

Cinematica

$$v = \dot{s} \quad at = \dot{v} \quad at = \dot{s} \quad at = \frac{v dv}{ds}$$

• Método de separação de variáveis $\vec{p} = m\vec{g} \quad 0 \leq Fe \leq \mu e Rn \quad Fc = \mu e Rn$

- 1) Substitui-se na equação
- 2) Separam-se as variáveis
- 3) Integram-se os dois lados

Cinematica vetorial

• Movimento geral dos projéteis

$$\rightarrow v_x = v_i \cos \theta = \text{constante}$$

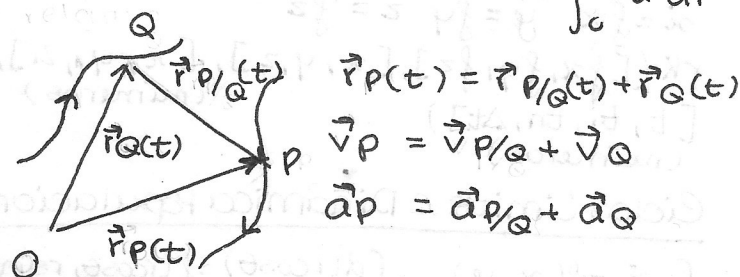
$$x = x_i + v_x(t - t_i)$$

$$\rightarrow v_y = v_i \sin \theta \quad a_y = -g = \text{constante}$$

$$y = v_y(t - t_i) - \frac{g}{2}(t - t_i)^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

• Movimento relativo $\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$



Movimento Curvilíneo

$$\vec{v}(t) = \dot{s} \hat{e}_t \quad \frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_n = \frac{v}{R} \hat{e}_n$$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{at}_{\dot{v}/\dot{s}} \hat{e}_t + \frac{v^2}{R} \hat{e}_n \quad |\vec{a}|^2 = at^2 + an^2$$

• Movimento Circular

$$w = \dot{\theta} \quad \alpha = \dot{w} \quad \alpha = w \frac{dw}{d\theta}$$

$$v = R w \quad at = R \alpha \quad an = R w^2$$

→ M. Circular uniforme

$$\alpha = 0 \quad w = w_i = \text{constante} \quad \theta = \theta_i + w(t - t_i)$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad f = \frac{1}{T} \quad w = 2\pi f$$

$$v_{B/A} = R_{B/A} \times w \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta \hat{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha}}_{at} \times \vec{r} + \underbrace{\vec{\omega}}_{an} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Mecânica Vetorial

• Leis de Newton 1ª → Lei da Inércia

$$2ª \rightarrow F_r = ma$$

3ª → For ação reação

• Força de Resistência nos Fluidos

$$\rightarrow NR = \frac{\rho v \ell}{n} \quad NR < 1: F_r \text{ proporcional a } v$$

$$100 < NR < 4000: F_r \text{ prop. a } v^2$$

$NR > 4000: \text{Turbulência}$

→ Esfera de raio R

$$F_r = 6\pi\eta R v, \quad NR < 1$$

$$F_r = \frac{\gamma}{4} \rho r^2 v^2, \quad NR > 1000$$

Dinâmica dos corpos rígidos

Vetor deslizante → módulo, direção, sentido e linha de ação

• Lei das alavancas $\rightarrow F_1 d_1 = F_2 d_2$

$$M_i, Q = F_i d_i \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{Q/P} \times \vec{F}$$

$|\vec{M}| = |\vec{F}| \times \text{distância entre as linhas de ação}$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \times \vec{a}_{cm} \quad M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$M = m_1 + m_2 \quad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \iint \vec{r} dm$$

$$dm = \rho dx dy dz$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \iint \vec{v} dm \quad \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \iint \vec{a} dm$$

$$\left| \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right| = I_z \alpha \quad I_z = \iint R^2 dm$$

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad I_z = I_{zcm} + m d^2$$

Trabalho e Energia

trabalho das forças resultantes

$$W_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad W_{1,2} = E_{c2} - E_{c1}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} w^2$$

energia de translação rotação

$$U_g = mgh \quad W_{1,2} = U_{g1} - U_{g2}$$

trabalho do peso

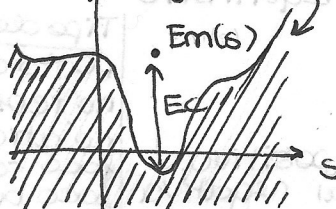
$$W_{1,2} = U_{e1} - U_{e2} \quad U_e = \frac{1}{2} k x^2$$

trabalho da força elástica

$$E_m = E_c + U \quad W_{1,2} = E_{m2} - E_{m1}$$

Energias $v(s) \quad E_m - U = E_c \geq 0$

Sistema conservativo
→ E_m constante



Sistemas Dinâmicos

$\vec{u} = v\hat{e}_1 + at\hat{e}_2$ $at = f(s, v)$
 \vec{u} velocidade de fase
 plot $f([u_1, u_2], [x_1, x_2], [x_1, a, b], [x_2, c, d])$
 duas expressões que dependem de x_1 e x_2 duas variáveis que definem o espaço de fase intervalos para as variáveis de estado

• Sistemas conservativos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \quad f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

$\vec{u} = \vec{0} \rightarrow$ ponto de equilíbrio



Ciclo: curva de evolução fechada

orb. homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de eq. instável

orb. heteroclínica: liga vários pontos de eq. instável

Mecânica Lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{dU}{dq_j} = Q_j \quad Q_j = \vec{E}_i \cdot \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}$$

• Multiplicadores de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{dU}{dq_j} - \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = Q_j$$

→ Resolvem-se as equações, junto com $f_i = \text{const}$ multiplicador de Lagrange para encontrar λ_i e \ddot{q}_j

→ quando existem forças de ligação

• Resolução das Eq. de Lagrange no Maxima

grade $f(x_0, t, v_{x0}) \rightarrow$ def. velocidades

grade $f(v_{x0}, t, a_{x0}) \rightarrow$ def. acelerações

$E_c: (...)$

$U: (...)$

$\text{diff}(\text{diff}(E_c, v_{x0}), t) - \text{diff}(E_c, x_0) + \text{diff}(U, x_0)$

$\text{solve}(\%, a_{x0}) / \text{solve}(\%, a_{x0})$

Sistemas Lineares

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \vec{u} = A\vec{r} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

• Ponto de Equilíbrio • Valores próprios

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

• Tipos de Pontos de Equilíbrio

Valores próprios λ

2 reais, sinais opostos

2 reais, positivos

2 reais, negativos

2 complexos, parte real positiva

2 complexos, parte real negativa

2 imaginários

1 real positivo

1 real negativo

Tipo de ponto

ponto de sela

no repulsivo

no atrativo

foco repulsivo

foco atrativo

centro

no impróprio repulsivo

no impróprio atrativo

Estabilidade

I

I

E

I

E

E

E

E

Sistemas Dinâmicos Não Lineares

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

```

x1 = 6*x2*(x2^2 + x1^2 - 1)^2 - 3*x1^2*x2^2
x2 = 2*x1*x2^3 - 6*x1*(x2^2 + x1^2 - 1)^2
f1: 6*x2*(x2^2 + x1^2 - 1)^2 - 3*x1^2*x2^2;
f2: 2*x1*x2^3 - 6*x1*(x2^2 + x1^2 - 1)^2;
p: solve([f1, f2]); // 13 pontos mas apenas
q estão no plano real // p: append([rest
[p, -6], rest(p, 11)]; // 4 dos pontos //
j: jacobian([f1, f2], [x1, x2]);
A: makelist(subst(q, j), q, p);
map(mat-trace, A); // traço nulo
map(determinant, A);
// 1º, 8º e 9º são centros; 6º, 7º são pontos
de sela
plotdf([f1, f2], [x1, x2], [x1, -2, 2], [x2, -2, 2]);
    
```

• Espaço de fase com 3 ou mais variáveis

$$\dot{x} = f(x) \quad \dot{y} = f(y) \quad \dot{z} = f(z)$$

$\text{rk}([f_x, f_y, f_z], [x, y, z], [x_1, y_1, z_1],$
 $[t, t_1, t_n, \Delta t])$
 (números)

Ciclos Limite e Dinâmica Populacional

$$\begin{cases} \dot{r} = f(r, \theta) \\ \dot{\theta} = g(r, \theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d(r \cos \theta)}{dt} = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{d(r \sin \theta)}{dt} = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

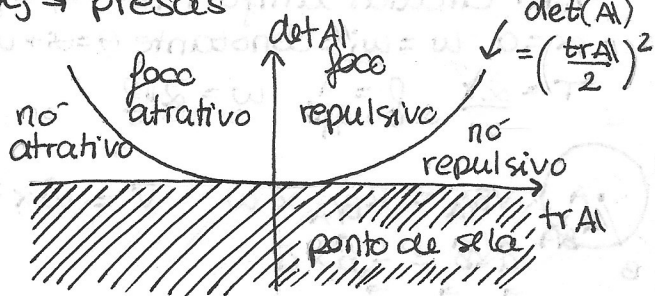
Ciclos Limite
 $\dot{r} = F(r, \theta)$ sempre positivo
 $\dot{\theta} = G(r, \theta)$ sempre negativo
 $\rightarrow \theta(r, \theta)$ tiver raízes

• Tipos de sistemas

1) S. com cooperação: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0; \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$

2) S. com competição: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0; \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$

3) S. predador-presa: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0; \frac{\partial f_j}{\partial x_i} < 0$
 $x_i \rightarrow$ predadores $x_j \rightarrow$ presas



Tipo de ponto

ponto de sela

no repulsivo

no atrativo

foco repulsivo

foco atrativo

centro

no impróprio repulsivo

no impróprio atrativo

Estabilidade

I

I

E

I

E

E

E