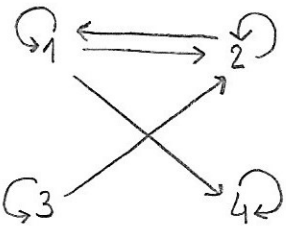
Relações binárias e ordens parciais

1. $R = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,4)\}$
definida em $A = \{1, 2, 3, 4\}$

a) diagrama e matriz R

R	1	2	3	4
1	X	X		X
2	X	X		
3		X	X	
4				X

matriz



diagrama

b) propriedades de R

Reflexiva: $\forall a \in A, (a,a) \in R$ ✓ (1,1) (2,2) (3,3) (4,4)
↳ diagonal da matriz

Simétrica: $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$ (X)
$(1,4) \in R$ mas $(4,1) \notin R$

Antissimétrica: $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a = b$
(X) $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R$ mas $1 \neq 2$

Transitiva: $\forall a,b,c \in A, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$
(X) $(2,1) \in R \wedge (1,4) \in R$ mas $(2,4) \notin R$

c) propriedades em termos gráficos

Reflexiva → diagonal principal completa
Simétrica → elementos simétricos à diagonal
Antissimétrica → sem elemento simétrico relativamente à diagonal principal
Transitiva → ligações diretas para todos os elementos com caminho até lá

4. P = conjunto dos naturais de Portugal
$S = \{(x,y) \in P \times P \mid x$ é natural do mesmo distrito que $y\}$

Partição de um conjunto P: coleção de subconjuntos não vazios de P, disjuntos dois a dois, cuja reunião é P

$S \rightarrow$ relação de equivalência?

$\left.\begin{array}{l}\text{Reflexiva? ✓} \\ \text{Simétrica? ✓} \\ \text{Transitiva? ✓}\end{array}\right\}$ S é uma relação de equivalência

$P/S = \{P_{porto}, P_{viana}, \dots\}$

18 distritos → 18 classes de equivalência
↳ 1 elemento de cada classe de equivalência

- 18 células

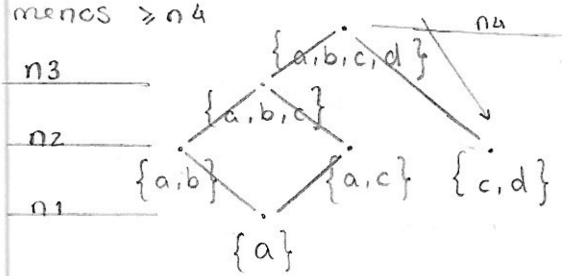
5. Diagrama de Hasse

$(\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, \{a,c\}, \{c,d\}\}, \subseteq)$

<u>parcialmente ordenado</u>: $a \subseteq a,b \subseteq a,b,c$
mas $a \nsubseteq c,d$

<u>Relação de ordem</u>: Reflexiva, Antissimétrica, Transitiva

pode estar em qualquer nível menos $\geq n4$



a) Máximo
$\{a,b,c,d\}$

b) Maximais
$\{a,b,c,d\}$

c) Mínimo Não há
(não posso comparar $\{a\}$ com $\{c,d\}$

d) Minimais $\{a\}, \{c,d\}$

e) <u>supremo</u> $\{a,b\}$ e $\{a,c\}$ $\{a,b,c\}$
↳ menor valor dos majorantes

②

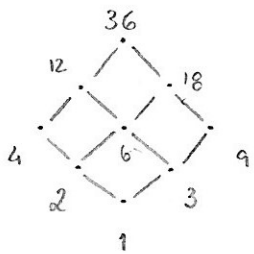
f) ínfimo $\{a,b\}$ e $\{c,d\}$ Não há
↳ maior valor dos minorantes

g) $\{a,b\} \wedge \{a,c\} = \{a\}$
↳ $\wedge$ maior de todos em baixo → ínfimo

h) $\{a\} \vee \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$
↳ $\vee$ menor de todos em cima → supremo

7. Diagrama de Hasse $a|b$ se a for um divisor inteiro de b
$D_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$

a) Diagrama de Hasse cpo $(D_{36}, |)$



b) sup A $= \{1,2,3,4,6\}$ $\{12\}$

c) inf A $\{1\}$

d) sup B $= \{2,6,12,18\}$ $\{36\}$

e) inf B $\{2\}$

f) minorantes $\{12,18\}$ $\{1,2,3,6\}$ todos os números menores que 12 e 18

g) $12 \wedge 18$ ↑ ínfimo $\{6\}$ $12 \vee 18$ ↑ supremo $\{36\}$

8. S conjunto não vazio

A e B dois elementos do power set de S
cpo $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ $A \wedge B = A \cap B$
← ínfimo   G = ínfimo

1 $G \subseteq A \wedge G \subseteq B$
2 $\forall C \in \mathcal{P}(S), (C \subseteq A \wedge C \subseteq B) \rightarrow C \subseteq G$

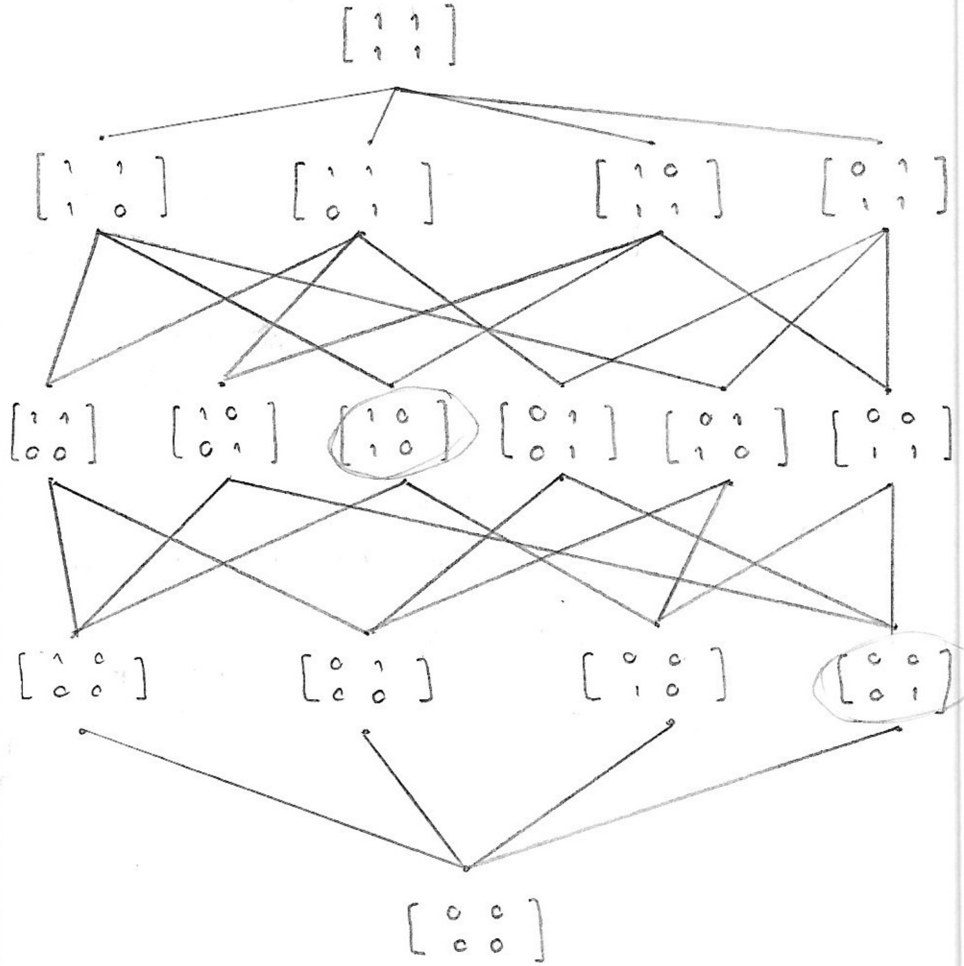
Por 1, $*_1$ $\boxed{G \subseteq (A \cap B)}$
$A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, logo, por 2, $*_2$ $\boxed{A \cap B \subseteq G}$
Portanto $\boxed{*_1, *_2}$ $G = A \cap B$ (propriedade antissimétrica $\subseteq$)

10. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \right\}$ conjunto de todas as matrizes binárias 2x2

a) A e B elementos de S

$A \preccurlyeq B$ sse $a_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i,j$

Diagrama de Hasse cpo $(S, \preccurlyeq)$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $A \preccurlyeq B$ sse $\det(A) \leq \det(B)$

$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0} \leq \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0}$ e $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

logo não é assimétrica

portanto não é ordem parcial