Prova sem consulta. Duração: 2h (20m de tolerância) 1ª Prova de Avaliação

*** Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
*** A desistência só é possível após 1 hora do início da prova;**
*** Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
*** Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.**

GRUPO I

1. [**8,0**] Considere o conjunto $S=\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}\subset\mathbb{R}^4$, em que $\vec{a}=(1,1,0,2)$, $\vec{b}=(-1,1,1,2)$ e $\vec{c}=(0,1,1,3)$, e o subespaço de $\mathbb{R}^4$, $H=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-y-z=0 \wedge w=0\right\}$.

a) Calcule o subespaço gerado pelo conjunto S, $L(\mathrm{S})$. Indique uma base para o subespaço obtido e conclua em relação à sua dimensão. Será o conjunto S linearmente dependente? Justifique.

b) Determine uma base ortogonal, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$ que contenha o maior número possível de elementos do subespaço *H*.

c) Obtenha as coordenadas do vector $\vec{r}=(0,0,1,1)$ em relação à base W.

d) Calcule uma base, Q, para o subespaço $L(\mathrm{S})$ que contenha os vetores $(0,1,0,1)$ e $(0,0,1,2)$.

2. [**2,5**] Sejam os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=1$, $\|2\vec{a}+3\vec{b}\|=5$, $\|\vec{b}\times\vec{c}\|=1$, $\measuredangle(\vec{c},\vec{b})=45°$, $\measuredangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c})=45°$, $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}+2\vec{c}$ e $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=-2$.

a) Mostre que $\left\{\vec{a},\vec{b}\right\}$ é um conjunto ortogonal.

b) Obtenha a norma de $\vec{d}$.

c) Calcule o ângulo entre $\vec{d}$ e $\vec{b}\times\vec{c}$.

.... *(continua no verso)*

GRUPO II

3. [**1,3**] Mostre que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ são paralelos, se e só se $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$.

4. [**1,2**] Sejam os vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{c}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\|\vec{a}-\vec{c}\|\geq\|\vec{a}\|-\|\vec{c}\|$ e estabeleça a condição para que se verifique a igualdade. Justifique devidamente a resposta.

5. [**7,0**] Sejam a reta $r\ :\ X(t)=P+t\vec{a}$, $t\in\mathbb{R}$, em que $P=(1,1,1)$ e $\vec{a}=(1,2,0)$, os planos $M\ :\ x+y-z=2$ e $M_1\ :\ -x-y=1$ e o ponto $R=(3,3,2)$. Determine:

a) O ponto, *I*, de interseção de *r* com *M* e o ângulo que este plano faz com M_1.

b) A equação cartesiana dum plano, α, perpendicular a *r* e que passa num ponto, *T*, desta reta à distância $\sqrt{3}$ unidades de *M*.

c) A equação vetorial de uma reta, *h*, que passa em *R*, é concorrente com *r* e faz um ângulo de $30°$ com M_1.