Compter les points sur une courbe elliptique

Jeremie Coulaud

19 février 2019

Plan

Introduction

On définit une courbe elliptique sur un corps K dans un plan par une équation de Weierstrass de la forme :

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

Les coefficients $a_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ sont des éléments du corps K.
Si $car(K) \neq 2, 3$ on se ramène à l'équation courte suivante :

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

- $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ et $j(E) = \frac{(-48a)^3}{\Delta}$
- $E(K) = \left\{(x, y) \in \mathbb{K} \,|\, y^2 = x^3 + ax + b = 0\right\} \bigcup O$
- $E[l] = \left\{P \in E(\overline{\mathbb{K}}) \,|\, [l]P = 0\right\}$

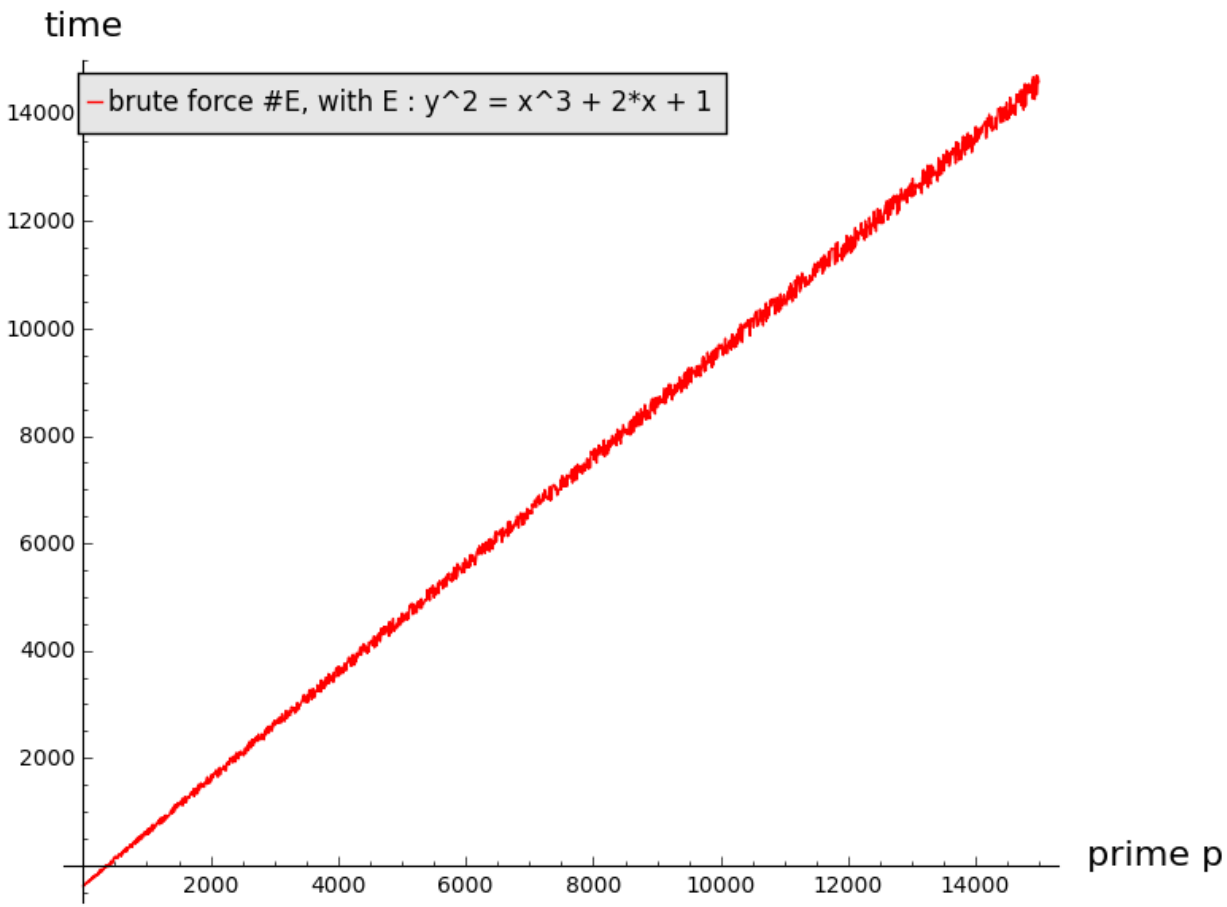
Algorithme naïf

$$y^2 = x^3 + ax + b = f(x)$$

- $\left(\frac{f(x)}{p}\right) = -1$, $f(x)$ n'est pas un carré modulo p, on ne trouve aucun point appartenant à la courbe.
- $\left(\frac{f(x)}{p}\right) = 0$, $f(x)$ est divisible par p, on trouve 1 point sur la courbe.
- $\left(\frac{f(x)}{p}\right) = 1$, $f(x)$ est un carré modulo p, on trouve 2 points sur la courbe.

$$\#E(\mathbb{F}_p) = 1 + p + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{f(x)}{p} \right)$$

Complexité en la taille de p



Algorithme de Schoof

Théorème Hasse-Weil

$\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1 - t$ avec $|t| \leqslant 2\sqrt{p}$ trace de l'endomorphisme de Frobenius de E.

Pour trouver l'ordre de $E(\mathbb{F}_p)$ il faut trouver t
Idée de Schoof : trouver $t \pmod{l}$, avec l un petit premier et utiliser les restes chinois pour trouver t

Frobenius

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{F}_p$, l'endomorphisme de Frobenius est défini par

$$\begin{array}{rccc} \phi_p & : & E(\mathbb{F}_p) & \rightarrow & E(\mathbb{F}_p) \\ & & (x,y) & \mapsto & (x^p, y^p) \end{array}$$

On lui associe son polynôme caractéristique :

$$\chi_p = \phi_p^2 - t\phi_p + p$$

1ère application : calcul de $\#E(\mathbb{F}_{p^n})$

- r_1, r_2 racines de $\chi_p(x)$
- $Tr(\phi_{p^n}(x,y)) = r_1^n + r_2^n$
- Hasse-Weil : $\#E(\mathbb{F}_{p^n}) = p^n + 1 - r_1^n - r_2^n$

Polynômes de division

On appelle $f_n(X)$ le n-ième polynôme de division défini sur $\mathbb{Z}[x]$par :

$$f_0(x) = 0$$
$$f_1(x) = 1$$
$$f_2(x) = 1$$
$$f_3(x) = 3x^4 + 6ax^2 + 12bx - a^2$$
$$f_4(x) = 2x^6 + 10ax^4 + 40bx^3 - 10a^2x^2 - 8abx - 2(a^3 + 8b^2)$$

On pose $F(X) = 4x^3 + 4ax + 4b$, et on a :

$$\begin{cases} f_{2n} & = f_n(f_{n+2}f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_{n+1}^2) \\ f_{2n+1} & = \begin{cases} F^2 f_{n+2}f_n^3 - f_{n-1}f_{n+1}^3 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ f_{n+2}f_n^3 - f_{n-1}f_{n+1}^3 F^2 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

Ces polynômes s'annulent sur les points de l-torsion et permettent de calculer :

$$[m]P = \begin{cases} O_E & \text{si} \quad P \in E[m] \\ \left(x - \frac{\psi_{m-1}(x,y)\psi_{m+1}(x,y)}{\psi_m^2(x,y)}, \frac{\psi_{2m}(x,y)}{\psi_m^4(x,y)}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant :

$$\psi_m = \begin{cases} 2yf_m & \text{si m est pair} \\ f_m & \text{sinon} \end{cases}$$

Frobenius et Schoof

$$\phi_p^2(P) + [p_l]P = [t_l]\phi_p(P) \quad \forall P \in E[l]$$

Or pour tout $P = (x, y) \in E[l]$, $f_l(x) = 0$ et $y^2 - x^3 - ax - b = 0$.
On peut donc travailler dans l'anneau :

$$\frac{\mathbb{F}_p[x, y]}{(f_l(x), y^2 - x^3 - ax - b)}$$

La question est donc pour quelle valeur $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{l-1}{2}$ l'équation suivante est vérifiée :

$$(x^{p^2}, y^{p^2}) + [p_l](x, y) = [\tau_l](x^p, y^p)$$

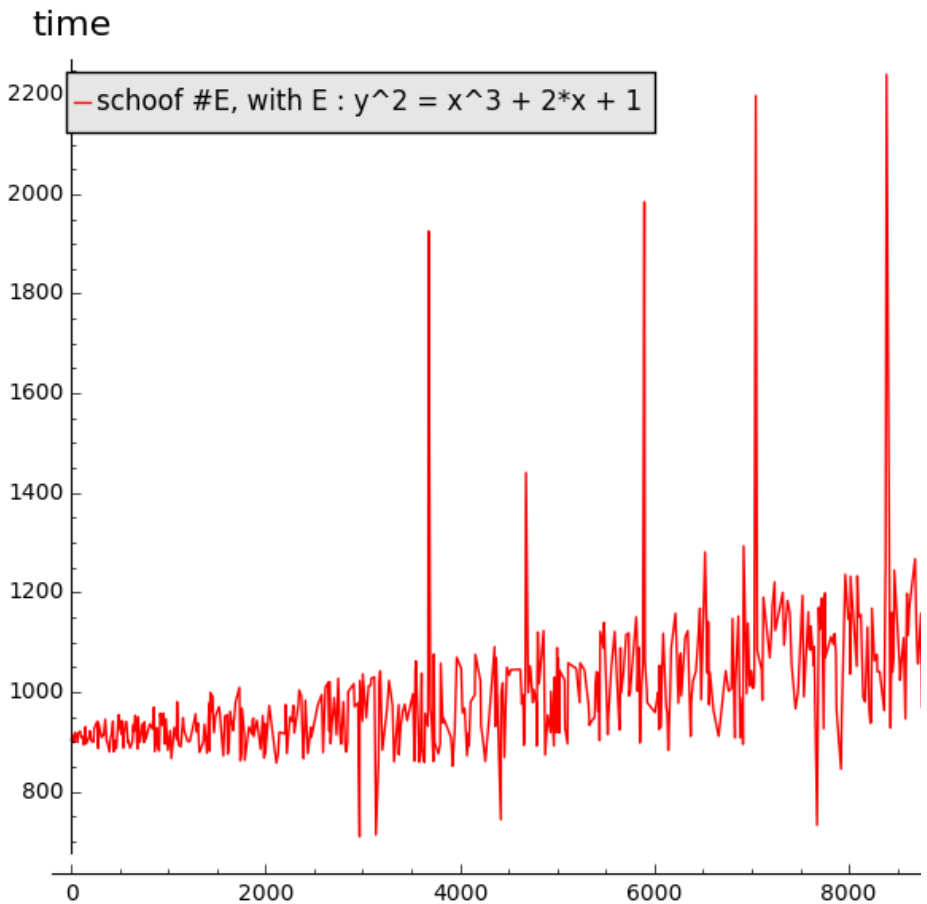
Choix des premiers *l*

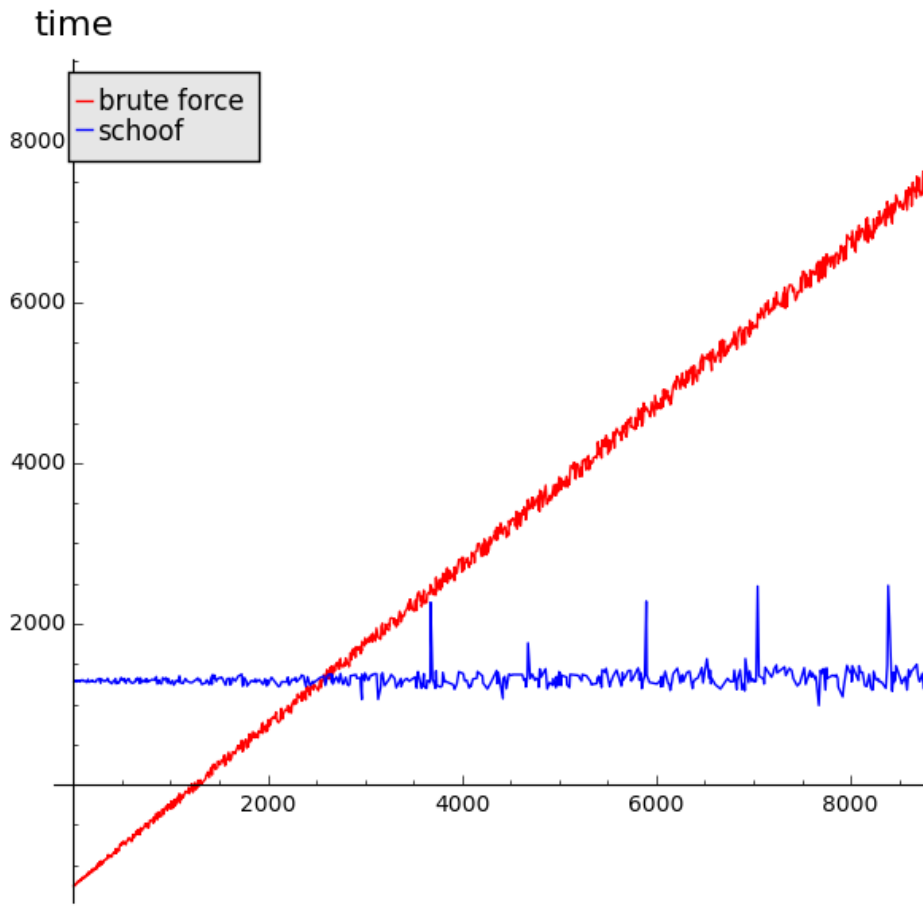
- $S = (l_1, \ldots l_n)$ tel que $\prod l_i > 4\sqrt{p}$
- Petits l_i pour que f_l soit de plus petit degré possible.

Cas l = 2 : $t_2 \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow E(\mathbb{F}_p)$ a un élément d'ordre 2

- Point 2-torsion est de la forme $(x, 0)$
- $x^3 + ax + b$ a une racine dans $\mathbb{F}_p$
- Calcul $\gcd(x^p - x,\ x^3 + ax + b) \neq 1$

Expérimentations





Algorithme Schoof-Elkies-Atkins

(SEA)

Définition

Tout sous groupe discret de $\mathbb{C}$ non nul et non isomorphe à $\mathbb{Z}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, avec $\omega_1, \omega \in \mathbb{C}$,
$Im(\frac{w_2}{w_1}) \neq 0, \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. C'est un réseau de $\mathbb{C}$ de rang 2, qu'on note :

$$\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$$

Définition

On appelle tore le quotient $T = \mathbb{C}/\Gamma$

Soit Γ un réseau de $\mathbb{C}$, on a la $\wp$-fonction de Weirstrass :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Gamma, \omega \neq 0} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

et sa dérivée :

$$\wp' = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

Théorème

Soit $E/\mathbb{C}$ une courbe elliptique sous forme réduite sur le corps des complexes. Il existe alors un réseau Γ tel que l'application suivante soit une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}/\Gamma & \to & E \\ z+\Gamma & \mapsto & \begin{cases} (\wp(z), \frac{\wp'(z)}{2}) & z \notin \Gamma \\ O & z \in \Gamma \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\wp$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) + A\wp + B$$

Isogénie

Définition

Soit E_1/K et E_2/K deux courbes elliptiques. Si E_1 et E_2 ont le même j-invariant alors elles sont isomorphiques sur $\bar{K}$.

Théorème

Soit $T_1 = \mathbb{C}/\Gamma_1$ et $T_2 = \mathbb{C}/\Gamma_2$ deux tores. Un morphisme de E_1 vers E_2 est une application holomorphe μ de T_1 vers T_2 qui soit un morphisme de groupe. Si ce morphisme est non constant alors on dit que c'est une isogénie.

Deux courbes elliptiques E_1/K et E_2/K sont isogènes s'il existe une isogénie $\psi : E_1 \mapsto E_2$. Le degré de l'isogénie est le cardinal du noyau de ψ.

Polynômes modulaires

Le n-ème polynome modulaire est noté $\Phi_n(X, Y)$ et il est :

- symétrique
- de degré $n + 1$ en chaque variable
- de coefficients de termes de plus haut degré 1
- de coefficients dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit $E_1/\mathbb{C}$ et $E_2/\mathbb{C}$ deux courbes elliptiques de j-invariant respectivement j_{E_1} et j_{E_2}. Le n-ième polynôme modulaire vérifie $\Phi_n(j_{E_1}, j_{E_2}) = 0$ si et seulement si il existe une isogénie entre E_1 et E_2 dont le noyau est cyclique de degré n.

Exemple

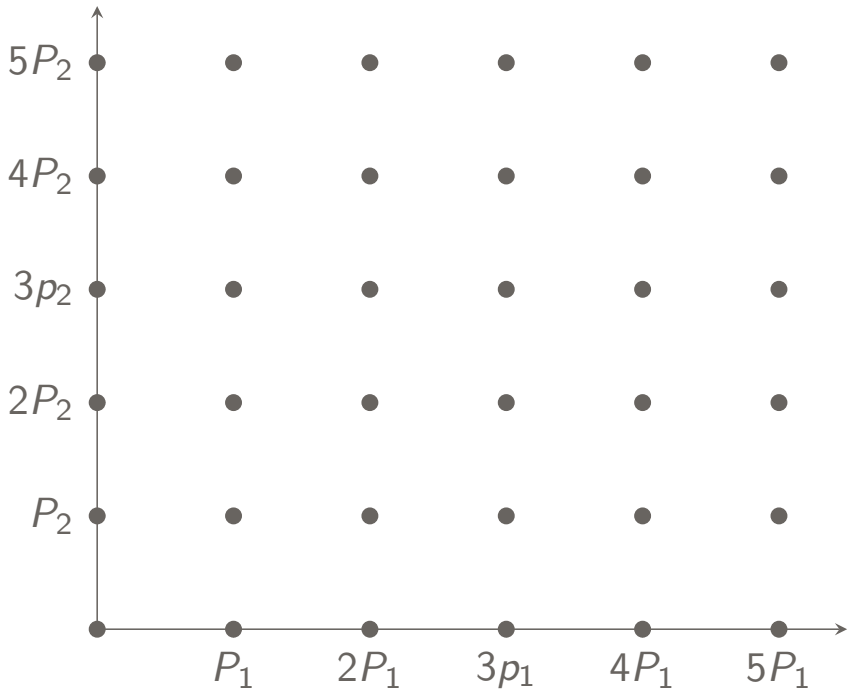
Pour $n = 3$ on a le polynôme :

$$\begin{aligned}\Phi_3(x,y) = {} & x^4 - x^3y^3 + y^4 \\ & +2232(x^3y^2 + x^2y^3) \\ & -1069956(x^3y^2 + x^2y^3 \\ & +36864000(x^3 + y^3) \\ & +2587918086x^2y^2 \\ & +8900222976000(x^2y + xy^2) \\ & +452984832000000(x^2 + y^2) \\ & -770845966336000000xy \\ & +1855000000000(x + y)\end{aligned}$$

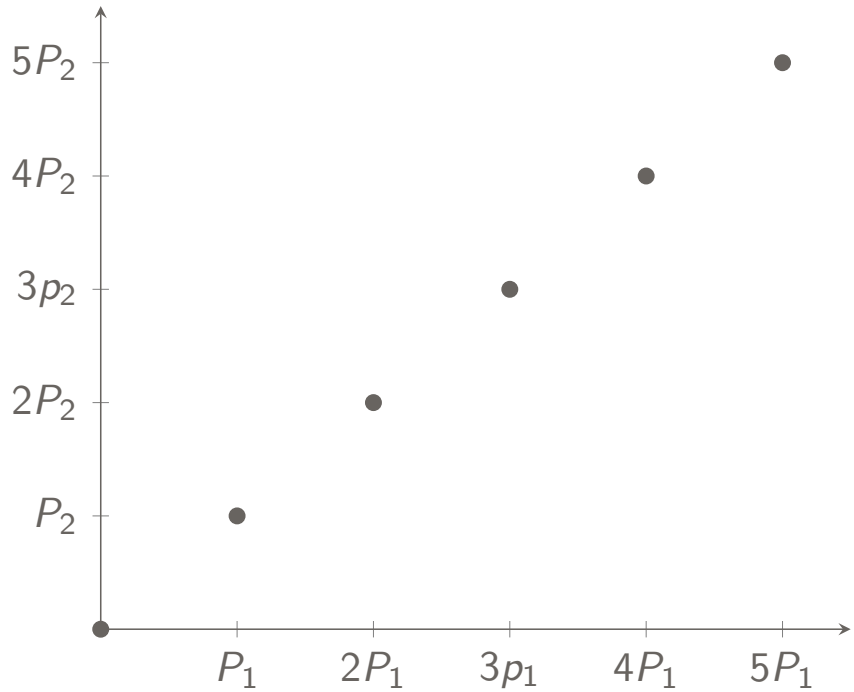
Algorithme SEA

Amélioration de l'algorithme de Schoof par Elkies et Atkins.

Représentation de $E[6]$



Représentation d'un sous groupe de $E[6]$



Soit l un petit premier, ϕ l'endomorphisme de Frobenius de polynôme caractéristique :

$$\chi_l(x) = x^2 - t_l x + p_l, \quad \text{avec } t \equiv t_l \pmod{l},\ p \equiv p_l \pmod{l}$$

$$\Delta_{\chi_l} = t_l^2 - 4p_l$$

Définition

Si Δ_{χ_l} est un carré non nul dans $\mathbb{F}_l$, alors l est un premier de Elkies, sinon c'est un premier de Atkins.

Étude de la factorisation de Φ_l pour savoir si Δ_{χ_l} est un carré. $\Phi_l(x, j) = h_1(x) \dots h_s(x)$:

- $(1, 1, r, \dots, r)$, Δ_{χ_l} est un carré, $\phi_{|E[l]}$ est diagonalisable, l est un premier de Elkies
- Calcul $\gcd(\Phi_l(x, j), x^p - x)$

Premier d'Elkies

ϕ_p est diagonalisable de valeurs propres λ, μ.

$$\chi_l(x) = x^2 - t_l x + p_l = (x - \lambda)(x - \mu)$$

Donc :

$$t_l \equiv \lambda + \mu \pmod{l}$$

- $\exists P_1 \in E[l]$ tel que $\phi_l(P_1) = \lambda P_1$
- C_1 est le groupe cyclique d'ordre l engendré par P
- C_1 est stable par le Frobenius

On peut construire le polynome de degré l :

$$g_l(x) = \prod_{\pm P \in C_1^*} (x - x_p), \quad \text{où } P = (x_p, y_p)$$

Conclusion