

Algoritmi avansați

C8 - Acoperiri convexe

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Introducere

Criterii numerice. Raport și test de orientare

Acoperiri convexe

Introducere

- Algoritmii geometrici sunt legați de Geometria Computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]

Introducere

- ▶ Algoritmii geometrici sunt legați de Geometria Computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- ▶ Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

Introducere

- ▶ Algoritmii geometrici sunt legați de Geometria Computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- ▶ Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- ▶ Complexitatea: memorie, timp, calcule

Introducere

- ▶ Algoritmii geometrici sunt legați de Geometria Computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- ▶ Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- ▶ Complexitatea: memorie, timp, calcule
- ▶ Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.

Introducere

- ▶ Algoritmii geometrici sunt legați de Geometria Computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- ▶ Problemă (exemplu):



Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?

- ▶ Complexitatea: memorie, timp, calcule
- ▶ Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.
- ▶ Tehnici utilizate: construcții incrementale, divide et impera, plane-sweep, transformări geometrice, etc.

Introducere

- ▶ Note istorice:

Introducere

- ▶ Note istorice:
 - ▶ Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași:
Elementele lui Euclid

Introducere

- ▶ Note istorice:
 - ▶ Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: [Elementele lui Euclid](#)
 - ▶ Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)

Introducere

▶ Note istorice:

- ▶ Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: [Elementele lui Euclid](#)
- ▶ Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
- ▶ “Simplicitatea” construcțiilor geometrice: Lemoine (~ 1900)

Introducere

- ▶ Note istorice:
 - ▶ Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: [Elementele lui Euclid](#)
 - ▶ Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
 - ▶ [“Simplicitatea” construcțiilor geometrice](#): Lemoine (~ 1900)
 - ▶ a doua jumătate a sec. XX: formularea / rezolvarea unor probleme de GC; în 1975 este folosit prima dată termenul de *Computational Geometry* (M.I. Shamos, “Geometric Complexity”, Proc. 7th ACM Annual Symposium on Theory of Computing)

Introducere

- ▶ Note istorice:
 - ▶ Ideea de construcție geometrică realizată într-un număr finit de pași: [Elementele lui Euclid](#)
 - ▶ Abordare numerică - sistem de coordonate în plan: Descartes (sec. XVII)
 - ▶ [“Simplicitatea” construcțiilor geometrice](#): Lemoine (~ 1900)
 - ▶ a doua jumătate a sec. XX: formularea / rezolvarea unor probleme de GC; în 1975 este folosit prima dată termenul de *Computational Geometry* (M.I. Shamos, “Geometric Complexity”, Proc. 7th ACM Annual Symposium on Theory of Computing)
- ▶ Domenii de aplicabilitate: grafică pe calculator, pattern recognition, robotică, statistică, gestionarea bazelor de date numerice, cercetări operaționale

Bibliografie

- ▶ M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
(Site: <http://www.cs.uu.nl/geobook/>)
- ▶ F. Preparata si M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.
- ▶ S. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.
(Site: <http://cs.smith.edu/~orourke/DCG/>)

Bibliografie

- ▶ M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
(Site: <http://www.cs.uu.nl/geobook/>)
- ▶ F. Preparata si M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.
- ▶ S. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.
(Site: <http://cs.smith.edu/~orourke/DCG/>)
- ▶ D. Lee, F. Preparata, *Computational Geometry - A Survey*, IEEE Transactions on Computers, **33** (1984), 1072-1101.
- ▶ B. Gärtner, M. Hoffmann, *Computational Geometry. Lecture Notes*, ETH Zürich, 2013.

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
 - ▶ raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)

Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
 - ▶ raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- ▶ **Context 2D**

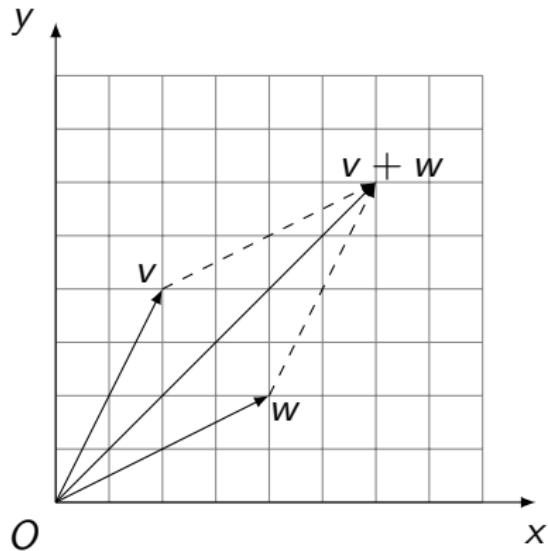
Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
 - ▶ raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- ▶ **Context 2D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate** – posibile alegeri: coordonate carteziene, coordonate polare)

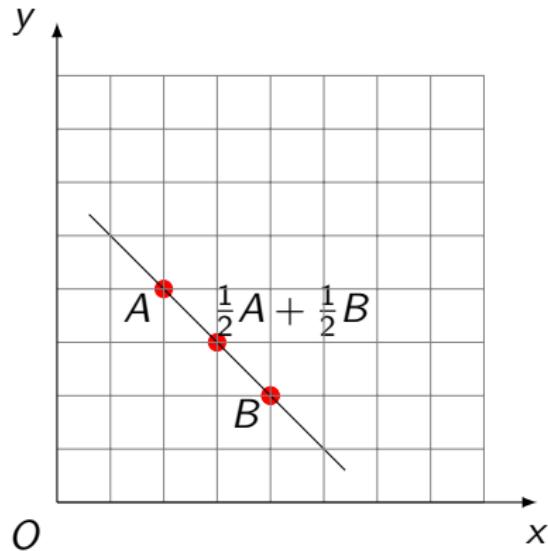
Criterii numerice – poziția relativă a unor puncte

- ▶ Stabilirea unor relații între puncte / ordonare
- ▶ **Context 1D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate**)
 - ▶ raport (**independent de alegerea unui sistem de coordonate**)
- ▶ **Context 2D**
 - ▶ ordonare (**relativ la un sistem de coordonate** – posibile alegeri: coordonate carteziene, coordonate polare)
 - ▶ testul de orientare (**independent de alegerea unui sistem cartezian de coordonate**)

Vectori și puncte



Combinații liniare
 $\alpha v + \beta w$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)



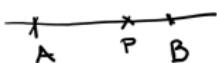
Combinații afine
 $\lambda A + \mu B$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și $\lambda + \mu = 1$)

Conceptul de raport

- **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în \mathbb{R}^n . Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.

Conceptul de raport

- ▶ **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în \mathbb{R}^n . Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.
- ▶ **Definiție** Scalarul r definit în lema anterioară se numește **raportul** punctelor A, B, P (sau **raportul în care punctul P împarte segmentul $[AB]$**) și este notat cu $r(A, P, B)$.

Caz 1

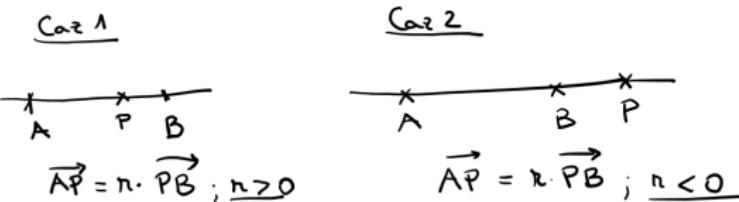
$$\overrightarrow{AP} = n \cdot \overrightarrow{PB}; n > 0$$

Caz 2

$$\overrightarrow{AP} = n \cdot \overrightarrow{PB}; n < 0$$

Conceptul de raport

- ▶ **Lemă** Fie A și B două puncte distincte în \mathbb{R}^n . Pentru orice punct $P \in AB$, $P \neq B$ există un unic scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ astfel ca $\overrightarrow{AP} = r \overrightarrow{PB}$. Reciproc, fiecărui scalar $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, îi corespunde un unic punct $P \in AB$.
- ▶ **Definiție** Scalarul r definit în lema anterioară se numește **raportul** punctelor A, B, P (sau **raportul în care punctul P împarte segmentul $[AB]$**) și este notat cu $r(A, P, B)$.



- ▶ **Observație importantă.** În calcularea raportului, ordinea punctelor este esențială. Modul în care este definită această noțiune (mai precis ordinea în care sunt considerate punctele) diferă de la autor la autor.

Raport- exemple

- (i) În \mathbb{R}^2 considerăm punctele $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$, $C = (7, 7)$.
 Determinăm raportul $r(A, B, C)$.

$$\text{r.a.t. } \overrightarrow{AB} = r \cdot \overrightarrow{BC} \quad ; \quad r = ?$$

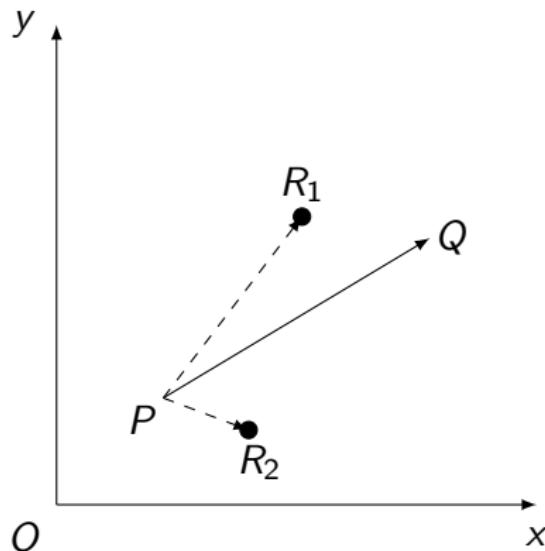
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (1, 1) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (5, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$r(A, B, C)$

Raport- exemple

- (ii) În \mathbb{R}^3 considerăm punctele $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (0, 3, 7)$. Atunci punctele A, B, C sunt coliniare și avem $r(A, C, B) = -\frac{1}{2}$, $r(B, C, A) = -2$, $r(C, A, B) = 1$, $r(C, B, A) = -2$.
- (iii) Fie A, B două puncte din \mathbb{R}^n și $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Atunci $r(A, M, B) = 1$, $r(M, A, B) = -\frac{1}{2}$.

Testul de orientare - motivație



Poziția relativă a două puncte față de un vector / o muchie orientată

Enunț principal

- **Propoziție.** Fie $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ două puncte distincte din planul \mathbb{R}^2 , fie $R = (r_1, r_2)$ un punct arbitrar și

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Atunci R este situat:

- (i) pe dreapta $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) = 0$ ("ecuația dreptei");
- (ii) "în dreapta" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) < 0$;
- (iii) "în stânga" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) > 0$.

Enunț principal

- **Propoziție.** Fie $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ două puncte distincte din planul \mathbb{R}^2 , fie $R = (r_1, r_2)$ un punct arbitrar și

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Atunci R este situat:

- (i) pe dreapta $PQ \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) = 0$ ("ecuația dreptei");
- (ii) "în dreapta" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) < 0$;
- (iii) "în stânga" segmentului orientat $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R) > 0$.

- **Obs.** Testul de orientare se bazează pe calculul unui polinom de gradul II ($\Delta(P, Q, R)$).

Testul de orientare - exemplu



$$A = (0, 0)$$

$$B = (1, 0)$$

$$C = (0, 1)$$

$$\Delta(A, B, C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

*C în stânga
muchiiei orientate \overrightarrow{AB} !*

Limitări - robustețe și erori de rotunjire

L. Kettner et al. / Computational Geometry 40 (2008) 61–78

65

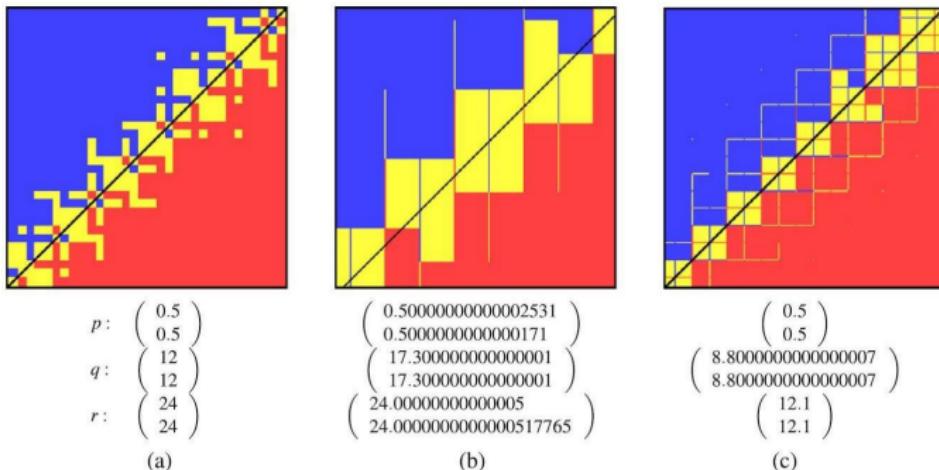
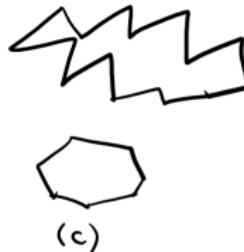
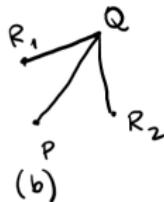
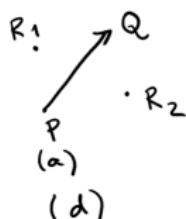


Fig. 2. The weird geometry of the float-orientation predicate: The figure shows the results of $\text{float_orient}(p_x + Xu_x, p_y + Yu_y, q, r)$ for $0 \leq X, Y \leq 255$, where $u_x = u_y = 2^{-53}$ is the increment between adjacent floating-point numbers in the considered range. The result is color coded: Yellow (red, blue, resp.) pixels represent collinear (negative, positive, resp.) orientation. The line through q and r is shown in black.

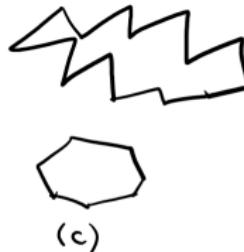
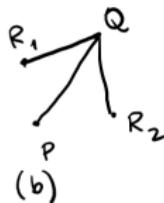
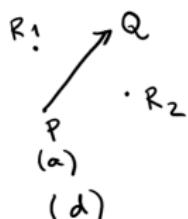
Sursa: Kettner et al, *Classroom examples of robustness problems in geometric computations*, 2008

Aplicații



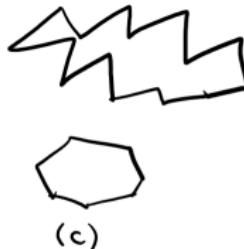
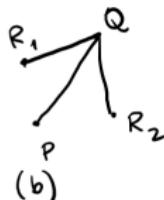
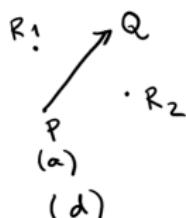
- (a) dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;

Aplicații



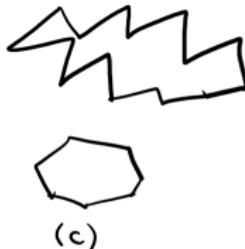
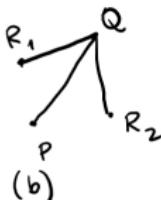
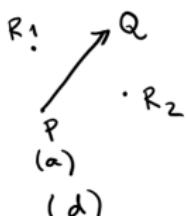
- (a) dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- (b) natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);

Aplicații



- (a) dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- (b) natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);
- (c) natura unui poligon (convex / concav);

Aplicații



- (a) dacă un punct este în dreapta / stânga unei muchii orientate;
- (b) natura unui viraj în parcurgerea unei linii poligonale (la dreapta / la stânga);
- (c) natura unui poligon (convex / concav);
- (d) dacă două puncte sunt de o parte și de alta a unui segment / a unei drepte.

Mulțimi convexe: generalități

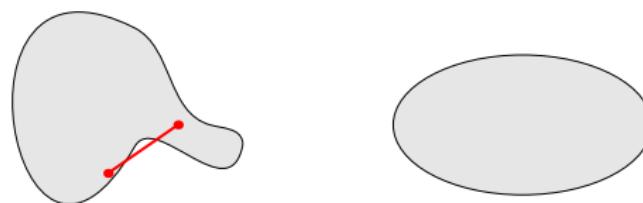
► **Conceptul de mulțime convexă:**

O mulțime $M \subset \mathbb{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M .

Mulțimi convexe: generalități

► Conceptul de mulțime convexă:

O mulțime $M \subset \mathbb{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M .

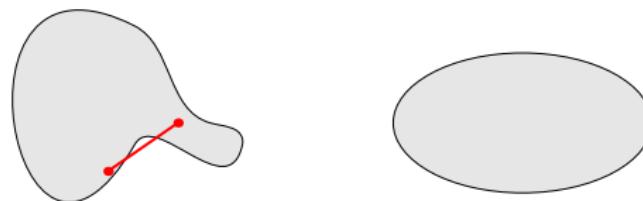


Mulțimea din stânga nu este convexă, întrucât **există** două puncte, pentru care segmentul determinat nu este inclus în mulțime (punctele cu această proprietate nu sunt unice!).

Mulțimi convexe: generalități

► Conceptul de mulțime convexă:

O mulțime $M \subset \mathbb{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M .

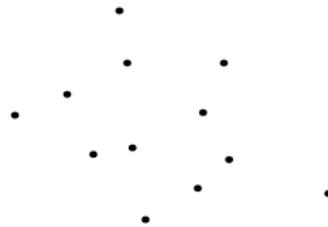


Mulțimea din stânga nu este convexă, întrucât **există** două puncte, pentru care segmentul determinat nu este inclus în mulțime (punctele cu această proprietate nu sunt unice!).

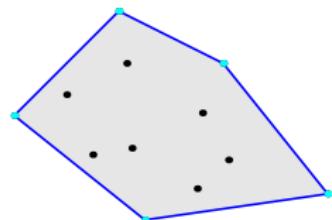
► Problematizare:

Mulțimile finite cu cel puțin două elemente nu sunt convexe \rightarrow necesară **acoperirea convexă**.

Acoperire convexă a unei multimi (finite) \mathcal{P} : concept

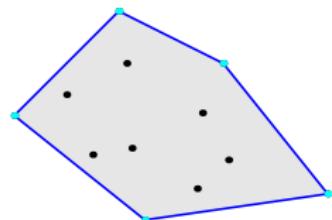


Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : concept



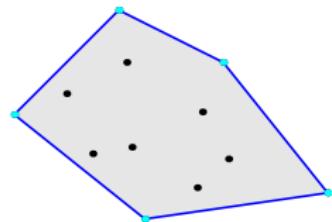
- ▶ Caracterizări echivalente:

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : concept



- ▶ Caracterizări echivalente:
 - ▶ Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține \mathcal{P} .

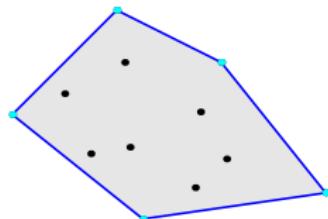
Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : concept



► Caracterizări echivalente:

- ▶ Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține \mathcal{P} .
- ▶ Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin \mathcal{P} .

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : concept

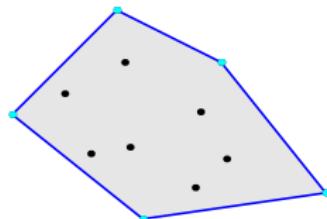


► Caracterizări echivalente:

- ▶ Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține \mathcal{P} .
- ▶ Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin \mathcal{P} .
- ▶ Mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale punctelor din \mathcal{P} . O **combinație convexă** a punctelor P_1, P_2, \dots, P_n este un punct P de forma

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1], \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1.$$

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : concept



- ▶ Caracterizări echivalente:
 - ▶ Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține \mathcal{P} .
 - ▶ Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin \mathcal{P} .
 - ▶ Mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale punctelor din \mathcal{P} . O **combinație convexă** a punctelor P_1, P_2, \dots, P_n este un punct P de forma

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1], \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1.$$

- ▶ **Problematizare:** Aceste caracterizări echivalente nu conduc la un algoritm de determinare a acoperirii convexe.

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : problematizare

- Dacă $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un **politop convex**.

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : problematizare

- ▶ Dacă $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un **politop convex**.
- ▶ Cazuri particulare: $d = 1$ (segment); $d = 2$ (poligon); $d = 3$ (poliedru).

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : problematizare

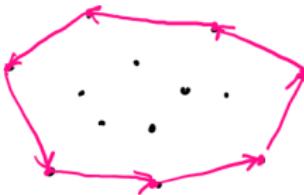
- ▶ Dacă $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un **politop convex**.
- ▶ Cazuri particulare: $d = 1$ (segment); $d = 2$ (poligon); $d = 3$ (poliedru).
- ▶ Cazul $d = 1$: acoperirea convexă este un segment; algoritmic: parcursere a punctelor (complexitate $O(n)$).

Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} : problematizare

- ▶ Dacă $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un **politop convex**.
- ▶ Cazuri particulare: $d = 1$ (segment); $d = 2$ (poligon); $d = 3$ (poliedru).
- ▶ Cazul $d = 1$: acoperirea convexă este un segment; algoritmic: parcursere a punctelor (complexitate $O(n)$).
- ▶ În continuare: $d = 2$.

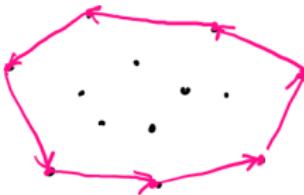
Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} (practic)

- De fapt, dacă \mathcal{P} este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.



Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} (practic)

- De fapt, dacă \mathcal{P} este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.

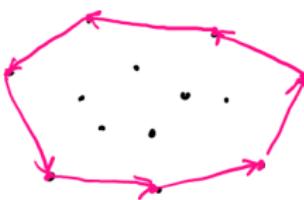


► Problemă:

Cum determinăm, algoritmice, vîrfurile acestui poligon?

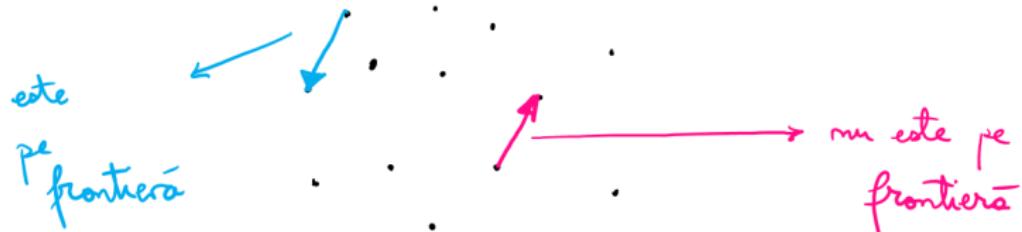
Acoperire convexă a unei multimi finite \mathcal{P} (practic)

- De fapt, dacă \mathcal{P} este finită, acoperirea sa convexă, $\text{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.



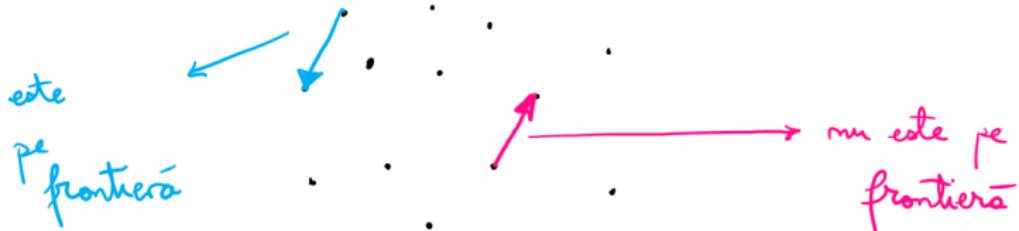
- **Problemă:**
Cum determinăm, algoritmice, vîrfurile acestui poligon?
- **Convenție:** Sensul de parcursare a frontierei este cel trigonometric.

Un algoritm "lent": idee de lucru



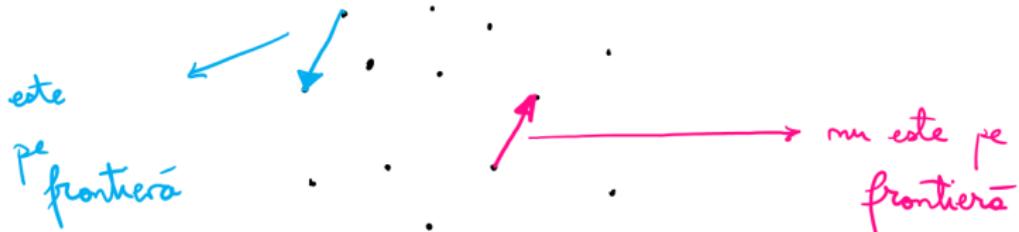
- Sunt considerate **muchiile orientate**.

Un algoritm "lent": idee de lucru



- ▶ Sunt considerate **muchiile orientate**.
- ▶ **Q:** Cum se decide dacă o muchie orientată fixată este pe **frontieră**?

Un algoritm "lent": idee de lucru



- ▶ Sunt considerate **muchiile orientate**.
- ▶ **Q:** Cum se decide dacă o muchie orientată fixată este pe **frontieră**?
- ▶ **A:** Toate celelalte puncte sunt "în stanga" ei (v. "testul de orientare").

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$
4. **for** $R \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$
4. **for** $R \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$
5. **do if** R "în dreapta" lui \overrightarrow{PQ}

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$
4. **for** $R \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$
5. **do if** R "în dreapta" lui \overrightarrow{PQ}
6. **then** $valid \leftarrow \text{false}$

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$
4. **for** $R \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$
5. **do if** R "în dreapta" lui \overrightarrow{PQ}
6. **then** $valid \leftarrow \text{false}$
7. **if** $valid = \text{true}$ **then** $E = E \cup \{\overrightarrow{PQ}\}$

Un algoritm lent

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sensul trigonometric.

1. $E \leftarrow \emptyset, \mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ /* E este lista muchiilor orientate*/
2. **for** $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ cu $P \neq Q$
3. **do** $valid \leftarrow \text{true}$
4. **for** $R \in \mathcal{P} \setminus \{P, Q\}$
5. **do if** R "în dreapta" lui \overrightarrow{PQ}
6. **then** $valid \leftarrow \text{false}$
7. **if** $valid = \text{true}$ **then** $E = E \cup \{\overrightarrow{PQ}\}$
8. din E se construiește lista \mathcal{L} a vârfurilor acoperirii convexe /*este necesar ca E să fie **coerentă***/

Algoritmul "lent": comentarii

- Complexitatea: $O(n^3)$

Algoritmul "lent": comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n^3)$
- ▶ Complexitate algebrică: polinoame de gradul II

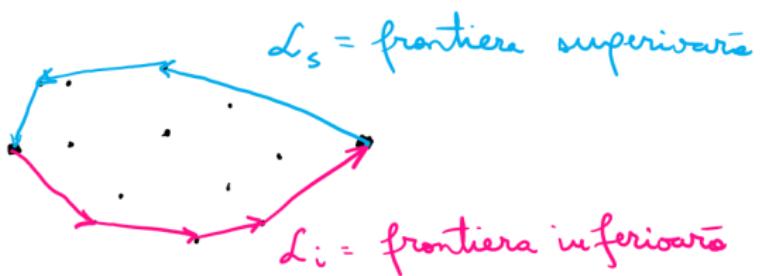
Algoritmul "lent": comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n^3)$
- ▶ Complexitate algebrică: polinoame de gradul II
- ▶ Tratarea cazurilor degenerate: poate fi adaptat.

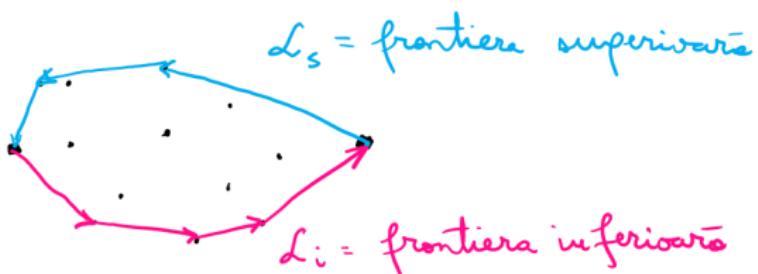
Algoritmul "lent": comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n^3)$
- ▶ Complexitate algebrică: polinoame de gradul II
- ▶ Tratarea cazurilor degenerate: poate fi adaptat.
- ▶ Robustețea: datorită erorilor de rotunjire este posibil ca algoritmul să nu returneze o listă coerentă de muchii.

Graham's scan, varianta Andrew: idee de lucru

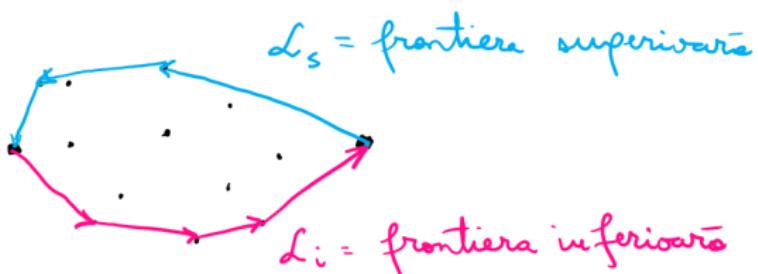


Graham's scan, varianta Andrew: idee de lucru



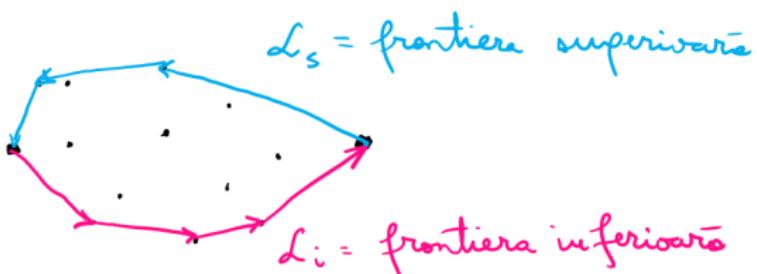
- ▶ Punctele sunt mai întâi sortate și renumerate **lexicografic**.

Graham's scan, varianta Andrew: idee de lucru



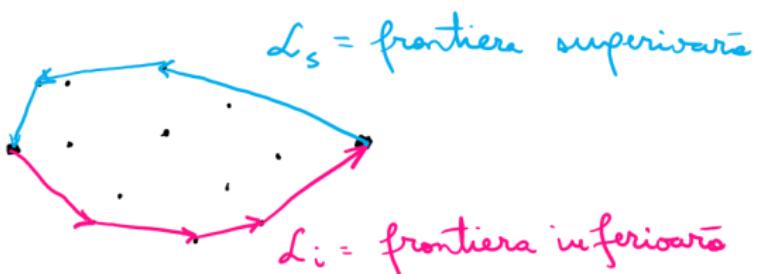
- ▶ Punctele sunt mai întâi sortate și renumerate **lexicografic**.
- ▶ Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.

Graham's scan, varianta Andrew: idee de lucru

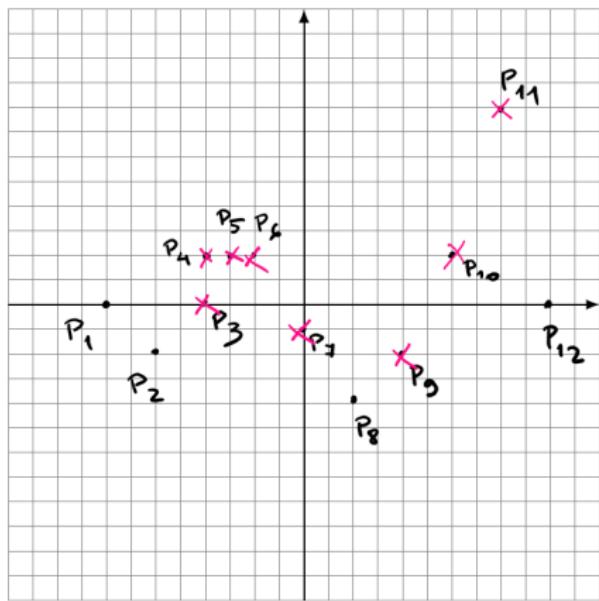


- ▶ Punctele sunt mai întâi sortate și renumerate **lexicografic**.
- ▶ Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.
- ▶ **Q:** Cum se decide dacă trei puncte sunt vârfuri consecutive ale acoperirii convexe?

Graham's scan, varianta Andrew: idee de lucru



- ▶ Punctele sunt mai întâi sortate și renumerate **lexicografic**.
- ▶ Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.
- ▶ **Q:** Cum se decide dacă trei puncte sunt vârfuri consecutive ale acoperirii convexe?
- ▶ **A:** Se efectuează un "viraj la stânga" în punctul din mijloc.



$$P_1 = (-8, 9); P_2 = (-6, -2); P_3 = (-4, 0)$$

$$P_4 = (-4, 2); P_5 = (-3, 2); P_6 = (-2, 2);$$

$$P_7 = (0, -1); P_8 = (2, -4); P_9 = (4, -2)$$

$$P_{10} = (6, 2); P_{11} = (8, 8); P_{12} = (10, 0)$$

Cum evoluează el pe parcursul Graham's scan (var. Andrew)

P₁ P₂

P₁ P₂ P₃

P₁ P₂ P₃ P₄

P₁ P₂ P₃ P₄ P₅ → viraj la dreapta în P₄

P₁ P₂ P₃ P₅ P₆ → viraj la dreapta în P₅

P₂, P₃, P₆ coliniare

P₁ P₂ P₃ P₇

P₁ P₂ P₃ P₈

P₁ P₂ P₈ P₃ P₁₀ P₁₁ P₁₂



frontiera inferioră

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontiera acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}
5. **while** \mathcal{L} are mai mult de două puncte
 and ultimele trei nu determină un viraj la stânga

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontiera acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
 4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}
 5. **while** \mathcal{L} are mai mult de două puncte
 and ultimele trei nu determină un viraj la stânga
 6. **do** șterge penultimul punct

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontiera acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}
5. **while** \mathcal{L} are mai mult de două puncte
 and ultimele trei nu determină un viraj la stânga
6. **do** șterge penultimul punct
7. **return** \mathcal{L}_i

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontiera acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
 4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}
 5. **while** \mathcal{L} are mai mult de două puncte
 and ultimele trei nu determină un viraj la stânga
 6. **do** șterge penultimul punct
 7. **return** \mathcal{L}_i
8. Parcurge pași analogi pentru a determina \mathcal{L}_s

Graham's scan, varianta Andrew (algoritm)

Input: O mulțime de puncte \mathcal{P} din \mathbb{R}^2 .

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontiera acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Sortare lexicografică, renumerotare P_1, P_2, \dots, P_n conform ordonării
2. $\mathcal{L} \leftarrow (P_1, P_2)$
3. **for** $i \leftarrow 3$ **to** n
4. **do** adaugă P_i la sfârșitul lui \mathcal{L}
5. **while** \mathcal{L} are mai mult de două puncte
 and ultimele trei nu determină un viraj la stânga
6. **do** șterge penultimul punct
7. **return** \mathcal{L}_i
8. Parcurge pași analogi pentru a determina \mathcal{L}_s
9. Concatenează \mathcal{L}_i și \mathcal{L}_s

Graham's scan, varianta Andrew: comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n \log n)$.

Graham's scan, varianta Andrew: comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n \log n)$.
- ▶ Tratarea cazurilor degenerate: corect.

Graham's scan, varianta Andrew: comentarii

- ▶ Complexitatea: $O(n \log n)$.
- ▶ Tratarea cazurilor degenerate: corect.
- ▶ Robustețea: datorită erorilor de rotunjire este posibil ca algoritmul să returneze o listă eronată (dar coerentă) de muchii.

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.
- ▶ Inițializare: un punct care este sigur un vârf al acoperirii convexe (e.g. punctul cel mai de jos / din stânga / stânga jos).

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.
- ▶ Inițializare: un punct care este sigur un vârf al acoperirii convexe (e.g. punctul cel mai de jos / din stânga / stânga jos).
- ▶ Lista se actualizează prin determinarea succesorului: "cel mai la dreapta" punct.

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.
- ▶ Inițializare: un punct care este sigur un vârf al acoperirii convexe (e.g. punctul cel mai de jos / din stânga / stânga jos).
- ▶ Lista se actualizează prin determinarea succesorului: "cel mai la dreapta" punct.
- ▶ Implementare: două abordări (i) ordonare; (ii) testul de orientare.

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.
- ▶ Inițializare: un punct care este sigur un vârf al acoperirii convexe (e.g. punctul cel mai de jos / din stânga / stânga jos).
- ▶ Lista se actualizează prin determinarea succesorului: "cel mai la dreapta" punct.
- ▶ Implementare: două abordări (i) ordonare; (ii) testul de orientare.
- ▶ Complexitate: $O(hn)$, unde h este numărul punctelor de pe frontieră acoperirii convexe.

Jarvis' march / Jarvis' wrap [1973]

- ▶ Algoritm de tip **incremental**. Nu necesită sortare prealabilă.
- ▶ Inițializare: un punct care este sigur un vârf al acoperirii convexe (e.g. punctul cel mai de jos / din stânga / stânga jos).
- ▶ Lista se actualizează prin determinarea succesorului: "cel mai la dreapta" punct.
- ▶ Implementare: două abordări (i) ordonare; (ii) testul de orientare.
- ▶ Complexitate: $O(hn)$, unde h este numărul punctelor de pe frontieră acoperirii convexe.
- ▶ **Algoritmul lui Chan** "combină" ideile celor doi algoritmi, ajungând la complexitatea-timp $O(n \log h)$.

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate $A_k S$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate $A_k S$
7. **then** $S \leftarrow P_i$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate A_kS
7. **then** $S \leftarrow P_i$
8. **if** $S \neq A_1$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate $A_k S$
7. **then** $S \leftarrow P_i$
8. **if** $S \neq A_1$
9. **then** $k \leftarrow k + 1$;
 $A_k = S$
adaugă A_k la \mathcal{L}

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate $A_k S$
7. **then** $S \leftarrow P_i$
8. **if** $S \neq A_1$
9. **then** $k \leftarrow k + 1$;
 $A_k = S$
 adaugă A_k la \mathcal{L}
10. **else** $valid \leftarrow \text{false}$

Jarvis' march (algoritm)

Input: O mulțime de puncte necoliniare $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ din \mathbb{R}^2 ($n \geq 3$).

Output: O listă \mathcal{L} care conține vârfurile ce determină frontieră acoperirii convexe, parcursă în sens trigonometric.

1. Determinarea unui punct din \mathcal{P} care aparține frontierei (de exemplu cel mai mic, folosind ordinea lexicografică); acest punct este notat cu A_1 .
2. $k \leftarrow 1$; $\mathcal{L} \leftarrow (A_1)$; $valid \leftarrow \text{true}$
3. **while** $valid = \text{true}$
4. **do** alege un pivot arbitrar $S \in \mathcal{P}$, diferit de A_k
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
6. **do if** P_i este la dreapta muchiei orientate $A_k S$
7. **then** $S \leftarrow P_i$
8. **if** $S \neq A_1$
9. **then** $k \leftarrow k + 1$;
 $A_k = S$
 adaugă A_k la \mathcal{L}
10. **else** $valid \leftarrow \text{false}$
11. **return** \mathcal{L}

Alte direcții de lucru

- ▶ **Aplicații:** grafică pe calculator, robotică, GIS, recunoașterea formelor, gestionarea bazelor de date multi-dimensionale, etc.

Alte direcții de lucru

- ▶ **Aplicații:** grafică pe calculator, robotică, GIS, recunoașterea formelor, gestionarea bazelor de date multi-dimensionale, etc.
- ▶ Pot fi stabilite legături cu algoritmi studiați în alt context. De exemplu: *Traveling Salesman Problem*, [în context euclidian](#) (costurile sunt date de distanțele dintre puncte). În acest caz, ordinea în care nodurile de pe frontieră apar în traseul optim coincide cu ordinea în care acestea apar în parcurgerea frontierei acoperirii convexe - [exemplu](#).

Alte direcții de lucru

- ▶ **Aplicații:** grafică pe calculator, robotică, GIS, recunoașterea formelor, gestionarea bazelor de date multi-dimensionale, etc.
- ▶ Pot fi stabilite legături cu algoritmi studiați în alt context. De exemplu: *Traveling Salesman Problem*, [în context euclidian](#) (costurile sunt date de distanțele dintre puncte). În acest caz, ordinea în care nodurile de pe frontieră apar în traseul optim coincide cu ordinea în care acestea apar în parcurgerea frontierei acoperirii convexe - [exemplu](#).
- ▶ Algoritmi pentru spații euclidiene de dimensiune $m \geq 3$.

Alte direcții de lucru

- ▶ **Aplicații:** grafică pe calculator, robotică, GIS, recunoașterea formelor, gestionarea bazelor de date multi-dimensionale, etc.
- ▶ Pot fi stabilite legături cu algoritmi studiați în alt context. De exemplu: *Traveling Salesman Problem*, [în context euclidian](#) (costurile sunt date de distanțele dintre puncte). În acest caz, ordinea în care nodurile de pe frontieră apar în traseul optim coincide cu ordinea în care acestea apar în parcurgerea frontierei acoperirii convexe - [exemplu](#).
- ▶ Algoritmi pentru spații euclidiene de dimensiune $m \geq 3$.
- ▶ Algoritmi eficienți pentru determinarea acoperirii convexe pentru vârfurile unui poligon arbitrar.

Alte direcții de lucru

- ▶ **Aplicații:** grafică pe calculator, robotică, GIS, recunoașterea formelor, gestionarea bazelor de date multi-dimensionale, etc.
- ▶ Pot fi stabilite legături cu algoritmi studiați în alt context. De exemplu: *Traveling Salesman Problem*, [în context euclidian](#) (costurile sunt date de distanțele dintre puncte). În acest caz, ordinea în care nodurile de pe frontieră apar în traseul optim coincide cu ordinea în care acestea apar în parcurgerea frontierei acoperirii convexe - [exemplu](#).
- ▶ Algoritmi pentru spații euclidiene de dimensiune $m \geq 3$.
- ▶ Algoritmi eficienți pentru determinarea acoperirii convexe pentru vârfurile unui poligon arbitrar.
- ▶ Algoritmi dinamici (on-line, real-time, convex hull maintenance).

Algoritmi avansați

C9 - Triangularea poligoanelor

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

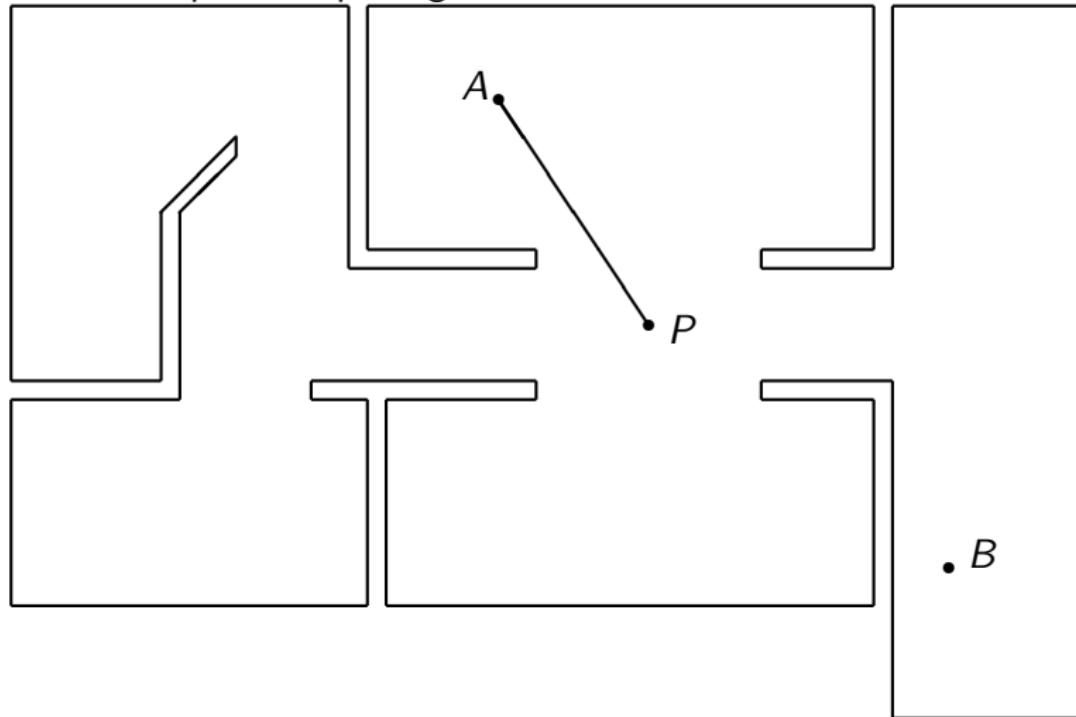
Problema galeriei de artă

Algoritmi de triangulare- “Ear clipping”

Triangularea poligoanelor - un algoritm eficient

Supravegherea unei galerii de artă

Camera din P poate supraveghea A , dar nu B .



Formalizare

- ▶ O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon \mathcal{P} (adică o linie poligonală fără autointersecții) având n vârfuri.

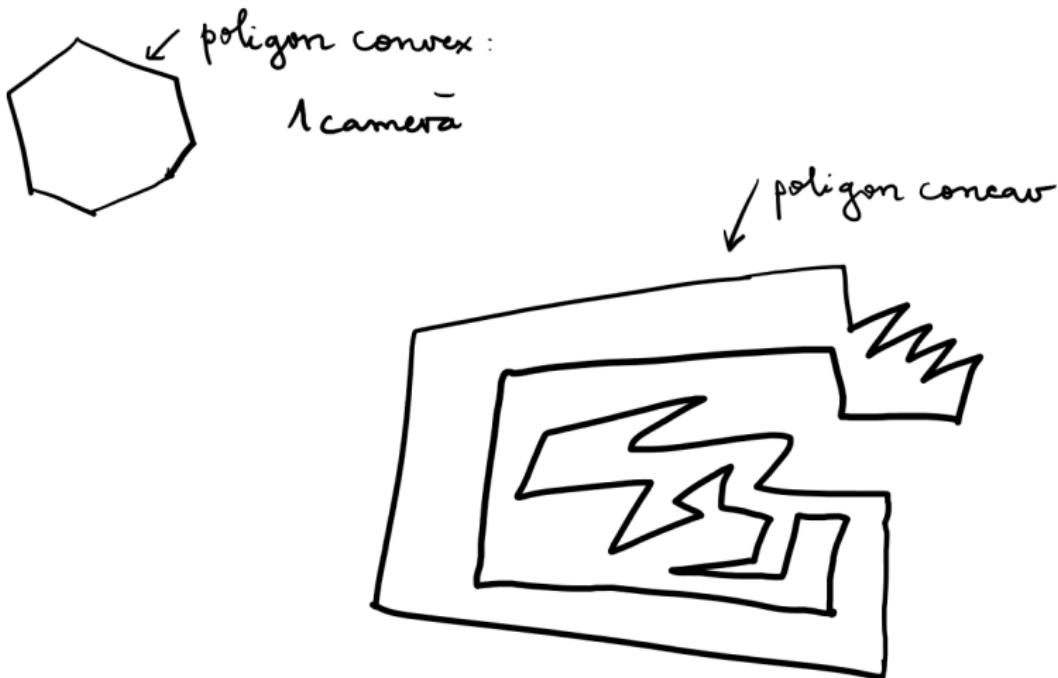
Formalizare

- ▶ O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon \mathcal{P} (adică o linie poligonală fără autointersecții) având n vârfuri.
- ▶ O cameră video (vizibilitate 360^0) poate fi identificată cu un punct din interiorul lui \mathcal{P} ; ea poate supraveghea acele puncte cu care poate fi unită printr-un segment inclus în interiorul poligonului.

Formalizare

- ▶ O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon \mathcal{P} (adică o linie poligonală fără autointersecții) având n vârfuri.
- ▶ O cameră video (vizibilitate 360^0) poate fi identificată cu un punct din interiorul lui \mathcal{P} ; ea poate supraveghea acele puncte cu care poate fi unită printr-un segment inclus în interiorul poligonului.
- ▶ **Problema galeriei de artă:** *câte camere video sunt necesare pentru a supraveghea o galerie de artă și unde trebuie amplasate acestea?*

Comentarii



Numărul de camere vs. forma poligonului

- ▶ Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).

Numărul de camere vs. forma poligonului

- ▶ Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- ▶ Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.

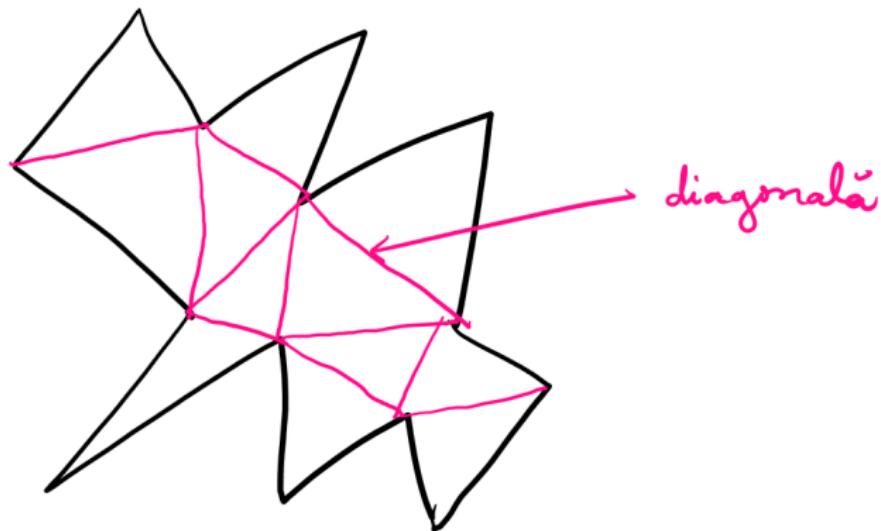
Numărul de camere vs. forma poligonului

- ▶ Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- ▶ Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.
- ▶ Numărul de camere depinde și de forma poligonului: cu cât forma este mai "complexă", cu atât numărul de camere va fi mai mare.

Numărul de camere vs. forma poligonului

- ▶ Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- ▶ Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.
- ▶ Numărul de camere depinde și de forma poligonului: cu cât forma este mai "complexă", cu atât numărul de camere va fi mai mare.
- ▶ **Principiu:** Poligonul considerat: descompus în triunghiuri (triangulare).

Despre triangulări



Definiție formală

- ▶ Fie \mathcal{P} un poligon plan.

Definiție formală

- ▶ Fie \mathcal{P} un poligon plan.
- ▶ (i) O **diagonală** a lui \mathcal{P} este un segment ce unește două vârfuri ale acestuia și care este situat în interiorul lui \mathcal{P} .

Definiție formală

- ▶ Fie \mathcal{P} un poligon plan.
- ▶ (i) O **diagonală** a lui \mathcal{P} este un segment ce unește două vârfuri ale acestuia și care este situat în interiorul lui \mathcal{P} .
- ▶ (ii) O **triangulare** $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a lui \mathcal{P} este o descompunere a lui \mathcal{P} în triunghiuri, dată de o mulțime maximală de diagonale ce nu se intersectează.

Rezultate

- **Lemă.** Orice poligon admite o diagonală.

Rezultate

- ▶ **Lemă.** Orice poligon admite o diagonală.
- ▶ **Teoremă.** *Orice poligon admite o triangulare. Orice triangulare a unui poligon cu n vârfuri conține exact $n - 2$ triunghiuri.*

Rezolvarea problemei galeriei de artă

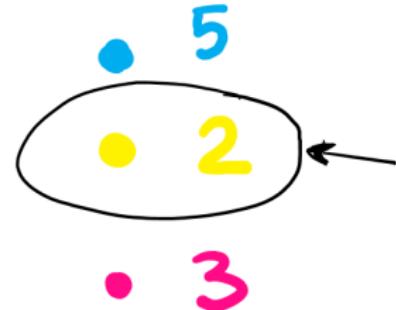
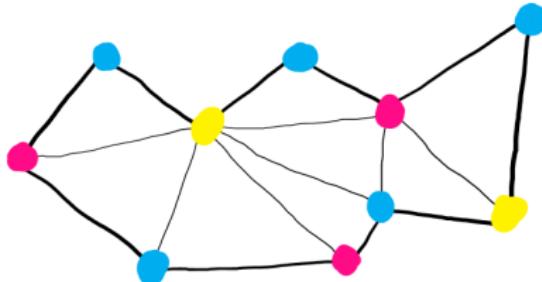
- Amplasarea camerelor se poate face în vîrfurile poligonului.

Rezolvarea problemei galeriei de artă

- ▶ Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.
- ▶ Dată o pereche $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ se consideră o 3-colorare a acesteia: fiecărui vârf îi coreponde o culoare dintr-un set de 3 culori și pentru fiecare triunghi, cele 3 vârfuri au culori distincte.

Rezolvarea problemei galeriei de artă

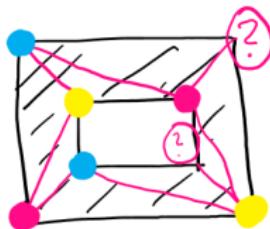
- ▶ Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.
- ▶ Dată o pereche $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ se consideră o 3-colorare a acesteia: fiecărui vârf îi coreponde o culoare dintr-un set de 3 culori și pentru fiecare triunghi, cele 3 vârfuri au culori distincte.
- ▶ **Observație.** Dacă \mathcal{P} este linie poligonală fără autointersecții o astfel de colorare există, deoarece graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ este arbore.



Rezolvarea problemei galeriei de artă

- ▶ Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.
- ▶ Dată o pereche $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ se consideră o 3-colorare a acesteia: fiecărui vârf îi corespunde o culoare dintr-un set de 3 culori și pentru fiecare triunghi, cele 3 vârfuri au culori distincte.
- ▶ **Observație.** Dacă \mathcal{P} este linie poligonală fără autointersecții, o astfel de colorare există, deoarece graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ este arbore.

Contraexemplu - 3 colorare



Teorema galeriei de artă

- ▶ **Teoremă.** [Chvátal, 1975; Fisk, 1978] *Pentru un poligon cu n vârfuri, $\left[\frac{n}{3}\right]$ camere sunt uneori necesare și întotdeauna suficiente pentru ca fiecare punct al poligonului să fie vizibil din cel puțin una din camere.*

Teorema galeriei de artă

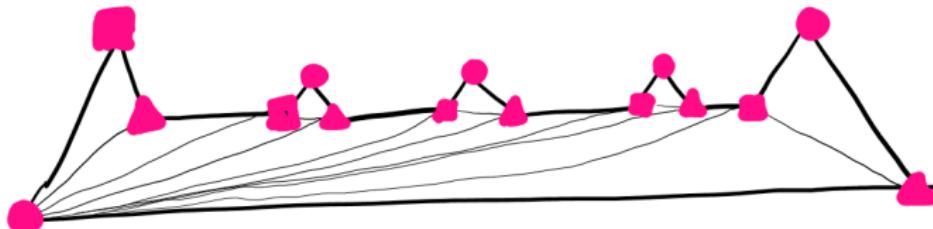
- ▶ **Teoremă.** [Chvátal, 1975; Fisk, 1978] Pentru un poligon cu n vârfuri, $\left[\frac{n}{3}\right]$ camere sunt **uneori necesare** și întotdeauna **suficiente** pentru ca fiecare punct al poligonului să fie vizibil din cel puțin una din camere.
- ▶ Despre Teorema Galeriei de Artă: J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*

Teorema galeriei de artă

- ▶ **Teoremă.** [Chvátal, 1975; Fisk, 1978] Pentru un poligon cu n vârfuri, $\left[\frac{n}{3}\right]$ camere sunt **uneori necesare** și întotdeauna **suficiente** pentru ca fiecare punct al poligonului să fie vizibil din cel puțin una din camere.
- ▶ Despre Teorema Galeriei de Artă: J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*
- ▶ Despre numărul de culori utilizat: L. Erickson, S. LaValle, *A chromatic art gallery problem*

Teorema galeriei de artă - justificare, exemplu

• unori necesare



- 5
- 5
- ▲ 5

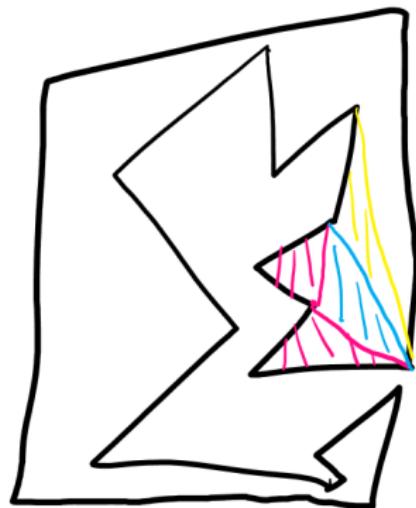
Teorema galeriei de artă - justificare, exemplu

- întotdeauna suficiente

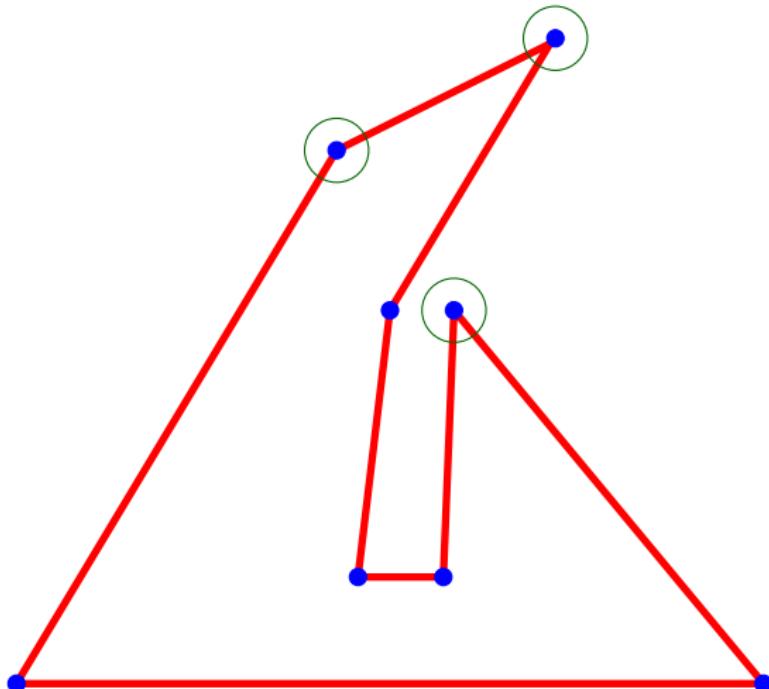
notăm cu n_1, n_2, n_3 numărul de vârfuri colorate cu cele 3 culori : $n_1 + n_2 + n_3 = n$

$$\begin{aligned} \text{Pp. abs. } n_1 > \left[\frac{n}{3} \right] \Rightarrow n_1 > \frac{n}{3} &\quad \left(\begin{array}{l} \text{def.} \\ \text{partii} \\ \text{întregi} \end{array} \right) \\ n_2 > \left[\frac{n}{3} \right] \Rightarrow n_2 > \frac{n}{3} & \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 \\ n_3 > \left[\frac{n}{3} \right] \Rightarrow n_3 > \frac{n}{3} & > n \\ \Rightarrow \exists i \text{ a.i. } n_i \leq \left[\frac{n}{3} \right] & \text{contradicție} \end{aligned}$$

Triangularea unui poligon - intuiție

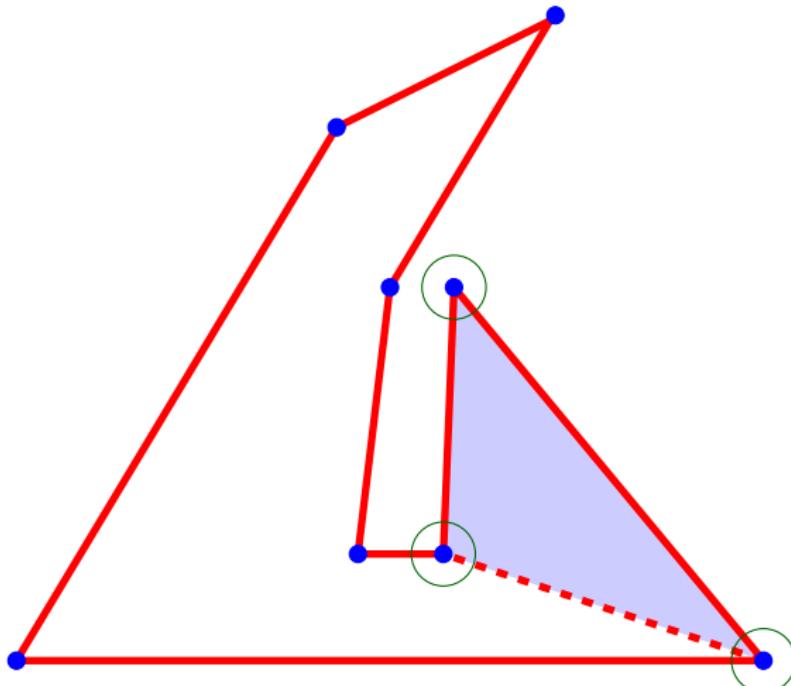


Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



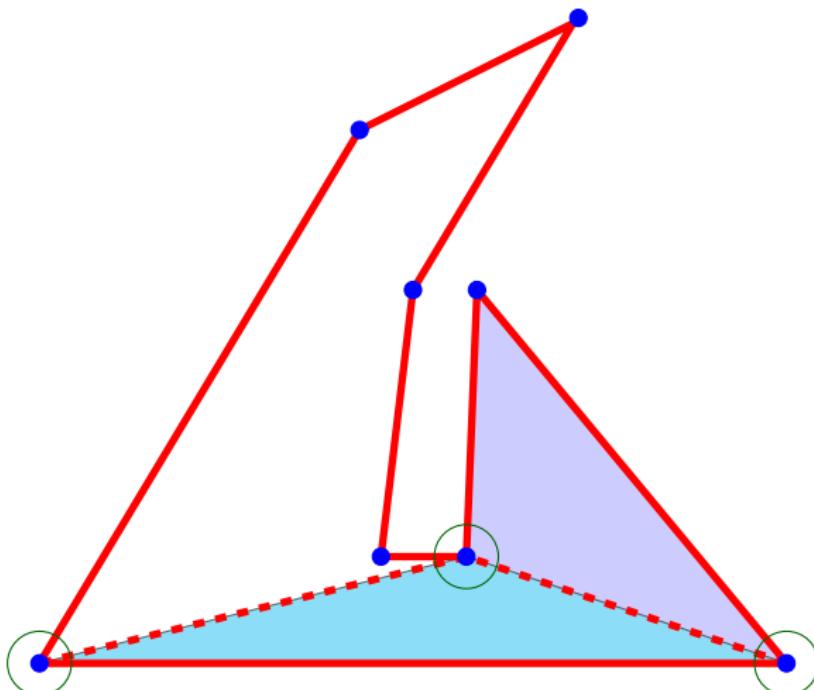
Vârfuri care pot fi selectate pentru start.

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



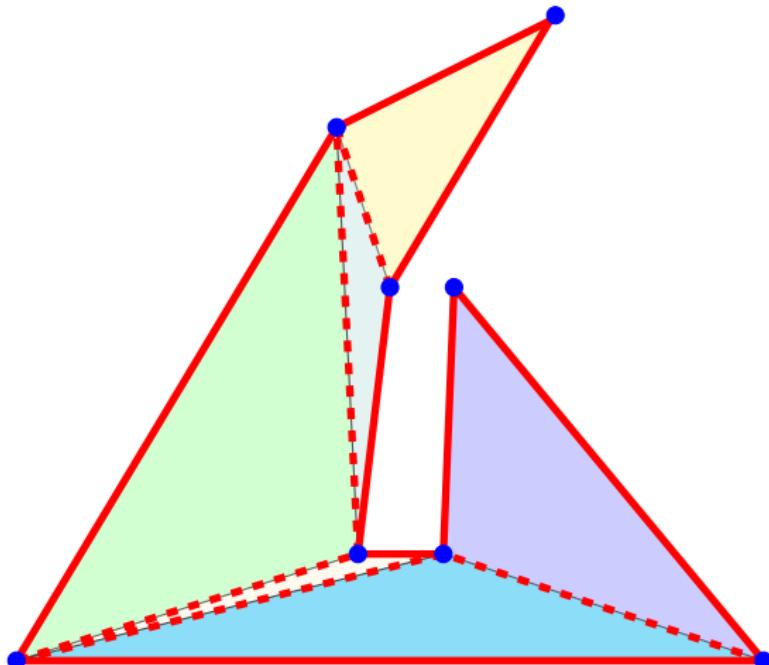
Ales un vârf, este considerat triunghiul determinat cu predecesorul și succesorul.

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



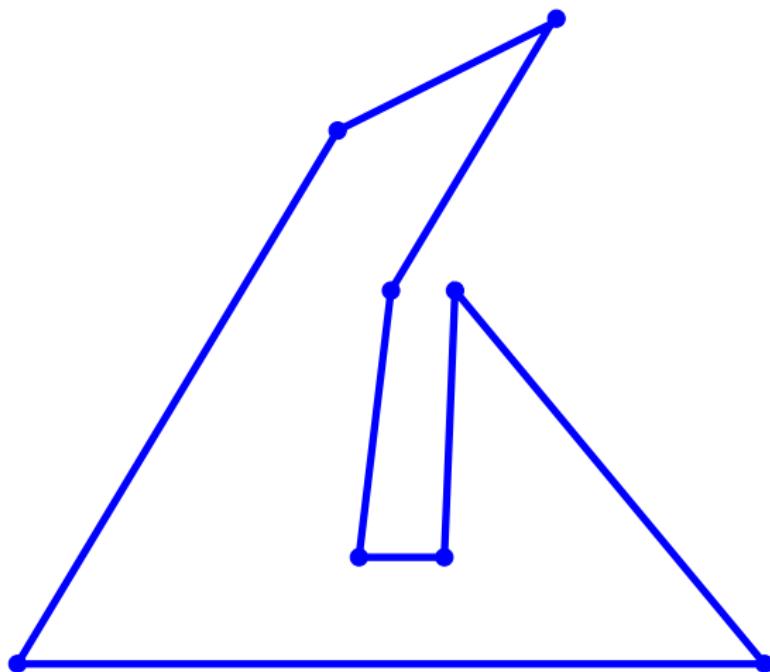
Procedura continuă....

Triangularea unui poligon - algoritmul “Ear clipping”



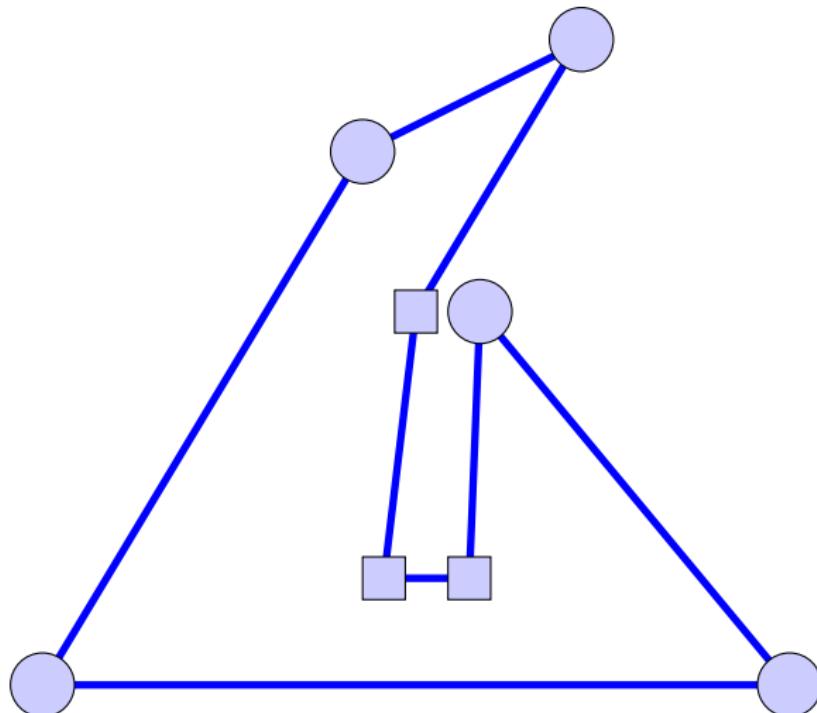
... se obține o triangulare a poligonului.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - convexe/concave



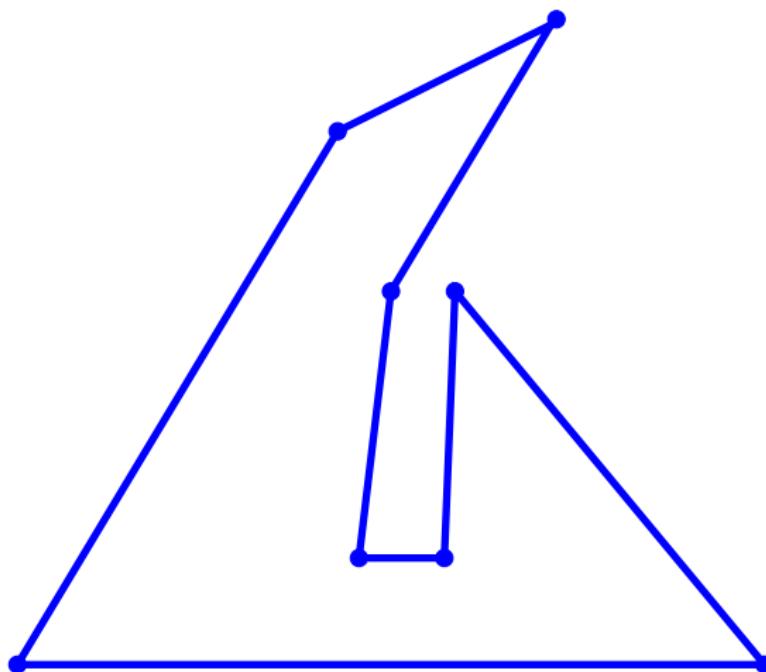
Vârfurile convexe / concave.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - convexe/concave



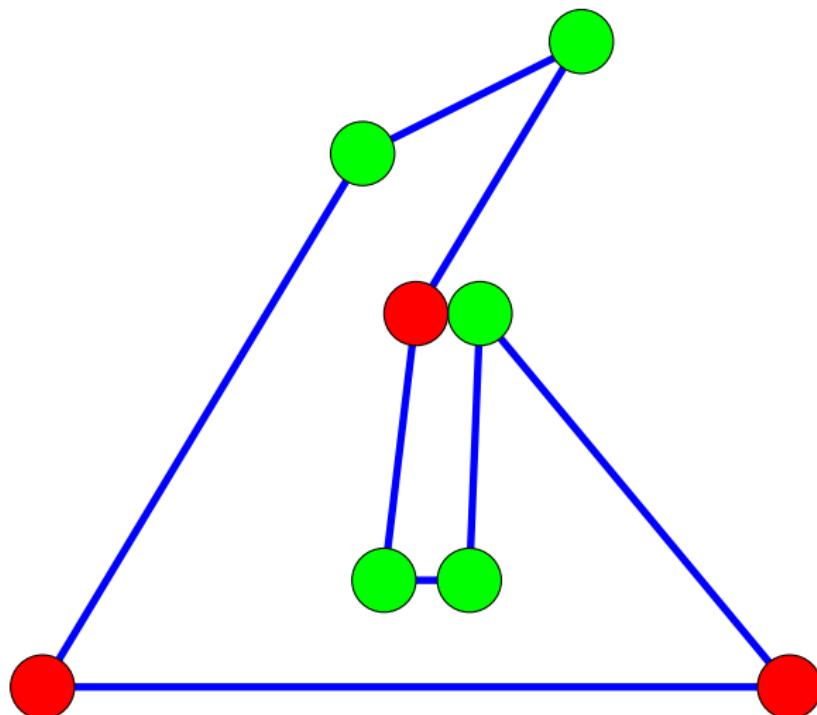
Vârfurile convexe (cerc) / concave (pătrat).

Clasificarea vârfurilor unui poligon - principale/neprincipale



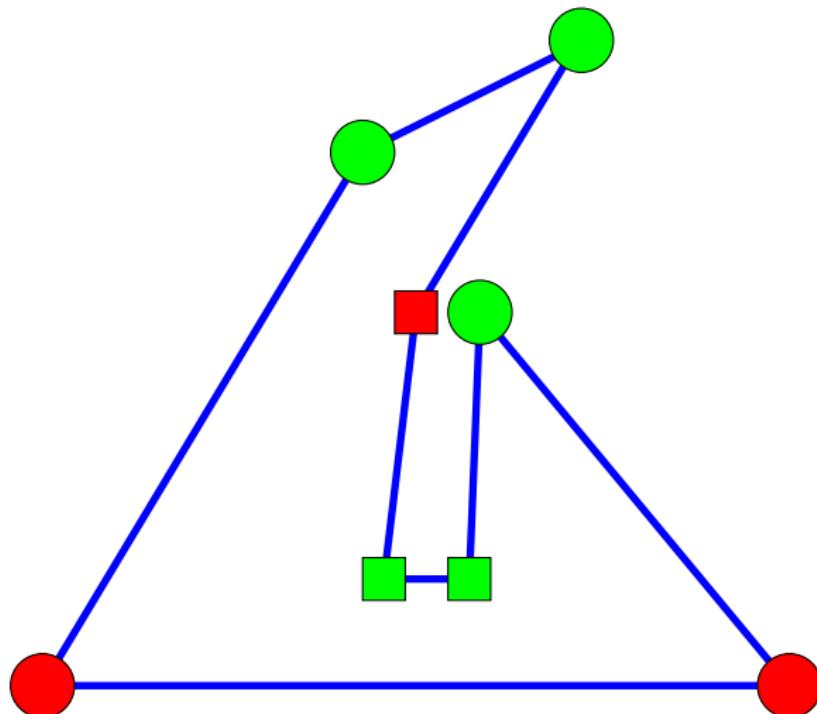
Vârfurile principale.

Clasificarea vârfurilor unui poligon - principale/neprincipale



Vârfurile principale (verde) / neprincipale (roșu).

Clasificarea vârfurilor unui poligon



Patru tipuri de vârfuri.

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex"):** se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal:** P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex"):** se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal:** P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).
 - **Ear (vârf / componentă de tip E):** este un vârf principal convex [Meisters, 1975]. Dacă P_i este componentă de tip E, atunci segmentul $[P_{i-1}P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului și este situat în interiorul acestuia, adică este "diagonală veritabilă", iar $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ poate fi "eliminat".
 - **Mouth (vârf / componentă de tip M):** este un vârf principal concav [Toussaint, 1991].

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex")**: se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal**: P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).
 - **Ear (vârf / componentă de tip E)**: este un vârf principal convex [Meisters, 1975]. Dacă P_i este componentă de tip E, atunci segmentul $[P_{i-1}P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului și este situat în interiorul acestuia, adică este "diagonală veritabilă", iar $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ poate fi "eliminat".
 - **Mouth (vârf / componentă de tip M)**: este un vârf principal concav [Toussaint, 1991].
- ▶ Criterii de clasificare a vârfurilor: (i) vârf convex/concav; (ii) vârf principal/nu.

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex"):** se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal:** P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).
 - **Ear (vârf / componentă de tip E):** este un vârf principal convex [Meisters, 1975]. Dacă P_i este componentă de tip E, atunci segmentul $[P_{i-1}P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului și este situat în interiorul acestuia, adică este "diagonală veritabilă", iar $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ poate fi "eliminat".
 - **Mouth (vârf / componentă de tip M):** este un vârf principal concav [Toussaint, 1991].
- ▶ **Criterii de clasificare a vârfurilor:** (i) vârf convex/concav; (ii) vârf principal/nu.
- ▶ **Teoremă.** (Two Ears Theorem [Meisters, 1975]) *Orice poligon cu cel puțin 4 vârfuri admite cel puțin două componente de tip E care nu se suprapun.*
- ▶ **Corolar.** *Orice poligon admite (cel puțin) o diagonală.*

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex"):** se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal:** P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).
 - **Ear (vârf / componentă de tip E):** este un vârf principal convex [Meisters, 1975]. Dacă P_i este componentă de tip E, atunci segmentul $[P_{i-1}P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului și este situat în interiorul acestuia, adică este "diagonală veritabilă", iar $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ poate fi "eliminat".
 - **Mouth (vârf / componentă de tip M):** este un vârf principal concav [Toussaint, 1991].
- ▶ **Criterii de clasificare a vârfurilor:** (i) vârf convex/concav; (ii) vârf principal/nu.
- ▶ **Teoremă.** (Two Ears Theorem [Meisters, 1975]) *Orice poligon cu cel puțin 4 vârfuri admite cel puțin două componente de tip E care nu se suprapun.*
- ▶ **Corolar.** *Orice poligon admite (cel puțin) o diagonală.*
- ▶ **Găsirea unei componente de tip E:** complexitate $O(n)$ [ElGindy, Everett, Toussaint, 1993]. Se bazează pe Two Ears Theorem!
- ▶ **Algoritmul de triangulare bazat de metoda ear cutting:** complexitate $O(n^2)$.

Metode de triangulare: ear cutting / clipping / trimming

- ▶ Concepte pentru un poligon $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$:
 - **Vârf convex/concav ("reflex"):** se stabilește cu testul de orientare. Un vârf este convex \Leftrightarrow are același tip de viraj ca vârful "cel mai din stânga".
 - **Vârf principal:** P_i este principal dacă $[P_{i-1}P_{i+1}]$ este diagonală (echivalent: nu există un alt vârf în interiorul sau pe laturile $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$).
 - **Ear (vârf / componentă de tip E):** este un vârf principal convex [Meisters, 1975]. Dacă P_i este componentă de tip E, atunci segmentul $[P_{i-1}P_{i+1}]$ nu intersectează laturile poligonului și este situat în interiorul acestuia, adică este "diagonală veritabilă", iar $\Delta P_{i-1}P_iP_{i+1}$ poate fi "eliminat".
 - **Mouth (vârf / componentă de tip M):** este un vârf principal concav [Toussaint, 1991].
- ▶ **Criterii de clasificare a vârfurilor:** (i) vârf convex/concav; (ii) vârf principal/nu.
- ▶ **Teoremă.** (Two Ears Theorem [Meisters, 1975]) *Orice poligon cu cel puțin 4 vârfuri admite cel puțin două componente de tip E care nu se suprapun.*
- ▶ **Corolar.** *Orice poligon admite (cel puțin) o diagonală.*
- ▶ Găsirea unei componente de tip E: complexitate $O(n)$ [ElGindy, Everett, Toussaint, 1993]. Se bazează pe Two Ears Theorem!
- ▶ Algoritmul de triangulare bazat de metoda ear cutting: complexitate $O(n^2)$.
- ▶ Link despre triangulări. [Link pentru algoritmul Ear cutting](#)

Metode de triangulare: descompunerea în poligoane monotone

- ▶ Algoritmi de triangulare eficienți: complexitate $O(n)$ pentru poligoane y -monotone [Garey et al., 1978] (algoritmul este descris pe slide-urile următoare).

Metode de triangulare: descompunerea în poligoane monotone

- ▶ Algoritmi de triangulare eficienți: complexitate $O(n)$ pentru poligoane y -monotone [Garey et al., 1978] (algoritmul este descris pe slide-urile următoare).
- ▶ Descompunerea unui poligon oarecare în componente y -monotone poate fi realizată cu un algoritm de complexitate $O(n \log n)$ [Lee, Preparata, 1977]. În concluzie, avem următoarea
Teoremă. *Un poligon poate fi triangulat folosind un algoritm de complexitate $O(n \log n)$.*

Metode de triangulare: descompunerea în poligoane monotone

- ▶ Algoritmi de triangulare eficienți: complexitate $O(n)$ pentru poligoane y -monotone [Garey et al., 1978] (algoritmul este descris pe slide-urile următoare).
- ▶ Descompunerea unui poligon oarecare în componente y -monotone poate fi realizată cu un algoritm de complexitate $O(n \log n)$ [Lee, Preparata, 1977]. În concluzie, avem următoarea
Teoremă. *Un poligon poate fi triangulat folosind un algoritm de complexitate $O(n \log n)$.*
- ▶ Există și alte clase de algoritmi mai rapizi; [Chazelle, 1990]: algoritm liniar.

Metode de triangulare: descompunerea în poligoane monotone

- ▶ Algoritmi de triangulare eficienți: complexitate $O(n)$ pentru poligoane y -monotone [Garey et al., 1978] (algoritmul este descris pe slide-urile următoare).
- ▶ Descompunerea unui poligon oarecare în componente y -monotone poate fi realizată cu un algoritm de complexitate $O(n \log n)$ [Lee, Preparata, 1977]. În concluzie, avem următoarea
Teoremă. *Un poligon poate fi triangulat folosind un algoritm de complexitate $O(n \log n)$.*
- ▶ Există și alte clase de algoritmi mai rapizi; [Chazelle, 1990]: algoritm liniar.
- ▶ Găsirea unui algoritm liniar "simplu" [Problemă în The Open Problems Project](#)

Metode de triangulare: descompunerea în poligoane monotone

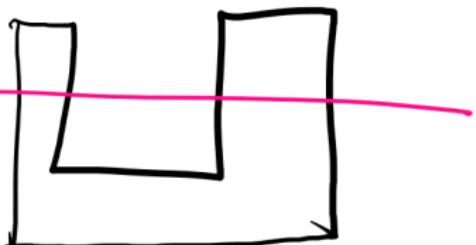
- ▶ Concept: **poligon y-monoton**

Exemplul 1



Exemplul 2

nu este y-monoton



Metoda - paradigma dreptei de baleiere (*line sweep*)

- ▶ Se consideră o dreaptă de baleiere orizontală. Algoritmul reține o serie de informații legate de structura geometrică analizată.

Metoda - paradigma dreptei de baleiere (*line sweep*)

- ▶ Se consideră o dreaptă de baleiere orizontală. Algoritmul reține o serie de informații legate de structura geometrică analizată.
- ▶ **Statut** al dreptei de baleiere: stivă a vârfurilor deja întâlnite, dar care “mai au nevoie de diagonale” / “mai pot să apară în triunghiuri. (Clarificare. **Q:** Când este eliminat un vârf? **A:** Când a fost trasată o diagonală situată “mai jos de acesta”).

Metoda - paradigma dreptei de baleiere (*line sweep*)

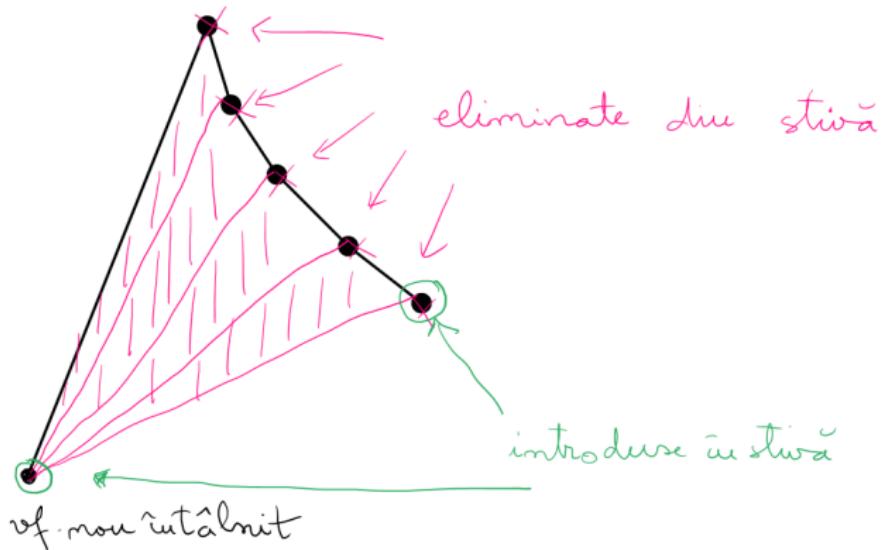
- ▶ Se consideră o dreaptă de baleiere orizontală. Algoritmul reține o serie de informații legate de structura geometrică analizată.
- ▶ **Statut** al dreptei de baleiere: stivă a vârfurilor deja întâlnite, dar care "mai au nevoie de diagonale" / "mai pot să apară în triunghiuri".
(Clarificare. **Q:** Când este eliminat un vârf? **A:** Când a fost trasată o diagonală situată "mai jos de acesta").
- ▶ **Evenimente:** modificarea statutului. Sunt vârfurile poligonului, în prealabil ordonate după y ; pentru fiecare vârf știm dacă este pe lanțul din stânga sau pe cel din dreapta.

Metoda - paradigma dreptei de baleiere (*line sweep*)

- ▶ Se consideră o dreaptă de baleiere orizontală. Algoritmul reține o serie de informații legate de structura geometrică analizată.
- ▶ **Statut** al dreptei de baleiere: stivă a vârfurilor deja întâlnite, dar care "mai au nevoie de diagonale" / "mai pot să apară în triunghiuri".
(Clarificare. **Q:** Când este eliminat un vârf? **A:** Când a fost trasată o diagonală situată "mai jos de acesta").
- ▶ **Evenimente:** modificarea statutului. Sunt vârfurile poligonului, în prealabil ordonate după y ; pentru fiecare vârf știm dacă este pe lanțul din stânga sau pe cel din dreapta.
- ▶ **Invariant:** "pâlnie" (*funnel*) în care (i) vârful de sus este convex; (ii) pe o parte: o muchie; (iii) pe cealaltă parte: muchie / succesiune de vârfuri concave.

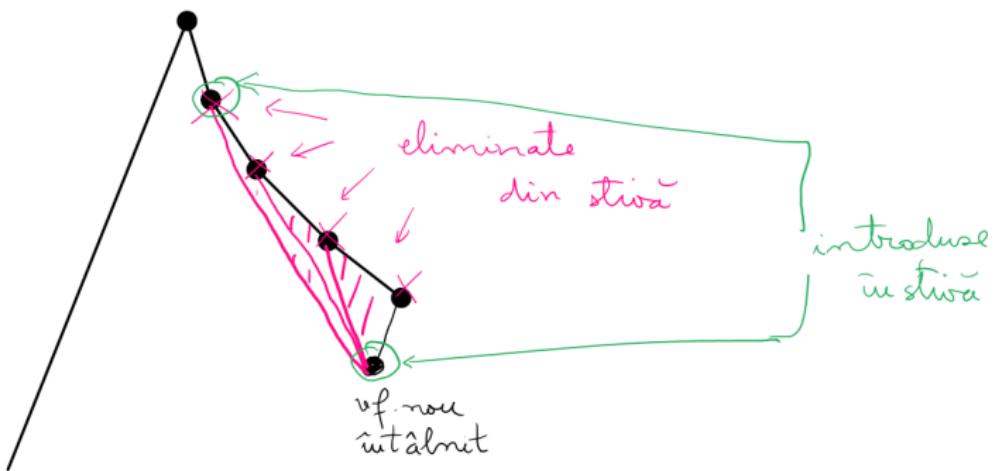
Evenimente - cazul 1

1. Vârful nou întâlnit este pe lanțul opus ultimului vârf din stivă.



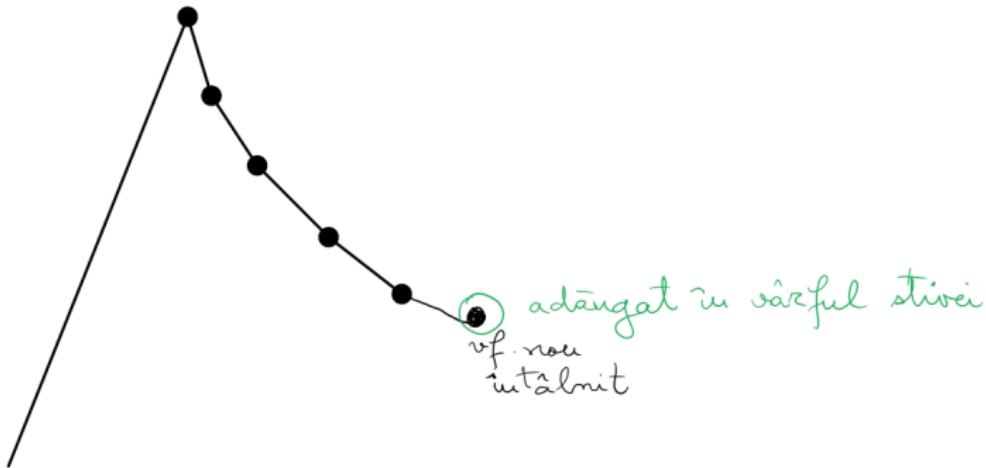
Evenimente - cazul 2a

2a. Vârful nou întâlnit este pe același lanț cu ultimul vârf din stivă.

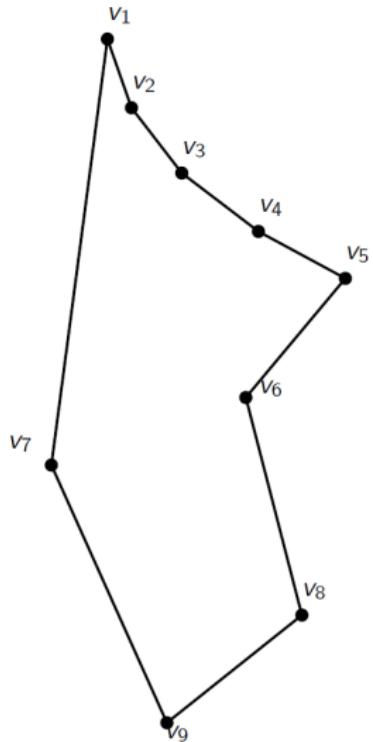


Evenimente - cazul 2b

2b. Vârful nou întâlnit este pe același lanț cu ultimul vârf din stivă.

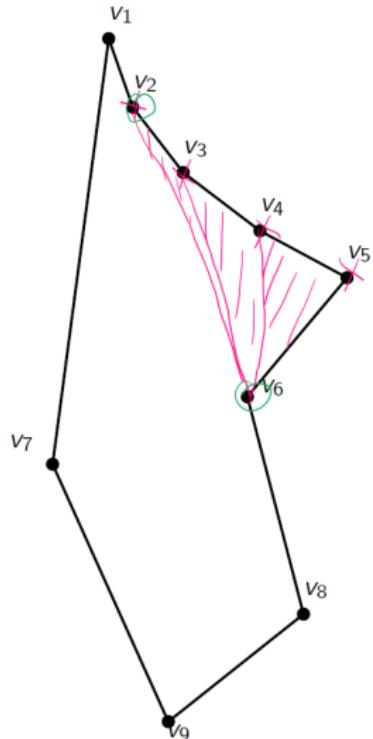


Exemplu



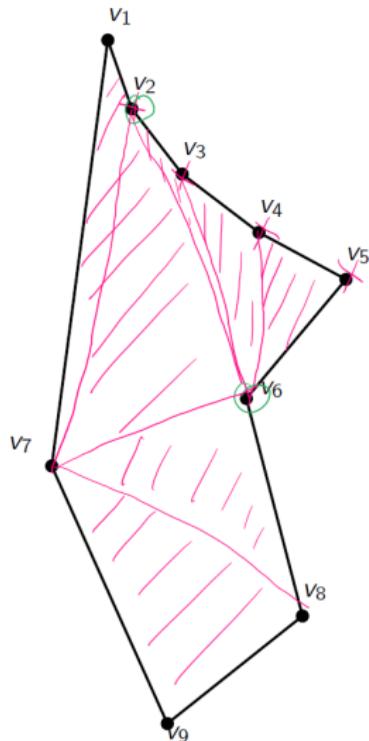
| Eveniment | Stătut |
|-------------------|----------------------------------|
| | v_2 v_1 |
| v_3 (caz 2b) | v_3 v_2 v_1 |
| v_4 (caz 2b) | v_4 v_3 v_2 v_1 |

Exemplu (continuare)



| Eveniment | Stalut |
|---------------------------|---|
| v_5 (ω_2 2b) | <p>A vertical stack of vertices v_5, v_4, v_3, v_2, and v_1.</p> |
| v_6 (ω_2 2a) | <p>Two vertical stacks. The left stack contains v_6, v_4, v_3, v_2, and v_1, with v_5 crossed out. The right stack contains v_6, v_2, and v_1.</p> |

Exemplu (continuare)



| Eveniment | Stalut |
|------------------|----------|
| v_7 (caz 1) | |
| v_8 (caz 1) | |
| v_9 | Δ |

La fiecare pas : diagonale în Δ în mod adecvat.

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă S și inserează v_1, v_2 .

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă S și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă S și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui S sunt în lanțuri diferite

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă S și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui S sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din S

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă S și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui S sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din S
6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă \mathcal{S} și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
 - 4. **do if** v_j și vârful din top al lui \mathcal{S} sunt în lanțuri diferite
 - 5. **then** extrage toate vârfurile din \mathcal{S}
 - 6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul
 - 7. inserează v_{j-1} și v_j în \mathcal{S}

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă \mathcal{S} și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui \mathcal{S} sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din \mathcal{S}
6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul
7. inserează v_{j-1} și v_j în \mathcal{S}
8. **else** extrage un vârf din \mathcal{S}

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă \mathcal{S} și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui \mathcal{S} sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din \mathcal{S}
6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul
7. inserează v_{j-1} și v_j în \mathcal{S}
8. **else** extrage un vârf din \mathcal{S}
9. extrage celelalte vârfuri din \mathcal{S} dacă diagonalele formate cu v_j sunt în interiorul lui \mathcal{P} ; inserează aceste diagonale; inserează înapoi ultimul vârf extras

Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă \mathcal{S} și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui \mathcal{S} sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din \mathcal{S}
6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul
7. inserează v_{j-1} și v_j în \mathcal{S}
8. **else** extrage un vârf din \mathcal{S}
9. extrage celelalte vârfuri din \mathcal{S} dacă diagonalele formate cu v_j sunt în interiorul lui \mathcal{P} ; inserează aceste diagonale; inserează înapoi ultimul vârf extras
10. inserează v_j în \mathcal{S}

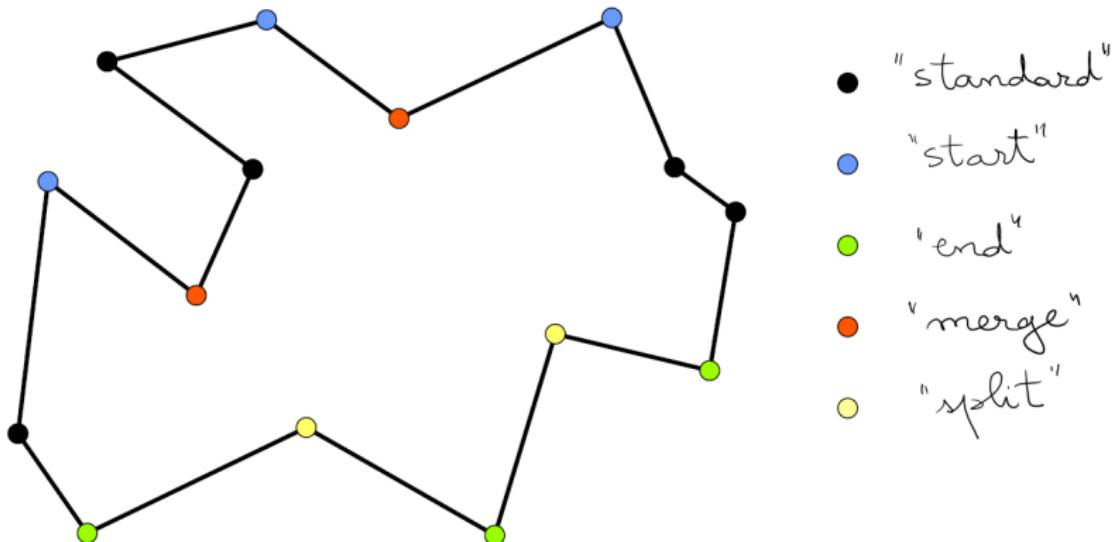
Triangularea poligoanelor monotone

Input: Un poligon y -monoton \mathcal{P} .

Output: O triangulare a lui \mathcal{P} .

1. Lanțul vârfurilor din partea stângă și al celor din partea dreaptă sunt unite într-un singur sir, ordonat descrescător, după y (dacă ordonata este egală, se folosește abscisa). Fie v_1, v_2, \dots, v_n sirul ordonat.
2. Inițializează o stivă vidă \mathcal{S} și inserează v_1, v_2 .
3. **for** $j = 3$ **to** $n - 1$
4. **do if** v_j și vârful din top al lui \mathcal{S} sunt în lanțuri diferite
5. **then** extrage toate vârfurile din \mathcal{S}
6. inserează diagonale de la v_j la vf. extrase, exceptând ultimul
7. inserează v_{j-1} și v_j în \mathcal{S}
8. **else** extrage un vârf din \mathcal{S}
9. extrage celelalte vârfuri din \mathcal{S} dacă diagonalele formate cu v_j sunt în interiorul lui \mathcal{P} ; inserează aceste diagonale; inserează înapoi ultimul vârf extras
10. inserează v_j în \mathcal{S}
11. adaugă diagonale de la v_n la vf. stivei (exceptând primul și ultimul)

Tipuri de vârfuri



Rezultate

- ▶ Folosind un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere și clasificarea vârfurilor indicată, un poligon cu n vârfuri poate fi descompus în poligoane y -monotone cu un algoritm având complexitatea-timp $O(n \log n)$.

Rezultate

- ▶ Folosind un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere și clasificarea vârfurilor indicată, un poligon cu n vârfuri poate fi descompus în poligoane y -monotone cu un algoritm având complexitatea-timp $O(n \log n)$.
- ▶ Conform algoritmului descris, un poligon y -monoton poate fi triunghulat în timp liniar.

Rezultate

- ▶ Folosind un algoritm bazat pe paradigma dreptei de baleiere și clasificarea vârfurilor indicată, un poligon cu n vârfuri poate fi descompus în poligoane y -monotone cu un algoritm având complexitatea-timp $O(n \log n)$.
- ▶ Conform algoritmului descris, un poligon y -monoton poate fi triunghulat în timp liniar.
- ▶ **Teoremă (rezultatul principal)** *Un poligon cu n vârfuri poate fi triunghulat cu complexitatea-timp $O(n \log n)$ și complexitatea-spațiu $O(n)$.*

Algoritmi avansați

C10 - Triangularea mulțimilor de puncte

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Triangularea unei mulțimi arbitrară de puncte

Triangulări legale și triangulări unghiular optime

Problematizare

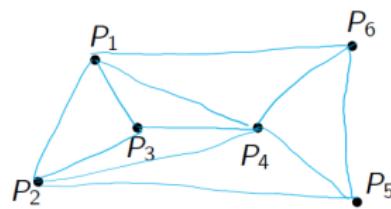
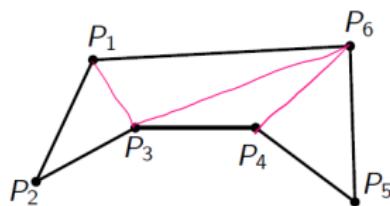
- ▶ Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).

Problematizare

- ▶ Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).
- ▶ Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$?

Problematizare

- ▶ Tema anterioară: triangularea unui poligon (listă ordonată de puncte (P_1, P_2, \dots, P_n)).
- ▶ Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$?
- ▶ **Exemplu:**



- ▶ În cele ce urmează vom considera doar mulțimi de puncte din planul \mathbb{R}^2 .

Problematizare

- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)

Problematizare

- ▶ **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)
- ▶ Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon (P_1, P_2, \dots, P_n) și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)

Problematizare

- ▶ **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi \mathcal{P} este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$ a lui \mathcal{P} cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui \mathcal{P} (fără autointersecții!)
- ▶ Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon (P_1, P_2, \dots, P_n) și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)
- ▶ **Comentariu:** Triangulările mulțimilor de puncte sunt esențiale în grafica pe calculator.

Exemple

(i) 3 puncte necoliniare

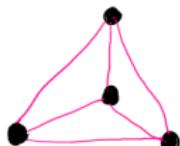


3 vârfuri
3 muchii
1 față

Exemple

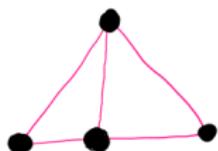
(ii) 4 puncte necoliniare, nesituate toate pe o aceeași dreaptă

(a)



4 vârfuri
6 muchii
3 fete (3 Δ)

(b)



4 vârfuri
5 muchii
2 fete (2 Δ)

(c)



4 vârfuri
5 muchii
2 fete (2 Δ)

Elemente ale unei triangulări

- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare \mathcal{T}_P a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.

Elemente ale unei triangulări

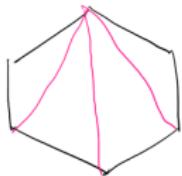
- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare \mathcal{T}_P a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?

Elemente ale unei triangulări

- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare \mathcal{T}_P a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui \mathcal{P} are $(2n - k - 2)$ triunghiuri și $(3n - k - 3)$ muchii.

Elemente ale unei triangulări

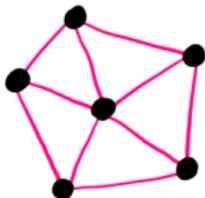
- ▶ Dată o mulțime de puncte \mathcal{P} și o triangulare \mathcal{T}_P a sa:
vârfuri, muchii, triunghiuri.
- ▶ Legătură cantitativă între aceste elemente?
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\text{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui \mathcal{P} are $(2n - k - 2)$ triunghiuri și $(3n - k - 3)$ muchii.
- ▶ **Exemplu:** Cazul unui poligon convex: un poligon convex cu n vârfuri poate fi triangulat cu $(n - 2)$ triunghiuri, având $(2n - 3)$ muchii.



$$\underline{n=6}$$

4 \triangle
9 muchii

Demonstrație



Graf:

noduri: punctele initiale (n)

muchii: laturile Δ ($n_m = ?$)

fetele: fetele Δ + fața exterioară
($n_t + 1$)

- Relația lui Euler: $n - n_m + (n_t + 1) = 2$

- Incidente dintre muchii și fete

$$\underbrace{2 \cdot n_m}_{\text{"perspectiva muchiilor"}} = \underbrace{\frac{pt. \Delta}{3 \cdot n_t} + \frac{pt. fața exterioară}{k}}_{\text{"perspectiva feteelor"}}$$

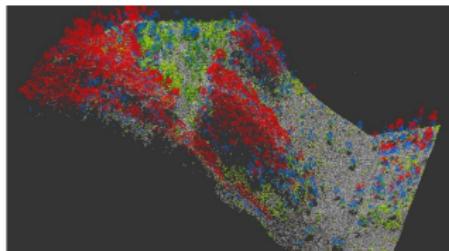
$$\begin{cases} \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow \dots \\ n_m = \dots \\ n_t = \dots \end{cases}$$

Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

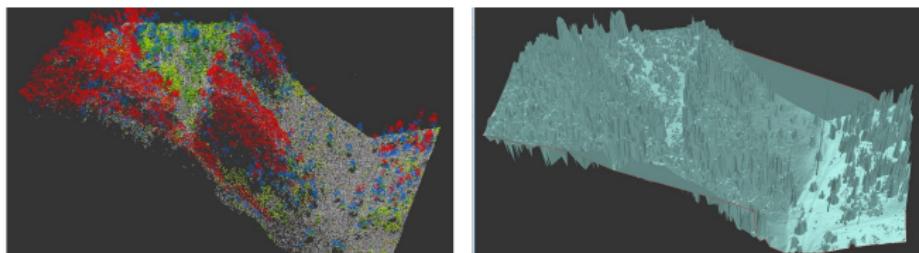
Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.



Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitudinii pentru un teren. Se dorește **reprezentarea tridimensională** (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește **generarea unui teren** pentru o aplicație.

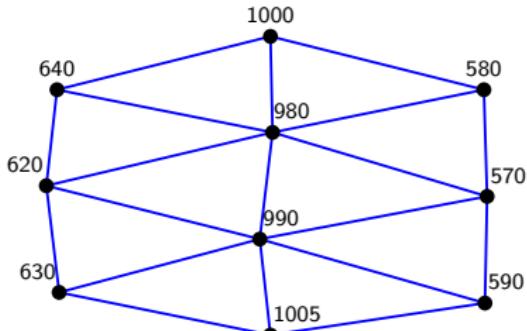


Problematizare - continuare

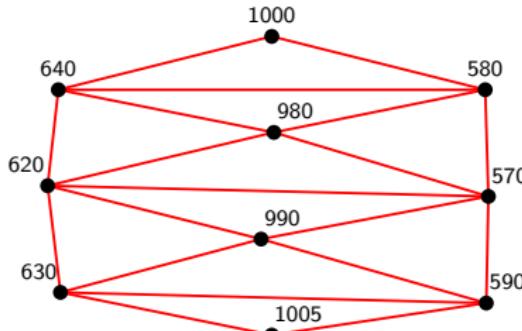
- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?

Problematizare - continuare

- ▶ **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei multimi de puncte fixate?
- ▶ **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



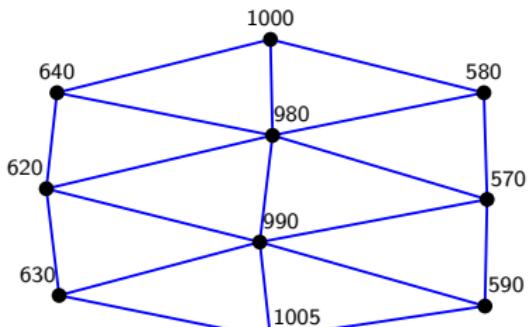
Triangulare 1



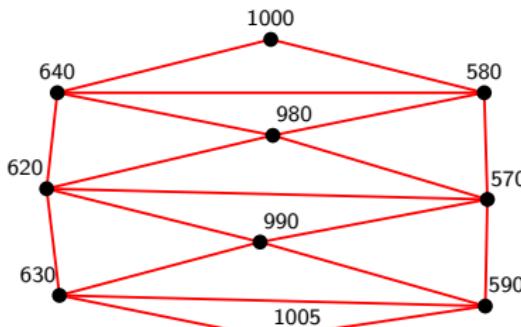
Triangulare 2

Problematizare - continuare

- ▶ **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- ▶ **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



Triangulare 1



Triangulare 2

- ▶ **Întrebări naturale:** (i) Există o triangulare "convenabilă" a unei mulțimi de puncte? (ii) Cum poate fi determinată eficient o astfel de triangulare?

Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**

Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**

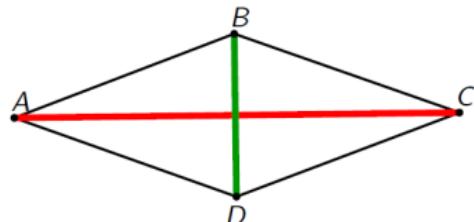
Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**
- ▶ **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui \mathcal{P} :** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie \mathcal{T} și \mathcal{T}' două triangulări ale lui \mathcal{P} . Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.

Terminologie, triangulări legale

- ▶ Fixată: o mulțime de puncte \mathcal{P} . **În cele ce urmează vom presupune că \mathcal{P} este o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 .**
- ▶ Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} cu m triunghiuri. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m}$ unghiiurile lui \mathcal{T} , ordonate crescător. **Vectorul unghiurilor lui \mathcal{T} este $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$.**
- ▶ **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui \mathcal{P} :** ordinea lexicografică pentru vectorii unghiurilor. Fie \mathcal{T} și \mathcal{T}' două triangulări ale lui \mathcal{P} . Atunci $A(\mathcal{T}) > A(\mathcal{T}')$ dacă $\exists i$ astfel ca $\alpha_j = \alpha'_j$, $\forall 1 \leq j < i$ și $\alpha_i > \alpha'_i$.
- ▶ **Triangulare unghiular optimă:** \mathcal{T} astfel ca $A(\mathcal{T}) \geq A(\mathcal{T}')$, pentru orice triangulare \mathcal{T}' .

Exemplu - cazul unui patrulater convex



diagonala AC

$$\Rightarrow \triangle BAC \text{ și } \triangle DAC$$

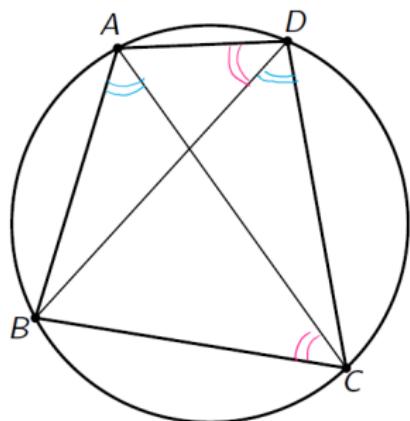
diagonala BD

$$\rightarrow \triangle ABD \text{ și } \triangle CBD$$

diagonala $AC \Rightarrow$ vectorul unghiurilor (α)
 $BD \Rightarrow \dots -$ (β) | $\alpha < \beta$

"cel mai mic unghi care apare în triunghiurile date de AC este mai mic decât cel mai mic unghi care apare în triunghiurile date de BD ".

Exemplu - cazul unui patrulater inscriptibil



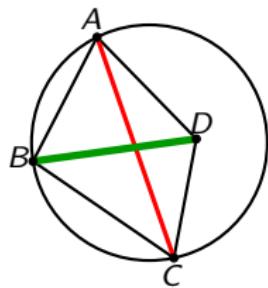
În acest caz triunghiurile
formate de diagonale au
"cele mai mici unghiuri"
congruente \Rightarrow
nu putem "distinge"
între cele două diagonale

Muchii ilegale

- ▶ **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie $\mathcal{T}_{AC}, \mathcal{T}_{BD}$ triangulările date de diagonalele AC , respectiv BD . Muchia AC este **ilegală** dacă
$$\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD}).$$

Muchii ilegale

- ▶ **Conceptul de muchie ilegală.** Fie $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ fixate astfel ca $ABCD$ să fie un patrulater convex; fie $\mathcal{T}_{AC}, \mathcal{T}_{BD}$ triangulările date de diagonalele AC , respectiv BD . Muchia AC este **ilegală** dacă $\min A(\mathcal{T}_{AC}) < \min A(\mathcal{T}_{BD})$.
- ▶ **Criteriu geometric** pentru a testa dacă o muchie este legală: muchia AC , adiacentă cu triunghiurile ΔACB și ΔACD este ilegală dacă și numai dacă punctul D este situat în interiorul cercului circumscris ΔABC .



Muchii ilegale

- ▶ **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.
- ▶ Pentru puncte $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Muchii ilegale

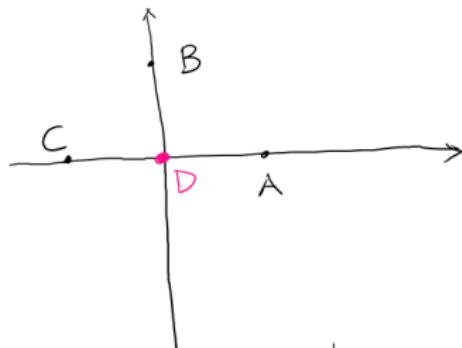
- ▶ **Criteriu numeric / analitic** pentru a testa dacă o muchie este ilegală.

- ▶ Pentru puncte $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, $D = (x_D, y_D)$:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

- ▶ (i) Punctele A, B, C, D sunt conciclice $\Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) = 0$.
- (ii) Fie A, B, C astfel ca ABC să fie un viraj la stânga. Un punct D este situat în interiorul cercului circumscris $\Delta ABC \Leftrightarrow \Theta(A, B, C, D) > 0$.

Exemplu



$$A = (1, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (-1, 0)$$

- ABC este viraj la stânga

$$D = (0, 0)$$

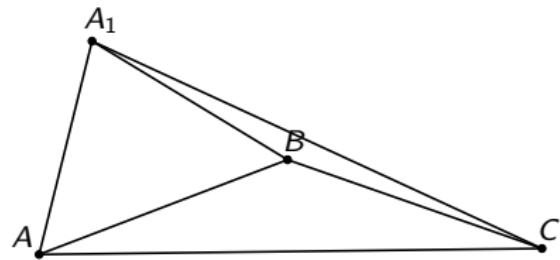
$$\bullet \text{ (H)} (A, B, C, D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

D este în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC$.

Exercițiu: calculați pt. $E = (0, -1)$ și $F = (0, -2)$

Muchii ilegale, triangulări legale

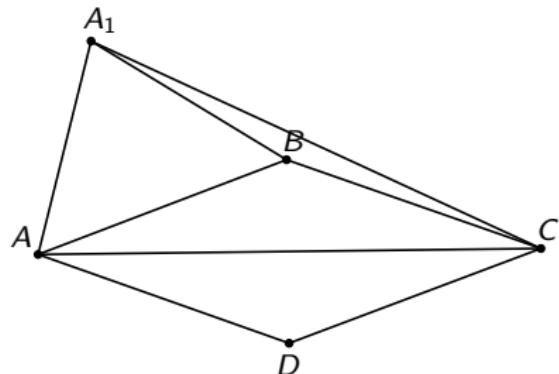
- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



D

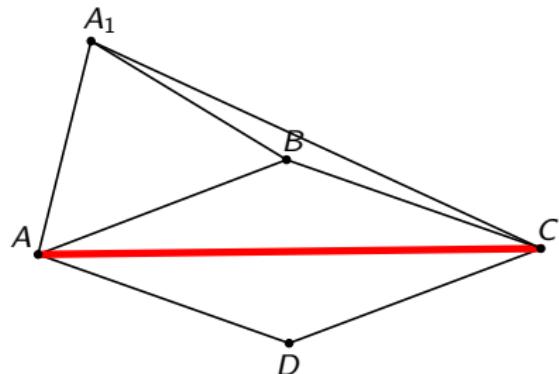
Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



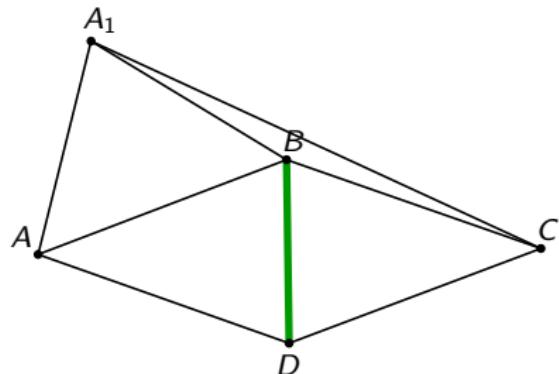
Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local).



Muchii ilegale, triangulări legale

- **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Prințr-un flip, vectorul unghiurilor crește.

Muchii ilegale, triangulări legale

- ▶ **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Prințr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- ▶ **Concluzie (reformulare):** Fie \mathcal{T} o triangulare cu o muchie ilegală e , fie \mathcal{T}' triangularea obținută din \mathcal{T} prin *flip*-ul muchiei e . Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.

Muchii ilegale, triangulări legale

- ▶ **Concluzie:** Dacă muchia AC este ilegală, printr-un *flip* (înlocuirea ei cu BD), cel mai mic unghi poate fi mărit (local). Prințr-un flip, vectorul unghiurilor crește.
- ▶ **Concluzie (reformulare):** Fie \mathcal{T} o triangulare cu o muchie ilegală e , fie \mathcal{T}' triangularea obținută din \mathcal{T} prin *flip*-ul muchiei e . Atunci $A(\mathcal{T}') > A(\mathcal{T})$.
- ▶ **Triangulare legală:** nu are muchii ilegale. **Fapt:** O triangulare legală a unei mulțimi cu n puncte poate fi determinată printr-un algoritm incremental randomizat, cu complexitate-timp medie $O(n \log n)$.

Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

► **Propoziție.** Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte din plan.

- (i) Orice triangulare unghiular optimă este legală.
- (ii) Dacă \mathcal{P} este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.

Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

► **Propoziție.** Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte din plan.

- (i) Orice triangulare unghiular optimă este legală.
- (ii) Dacă \mathcal{P} este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.

► **Teoremă.** Fie \mathcal{P} o mulțime de n puncte din plan, în poziție generală. Triangularea unghiular optimă poate fi construită, folosind un algoritm incremental randomizat, în timp mediu $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ memorie medie.

Algoritmi avansați

C11 - Diagrame Voronoi

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020 - 2021

Definiție, proprietăți elementare

Diagrame Voronoi și triangulări Delaunay

Un algoritm eficient

Problema oficiilor poștale

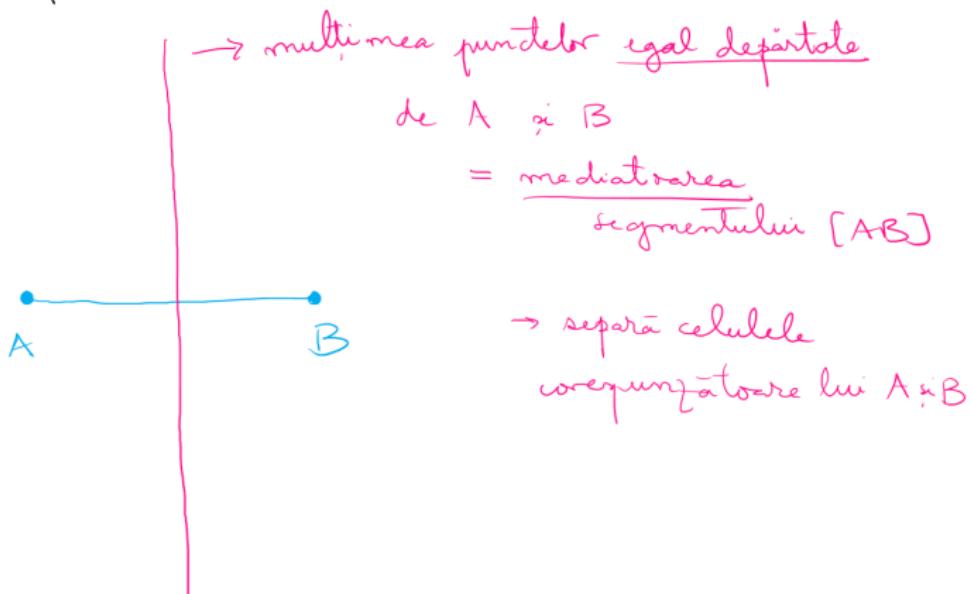
- ▶ Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?

Problema oficiilor poștale

- ▶ Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?
- ▶ Ideea de a delimita “zone de influență” a apărut cu multă vreme în urmă (de exemplu în [lucrările lui Descartes](#), dar și în [legătură cu alte probleme](#); este utilizată în mod curent în varii domenii. În plus, astfel de “împărțiri” apar [în natură](#).

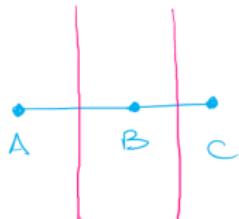
Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

1)

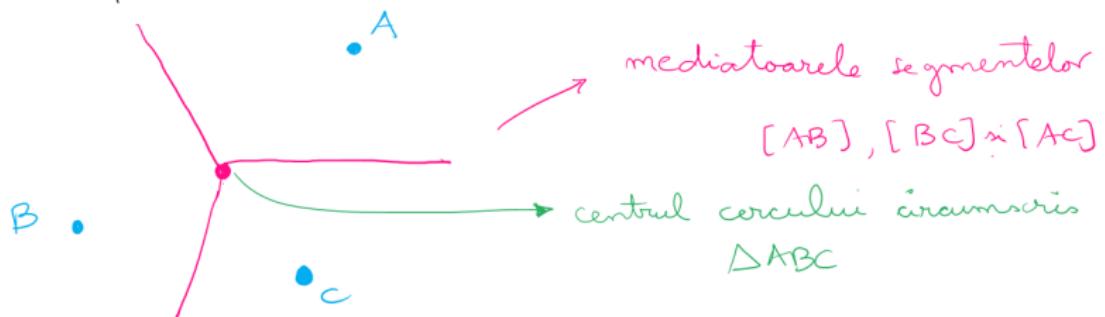
2 puncte distințte

Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

2) 3 puncte distincte, coliniare

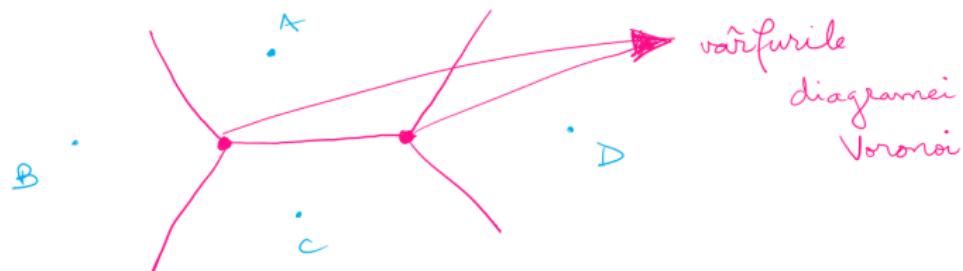


3) 3 puncte necoliniare

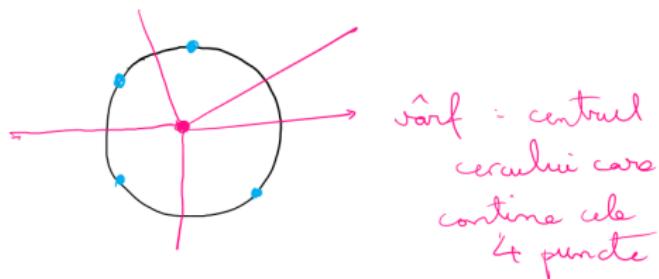


Exemple - diagrame Voronoi în context 2D

4) 4 puncte neclimni ore , necociclice



4') 4 puncte concidice



Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .
- ▶ Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.

Formalizare

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 , numite **situri**.
- ▶ **Diagrama Voronoi** a lui \mathcal{P} (notată $\text{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului \mathbb{R}^2 în n celule $\mathcal{V}(P_1), \dots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intersecție a muchiilor).
- ▶ **Atenție!** Vârfurile lui $\text{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din \mathcal{P} .
- ▶ Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.
- ▶ Diagrame Voronoi pot fi construite pentru **diverse funcții distanță** (e.g. **distanța Manhattan**); forma celulelor depinde de **forma "cercului"** în raport cu funcția distanță respectivă.

Structura unei diagrame Voronoi

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\text{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n - 1$ drepte paralele între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- ▶ În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).

Structura unei diagrame Voronoi

- ▶ Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de situri (puncte) din planul \mathbb{R}^2 .
- ▶ Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane:

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} h(P_i, P_j),$$

unde $h(P_i, P_j)$ este semiplanul determinat de mediatoarea segmentului $[P_i P_j]$ care conține punctul P_i . În particular: fiecare celulă este o mulțime convexă.

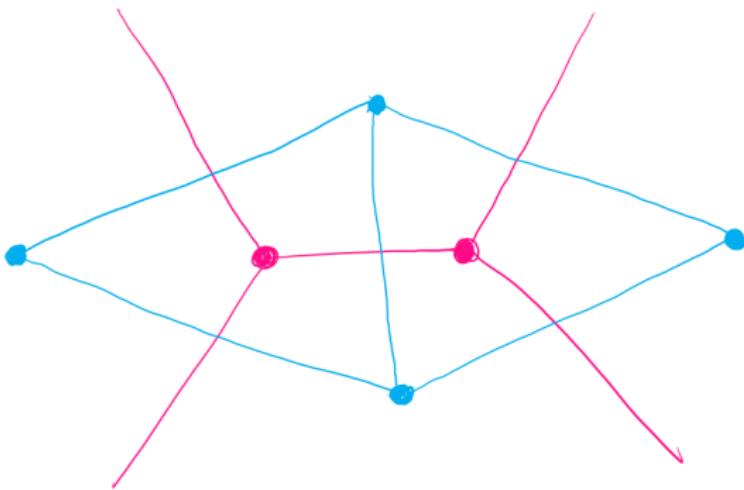
Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

- ▶ Dacă toate punctele sunt coliniare, atunci diagrama Voronoi asociată $\text{Vor}(\mathcal{P})$ conține $n - 1$ drepte paralele între ele (în particular, pentru $n \geq 3$, ea nu este conexă).
- ▶ În caz contrar, diagrama este conexă, iar muchiile sale sunt fie *segmente*, fie *semidrepte* (cui corespund acestea?).
- ▶ **Propoziție.** Fie o mulțime cu n situri. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime



Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
- Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
- Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
- Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

► Construcție:

- Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
- Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
- Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
- Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)

► **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ Construcție:
 - Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
 - Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
 - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
 - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .
- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ Construcție:
 - Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
 - Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
 - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
 - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .
- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.
- ▶ **Teoremă.** Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui \mathcal{P} .

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

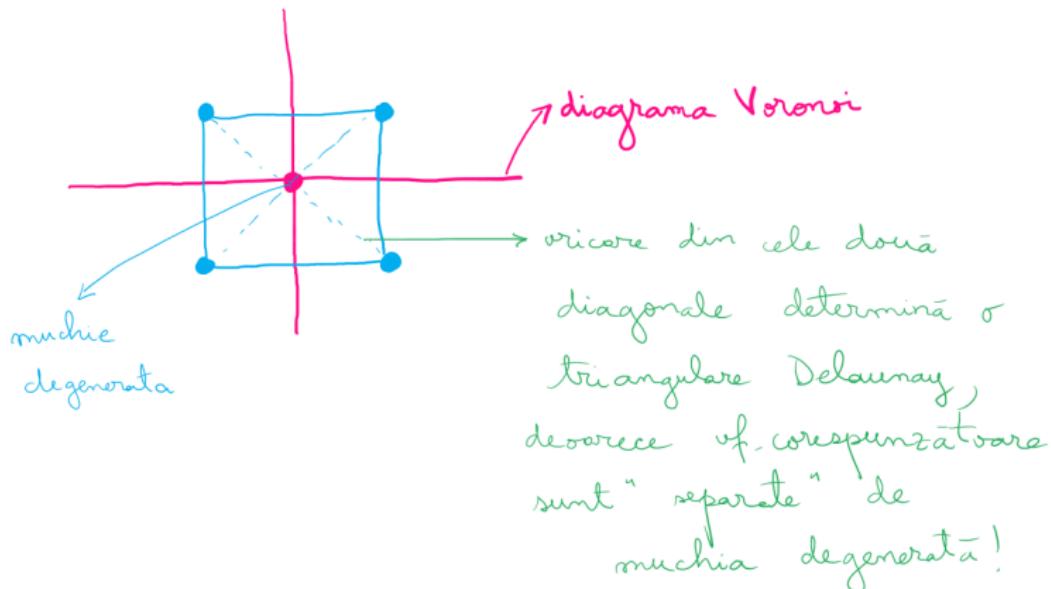
- ▶ Construcție:
 - Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
 - Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
 - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
 - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .
- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.
- ▶ **Teoremă.** Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui \mathcal{P} .
- ▶ **Întrebare:** Cum “funcționează” această construcție când punctele din \mathcal{P} sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat? (cf. slide următor)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- ▶ Construcție:
 - Mulțime de puncte \mathcal{P} în planul $\mathbb{R}^2 \implies$
 - Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P}) \implies$
 - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună \implies
 - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- ▶ **Propoziție.** Fie \mathcal{T} o triangulare a lui \mathcal{P} . Atunci \mathcal{T} este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din \mathcal{T} cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui \mathcal{P} .
- ▶ **Teoremă.** O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.
- ▶ **Teoremă.** Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui \mathcal{P} .
- ▶ **Întrebare:** Cum "funcționează" această construcție când punctele din \mathcal{P} sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat? (cf. slide următor)
- ▶ Exemple (alte link-uri):
 - <http://www.cs.cornell.edu/info/people/chew/Delaunay.html>
 - <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/taxivoro.html>



Legătura cu triangulările legale / unghiular optime - cazul unui pătrat



Algoritmul lui Fortune [1987]

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.

Detalii:

<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.

Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.

Algoritmul lui Fortune [1987]

- ▶ Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.
Detalii:
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.
Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- ▶ **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.

Algoritmul lui Fortune [1987]

- ▶ Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.
Detalii:
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.
Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- ▶ **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.
- ▶ **Inconvenient:** la întâlnirea unui vîrf al diagramei, dreapta de baleiere nu a întâlnit încă toate siturile (puncte din \mathcal{P}) care determină acest vîrf!

Algoritmul lui Fortune [1987]

- ▶ Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul \mathbb{R}^2 . Complexitate: $O(n \log n)$.
Detalii:
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi>.
Suport vizual disponibil pe grupul MSTeams.
- ▶ **Principiu (paradigmă):** sweep line / dreaptă de baleiere.
- ▶ **Inconvenient:** la întâlnirea unui vârf al diagramei, dreapta de baleiere nu a întâlnit încă toate siturile (puncte din \mathcal{P}) care determină acest vârf!
- ▶ **Adaptare:** nu reținem informația legată de intersecția dintre dreapta de baleiere și diagramă, ci doar informația legată de partea diagramei care nu mai poate fi influențată de punctele situate de dincolo de dreapta de baleiere. Din punct de vedere practic, apare o reuniune de arce de parabolă (**curbă parabolică**), ceea ce este situat deasupra acestei curbe nu mai poate fi influențat de evenimentele nedetectate.

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - problematizare

la treceea
 prin vîrful
 V al diagramei
 Voronoi,
 dreapta de
 baleiere
 nu a
 întâlnit
 (nuă) toate
 perpendicularele
 care îl determină
 (în figura ar trebui detectat înainte de a trece prin P_2 și P_3)

Diagramme Voronoi - algoritmul lui Fortune

Panoul de control al simulării

General

Număr de puncte: 30

Animație

Pauza între cadrele animației: 100 milisecunde

Baleiere manuală

Increment baleiere: 1 pixel(0)

Triangulare

Comută triangulația Delaunay

Arată și muchile Voronoi

Adaptarea paradigmei dreptei de baleiere

Diagramme Voronoi - algoritmul lui Fortune

The diagram illustrates the Fortune's algorithm for generating Voronoi diagrams. It features a blue parabolic hull at the bottom, labeled 'arc de parabolă' with a pink arrow pointing to its left side. Inside the hull, several green diagonal lines represent the edges of the Voronoi diagram. A point labeled 'P' is shown with a pink arrow pointing to it from the left. Handwritten notes in green and pink are overlaid on the diagram:

- 'arc de parabolă:'
- 'nu stiu încă în ce celule sunt situate'
- 'celule sunt pt.'
- 'pt. egal depărtate de P, și d'

Panoul de control al simulării

General

- Număr de puncte: 30
-

Animatie

- Pauza între cadrele animației: 100 milisecunde
-

Baleiere manuală

- Increment baleiere: pixel(i)
-

Triangularare

-
- Arată și muchile Voronoi

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - curba parabolică

Diagramme Voronoi - algoritmul lui Fortune

curba parabolica

Panoul de control al simulării

General

Număr de puncte: 30

Animație

Pauza între cadrele animației: 100 milisecunde

Baleiere manuală

Increment baleiere: 1 pixeli

Triangulare

Comută triangulaarea Delaunay

Arată și muchile Voronoi

Despre curba parabolică (I)

- **Curba parabolică (*beach line*):**

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- Este o reuniune de arce de parabolă.
- Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- Este o reuniune de arce de parabolă.
- Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

- Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;

Despre curba parabolică (I)

► Curba parabolică (*beach line*):

- Este o reuniune de arce de parabolă.
- Un punct de pe curba parabolică este egal depărtat de situl care determină arcul de parabolă și dreapta de baleiere. Presupunem că dreapta de baleiere d are ecuația $y = 0$, iar situl P_i , situat deasupra lui d (adică $y_i > 0$) are coordonatele (x_i, y_i) . Locul geometric al punctelor egal depărtate de d și P_i are ecuația

$$y = \frac{1}{2y_i}x^2 - \frac{x_i}{y_i}x + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2y_i}.$$

- Punctele de racord ale arcelor de parabolă aparțin muchiilor diagramei Voronoi;
- Curba parabolică este x -monotonă, adică orice dreaptă verticală o intersectează *exact* într-un punct (la ce folosește această proprietate?).

Despre curba parabolică (II)

- Modificarea curbei parabolice:

Despre curba parabolică (II)

- ▶ Modificarea curbei parabolice:
 - ▶ **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care "la început" este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n - 1)$ arce.

Despre curba parabolică (II)

► Modificarea curbei parabolice:

- **Site event / eveniment de tip locație.** (i) La trecerea printr-un sit apare un arc de parabolă (care “la început” este degenerat) și, reciproc, apariția unui nou arc este posibilă doar la trecerea printr-un sit. (ii) În consecință, la un moment fixat, curba parabolică are maxim $(2n - 1)$ arce.
- **Circle event / eveniment de tip cerc.** (i) La întâlnirea punctului inferior al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri și este tangent la dreapta de baleiere dispare un arc de parabolă și, reciproc, arcele de parabolă dispar doar la acest tip de evenimente. (ii) Un eveniment de tip cerc este dat de trei arce de parabolă consecutive de pe curba parabolică, deci trebuie testate toate tripletele consecutive de arce, pe măsură ce ele apar. (iii) Un astfel de eveniment este asociat unui vîrf al diagramei Voronoi. (iv) Există triplete de arce consecutive (muchiile ale diagramei Voronoi) pentru care muchiile nu se întâlnesc. (v) Unele evenimente de tip cerc detectate nu au loc.

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - formalizare

- ▶ **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente

Adaptarea paradigmăi dreptei de baleiere - formalizare

- ▶ **Statut:** structura curbei parabolice (succesiunea de arce de parabolă); este modificat de două tipuri de evenimente
- ▶ **Evenimente:**
 - ▶ site event / eveniment de tip locație: întâlnirea unui sit, adică a unui punct din mulțimea \mathcal{P} (apare un arc de parabolă)
 - ▶ circle event / eveniment de tip cerc: întâlnirea unui “punct inferior” al unui cerc care trece prin cel puțin trei situri, tangent la dreapta de baleiere (dispare un arc de parabolă) - **vârf al diagramei Voronoi**

Structuri de date utilizate

- **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlănțuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente Q și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente Q și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlățuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente Q și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlăncuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente Q și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;
 - ▶ **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi

Structuri de date utilizate

- ▶ **Diagrama Voronoi:** listă dublu înlățuită DCEL \mathcal{D}
- ▶ **Evenimente:** coadă de priorități / evenimente Q și arbore de căutare binar echilibrat. Sunt reținute evenimentele de tip sit, precum și evenimentele de tip cerc - acestea fiind detectate pe parcursul algoritmului.
- ▶ **Statut:** Structura curbei parabolice - arbore de căutare binar echilibrat \mathcal{T} .
 - ▶ **pe frunze:** siturile care au arce active, la ajungerea într-un sit se inserează un arc, la ajungerea într-un eveniment de tip cerc se șterge un arc;
 - ▶ **în nodurile interne:** punctele de racord ale arcelor de parabolă (memorate simbolic) - corespund muchiilor diagramei Voronoi
 - ▶ pointeri (eventual nuli) de la frunze către evenimentele de tip cerc; de la nodurile interne către muchiile diagramei Voronoi

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită \mathcal{D} .

1. Inițializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEVSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlănțuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlănțuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** $\text{PROCESSEvSIT}(p_i)$, cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** $\text{PROCESSEvCERC}(\gamma)$, cu $\gamma = \text{arc(ev)} \in \mathcal{T}$

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEvSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** **PROCESSEvCERC**(γ), cu $\gamma = \text{arc}(\text{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în \mathcal{T} corespund semidreptelor diagramei Voronoi.
Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul să și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui \mathcal{D} .

Algoritmul

Input. O mulțime de situri $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de situri în plan.

Output. Diagrama Voronoi $\text{Vor}(\mathcal{P})$ în interiorul unui *bounding box*, descrisă printr-o listă dublu înlăncuită \mathcal{D} .

1. Initializări: coada de evenimente $\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P}$ (preprocesare: ordonare după y), statut (arbore balansat) $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$; listă dublu înlăncuită $\mathcal{D} \leftarrow \emptyset$.
2. **while** $\mathcal{Q} \neq \emptyset$
3. **do** elimină evenimentul cu cel mai mare y din \mathcal{Q}
4. **if** evenimentul **ev** este un eveniment de tip sit
5. **then** **PROCESSEvSIT**(p_i), cu $p_i = \text{ev}$
6. **else** **PROCESSEvCERC**(γ), cu $\gamma = \text{arc}(\text{ev}) \in \mathcal{T}$
7. Nodurile interne încă prezente în \mathcal{T} corespund semidreptelor diagramei Voronoi.
Consideră un *bounding box* care conține toate vârfurile diagramei Voronoi în interiorul să și leagă semidreptele de acest *bounding box*, prin actualizarea corespunzătoare a lui \mathcal{D} .
8. Traversează muchiile pentru a adăuga celulele diagramei și pointeri corespunzători.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi (\mathcal{D}), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.

Procedura PROCESSEvSIT (p_i)

1. Dacă \mathcal{T} este vidă, inserează p_i și revine, dacă nu continuă cu 2.–5.
2. Caută în \mathcal{T} arcul α situat deasupra lui p_i . Dacă frunza reprezentând α are un pointer către un eveniment de tip cerc **ev** din \mathcal{Q} , atunci **ev** este o alarmă falsă și trebuie șters.
3. Înlocuiește frunza lui \mathcal{T} care reprezintă α cu un subarbore cu trei frunze: cea din mijloc reține situl p_i și celelalte două situl p_j asociat lui α . Memorează perechile reprezentând punctele de racord în două noduri interne. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar.
4. Generează noi înregistrări de tip semi-muchie în structura diagramei Voronoi (\mathcal{D}), pentru muchiile care separă celulele $V(p_i)$ și $V(p_j)$, corespunzând celor două noi puncte de racord.
5. Verifică tripletele de arce consecutive nou create, pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în \mathcal{Q} și adaugă pointeri de la nodurile lui \mathcal{T} la evenimentele corespunzătoare din \mathcal{Q} .

Procedura PROCESSEvCERC (γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).

Procedura PROCESSEVERCC(γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în \mathcal{D} . Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.

Procedura PROCESSEVERCC(γ)

1. Șterge frunza $\gamma \in \mathcal{T}$ care corespunde arcului de cerc α care dispare. Actualizează în nodurile interne perechile care corespund punctelor de racord. Efectuează rebalansări în \mathcal{T} , dacă este necesar. Șterge toate evenimentele de tip cerc care îi corespund lui α (cu ajutorul pointerilor de la predecesorul și succesorul lui γ în \mathcal{T}).
2. Adaugă centrul cercului care determină evenimentul ca înregistrare de tip vârf în \mathcal{D} . Creează înregistrări de tip semi-muchie corespunzând noului punct de racord de pe linia parabolică și asignează pointeri corespunzători.
3. Verifică tripletele de arce consecutive nou create (care au foștii vecini ai lui α în centru), pentru a verifica dacă muchiile corespunzătoare punctelor de racord se întâlnesc. Dacă da, inserează evenimente de tip cerc în \mathcal{Q} și adaugă pointeri de la nodurile lui \mathcal{T} la evenimentele corespunzătoare din \mathcal{Q} .

Rezultate principale

- ▶ **Teoremă.** *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip “line sweep” de complexitate $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ spațiu de memorie.*

Rezultate principale

- ▶ **Teoremă.** *Diagrama Voronoi a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip “line sweep” de complexitate $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ spațiu de memorie.*
- ▶ **Teoremă.** *Triangularea Delaunay a unei mulțimi de n situri poate fi determinată cu un algoritm de tip “line sweep” de complexitate $O(n \log n)$, folosind $O(n)$ spațiu de memorie.*

Algoritmi avansați

C12 - Elemente de programare liniară

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. al II-lea, 2020-2021

Motivație: turnarea pieselor în mătrițe

Intersecții de semiplane - abordare cantitativă

Dualitate

Intersecții de semiplane - abordare calitativă. Programare liniară

Turnarea pieselor în matrițe



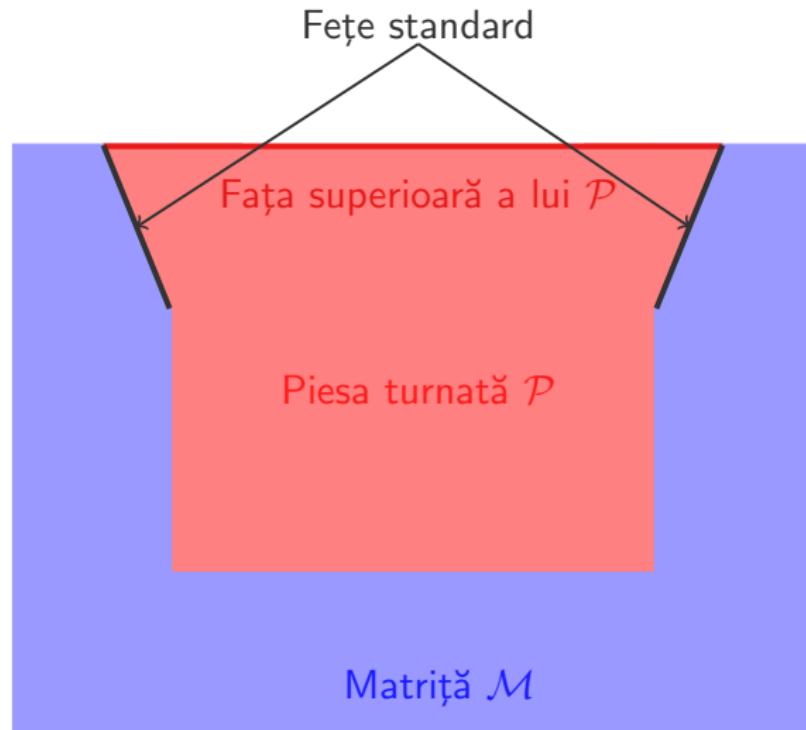
Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Turnarea pieselor în matrițe



Problematizare

- ▶ Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.

Problematizare

- ▶ Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- ▶ Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.



Problematizare

- ▶ Turnarea pieselor în matrițe și extragerea lor fără distrugerea matriței.
- ▶ Neajunsuri: unele obiecte pot rămâne blocate; există obiecte pentru care nu există o matriță adecvată.



- ▶ **Problema studiată.** Dat un obiect, există o matriță din care să poată fi extras?

Convenții

- Obiectele: **poliedrale**.

Convenții

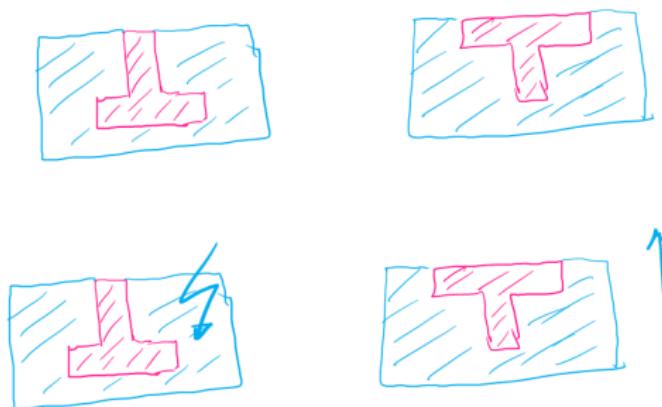
- ▶ Obiectele: **poliedrale**.
- ▶ Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect \mathcal{P} îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

Convenții

- ▶ Obiectele: **poliedrale**.
- ▶ Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect \mathcal{P} îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- ▶ Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)

Convenții

- ▶ Obiectele: **poliedrale**.
- ▶ Matrițele: formate dintr-o singură piesă; fiecărui obiect \mathcal{P} îi este asociată o matriță $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$
- ▶ Obiectul: extras printr-o singură translație (sau o succesiune de translații)
- ▶ **Alegerea orientării:** diverse orientări ale obiectului pot genera diverse matrițe.



Terminologie și convenții

- ▶ **Față superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o față superioară (este orizontală, este singura care nu este adjacente cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard \hat{f} a matriței.

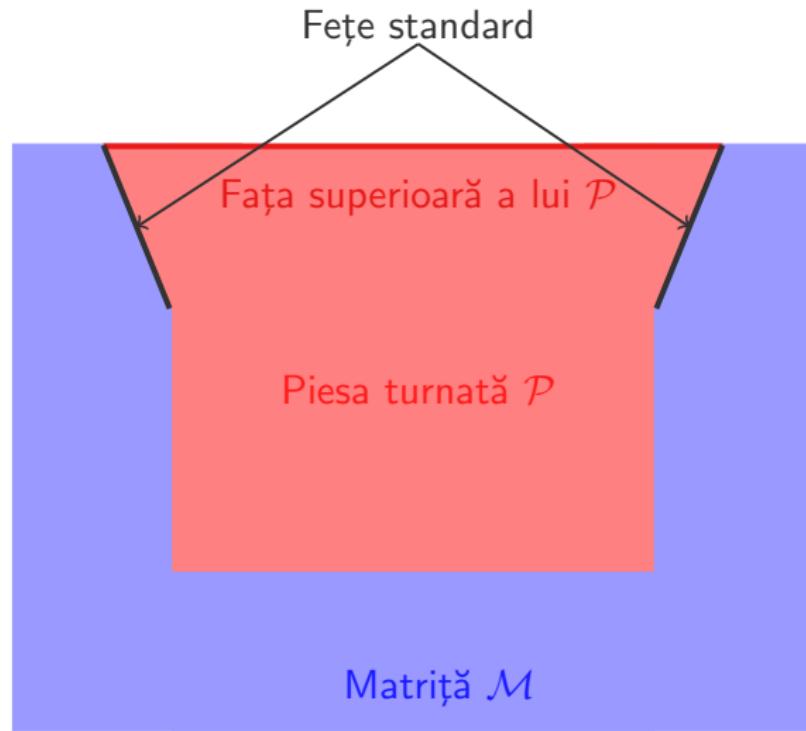
Terminologie și convenții

- ▶ **Față superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o față superioară (este orizontală, este singura care nu este adjacente cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard \hat{f} a matriței.
- ▶ **Obiect care poate fi turnat (castable):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.

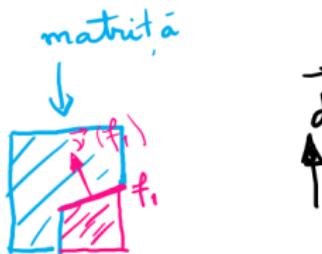
Terminologie și convenții

- ▶ **Față superioară:** prin convenție, obiectele au (cel puțin) o față superioară (este orizontală, este singura care nu este adjacente cu matrița). Celelalte fețe: **standard**; orice față standard f a obiectului corespunde unei fețe standard \hat{f} a matriței.
- ▶ **Obiect care poate fi turnat (castable):** există o orientare pentru care acesta poate fi turnat și apoi extras printr-o translație (succesiune de translații): *direcție admisibilă*.
- ▶ **Convenții:** Matrița este paralelipipedică și are o cavitate corespunzătoare obiectului; fața superioară a obiectului (și a matriței) este perpendiculară cu planul Oxy .

Turnarea pieselor în matrițe

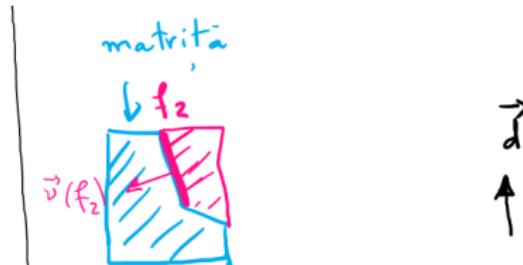


Descrierea proprietății de a putea extrage o piesă într-o direcție dată



$\vec{v}(f_1)$ = normala exterioră la f_1

față f_1 a mătriței blochează extragerea în direcția $d \Leftrightarrow$
 $m(\vec{v}(f_1), \vec{d}) < 90^\circ$
 $\Leftrightarrow \cos(\vec{v}(f_1), \vec{d}) > 0$



$\vec{v}(f_2)$

\vec{f}_2 nu blochează

$\Leftrightarrow m(\vec{v}(f_2), \vec{d}) \geq 90^\circ$
 $\Leftrightarrow \cos(\vec{v}(f_2), \vec{d}) \leq 0$

Această condiție trebuie verificată pînă trecute fetele!

Detaliere (scriere în coordonate)

$$\text{Date } v, w \in \mathbb{R}^3 : \cos(\varphi(v, w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \left(\begin{array}{l} \langle v, w \rangle = \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \end{array} \right)$$

Cum vom să extragem obiectul "în sus", f.r.g. putem pp.

$$\text{că } \vec{d} = (d_x, d_y, 1) \quad (\text{de ce?})$$

Fie f o fată fixată a obiectului; $\vec{r}(f) = (x_x, x_y, x_z)$

Japtul că fată \hat{f} a mătriței nu blochează extragerea în direcția $\vec{d} \Leftrightarrow$

$$\langle \vec{r}(f), \vec{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$x_z \cdot d_x + x_y \cdot d_y + x_z \leq 0 \quad (*_f)$$

Fixată $f (\rightarrow (x_x, x_y, x_z))$ cantică $\vec{d} (d_x, d_y)$ a.c. să fie verificată $(*_f)$

$(*_f)$: inegalitate care descrie un templu

Fundamente geometrice

- ▶ **Condiție necesară:** direcția de extragere \vec{d} trebuie să aibă componenta z pozitivă
- ▶ **În general:** o față standard \hat{f} a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exterioară $\vec{n}(f)$ la față f și \vec{d} este mai mic de 90° împiedică translația în direcția \vec{d}

Fundamente geometrice

- ▶ **Condiție necesară:** direcția de extragere \vec{d} trebuie să aibă componenta z pozitivă
- ▶ **În general:** o față standard \hat{f} a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exteroară $\vec{\nu}(f)$ la față f și \vec{d} este mai mic de 90° împiedică translația în direcția \vec{d}
- ▶ **Propoziție.** *Un poliedru \mathcal{P} poate fi extras din matrița sa $M_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția \vec{d} dacă și numai dacă \vec{d} face un unghi de cel puțin 90° cu normala exteroară a fiecărei fețe standard a lui \mathcal{P} .*
- ▶ **Reformulare.** Dat \mathcal{P} , trebuie găsită o direcție \vec{d} astfel încât, pentru fiecare față standard f , unghiul dintre \vec{d} și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90° .

Fundamente geometrice

- ▶ **Condiție necesară:** direcția de extragere \vec{d} trebuie să aibă componenta z pozitivă
- ▶ **În general:** o față standard \hat{f} a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exteroară $\vec{\nu}(f)$ la față f și \vec{d} este mai mic de 90° împiedică translația în direcția \vec{d}
- ▶ **Propoziție.** *Un poliedru \mathcal{P} poate fi extras din matrița sa $M_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția \vec{d} dacă și numai dacă \vec{d} face un unghi de cel puțin 90° cu normala exteroară a fiecărei fețe standard a lui \mathcal{P} .*
- ▶ **Reformulare.** Dat \mathcal{P} , trebuie găsită o direcție \vec{d} astfel încât, pentru fiecare față standard f , unghiul dintre \vec{d} și $\vec{\nu}(f)$ să fie cel puțin 90° .
- ▶ **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație ($*_f$), care corespunde unui semiplan.

Fundamente geometrice

- ▶ **Condiție necesară:** direcția de extragere \vec{d} trebuie să aibă componenta z pozitivă
- ▶ **În general:** o față standard \hat{f} a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exteroară $\vec{v}(f)$ la față f și \vec{d} este mai mic de 90° împiedică translația în direcția \vec{d}
- ▶ **Propoziție.** *Un poliedru \mathcal{P} poate fi extras din matrița sa $M_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția \vec{d} dacă și numai dacă \vec{d} face un unghi de cel puțin 90° cu normala exteroară a fiecărei fețe standard a lui \mathcal{P} .*
- ▶ **Reformulare.** Dat \mathcal{P} , trebuie găsită o direcție \vec{d} astfel încât, pentru fiecare față standard f , unghiul dintre \vec{d} și $\vec{v}(f)$ să fie cel puțin 90° .
- ▶ **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- ▶ **Analitic - toate fețele:** Fie \mathcal{P} un poliedru; față superioară fixată, paralelă cu planul Oxy . Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.

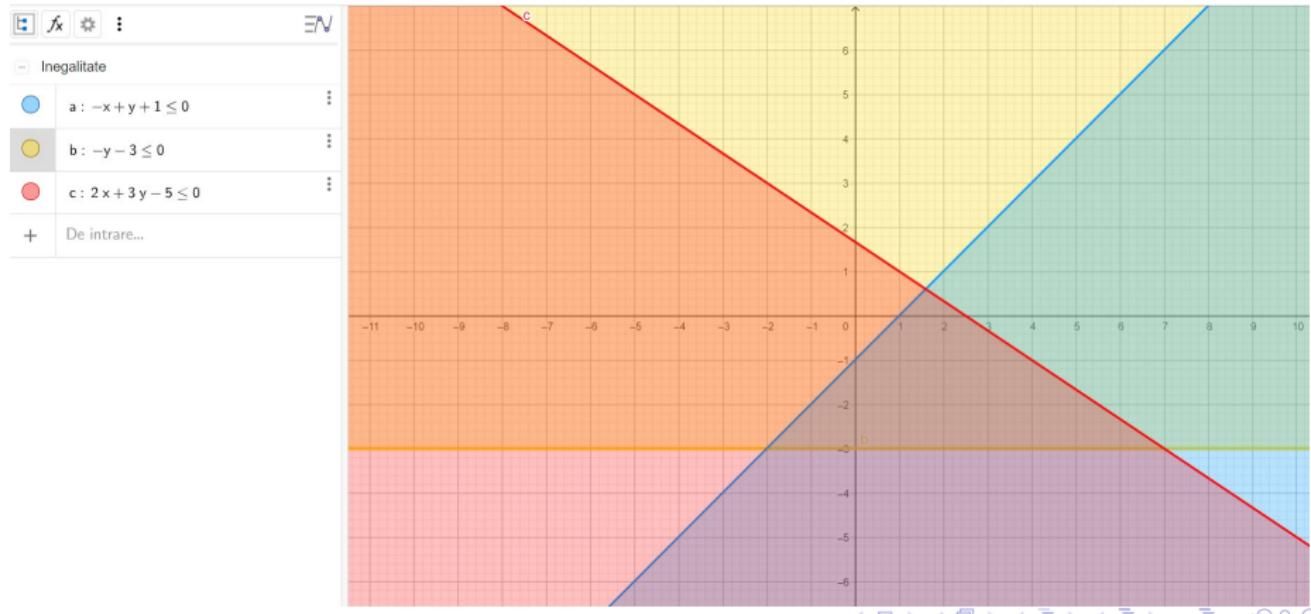
Fundamente geometrice

- ▶ **Condiție necesară:** direcția de extragere \vec{d} trebuie să aibă componenta z pozitivă
- ▶ **În general:** o față standard \hat{f} a matriței (corespunzătoare unei fețe f a piesei) pentru care unghiul dintre normala exteroară $\vec{v}(f)$ la față f și \vec{d} este mai mic de 90° împiedică translația în direcția \vec{d}
- ▶ **Propoziție.** *Un poliedru \mathcal{P} poate fi extras din matrița sa $M_{\mathcal{P}}$ prin translație în direcția \vec{d} dacă și numai dacă \vec{d} face un unghi de cel puțin 90° cu normala exteroară a fiecărei fețe standard a lui \mathcal{P} .*
- ▶ **Reformulare.** Dat \mathcal{P} , trebuie găsită o direcție \vec{d} astfel încât, pentru fiecare față standard f , unghiul dintre \vec{d} și $\vec{v}(f)$ să fie cel puțin 90° .
- ▶ **Analitic - pentru o față:** fiecare față definește un semiplan, i.e. dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă revine la a rezolva o inecuație $(*_f)$, care corespunde unui semiplan.
- ▶ **Analitic - toate fețele:** Fie \mathcal{P} un poliedru; față superioară fixată, paralelă cu planul Oxy . Considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (i.e. toate fețele standard ale poliedrului). A determina o direcție admisibilă revine la a determina o direcție care verifică toate inegalitățile de tip $(*)$, deci un sistem de inecuații.
- ▶ **Concluzie:** Pentru a stabili dacă există o direcție admisibilă, trebuie stabilit dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

Exemple

1. Intersecția semiplanelor

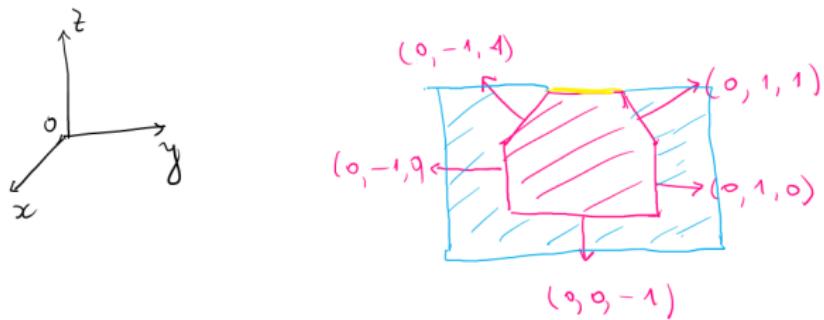
$$-x + y + 1 \leq 0; \quad -y - 3 \leq 0; \quad 2x + 3y - 5 \leq 0.$$



Exemple

2 (a). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, -1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0).$$



$$\begin{aligned} (0, -1, 1) &\rightsquigarrow 0 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \leq 0 \\ (0, 1, 1) &\rightsquigarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \leq 0 \\ (0, 1, 0) &\rightsquigarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \leq 0 \\ (0, 0, -1) &\rightsquigarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + (-1) \leq 0 \\ (0, -1, 0) &\rightsquigarrow 0 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \leq 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} y \geq 1 \\ y \leq -1 \\ y \leq 0 \\ -1 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Temă

2 (b). Normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, -1), (0, -1, -1), (0, -1, 0).$$

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

- (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

- (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
- (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

- (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
- (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

► Rezultate: (descrise în detaliu ulterior)

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

- (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
- (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

► Rezultate: (descrise în detaliu ulterior)

- (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-temp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*

Intersecții de semiplane - probleme studiate, rezultate

► Probleme studiate:

- (i) **Caracterizare explicită:** Să se determine care sunt elementele (vârfuri, muchii, etc.) care determină o intersecție de semiplane.
- (ii) **Calitativ:** Să se stabilească dacă o intersecție de semiplane este nevidă.

► Rezultate: (descrise în detaliu ulterior)

- (i) *Intersecția unei mulțimi de n semiplane poate fi determinată cu complexitate-timp $O(n \log n)$ și folosind $O(n)$ memorie.*
- (ii) *Se poate stabili cu complexitate-timp medie $O(n)$ dacă o intersecție de semiplane este nevidă.*
- (ii)' *Fie \mathcal{P} un poliedru cu n fețe. Se poate decide dacă \mathcal{P} reprezintă un obiect care poate fi turnat cu complexitate-timp medie $O(n^2)$ și folosind $O(n)$ spațiu. În caz afirmativ, o matriță și o direcție admisibilă în care poate fi extras \mathcal{P} este determinată cu aceeași complexitate-timp.*

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- ▶ Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din \mathbb{R}^2 ; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

(i) Caracterizare explicită - Formularea problemei

- ▶ Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ o mulțime de semiplane din \mathbb{R}^2 ; semiplanul H_i dat de o relație de forma

$$a_i x + b_i y + c_i \leq 0$$

- ▶ Intersecția $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ este dată de un sistem de inecuații; este o mulțime poligonală convexă, mărginită de cel mult n muchii (poate fi vidă, mărginită, nemărginită,...)

Dualitate – motivație euristică

- De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2
- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan?**

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2
- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan?**
- ▶ 2

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2
- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan?**
- ▶ 2
- ▶ Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2
- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan?**
- ▶ 2
- ▶ Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- ▶ **DA: dualitate**

Dualitate – motivație euristică

- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **un punct în plan?**
- ▶ 2
- ▶ De câte informații (numerice) este nevoie pentru a indica **o dreaptă în plan?**
- ▶ 2
- ▶ Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?
- ▶ **DA: dualitate**
- ▶ Cum se reflectă / respectă diferite proprietăți geometrice (de exemplu incidența) prin dualitate?

Dualitate – definiții

- unei punct $p = (p_x, p_y)$ din planul \mathbb{R}^2 (plan primal) i se asociază o dreaptă notată p^* (în planul dual)

$$p^*: (y = p_x \cdot x - p_y)$$

duala lui p

- unei drepte neverticale $d: (y = m_d \cdot x + n_d)$ din planul primal i se asociază un punct din planul dual, notat d^* :

$$d^* = (m_d, -n_d)$$

dualul lui d

Obs. Această transformare este polaritatea față de parabola $y = \frac{x^2}{2}$

Dualitate – proprietăți elementare

1) Păstrează incidenta

$$p \in d \Leftrightarrow d^* \in p^*$$

Exemplu

Pl. primal

$$d : (y = 2x + 1)$$

$$p = (1, 3)$$

Pl. dual

$$d^* = (2, -1)$$

$$p^* : (y = x - 3)$$

Dualitate – proprietăți elementare

2) Păstrează "ordinea"

p este situat deasupra dreptei d (neverticală) \Leftrightarrow
 d^* ——— ——— p^*

Exemplu

$$P = (1, 1)$$

$$d: (y = 0)$$

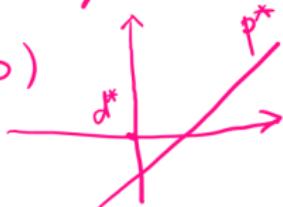


Pl. primal

Pl. dual

$$P^*: (y = x - 1)$$

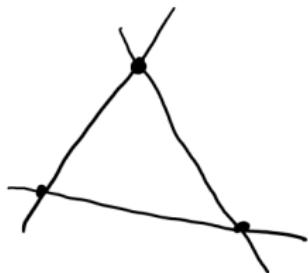
$$d^* = (0, 0)$$



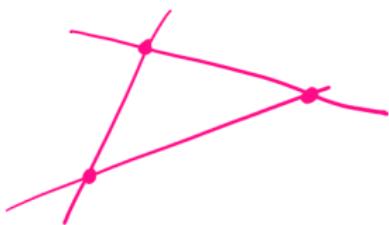
Dualitate – “dicționar” concepte și configurații

| Plan primal | Plan dual |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Punct p | Dreaptă neverticală p^* |
| Dreaptă neverticală d | Punct d^* |
| Dreaptă determinată de două puncte | Punct de intersecție a două drepte |
| Punctul p deasupra dreptei d | Punctul d^* deasupra dreptei p^* |
| Segment | Fascicul de drepte (<i>wedge</i>) |

Exemplu

Configurația primală

3 puncte necoliniare
și dreptele determinate
de ele

Configurația duală

3 drepte care nu
trece prin același punct
și punctele determinate
de ele

Semiplane inferioare și semiplane superioare

- Exemple.



semiplan inferior



semiplan superior

Semiplane inferioare și semiplane superioare

- Exemple.



semiplan inferior



semiplan superior

- Dat un semiplan delimitat de o dreaptă neverticală

$$ax + by + c \leq 0$$

cum se decide dacă este semiplan inferior sau semiplan superior?

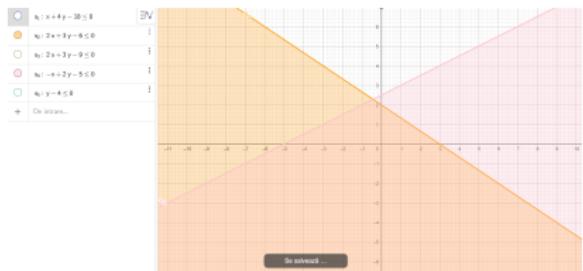
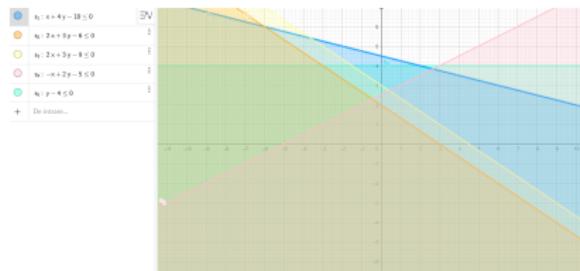
Exemple:

$$-x + y + 3 \leq 0 \quad \text{semiplan inferior}$$

$$x - y - 3 \leq 0 \quad \text{semiplan superior}$$

Semiplane inferioare și semiplane superioare

Când determinăm o intersecție de semiplane inferioare / superioare, nu sunt neapărat relevante toate semiplanele. În figura de mai jos sunt considerate cinci semiplane inferioare s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 dintre care relevante pentru intersecție sunt doar s_2 și s_4 .

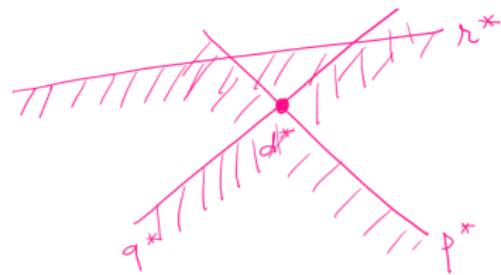


Observația fundamentală

Fie p, q cu $p \neq q$ și dreapta $d = pq$ neverticală. Fie r un punct situat dedesubtul dreptei $d = pq$. Care este configurația duală?



planul primal:
 r este dedesubtul dreptei $pq = d$



planul dual:
 d^* este dedesubtul dreptei r^*

Observația fundamentală

- ▶ Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte.

Observația fundamentală

- ▶ Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte.
- ▶ **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ ($p, q \in \mathcal{P}$) participă la frontieră superioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} ?

Observația fundamentală

- ▶ Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte.
- ▶ **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ ($p, q \in \mathcal{P}$) participă la frontieră superioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} ?
- ▶ **A:** Toate celelalte puncte sunt dedesubtul dreptei $d = pq$.

Observația fundamentală

- ▶ Fie \mathcal{P} o mulțime de puncte.
- ▶ **Q:** Ce înseamnă că un segment $[pq]$ ($p, q \in \mathcal{P}$) participă la frontieră superioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} ?
- ▶ **A:** Toate celelalte puncte sunt dedesubtul dreptei $d = pq$.
- ▶ Configurația duală: Punctul d^* este situat dedesubtul dreptelor corespunzătoare celorlalte puncte și, prin trecere la semiplane inferioare, “conțează” semiplanele inferioare determinate de p^* și q^* .

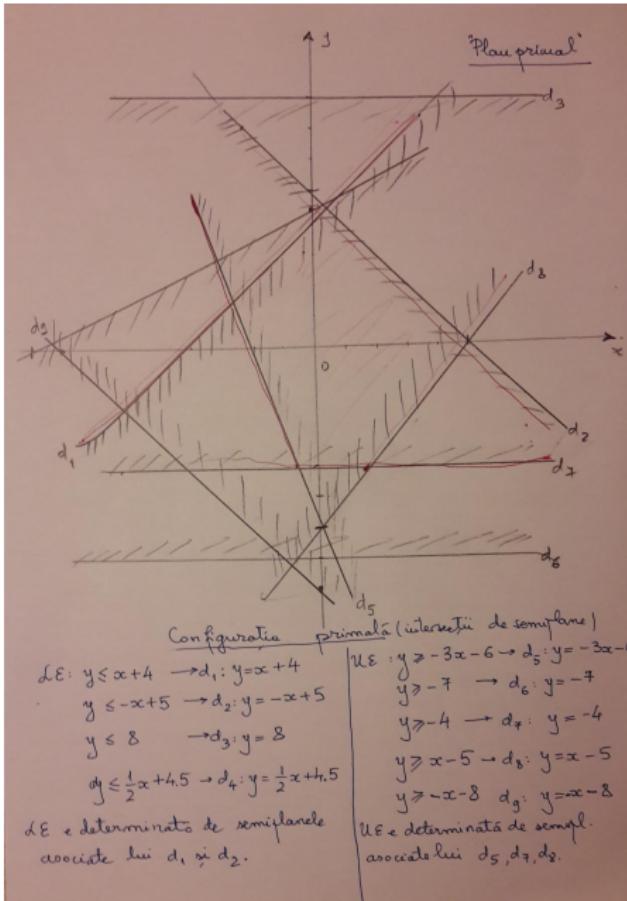
Concluzie pentru (i) - abordarea cantitativă

- ▶ Pentru a determina o intersecție de **semiplane inferioare** se consideră mulțimea de puncte din planul dual și se determină **frontiera superioară** a acoperirii convexe a mulțimii respective. Un rezultat analog are loc pentru intersecții de **semiplane superioare** și **frontiera inferioară** a acoperirii convexe a mulțimii de puncte duale.
În consecință:

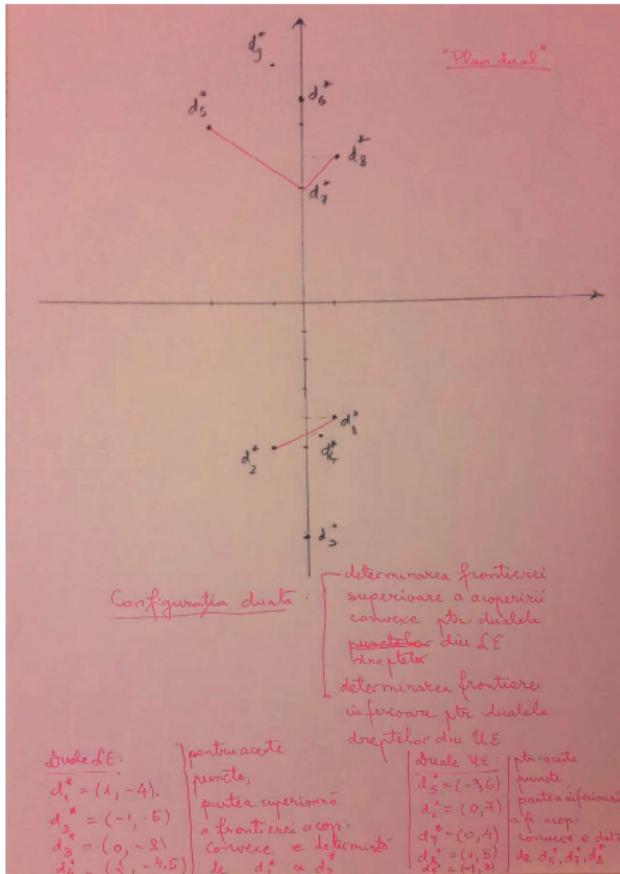
Concluzie pentru (i) - abordarea cantitativă

- ▶ Pentru a determina o intersecție de **semiplane inferioare** se consideră mulțimea de puncte din planul dual și se determină **frontiera superioară** a acoperirii convexe a mulțimii respective. Un rezultat analog are loc pentru intersecții de **semiplane superioare** și **frontiera inferioară** a acoperirii convexe a mulțimii de puncte duale. În consecință:
 - ▶ **Teoremă** *Intersecția a n semiplane poate fi descrisă cu un algoritm de complexitate $O(n \log n)$.*

Exemplu



Exemplu



(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (note 1, 2 și 3) pe 2 aparate (noteate X și Y).

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- ▶ Sunt realizate 3 produse (noteate 1, 2 și 3) pe 2 aparete (noteate X și Y).
- ▶ Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

| | X | Y | Obs. | Nr. prod. | Spațiu | Profit |
|---|-----|-----|----------------------|-------------------------|-----------|--------|
| 1 | 10 | 27 | pe ambele | x_1 | $0.1m^2$ | 10 |
| 2 | 12 | 19 | în paralel, simultan | x_2 , respectiv y_2 | $0.2m^2$ | 13 |
| 3 | 8 | 24 | în paralel, simultan | x_3 , respectiv y_3 | $0.05m^2$ | 9 |

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- ▶ Sunt realizate 3 produse (noteate 1, 2 și 3) pe 2 aparate (noteate X și Y).
- ▶ Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

| | X | Y | Obs. | Nr. prod. | Spațiu | Profit |
|---|----|----|----------------------|-------------------------|-----------|--------|
| 1 | 10 | 27 | pe ambele | x_1 | $0.1m^2$ | 10 |
| 2 | 12 | 19 | în paralel, simultan | x_2 , respectiv y_2 | $0.2m^2$ | 13 |
| 3 | 8 | 24 | în paralel, simultan | x_3 , respectiv y_3 | $0.05m^2$ | 9 |

- ▶ Aparatele X și Y au un interval de menenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de $50m^2$.

(ii) Abordarea calitativă. Motivație

- Sunt realizate 3 produse (noteate 1, 2 și 3) pe 2 apарате (noteate X și Y).
- Ciclul de producție este săptămânal (40h de lucru). Timpul de producție (în minute) pentru produs este indicat în tabel.

| | X | Y | Obs. | Nr. prod. | Spațiu | Profit |
|---|-----|-----|----------------------|-------------------------|-----------|--------|
| 1 | 10 | 27 | pe ambele | x_1 | $0.1m^2$ | 10 |
| 2 | 12 | 19 | în paralel, simultan | x_2 , respectiv y_2 | $0.2m^2$ | 13 |
| 3 | 8 | 24 | în paralel, simultan | x_3 , respectiv y_3 | $0.05m^2$ | 9 |

- Aparatele X și Y au un interval de menenanță de 5%, respectiv 7% din timpul de lucru. Spațiul total de depozitare este de $50m^2$.
- Modelul matematic:

Constrângeri:

$$\begin{array}{ll} 0.1x_1 + 0.2(x_2 + y_2) + 0.05(x_3 + y_3) \leq 50 & \text{Spațiu de depozitare} \\ 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 0.95 \cdot 40 \cdot 60 & \text{Timp aparatul } X \\ 27x_1 + 19y_2 + 24y_3 \leq 0.93 \cdot 40 \cdot 60 & \text{Timp aparatul } Y \end{array}$$

Cerință:

$$\text{maximizează}(10x_1 + 13(x_2 + y_2) + 9(x_3 + y_3))$$

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

$$\text{maximizează } (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

maximizează $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

$$\text{maximizează } (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

- date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,d}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(c_j)_{j=\overline{1,d}}$

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

maximizează $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

- date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,d}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(c_j)_{j=\overline{1,d}}$
- funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

maximizează $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

- date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,d}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(c_j)_{j=\overline{1,d}}$
- funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$
- constrângerile: inegalitățile (1)

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

$$\text{maximizează } (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

- date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,d}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(c_j)_{j=\overline{1,d}}$
- funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$
- constrângerile: inegalitățile (1)
- regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei

Problematizare, terminologie

- Formulare generală (în spațiul d -dimensional):

$$\text{maximizează } (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$$

date constrângerile liniare (inegalități)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1d}x_d \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2d}x_d \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nd}x_d \leq b_n \end{array} \right. \quad (1)$$

- Denumiri:

- date de intrare: $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,d}}$, $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, $(c_j)_{j=\overline{1,d}}$
- funcție obiectiv: $(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_dx_d)$
- constrângerile: inegalitățile (1)
- regiune realizabilă (fezabilă): intersecția semispațiilor care definesc constrângerile problemei

- Obs. Interpretare a cerinței de maximizare: Maximizarea funcției obiectiv revine la a determina un punct al cărui vector de poziție are proiecția maximă de direcția dată de vectorul $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_d)$.

Exemplu - cazul 1D ($d = 1$)Coordonata x :

maximizează (cx)

funcție obiectiv

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x \leq b_1 \text{ - interval} \\ a_2x \leq b_2 \\ \vdots \\ a_nx \leq b_n \end{array} \right. \rightarrow \text{constrainte}$$

Exemplu concret: maximizează $(2x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x \leq 6 \\ -2x \leq 4 \\ 6x \leq 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \leq 2, \quad x \in (-\infty, 2] \\ x \geq -2, \quad x \in [-2, \infty) \\ x \leq 1, \quad x \in (-\infty, 1] \end{array}$$

intervalul $[-2, 1]$. regiune fizabilă



Maximul funcției obiectiv este egal cu 2 și se obține pînă $x=1$.

Exemplu - cazul 1D ($d = 1$)Coordonata x :

maximizează (cx)

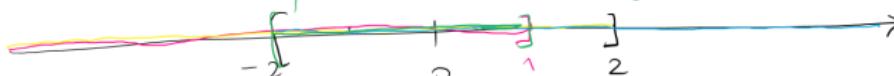
funcție obiectiv

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x \leq b_1 \text{ - interval} \\ a_2x \leq b_2 \\ \vdots \\ a_nx \leq b_n \end{array} \right. \rightarrow \text{constrainte}$$

Exemplu concret: maximizează $(2x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x \leq 6 \\ -2x \leq 4 \\ 6x \leq 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \leq 2, \quad x \in (-\infty, 2] \\ x \geq -2, \quad x \in [-2, \infty) \\ x \leq 1, \quad x \in (-\infty, 1] \end{array}$$

intervalul $[-2, 1]$. regiune fizabilă



Maximul funcției obiectiv este egal cu 2 și se obține pînă $x = 1$.

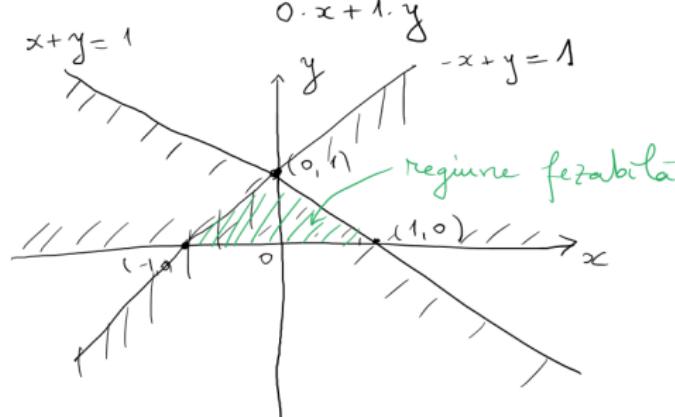
Lemă. (Pentru $d = 1$) Un program liniar 1-dimensional poate fi rezolvat în timp liniar.

Exemplu - cazul 2D ($d = 2$)

Notăm coordonatele cu x și y .

maximizarea (y) , $\vec{c} = (0, 1)$, date

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -y \leq 0 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$$



Funcția are valoarea maximă 1, atinsă în punctul $(0, 1)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

- ▶ **Convenții și terminologie:**

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

► Convenții și terminologie:

- Coordonatele: x și y

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

► Convenții și terminologie:

- Coordonatele: x și y
- Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

► Convenții și terminologie:

- Coordonatele: x și y
- Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
- Constrângerile: h_1, h_2, \dots, h_n (semiplane); se notează
 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
- Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

► Convenții și terminologie:

- Coordonatele: x și y
 - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
 - Constrângerile: h_1, h_2, \dots, h_n (semiplane); se notează
 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
 - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$.
- **Program liniar:** (H, \vec{c}) .
- **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.

Probleme de programare liniară în plan ($d = 2$)

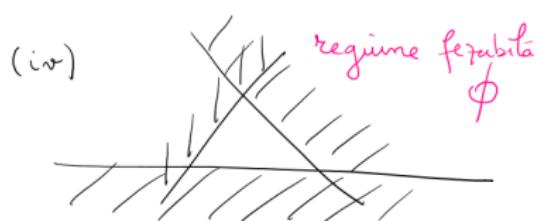
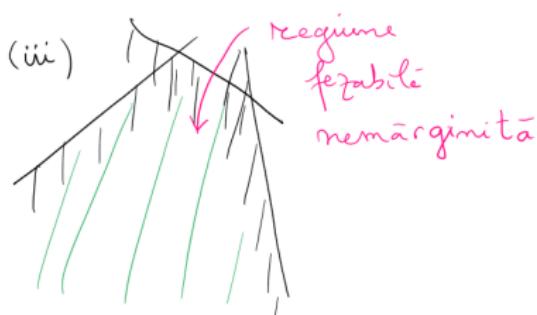
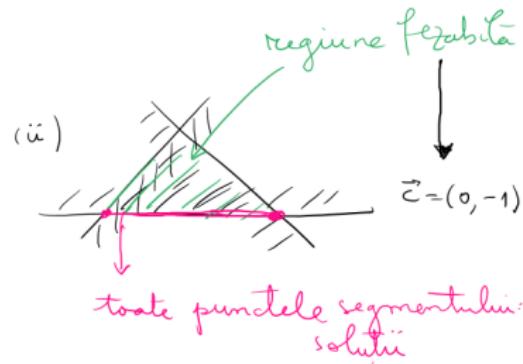
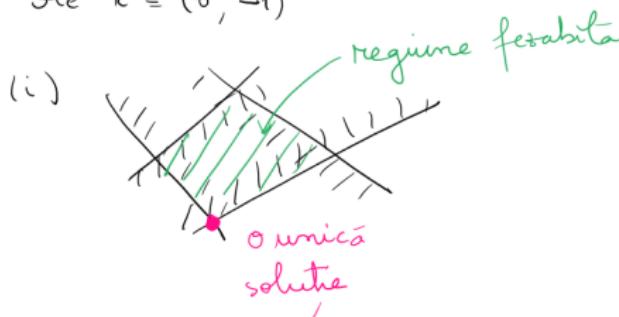
► Convenții și terminologie:

- Coordonatele: x și y
 - Funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x x + c_y y$, unde $\vec{c} = (c_x, c_y)$.
 - Constrângерile: h_1, h_2, \dots, h_n (semiplane); se notează
 $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
 - Regiunea fezabilă este $C = h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_n$.
- **Program liniar:** (H, \vec{c}) .
- **Scop:** Se caută $p \in C$ astfel ca $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă.

- Pentru o problemă de programare liniară în plan pot fi distinse patru situații: (i) o soluție unică; (ii) toate punctele de pe o muchie sunt soluții; (iii) regiunea fezabilă este nemărginită și pot fi găsite soluții de-a lungul unei semidrepte; (iv) regiunea fezabilă este vidă.

Cazul 2D ($d = 2$) - exemple de regiuni fezabile

Își $\vec{e} = (0, -1)$



Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- Principii:

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

- ▶ Principii:
 - ▶ constrângerile sunt adăugate una câte una;

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

► Principii:

- ▶ constrângerile sunt adăugate una câte una;
- ▶ presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
- ▶ sunt adăugate la început constrângeri care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M \gg 0$ și se definesc noi constrângerile convenabile;

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

► Principii:

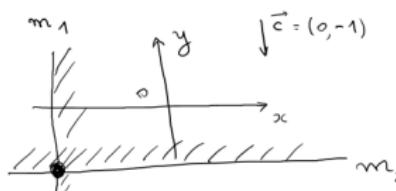
- ▶ constrângerile sunt adăugate una câte una;
- ▶ presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
- ▶ sunt adăugate la început constrângeri care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M >> 0$ și se definesc noi constrângerile convenabile;
- ▶ se lucrează cu convenția de ordonare lexicografică, astfel încât există o **unică** soluție optimă.

Algoritm incremental pentru rezolvarea unei probleme de programare liniară 2D

► Principii:

- ▶ constrângerile sunt adăugate una câte una;
 - ▶ presupunem că la fiecare pas soluția (punctul de maxim) există, apoi actualizează;
 - ▶ sunt adăugate la început constrângerile care garantează mărginirea programului liniar, definite astfel: se alege $M >> 0$ și se definesc noi constrângerile convenabile;
 - ▶ se lucrează cu convenția de ordonare lexicografică, astfel încât există o **unică** soluție optimă.
- Vom considera în continuare $\vec{c} = (0, -1)$, iar noile constrângerile vor fi:

$$m_1 : x \geq -M, \quad m_2 : y \geq -M.$$



Notății

- Fie (H, \vec{c}) un program liniar cu constrângerile h_1, h_2, \dots, h_n . Se notează:

$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \dots, h_i\}$, **mulțime de semiplane**

$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$, **regiune fezabilă**.

Notăția este pentru $i = 0, \dots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \quad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

Notății

- Fie (H, \vec{c}) un program liniar cu constrângerile h_1, h_2, \dots, h_n . Se notează:

$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \dots, h_i\}$, **mulțime de semiplane**

$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$, **regiune fezabilă**.

Notăția este pentru $i = 0, \dots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \quad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:

Notății

- Fie (H, \vec{c}) un program liniar cu constrângerile h_1, h_2, \dots, h_n . Se notează:

$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \dots, h_i\}$, **mulțime de semiplane**

$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$, **regiune fezabilă**.

Notăția este pentru $i = 0, \dots, n$, în particular

$$H_0 = \{m_1, m_2\} \quad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:

(i) $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n = C$.

Notării

- Fie (H, \vec{c}) un program liniar cu constrângerele h_1, h_2, \dots, h_n . Se notează:

$H_i = \{m_1, m_2, h_1, h_2, \dots, h_i\}$, multime de semiplane

$C_i = m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_i$, regiune fezabilă.

Notăria este pentru $i = 0, \dots, n$, în particular

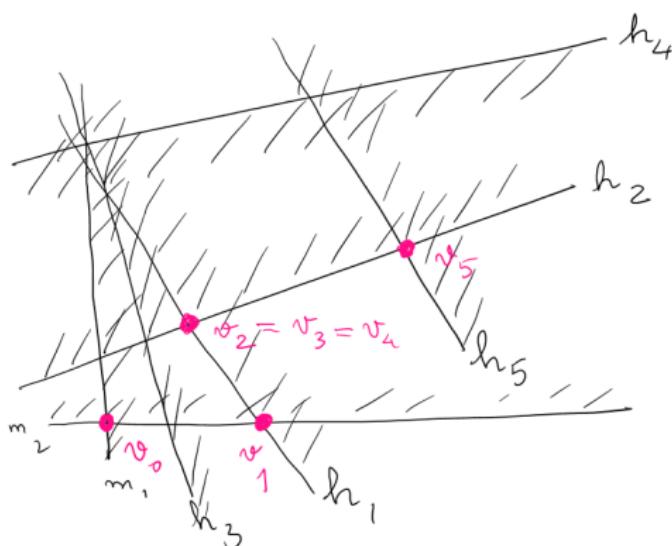
$$H_0 = \{m_1, m_2\} \quad C_0 = m_1 \cap m_2.$$

- Observații:

(i) $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n = C$.

(ii) Pentru fiecare i , regiunea fezabilă C_i , dacă este nevidă, are un vîrf care reprezintă o soluție optimă a problemei (H_i, \vec{c}) . Punctul este notat cu v_i (depinde de alegerea lui m_1 și m_2).

Exemplu



$v_3 = v_2$, pt. că $v_2 \in h_3$
 $v_4 = v_3 = v_2$ pt. că $v_3 \in h_4$
 $v_5 \neq v_4$ pt. că $v_4 \notin h_5$

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i . Sunt două situații:

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i . Sunt două situații:
 - (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i . Sunt două situații:
 - (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
 - (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i . Sunt două situații:
 - (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
 - (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci
fie $C_i = \emptyset$

Observații

- Fie $1 \leq i \leq n$, presupunem că C_{i-1} și v_{i-1} sunt determinate. Considerăm h_i . Sunt două situații:

- (i) dacă $v_{i-1} \in h_i$, atunci $v_i = v_{i-1}$,
- (ii) dacă $v_{i-1} \notin h_i$, atunci

fie $C_i = \emptyset$

fie $v_i \in d_i$, unde d_i este dreapta care mărginește h_i . În acest caz, găsirea lui v_i revine la găsirea lui $p \in d_i$ care maximizează $f_c(p)$, date constrângerile deja existente ($p \in h, \forall h \in H_i$). **De fapt, aceasta este o problemă pe programare liniară 1-dimensională, care are complexitatea-timp liniară, adică $O(i)$.**

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
 - ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.
1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care
 maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care
 maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

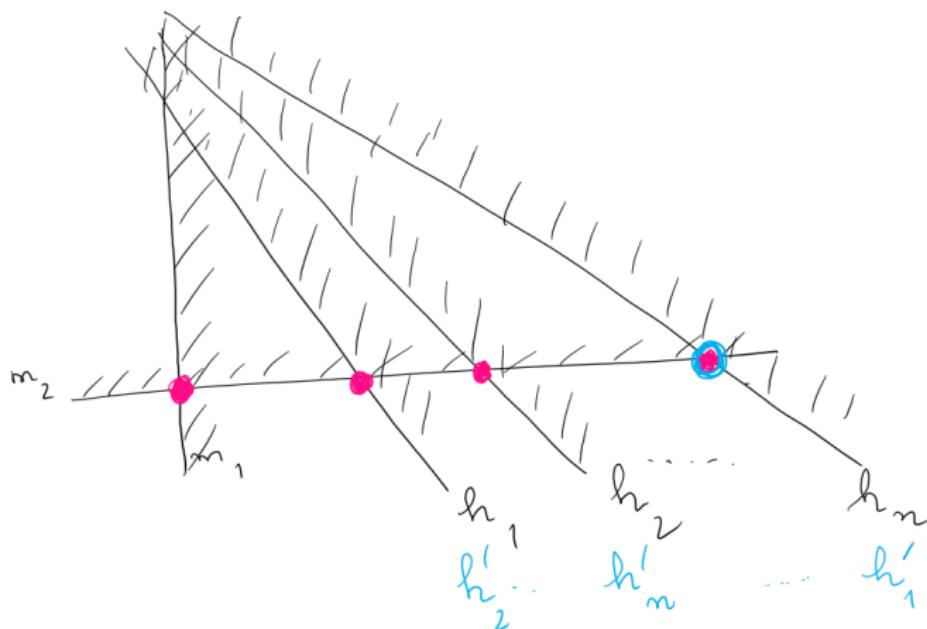
1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care
 maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există
8. **then** raportează "nefezabil" **end**

Algoritm LPMARG2D (H, \vec{c}, m_1, m_2)

- ▶ **Input.** Un program liniar $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ din \mathbb{R}^2
- ▶ **Output.** Dacă $(H \cup \{m_1, m_2\}, \vec{c})$ nu e realizabil (fezabil), raportează. În caz contrar, indică punctul cel mai mic lexicografic p care maximizează $f_{\vec{c}}(p)$.

1. $v_0 \leftarrow$ "colțul" lui c_0
2. fie h_1, h_2, \dots, h_n semiplanele din H
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4. **do if** $v_{i-1} \in h_i$
5. **then** $v_i \leftarrow v_{i-1}$
6. **else** $v_i \leftarrow$ punctul p de pe d_i care
 maximizează $f_{\vec{c}}(p)$ date constrângerile din H_i
7. **if** p nu există
8. **then** raportează "nefezabil" **end**
9. **return** v_n

Comentariu - ordinea contează



Algoritm aleatoriu

- ▶ **Pasul 2.** este înlocuit cu:
2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.

Algoritm aleatoriu

- ▶ Pasul 2. este înlocuit cu:
2'. Calculează o permutare arbitrară a semiplanelor, folosind o procedură adecvată.
- ▶ Algoritmul incremental LPMARG2D are complexitate-timp $O(n^2)$, iar varianta bazată pe alegerea aleatorie a semiplanelor are complexitate-timp medie $O(n)$ (n este numărul semiplanelor).

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (I)

În $(X_i)_{i=1..n}$ variabila aleatoare definită astfel:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } v_{i-1} \in h_i \text{ (adică este ales pasul 5)} \\ & \text{la iteratia } i \\ 1, & \dots \quad v_{i-1} \notin h_i \text{ (pasul 6)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{timpul total } \sum_{i=1}^n X_i O(i) + O(n).$$

Valoarea așteptată (timpul mediu):

$$E \left[\sum_{i=1}^n X_i O(i) \right] \stackrel{\text{altă notație}}{=} \mu \left(\sum_{i=1}^n X_i O(i) \right) = \sum_{i=1}^n O(i) \cdot \underline{\mu(X_i)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n O(i) \cdot \frac{2}{i} = O(n)$$

↑
afirmație

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- ▶ Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- ▶ Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.

Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- ▶ Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- ▶ Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.
 - Care este probabilitatea ca $v_{n-1} \notin h_n$, adică la adăugarea lui h_n , vârful v_{n-1} să fie modificat în v_n ? \Leftrightarrow

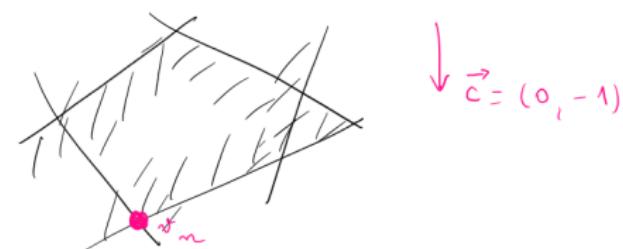
Analiza complexității-timp - varianta algoritmului probabilist (II)

- ▶ Demonstrăm că $\mu(X_i) \leq \frac{2}{i}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, adică probabilitatea ca $v_{i-1} \notin h_i$ este $\leq \frac{2}{i}$.
- ▶ Arătăm inegalitatea pentru $i = n$ (cazul general, analog). Presupunem algoritmul terminat, v_n vârful optim.
 - Care este probabilitatea ca $v_{n-1} \notin h_n$, adică la adăugarea lui h_n , vârful v_{n-1} să fie modificat în v_n ? \Leftrightarrow
 - Care este probabilitatea ca eliminând unul dintre semiplane să fie modificat vârful optim v_n ?

- nr. cazuri posibile: n
- nr. cazuri survenințe modificare: 2

$$\Rightarrow \text{probabilitatea de a modifica} \leq \frac{2}{n}$$

analog (tr. i - q.e.d.)



Probleme de localizare

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2020-2021

Căutare ortogonală – motivație

Exemplu.

Baza de date a unei bănci: informații numerice referitoare la clienți: data nașterii, număr de copii, venitul lunar, valoarea depozitelor, valoarea ratelor de plată, valoarea comisioanelor plătite anual, etc. → stocarea se realizează folosind puncte dintr-un spațiu numeric d -dimensional \mathbb{R}^d .

Căutare ortogonală – motivație

Exemplu.

Baza de date a unei bănci: informații numerice referitoare la clienți: data nașterii, număr de copii, venitul lunar, valoarea depozitelor, valoarea ratelor de plată, valoarea comisioanelor plătite anual, etc. → stocarea se realizează folosind puncte dintr-un spațiu numeric d -dimensional \mathbb{R}^d .

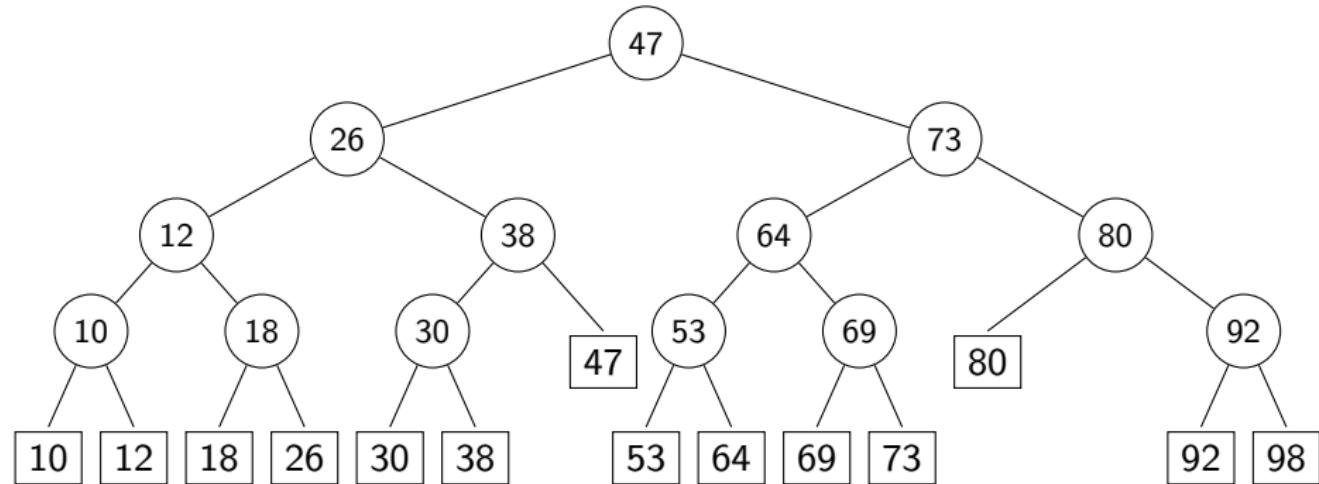
A identifica un “grup-țintă” de clienți (de exemplu pentru lansarea unui produs), având anumite caracteristici – e.g. vârsta între 30-40 ani, 2-4 copii, un venit lunar între 3000-5000 lei, etc. revine la efectuarea căutării prin care să fie determinate punctele situate într-un “paralelipiped” d -dimensional.

Căutare 1-dimensională: formularea problemei

Cadru. Fie $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime de numere reale. Fie $I = [x, x'] \subset \mathbb{R}$ un interval real. Se dorește determinarea elementelor lui M situate în intervalul I .

Structura de date utilizată: Arbore binar de căutare echilibrat.

Exemplu de arbore \mathcal{T}



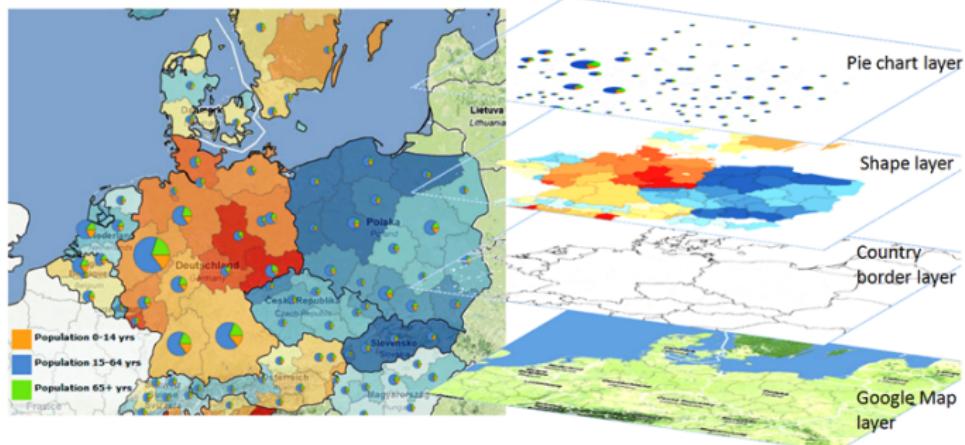
Rezultatul principal - căutare 1D

Teoremă. Fie M o mulțime de n puncte din \mathbb{R} . Mulțimea M poate fi memorată într-un arbore binar de căutare echilibrat, folosind $O(n)$ memorie și cu timp de construcție $O(n \log n)$. Determinarea unor puncte dintr-un interval I poate fi realizată cu complexitate-timp $O(k + \log n)$, unde k este numărul de puncte din $M \cap I$.

Rezultatul principal - căutare 2D

Teoremă. Fie M o mulțime de n puncte din planul \mathbb{R}^2 . Un arbore de intervale (range tree) pentru M necesită $O(n \log n)$ memorie și poate fi construit în timp $O(n \log n)$. Determinarea unor puncte dintr-un dreptunghi D poate fi realizată cu complexitate-timp $O(k + \log^2 n)$, unde k este numărul de puncte din $M \cap D$.

Motivație - reprezentarea datelor geo-spațiale



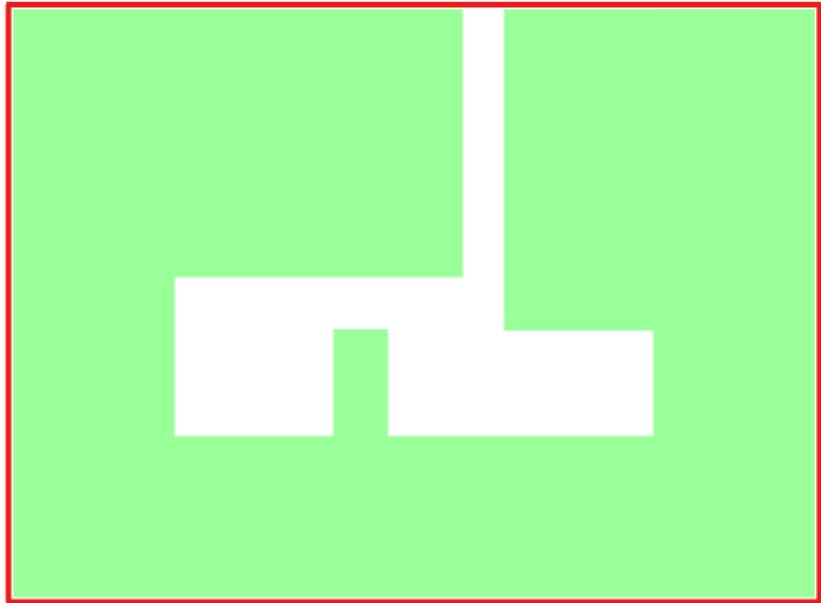
Sursa: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/originals/37/90/86/37908600ab7db99c424c3bc6e1ddb740.jpg>

Ce structură de date este adecvată pentru a memora astfel de informații?

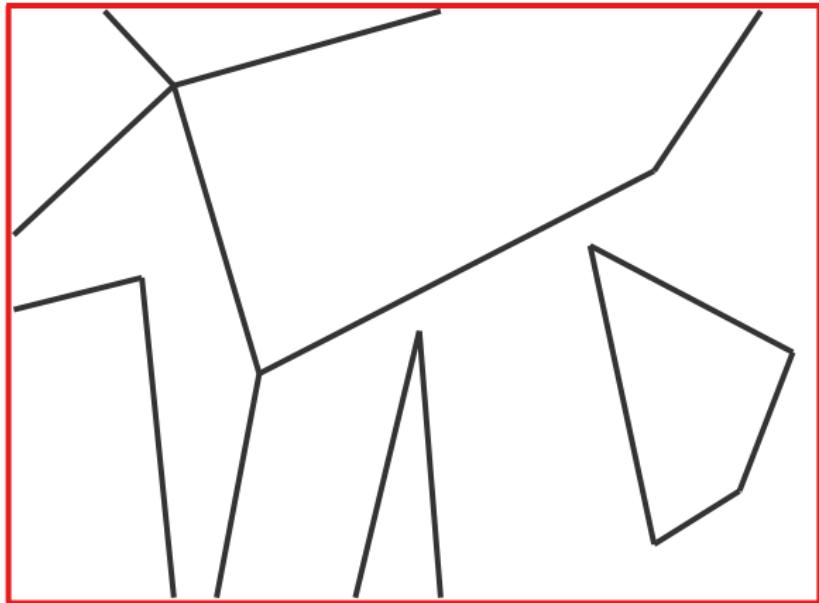
Problematizare



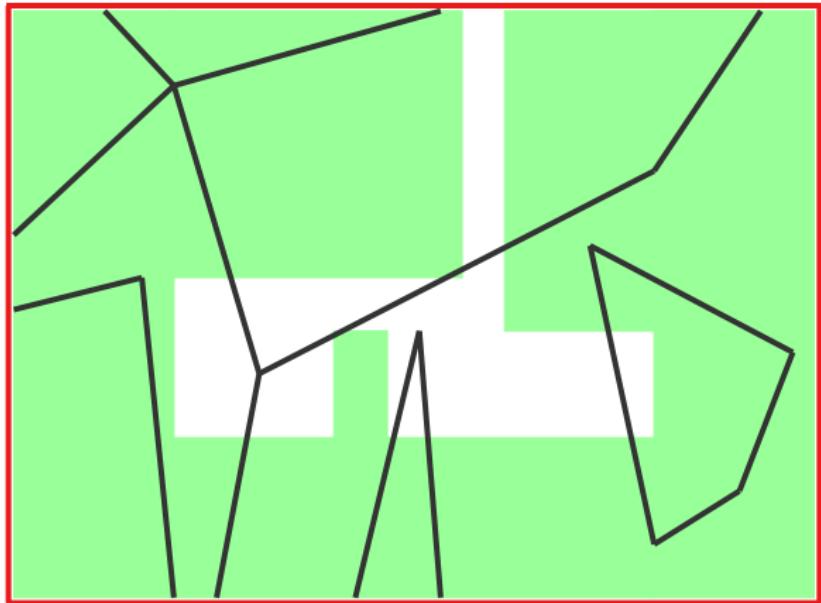
Problematizare



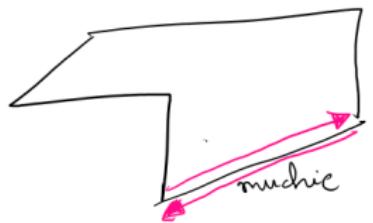
Problematizare



Problematizare

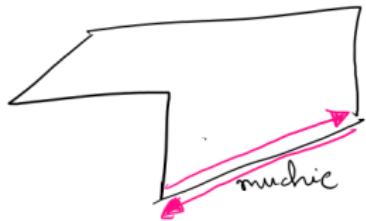


Conceptul cheie



→ două semi-muchii
cu orientări opuse

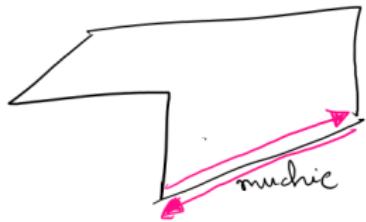
Conceptul cheie



→ două semi-muchii
cu orientări opuse

- ▶ Conceptul cheie este cel de semi-muchie (muchie orientată), cf. “half-edge”.

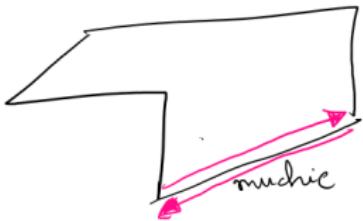
Conceptul cheie



→ două semi-muchii
cu orientări opuse

- ▶ Conceptul cheie este cel de semi-muchie (muchie orientată), cf. “half-edge”.
- ▶ Dat un poligon (eventual cu goluri):

Conceptul cheie



→ două semi-muchii
cu orientări opuse

- ▶ Conceptul cheie este cel de semi-muchie (muchie orientată), cf. “*half-edge*”.
- ▶ Dat un poligon (eventual cu goluri):
 - ▶ **frontieră exterioară**, care poate fi parcursă cu ajutorul semi-muchiilor astfel încât poligonul să fie la stânga frontierei, iar virajele convexe să fie la stânga,
 - ▶ **frontieră interioară** (dacă există goluri), caz în care poligonul este tot la stânga, dar virajele în vîrfurile convexe sunt la dreapta.

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchii)).

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchii)).
 - ▶ **Vârf** v : coordonatele lui v în $\text{Coordinates}(v)$, pointer $\text{IncidentEdge}(v)$ spre o muchie orientată care are v ca origine

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchii)).
 - ▶ **Vârf** v : coordonatele lui v în $\text{Coordinates}(v)$, pointer $\text{IncidentEdge}(v)$ spre o muchie orientată care are v ca origine
 - ▶ **Față** f : pointer $\text{OuterComponent}(f)$ spre o muchie orientată corespunzătoare frontierei externe (pentru fața nemărginită este **nil**); listă $\text{InnerComponents}(f)$, care conține, pentru fiecare gol, un pointer către una dintre muchiile orientate de pe frontieră

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchii)).
 - ▶ **Vârf** v : coordonatele lui v în $\text{Coordinates}(v)$, pointer $\text{IncidentEdge}(v)$ spre o muchie orientată care are v ca origine
 - ▶ **Față** f : pointer $\text{OuterComponent}(f)$ spre o muchie orientată corespunzătoare frontierei externe (pentru fața nemărginită este **nil**); listă $\text{InnerComponents}(f)$, care conține, pentru fiecare gol, un pointer către una dintre muchiile orientate de pe frontieră
 - ▶ **Muchie orientată** \vec{e} : pointer $\text{Origin}(\vec{e})$, pointer $\text{Twin}(\vec{e})$ pointer $\text{IncidentFace}(\vec{e})$, pointer $\text{Next}(\vec{e})$, pointer $\text{Prev}(\vec{e})$.

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchii)).
 - ▶ **Vârf** v : coordonatele lui v în $\text{Coordinates}(v)$, pointer $\text{IncidentEdge}(v)$ spre o muchie orientată care are v ca origine
 - ▶ **Față** f : pointer $\text{OuterComponent}(f)$ spre o muchie orientată corespunzătoare frontierei externe (pentru fața nemărginită este **nil**); listă $\text{InnerComponents}(f)$, care conține, pentru fiecare gol, un pointer către una dintre muchiile orientate de pe frontieră
 - ▶ **Muchie orientată** \vec{e} : pointer $\text{Origin}(\vec{e})$, pointer $\text{Twin}(\vec{e})$ pointer $\text{IncidentFace}(\vec{e})$, pointer $\text{Next}(\vec{e})$, pointer $\text{Prev}(\vec{e})$.
- ▶ Oricărei subdiviziuni planare \mathcal{S} i se asociază o listă de muchii dublu înlăntuite $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.

Subdiviziuni planare

- ▶ Conceptul de subdiviziune planară: vârfuri, muchii, fețe.
- ▶ **Listă de muchii dublu înlăntuite / DCEL - Doubly Connected Edge List** [Müller și Preparata, 1978] (trei înregistrări: vârfuri, fețe, muchii orientate (semi-muchiile)).
 - ▶ **Vârf** v : coordonatele lui v în $\text{Coordinates}(v)$, pointer $\text{IncidentEdge}(v)$ spre o muchie orientată care are v ca origine
 - ▶ **Față** f : pointer $\text{OuterComponent}(f)$ spre o muchie orientată corespunzătoare frontierei externe (pentru fața nemărginită este **nil**); listă $\text{InnerComponents}(f)$, care conține, pentru fiecare gol, un pointer către una dintre muchiile orientate de pe frontieră
 - ▶ **Muchie orientată** \vec{e} : pointer $\text{Origin}(\vec{e})$, pointer $\text{Twin}(\vec{e})$ pointer $\text{IncidentFace}(\vec{e})$, pointer $\text{Next}(\vec{e})$, pointer $\text{Prev}(\vec{e})$.
- ▶ Oricărei subdiviziuni planare \mathcal{S} i se asociază o listă de muchii dublu înlăntuite $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$.
- ▶ **Obs.** Explicați cum, folosind pointerii de mai sus: (i) poate fi parcursă frontiera exterioară / interioară a unei fețe (a unui poligon); (ii) pot fi găsite toate semi-muchiile incidente cu un vârf.

Localizarea punctelor – problematizare

- ▶ Căutare cu Google Maps

Localizarea punctelor – problematizare

- ▶ Căutare cu Google Maps
- ▶ *Interrogare pentru localizarea unui punct:* dată o hartă și un punct p , indicat prin cordonatele sale, să se determine regiunea hărții în care este situat p .

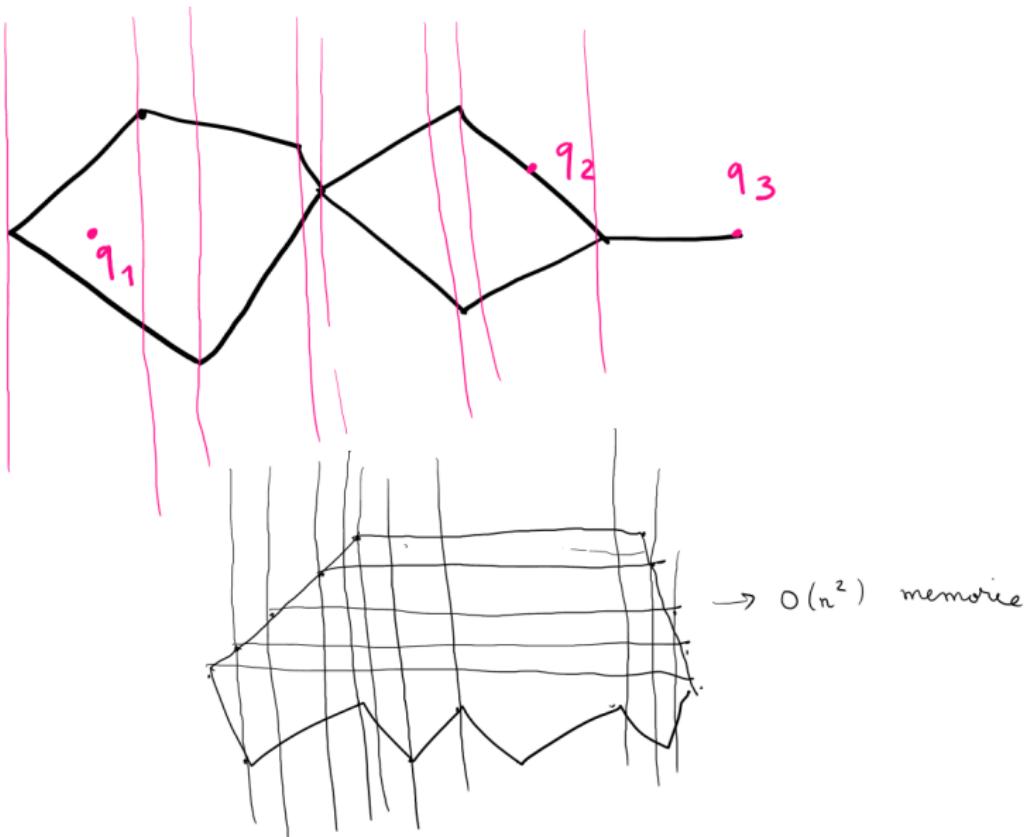
Localizarea punctelor – problematizare

- ▶ Căutare cu Google Maps
- ▶ *Interogare pentru localizarea unui punct:* dată o hartă și un punct p , indicat prin cordonatele sale, să se determine regiunea hărții în care este situat p .
- ▶ *Harta:* subdiviziune planară, formată din vârfuri, (semi)muchii, fețe.

Localizarea punctelor – problematizare

- ▶ Căutare cu Google Maps
- ▶ *Interrogare pentru localizarea unui punct:* dată o hartă și un punct p , indicat prin cordonatele sale, să se determine regiunea hărții în care este situat p .
- ▶ *Harta:* subdiviziune planară, formată din vârfuri, (semi)muchii, fețe.
- ▶ Necesități: pre-procesare a informației; interogare rapidă.

Intuiție



Intuiție - concluzie

- Subdivizare a planului în fâșii (benzi) verticale (cf. "slabs")

Intuiție - concluzie

- ▶ Subdivizare a planului în fâșii (benzi) verticale (cf. “*slabs*”)
 - ▶ **căutare după abscisă** - pentru identificarea fâșiei verticale;

Intuiție - concluzie

- ▶ Subdivizare a planului în fâșii (benzi) verticale (cf. “*slabs*”)
 - ▶ **căutare după abscisă** - pentru identificarea fâșiei verticale;
 - ▶ **căutare în cadrul unei fâșii** - pentru localizare în cadrul fâșiei verticale, realizată în raport cu segmente.

Formalizare

- ▶ Fie \mathcal{S} o subdiviziune planară cu n muchii. *Problema localizării unui punct* revine la

Formalizare

- ▶ Fie \mathcal{S} o subdiviziune planară cu n muchii. *Problema localizării unui punct* revine la
 - ▶ a reține informațiile referitoare la \mathcal{S} pentru a putea răspunde la interogări de tipul:

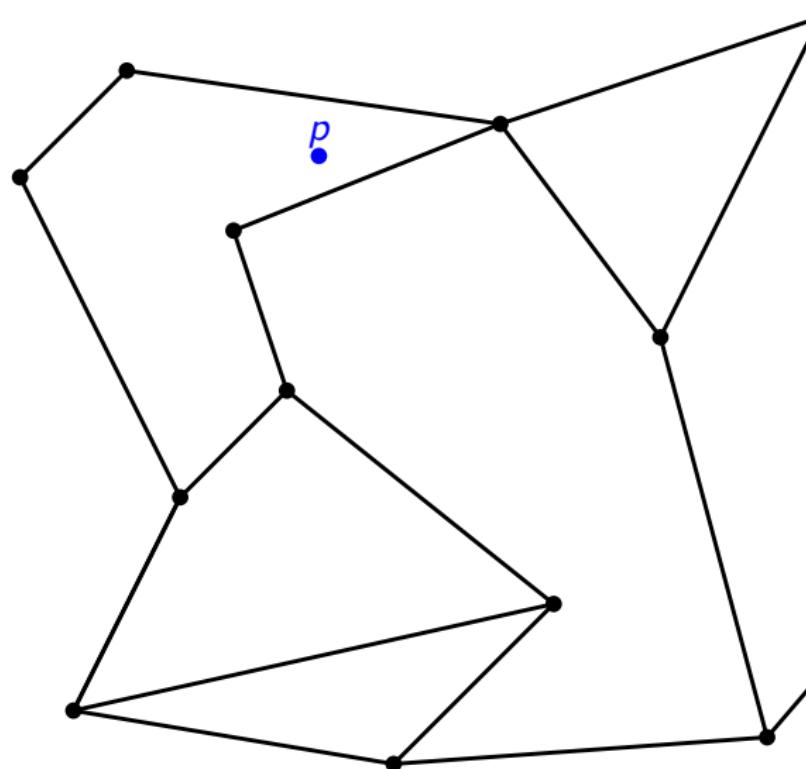
Formalizare

- ▶ Fie \mathcal{S} o subdiviziune planară cu n muchii. *Problema localizării unui punct* revine la
 - ▶ a reține informațiile referitoare la \mathcal{S} pentru a putea răspunde la interogări de tipul:
 - ▶ dat un punct p , se raportează față f care îl conține pe p ; în cazul în care p este situat pe un segment sau coincide cu un vârf, este precizat acest lucru.

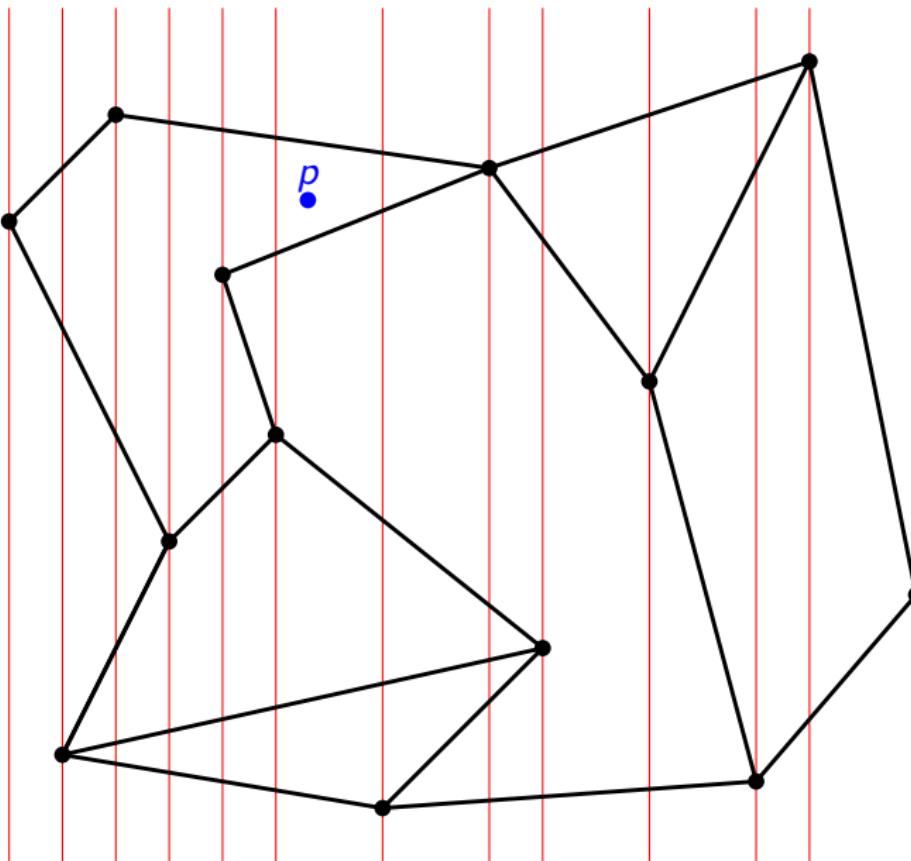
Formalizare

- ▶ Fie \mathcal{S} o subdiviziune planară cu n muchii. *Problema localizării unui punct* revine la
 - ▶ a reține informațiile referitoare la \mathcal{S} pentru a putea răspunde la interogări de tipul:
 - ▶ dat un punct p , se raportează față f care îl conține pe p ; în cazul în care p este situat pe un segment sau coincide cu un vârf, este precizat acest lucru.
- ▶ Lucrul cu coordonate: folosirea relației de ordine!

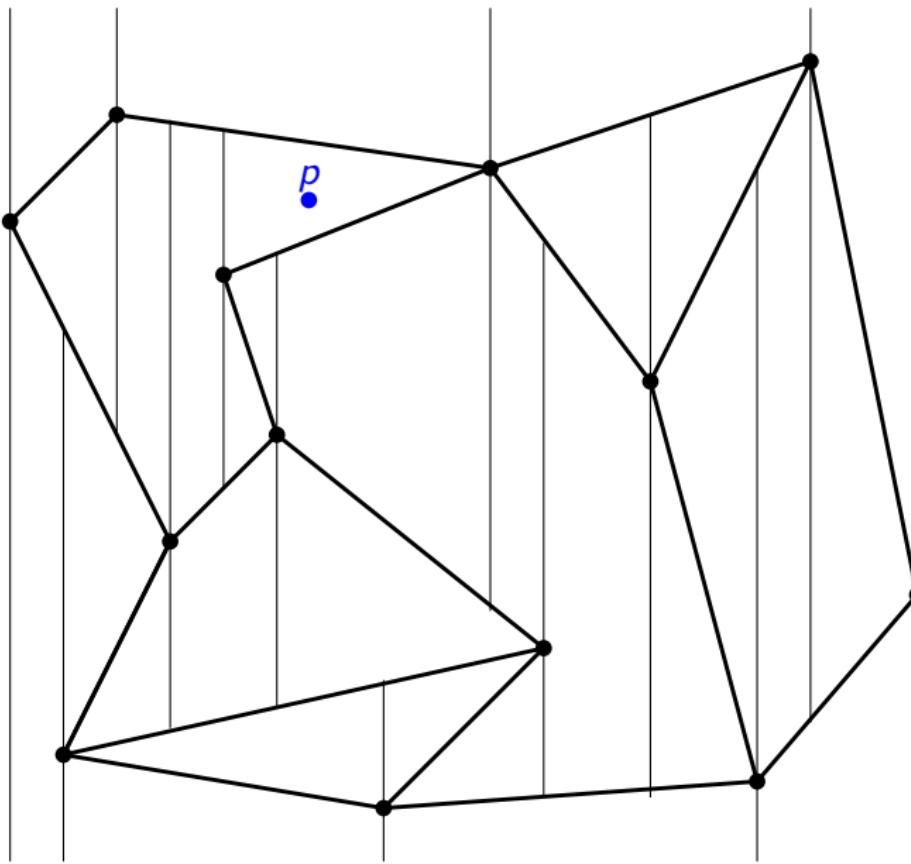
Exemplu



Exemplu - rafinare folosind benzi verticale



Exemplu - rafinare eficientă



Simplificări și ipoteze

- ▶ Se consideră o mulțime S de n segmente astfel ca oricare două dintre ele (i) fie nu au niciun punct comun; (ii) fie au un vârf comun.

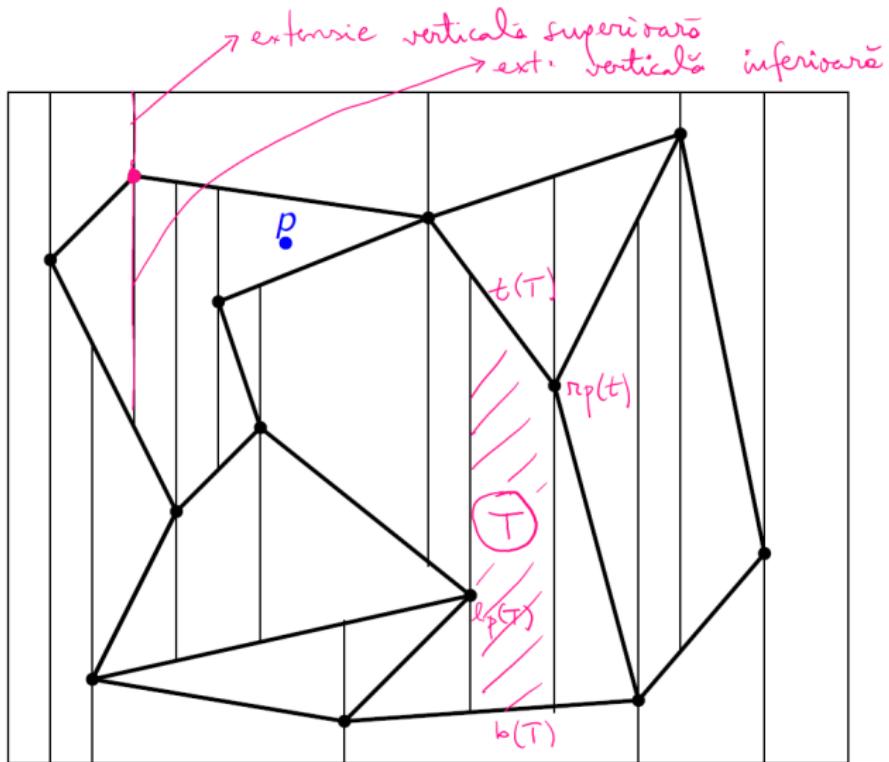
Simplificări și ipoteze

- ▶ Se consideră o mulțime S de n segmente astfel ca oricare două dintre ele (i) fie nu au niciun punct comun; (ii) fie au un vârf comun.
- ▶ *Simplificare 1:* Se consideră un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele de coordinate care include toată subdiviziunea inițială.
- ▶ *Simplificare 2:* Se presupune că nu există două vârfuri (extremități ale segmentelor din S) distincte care au aceeași coordonată x (în particular nu există segmente verticale).

Simplificări și ipoteze

- ▶ Se consideră o mulțime S de n segmente astfel ca oricare două dintre ele (i) fie nu au niciun punct comun; (ii) fie au un vârf comun.
- ▶ *Simplificare 1:* Se consideră un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele de coordinate care include toată subdiviziunea inițială.
- ▶ *Simplificare 2:* Se presupune că nu există două vârfuri (extremități ale segmentelor din S) distincte care au aceeași coordonată x (în particular nu există segmente verticale).
- ▶ *Concluzie:* Se consideră o mulțime de n segmente S care verifică ipotezele de mai sus: *mulțime de segmente în poziție generală*. **Harta trapezoidală / descompunere verticală / descompunere cu trapeze** (*trapezoidal map*) $\mathcal{T}(S)$ a lui S este subdiviziunea indușă de S , dreptunghiul D și de extensiile verticale inferioare și superioare (concept introdus de Seidel, 1991).

Exemplu - hartă trapezoidală, extensii verticale



Hărți trapezoidale – probleme studiate

- ▶ Descrierea obiectelor geometrice din care sunt formate – ce informații se rețin?

Hărți trapezoidale – probleme studiate

- ▶ Descrierea obiectelor geometrice din care sunt formate – ce informații se rețin?
- ▶ Aspecte legate de complexitate?

Hărți trapezoidale – probleme studiate

- ▶ Descrierea obiectelor geometrice din care sunt formate – ce informații se rețin?
- ▶ Aspecte legate de complexitate?
- ▶ Structuri de date adecvate?

Hărți trapezoidale – probleme studiate

- ▶ Descrierea obiectelor geometrice din care sunt formate – ce informații se rețin?
- ▶ Aspecte legate de complexitate?
- ▶ Structuri de date adecvate?
- ▶ Un algoritm eficient?

Descrierea obiectelor

- ▶ **Lema 1.** Fie S o mulțime de segmente în poziție generală. Fiecare față a unei hărți trapezoidale $\mathcal{T}(S)$ are una sau două margini verticale și exact două margini ne-verticale. De fapt: fiecare față este un trapez, sau un dreptunghi sau un triunghi (ultimele putând fi privite drept cazuri particulare de trapeze).

Descrierea obiectelor

- ▶ **Lema 1.** Fie S o mulțime de segmente în poziție generală.
Fiecare față a unei hărți trapezoidale $\mathcal{T}(S)$ are una sau două margini verticale și exact două margini ne-verticale.
De fapt: fiecare față este un trapez, sau un dreptunghi sau un triunghi (ultimele putând fi privite drept cazuri particulare de trapeze).
- ▶ Ce informații geometrice sunt reținute pentru un trapez?

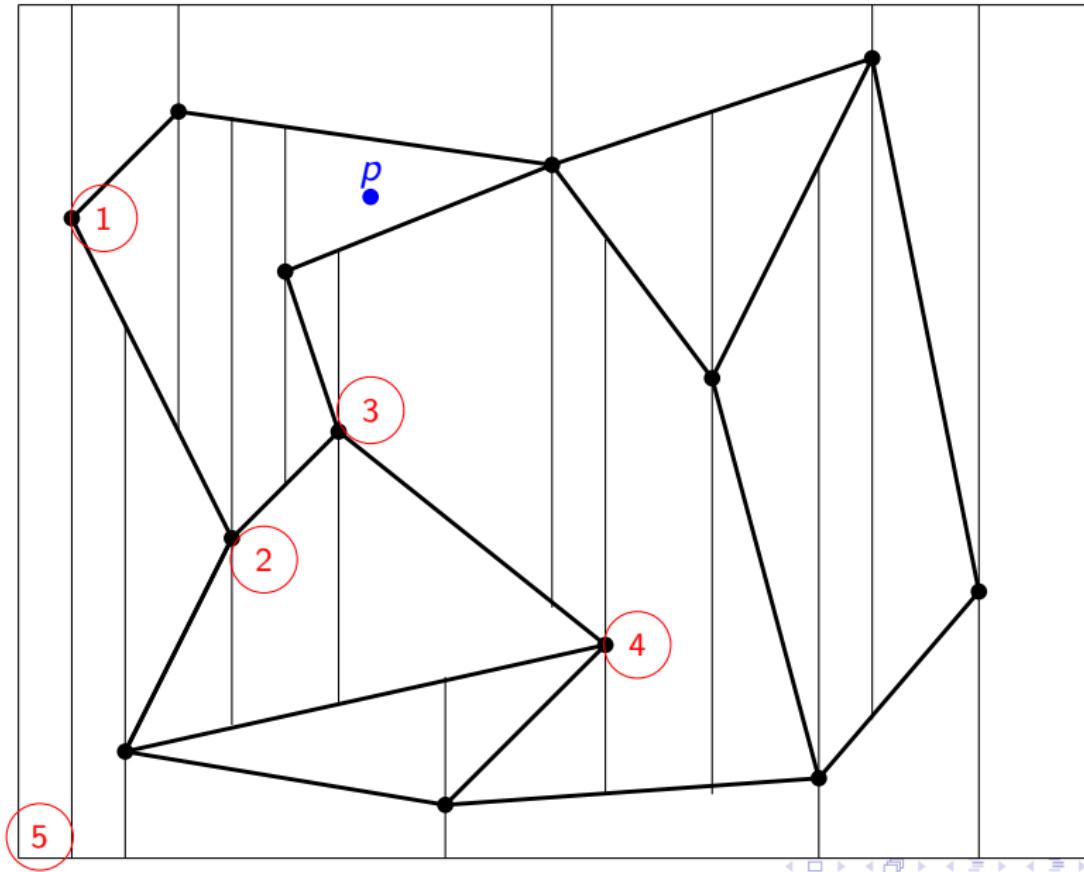
Descrierea obiectelor

- ▶ **Lema 1.** Fie S o mulțime de segmente în poziție generală.
Fiecare față a unei hărți trapezoidale $\mathcal{T}(S)$ are una sau două margini verticale și exact două margini ne-verticale.
De fapt: fiecare față este un trapez, sau un dreptunghi sau un triunghi (ultimele putând fi privite drept cazuri particulare de trapeze).
- ▶ Ce informații geometrice sunt reținute pentru un trapez?
- ▶ $t(T), b(T), \text{lp}(T), \text{rp}(T)$ determină în mod unic un trapez fixat T .
 $t(T), b(T)$ sunt **segmente**, iar $\text{lp}(T), \text{rp}(T)$ sunt **vârfuri** (extremități ale segmentelor)

Descrierea obiectelor

- ▶ **Lema 1.** Fie S o mulțime de segmente în poziție generală.
Fiecare față a unei hărți trapezoidale $\mathcal{T}(S)$ are una sau două margini verticale și exact două margini ne-verticale.
De fapt: fiecare față este un trapez, sau un dreptunghi sau un triunghi (ultimele putând fi privite drept cazuri particulare de trapeze).
- ▶ Ce informații geometrice sunt reținute pentru un trapez?
- ▶ $t(T), b(T), \text{lp}(T), \text{rp}(T)$ determină în mod unic un trapez fixat T .
 $t(T), b(T)$ sunt **segmente**, iar $\text{lp}(T), \text{rp}(T)$ sunt **vârfuri** (extremități ale segmentelor)
- ▶ Există cinci cazuri posibile pentru marginea stângă lp (analog pentru marginea dreaptă lp).

Exemplu - hartă trapezoidală

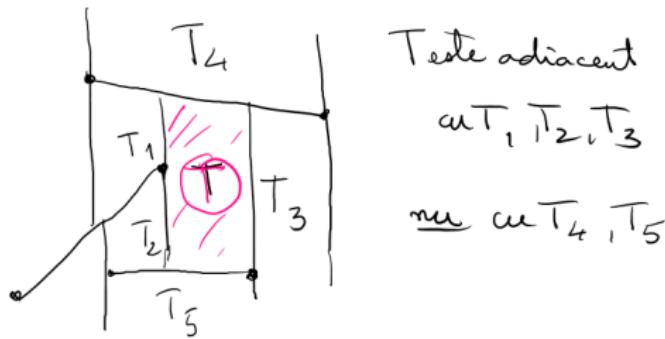


Complexitate și alte aspecte cantitative

- ▶ **Lema 2.** Fie S o mulțime de n segmente în poziție generală. Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ conține cel mult $6n + 4$ vârfuri și cel mult $3n + 1$ trapeze.

Complexitate și alte aspecte cantitative

- ▶ **Lema 2.** Fie S o mulțime de n segmente în poziție generală. Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ conține cel mult $6n + 4$ vârfuri și cel mult $3n + 1$ trapeze.
- ▶ **Lema 3.** Fie S o mulțime de n segmente în poziție generală. Fiecare trapez T este adiacent cu cel mult patru trapeze (cel mult un vecin stânga superior, cel mult un vecin stânga inferior, cel mult un vecin dreapta superior, cel mult un vecin dreapta inferior).



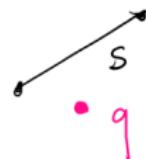
Căutarea într-o hartă trapezoidală

x-nod (p)



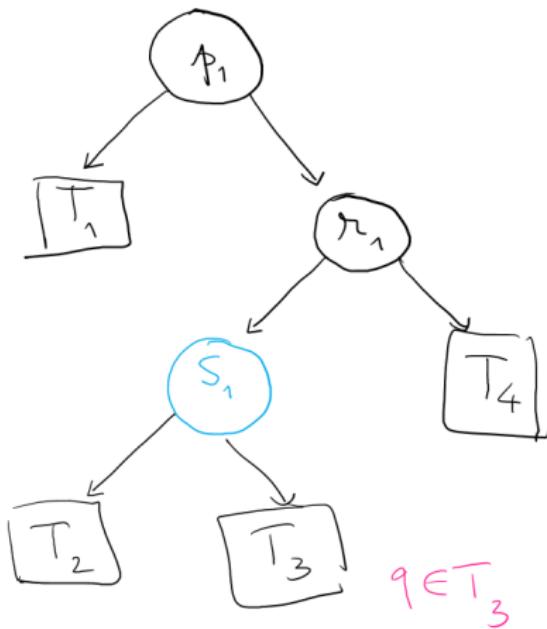
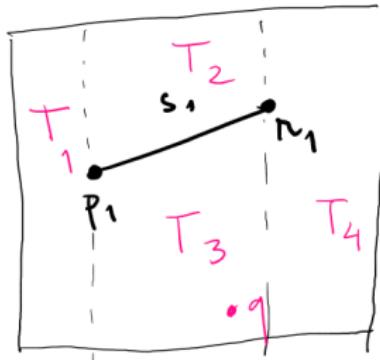
q este la stg/dreapta
dr. verticale care
trece prin p
(comparații de abscise)

y-nod (s)



q este deasupra/
dedesubtul lui s
(testul de orientare)

Exemplu - structură de căutare asociată



Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).

Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).
- ▶ Înregistrări pentru trapeze: pointeri t , b , lp , rp și pointeri către cei (cel mult) patru vecini.

Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).
- ▶ Înregistrări pentru trapeze: pointeri t , b , lp , rp și pointeri către cei (cel mult) patru vecini.
- ▶ **Structura de căutare:** \mathcal{D} este un graf orientat aciclic cu o singură rădăcină și exact o frunză pentru fiecare trapez din $\mathcal{T}(S)$.

Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).
- ▶ Înregistrări pentru trapeze: pointeri t , b , lp , rp și pointeri către cei (cel mult) patru vecini.
- ▶ **Structura de căutare:** \mathcal{D} este un graf orientat aciclic cu o singură rădăcină și exact o frunză pentru fiecare trapez din $\mathcal{T}(S)$.
- ▶ **Noduri și teste asociate:**

Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).
- ▶ Înregistrări pentru trapeze: pointeri t , b , lp , rp și pointeri către cei (cel mult) patru vecini.
- ▶ **Structura de căutare:** \mathcal{D} este un graf orientat aciclic cu o singură rădăcină și exact o frunză pentru fiecare trapez din $\mathcal{T}(S)$.
- ▶ **Noduri și teste asociate:**
 - ▶ x-nod, etichetat cu o extremitate a unui segment; pentru un punct p testul asociat: *este punctul p situat la stânga sau la dreapta dreptei verticale care trece prin extremitatea memorată în acest nod?*

Structura de date

- ▶ Înregistrări pentru segmentele din S și vârfuri (extremitățile segmentelor).
- ▶ Înregistrări pentru trapeze: pointeri t , b , lp , rp și pointeri către cei (cel mult) patru vecini.
- ▶ **Structura de căutare:** \mathcal{D} este un graf orientat aciclic cu o singură rădăcină și exact o frunză pentru fiecare trapez din $\mathcal{T}(S)$.
- ▶ **Noduri și teste asociate:**
 - ▶ x-nod, etichetat cu o extremitate a unui segment; pentru un punct p testul asociat: *este punctul p situat la stânga sau la dreapta dreptei verticale care trece prin extremitatea memorată în acest nod?*
 - ▶ y-nod, etichetat cu un segment; pentru un punct p testul asociat: *este punctul p situat deasupra sau dedesubtul segmentului memorat în acest nod?*

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
- ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .
 2. Generează o permutare s_1, s_2, \dots, s_n a segmentelor din S .

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .
 2. Generează o permutare s_1, s_2, \dots, s_n a segmentelor din S .
 3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .
 2. Generează o permutare s_1, s_2, \dots, s_n a segmentelor din S .
 3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
 4. **do** găsește mulțimea de trapeze T_0, T_1, \dots, T_k care intersectează segmentul s_i

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .
 2. Generează o permutare s_1, s_2, \dots, s_n a segmentelor din S .
 3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
 4. **do** găsește mulțimea de trapeze T_0, T_1, \dots, T_k care intersectează segmentul s_i
 5. elimină T_0, \dots, T_k și le înlocuiește cu trapezele nou apărute

Algoritm HARTA TRAPEZOIDALA

- ▶ **Input.** O mulțime S de n segmente în poziție generală.
 - ▶ **Output.** Harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$, într-un dreptunghi D cu laturile paralele cu axele.
1. Determină dreptunghiul D .
 2. Generează o permutare s_1, s_2, \dots, s_n a segmentelor din S .
 3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
 4. **do** găsește mulțimea de trapeze T_0, T_1, \dots, T_k care intersectează segmentul s_i
 5. elimină T_0, \dots, T_k și le înlocuiește cu trapezele nou apărute
 6. elimină frunzele corespunzătoare din \mathcal{D} și creează noi frunze, actualizează \mathcal{D}

Rezultatul principal

- ▶ **Teoremă.** Fie S o mulțime de n segmente în poziție generală. Algoritmul HARTA TRAPEZOIDALA determină harta trapezoidală $\mathcal{T}(S)$ și o structură de căutare $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{T}(S))$ pentru $\mathcal{T}(S)$ în timp mediu $O(n \log n)$. Memoria medie ocupată de structura de căutare este $O(n)$ și pentru un punct arbitrar p timpul mediu de localizare este $O(\log n)$.