MIEIG — 2014/2015

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Resoluções de Problemas de Exames de Estatística 2 (MIEGI) sobre Teste de Hipóteses

2010/2011 – Época Normal – P1

Sejam:
X_A: tempo de vida da pilha A [dias]
X_B: tempo de vida da pilha B [dias]
$N_A = 51, \quad \bar{\bar{x}}_A = 480.5, \quad s_A = 33.2$
$N_B = 51, \quad \bar{\bar{x}}_B = 495.5, \quad s_B = 40.3$

i) Admite-se que X_A e X_B seguem distribuições Normais. Admite-se também que as duas amostras são independentes.

Começa-se por verificar se as duas populações têm igual variância (Teste à razão de variâncias entre duas populações Normais — Teste F).

H_0: $\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} = 1$
H_1: $\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} > 1$

Se H_0 for verdadeira a estatística de teste segue uma distribuição F_{N_B-1,N_A-1}

$$\mathrm{ET} = \frac{S_B^2}{S_A^2} \sim F_{N_B-1,N_A-1}$$

Nota: utiliza-se σ_B^2/σ_A^2 para que a ET esteja sobre a cauda direita da distribuição F.

Substituindo,

$$\mathrm{ET} = \frac{40.3^2}{33.2^2} = 1.47 < F_{50,50}(\alpha = 0.05) = 1.60$$

Como o valor de ET é inferior ao valor crítico (1.60), H_0 não é rejeitada (valor de prova p = 8.7%). Assim, admite-se que as variâncias das duas populações são iguais, ou seja, que $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$.

A variância comum das populações X_A e X_B, σ^2, pode ser estimada por

$$S^2 = \frac{(N_A - 1) \cdot S_A^2 + (N_B - 1) \cdot S_B^2}{N_A + N_B - 2}$$

Substituindo,

$$s^2 = \frac{(51-1) \cdot 33.2^2 + (51-1) \cdot 40.3^2}{51 + 51 - 2} = \frac{136316.5}{100} = 1363.165$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1363.165} = 36.92$$

De seguida, para verificar se é plausível considerar que, em média, os dois tipos de pilhas têm tempos de vida idênticos realiza-se um teste à diferença de valores esperados (amostras de grandes dimensões e populações quaisquer — Teste Z), em que as variâncias das populações A e B são iguais ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$).

H_0: $\mu_B = \mu_A$
H_1: $\mu_B \neq \mu_A$

Se H_0 for verdadeira a estatística de teste segue uma distribuição $N(0,1)$, já que as amostras são de grande dimensões e como tal a aproximação $S \approx \sigma$ é válida.

$$\text{ET} = \frac{(\bar{X}_B - \bar{X}_A)}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{N_B} + \frac{1}{N_A}}} \sim N(0,1)$$

Substituindo,

$$\text{ET} = \frac{495.5 - 480.5}{36.92 \cdot \sqrt{\frac{1}{51} + \frac{1}{51}}} = \frac{15.0}{7.31} = 2.05 > \ Z(\alpha/2 = 0.025) = 1.96$$

Como o valor de ET é superior ao valor crítico (1.96), H_0 é rejeitada (valor de prova $p = 4.02\%$). Logo, não é plausível considerar que os dois tipos de pilhas tenham, em média, tempos de vida idênticos, sendo que o tipo de pilhas B apresenta, em média, tempo de vida superior ao tipo de pilhas A.

ii) O erro de tipo II (β) corresponde a não se rejeitar H_0 quando a hipótese alternativa, H_0, é falsa.

H_0: $\mu_B = \mu_A$
H_1: $\mu_B \neq \mu_A$

A estatística de teste é dada por,

$$\text{ET} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}}$$

H_0 verdadeira $\Rightarrow$ $ET \sim N(0,1)$

$$\left[\text{por ser } ET = \frac{(\bar{X}_B - \bar{X}_A) - (\mu_B - \mu_A)}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}} \sim \ N(0,1)\right]$$

H_0 não será rejeitada quando

$$-1.96 < ET < 1.96$$

Quando H_1 for verdadeira com $\mu_B = \mu_A + 9$ e admitindo que a variância se mantém, vejamos como se distribui ET.

$$\frac{(\bar{X}_B - \bar{X}_A) - (\mu_B - \mu_A)}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}} = \left[ET - \frac{\mu_B - \mu_A}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}}\right]$$

$$= \left[ET - \frac{9}{36.42 \cdot \sqrt{\frac{2}{51}}}\right]$$

$$= [ET - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constante}}}{1.23}] \quad \sim N(0,1)$$

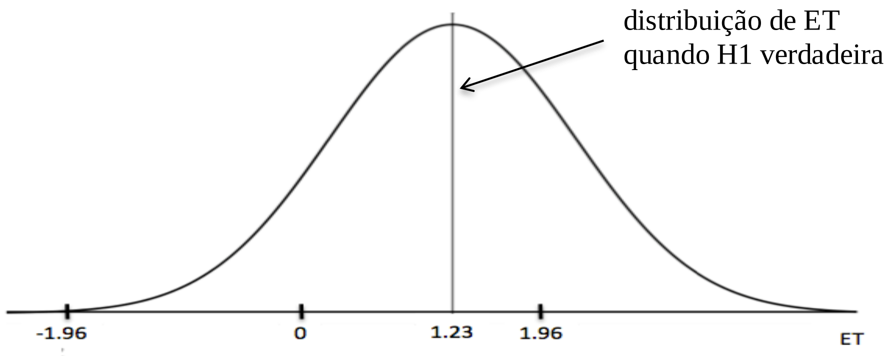
$$\Rightarrow ET \sim N(1.23, 1)$$

Nesta situação, dado que H_0 não será rejeitada quando

$$-1.96 < ET < 1.96\,,$$

a probabilidade de tal acontecer (isto é, a probabilidade de cometer um erro do tipo II) vem

$Prob[-1.96 < ET < 1.96] = Prob[-1.96 - 1.23 < Z < 1.96 - 1.23] =$



$= Prob[-3.19 < Z < 0.73] = Prob[Z < 0.73] = 1 - 0.2327 = 0.7673$

2010/2011 – Época de recurso – P1

X: número de cargas defeituosas por embalagem

H_0: $\mu_X = 0.78$ $\quad\quad (\equiv \mu_X \leq 0.78)$

H_1: $\mu_X > 0.78$

$$\text{ET} = \frac{\bar{X} - 0.78}{\sqrt{S^2/N}} \qquad (\text{com } N \text{ grande})$$

H_0 verdadeira $\Rightarrow$ $ET \sim N(0,1)$

ou

$ET \sim t_{N-1}$

Da tabela resulta:

$$\bar{X} = 0.44 \cdot 0 + 0.32 \cdot 1 + 0.19 \cdot 2 + 0.02 \cdot 3 + 0.02 \cdot 4 + 0.01 \cdot 5 = 0.89$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{N}{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{K} f_k \cdot (x_k - \bar{X})^2 \\ &= \frac{100}{99} \cdot [0.44 \cdot 0.89^2 + 0.32 \cdot 0.11^2 + 0.19 \cdot 1.11^2 + 0.02 \cdot (2.11^2 + 3.11^2) + 0.01 \cdot 4.11^2] \\ &= \frac{100}{99} \cdot 1.0379 = 1.010 \cdot 1.0379 = 1.0484 \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\text{ET} = \frac{0.89 - 0.78}{\sqrt{1.0484/100}} = 1.07 \quad < \quad Z(\alpha = 0.05) = 1.645$$

$$< \quad t_{99}(\alpha = 0.05) = 1.662$$

$\Rightarrow$ H_0 não rejeitado

O teste é inconclusivo, não permitindo, ao nível de significância de 5%, corroborar a suspeita da administração.

2010/2011 – Época de recurso – P2

Δ: variação da velocidade de cruzeiro (velocidade sem pintura – velocidade com pintura)

Na tabela apresentam-se 15 valores de velocidades emparelhadas, a partir dos quais se obtêm 15 valores de Δ_i e, a partir destes,

$$\hat{\mu}_\Delta = \overline{\Delta} = 6.17$$

$$\hat{\sigma}_\Delta = s_\Delta = 10.93$$

Em face da dimensão das amostras é necessário que Δ segue uma distribuição Normal.

H_0: $\mu_\Delta = 0$

H_1: $\mu_\Delta \neq 0$

$$\text{ET} = \frac{\bar{\Delta}}{S_\Delta/\sqrt{N}} \qquad \text{(com } N \text{ pequeno)}$$

H_0 verdadeira $\Rightarrow$ $ET \sim t_{N-1}$

Substituindo,

$$\text{ET} = \frac{6.17}{10.93/\sqrt{15}} = 2.188 \quad > \quad t_{14}(\alpha = 0.05) = 2.145$$

$\Rightarrow$ H_0 rejeitada, pelo que, ao nível de significância de 5%, a afirmação dos técnicos da empresa aeronáutica é corroborada.

2011/2012 – Época Normal – P1

i) Nesta alínea pretende-se saber se o valor esperado da temperatura da água (μ) é significativamente superior a 27ºC. Isto permitirá verificar se o equipamento deve, ou não, ser desligado. Na resolução desta alínea deve-se recorrer a um teste de hipótese paramétrico ao valor esperado (amostra de pequena dimensão N=10, população Normal).

X: temperatura da água da piscina, expressa em ºC.

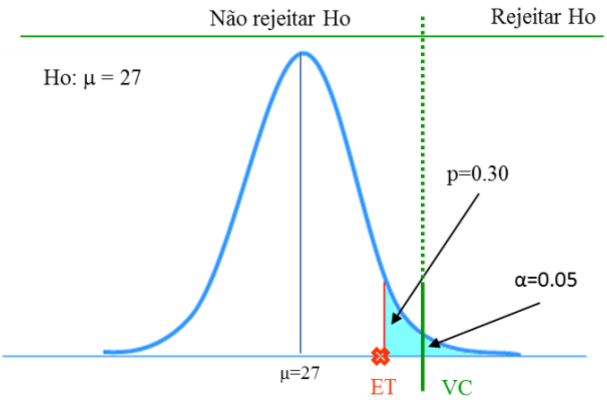
Ho: $\mu_x=27$
H1: $\mu_x>27$

Estatística de teste: $\text{ET} = \frac{\overline{X}-\mu o}{s/\sqrt{N}} \sim t_{N-1}$ (quando Ho é verdadeira)

Estatísticas amostrais: $\overline{X} = 27.3$ | $s^2 = 1.767^2$

$\text{ET} = \frac{27.3-27}{1.767/\sqrt{10}}=0.537$ < Valor crítico (VC) → $t_9\,(\alpha=0.05)=1.833$

Valor de prova → p = p(ET>0.537| Ho) ≈ 30%



R: Não se rejeita Ho. Isto significa que não se pode concluir que o valor esperado da temperatura da água da piscina é significativamente superior que 27%, a um nível de significância de 5%. Desta forma, não existe evidência estatística no sentido de ser necessário desligar o equipamento de aquecimento.

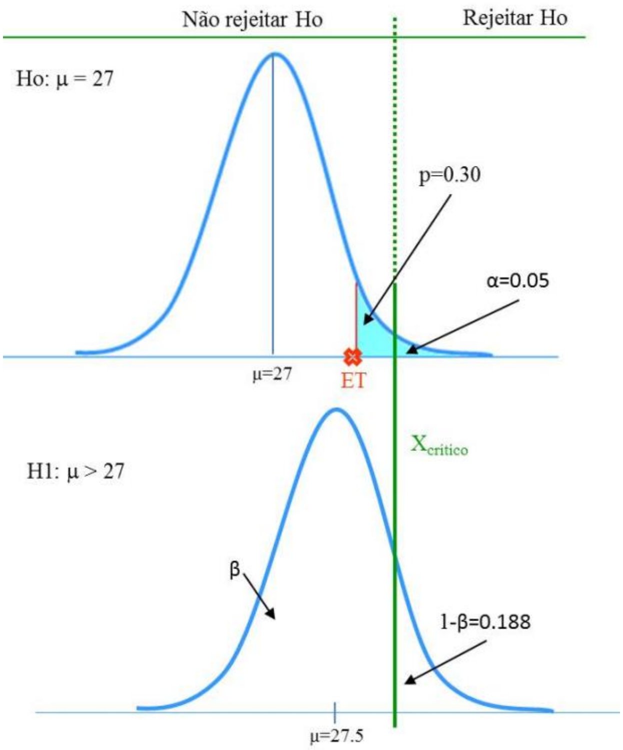
ii) Nesta alínea pretende-se determinar o valor médio da temperatura da piscina a partir do qual existiria evidência estatística no sentido de ser necessário desligar o equipamento de aquecimento (decisão oposta da tomada na alínea i)). O valor pedido é o valor crítico correspondente na distribuição de $\overline{X}$ ($x_{\text{crítico}}$), que permite igualmente definir a região de rejeição de Ho.

$$t_9\ (\alpha = 0.05) = 1.833 = \frac{X_{\text{crítico}} - 27}{1.767/\sqrt{10}} \Rightarrow x_{\text{crítico}} = 28.02$$

R: A partir de uma temperatura média da água da piscina de aproximadamente 28ºC dever-se-ia desligar o equipamento de aquecimento.

iii) Nesta alínea pretende-se determinar a probabilidade de se detetar um desvio de temperatura de +0.5ºC. Esta probabilidade é determinada através do cálculo da potência do teste (1-β). A potência do teste é a probabilidade de rejeitar corretamente uma Ho falsa.

$$1 - \beta = p\left(t_9 > \frac{28.02 - 27.5}{1.767/\sqrt{10}}\right) \Rightarrow 1 - \beta = p(\,t_9 > 0.931) \Rightarrow 1 - \beta = 18.8\%$$



R: A probabilidade de se detetar um desvio de temperatura de +0.5ºC é de 18.8%.

2011/2012 – Época de Recurso – P1

i) Nesta alínea pretende-se saber se a diferença entre a percentagem de atletas femininas e a percentagem de atletas masculinos preparados para triunfar é superior a 5%. Na resolução desta alínea deve-se recorrer a um teste de hipótese paramétrico à diferença entre proporções binomiais (amostras de grande dimensão: NF=800 e NM= 1200).

Cálculo das proporções binomiais:

$\hat{P}_F$ → proporção de atletas femininas preparadas para triunfar

$$\hat{P}_F = \frac{450}{800} = 0.563$$

$\hat{P}_M$ → proporção de atletas masculinos preparadas para triunfar

$$\hat{P}_M = \frac{550}{1200} = 0.458$$

Definição das hipóteses:

Ho: P_F-P_M=0.05
H1: P_F-P_M>0.05

Estatística de teste:

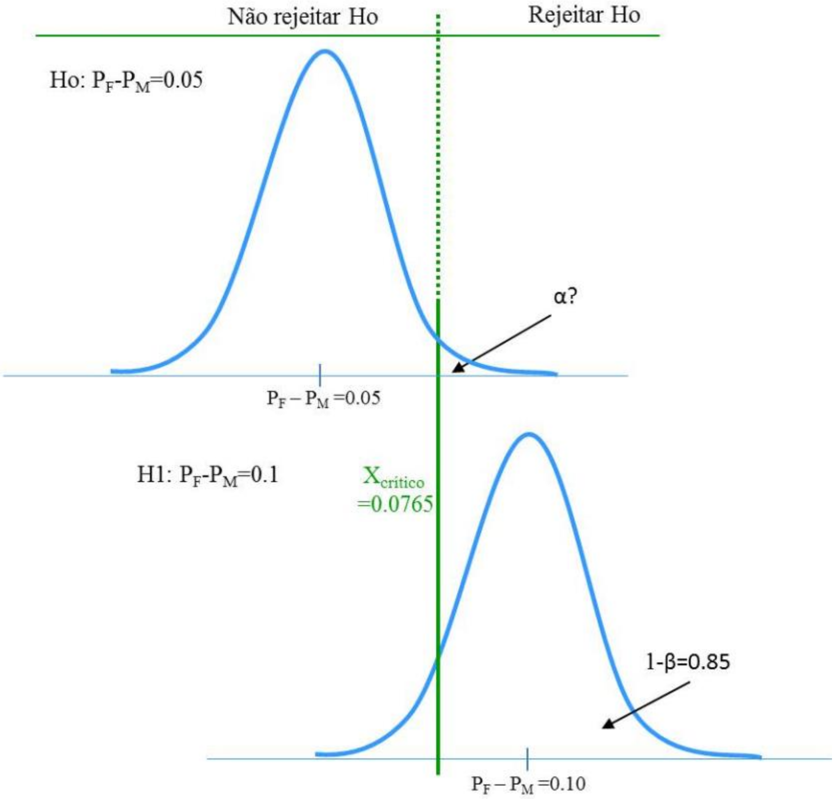
$$ET = \frac{(\widehat{P_F} - \widehat{P_M}) - \text{Po}}{\sqrt{\frac{\widehat{P_F}\ (1-\widehat{P_F})}{N_F} + \frac{\widehat{P_M}\ (1-\widehat{P_M})}{N_M}}} \sim N(0,1), \text{ quando Ho é verdadeira}$$

$$ET = \frac{(0.563-0.458)-0.05}{\sqrt{\frac{0.563\times0.438}{800} + \frac{0.458\times0.542}{1200}}} = \frac{0.0545}{0.0227} = 2.40 \quad > \quad \text{Valor crítico (VC)} \Rightarrow Z(\alpha=0.05)=1.645$$

Valor de prova → p = p(ET>2.40| Ho) ≈ 0.82%

R: Rejeita Ho. Há evidência estatística que permite concluir que a diferença entre a proporção de atletas femininas e a proporção de atletas masculinos preparados para triunfar é superior a 5%, a um nível de significância de 5%.

ii) Nesta alínea pretende-se determinar o nível de significância (α) a utilizar no teste anterior por forma a obter uma potência do teste (1-β) é de 85%, sabendo que a diferença entre a percentagem de atletas femininas e a percentagem de atletas masculinos preparados para triunfar é de 10%. A potência do teste é a probabilidade de rejeitar corretamente uma Ho falsa.



$$Z(1-\beta=0.85) \Rightarrow -1.035 = \frac{X_{\text{crítico}} - 0.10}{0.0227} \Rightarrow X_{\text{crítico}} = 0.0765$$

$$\alpha = p\left(Z > \frac{0.0765-0.05}{0.0227}\right) \Rightarrow \alpha = p(Z > 1.17) \Rightarrow \alpha \approx 12.10\%$$

R: O nível de significância a utilizar no teste anterior seria de aproximadamente 12%.

2013/2014 – Época Normal – P1

X: tempo de solidificação do betão vertido sem aditivo (horas)
Y: tempo de solidificação do betão vertido com aditivo (horas)

Dados amostrais:

$N_X = 12$	$\bar{x} = 7.083$	$s_X = 1.397$
$N_Y = 11$	$\bar{y} = 6.155$	$s_Y = 1.384$

i) Trata-se de um teste de localização relativa entre duas populações
Dada a dimensão das amostra opta-se pelo teste t, sendo necessário admitir que as duas populações seguem distribuições Normais já que não é válida a aplicação do TLC. Mantém-se o nível de significância do teste em 5%.

Formulação das hipóteses:

H_0: $\boldsymbol{\mu}_X = \boldsymbol{\mu}_Y$
H_1: $\boldsymbol{\mu}_X > \boldsymbol{\mu}_Y$

Identificação da ET e caracterização da sua distribuição:

Admitindo-se, em face do resultado do teste à razão de variâncias entre duas populações (ver cálculos mais abaixo), que as variâncias das duas populações são iguais, a estatística de teste será

$$ET = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - 0}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{N_X} + \frac{1}{N_Y}}}$$

com

$$S = \frac{(N_X - 1) \cdot S_X^2 + (N_Y - 1) \cdot S_Y^2}{N_X + N_Y - 2}$$

Quando H_0 é verdade, a distribuição de ET é

$$ET \sim t_{N_X + N_Y - 2}$$

Nível de significância do teste:

α = 5%

Regra de decisão:

H_0 será rejeitada se ET tomar um valor superior (teste unilateral à direita) ao valor crítico.

$$\text{valor crítico} = t_{21}(5\%) = 1.721$$

Alternativamente, H_0 será rejeitada se o valor de prova for inferior a α = 5%.

Cálculo de ET:

H_0 verdadeira $\Rightarrow ET \sim t_{23}$, vem

$$ET = \frac{(7.08 - 6.15)}{1.39 \times \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{11}}} = 1.60$$

$$\text{valor de prova} = P[ET > 1.60|H0] = 6.23\%$$

Decisão estatística:

Dado que ET não toma um valor mais extremo que o valor crítico $(ET = 1.60 < t_{21}(5\%) = 1.721)$, ou por o valor de prova ser superior ao nível de significância (p-value = $6.23\% > \alpha = 5\%$), a hipótese nula não é rejeitada.

O teste é assim inconclusivo, não existindo evidência estatística, a um nível de significância de 5%, que suporte a eficácia do aditivo na redução do tempo de solidificação do betão vertido.

Cálculo auxiliar — Teste à razão de variâncias entre duas populações

Necessário admitir que as duas populações seguem distribuições Normais.

Formulação das hipóteses:

H_0: $\sigma_X^2/\sigma_Y^2 = 1$
H_1: $\sigma_X^2/\sigma_Y^2 > 1$

Identificação da ET e caracterização da sua distribuição:

A estatística de teste será

$$ET = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Quando H_0 é verdade, a distribuição de ET é

$$ET \sim F_{N_X - 1,\, N_Y - 1}$$

Nível de significância do teste:

$\alpha = 5\%$

Regra de decisão:

H_0 será rejeitada se ET tomar um valor superior (teste unilateral à direita) ao valor crítico.

$$\text{valor crítico} = F_{11,10}(5\%) = 2.94$$

Alternativamente, H_0 será rejeitada se o valor de prova for inferior a $\alpha = 5\%$.

Cálculo de ET:

H_0 verdadeira $\Rightarrow ET \sim F_{11,10}$, vem

$$ET = \frac{1.397^2}{1.384^2} = 1.019$$

$$\text{valor de prova} = P[ET > 1.019 | H0] = 49.2\%$$

Decisão estatística:

Dado que ET não toma um valor mais extremo que o valor crítico ($ET = 1.019 < F_{11,10}(5\%) = 2.94$), ou por o valor de prova ser superior ao nível de significância (p-value $= 49.2\% > \alpha = 5\%$), a hipótese nula não é rejeitada.

O teste é assim inconclusivo, sendo razoável admitir que as variâncias das duas populações são iguais.

ii) Nesta situação as hipóteses são:

H_0: $\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y = 0$
H_1: $\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y = 45$ *minutos* = 0.75 *horas*

Admitindo que:
- as variâncias dos tempos de solidificação do betão vertido com e sem aditivo são conhecidas e idênticas (1.38^2);
- as dimensões das amostras são suficientemente grandes para que a aplicação do TLC seja válida (*N*);

Quando H_0 é verdadeira, temos que

$$ET = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - 0}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{N}}} \sim N(0, 1^2)$$

O valor crítico que define a região de rejeição para $\alpha = 5\%$ é

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y})_{crítico} - (\mu_X - \mu_Y)|H_0}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{N}}} = Z(5\%) = 1.645$$

Vindo

$$(\bar{X}-\bar{Y})_{crítico} = 1.645 \times 1.38 \cdot \sqrt{\frac{2}{N}} = \frac{3.210}{\sqrt{N}}$$

Quando H_1 prevalece $(\mu_X - \mu_Y) = 0.75$, vindo

$$1-\beta = 80\% = P\left[Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_X-\mu_Y)|H_1}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}}} \geq \frac{(\bar{X}-\bar{Y})_{crítico}-(\mu_X-\mu_Y)|H_1}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N}+\frac{1}{N}}} = \frac{\frac{3.210}{\sqrt{N}} - 0.75}{1.38 \cdot \sqrt{\frac{2}{N}}}\right]$$

Desenvolvendo a expressão anterior obtém-se

$$Z(80\%) = -0.842 \geq \frac{\frac{3.210}{\sqrt{N}} - 0.75}{\frac{1.952}{\sqrt{N}}}$$

vindo

$$\frac{3.210}{\sqrt{N}} + \frac{0.842 \times 1.95}{\sqrt{N}} = \frac{4.853}{\sqrt{N}} \leq 0.75$$

$$N \geq \left(\frac{4.853}{0.75}\right)^2 = 6.47^2 = 41.9 \rightarrow N = 42$$

O valor obtido para a dimensão das amostras é suficientemente grande para que a aplicação do TLC seja válida, pelo que as amostras a recolher deverão ter dimensão igual (ou superior) a 42.

2014/2015 – Época Normal – P1

X: peso de uma rolha de cortiça para garrafas de vinho do porto (g)

Estatísticas amostrais: $N = 20$ $\bar{x} = 5{,}4\ g$ $s = 1.006\ g$

i) Trata-se de um teste de localização.
Dada a dimensão da amostra ($N = 20$) opta-se pelo teste *t*, sendo necessário admitir que o peso das rolhas de cortiça segue uma distribuição Normal já que não é válida a aplicação do TLC.

Formulação das hipóteses:
$H_0: \mu = 5{,}7\ g$
$H_1: \mu \neq 5{,}7\ g$

Identificação da ET e caracterização da sua distribuição:

$$ET = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$$

Quando H_0 é verdade, ET segue um distribuição *t* de *Student* com $N-1$ graus de liberdade, $ET \sim t_{N-1}$

Regra de decisão:
Para um nível de significância $\alpha = 5\%$, H_0 será rejeitada se ET tomar um valor mais extremo (teste bilateral) do que qualquer um dos valores críticos, $-X_C$ e $+X_C$ (alternativamente, H_0 será rejeitada se o valor de prova for inferior a α = 5%):

$$X_C = t_{N-1}(\alpha/2) = t_{19}(2{,}5\%) = 2{,}09.$$

Cálculo de ET:

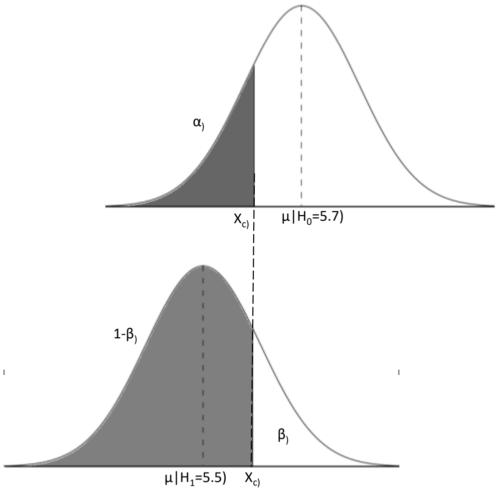
$$ET = \frac{5{,}35 - 5{,}7}{\frac{1{,}006}{\sqrt{N}}} = -1.56$$

$$\text{valor de prova} = 2 \times P[ET < -1{,}56|H0] = 2 \times 6{,}76\% = 13{,}51\%$$

Decisão estatística:

Dado que ET não toma um valor mais extremo que qualquer um dos valores críticos ($-X_C = -2{,}09 < ET = -1{,}56 < X_C = 2{,}09$), ou por o valor de prova ser superior ao nível de significância ($\text{valor de prova} = 13.51\% > \alpha = 5\%$), a hipótese nula não é rejeitada.

O teste é assim inconclusivo, não existindo evidência estatística, a um nível de significância de 5%, que indique que o peso das rolhas de cortiça tenha sofrido alterações recentemente.



ii) Agora as hipóteses são:

$$H_0: \mu = 5{,}7\ g$$
$$H_1: \mu = 5{,}5\ g$$

Continuando-se a admitir que o peso das rolhas de cortiça segue uma distribuição Normal. A estatística de teste continua a seguir uma distribuição *t* de *Student*, $ET \frown t_{N-1}$.

Nota: sugere-se o desenho das distribuições de X quando H_0 e H_1 são verdade como forma de visualizar e melhor perceber os vários passos da resolução (ver figura ao lado).

Nesta situação sabe-se que o verdadeiro valor de μ é 5,5 g e pretende-se garantir que a potência do teste, $1 - \beta$, seja, no mínimo, 70%. Logo,

$$1 - \beta = P\left[\frac{X - \mu|H_1}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \geq \frac{X_C - \mu|H_1}{\frac{s}{\sqrt{N}}}\right] = P\left[Z \geq \frac{X_C - 5{,}5}{\frac{1{,}006}{\sqrt{20}}}\right] = 70\%$$

De onde se retira que,

$$\frac{X_C - 5{,}5}{\frac{1{,}006}{\sqrt{20}}} = t_{19}(1 - 70\%) = 0{,}533$$

Vindo o valor crítico que define a região de rejeição

$$X_C = 5{,}5 + 0{,}533 \times \frac{1{,}006}{\sqrt{20}} = 5{,}62\ g$$

O nível de significância, α, é então obtido pela seguinte probabilidade

$$\alpha = P\left[\frac{X - \mu|H_0}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \leq \frac{X_C - \mu|H_0}{\frac{s}{\sqrt{N}}}\right] = P\left[Z \leq \frac{5{,}62 - 5{,}7}{\frac{1{,}006}{\sqrt{20}}}\right] = P(Z \leq -0{,}356) = 36{,}30\%$$