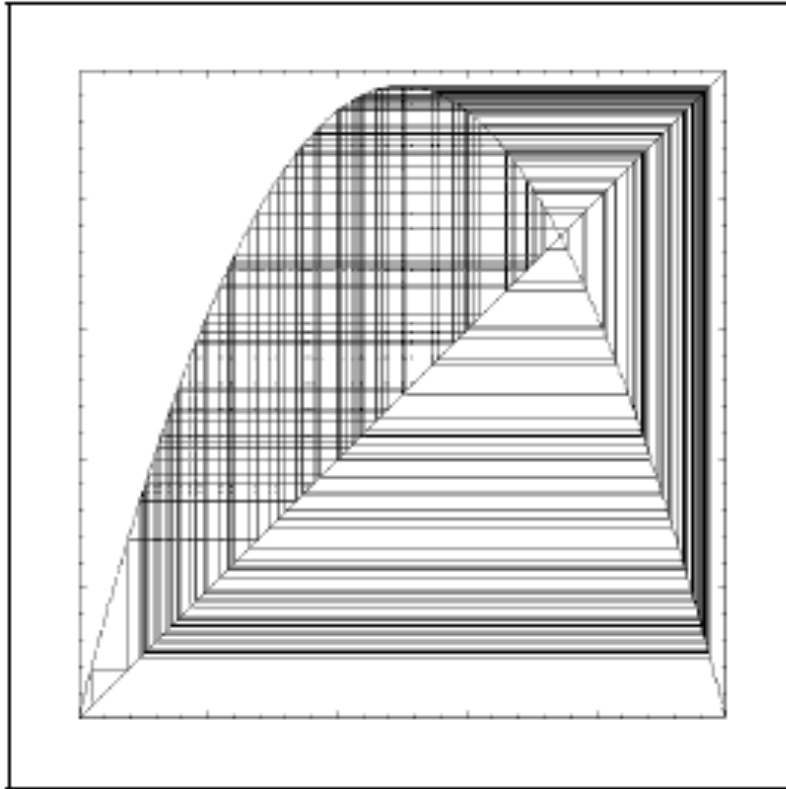
Ponto fixo (período 1)



Órbita com período 2

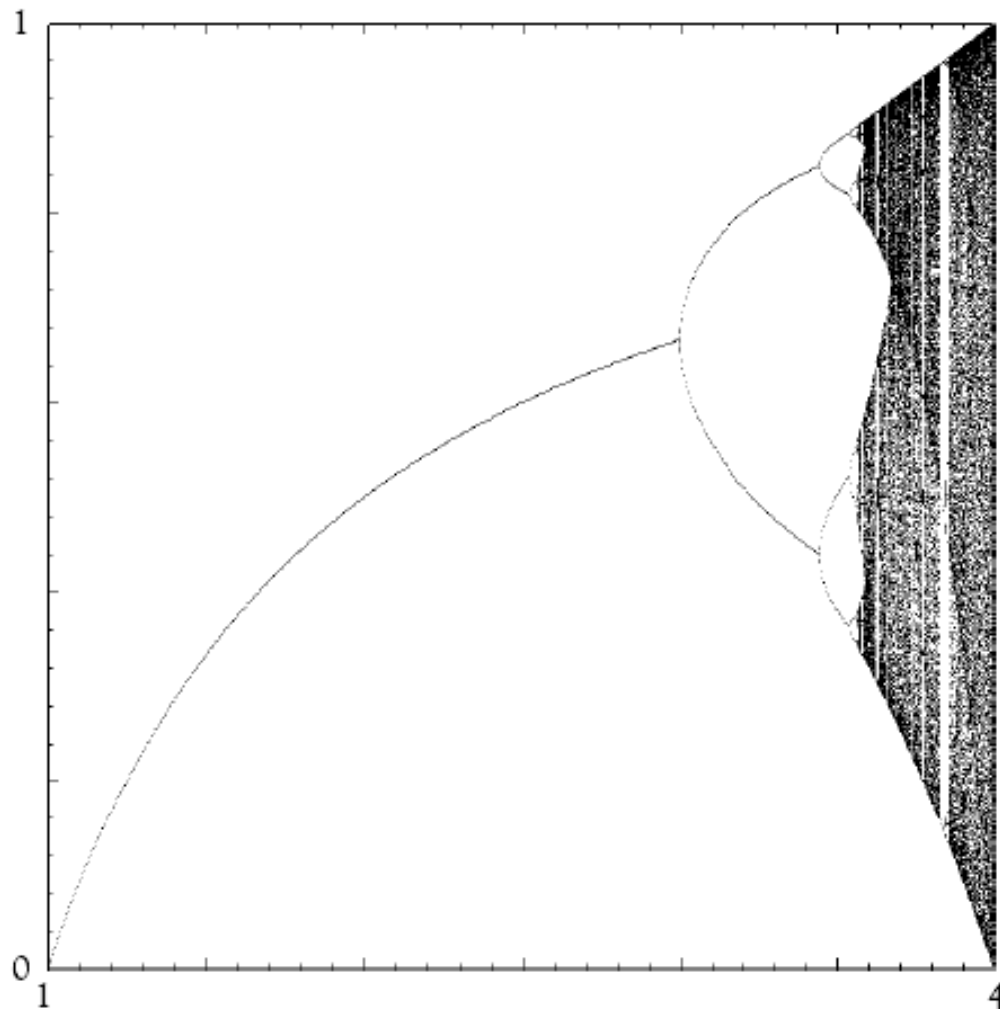
Ott  
Chaos ...

# Órbita Caótica



**Figure 1.8** Cobweb plot for the logistic map.

A single orbit of the map  $g(x) = 3.86x(1 - x)$  shows complicated behavior.



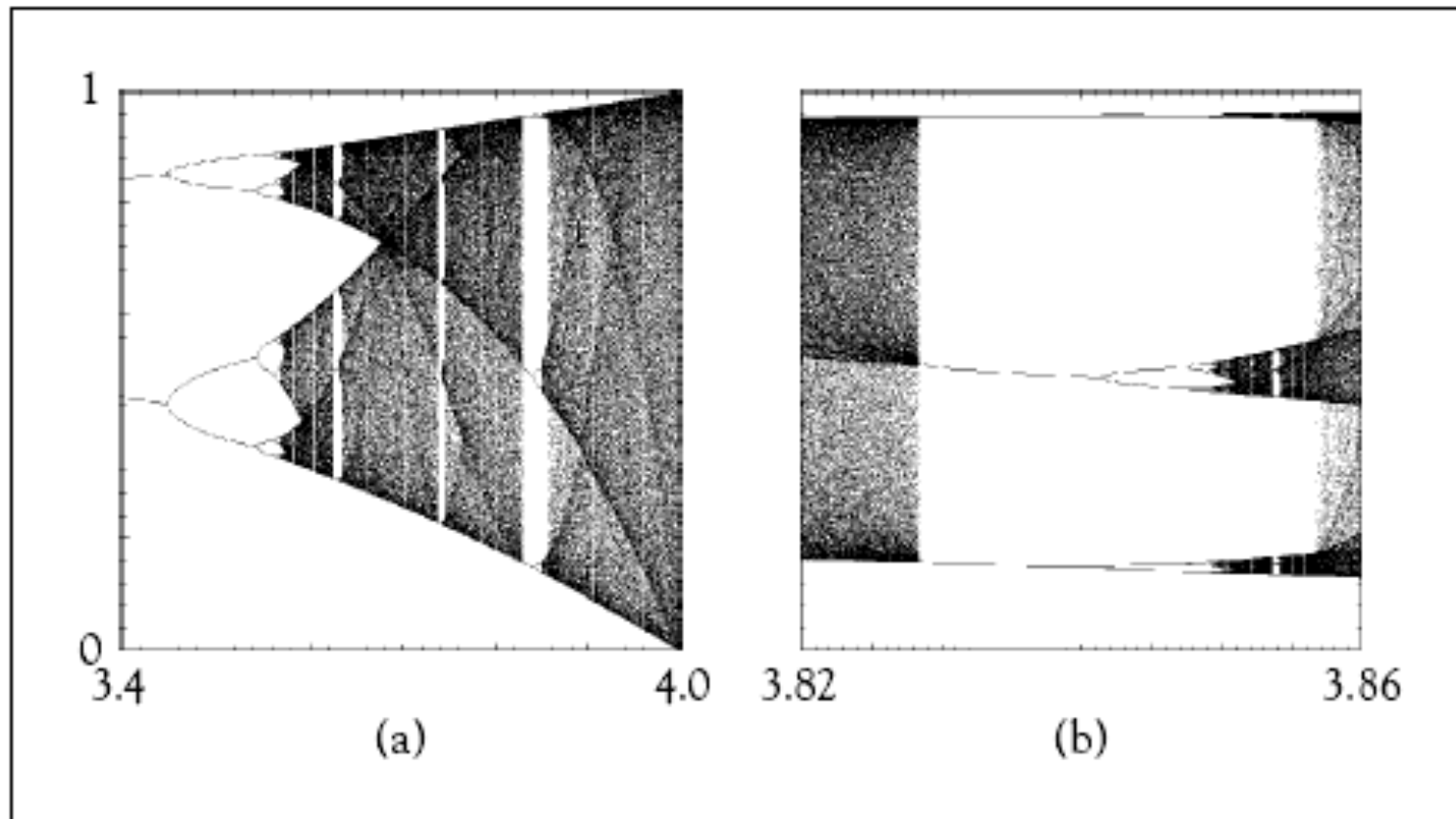
## Diagrama de Bifurcação

**Figure 1.6** Bifurcation diagram of  $g_a(x) = ax(1 - x)$ .

The fixed point that exists for small values of  $a$  gives way to a period-two orbit at the “bifurcation point”  $a = 3$ , which in turn leads to more and more complicated orbits for larger values of  $a$ . Notice that the fixed point is only plotted while it is a sink. When the period-two orbit appears, the fixed point is no longer plotted because it does not attract orbits. See Lab Visit 12 for laboratory versions.

Alligood et al.  
Chaos

# Diagramas de Bifurcação Ampliados



**Figure 1.7** Magnifications of the logistic bifurcation diagram.

(a) Horizontal axis is  $3.4 \leq a \leq 4.0$  (b) Horizontal axis is  $3.82 \leq a \leq 3.86$ .

Alligood et al.  
Chaos



# Mapa Logístico

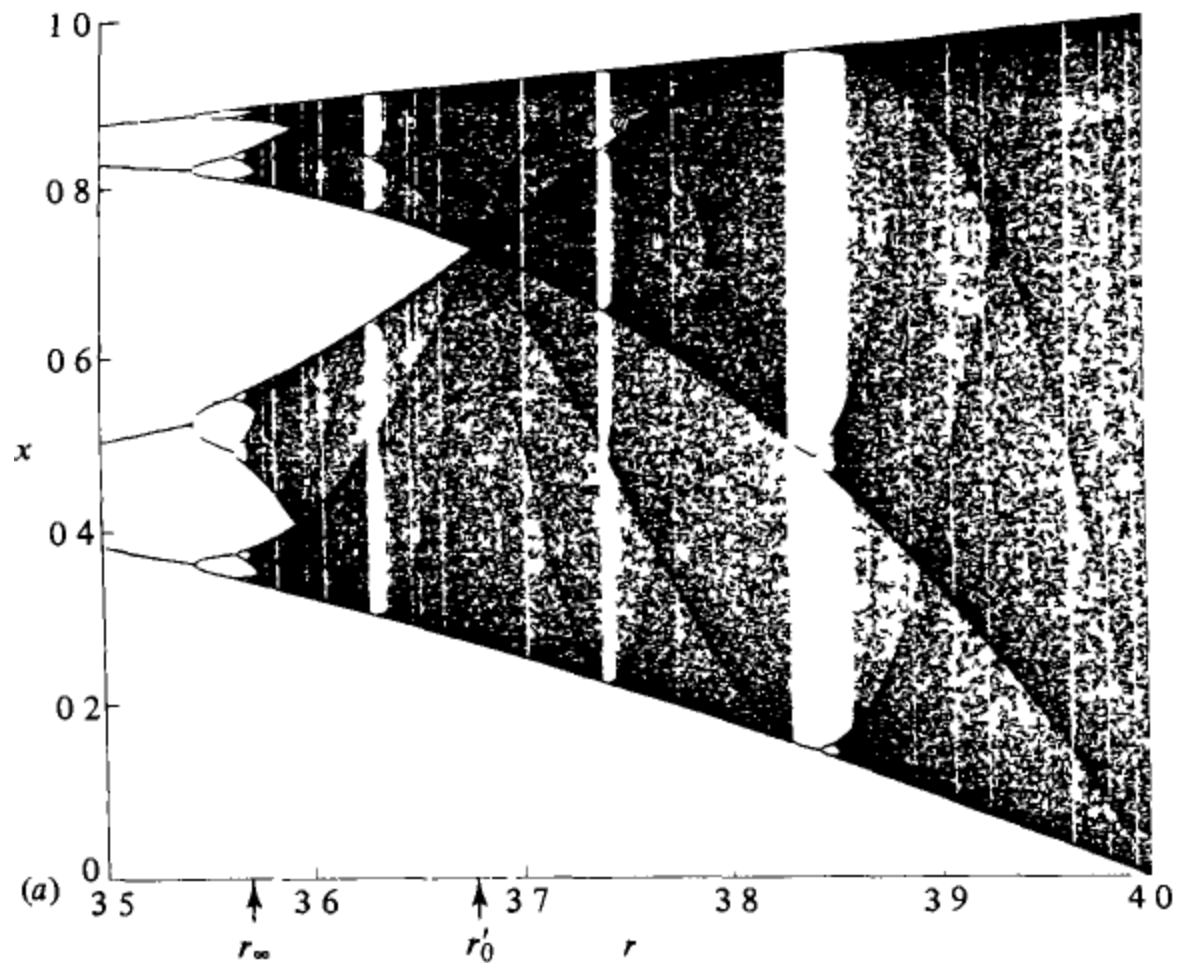
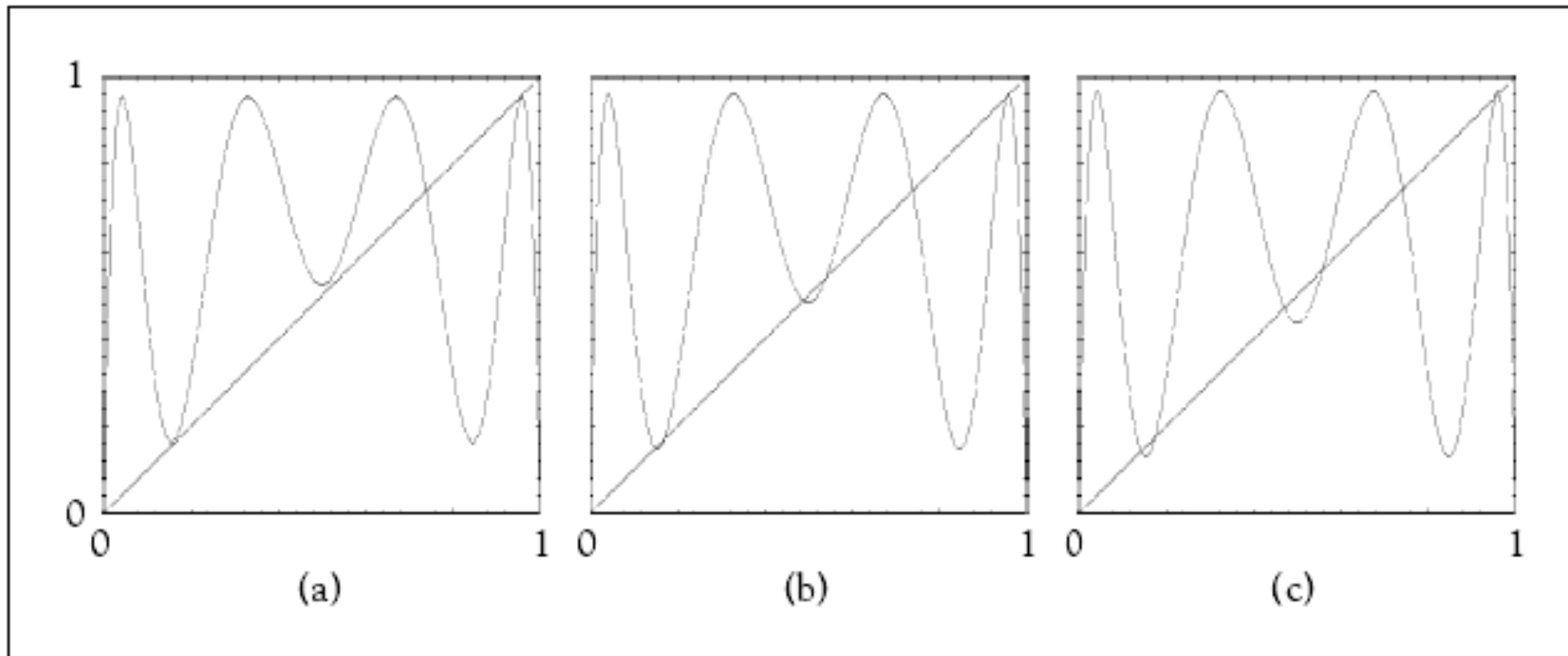


Diagrama de Bifurcação

Ott  
Chaos ...

## Mapeamento de ordem 3

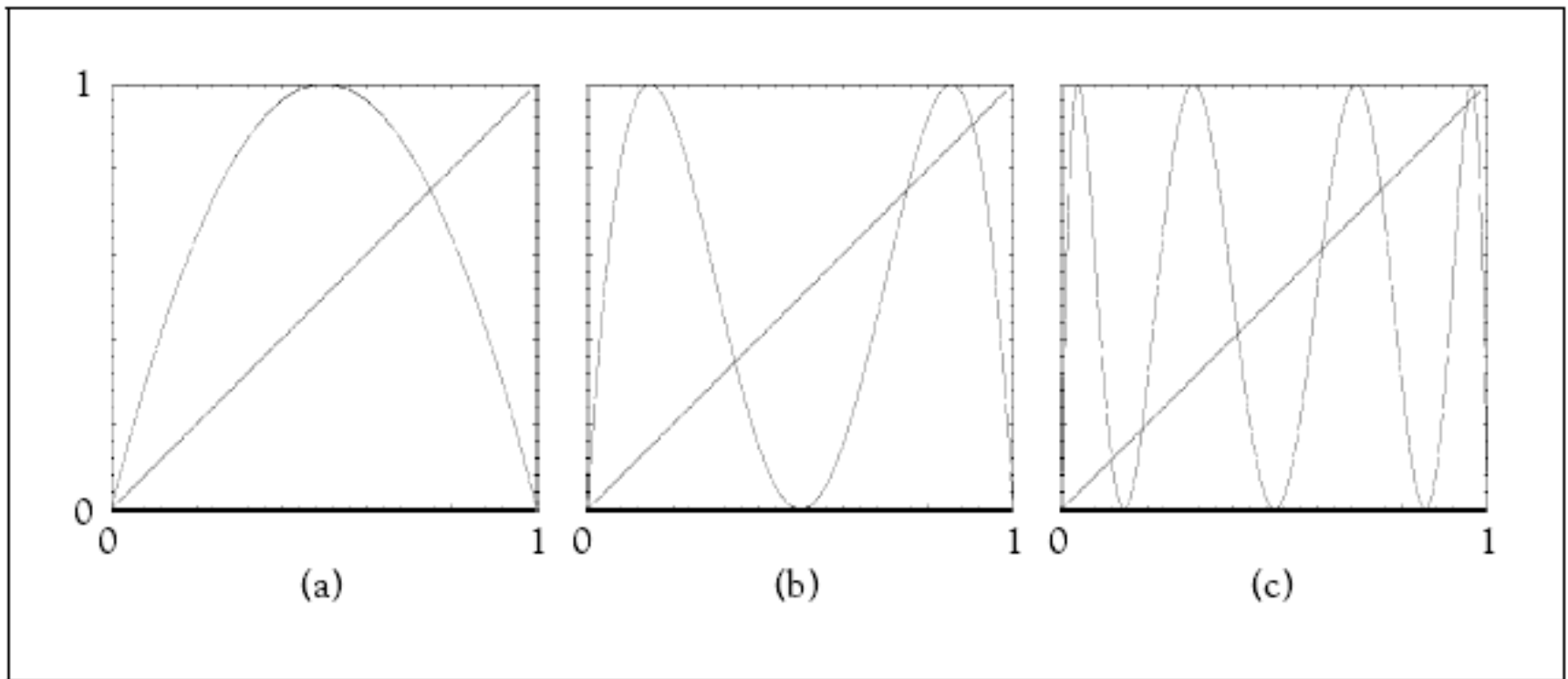


**Figure 1.9** Graphs of the third iteration  $g^3(x)$  of the logistic map  $g_a(x) = ax(1 - x)$ .

Three different parameter values are shown: (a)  $a = 3.82$  (b)  $a = 3.84$  (c)  $a = 3.86$ .

Alligood et al.  
Chaos

# Mapeamentos com Ordens Diferentes



**Figure 1.10** Graphs of compositions of the logistic map.

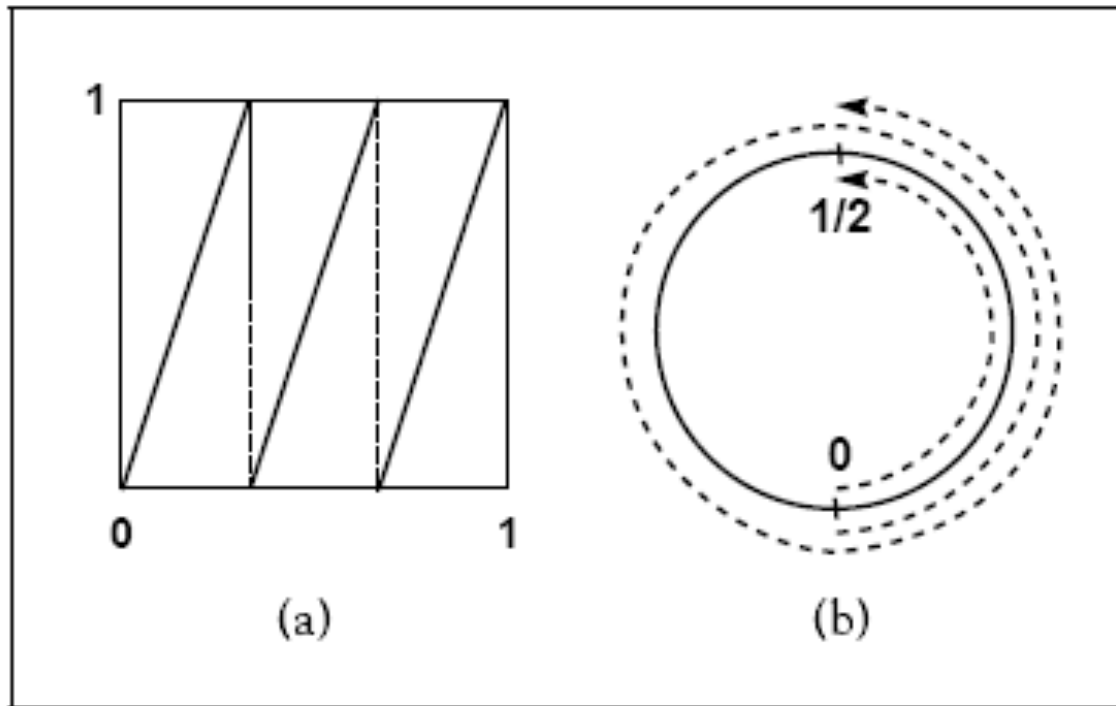
(a) the logistic map  $G(x) = 4x(1-x)$ . (b) The map  $G^2(x)$ . (c) The map  $G^3(x)$ .

## 6- Sensibilidade às Condições Iniciais

*Definição :  $x_0$  é sensível às condições iniciais se existir uma distância  $d$  tal que pontos arbitrariamente próximos de  $x_0$  são mapeados para distâncias maiores que  $d$  :*

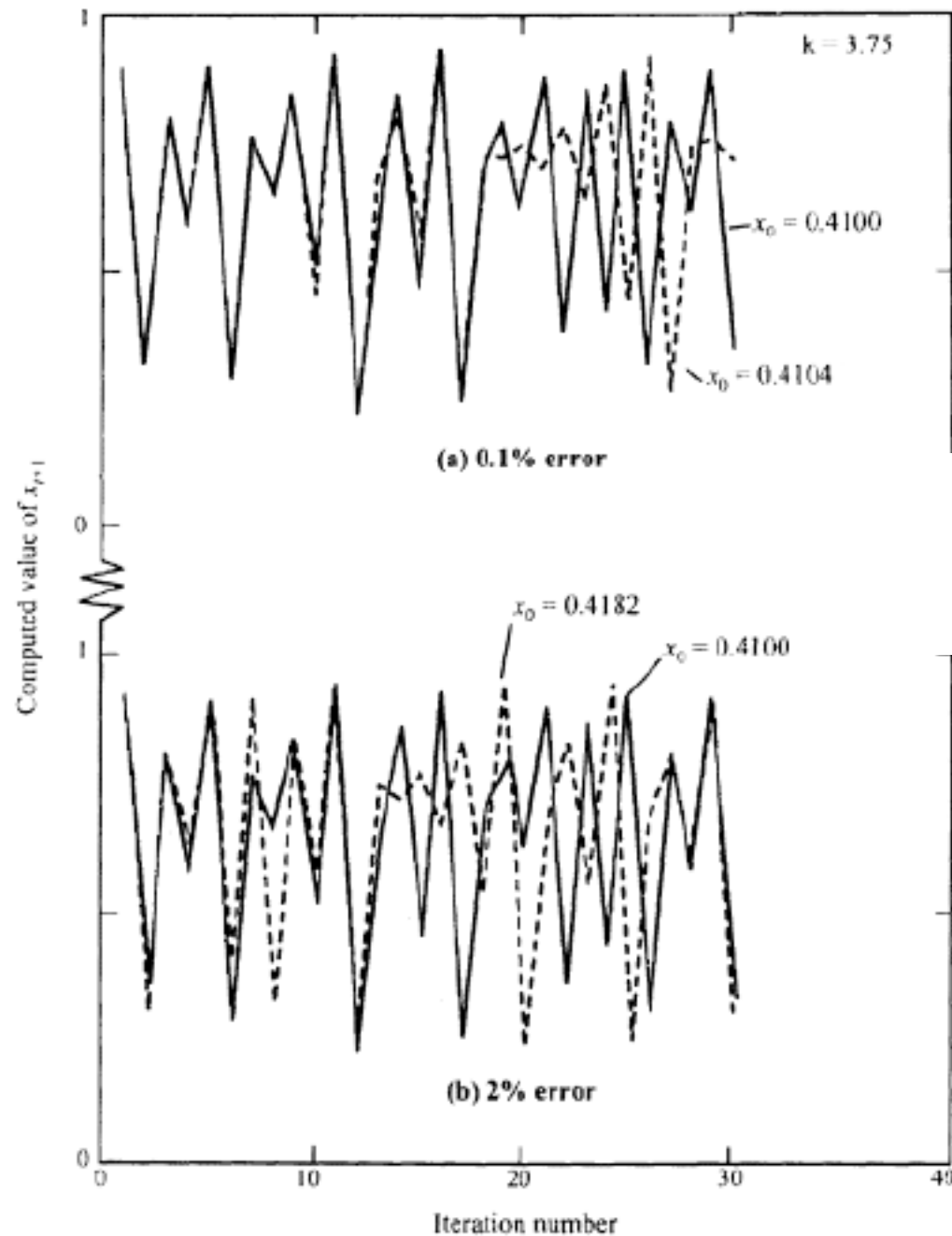
$$\exists d > 0 \mid x \in N_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \left| f^k(x) - f^k(x_0) \right| \geq d$$

# Exemplo de Sistema Sensível às Condições Iniciais



**Figure 1.11 The  $3x \bmod 1$  map.**

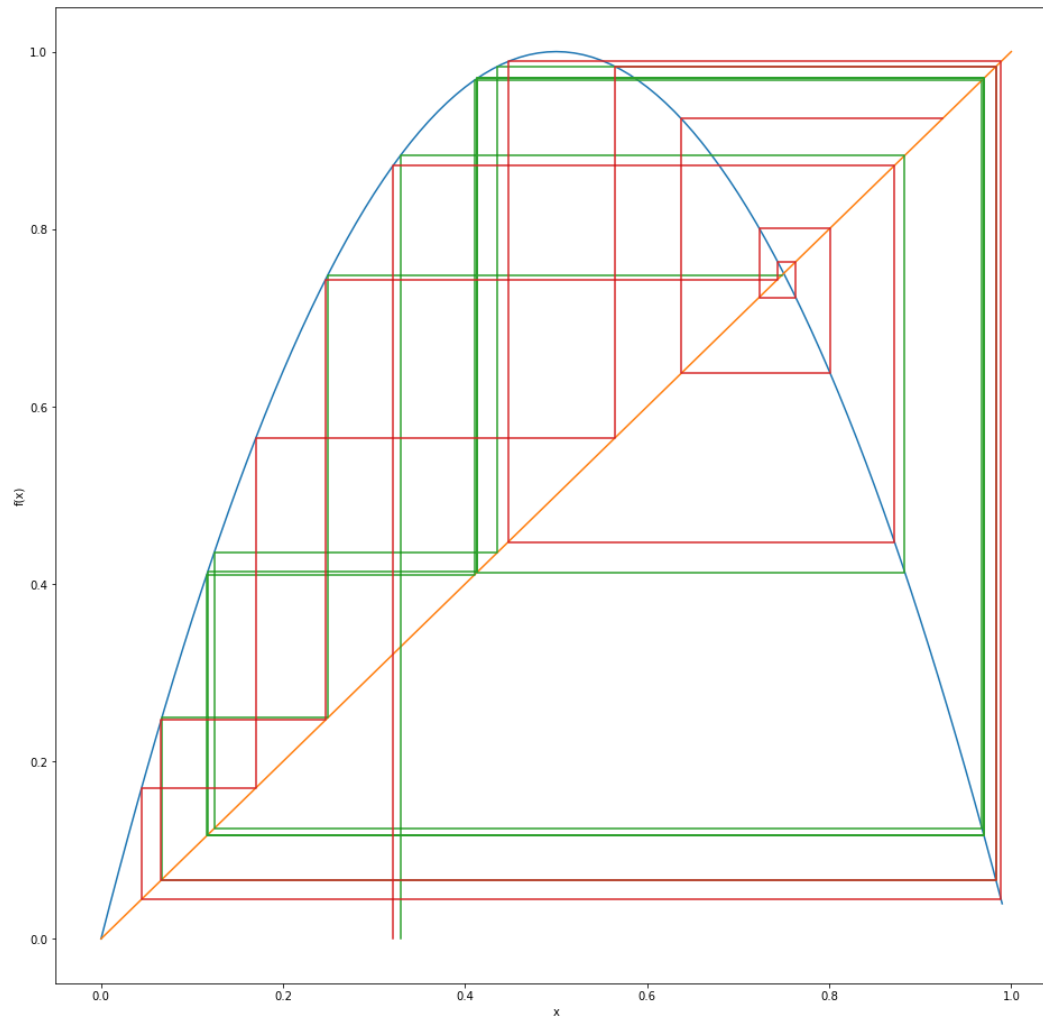
(a) The map  $f(x) = 3x \bmod 1$  is discontinuous on the unit interval. (b) When the points 0 and 1 are identified, turning the unit interval into a circle, the map is continuous. The inner dashed semicircle is the subinterval  $[0, 1/2]$ , and the outer dashed curve is its image under the map. If  $x$  and  $y$  are two points that are close together on the circle, then  $f(x)$  and  $f(y)$  will be 3 times further apart than  $x$  and  $y$ .



May (1976) (the logistic equation):

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t).$$

# Sensibilidade às Condições Iniciais



## 7- Itinerários

Órbitas do Mapa Logístico com  $a = 4$        $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$

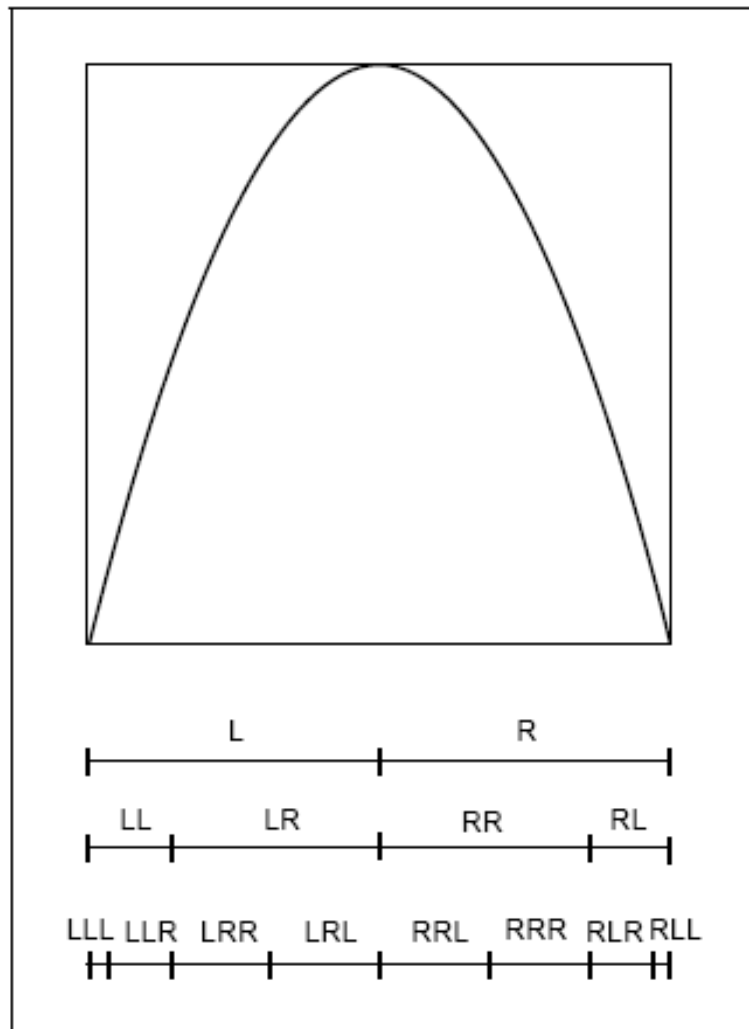
Cada intervalo assinalado contém os pontos cuja órbita passa pela sequência do seu nome.

Regra

$LR \rightarrow LRR, LRL$     (*número ímpar de R*)



# Itinerários

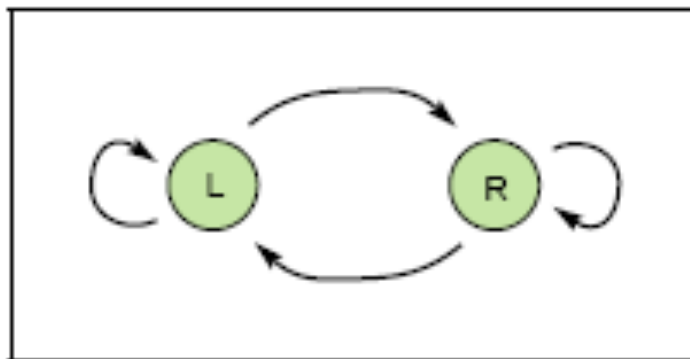


**Figure 1.12 Schematic itineraries for  $G(x) = 4x(1 - x)$ .**

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

Alligood et al.  
Chaos

# Transições



Alligood et al.  
Chaos

**Figure 1.13** Transition graph for the logistic map  $G(x) = 4x(1 - x)$ .

The leftmost arrow tells us that  $f$  maps the interval  $L$  over itself, i.e., that  $f(L)$  contains  $L$ . The top arrow says that  $f(L)$  contains  $R$ , and so forth.