NR. 1

OFICIU: 1 PUNCT

1) Definiţi următoarele noţiuni:

a) limita inferioară a unui şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) funcţie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ care admite derivată parţială în raport cu variabila x_i în punctul $x_0 \in D \cap D'$;

c) suma Riemann asociată funcţiei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, *diviziunii* $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ *şi sistemului de puncte intermediare* t_Δ;

(1,50 puncte)

2) Să se enunţe următoarele teoreme:

a) teorema lui Darboux referitoare la funcţiile derivabile;

b) teorema lui Fubini pe intevale închise n-dimensionale. **(1 punct)**

NR. 2

OFICIU: 1 PUNCT

1) Definiţi următoarele noţiuni:

a) limita superioară a unui şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) funcţie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ care admite derivată parţială de ordinul doi în raport cu variabilele x_i şi x_j în punctul $x_0 \in D \cap D'$;

c) diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ şi norma diviziunii Δ. **(1,50 puncte)**

2) Să se enunţe următoarele teoreme:

a) teorema lui Lagrange;

b) teorema lui Fubini pe mulţimi simple în raport cu axa Ox_j. **(1 punct)**

NR. 2

1) a) Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot5\cdot9\cdots\cdots(4n-3)}{4\cdot8\cdot12\cdots\cdots(4n)}\right]^2$.

b) Să se demonstreze inegalitatea $e^{-x} > 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$ $\forall x \in (-\infty, 0)$. **(2,50 puncte)**

2) a) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 + x^4 + x^2 - 2xy$.

b) Să se calculeze $\iint_D xy^2dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 5, x \leq y\}$. **(3 puncte)**

3) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{x^{2n}+2x^n+2}dx$. **(1 punct)**

NR. 1

0<q → div.

RD .

1) a) Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot4\cdot7\cdots\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots(3n)}\right]^2$.

b) Să se demonstreze inegalitatea $e^{-x} < 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ $\forall x \in (0, +\infty)$. **(2,50 puncte)**

2) a) Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

(0,0) $f(x, y) = x^2 + y^4 + y^2 - 2xy$.

b) Să se calculeze $\iint_D x^2 y\,dxdy$, unde

? $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 6, y \leq x\}$. **(3 puncte)**

$\frac{\pi}{4}$ 3) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{x^{2n}+2x^n+2}dx$. **(1 punct)**

BAREM DE CORECTARE NR.2

TEORIE

SUBIECTUL I: 1,50 puncte

a) definiție corectă: **0,50 puncte**

b) definiție corectă: **0,50 puncte**

c) definiție corectă: **0,50 puncte**

SUBIECTUL II: 1 punct

a) enunț corect: **0,50 puncte**

b) enunț corect: **0,50 puncte**

EXERCIȚII

SUBIECTUL I: 2,50 puncte

a) - $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n+4}\right)^2 = 1$: **0,50 puncte**

- $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{24n^2+15n}{16n^2+8n+1} = \frac{3}{2}$: **0,50 puncte**

- finalizare: **0,25 puncte.**

b) - $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\ \forall x \in (-\infty, 0), \forall n \in \mathbb{N}$: **0,15 puncte**

- utilizarea formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange pentru funcția f și deducerea afirmației $\forall x \in (-\infty,0)\ \exists c \in (x,0)$ *astfel încât* $f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{e^{-c}}{5!}x^5$: **0,75 puncte**

- justificarea inegalității $\frac{e^{-c}}{5!}x^5 < 0\ \forall x \in (-\infty, 0)$: **0,25 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

SUBIECTUL II: 3 puncte

a) - f continuă pe R^2: **0,10 puncte**

- f funcție de clasă C^1 *pe* R^2: **0,15 puncte**

- stabilirea punctului critic (0,0): **0,50 puncte**

- descrierea $H_f(0,0)$, calcularea minorilor Δ_1, Δ_2 și justificarea neaplicării criteriului în (0,0): **0,50 puncte**

- $f(x,y) - f(0,0) = (x-y)^2 + x^4 \geq 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (0,0)$ punct de minim local al funcției f: **0,25 puncte**

b) – utilizarea trecerii la coordonate polare $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \rho(R,\alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ și obținerea egalității $\iint_D \cancel{x^4y}\,dxdy = \iint_{D'} R^4\cos^{\cancel{4}}\alpha\sin\alpha\, dRd\alpha$, unde $D' = [0,\sqrt{5}] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$: **0.75 puncte**

xy²

- $\iint_{D'} R^4\sin^2\alpha\cos\alpha\, dRd\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{5}} R^4\sin^2\alpha\cos\alpha\, dR\right)d\alpha = 5\sqrt{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^2\alpha\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{5\sqrt{10}}{6}$: **0,75 puncte**

SUBIECTUL III: 1 punct

- aplicarea formulei de integrare prin părți și obținerea egalității $\int_0^1 \frac{nx^n}{x^{2n}+2x^n+2}dx = \int_0^1 x(arctg(x^n+1))'dx = arctg2 - \int_0^1 arctg(x^n+1)dx$: **0,50 puncte**

- invocarea teoremei convergenței mărginite pentru justificarea afirmației $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 arctg(x^n+1)dx = \frac{\pi}{4}$: **0,40 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

BAREM DE CORECTARE NR.1

TEORIE

SUBIECTUL I: 1,50 puncte

a) definiție corectă: **0,50 puncte**

b) definiție corectă: **0,50 puncte**

c) definiție corectă: **0,50 puncte**

SUBIECTUL II: 1 punct

a) enunț corect: **0,50 puncte**

b) enunț corect: **0,50 puncte**

EXERCIȚII

SUBIECTUL I: 2,50 puncte

a) - $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$: **0,50 puncte**

- $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+8n}{9n^2+6n+1} = \frac{4}{3}$: **0,50 puncte**

- finalizare: **0,25 puncte.**

b) - $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\ \forall x \in (0,+\infty), \forall n \in \mathbb{N}$: **0,15 puncte**

- utilizarea formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange pentru funcția f și deducerea afirmației $\forall x \in (0,+\infty)\ \exists c \in (0,x)\ astfel$ încât $f(x) = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{e^{-c}}{5!}x^5$: **0,75 puncte**

- justificarea inegalității $\frac{e^{-c}}{5!}x^5 > 0\ \forall x \in (0,+\infty)$: **0,25 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

SUBIECTUL II: 3 puncte

a) - f continuă pe R^2: **0,10 puncte**

- f funcție de clasă C^1 pe R^2: **0,15 puncte**

- stabilirea punctului critic (0,0): **0,50 puncte**

- descrierea $H_f(0,0)$, calcularea minorilor Δ_1, Δ_2 și justificarea neaplicării criteriului în (0,0): **0,50 puncte**

- $f(x,y) - f(0,0) = (x-y)^2 + y^4 \geq 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (0,0)$ punct de minim local al funcției f: **0,25 puncte**

b) – utilizarea trecerii la coordonate polare $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \rho(R,\alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ și obținerea egalității $\iint_D x^2y\,dxdy = \iint_{D'} R^4\cos^2\alpha\sin\alpha\, dR\, d\alpha$, unde $D' = [0,\sqrt{6}] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$: **0.75 puncte**

- $\iint_{D'} R^4\cos^2\alpha\sin\alpha\, dR\, d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{6}} R^4\cos^2\alpha\sin\alpha\, dR\right)d\alpha = \frac{36\sqrt{6}}{5}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha = 0$: **0,75 puncte**

SUBIECTUL III: 1 punct

- aplicarea formulei de integrare prin părți și obținerea egalității $\int_0^1 \frac{nx^n}{x^{2n}+2x^n+2}dx = \int_0^1 x(arctg(x^n+1))'dx = arctg2 - \int_0^1 arctg(x^n+1)dx$: **0,50 puncte**

- invocarea teoremei convergenței mărginite pentru justificarea afirmației $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 arctg(x^n+1)dx = \frac{\pi}{4}$: **0,40 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

NR. 2

1) a) Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{an}\right)^{n^2}$, *unde* $a > 0$;

b) Să se calculeze $\overline{\lim}\, x_n$ şi $\underline{\lim}\, x_n$ pentru şirul $x_n = \frac{n(-1)^n-1}{2n(-1)^{n+1}+1} + \cos\frac{n\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(2,50 puncte)**

2) a) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} xy^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul (0,0).

b) Să se calculeze $\iint_D (x+y)dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq -2x+2, x \geq 0, y \geq 0\}$. **(3 puncte)**

3) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{nx^n}{\sqrt{2x^n - x^{2n}}} dx$. **(1 punct)**

NR. 2

OFICIU: 1 PUNCT

1) Definiţi următoarele noţiuni:

a) şir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dintr-un spaţiu metric (X,d);

b) suma Darboux superioară asociată funcţiei mărginite $f\colon E \to \mathbb{R}, E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ şi descompunerii Jordan $\alpha \in \mathcal{D}(E)$;

c) punct de minim local al funcţiei $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **(1,50 puncte)**

2) Să se enunţe următoarele teoreme:

a) teorema lui Rolle;

b) teorema funcţiilor implicite. **(1 punct)**

NR. 1

1) a) Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, *unde* $a > 0$;

b) Să se calculeze $\overline{lim}\, x_n$ şi $\underline{lim}\, x_n$ pentru şirul $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(2,50 puncte)**

2) a) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul (0,0).

b) Să se calculeze $\iint_D (x-y)dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \leq -\frac{x}{2} + 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$. **(3 puncte)**

3) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{nx^n}{\sqrt{2x^n - x^{2n}}} dx$. **(1 punct)**

NR. 1

1) a) Studiaţi natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n(n+1)}$, *unde* $a > 0$;

b) Să se calculeze $\overline{\lim}\, x_n$ şi $\underline{\lim}\, x_n$ pentru şirul $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. **(2,50 puncte)**

2) a) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiei f în punctul $(0,0)$.

b) Să se calculeze $\iint_D (x-y)dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \leq -\frac{x}{2} + 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$. **(3 puncte)**

3) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{nx^n}{\sqrt{2x^n - x^{2n}}}\, dx$. **(1 punct)**

BAREM DE CORECTARE NR.2

TEORIE

SUBIECTUL I: 1,50 puncte

a) definiție corectă: **0,50 puncte**

b) definiție corectă: **0,50 puncte**

c) definiție corectă: **0,50 puncte**

SUBIECTUL II: 1 punct

a) enunț corect: **0,50 puncte**

b) enunț corect: **0,50 puncte**

EXERCIȚII

SUBIECTUL I: 2,50 puncte

a) - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{an}\right)^n = \begin{cases} 0, \ a \in (1,+\infty) \\ +\infty, \ a \in (0,1) \\ e, a = 1 \end{cases}$: **0,50 puncte**

- tratarea cazului $a \in (0,1)$: **0,25 puncte**

- tratarea cazului $a \in (1,+\infty)$: **0,25 puncte**

- tratarea cazului $a = 1$: **0,25 puncte**

b) - alegerea subșirurilor $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{4k})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$: **0,50 puncte**

- determinarea punctelor limită $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$: **0,50 puncte**

- finalizare: **0,25 puncte**

SUBIECTUL II: 3 puncte

a) – demonstrarea inegalității $|f(x,y)| \le |y^2x| \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ și justificarea continuității funcției în $(0,0)$: **0,25 puncte**

- calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$: **0,50 puncte**

- alegerea operatorului liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$ și justificarea faptului că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$: **0,75 puncte**

b) – reprezentarea grafică in sistemul de axe xOy a domeniului de definiție și descrierea acestuia ca fiind $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1], 0 \le y \le -2x+2\}$: **0,50 puncte**

- $\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (x+y)dy\right) dx = \int_0^1 (-2x+2)dx$: **0,75 puncte**

- calculul corect al integralei $\int_0^1 (-2x+2)dx = 1$: **0,25 puncte**

- finalizare: **0,25 puncte**

SUBIECTUL II: 3 puncte

a) – demonstrarea inegalității $|f(x,y)| \leq |y^2x|\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ și justificarea continuității funcției în $(0,0)$: **0,25 puncte**

- calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$: **0,50 puncte**

- alegerea operatorului liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$ și justificarea faptului că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$: **0,75 puncte**

b) – reprezentarea grafică în sistemul de axe xOy a domeniului de definiție și descrierea acestuia ca fiind $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1], 0 \leq y \leq -2x+2\}$: **0,50 puncte**

- $\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2}(x+y)dy\right)dx = \int_0^1(-2x+2)dx$: **0,75 puncte**

- calculul corect al integralei $\int_0^1(-2x+2)dx = 1$: **0,25 puncte**

SUBIECTUL III: 1 punct

- aplicarea formulei de integrare prin părți și obținerea egalității $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{nx^n}{\sqrt{2x^n - x^{2n}}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(\arcsin(x^n-1))'dx = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2^n}-1\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 \arcsin(x^n-1)dx$: **0,50 puncte**

- invocarea teoremei convergenței mărginite pentru justificarea afirmației $\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^1 \arcsin(x^n-1)dx = -\frac{\pi}{4}$: **0,40 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

BAREM DE CORECTARE NR.1

TEORIE

SUBIECTUL I: 1,50 puncte

a) definiție corectă: **0,50 puncte**

b) definiție corectă: **0,50 puncte**

c) definiție corectă: **0,50 puncte**

SUBIECTUL II: 1 punct

a) enunț corect: **0,50 puncte**

b) enunț corect: **0,50 puncte**

EXERCIȚII

SUBIECTUL I: 2,50 puncte

a) - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n+1} = \begin{cases} 0, & a \in (0,1) \\ +\infty, & a \in (1,+\infty) \\ \frac{1}{e}, & a = 1 \end{cases}$: **0,50 puncte**

- tratarea cazului $a \in (0,1)$: **0,25 puncte**

- tratarea cazului $a \in (1,+\infty)$: **0,25 puncte**

- tratarea cazului $a = 1$: **0,25 puncte**

b) - alegerea subșirurilor $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}, (x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$: **0,50 puncte**

- determinarea punctelor limită $e, \frac{1}{e}+1, \frac{1}{e}-1$: **0,50 puncte**

- finalizare: **0,25 puncte**

SUBIECTUL II: 3 puncte

a) – demonstrarea inegalității $|f(x,y)| \le |x^2y|\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ și justificarea continuității funcției în $(0,0)$: **0,25 puncte**

- calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$: **0,50 puncte**

- alegerea operatorului liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$ și justificarea faptului că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$: **0,75 puncte**

b) – reprezentarea grafică în sistemul de axe xOy a domeniului de definiție și descrierea acestuia ca fiind $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [0,2], 0 \le y \le -\frac{x}{2}+1\right\}$: **0,50 puncte**

- $\iint_D (x-y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{x}{2}+1} (x-y)dy\right)dx = \int_0^2 \left(-\frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right)dx$: **0,75 puncte**

- calculul corect al integralei $\int_0^2 \left(-\frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3}$: **0,25 puncte**

SUBIECTUL III: 1 punct

formulei de inte

a) – demonstrarea inegalității $|f(x,y)| \leq |x^2y|\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ continuității funcției în (0,0): **0,25 puncte**

- calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$: **0,50 puncte**

- alegerea operatorului liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, T(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$ și justificarea faptului că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$: **0,75 puncte**

b) – reprezentarea grafică in sistemul de axe xOy a domeniului de definiție și descrierea acestuia ca fiind $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [0,2], 0 \leq y \leq -\frac{x}{2} + 1\right\}$: **0,50 puncte**

- $\iint_D (x-y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{-\frac{x}{2}+1} (x-y)dy\right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx$: **0,75 puncte**

- calculul corect al integralei $\int_0^2 \left(-\frac{5x^2}{8} + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3}$: **0,25 puncte**

<u>SUBIECTUL III</u>: 1 punct

- aplicarea formulei de integrare prin părți și obținerea egalității $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{nx^n}{\sqrt{2x^n - x^{2n}}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(arcsin(x^n - 1)\right)' dx = -\frac{1}{2}\, arcsin\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) - \int_{\frac{1}{2}}^{1} arcsin(x^n - 1)dx$: **0,50 puncte**

- invocarea teoremei convergenței mărginite pentru justificarea afirmației $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} arcsin(x^n - 1)dx = -\frac{\pi}{4}$: **0,40 puncte**

- finalizare: **0,10 puncte**

1. Studiați natura seriei

NR. 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,a^n}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$, unde $a>0$.

NR. 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, unde $a>0$ (1,5 puncte).

2. Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de funcții

NR. 1. $f_n : (0,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{n \cdot x^2}{1+n \cdot x^3}$

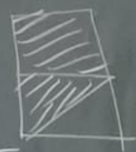
NR. 2. $f_n : [0,2) \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{n \cdot x^3}{n+x^4}$ (1 punct)

3. Calculați

NR. 2: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\}$

NR. 1 $\displaystyle\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, unde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 3,\ 0 \le x \le y\}$ (1,5 puncte)

NR 2 $\displaystyle\iint_D x \cdot y^2\,dx\,dy$, unde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid$



10,50 – 11,50

REZULTATE: ORA 15