

Algoritmi avansați

Seminar 5 (săpt. 9 și 10)

1. Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

- a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătați că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare și pentru a astfel determinat calculați raportul $r(A, B, C)$.
- b) Determinați punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.
- c) Dați exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ și $r(A, Q, B) < 0$.

Soluție.

a) Condiția de coliniaritate a punctelor A, B, C este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{BC} . Au loc relațiile:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (a - 4, 2, 2).$$

Vectorii dați sunt proporționali dacă și numai dacă $a - 4 = 2$, deci $a = 6$. De fapt, dreapta AB este direcționată de vectorul $(1, 1, 1)$ (și de orice vector proporțional cu acesta).

În acest caz, avem $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 2, 2)$, deci

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC},$$

adică $r(A, B, C) = \frac{3}{2}$ (raportul $r(A, B, C)$ este acel scalar r pentru care are loc relația $\overrightarrow{AB} = r \overrightarrow{BC}$).

b) Condiția $r(A, P, B) = 1$ este echivalentă cu $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Punctul P care verifică această condiție este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

c) Semnele rapoartelor indică faptul că (i) B nu este între A și Q ; (ii) Q nu este între A și B . Trebuie deci ca A să fie situat între Q și B . Un astfel de punct este $Q = (0, 1, 2)$ (l-am ales ca fiind $A - (1, 1, 1)$). Au loc relațiile

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BQ} = (-4, -4, -4), \quad r(A, B, Q) = -\frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-1, -1, -1), \quad \overrightarrow{QB} = (4, 4, 4), \quad r(A, Q, B) = -\frac{1}{4},$$

deci sunt verificate cerințele din enunț.

2. Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

- a) Calculați valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată \overrightarrow{PQ} și punctul de testare $O = (0, 0)$.
- b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

Soluție.

a) Conform teoriei,

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

În exemplu avem:

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \text{ (dezvoltare după ultima coloană)}.$$

Se poate verifica și pe un desen că O este la stânga muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

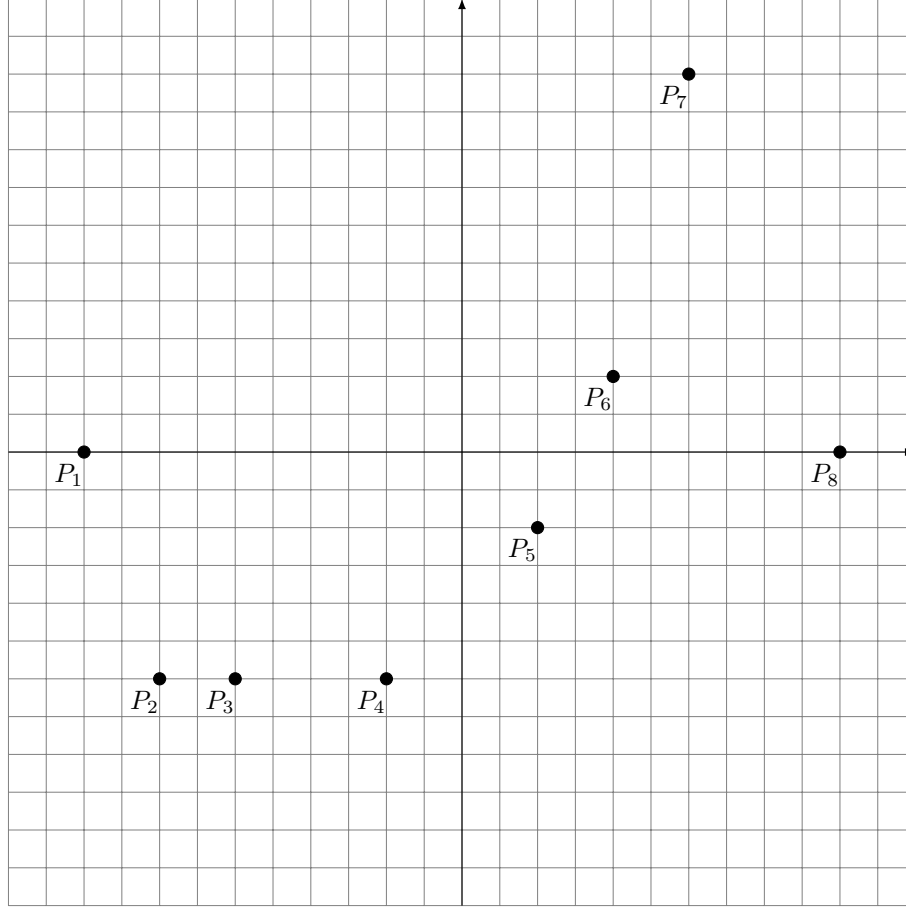
b) Calculăm, pentru un α , valoarea $\Delta(P, Q, R_\alpha)$:

$$\Delta(P, Q, R_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix} = 6(1 - \alpha).$$

Punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R_\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Acest lucru poate fi verificat și pe desen, punctul R_α este variabil pe cea de-a doua bisectoare (de ecuație $x + y = 0$), iar pentru $\alpha > 1$ acest punct este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

3. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, unde $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (-4, -3)$, $P_3 = (-3, -3)$, $P_4 = (-1, -3)$, $P_5 = (1, -1)$, $P_6 = (2, 1)$, $P_7 = (3, 5)$, $P_8 = (5, 0)$. Detaliați cum evoluează lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.

Soluție.



Lista \mathcal{L}_i evoluează astfel:

P_1P_2

$P_1P_2P_3$

$P_1P_2\textcolor{red}{P}_3P_4$ // este eliminat P_3 , deoarece P_2, P_3, P_4 coliniare (nu viraj la stânga)

$P_1P_2P_4$

$P_1P_2P_4P_5$

$P_1P_2P_4P_5P_6$

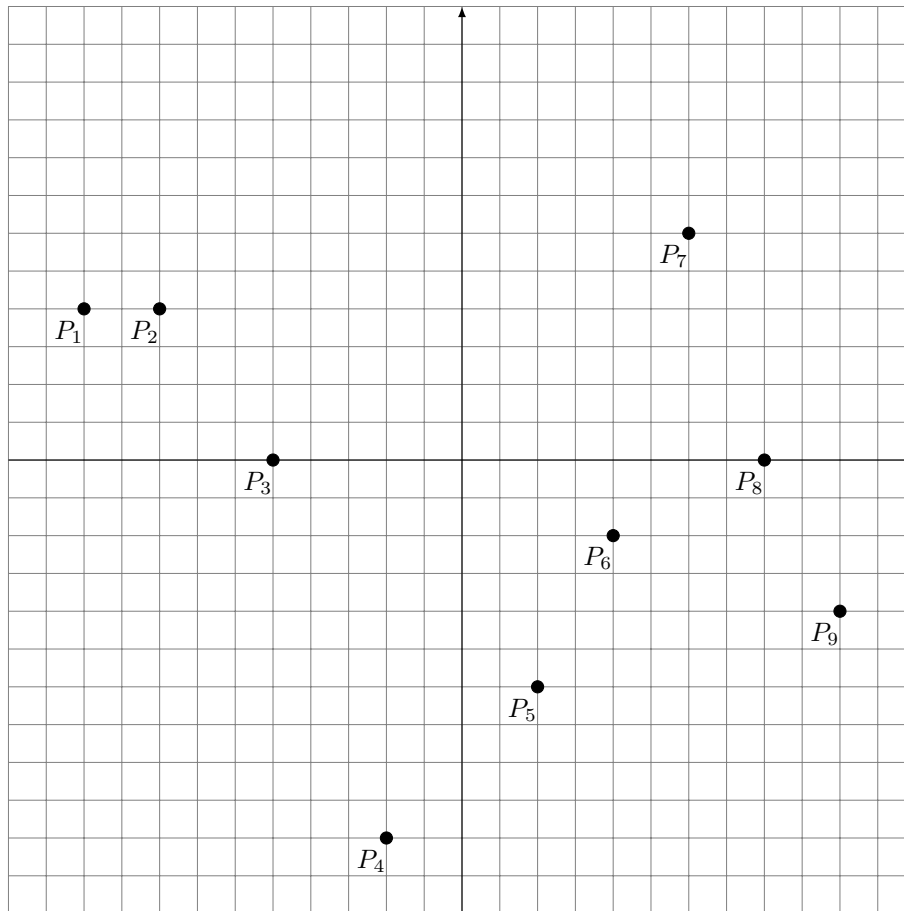
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7$

$P_1P_2P_4\textcolor{red}{P}_5\textcolor{red}{P}_6\textcolor{red}{P}_7P_8$ // punctele P_7, P_6, P_5 sunt eliminate în această ordine

$P_1P_2P_4P_8$ // lista finală (\mathcal{L}_i) a vârfurilor care determină marginea inferioară

4. Dați un exemplu de mulțime \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 pentru care, la final, \mathcal{L}_i are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui \mathcal{L}_i este egal cu 6 (\mathcal{L}_i este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificați!

Soluție.



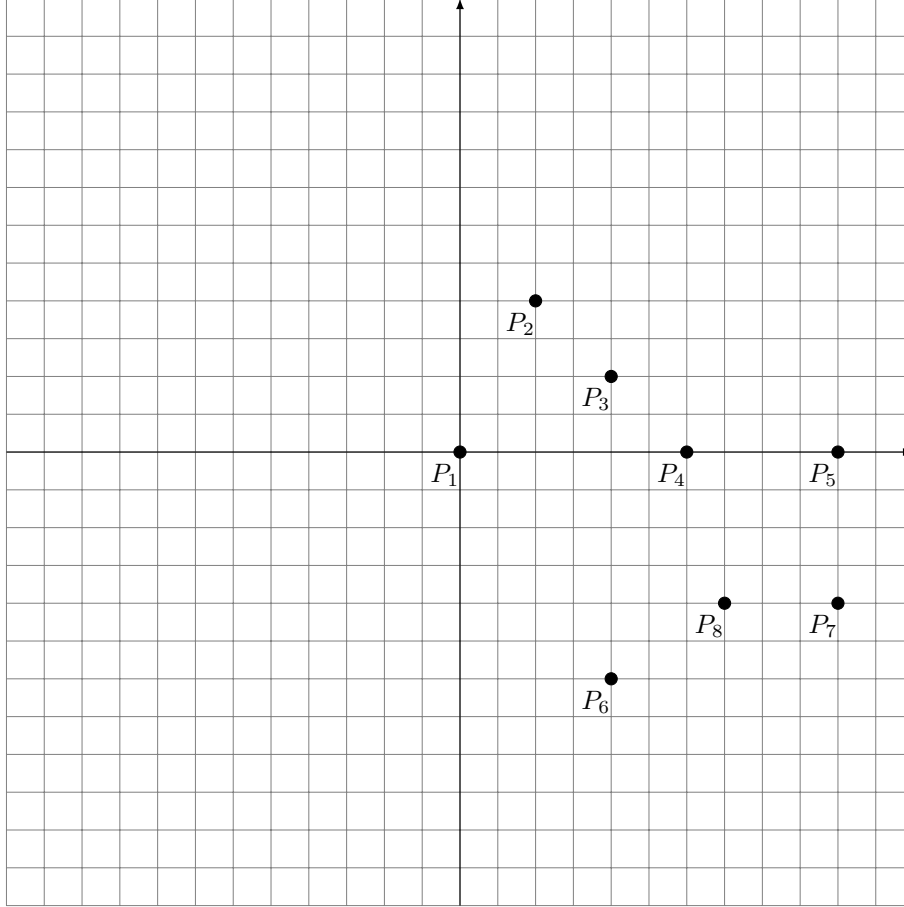
Lista \mathcal{L}_i are la final 3 elemente (P_1, P_4, P_9).

Numărul maxim de elemente este 6: $P_1P_4P_5P_6P_7P_8$ (la adăugarea lui P_8 în listă).

Obs. Numărul maxim de elemente după verificări ale virajelor este 5: $P_1P_4P_5P_6P_7$.

5. Fie mulțimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 2)$, $P_3 = (2, 1)$, $P_4 = (3, 0)$, $P_5 = (5, 0)$, $P_6 = (2, -3)$, $P_7 = (5, -2)$. Indicați testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} , parcursă în sens trigonometric (drept pivot inițial va fi considerat P_2).

Soluție.



Pentru a găsi succesorul lui P_1 este adăugat pivotul P_2 (S cu notația din suportul de curs). Punctele sunt apoi testate, iar dacă un punct P este la dreapta muchiei orientate P_1S , punctul P devine noul pivot.

Punctul P_3 : este în dreapta muchiei P_1P_2 , deci pivotul P_2 este înlocuit cu P_3 .

Punctul P_4 : este în dreapta muchiei P_1P_3 , deci pivotul P_3 este înlocuit cu P_4 .

Punctul P_5 : nu este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 rămâne.

Punctul P_6 : este în dreapta muchiei P_1P_4 , deci pivotul P_4 este înlocuit cu P_6 .

Punctul P_7 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Punctul P_8 : nu este în dreapta muchiei P_1P_6 , deci pivotul P_6 rămâne.

Au fost parcurse toate punctele. Ultimul pivot (P_6) este succesorul lui P_1 în parcurgerea frontierei acoperirii convexe a mulțimii date în sens trigonometric.

6. *Discutați un algoritm bazat pe paradigma Divide et impera pentru determinarea acoperirii convexe. Analizați complexitatea-timp.*

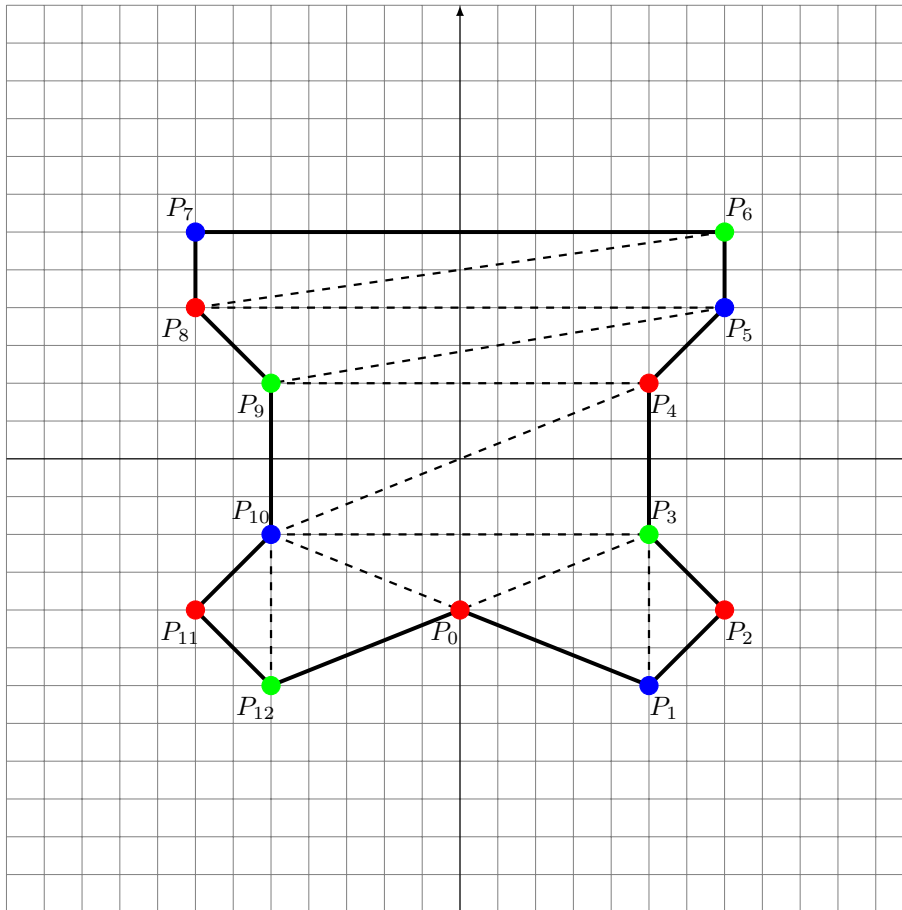
Soluție. Complexitatea-timp este $O(n \log n)$. O descriere a algoritmului și a analizei complexității poate fi găsită în [survey-ul \[Lee & Preparata, 1984\]](#).

Algoritmi avansați

Seminar 6 (săpt. 11 și 12)

1. Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2 \dots P_{12}$, unde $P_0 = (0, -2)$, $P_1 = (5, -6)$, $P_2 = (7, -4)$, $P_3 = (5, -2)$, $P_4 = (5, 2)$, $P_5 = (7, 4)$, $P_6 = (7, 6)$ iar punctele P_7, \dots, P_{12} sunt respectiv simetricele punctelor P_6, \dots, P_1 față de axa Oy .

Soluție. În figură sunt reprezentate o posibilă triangulare și 3-colorarea asociată - există și alte variante corecte.



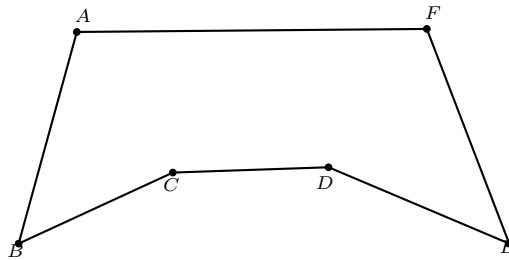
2. Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătați că Teorema Gale-riei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, așa încât, aplicând metoda din teoremă și mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare și suficiente două camere pentru supravegherea unei galerii având forma poligonului \mathcal{P} .

Soluție. Poligonul este un hexagon convex, deci pentru triangularea sa vor fi folosite $3 \cdot 6 - 6 - 3 = 9$ muchii. Aceasta înseamnă că vom trasa 3 diagonale. Sunt posibile două situații: (a) cele trei diagonale au un vârf comun; (b) nu există un vârf comun al celor trei diagonale (acest lucru se poate demonstra trasând una dintre diagonale și apoi raționând inductiv - este esențial că poligonul este un hexagon convex). În cazul (a) este suficientă o cameră, iar în cazul (b) 3-colorarea indică utilizarea a două camere.



3. Dați exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât și concave și toate să fie principale.

Soluție. În figură este desenat un poligon cu 4 vârfuri convexe și 2 vârfuri concave. Pot fi luate în considerare și alte variante (de exemplu cu un singur vârf concav, cu doar 3 vârfuri convexe, etc.).



4. Fie $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

Soluție. Trebuie stabilite mai întâi numărul de puncte n și numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe k (atenție la numărarea punctelor, nu trebuie numărat un punct de două ori...). Pe o schiță se observă că sunt în total 123 de puncte (punctele din mulțimile $\{A_i \mid i = 0, \dots, 50\}$, $\{B_i \mid i = 0, \dots, 40\}$, respectiv $\{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$ sunt diferite între ele). Obținem $n = 123$, $k = 3$, apoi aplicăm formulele pentru determinarea numărului de triunghiuri, respectiv a numărului de muchii.

$$n_t = 2n - k - 2 = 241, \quad n_m = 3n - k - 3 = 343.$$

5. Dați un exemplu de mulțime din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 6 triunghiuri și 11 muchii.

Soluție. Fie n numărul de puncte ale unei astfel de mulțimi și k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe. Au loc relațiile

$$\begin{cases} 2n - k - 2 = 6 \\ 3n - k - 3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem $n = 6$, $k = 4$, deci o astfel de mulțime are 6 puncte, din care 4 sunt situate pe frontiera acoperirii convexe.

Un posibil exemplu: $\{(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3), (1, 1), (3, 1)\}$.

6. În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Soluție. Trebuie analizată configurația punctelor P_1, P_2, \dots, P_6 și determinate numărul n de puncte și numărul k de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Punctele $P_1P_2P_3P_4P_5$ determină un pentagon convex. Punctul P_6 descrie o dreaptă paralelă cu Ox care trece prin punctul P_3 .

- Pentru $\alpha - 1 \leq 1$, adică $\alpha \in (-\infty, 2]$ punctul P_6 este situat în exteriorul sau pe laturile pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 1$ și $\alpha - 1 < 7$, adică $\alpha \in (2, 8)$ punctul P_6 este situat în interiorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 5$, deci 5 fețe și 10 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 = 7$, adică $\alpha \in \{8\}$ punctul P_6 coincide cu P_3 . Avem $n = 5$, $k = 5$, deci 3 fețe și 7 muchii.
- Pentru $\alpha - 1 > 7$, adică $\alpha \in (8, \infty)$ punctul P_6 este situat în exteriorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6$, $k = 6$, deci 4 fețe și 9 muchii.

7. Fie \mathcal{G} un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de fețe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3 . Demonstrați inegalitățile

$$v \leq \frac{2}{3}m, \quad m \leq 3v - 6$$

$$m \leq 3f - 6, \quad f \leq \frac{2}{3}m$$

$$v \leq 2f - 4, \quad f \leq 2v - 4$$

Dați exempluri de grafuri în care au loc egalități în relațiile de mai sus.

Algoritmi avansați

Seminar 7 (săpt. 13 și 14)

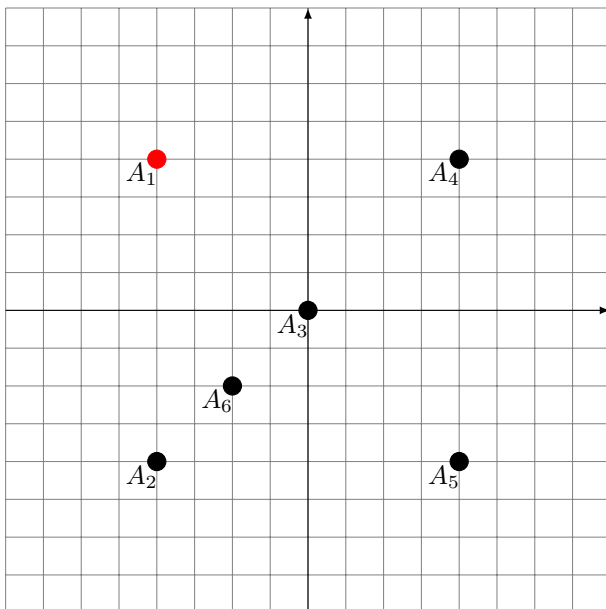
1. Dați exemplu de mulțime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din \mathbb{R}^2 astfel ca diagrama Voronoi asociată lui \mathcal{M} să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

Soluție. Numărul de semidrepte ale unei diagrame Voronoi este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Alegem mulțimea \mathcal{M} astfel ca A_1, A_2, A_3, A_4 să determine frontiera acoperirii convexe, iar pentru $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ toate punctele să fie situate pe frontiera acoperirii convexe.

În figură este indicată configurația punctelor, însă, întrucât în enunț se cere ca punctele să fie din \mathbb{R}^2 , le indicăm în coordonate. În exemplul ales $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 0)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-2, -2)$.

O altă soluție posibilă (în care punctele A_2, A_6, A_3, A_4 nu mai sunt coliniare, este $A_1 = (-4, 4)$, $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 3)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-3, 0)$ (verificați prin desen!).



2. a) Fie o mulțime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi \mathcal{D} asociată unei mulțimi cu cinci puncte din \mathbb{R}^2 știind că \mathcal{D} are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificați!

Soluție. a) Cum punctele nu sunt coliniare, diagrama Voronoi are muchii de tip segment și de tip semidreaptă. Se consideră un vârf suplimentar, notat v_∞ , prin care, prin convenție, trece fiecare muchie de tip semidreaptă. Se construiește un graf \mathcal{G} care are

- *vârfuri*: vârfurile diagramei Voronoi și vârful v_∞ (deci $n_v + 1$ vârfuri);
- *muchii*: muchiile diagramei Voronoi - fiecare unește exact două vârfuri ale lui \mathcal{G} (deci n_m muchii);
- *fețe*: în corespondență biunivocă cu siturile inițiale (deci n fețe).

Graful \mathcal{G} este un graf planar conex.

(i) Conform relației lui Euler avem

$$(n_v + 1) - n_m + n = 2.$$

(ii) Analizăm incidențele dintre muchii și vârfuri.

- fiecare muchie este incidentă cu exact două vârfuri;
- fiecare vârf (inclusiv v_∞) este incident cu cel puțin trei muchii;
- numărând incidențele în două moduri avem

$$2n_m \geq 3(n_v + 1).$$

Din (i) și din (ii) rezultă inegalitățile dorite.

Observație. Pentru ca relațiile din enunț să fie egalități este necesar și suficient ca fiecare vârf al lui \mathcal{G} să fie incident cu exact trei muchii. Aceasta înseamnă să nu existe grupuri de (cel puțin) patru puncte conciclice și pe frontiera acoperirii convexe a mulțimii de situri să fie exact trei situri.

b) Fie \mathcal{M} o mulțime ca în enunț. Diagrama Voronoi a lui \mathcal{M} are cinci semidrepte, deci toate cele cinci puncte ale lui \mathcal{M} sunt situate pe frontiera acoperirii convexe. În particular, conform observației anterioare, nu este posibil să fie atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5 = 5$). Mai mult, urmând pașii din raționament, observăm că, de fapt, $n_v \leq 3$. Sunt posibile trei situații:

- toate punctele sunt conciclice, $n_v = 1$,

- patru dintre puncte sunt conciclice, dar al cincilea nu este situat pe același cerc cu acestea, $n_v = 2$,
- oricare patru puncte nu sunt conciclice, $n_v = 3$.

3. Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii $\{O, A, B, C, D\}$.

Soluție. Numărul de muchii de tip semidreaptă este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe (le notăm cu m).

Punctul A este variabil pe axa Ox . Punctele O, B, C, D determină un pătrat și trebuie doar să stabilim, în funcție de α , poziția lui A față de acest pătrat. Distingem următoarele cazuri:

- $\alpha < 0$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt A, B, C, D);
- $\alpha = 0$: avem $A = O$, deci $m = 4$;
- $0 < \alpha < 2$: punctul A este situat în interiorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, C, D);
- $\alpha = 2$: avem $A = C$, deci $m = 4$;
- $\alpha > 2$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ și avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, D, A).

4. (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeți două drepte distincte d, g care trec prin A , determinați dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* este dreapta determinată de punctele d^* și g^* .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

Soluție. a) Conform teoriei, pentru un punct $p = (p_x, p_y)$ se definește dreapta $p^* : (y = p_x x - p_y)$ (duala lui p), iar pentru o dreaptă neverticală $d : (y = mx + n)$, se definește punctul $d^* = (m, -n)$ (dualul lui d).

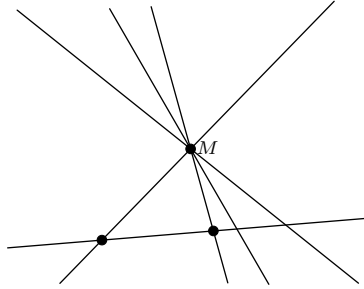
Alegem dreptele $d : (y = 2x)$ și $g : (y = -x + 3)$. Avem:

$$A^* : (y = x - 2), \quad d^* = (2, 0), \quad g^* = (-1, -3).$$

Se verifică imediat că punctele d^* și g^* determină dreapta A^* .

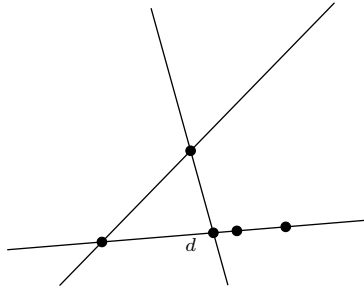
b) Configurația inițială:

Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte.



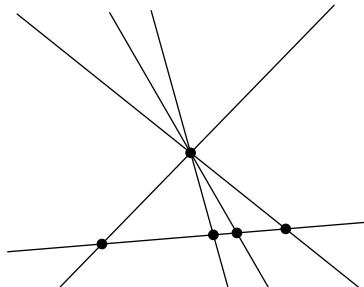
Configurația duală:

Fie patru puncte situate pe o aceeași dreaptă d . Se aleg două dintre ele; prin fiecare din aceste două puncte se consideră câte o dreaptă diferită de d și se consideră punctul de intersecție al acestor două drepte.



Configurația completată (astfel ca să fie autoduală):

Fie patru drepte care trec printr-un același punct. Pe fiecare dreaptă se alege câte un punct diferit de punctul comun, astfel ca aceste patru puncte să fie coliniare și se consideră dreapta determinată de aceste patru puncte.



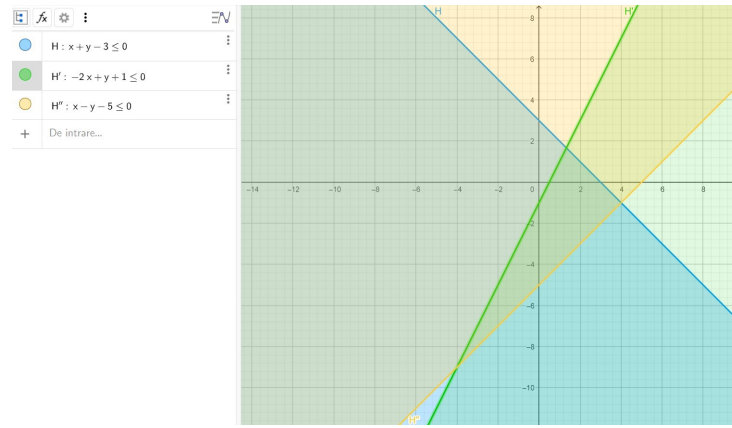
5. a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ și $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Dați exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecția $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

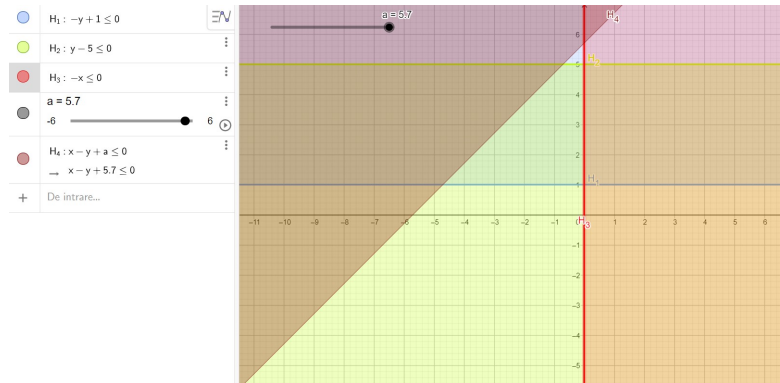
unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul a , natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

Soluție. a) Alegem semiplanul $H'' : x - y - 5 \leq 0$. Dreapta suport $x - y - 5 = 0$ este perpendiculară pe dreapta suport a lui H , $x + y - 3 = 0$. Intersecția semiplanelor este un triunghi (cf. figură, se pot determina vârfurile acestuia), deci H'' verifică cerințele din enunț.

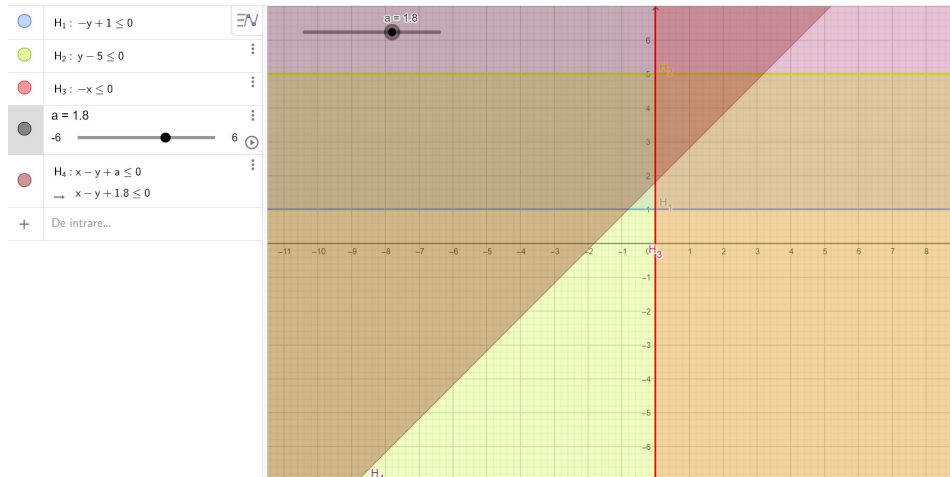


b) Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ este o mulțime convexă nemărginită delimitată de dreptele $y = 1$, $y = 5$, respectiv $x = 0$. Vârfurile relevante sunt punctele $(0, 1)$ și $(0, 5)$.

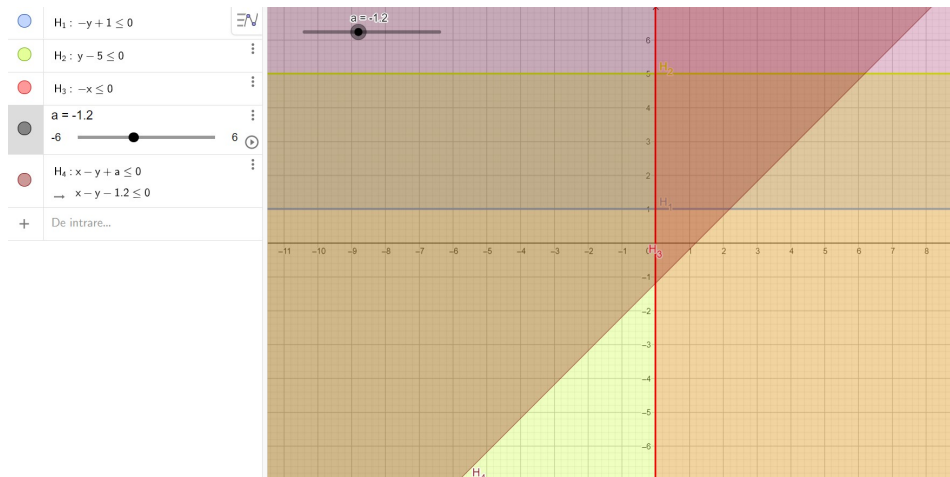
- Pentru $a > 5$ se obține $0 \geq x - y + a > x - y + 5 \geq 0$ (deoarece $x \geq 0$ și $-y + 5 \geq 0$), contradicție. În acest caz intersecția este mulțimea vidă.



- Pentru $a = 5$ se obține punctul $(0, 5)$.
- Pentru $1 \leq a < 5$ se obține un triunghi având unul dintre vârfuri $(0, 5)$, un vârf la intersecția dintre dreptele $x = 0$ și $x - y + a = 0$ și un vârf la intersecția dintre dreptele $y = 5$ și $x - y + a = 0$. Pentru $a = 1$ punctul $(0, 1)$ este vârf al acestui triunghi.



- Pentru $a < 1$ se obține un trapez. Laturile sale au ca drepte suport exact dreptele suport ale celor patru semiplane.



6. Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

Soluție. Conform teoriei, dacă normala exterioară a unei fețe f este coliniară cu un vector $\vec{v}_f = (a, b, c)$, semiplanul corespunzător feței f este

$$ax + by + c \leq 0.$$

Se ajunge la inegalitățile

$$\begin{array}{rcl} y - 1 & \leq & 0 \\ y & \leq & 0 \\ -1 & \leq & 0 \\ -y & \leq & 0 \\ -y - 1 & \leq & 0 \end{array}$$

Acest sistem este compatibil, admitând soluția $y = 0$.

Notă. Ca în exemplul de la curs, am făcut abstracție de componenta x .

7. (Suplimentar) Demonstrați că arborele parțial de cost minim al lui \mathcal{P} este un subgraf al triangulării Delaunay.

Soluție. D. Mount, *Computational Geometry*, pag. 75.