

## III- Caos

Referência Principal: *Chaos*

K. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke

Springer (1997)

# 1-Expoentes de Lyapunov

# Expoente de Lyapunov para Órbitas Periódicas

Mapa unidimensional  $x_{n+1} = f(x_n)$  Órbita de período  $k$

$(f^k(x_1))' = f'(x_k)f'(x_{k-1})\dots f'(x_1)$  Note que  $(f^k(x_i))' = (f^k(x_j))'$

Em média, para cada iteração  $\left\langle |(f^k(x_j))'| \right\rangle = A^{1/k}$

Distância entre dois pontos iniciais  $x_1$  e  $x'_1$

Após uma iteração  $|x_2 - x'_2| = A^{1/k} |x_1 - x'_1|$

Após  $k$  iterações  $|x_{k+1} - x'_{k+1}| = A |x_1 - x'_1|$

Se  $A = a^k$ ,  $a$  seria o número de Lyapunov

$A < 1 \rightarrow$  aproximação entre as órbitas

$A > 1 \rightarrow$  afastamento entre as órbitas

# Expoente de Lyapunov para Órbitas Caóticas

Definição: Seja  $f$  um mapa unidimensional suave em  $\mathbb{R}$   
Órbita  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Número de Lyapunov  $L(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ |f'(x_1)| |f'(x_2)| \dots |f'(x_n)| \right]^{1/n}$

Expoente de Lyapunov  $h \equiv \ln L$

$$h(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(x_1)| + \ln |f'(x_2)| + \dots + \ln |f'(x_n)|}{n}$$

Se o mapa  $x_{n+1} = f(x_n)$  tiver número de Lyapunov  $L$ ,  
o mapa  $x_{n+1} = f^k(x_n)$  terá número  $L^k$

Para ponto fixo  $x_1$ ,  $h = \ln|f'(x_1)|$

Para órbita de período  $k$ ,  $h(x_1) = \frac{\ln|f'(x_1)| + \dots + \ln|f'(x_k)|}{k}$

## 2- Órbitas Caóticas

## Definições

Órbita  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  é assintoticamente periódica se ela converge para uma órbita periódica para  $n \rightarrow \infty$

Para uma órbita exatamente periódica, usa-se o termo periódica eventualmente.

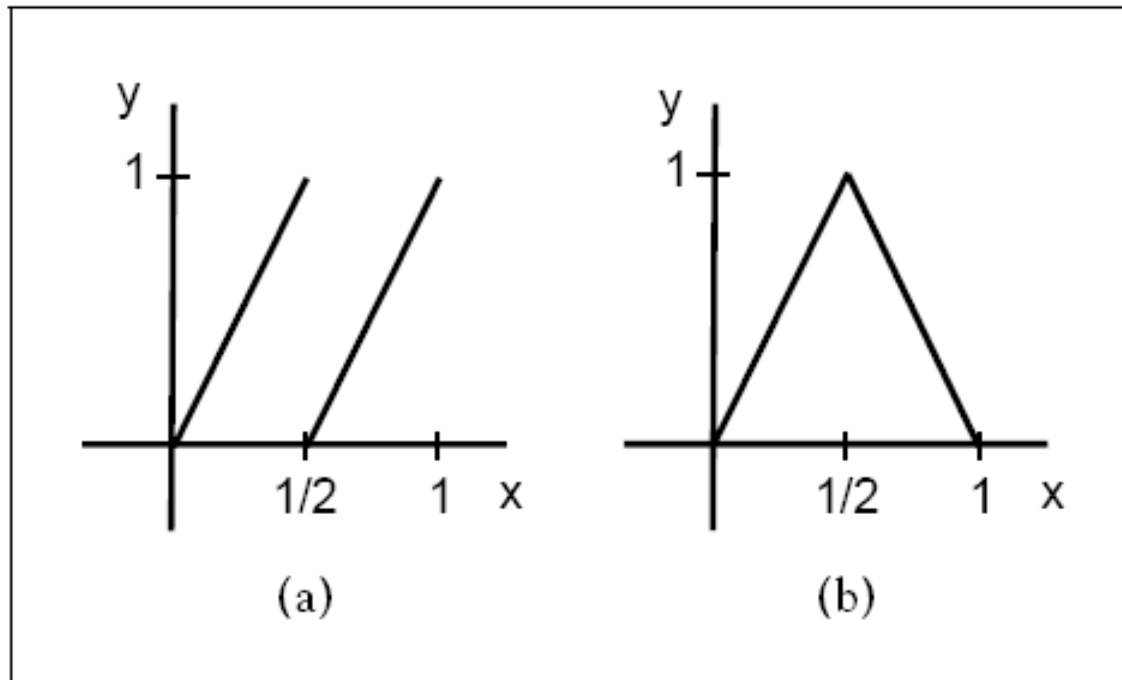
# Órbitas Caóticas

Definição: Para mapa  $f$  suave em  $\mathbb{R}$   
órbita não limitada  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  é caótica se

- 1 - não for periódica assintoticamente
- 2 - o expoente de Lyapunov for positivo,  $h > 0$



# Exemplos de Mapas com Órbitas Caóticas



**Figure 3.1 Two simple maps with chaotic orbits.**

(a)  $2x \pmod{1}$  map. (b) The tent map.

Alligood  
Chaos

## Exemplo do Cálculo de $h$

$$x_{i+1} = 2x_i \pmod{1}$$

Mapa descontínuo em  $x = 1/2$

Para órbitas com  $x_j \neq 1/2$ ,

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \ln 2}{n} = \ln 2$$

Esse resultado vale para qualquer órbita não periódica que não passe por  $x = 1/2$

# Mapa da Tenda

$$\text{Mapa } T(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{para } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } x_0 = 1/4 \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \rightarrow x_0 \subset S(0) \text{ (variedade estável)} \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = 0 \rightarrow x_0 \subset U(0) \text{ (variedade instável)} \end{cases}$$

$$x_0 = 3/16 \rightarrow 3/8 \rightarrow 3/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \quad \text{ponto fixo}$$

$$x_0 = 6/13 \rightarrow 12/13 \rightarrow 2/13 \rightarrow 4/13 \rightarrow 8/13 \rightarrow 10/13 \rightarrow 6/13 \quad \text{órbita periódica}$$

$$x_0 = 7/10 \rightarrow 3/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \quad \text{órbita periódica}$$

### 3- Conjugação de Mapas

# Itinerários do Mapa Logístico

Órbitas do mapa logístico  $G$ , com  $a=4$   $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$

Cada intervalo assinalado contém os pontos cuja órbita passa pela sequência do seu nome.

Regras

(intervalo com final L )

LL  $\rightarrow$  LLL, LLR (número par de R )

RL  $\rightarrow$  RLR, RLL (número ímpar de R )

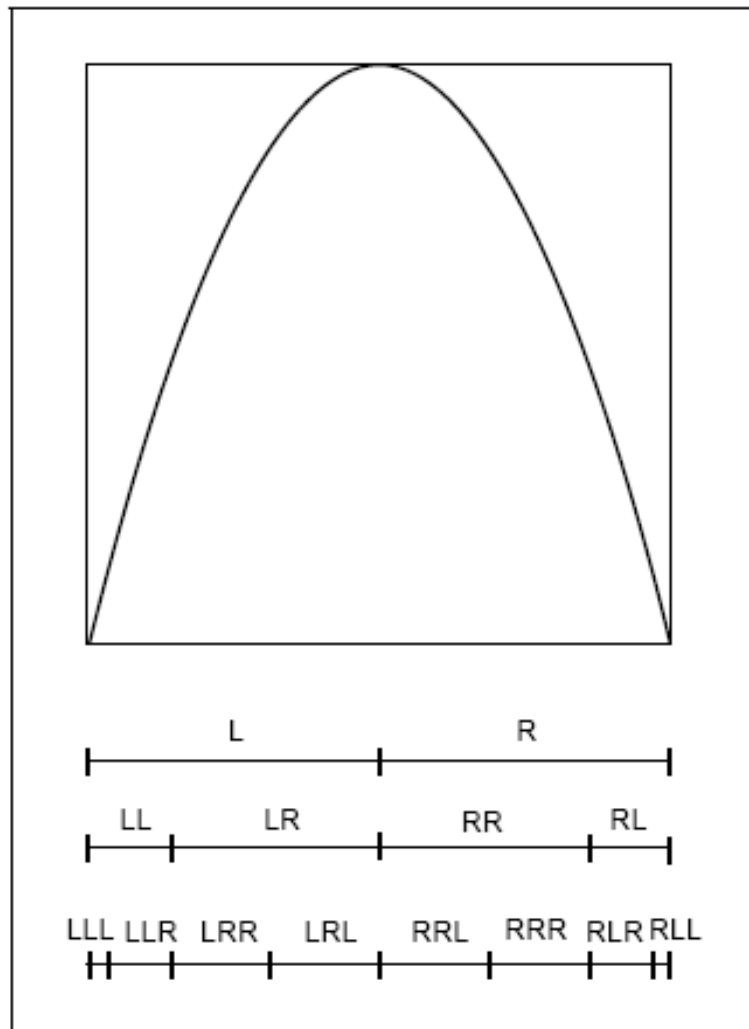
(intervalo com final R )

RR  $\rightarrow$  RRL, RRR (número par de R)

LR  $\rightarrow$  LRR, LRL (número ímpar de R)

Intervalo  $S_1 S_2 \dots S_k$  ;  $S_1 = L$  ou  $R$

# Itinerários do Mapa Logístico

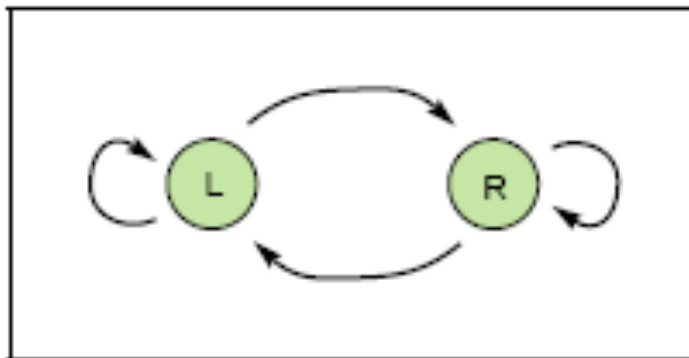


**Figure 1.12** Schematic itineraries for  $G(x) = 4x(1 - x)$ .

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

Alligood et al.  
Chaos

# Transições do Mapa Logístico



Alligood et al.  
Chaos

**Figure 1.13** Transition graph for the logistic map  $G(x) = 4x(1-x)$ .

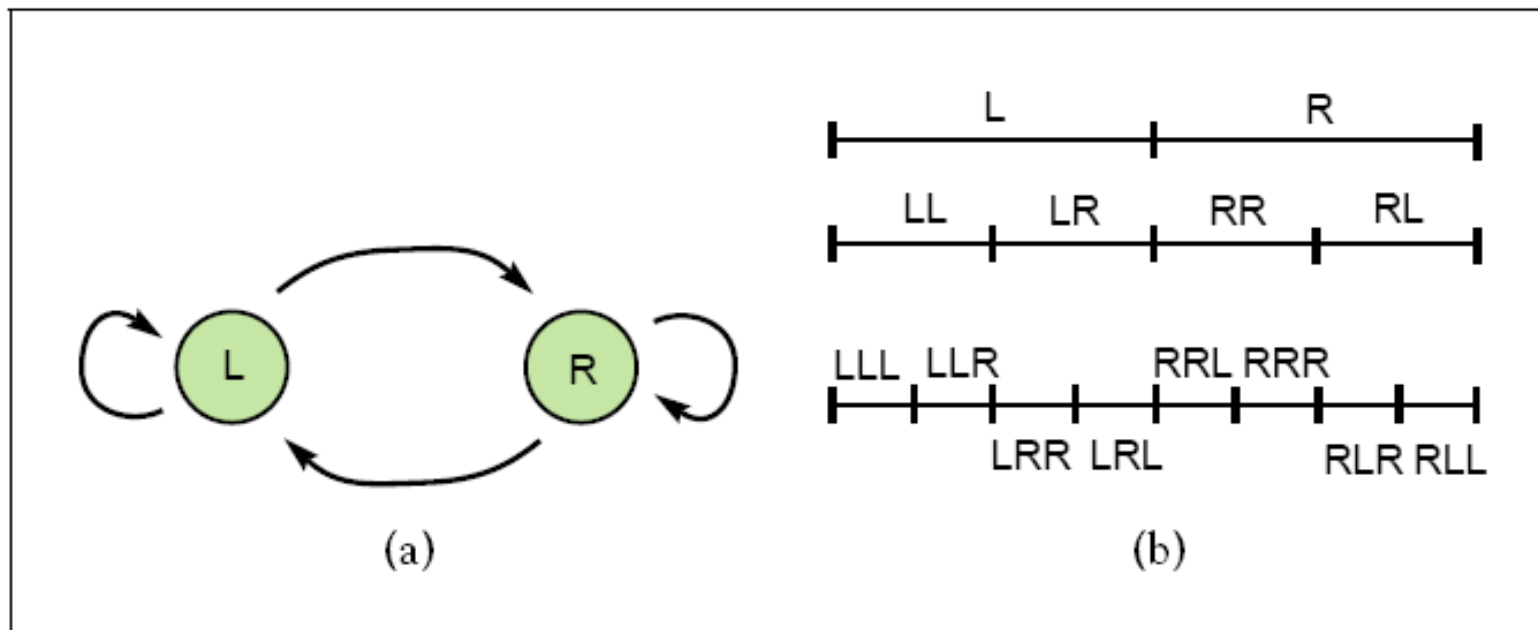
The leftmost arrow tells us that  $f$  maps the interval  $L$  over itself, i.e., that  $f(L)$  contains  $L$ . The top arrow says that  $f(L)$  contains  $R$ , and so forth.

# Itinerários do Mapa da Tenda

Simetria  $\rightarrow$  todos intervalos iguais.

A largura do intervalo

$S_1 \dots S_k$  é  $2^{-k}$



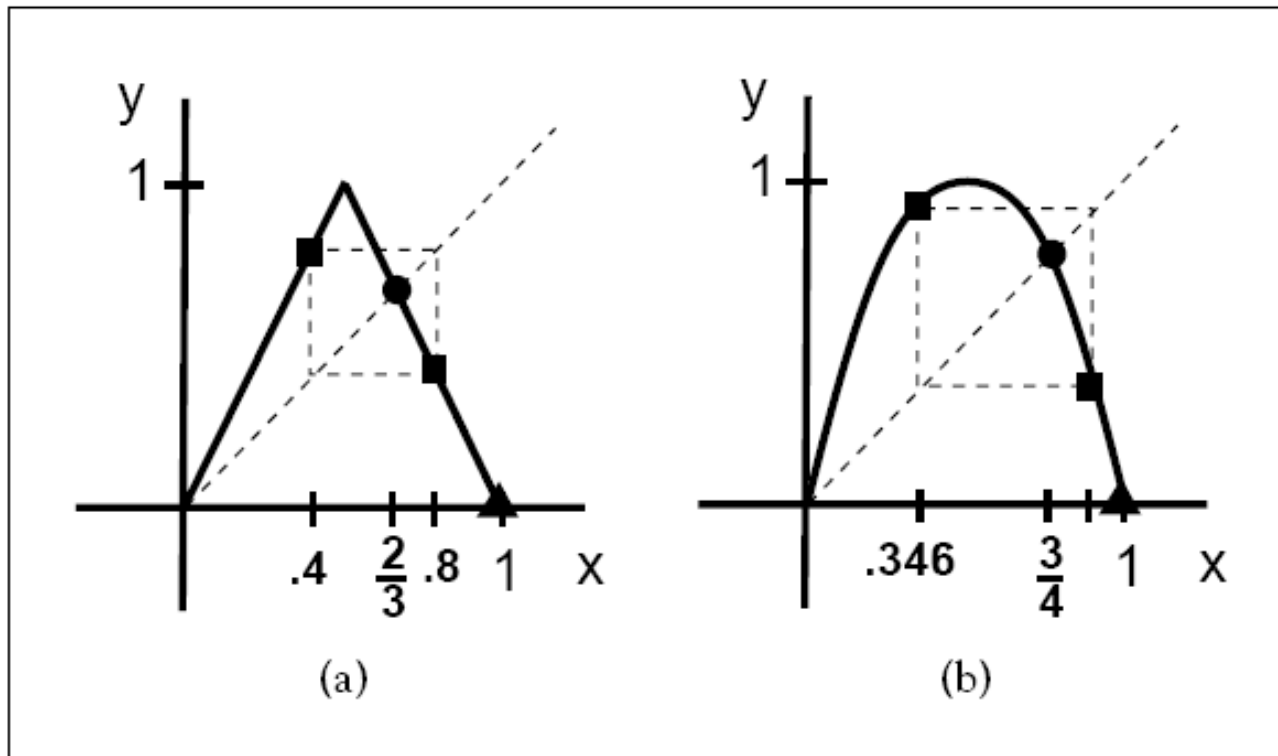
**Figure 3.2 Tent map symbolic dynamics.**

(a) Transition graph and (b) schematic itineraries for the tent map  $T$ .

Alligood  
Chaos



# Conjugação dos Mapas da Tenda e Logístico



**Figure 3.3 Similarities in tent map and logistic map.**

Both (a) the tent map and (b) the logistic map have a fixed point (small circle) to the right of the critical point  $x = 0.5$ . For each, the midpoint maps to 1 and then to 0. Each has a single period-two orbit (small squares).

# Pontos Fixos Conjugados

## Mapa da Tenda

Ponto fixo instável

$$x = 2/3$$

$$|f'(2/3)| = |-2| > 1$$

## Mapa Logístico

Ponto fixo instável

$$x = 3/4$$

$$|f'(3/4)| = |-2| > 1$$

# Órbitas Periódicas Conjugadas

## Mapa da Tenda

Órbita instável com período 2

$$\{0.4, 0.8\}$$

$$|f'(0.4)| \cdot |f'(0.8)| = |2| \cdot |-2| = 4 > 1$$

## Mapa Logístico

Órbita instável com período 2

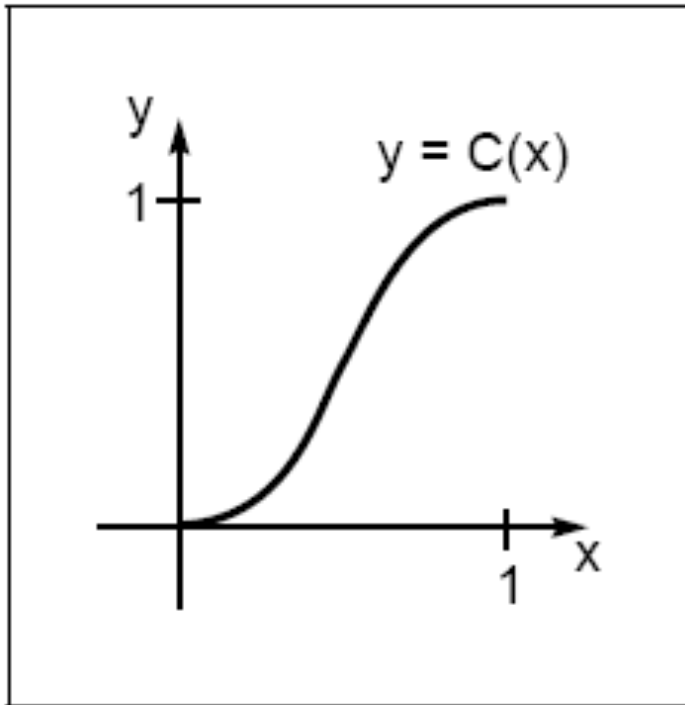
$$\{0.346, 0.905\}$$

$$|f'(0.346)| \cdot |f'(0.905)| = |-1 - \sqrt{5}| \cdot |-1 + \sqrt{5}| = 4 > 1$$

Para cada órbita  $\{x\}$  no mapa da tenda há uma órbita correspondente  $\{C(x)\}$  no mapa logístico com a mesma estabilidade.

Definição: Os mapas  $T$  e  $G$  são conjugados se eles são relacionados por uma transformação de coordenadas biunívocas, isto é,  
 $C \circ T = G \circ C$  para o mapa contínuo  $C$ .

## Conjugação entre os Mapas da Tenda e Logístico



Alligood  
Chaos

**Figure 3.4 The conjugacy map.**

The graph of  $C(x) = (1 - \cos \pi x)/2$  is continuous and one-to-one. Since  $CT(x) = GC(x)$  for all  $0 \leq x \leq 1$ , it is a conjugacy between the tent map and logistic map.

Mapa logístico  $x_{n+1} = G(x_n) = 4x_n(1-x_n)$

Mapa da tenda  $x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2(1-x_n) & 1/2 < x_n \leq 1 \end{cases}$

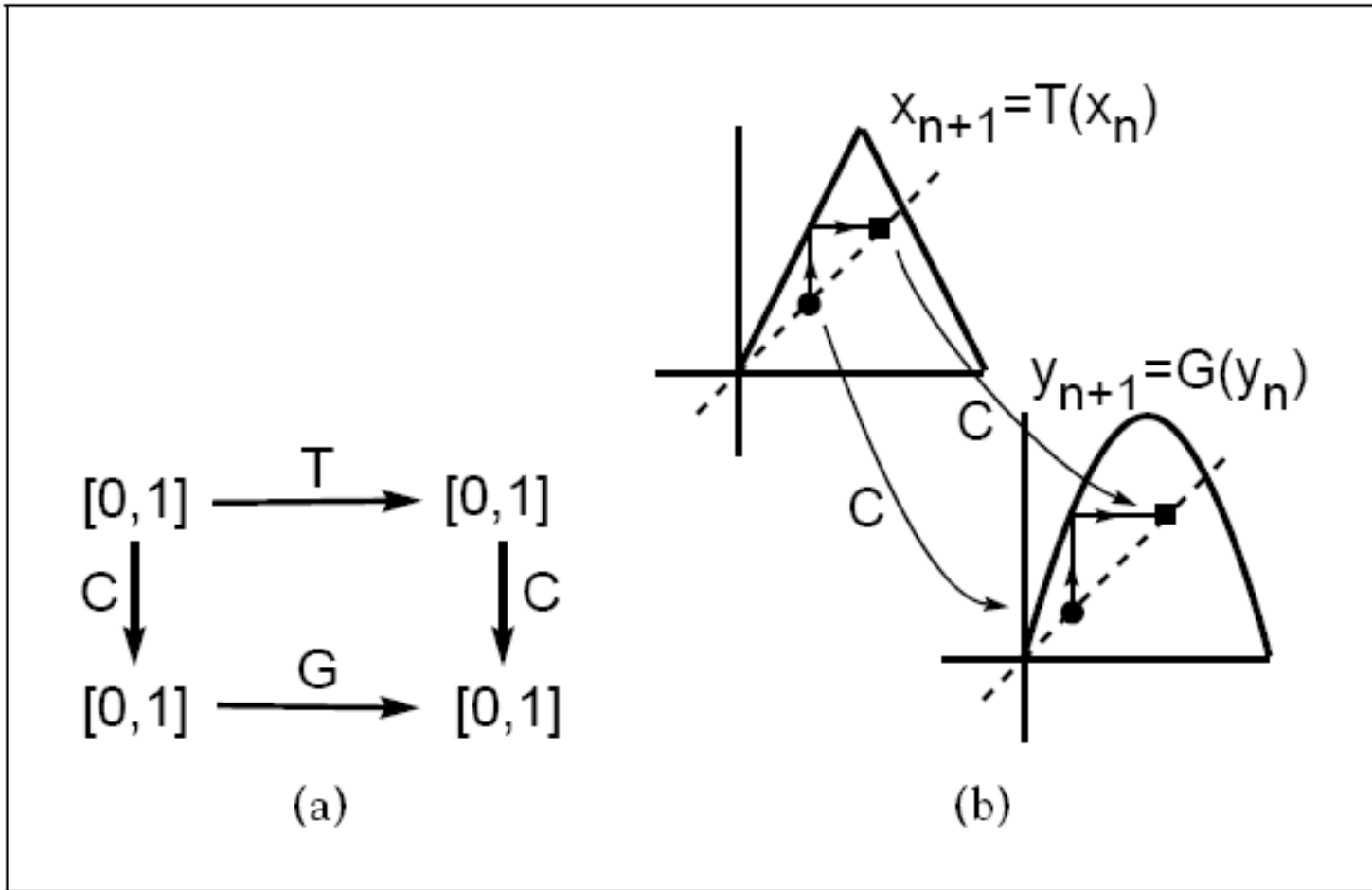
No intervalo  $0 \leq x \leq 1/2$  (o mesmo pode ser feito no outro intervalo)

$$\begin{aligned} G(C(x)) &= 4C(x)(1-C(x)) = 4 \frac{1-\cos \pi x}{2} \frac{1+\cos \pi x}{2} = \\ &= 1 - \cos^2 \pi x = \sin^2 \pi x \end{aligned}$$

$$C(T(x)) = \frac{1-\cos \pi T(x)}{2} = \frac{1-\cos \pi 2x}{2} = \sin^2 \pi x$$

Portanto  $GC(x) = CT(x)$

# Trajetórias Conjugadas



**Figure 3.5** Two illustrations of the fact that the maps  $T$  and  $G$  are conjugate. (a) Both ways of composing maps from upper left to lower right are equal. (b) If  $y_n = C(x_n)$  implies  $y_{n+1} = C(x_{n+1})$ , then  $C$  is a conjugacy between the  $x$ -map and the  $y$ -map.

Note que  $G C(x) = C T(x) \rightarrow G(x) = C T(x) C^{-1}$

Assim,  $G^n = CTC^{-1} CTC^{-1} \dots CTC^{-1} = CT^n C^{-1}$

$x$  ponto fixo de  $T$ ,  $T(x) = x \rightarrow$

$C(x)$  ponto fixo de  $G$ ,  $G C(x) = C(x)$

pois  $G C(x) = C T(x) = C(x)$

$x$  ponto fixo de  $T^k$ ,  $T^k(x) = x \rightarrow$

$C(x)$  ponto fixo de  $G^k$ ,  $G^k C(x) = C(x)$

pois  $G^k C(x) = C T^k C^{-1} C(x) = C T^k(x) = C(x)$



## Estabilidade dos Pontos Fixos e Órbitas Periódicas

De  $C(T(x)) = G(C(x))$  obtemos

$$C'(T(x))T'(x) = G'(C(x))C'(x)$$

Para  $T(x) = x$ , obtemos

$$C'(x)T'(x) = G'(C(x))C'(x) \rightarrow T'(x) = G'(C(x))$$

Portanto, há uma correspondência na estabilidade dos pontos fixos de  $T$  e  $G$

Para  $T^k(x) = x$ , obtemos  $(T^k)'(x) = (G^k)'(C(x))$

Portanto, essa correspondência ocorre para órbitas periódicas

Todos os pontos fixos e órbitas periódicas do mapa logístico  $G$  ( $b = 4$ ) são instáveis

Para  $T^k(x) = x$ ,  $(T^k)'(x) = 2^k > 1 \rightarrow$

$(G^k)'(x) = 2^k > 1$  para  $G^k(x) = x$

# Cálculo do Expoente de Lyapunov do Mapa Logístico (b=4)

$\{x_i\}$  órbita caótica conjugada do mapa T

$\{C(x_i)\}$  órbita caótica conjugada do mapa G

Como  $T(x_i) = x_{i+1}$  e  $C'(T(x_i)) T'(x_i) = G'(C(x_i)) C'(x_i)$

obtemos  $T'(x_k) \dots T'(x_2) T'(x_1) =$

$$= \frac{G'(C(x_k)) C'(x_k)}{C'(x_{k+1})} \dots \frac{G'(C(x_2)) C'(x_2)}{C'(x_3)} \frac{G'(C(x_1)) C'(x_1)}{C'(x_2)} =$$

$$= \frac{G'(C(x_k)) \dots G'(C(x_1)) C'(x_1)}{C'(x_{k+1})}$$

$$\begin{aligned}
\ln \left| T'(x_k) \dots T'(x_1) \right| &= \sum_{i=1}^k \ln \left| T'(x_i) \right| \\
&= \ln \left| C'(x_1) \right| - \ln \left| C'(x_{k+1}) \right| + \sum_{i=1}^k \ln \left| G'(x_i) \right| \rightarrow \\
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \ln \left| T'(x_i) \right|}{k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \ln \left| G'(x_i) \right|}{k} \Rightarrow h(\text{mapa } T) = h(\text{mapa } G)
\end{aligned}$$

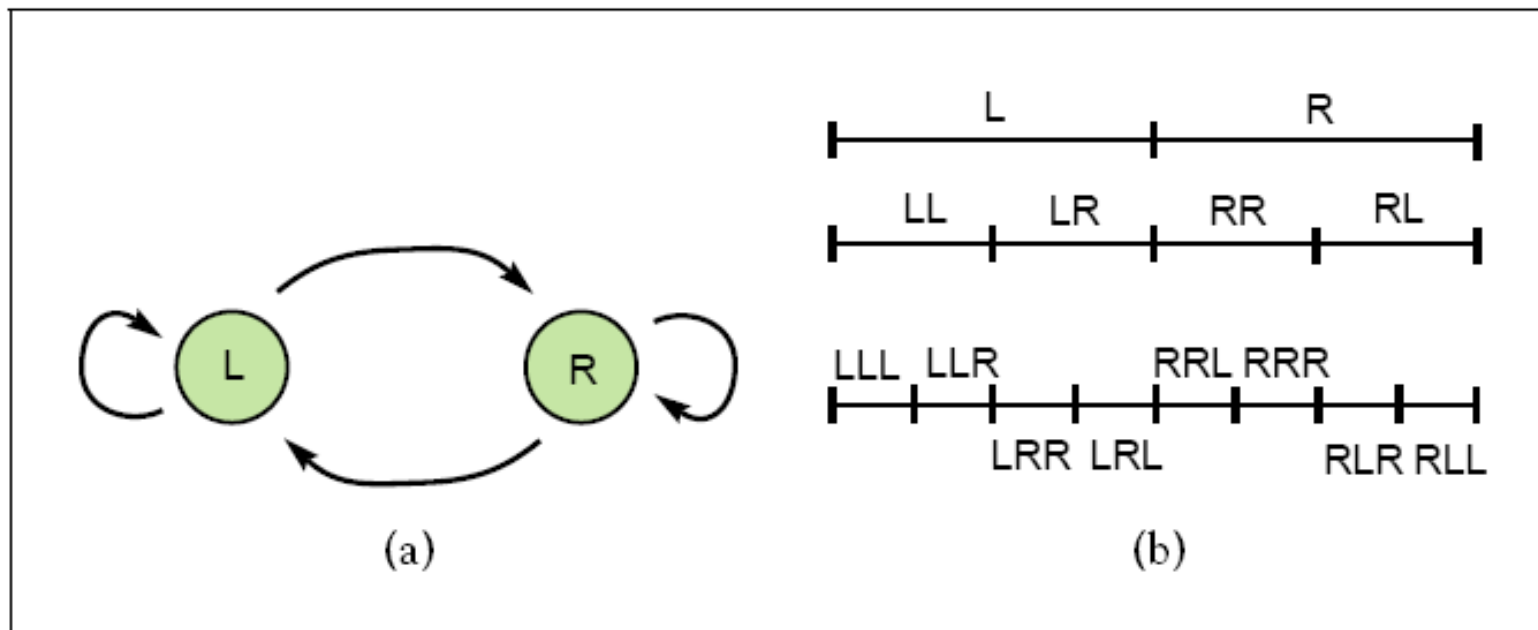
Portanto, o mapa logístico  $G$  ( $b = 4$ ) tem órbitas caóticas

# Itinerários do Mapa da Tenda

Simetria  $\rightarrow$  todos intervalos iguais.

A largura do intervalo

$S_1 \dots S_k$  é  $2^{-k}$

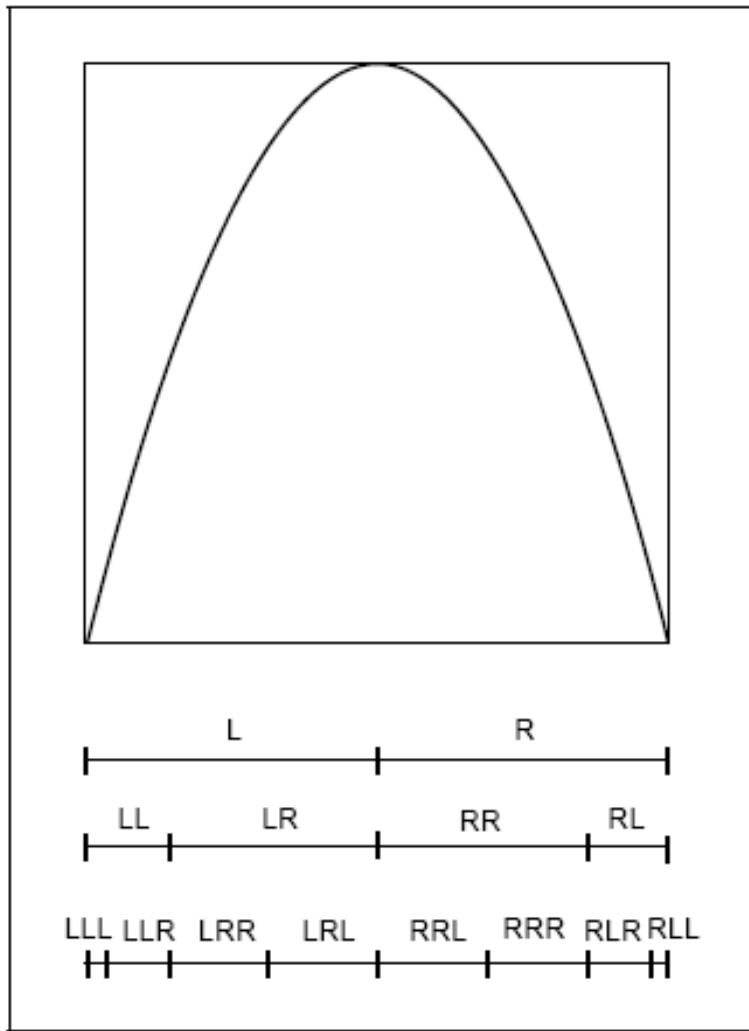


**Figure 3.2 Tent map symbolic dynamics.**

(a) Transition graph and (b) schematic itineraries for the tent map  $T$ .

Alligood  
Chaos

# Itinerários do Mapa Logístico



Larguras dos intervalos são desiguais

**Figure 1.12 Schematic itineraries for  $G(x) = 4x(1-x)$ .**

The rules: (1) an interval ending in L splits into two subintervals ending in LL and LR if there is an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's, (2) an interval ending in R splits into two subintervals ending in RL and RR if there are an even number of R's; the order is switched if there are an odd number of R's

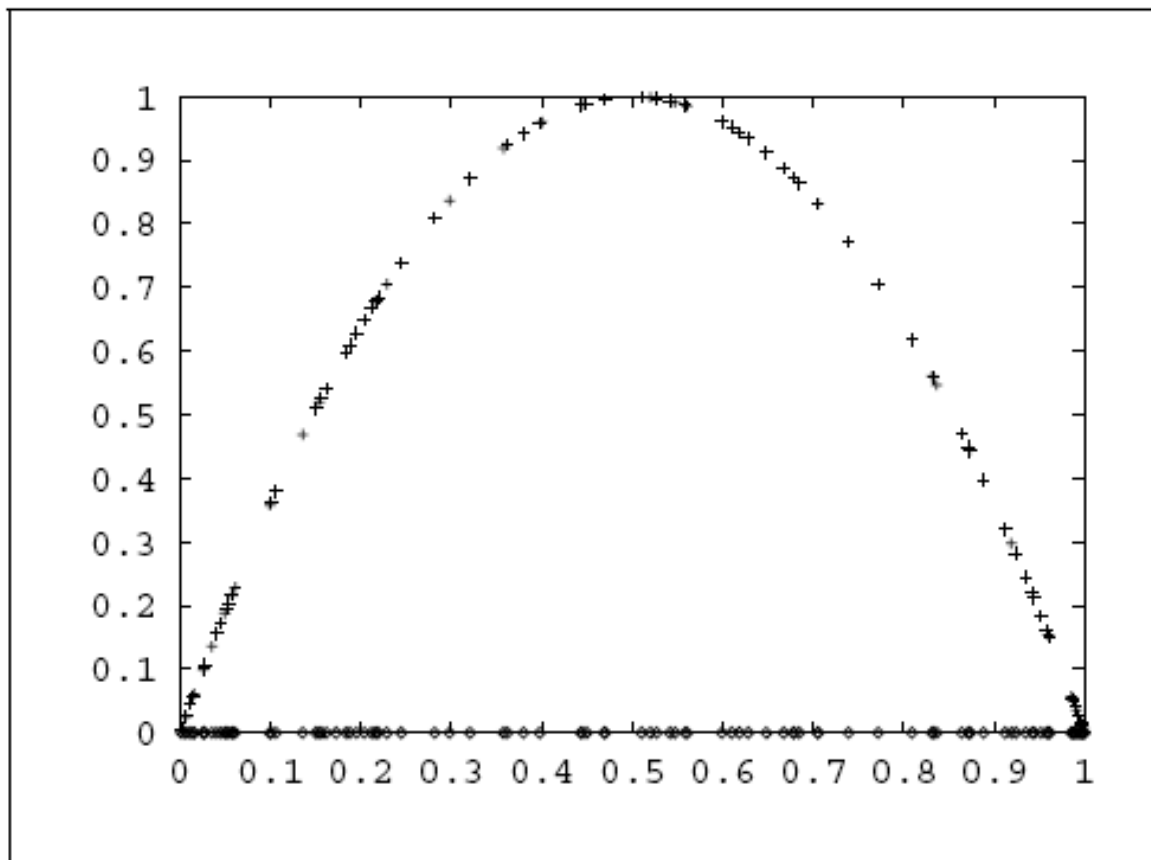
Alligood et al.  
Chaos

Mapa T, largura de um intervalo  $[x_1, x_2] = 2^{-k}$

Mapa G, largura de um intervalo conjugado

$$[C(x_1), C(x_2)] = \int_{x_1}^{x_2} C'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dC}{dx} dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) dx = \leq \frac{\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\pi(x_2 - x_1)}{2} = \frac{\pi}{2^{k+1}}$$



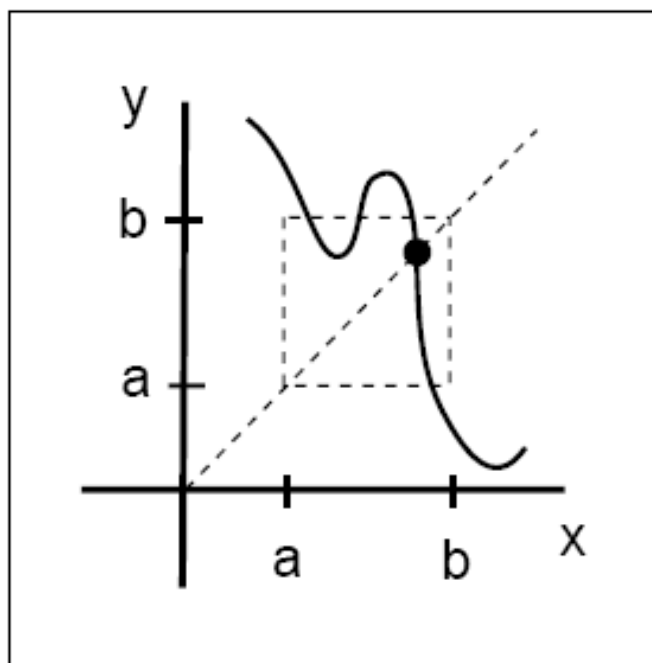
**Figure 3.6 The logistic map.**

One hundred iterates are plotted on the  $x$ -axis; their images are plotted on the vertical axis.



## 4- Bacias de Atração

## Existência de Órbitas Periódicas



Teorema do ponto fixo:

$f$  mapa contínuo na linha dos reais

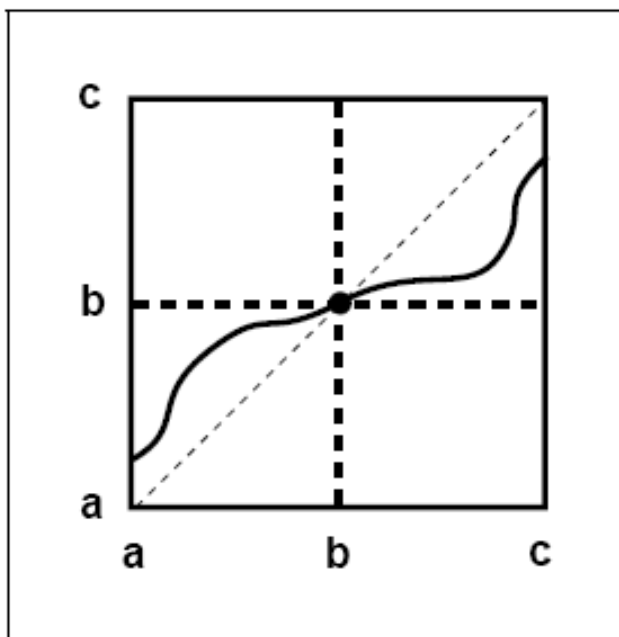
intervalo  $I = [a, b]$  tal que  $f(I) \supseteq I$

$\Rightarrow f$  possui um ponto fixo em  $I$

**Figure 3.8 The content of Theorem 3.17:**

If a function  $f$  maps the interval  $[a, b]$  across itself, as in the picture, then  $f$  must have a fixed point in that interval.

## Existência de Bacia de Atração de Pontos Fixos Atratores



**Figure 3.11 Illustration of Theorem 3.23.**

The sink shown at  $x = b$  attracts all initial values in the interval  $[a, c]$ .

Teorema :

$f$  mapa contínuo em  $\mathbb{R}^1$

1) se  $f(b) = b$  e  $x < f(x) < b$ ,  $\forall x$  em  $[a, b)$   
 $\Rightarrow f^k(a) \rightarrow b$

2) se  $f(b) = b$  e  $b < f(x) < x$ ,  $\forall x$  em  $(b, c]$   
 $\Rightarrow f^k(c) \rightarrow b$

Alligood  
Chaos

## Bacia de Atração

Definição:  $f$  mapa em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{p}$  ponto fixo atrativo.

A bacia de atração de  $\vec{p}$  é o conjunto de pontos

$$\vec{x} \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(\vec{x}) - f^k(\vec{p})| \rightarrow 0$$

Exemplo: Mapa em  $\mathbb{R}$ ,  $f(x_{n+1}) = a x_n$   $|a| < 1$

$x = 0$  ponto fixo

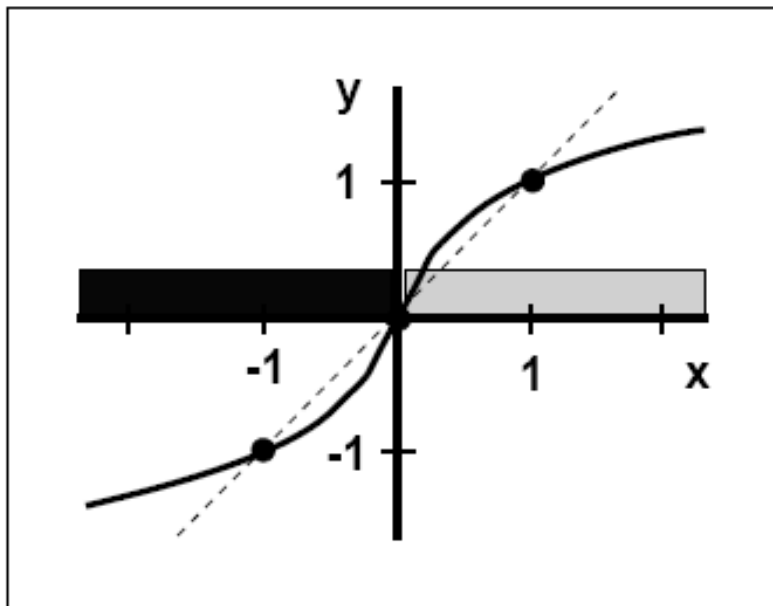
Bacia desse ponto fixo: conjunto dos números reais

# Bacias de Atração

Pontos fixos

$x = 0$  repulsor

$x = 1, x = -1$  atratores



Bacia do ponto fixo  $x = 1, x > 0$   
Bacia do ponto fixo  $x = -1, x < 0$

**Figure 3.12** The map  $y = f(x) = (4/\pi) \arctan x$ .

The basin of the sink  $-1$  is shown in black, and the basin of  $1$  is in gray.

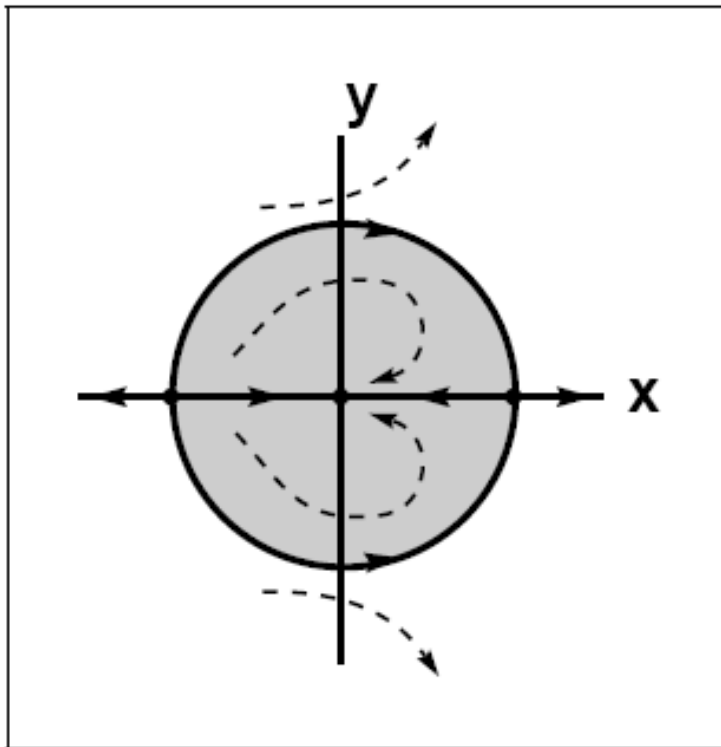
# Bacia de Atração

$$f(r, \theta) = (r^2, \theta - \sin \theta)$$

$$r \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\text{Pontos fixos: } \begin{cases} (0, 0) \text{ atrator} \\ (1, 0) \\ (1, \pi) \end{cases}$$

$$\text{Atrator } r \rightarrow \infty$$



**Figure 3.13** The map of Example 3.26.

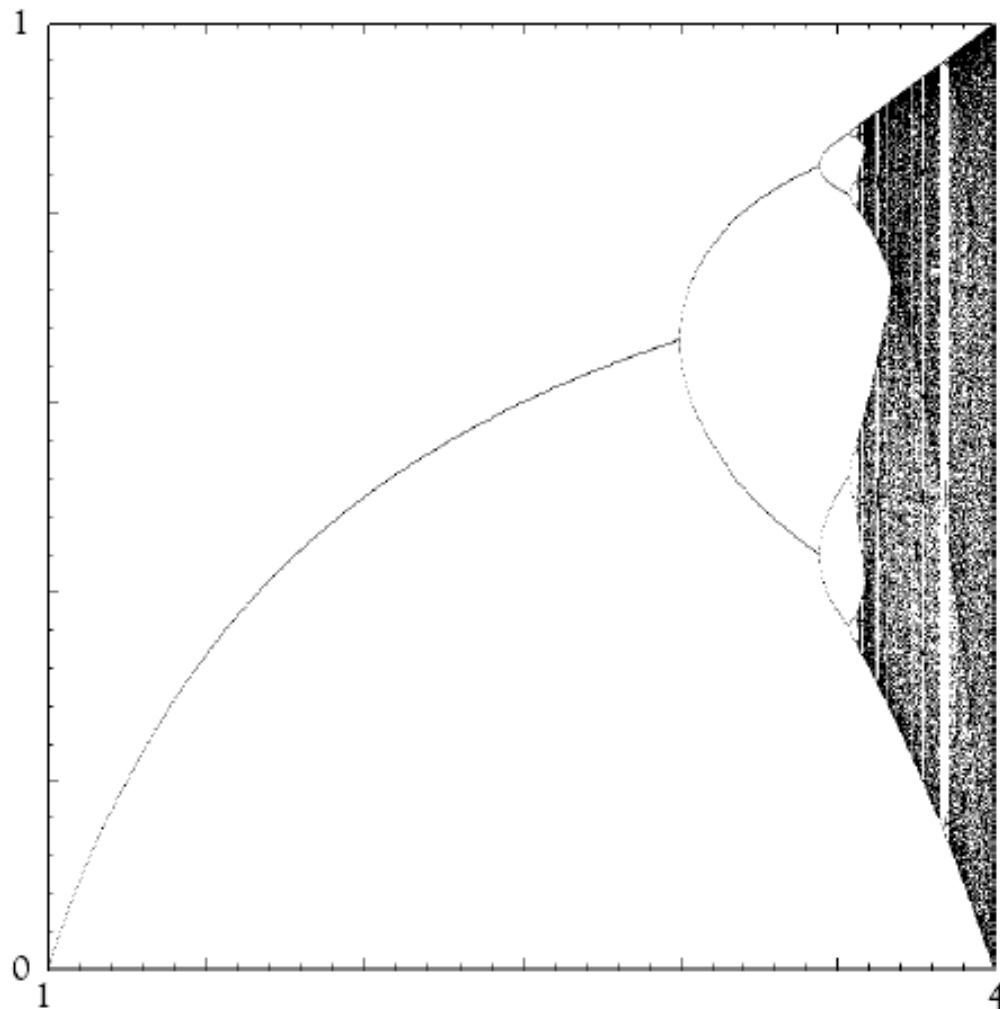
The gray region is the basin of the origin. The white region is the basin of infinity.

## Mapa Logístico

$0 < a < 1 \rightarrow x = 0$  é atrator; bacia:  $[0, 1]$

$$1 < a < 3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ é repulsor} \\ x = \frac{a - 1}{a} \text{ é atrator;} \end{cases} \quad \text{bacia: } [0, 1]$$

$$3 < a \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ repulsor} \\ x = \frac{a - 1}{a} \text{ repulsor} \end{cases}$$



## Diagrama de Bifurcação

**Figure 1.6** Bifurcation diagram of  $g_a(x) = ax(1 - x)$ .

The fixed point that exists for small values of  $a$  gives way to a period-two orbit at the “bifurcation point”  $a = 3$ , which in turn leads to more and more complicated orbits for larger values of  $a$ . Notice that the fixed point is only plotted while it is a sink. When the period-two orbit appears, the fixed point is no longer plotted because it does not attract orbits. See Lab Visit 12 for laboratory versions.

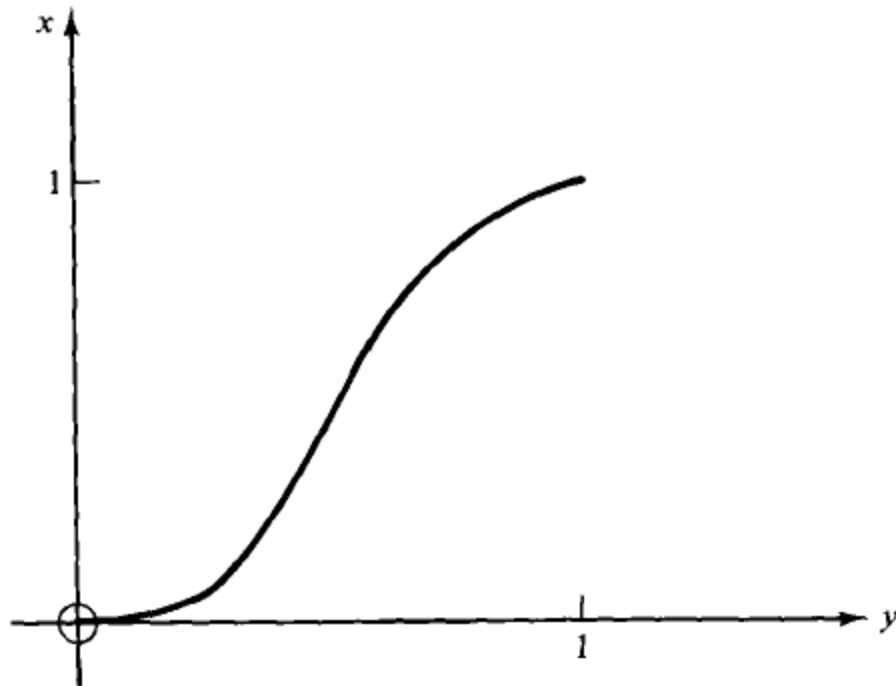
Alligood et al.  
Chaos



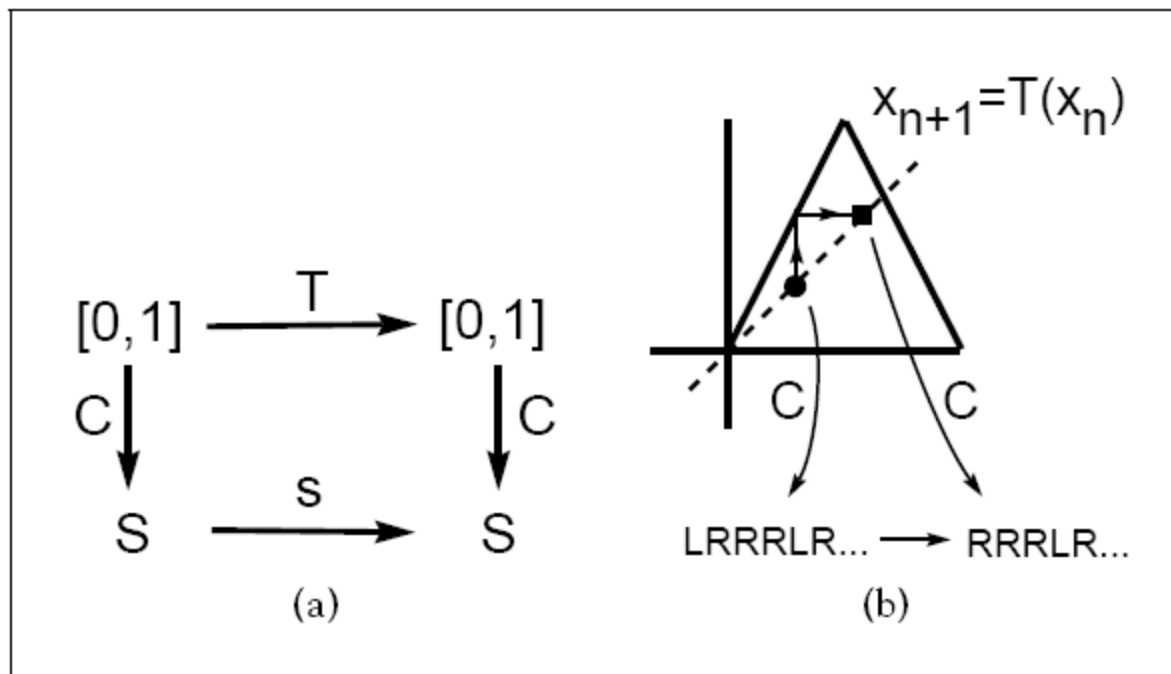




## Mudança de Variáveis para o Mapa logístico

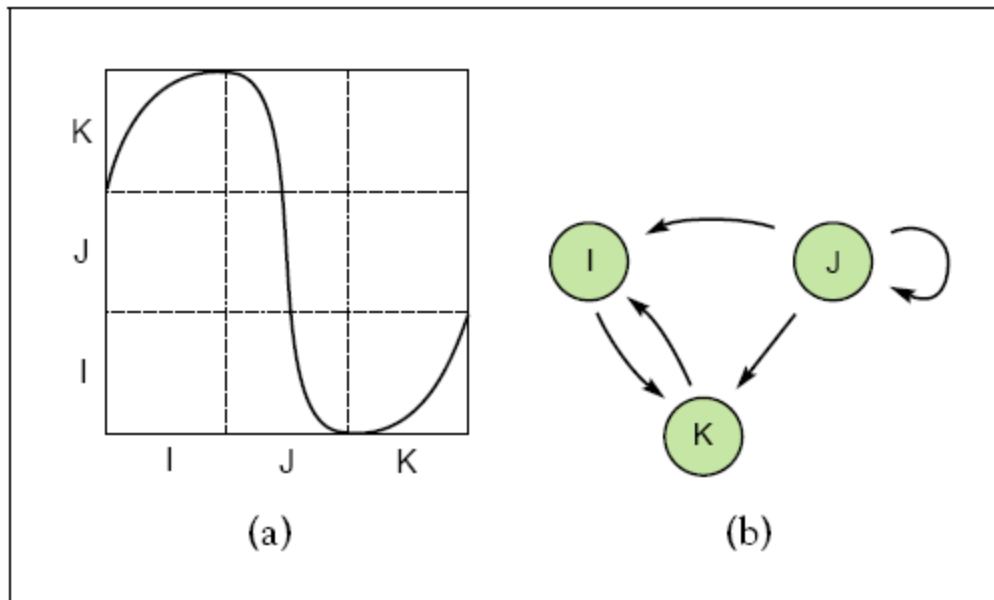


$$x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)].$$



**Figure 3.7 Tent map conjugacy.**

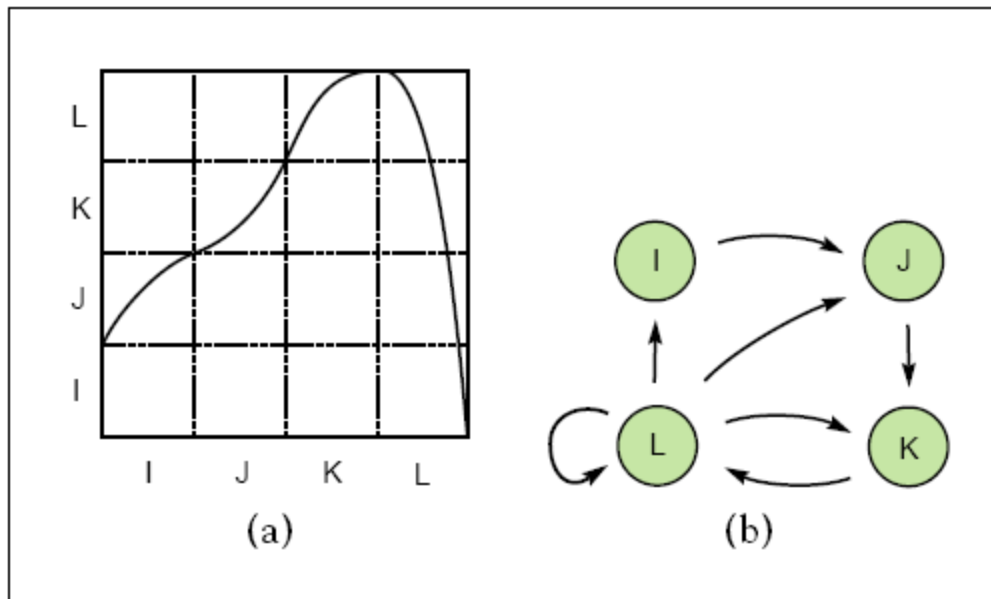
The map  $T$  is conjugate to the shift map on the two symbols  $L$  and  $R$ . (a) The conjugacy between  $T$  and the shift  $s$ . (b) Schematic view of the action of the conjugacy map  $C$ .



**Figure 3.9 Example 3.19.**

(a) The subintervals  $I$ ,  $J$ , and  $K$  form a partition for the map shown. (b) Transition graph.

Alligood  
Chaos



**Figure 3.10 A map with a four-piece partition.**

(a) The subintervals I, J, K, L form a covering partition for the map shown. (b) Transition graph for I, J, K, L.

Alligood  
Chaos

## BINARY NUMBERS

The binary expansion of a real number  $x$  has form

$$x = .b_1b_2b_3 \dots,$$

where each  $b_i$  represents the  $2^{-i}$ -contribution to  $x$ . For example,

$$\frac{1}{4} = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + \dots = .01\bar{0}$$

and

$$\frac{1}{5} = 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + \dots = .\overline{0011}$$

where the overbar means infinite repetition.

To compute the binary expansion of a number between 0 and 1, multiply the number by 2 (using the decimal system if that's easiest for you) and take the integer part (if any) as the first binary digit (bit). Repeat the process, multiply the remainder by 2, and take the integer part as the second bit, and so on. Actually, we are applying the  $2x \pmod{1}$  map, recording a 1 bit when the mod truncation is necessary, and a 0 bit if not.