MUDANÇAS DE BASE

Introdução

- Pretende-se tratar, através da *álgebra matricial*, os problemas seguintes:

  i) Mudança das *coordenadas de um elemento* de um espaço linear V de uma *base ordenada* para uma outra;

  ii) Mudança da *representação matricial* de uma transformação linear $T : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$, decorrente da alteração das *bases ordenadas* seleccionadas para o *domínio* (V) e para o *conjunto de chegada* (W).

Aplicação em espaços lineares

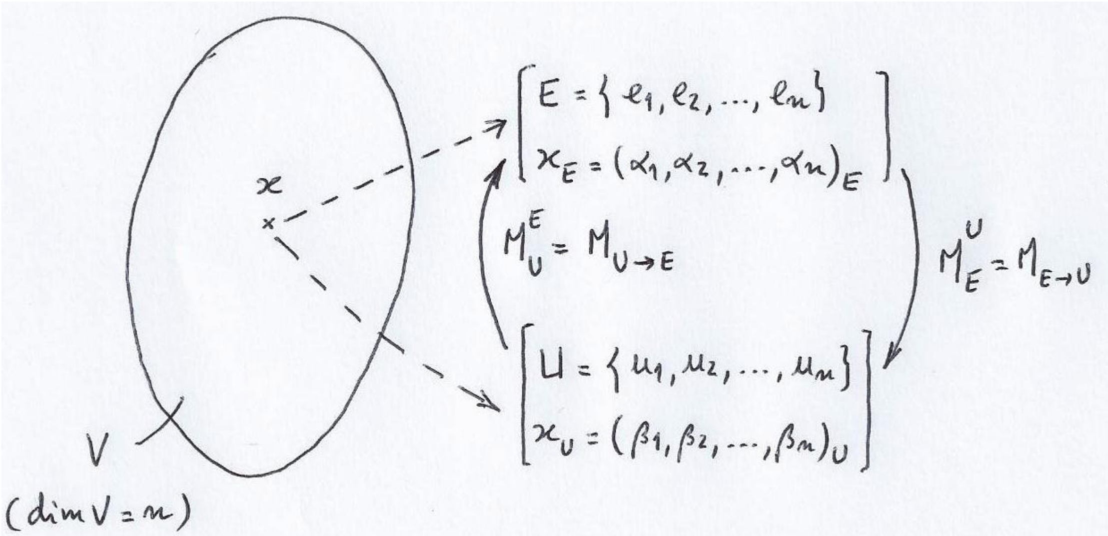
- Seja V um espaço linear sobre um corpo Ω, tal que $\dim \mathrm{V} = n$, para o qual são escolhidas as duas *bases ordenadas*

$$\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ e } \mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

Definição [4.1]: Matriz Mudança de Base (ou de Coordenadas)
Chama-se *matriz mudança de base*, ou *matriz mudança de coordenadas*, *da base ordenada* U *para a base ordenada* E, ou, simplesmente, *de* U *para* E, à matriz $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}$, ou $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}}$, que satisfaz a relação matricial

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} \ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} \ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$$

ou seja, é a matriz que permite transformar as coordenadas do elemento $x \in \mathrm{V}$ em relação à base ordenada U, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$, nas coordenadas desse mesmo elemento em relação à base ordenada E, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}}$.



- Relativamente ao elemento $x \in \mathrm{V}$, sejam $x_{\mathrm{E}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathrm{E}}$ as suas *coordenadas em relação à base* E e $x_{\mathrm{U}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)_{\mathrm{U}}$ as suas *coordenadas em relação à base* U.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

- Designando

$$e_j = (e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{nj}) \text{ com } j = 1,2,\ldots,n$$

$$u_j = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj}) \text{ com } j = 1,2,\ldots,n$$

resulta

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ e_1 & e_2 & & e_n \end{array}\end{array} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathrm{E}} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ u_1 & u_2 & & u_n \end{array}\end{array} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{\mathrm{U}}$$

ou, ainda, usando *notação matricial*

$$\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$$

- Dado que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{U}$ são matrizes *não singulares*, obtém-se

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}\to\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}$$

Conclui-se, ainda, que

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}^{-1}\ \boldsymbol{U}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{-1}$$

já que $\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}$ e $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}$ são, também, matrizes *não singulares*

$$\left|\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\ \right| = \left|\ \boldsymbol{U}^{-1}\ \boldsymbol{E}\ \right| = \left|\ \boldsymbol{U}^{-1}\ \right| \left|\ \boldsymbol{E}\ \right| = \frac{|\ \boldsymbol{E}\ |}{|\ \boldsymbol{U}\ |} = \frac{1}{\left|\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\ \right|} \neq 0$$

- Se E e U são *bases ortonormais*, então $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{U}$ são matrizes *ortogonais*, isto é,

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$$

pelo que

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}\to\mathrm{E}} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}\to\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{U}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 1 **[4.1]**: Relativamente aos espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, sejam $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ as respectivas *bases canónicas*. Considere ainda as bases para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^2$

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

Determine:

a) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, entre as bases E_3 e V.

b) As *expressões de mudança de coordenadas*, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, entre as bases E_2 e W.

Solução:

a) Considerando a *base canónica* para o espaço linear $\mathbb{R}^3$, $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, sejam $\vec{x} = (x, y, z)$ as *coordenadas* do seu elemento genérico *em relação à base* E_3 e

$$\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } |\, \boldsymbol{E}_3 \,| = 1$$

a matriz que lhe está associada.
Por outro lado, relativamente à *base ordenada* $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\}$, sejam $\vec{x}_V = (x_1, y_1, z_1)_V$ as *coordenadas* desse mesmo elemento e

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ com } |\, \boldsymbol{V} \,| = -2$$

a matriz associada à base em causa.

A *matriz mudança de base de* V *para* E_3 é

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E}_3} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{E}_3} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E}_3}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{V}} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V}}$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base ordenada* V *para a base canónica* E_3, são

$$\begin{cases} x = x_1 + z_1 \\ y = -x_1 + y_1 \quad (\mathrm{V} \to \mathrm{E}_3) \\ z = y_1 - z_1 \end{cases}$$

De modo análogo, sabendo que

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{|\ \boldsymbol{V}\ |}\left[\boldsymbol{Cof}\ \ \boldsymbol{V}\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_3}^{\mathrm{V}} = \boldsymbol{V}^{-1}\ \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{V}^{-1}\ \boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é a *matriz mudança de base de* E_3 *para* V e, portanto,

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{V}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_3}^{\mathrm{V}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}_3} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base canónica* E_3 *para a base ordenada* V, são

$$\begin{cases} x_1 = (x - y + z)/2 \\ y_1 = (x + y + z)/2 \\ z_1 = (x + y - z)/2 \end{cases} \quad (E_3 \rightarrow V)$$

b) Repita-se, neste caso, o processo atrás apresentado, considerando, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, as bases ordenadas $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ (*canónica*) e $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Designe-se por $\vec{x} = (x, y)$ as *coordenadas* do elemento genérico de $\mathbb{R}^2$ *em relação à base* E_2 e por $\vec{x}_W = (x_1, y_1)_W$ as suas *coordenadas em relação à base ordenada* W.

Sabendo que

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ com } |\,\boldsymbol{E}_2\,| = 1$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ com } |\,\boldsymbol{W}\,| = -2$$

a *matriz mudança de base de* W *para* E_2 é

$$\boldsymbol{M}_W^{E_2} = \boldsymbol{E}_2^{-1}\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_2\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\boldsymbol{X}_{E_2} = \boldsymbol{M}_W^{E_2}\ \boldsymbol{X}_W \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}_W$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base ordenada* W *para a base canónica* E_2, são

$$\begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 - y_1 \end{cases} \quad (W \rightarrow E_2)$$

Atendendo a

$$\boldsymbol{W}^{-1} = \frac{1}{|\,\boldsymbol{W}\,|}\left[\boldsymbol{Cof}\ \boldsymbol{W}\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obtém-se

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_2}^{\mathrm{W}} = \boldsymbol{W}^{-1}\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{W}^{-1}\ \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{W}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

de onde resulta

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{W}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}_2}^{\mathrm{W}}\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}_2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

As expressões de *mudança de coordenadas*, *da base canónica* E_2 *para a base ordenada* W, são

$$\begin{cases} x_1 = (x+y)/2 \\ y_1 = (x-y)/2 \end{cases} \quad (\mathrm{E}_2 \to \mathrm{W})$$

Aplicação em transformações lineares

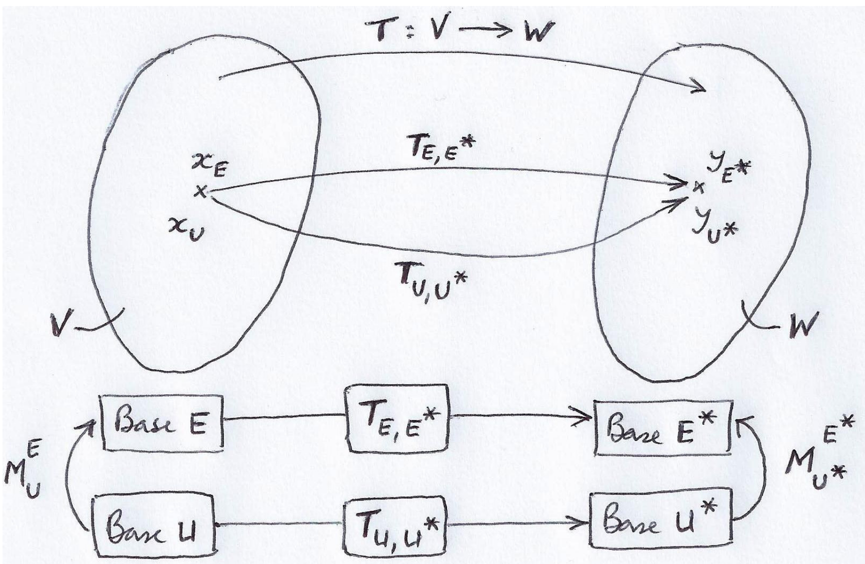
- Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo Ω, tais que $\dim \mathrm{V} = n$ e $\dim \mathrm{W} = m$.

Teorema [4.2]: Seja a transformação linear $T : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$. Admita que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*} = m(T)_{\mathrm{E,E}^*}$ é a *representação matricial* de T *em relação às bases ordenadas* $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathrm{V}$ e $\mathrm{E}^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*\} \subset \mathrm{W}$ e, por outro lado, que $\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U}^*} = m(T)_{\mathrm{U,U}^*}$ é a sua *representação matricial em relação às bases ordenadas* $\mathrm{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathrm{V}$ e $\mathrm{U}^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*\} \subset \mathrm{W}$.

Se $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{E}}$ e $\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^* \rightarrow \mathrm{E}^*}$ são, respectivamente, as *matrizes mudança de base de* U *para* E e *de* U^* *para* E^*, então as representações matriciais referidas verificam a relação matricial

$$m(T)_{\mathrm{U,U}^*} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\right)^{-1} m(T)_{\mathrm{E,E}^*} \, \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^* \rightarrow \mathrm{E}^*}\right)^{-1} m(T)_{\mathrm{E,E}^*} \, \boldsymbol{M}_{\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{E}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U}^*} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*} \, \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^* \rightarrow \mathrm{E}^*}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*} \, \boldsymbol{M}_{\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{E}}$$



- A expressão anterior pode, ainda, ser reescrita sob as formas

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U^*}}^{\mathrm{E^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{-1} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U^*} \to \mathrm{E^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U} \to \mathrm{E}}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U^*}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*}}^{\mathrm{U^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\right)^{-1} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*} \to \mathrm{U^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E} \to \mathrm{U}}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*}}^{\mathrm{U^*}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U^*}} \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*} \to \mathrm{U^*}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U^*}} \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E} \to \mathrm{U}}$$

- Tenhamos em atenção os seguintes casos particulares:

i) As *bases ordenadas* U e E são a mesma base para V

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E} \ , \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{I}_n \ \text{ e } \ \boldsymbol{X}_{\mathrm{E}} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,U^*}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U^*}}^{\mathrm{E^*}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*}}^{\mathrm{U^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U^*}}^{\mathrm{E^*}} \ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,U^*}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E^*}}^{\mathrm{U^*}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,U^*}}$$

ii) As *bases ordenadas* $\mathrm{U^*}$ e $\mathrm{E^*}$ são a mesma base para W

$$\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{E}^* \ , \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U^*}}^{\mathrm{E^*}} = \boldsymbol{I}_m \ \text{ e } \ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{E^*}} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{U^*}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,E^*}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E^*}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,E^*}} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{-1} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,E^*}} \ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}$$

iii) Se E, E^*, U e U^* são *bases ortonormais*, então $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{U}^*$ são matrizes *ortogonais*

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \;,\; \left(\boldsymbol{E}^*\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{E}^*\right)^{\mathrm{T}} \;,\; \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \text{ e } \left(\boldsymbol{U}^*\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{U}^*\right)^{\mathrm{T}}$$

pelo que

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{\mathrm{T}} \text{ e } \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\right)^{\mathrm{T}} \text{ e } \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}^*}^{\mathrm{U}^*}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}^*}^{\mathrm{U}^*}\right)^{\mathrm{T}}$$

isto é, as *matrizes mudança de base* são matrizes *ortogonais*. Assim,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U}^*} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}^*}^{\mathrm{U}^*}\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E,E}^*} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{U}^*}^{\mathrm{E}^*}\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U}^*} \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{E}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{E}^*}^{\mathrm{U}^*}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}_{\mathrm{U,U}^*}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{U}}$$

Exemplo 2 **[4.4]**: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida pela *matriz*

$$\boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $\mathrm{E}_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $\mathrm{E}_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sejam ainda as bases ordenadas para $\mathbb{R}^3$ e para $\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathrm{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} = \{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

Determine:

a) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_2}} = m(T)_{\mathrm{V,E_2}}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* V e E_2.

b) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,W}} = m(T)_{\mathrm{E_3,W}}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* E_3 e W.

c) A *matriz* $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = m(T)_{\mathrm{V,W}}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* V e W.

Solução:

a) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_2}} = m(T)_{\mathrm{V,E_2}}$ é obtida a partir da matriz $\boldsymbol{T} = m(T)$ através da relação matricial

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_2}} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}$ é a matriz *mudança de base de* V *para* E_3, definida por

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_2}} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,E_2}}$$

b) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,W}} = m(T)_{\mathrm{E_3,W}}$ é obtida a partir da matriz $\boldsymbol{T} = m(T)$ através da relação matricial

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,W}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}}$ é a matriz *mudança de base de* W *para* $\mathrm{E_2}$, definida por

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}} = \boldsymbol{E}_2^{-1}\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}_2\ \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e tem como matriz inversa

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}}\right)^{-1} = \boldsymbol{W}^{-1} = \frac{1}{|\ \boldsymbol{W}\ |}\left[\boldsymbol{Cof}\ \ \boldsymbol{W}\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtém-se, então,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,W}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}}\right)^{-1} \boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{\mathrm{E_3,W}}$$

c) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = m(T)_{\mathrm{V,W}}$ é obtida a partir da matriz $\boldsymbol{T} = m(T)$ através da relação matricial

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{W}}^{\mathrm{E_2}}\right)^{-1} \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}$$

ou seja, por exemplo,

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,W}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{E_3,W}}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{\mathrm{E_3,W}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,W}}$$

Exemplo 3 [4.5]: Considere as transformações lineares $R:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $S:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que possuem as *representações matriciais*

$$\boldsymbol{R} = m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = m(S) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{T} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas $E_3 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e $E_2 = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1\} = \{(1,0),(0,1)\}$ para os espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja ainda a *base ordenada* para $\mathbb{R}^3$

$$V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,2)\}$$

Determine as seguintes *representações matriciais*:

a) $\boldsymbol{R}_{V,E_2} = m(R)_{V,E_2}$, que representa R em relação às *bases ordenadas* V e E_2.

b) $\boldsymbol{S}_{E_2,V} = m(S)_{E_2,V}$, que representa S em relação às *bases ordenadas* E_2 e V.

c) $\boldsymbol{T}_{V,E_3} = m(T)_{V,E_3}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* V e E_3.

d) $\boldsymbol{T}_{E_3,V} = m(T)_{E_3,V}$, que representa T em relação às *bases ordenadas* E_3 e V.

e) $m(SR+T^2)_V$, que representa $SR+T^2$ em relação à *base ordenada* V e recorrendo às matrizes obtidas nas alíneas anteriores.

f) $m(SR+T^2)_V$ a partir, neste caso, da sua representação matricial em relação à *base canónica* E_3.

Solução:

a) A matriz $\boldsymbol{R}_{\mathrm{V,E_2}} = m(R)_{\mathrm{V,E_2}}$ é

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{V,E_2}} = \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,E_2}}$$

onde $\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}$ é a matriz *mudança de base de* V *para* $\mathrm{E_3}$, definida por

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \boldsymbol{E}_3^{-1}\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}_3\ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) A matriz $\boldsymbol{S}_{\mathrm{E_2,V}} = m(S)_{\mathrm{E_2,V}}$ é

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{E_2,V}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}\right)^{-1} \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{\mathrm{E_2,V}}$$

em que

$$\left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}}\right)^{-1} = \boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{|\ \boldsymbol{V}\ |}\left[\boldsymbol{Cof}\ \ \boldsymbol{V}\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A matriz $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_3}} = m(T)_{\mathrm{V,E_3}}$ é

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V,E_3}} = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E_3}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{V,E_3}}$$

d) A matriz $\boldsymbol{T}_{E_3,V} = m(T)_{E_3,V}$ é

$$\boldsymbol{T}_{E_3,V} = \left(\boldsymbol{M}_V^{E_3}\right)^{-1}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3,V}$$

e) A matriz $m(SR + T^2)_V$ é

$$m(SR + T^2)_V = m(SR)_V + m(T^2)_V = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_V$$

em que

$$m(SR)_V = \boldsymbol{S}_{E_2,V}\ \boldsymbol{R}_{V,E_2} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}_V$$

$$m(T^2)_V = \boldsymbol{T}_{E_3,V}\ \boldsymbol{T}_{V,E_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_V$$

f) A representação matricial de $SR + T^2$ em relação à *base canónica* E_3 é

$$m(SR + T^2) = m(SR) + m(T^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

em que

$$m(SR) = \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m(T^2) = \boldsymbol{T}\ \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz $m(SR + T^2)_{\mathrm{V}}$ é obtida, neste caso, a partir da relação matricial

$$m(SR + T^2)_{\mathrm{V}} = \left(\boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E}_3}\right)^{-1} m(SR + T^2)\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{E}_3} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{V}}$$