TSP

Bianca-Mihaela Stan, grupa 232

March 2021

1 TSP - 2p

1) Fie varianta TSP unde toate muchiile au ponderea 1 sau 2.
a) arătați ca problema ramane NP-hard pentru aceste instanțe (1p)

Presupunem ca TSP nu este NP-hard pentru un graf cu muchii de ponderi 1 sau 2.
Fie un graf G oarecare pe care vrem sa rezolvam Hamiltonian Cycle Problem. Din graful G construiesc G' astfel incat toate muchiile din G se gasesc in G' cu costul 1. Adaug muchii in G' pana cand acesta devine graf complet, iar ponderea fiecarei muchii adaugate va fi 2.
Am presupus ca TSP pe aceasta instanta nu este NP-hard. Daca graful initial G avea un ciclu hamiltonian, atunci ciclul hamiltonian de cost minim pe G' o sa aiba costul n. In schimb, daca graful G nu avea un ciclu hamiltonian, ciclul hamiltonian de cost minim pe G' o sa aiba costul cel putin n+1.
Astfel, prin faptul ca TCP pe acest tip de graf nu este NP-hard, inseamna ca nici HC-P nu este NP-hard.
Stim ca HC-P este NP completa => NP=P

Cum P=NP se presupune a fi falsa, desi nu a fost demonstrata, inseamna ca TSP este NP-hard si in contextul unui graf doar cu ponderi 1 si 2.

b) arătați ca aceste ponderi satisfac în continuare inegalitatea triunghiului. (0p)

Avem 4 cazuri:

- toate 3 laturile triunghiului de lungime 1
$$1 \leq 1 + 1$$
- 2 laturi de lungime 1, o latura de lungime 2
$$1 \leq 1 + 2, 2 \leq 1 + 1$$
- 1 latura de lungime 1, 2 laturi de lungime 2
$$1 \leq 2 + 2, 2 \leq 1 + 2$$
- toate laturile de lungime 2
$$2 \leq 2 + 2$$

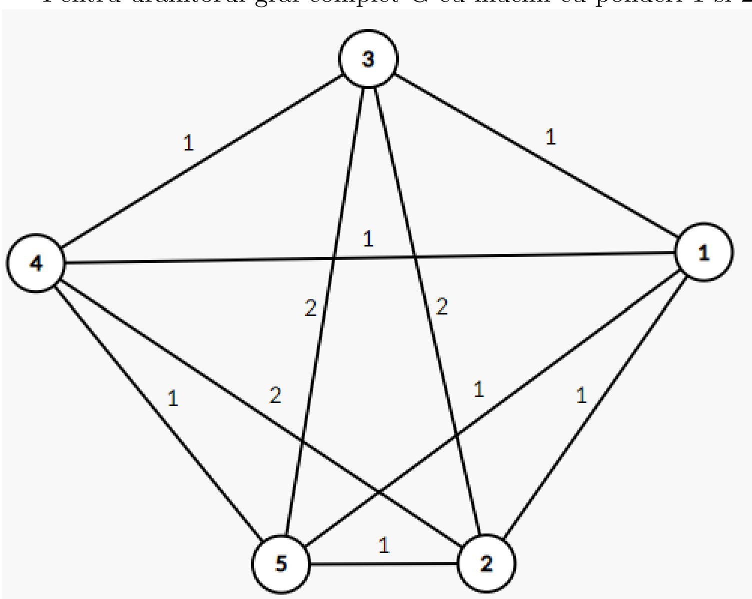
c) Algoritmul descris în curs (c3, slides 18-19) oferă o aproximare de ordin 2 pentru forma generala a TSP (cu regula triunghiului). Verificati daca in aceasta instanța a problemei, algoritmul din curs este 3/2 aproximativ! (1p)

Reamintim algoritmul:

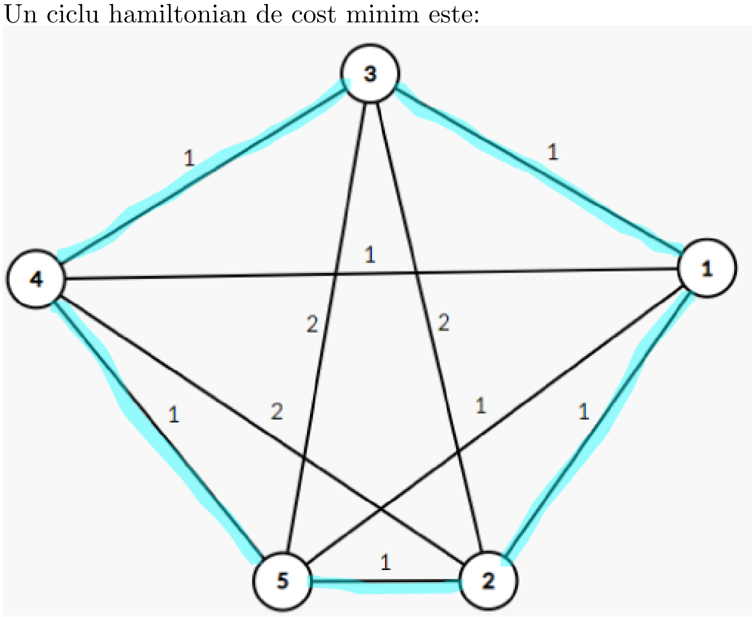
```
parcurgere(u, M):
    concatenam u la M
    pentru fiecare v fiu al lui u:
        parcurgere(v, M)

aprox_TSP(G):
    calculam MST-ul T al lui G
    alegem un nod u din T drept radacina
    luam o multime M = multimea vida
    parcurgere(u, M)
    concatenam u la finalul lui M pentru a inchide ciclul
    return M
```

Vom da un contraexemplu.

Pentru uramtorul graf complet G cu muchii cu ponderi 1 si 2:

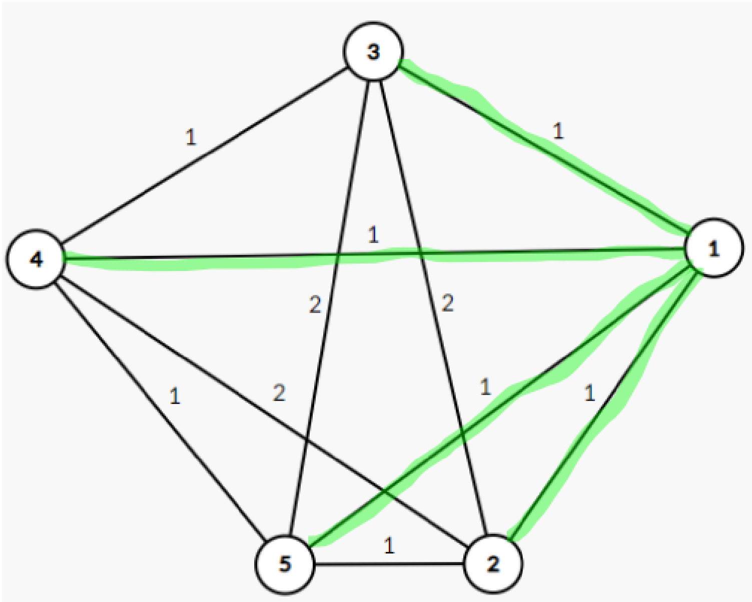


Un ciclu hamiltonian de cost minim este:

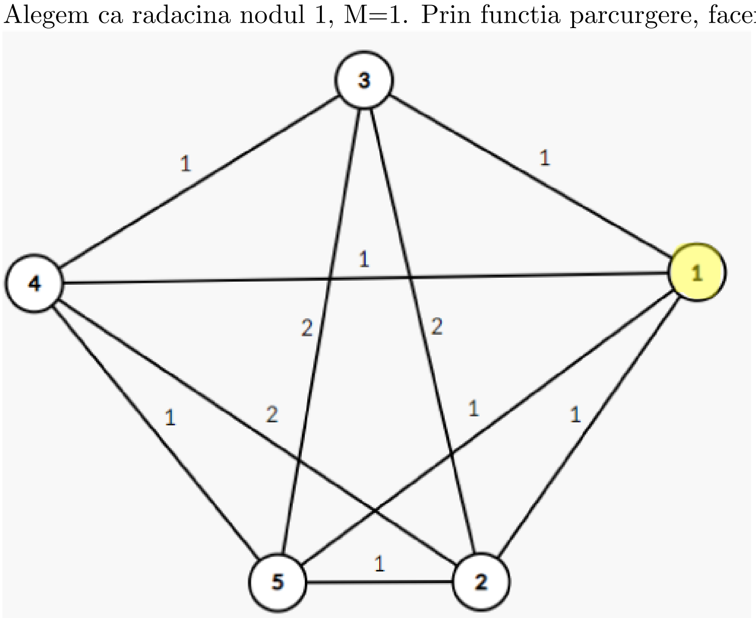


Iar lungimea sa este 5. Pentru a demostra ca algoritmul nostru nu este $\frac{3}{2}$-aproximativ trebuie sa demonstram ca poate gasi un ciclu hamiltonian de cost minim cu costul mai mare decat $\frac{3}{2} * OPT(G) = \frac{3}{2} * 5 = 7,5$.

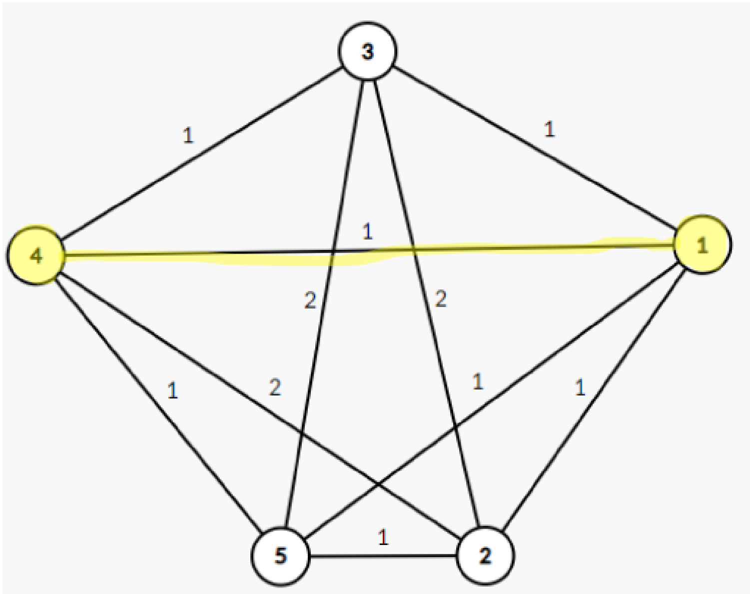
Primul pas al algoritmului spunea sa gasim un MST. Algoritmul nostru gaseste MST-ul:



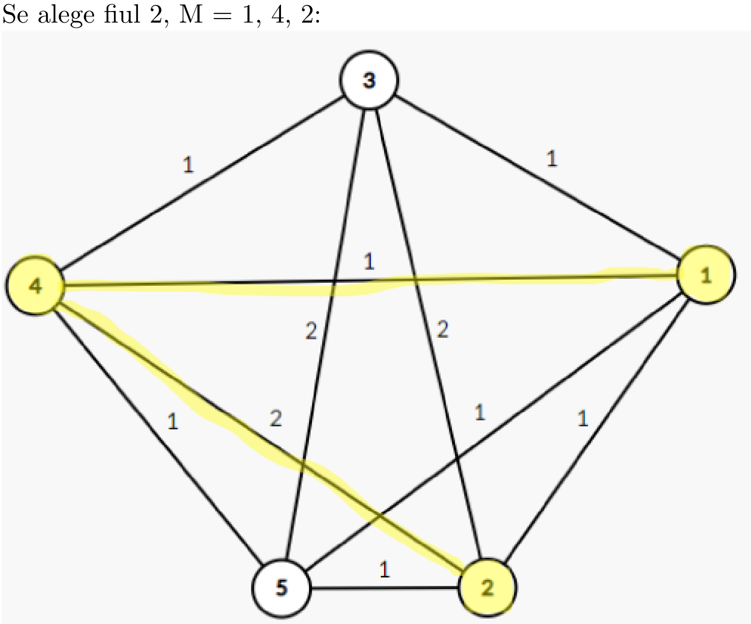
Alegem ca radacina nodul 1, M=1. Prin functia parcurgere, facem urmatoarea parcurgere:



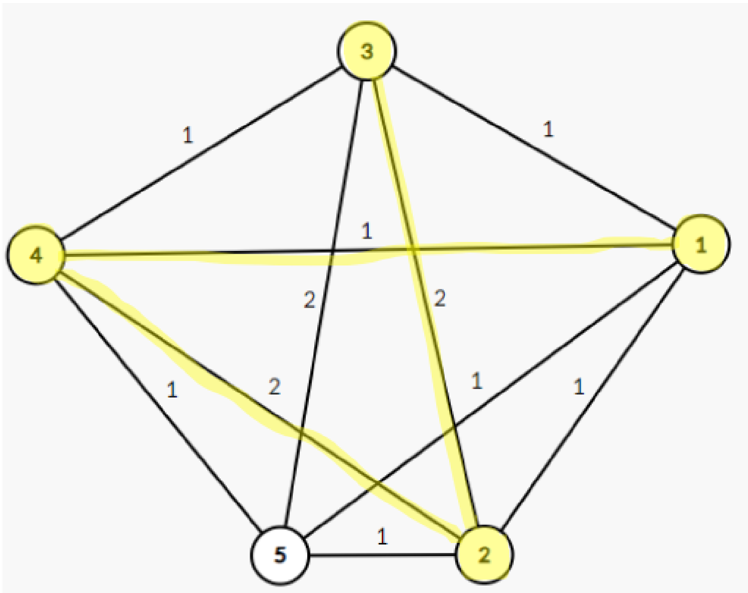
Se alege fiul 4, M= 1, 4:



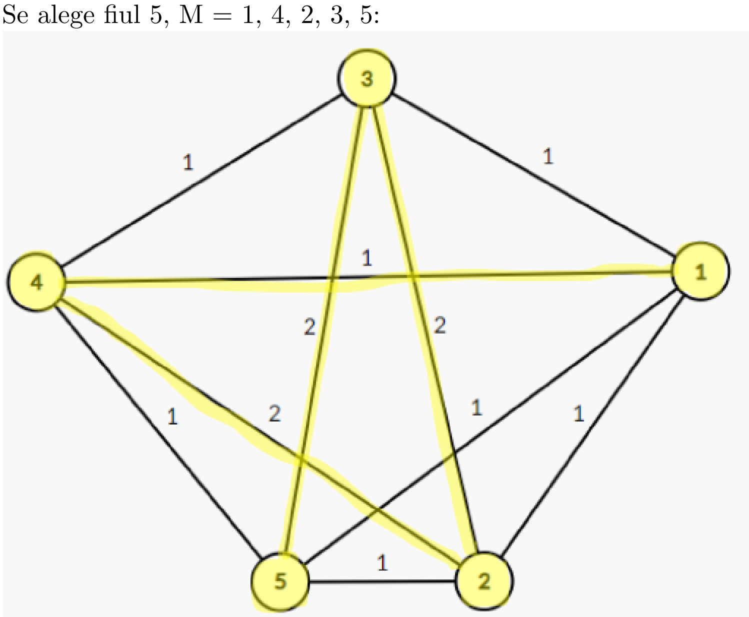
Se alege fiul 2, M = 1, 4, 2:



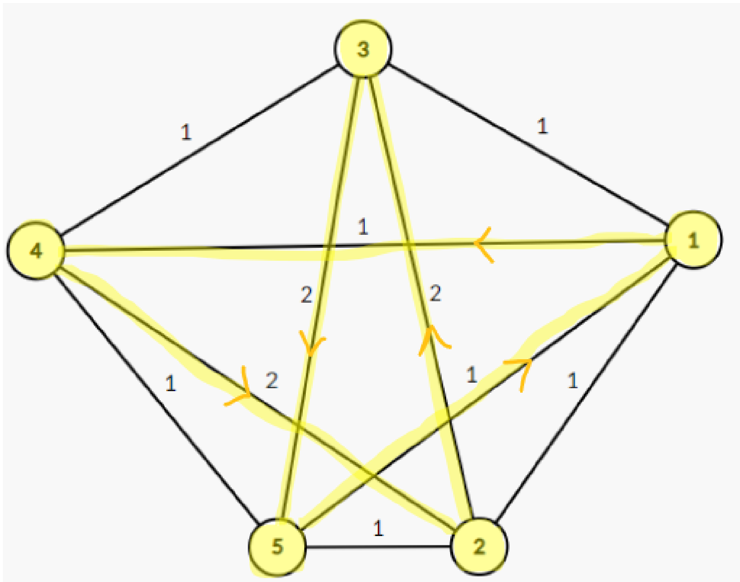
Se alege fiul 3, M = 1, 4, 2, 3:



Se alege fiul 5, M = 1, 4, 2, 3, 5:



Se agauga 1 in multime pentru a inchide ciclul, M = 1, 4, 2, 3, 5, 1:



Astfel, lungimea ciclului hamiltonian de cost minim gasit de algoritmul nostru este: ALG=8.

$$8 > 7,5 => ALG(G) > \frac{3}{2} * OPT(G)$$

Deci algoritmul nostru nu este $\frac{3}{2}$-aproximativ.