S1.1 a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ?$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} = \frac{\overbrace{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}^{n-1 \text{ termeni}}}{\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ ori}}} \le \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \to 0$$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$, $a>0$, $a \ne e$

cazul 1: $a \in (0,1) \Rightarrow \lim = 0$

cazul 2: $a > 1$ $x_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n} > 0 \Rightarrow$ criteriul raportului pentru șiruri cu termeni pozitivi

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}\cdot (n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{a^n} \cancel{(n)!}}$$

$$= \frac{a \cdot n+1 \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-n}{n+1}} \to 1^\infty = a\cdot e^{-1} = \frac{a}{e}$$

$$\Rightarrow l = \frac{a}{e}$$

cazul 3: $a = 1 \Rightarrow l = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha \cdot 1! + 2^\alpha \cdot 2! + \ldots + n^\alpha \cdot n!}{(n+1)!}$

urma lui cezaro stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha \cdot (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \frac{(n+1)^\alpha}{n+2-1} = (n+1)^{\alpha - 1}$$

$\alpha - 1 > 0$: $l = \infty$

$\alpha - 1 = 0$: $l = 1$

$\alpha - 1 < 0$: $l = 0$

~~Fie $x_n = \frac{n(-1)^n}{n+1} \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$.~~

~~$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$~~

~~$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$~~

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,(\sqrt[n]{a} - 1)$, $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln a = 0$$

$a = 1$ $l = 0$

S1.2 a) fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\exists \lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

calculați $\lim_{n\to\infty} x_n = ?$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$b_n = n$

$a_n = x_n$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

b) Se consideră șirul x_n definit prin relația de recurență $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n x_n^2}$, $x_1 > 0$. Să se arate că șirul este convergent și calculați-i limita.

$x_1 > 0 \Rightarrow x_2 > 0$

inducție $x_n > 0 \Rightarrow$ șirul este mărginit inferior

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{x_n}}{1 + n x_n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x_n}} = \frac{1}{1 + n x_n^2} < 1 \Rightarrow x_n \downarrow \Rightarrow x_n \text{ mărginit}$$

$$l = \frac{l}{1 + nl} \Rightarrow \cancel{l} + nl^2 = \cancel{l}$$

$nl^2 = 0$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-x_n^3}{\frac{1}{n} + x_n^2} \to -l$$

dacă $l > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_n$

· S1.3 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $\exists \lim_{n\to\infty} [(n+1)x_{n+1} - n x_n] = l \in \overline{\mathbb{R}}$

a) Calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$

$$\frac{(n+1)x_{n+1} - n x_n}{n+1-n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$$

$$\Rightarrow \exists \frac{a_n}{b_n} = l$$

b) Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = \frac{n x_n}{n + x_n^2}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $x_1 > 0$. Arătați că șirul este convergent și calculați-i limita.

$$x_2 = \frac{n x_1}{n + x_1^2} > 0 \quad \text{inducție } x_n > 0$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n x_n - n x_n - x_n^3}{n + x_n^2} = \frac{-x_n^3}{n + x_n^2} < 0$$

$$\Rightarrow x_n \downarrow \Rightarrow \text{mărg}$$

$$l = \frac{nl}{n + l^2} \qquad \cancel{nl} + l^3 = \cancel{nl}$$

S2.1. Știind că $\exists \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) = c \in (0,1)$. Calculați următoarele limite de șiruri:

a) $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n}_{c} + \ln n) = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty} (1 + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n - 1 - \ldots - \frac{1}{n} + \ln n + \ln 2n - \ln n) = \ln 2$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \le 1$

$$2^\alpha \le 2 \quad | ()^{-1}$$

$$\frac{1}{2^\alpha} \ge \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

S2.2 Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{Z}$ este convergent $\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n \ge n_0$ avem $x_n = x_{n_0}$

"$\Leftarrow$" $x_n = x_{n_0}$ $(\forall) n \ge n_0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0} \in \mathbb{R}$

"$\Rightarrow$" $0 < b - a \le 1$ atunci $(a,b) \cap \mathbb{Z} = \{\emptyset\}$ sau $(a,b) \cap \mathbb{Z} = \{k\}$ cu $k \in \mathbb{Z}$

$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ $(\forall) \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|l - x_n| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_\varepsilon$

.3 Se consideră șirul $x_n = \{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Este șirul x_n convergent? Justificați.

~~$x_n \in [0,1)$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$~~

③

$x_n \in [0,1)$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

PP că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent $\Rightarrow$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}]$$

$$x_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}]$$

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - \underbrace{\left([1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}] - [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}]\right)}_{y_n}$$

$y_n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - y_n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} - x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\downarrow\ \ln 2} - y_n = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ln 2$, dar $y_n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ contradicție

$\Rightarrow x_n$ divergent

52.5. Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ ~~pentru care $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty}$ $[(n+1)$~~ definit prin relația de recurență $x_{n+1} = \frac{n x_n}{n + x_n^2}$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 > 0$. Demonstrați că șirul este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$x_1 > 0 \Rightarrow x_2 > 0 \Rightarrow$ demonstrăm prin inducție că $x_n > 0$ ①

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n + x_n^2} < 1 \Rightarrow \text{șir} \downarrow \text{strict} \ ②$$

din ① și ② $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, $l \in \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = \frac{n x_n}{n + x_n^2} \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n x_n}{n + x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1 + \frac{x_n^2}{n}}$$

$$\Rightarrow l = \frac{l}{1 + \frac{l^2}{n}} \Rightarrow l = l \quad \text{nu convine}$$

iau $a_n = n \cdot x_n$

$b_n = n$

dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)x_{n+1} - n x_n}{n+1-n} = l$ atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = l$.

$$\lim_{n\to\infty} \left[(n+1) \cdot \frac{n x_n}{n + x_n^2} - n x_n\right] = \lim \left[\frac{(n+1)n x_n - n^2 x_n - n x_n^3}{n + x_n^2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\cancel{n^2 x_n} - \cancel{n^2 x_n} - n x_n^3 + n x_n}{n + x_n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n x_n (1 - x_n^2)}{n + x_n^2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_n (1 - x_n^2)}{1 + \frac{x_n^2}{n}}\right]$$

$\forall x_n \in [0, x_1] \Rightarrow x_n^2 < n \Rightarrow \frac{x_n^2}{n} \to 0$

$\Rightarrow \ell(1-\ell^2) = \ell$

$\Rightarrow \ell = 0$ sau $\ell = 1$ sau $\ell = -1$

52.6 Determinați punctele limită ale șirurilor $x_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot tg\frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}$

$tg\frac{n\pi}{3} = tg\, k\pi = tg\,\pi = 0, n = 3k$

$tg\frac{(3k+1)\pi}{3} = tg\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, n = 3k+1$

$tg\frac{(3k+2)\pi}{3} = tg\left(k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = tg\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, n = 3k+2$

$x_{3k} \to 0$

$x_{3k+1} \to \sqrt{3}$

$x_{3k+2} \to -\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ nu există limită pt x_n

53.1. Studiați natura seriilor:

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!} \cdot a^n, a > 0$

$t_n > 0\ (\forall) n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!} \cdot a^n$

$s_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\cancel{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n+1)}\cdot(3n+4)}{(n+2)\cancel{!}} a^{n+1} \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{1\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}\cdot a^n} \to \frac{3n+4}{n+2} \cdot a \to 3a$

dacă: $- a > \frac{1}{3} \Rightarrow \ell > 1 \Rightarrow$ serie divergentă

$- a = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell = 1 \Rightarrow$ criteriul nu se pronunță

$- a < \frac{1}{3} \Rightarrow \ell < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

dacă $a = \frac{1}{3} \Rightarrow t_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1\cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{(n+1)!\cdot 3^n}$

CRITERIUL RAABE-DUHAMEL

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n+1)}}{\cancel{(n+1)!}\cdot \cancel{3^n}} \cdot \frac{(n+2)\cancel{!}\cdot 3^{\cancel{n+1}}}{\cancel{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n+1)}(3n+4)} - 1\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+2)\cdot 3}{3n+4} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{3n}+6-\cancel{3n}-4}{3n+4}\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+4} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ serie divergentă

e) $t_n = a^{-\sqrt{n^2+1}}, a > 0, n \in \mathbb{N}, t_n > 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_n} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}}$

dacă $a > 1 \Rightarrow \ell < 1$ serie convergentă

$a < 1 \Rightarrow \ell > 1$ serie divergentă

$a = 1 \Rightarrow \ell = 1$

$\Rightarrow t_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 1$ dar, dacă $\exists \lim_{n\to\infty} t_n \neq 0$ sau $\nexists \lim_{n\to\infty} t_n$ atunci seria de nr reale este divergentă

$\Rightarrow$ seria este divergentă

1) $t_n = \frac{1}{n\ln n}, n \geq 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$ – CRIT RAPORTULUI

CRIT RAABE-DUHAMEL

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n\ln(n+1) + \ln(n+1) - n\ln n}{n\ln n}\right)$

CRITERIUL DE CONDENSARE

$t_n > 0 \ (\forall)\ n \geq 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$

$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \frac{1}{n\ln n} = \frac{n\ln n - (n+1)\ln(n+1)}{n(n+1)\ln n\ln(n+1)} =$

$= \frac{\ln n^n - \ln(n+1)^n - \ln(n+1)}{\dots} < 0$

$\Rightarrow t_n \downarrow$

$\Rightarrow$ criteriul de condensare al lui Cauchy: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} t_n$ și $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot t_{2^n}$ au aceeași natură.

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \ln 2^n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln 2} = \ln 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$ serie divergentă

53.2. Să se studieze natura următoarelor serii de nr reale.

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \sin\frac{1}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{n} \in (0, 1]$

$1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{1}{n} > 0$

$\Rightarrow t_n > 0$

$t_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

notez $x_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \Rightarrow \frac{t_n}{x_n} \to 1 \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ prin criteriul de comparație cu limite, seriile $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n$ au aceeași natură

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ convergentă dacă $\alpha+1 > 1$
divergentă dacă $\alpha+1 \leq 1$

b) $t_n = \frac{1}{n + a^n}, n \in \mathbb{N}, a > 0, t_n > 0 \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n + a^n}{n+1+a^{n+1}}$

dacă $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+a^n}{n+1+a^{n+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + a^x}{x+1+a^{x+1}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 + a^x\ln a}{1 + a^{x+1}\ln a} = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + a^n}{n+1+a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

dacă $a \leq 1 \Rightarrow a^n \leq 1$
$n + a^n \leq n+1$
$\Rightarrow \frac{1}{n+a^n} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t_n \geq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \leftarrow$ divergentă

53.3 Studiați natura următoarelor serii de nr reale:

6

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right)^{\alpha}$ unde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$

$x_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n+1}$

criteriul raportului: $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \ldots \cdot \cancel{2n} \cdot (2n+2)}{\cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \ldots \cdot \cancel{(2n+1)} \cdot (2n+3)}$

$\cdot \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot \ldots \cdot \cancel{(2n+1)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \ldots \cdot \cancel{2n}} = \frac{2n+2}{2n+3} \to 1$

criteriul raabe-duhamel:

$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+3}{2n+2} - 1 \right) = \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ divergentă

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}, a > 0$

criteriul raportului: $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n \cdot n!} =$

$= \frac{a \cdot \cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = a \cdot \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right]^{\frac{-n}{n+1}} = a \cdot e^{-1} = \frac{a}{e}$

dacă $\frac{a}{e} > 1 \Rightarrow$ serie divergentă

$\frac{a}{e} < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

$\frac{a}{e} = 1 \Rightarrow$ criteriul nu se pronunță

criteriul raabe-duhamel: $\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a \cdot n^n}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} - 1 \right) =$

$= n \left(a \left(\frac{n}{n+1} \right)^n - 1 \right) = n \left(a \cdot \frac{n^n - (n+1)^n}{(n+1)^n} \right) = n \cdot a \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} =$

criteriul de condensare al lui cauchy:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n \cdot n!} = \frac{a \cdot \cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^n} = a \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$

$x_{n+1} - x_n = \frac{a^{n+1} \cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} - \frac{a^n \cdot n!}{n^n} = \underbrace{a^n \cdot n!}_{>0} \left(\frac{1}{(n+1)^n} - \frac{1}{n^n} \right)$

$(n+1) > n$

$(n+1)^n > n^n \quad | ()^{-1}$

$\frac{1}{(n+1)^n} < \frac{1}{n^n}$

$\frac{1}{(n+1)^n} - \frac{1}{n^n} < 0$

~~dacă~~ x_n nu este $\downarrow$

criteriul de comparație cu inegalități:

$x_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n} > y_n = \frac{a^n}{n^n}$

criteriul raportului: $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a}{n} \to 0 \Rightarrow$ convergentă n.1. Să se studieze natura seriei de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \arcsin \frac{1}{n^2-n+1}$ (*)

$x_n = \arcsin \frac{1}{n^2-n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

dacă $x \in [0,1] \Rightarrow \arcsin \geq 0$

$x \in [-1,0) \Rightarrow \arcsin < 0$

$\frac{1}{n^2-n+1} \in (0,1] \Rightarrow \arcsin > 0 \Rightarrow x_n > 0$

$\Rightarrow$ pot aplica criteriile pt șiruri cu termeni pozitivi

încerc cu criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^2+n+2}}{\arcsin \frac{1}{n^2-n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^2+n+2}}{\frac{1}{n^2+n+2}} \cdot \frac{1}{n^2+n+2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{1}{n^2-n+1}}{\arcsin \frac{1}{n^2-n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2+n+1}} = \cdots\cdots \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} =$$

$$= \cdots\cdots \left(1 + \frac{\cancel{n^2}-n+1-\cancel{n^2}-n-1}{n^2+n+1}\right) = \left(1 + \frac{-2n}{n^2+n+1}\right) \cdots\cdots =$$

$$\cancel{= \left(e^{\frac{n^2+n+1}{-2n}}\right)^{\frac{-2n}{n^2+n+1}}}$$

aia cu e e pt 1^∞, nu pt 1.

Folosesc CRITERIUL DE COMPARAȚIE CU LIMITE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n,\ \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \in \mathbb{R}_+ \text{ a.î. } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \\ \text{Dacă: } - l \in (0,+\infty) \Rightarrow \text{seriile au aceeași natură} \\ \quad - l = 0 \text{ și } \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \text{ conv} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ conv} \\ \quad - +\infty \text{ și } \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \text{div} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \text{ div} \end{array}}$$

$\Rightarrow x_n = \arcsin \frac{1}{n^2-n+1}$ $\quad y_n = \frac{1}{n^2-n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \Rightarrow$ seriile au aceeași natură.

Ce natură are seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n+1} = ?$

Folosesc CRITERIUL COMPARAȚIEI CU INEGALITĂȚI

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n,\ \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \in \mathbb{R}_+ \text{ a.î. } \exists\, n_0 \text{ a.î. } x_n \leq y_n\ (\forall)\ n > n_0 \\ \text{Dacă } \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \text{ este: - convergentă} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ conv.} \\ \qquad \cancel{\text{- divergentă} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ divergentă}} \\ \text{Dacă } \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \text{ este divergentă} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \text{ divergentă} \end{array}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2-n+1} < \frac{1}{n^2}$

cum este seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

SERII REMARCABILE DE NR REALE:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{diverg. dacă } \alpha \le 1 \\ \text{conv. dacă } \alpha > 1 \end{cases}}$$

cum $2 > 1 \Rightarrow$ serie conv

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \arcsin \frac{1}{n^2-n+1}$ conv.

Sh.2 a) Dem. că (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$ și $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ sunt mulțimi închise în $\mathbb{R}$, cu $a<b$.

! În $\tau_{\mathbb{R}}$ mulțimile sunt fie închise, fie deschise, fie ~~amândouă~~ niciuna, dar niciodată amândouă

I. (a,b)

$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

II. $(-\infty, b)$

$(\forall)\ x \in (-\infty,b)\ \exists\ r>0$ a.î. $x+r<b \Leftrightarrow$

$r < b-x$ a.î. $B(x,r) \subseteq (-\infty,b)$

$\Rightarrow (-\infty,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$

III. $\left.\begin{array}{l} (a,+\infty) = \bigcup_{k\ge 1}^{+\infty} (a,a+k) \\ (a,a+k) \in \tau_{\mathbb{R}}\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow (a,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$

IV. $[a,b]$

$[a,b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$

V. $(-\infty,a]$

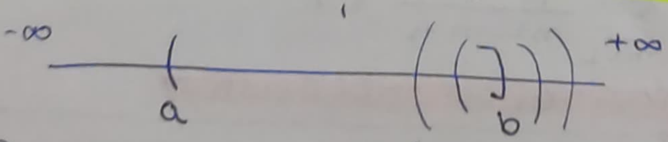
$C_{\mathbb{R}}(-\infty,a] = \mathbb{R} \setminus (-\infty,a] = (a,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow (-\infty,a]$ e închisă.

VI. $[b,+\infty)$

$C_{\mathbb{R}}[b,+\infty) = (-\infty,b) \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow [b,+\infty)$ mulțime închisă

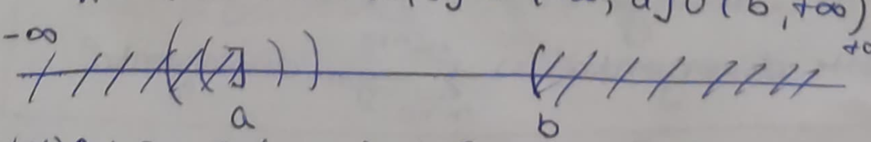
b) Dem că $[a,b]$ și $(a,b]$ nu sunt mulțimi deschise și închise în $\mathbb{R}$.



$(\forall)\ r>0\quad B(b,r) \not\subseteq (a,b]$

$\Rightarrow (a,b] \notin \tau_{\mathbb{R}}$

$C_{\mathbb{R}}(a,b] = \mathbb{R} \setminus (a,b] = (-\infty,a] \cup (b,+\infty)$



$(\forall)\ r>0\quad B(a,r) \subseteq C_{\mathbb{R}}(a,b]$

$\Rightarrow (a,b]$ nu este mulțime închisă

| Dem că F, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nu sunt mulțimi închise în $\mathbb{R}$, unde $F \subseteq \mathbb{R}$ este mulțime finită.

I. $F = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$

PP $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$C_{\mathbb{R}} F = \mathbb{R} \setminus F = \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots a_n\} \in \tau_{\mathbb{R}}$

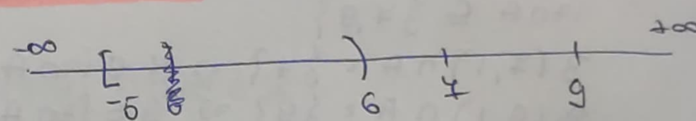
II. $\mathbb{Z}$.

$C_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (n, n+1)$

~~...~~ $\Rightarrow \mathbb{Z} \in \tau_{\mathbb{R}}$, m deschisă

55.1. Fie $A = [-5,6) \cup \{7,9\}$. Să se determine $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $Fr A$, A', izo A.

A° = cea mai mare mulțime deschisă $\subseteq A$



$A^\circ \supseteq (-5,6) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(-5,6) \subseteq A^\circ \subseteq A$

$(\nexists)$ $r>0$ a.î. $B(-5,r) \subseteq A \Rightarrow -5 \notin A^\circ$

$(\nexists)$ $r>0$ a.î. $B(7,r) \subseteq A \Rightarrow 7 \notin A^\circ$

$(\nexists)$ $r>0$ a.î. $B(9,r) \subseteq A \Rightarrow 9 \notin A^\circ$

$A^\circ = (-5,6)$

$A \neq A^\circ \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}}$

$\bar{A}$ = cea mai mică mulțime închisă care conține pe A

$A \subseteq \underbrace{[-5,6]}_{\text{închisă}} \cup \underbrace{\{7\} \cup \{9\}}$

orice mulțime finită e închisă

$[-5,6] \cup \{7\} \cup \{9\}$ închisă $\Rightarrow \bar{A} \subseteq [-5,6] \cup \{7,9\}$

→ diferența dintre A și $\bar{A}$ este $\{6\}$

6 punct de aderență dacă $(\forall)$ $B(6,r) \cap A \neq \emptyset$, $r>0$

6 e punct de aderență $\Rightarrow 6 \in \bar{A}$

$\bar{A} = [-5,6] \cup \{7,9\}$

$A \neq \bar{A} \Rightarrow A$ nu e mulțime închisă

$Fr = \bar{A} \setminus A^\circ$

$Fr = \{-5, 6, 7, 9\}$

A' se caută în $\bar{A}$. $x \in A'$ dacă $(\forall)$ vecinătate a lui x intersectează mulțimea A într-un element $\neq x$.

~~$B(9,1)$ A~~

$A' \subseteq [-5,6] \cup \{7,9\}$

$B(9,1) \cap A \setminus \{9\} = \emptyset \Rightarrow 9 \notin A'$

$B(7,1) \cap A \setminus \{7\} = \emptyset \Rightarrow 7 \notin A'$

Alag $x_m = 6 - \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$

$x_m \to 6$

$$\left.\begin{array}{l} x_m \in [-5,6)\ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_m \in A\ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^* \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_m \neq 6\ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \in A'$$

$y_m = -5 + \frac{1}{m}$; $m \in \mathbb{N}^*$

$y_m \to -5$

$$\left.\begin{array}{l} y_m \in [-5,6)\ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y_m \in A \\ y_m \neq -5\ (\forall)\, m \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow -5 \in A'$$

$\Rightarrow A' = [-5,6]$

izo A se caută în $A \setminus A'$. $x \in$ izo A dacă $\exists V \in \mathcal{U}_{\tau}(x_0)$ a.î. $V \cap A = \{x_0\}$

izo $A \subseteq A \setminus A'$

izo $A \subseteq \{7,9\}$

$B(7,1) \cap A = \{7\} \Rightarrow 7 \in$ izo A

$B(9,1) \cap A = \{9\} \Rightarrow 9 \in$ izo A

izo $A = \{7,9\}$

O funcție e continuă în punctele sale izolate și nu e derivabilă în $A \setminus A'$.

56.1. Fie $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ o funcție cont. cu $f(0) = f(2)$. Demonstrați că există un element $c \in [0,2]$ a.î. $f(c) = f(c+1)$.

$g(x) = f(x+1) - f(x)$

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$

g funcție cont pe $[0,1]$

$g(0) = f(1) - f(0)$

$g(1) = f(2) - f(1)$

~~PP. $f(0) = f(1)$~~

$f(0) = f(2) \Rightarrow g(1) = f(0) - f(1)$

$g(0) \cdot g(1) = -(f(0) - f(1))^2 \leq 0 \Rightarrow \exists\, c \in [0,1]$ a.î. $g(c) = 0$

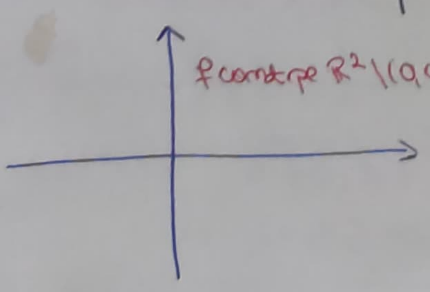
$\Rightarrow g(c) = 0 \Rightarrow f(c+1) - f(c) = 0$

$\Rightarrow f(c+1) = f(c)$

56.2. Studiați continuitatea funcțiilor: CONTINUITATE

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x \neq 0 \text{ sau } y \neq 0,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$



f cont. pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\lim_{m\to\infty} f\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{m}\right)^2}{\frac{2}{m^2}} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} f\left(\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2}}{\frac{2}{m^2}} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} f\left(\frac{1}{m}, 0\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2}} = 1$$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \Rightarrow f$ nu e cont în $(0,0)$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUITATE

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3+1}{n^2+n^4} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = \frac{0+\frac{1}{n^3}}{0+\frac{1}{n^2}} = 0$$

Demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = \ell \in \mathbb{R}$

Evaluăm $|f(x,y)-\ell|$

$$0 \le |f(x,y)-\ell| = \left|\frac{x^3+y^3}{y^2+x^2} - 0\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|$$

$$0 \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{(|x|+|y|)(x^2-|xy|+y^2)}{x^2+y^2} = (|x|+|y|)\underbrace{\frac{x^2-|xy|+y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} \le$$

$$\le |x|+|y|$$

$$0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x|+|y| \quad (\forall)\, x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$$

$$\to 0$$

$$\Rightarrow (\exists) \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cont.}$$

56.3 Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ~~f(x,y) =~~

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \left[\frac{0}{0}\right] =$$

56.2 b)

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \to 0 \Rightarrow f \text{ cont.}$$

56.4. Arătați că $(\nexists)$ f cont $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. $f(f(x))=-x$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$

Metoda reducerii la absurd:

Pp că $(\exists)$ f cont $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. $f(f(x))=-x$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$ (12)

Verificăm injectivitatea funcției

Pp. că $f(x_1)=f(x_2)$

$f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow$ funcție injectivă; $\mathbb{R}$ interval; f cont $\Big\} \Rightarrow$ f strict monotonă

$-x_1=-x_2$

fie $x_1>x_2$

$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ sau $f(x_1)<f(x_2)$

$f(f(x_1))>f(f(x_2))$ $\qquad$ $f(f(x_1))>f(f(x_2))$

$-x_1>-x_2$ (F) $\qquad$ $-x_1>-x_2$

56.5 Determinați toate funcțiile continue $f:[0,1]\to[0,1]$ care verifică următoarea ~~proprietăți~~ ipoteze:

i) $f(0)=0$, $f(1)=1$

ii) $f(f(x))=x$ $\quad (\forall)\, x\in[0,1]$

Se observă că funcția identică $f=1_{[0,1]}$ verifică ipoteza.

Verificăm injectivitatea funcției:

Pp $f(x_1)=f(x_2)$

$f(f(x_1))=f(f(x_2))$

$x_1=x_2 \Rightarrow f$ inj

f inj
f cont pe $[0,1]$ $\Big\} \Rightarrow$ strict monotonă

$f(1)>f(0) \Rightarrow \nearrow$ strict

Pp că $(\exists)\, f\neq 1_{[0,1]}$ care verifică ipotezele problemei.

Pp că $(\exists)\, x_0\in[0,1]$ a.î. $f(x_0)\neq x_0$

Cazul 1: $f(x_0)<x_0 \mid \cdot f \nearrow$

$f(f(x_0))<f(x_0)$

$x_0<f(x_0)$ absurd

Cazul 2: $x_0<f(x_0)$

$f(x_0)<f(f(x_0))$

$f(x_0)<x_0$ absurd

57.1. Determinați punctele de extrem local ale funcției:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 0\\ x\cdot e^{-x}, & x>0\end{cases}$

f cont pe $\mathbb{R}^*$

PUNCTELE DE EXTREM LOCAL
- verific dacă funcția e continuă
- calculez derivata
- rezolv ecuația $f'(x)=0$

$$\left.\begin{array}{l} l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^3 = 0 \\ l_d = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot e^{-x} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ cont}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 3x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x\cdot e^{-x})' = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^{-x} - x\cdot e^{-x}) = 1-0$$

$\Rightarrow \nexists\ f'_d(0) = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x<0 \\ e^x(1-x), & x>0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ $\quad 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, $\cancel{x}$, $x<0 \Rightarrow$ nu convine

$e^x(1-x) = 0 \Rightarrow e^x = 0$ $\quad 1-x = 0$ $\quad x = 1$, $x>0$ conv

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\ +$	|	0	$-$
$f(x)$	$-\infty\ \nearrow$	0	$\nearrow\ \frac{1}{e}$	$\searrow\ -\infty$

$f(0) = 0$

$f(1) = \frac{1}{e}$

$x_0 = 1$ punct de maxim local al funcției f

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Sf. 2. Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 4$.

a) Să se ~~calculeze f~~ arate că f bij pe $\mathbb{R}$.

BIJECTIVITATE

- inj: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- surj: $\mathrm{Im}(f) =$ ~~codomeniu~~ codomeniu

injectivitate: $\cancel{f}f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^3 + x_1^2 + x_1 + 4 = x_2^3 + x_2^2 + x_2$

$(x_1^3 - x_2^3) + (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2 + x_1x_2 + 1) = 0$

$x_1 = x_2$ sau $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - x_1 - x_2 - x_1x_2 - 1 = 0$

$(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 - x_1(x_2+1) - (x_2+1) = 0$

$$\underbrace{(x_1+1)^2}_{p^2} + \underbrace{(x_2+1)^2}_{q^2} - \underbrace{(x_1+1)(x_2+1)}_{p\cdot q} = 0$$

$p^2 + q^2 - pq = 0$

$p^2+q^2-pq=0 \mid :q^2$

$\left(\frac{p}{q}\right)^2-\left(\frac{p}{q}\right)+1=0$

$x^2-x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ nu există x_1, x_2

$\Rightarrow f$ inj

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ inj} \\ \operatorname{Im} f=\mathbb{R} \Rightarrow f \text{ surj}\end{array}\right\} \Rightarrow f$ bij

b) Calculați $(f^{-1})'(3)$

$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'(b)}$ unde $f(b)=a$, f bij

$\left.\begin{array}{l} f(x_0)=3 \\ f(-1)=3 \\ f \text{ bij}\end{array}\right\} \Rightarrow x_0=-1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{(3x^2+2x+1)(-1)}=\frac{1}{(3-2+1)}=\frac{1}{2}$

S1.3a) Demonstrați inegalitatea $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ $(\forall)\, x\in(0,+\infty)$

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$

f funcție de clasă C^∞ pe $[0,+\infty)$

$\Rightarrow f$ este derivabilă de 5 ori pe $[0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$

$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$

$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$

$f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$

$f^{(5)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$ ~~$(\forall)\, x\in[0,+\infty)$~~

Folosesc FORMULA LUI TAYLOR

Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval, $n\in\mathbb{N}$, $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I in $x_0\in I$. $(\forall)\, x\in I, x\neq x_0$, $(\exists)\, c\in I$ situat între x_0 și x a.î.:

$f(x)=T_{f,n,x_0}(x_0)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$(\forall)\, x\in[0,+\infty)$ cu propr. că $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4+\underbrace{\frac{f^{(5)}(c)}{5!}\cdot x^5}_{\text{rest}}$

$f(x)=\ln(1+x)=0+1\cdot x+\frac{-1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{-1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{120}\cdot\frac{24}{(1+c)^5}\cdot x^5$

$f(x)=\ln(1+x)=P+\frac{x^5}{5(1+c)^5}$

$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ c>0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^5}{5(1+c)^5}>0 \Rightarrow$ inegalitate demonstrată

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}}{x^5}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{x^5}{5(1+c)^5}}{x^5}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{5(1+c)^5}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{5}$

$c\in(0,x) \Rightarrow 0<c<x$, $x\to0$

b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}}{x^5}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}}{x^5} = \frac{\frac{x^5}{5(1+c)^5}}{x^5} = \frac{1}{5(1+c)^5} = \frac{1}{5}$$

deoarece $c\in(0,x)$

$0<c<x$

0

57.4. Dem că seria de funcții $\sum\limits_{n\ge1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ este absolut convergentă pe $(-1,1)$ dar nu este uniform conv.

$f_n:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$f_n(x)=\frac{x^n}{n}$

Fie $x\in(-1,1)$ și dem că seria de nr reale $\sum\limits_{n\ge1}\frac{x^n}{n}$ este absolut convergentă, adică că $\sum\limits_{n\ge1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|$ este conv.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{n}{n+1}=|x|<1$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|$ serie convergentă de nr reale

am folosit CRITERIUL RAPORTULUI PT SERII CU TERMENI POZ.

Fie (x_n) un șir de nr din $\mathbb{R}_+$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l$.

Dacă: $l<1 \Rightarrow$ serie conv

$l>1 \Rightarrow$ serie div

$\Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ e absolut convergentă

Pp. că seria $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ este uniform convergentă pe $(-1,1)$

$(\forall)\ \varepsilon>0\ (\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}}{n+2}+\dots+\frac{x^{n+m}}{n+m}\right|<\varepsilon$

$(\forall)\ x\in(-1,1)\ (\forall)\ n\ge n_\varepsilon\ (\forall)\ m\in\mathbb{N}^*$

dacă $m=n$

$\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}}{n+2}+\dots+\frac{x^{2n}}{2n}\right|<\varepsilon\ (\forall)\ x\in(-1,1)\ (\forall)\ n\ge n_\varepsilon$

① $\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots+\frac{x^{2n}}{2n}<\varepsilon\ (\forall)\ x\in[0,1)$ și $n\ge n_\varepsilon$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots+\frac{x^{2n}}{2n}\ge\frac{x^{2n}}{n+1}+\frac{x^{2n}}{n+2}+\dots+\frac{x^{2n}}{2n}=$$
$$=x^{2n}\left(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)\ge x^{2n}\left(\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=\frac{x^{2n}}{2}\ ②$$

$(\forall)\ n\ge n_\varepsilon$ ②

① + ② $\Rightarrow \frac{x^{2n}}{2}<\varepsilon\ (\forall)\ x\in[0,1)\ (\forall)\ n\ge n_\varepsilon$

$\sup\limits_{x\in[0,1)}\frac{x^{2n}}{2}\le\varepsilon\ (\forall)\ n\ge n_\varepsilon$

$\frac{1}{2}\le\varepsilon\ (\forall)\ \varepsilon>0$ contradicție

$\Rightarrow$ seria nu e uniform conv

am folosit CRITERIUL LUI CAUCHY PT SERII DE FUNCȚII

Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea

$\iff (\forall)\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon$ a.î. $|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\dots+f_{n+m}(x)|<\varepsilon$ $(\forall)\ x\in$

$(\forall)\ n > n_\varepsilon$, $(\forall)\ m\in\mathbb{N}^*$. (Negație pt a arăta că nu e)

55.2 Studiați convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții:

a) $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

CONVERGENȚA SIMPLĂ + UNIFORMĂ

16

$$f_n(x)=\frac{nx}{n+x},\ n\in\mathbb{N}$$

Fie $x\in(0,+\infty)$ (fixez x)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x}=x$$

$A=(0,+\infty)$

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$

$$f_n \xrightarrow[(0,+\infty)]{s} f$$

aplic criteriul practic de convergență uniformă pt șiruri de funcții

Fie $n\in\mathbb{N}$.

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{nx}{n+x}-x\right|=\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{-x^2}{n+x}\right|=$$

$$=\sup_{x\in(0,+\infty)}\underbrace{\frac{x^2}{n+x}}_{h(x)}$$

$h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$h(x)=\frac{x^2}{n+x}$$

$$h'(x)=\frac{2x(n+x)-x^2}{(n+x)^2}=\frac{2nx+x^2}{(n+x)^2}\quad \forall\ x\in(0,+\infty)$$

$h'(x)=0 \iff x(2n+x)=0 \notin (0,+\infty)$

$x_1=0$ sau $x_2=-2n\notin(0,+\infty)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

$$\lim_{\substack{x>0\\x\to0}} h(x)=0$$

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=+\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\neq0$$

$$\Rightarrow\ f_n \;\cancel{\xrightarrow[(0,+\infty)]{u}}\; f$$

) $g_n: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Fie $x \in [0,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x} = 0$$

$A = [0,+\infty)$

$g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$g(x) = 0$

$$g_n \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{s} g$$

aplic criteriul practic de convergență uniformă pt șiruri de funcții

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x} - 0\right| =$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right| = \sup_{x\in[0,+\infty)} (\underbrace{\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}}_{u(x)})$$

$$u(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{x+\frac{1}{n}-x}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)} \le$$

$$\le \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \le \sqrt{\frac{1}{n}} \ (\forall) \ x \in [0,+\infty)$$

$$0 \le \sup_{x\in[0,+\infty)} |g_n(x) - g(x)| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\to 0$, $n \to \infty$

$$g_n \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{u} g$$

S9.1 Studiați diferențiabilitatea următoarelor funcții:

a) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ **DIFERENȚIABILITATEA**

$$f(x) = \left(\arccos x, \left|x-\frac{1}{2}\right|\right)$$

f depinde de o singură variabilă $\Rightarrow$ f diferențiabilă

$\Leftrightarrow$ f derivabilă $\Leftrightarrow$ componentele lui f sunt derivabile

~~b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$~~

~~$f(x,y,z) = (x^3y^2z, x \cdot e^{xyz})$~~

$f_1, f_2: [-1,1] \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = \arccos x$

$f_2(x) = \left|x-\frac{1}{2}\right|$

f_1 cont pe $[-1,1]$ și derivabilă pe $(-1,1)$

f_2 derivabilă pe $[-1,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

f derivabilă pe $(-1,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $(-1,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$df(\frac{1}{4}): \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$df(\frac{1}{4})(x) = x\cdot f'(\frac{1}{4})\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$

$f_1'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\forall)\, x\in(-1,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$$f_2'(x) = \begin{cases} (x-\frac{1}{2})', & x>\frac{1}{2} = 1 \\ (\frac{1}{2}-x)', & x<\frac{1}{2}, = -1 \end{cases}$$

$df(a)(x) = x\cdot f'(a)$

$df(a)(x,y) = x\frac{df}{dx}(a) + y\frac{df}{dy}(a)$

$f'(\frac{1}{4}) = \left(\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}, -1\right) = \left(\frac{-4}{\sqrt{15}}, -1\right)$

$df(\frac{1}{4})(x) = x\left(\frac{-4}{\sqrt{15}}, -1\right) = \left(-\frac{4x}{\sqrt{15}}, -x\right)\ (\forall)\, x\in\mathbb{R}$

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ **DIFERENȚIABILITATEA**

$f(x,y,z) = (x^3y^3z,\ xe^{xyz})$

îi calculăm derivatele parțiale:

$f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$f_1(x,y,z) = x^3y^2z$

$f_2(x,y,z) = xe^{xyz}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left((x^3y^2z)'_x, (xe^{xyz})'_x\right) =$

$= \left((3x^2y^2z), (e^{xyz} + xe^{xyz}\cdot yz)\right)\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

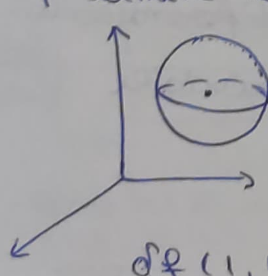
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \left((x^3y^2z)'_y, (xe^{xyz})'_y\right) =$

$= (2yx^3z,\ xe^{xyz}xz)\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \left((x^3y^2z)'_z, (xe^{xyz})'_z\right) =$

$= (x^3y,\ xe^{xyz}xy)\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

f admite toate derivatele parțiale pe $\mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ funcții ~~trf~~ continue pe $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

$df(1,1,1):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$df(1,1,1)(x,y,z) = x(3\cdot1\cdot1\cdot1,\ e^{1\cdot1\cdot1} + 1\cdot e^{1\cdot1\cdot1}\cdot1\cdot1) + y(2,e) + z(1,e)$

$df(1,1,1)(x,y,z) = (3x, 2ex) + (2y, ey) + (z, ez) =$

$= (3x+2y+z,\ 2ex+ey+ez)\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$df(1,1,1) = dx(3,2e) + dy(2,e) + dz(1,e)$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DIFERENȚIABILITATEA

(19)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{(xy)' \cdot \sqrt{x^2+y^2} - (\sqrt{x^2+y^2})' \cdot xy}{x^2+y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot xy \cdot 2x}{x^2+y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x^2y}{x^2+y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) =$$

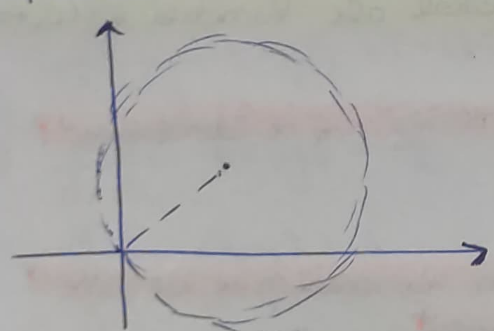
$$= \left(\frac{y^3}{(y^2+x^2)^{3/2}} \right) \; (\forall)\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \; (\forall)\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$$

în $(0,0)$ această metodă nu se poate aplica.

$\Rightarrow$ aplic definiția

f admite toate derivatele parțiale pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$



$\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ mulțime deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2+0}} - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R}$$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

e_1 înseamnă că verific în x.

e_2 înseamnă că verific în y

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_2) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0 \Rightarrow (\exists)\, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

nu pot să desenez nicio bilă închisă în $(0,0)$

$\Rightarrow \{(0,0)\}$ nu e bilă deschisă aleg operatorul liniar

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

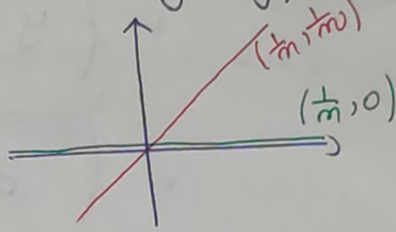
$T(x,y) = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}_{g(x,y)}$$

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left|\frac{1}{n}\frac{1}{n}\right|}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to 0} g\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$$



$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2}$ nu există

$\Rightarrow$ f nu e diferențiabilă în $(0,0)$

$df(1,0): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(1,0)(x,y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$df(1,0) = \cancel{y}\, dy$

CRITERIUL DE DETERMINARE A PUNCTELOR DE EXTREM LOCAL

5.10.1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:(0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$

Pasul 1: Se studiază continuitatea funcției și se identifică punctele de discontinuitate.

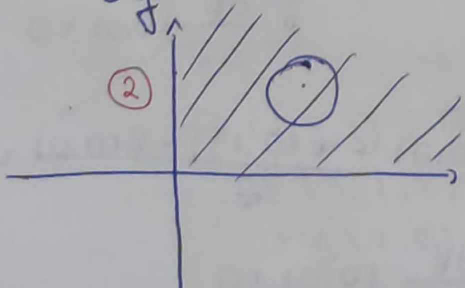
f cont pe $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

Pasul 2: Se studiază diferențiabilitatea funcției și se identifică punctele în care funcția nu este diferențiabilă.

① $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)'_x = \left(y + \frac{-2}{x^2} + 0\right) \quad (\forall)(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(xy + \frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)'_y = \left(x + 0 + \frac{-1}{y^2}\right) \quad (\forall)(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$

②



③ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

① + ② + ③ $\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

Pasul 3: Se determină punctele critice ale funcției f.

- $\to$ f diferențiabilă în x_0
- $\to$ toate derivatele parțiale ale lui f în x_0 sunt 0

⇒ Se egalează cu 0 derivatele parțiale și se rezolvă acest sistem pe mulțimea pe care f e diferențiabilă

$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-\frac{2}{x^2}=0 \\ x-\frac{1}{y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{x^2} \\ x=\frac{1}{y^2} \end{cases}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\frac{4}{x^4}} \Rightarrow x=\frac{x^4}{4}$ $x=0$ sau $1=\frac{x^3}{4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$

$\cancel{\in}$ $(0,+\infty)$

(21)

$\Rightarrow$ soluție: $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Pasul 4: Se studiază diferențiabilitatea de ordinul 2 a funcției f și se identifică punctele în care f nu e diferențiabilă de 2 ori.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-\frac{2}{x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x\partial x}(x,y)=(-2)\cdot(-2)\frac{1}{x^3}=\frac{4}{x^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y)=(-1)(-2)\cdot\frac{1}{y^3}=\frac{2}{y^3}$

① $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y)=\frac{4}{x^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1$ $(\forall)\ (x,y)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y)=\frac{2}{y^3}$

② $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ mulțime deschisă

③ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ cont pe $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

① + ② + ③ ⇒ f diferențiabilă de 2 ori pe $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$

Pasul 5: Se aplică criteriul de determinare a punctelor de extrem local, în punctele critice în care f e diferențiabilă de 2 ori și se identifică punctele critice în care criteriul nu se pronunță.

Se aplică criteriul în $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

$$H_f\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 1 \\ 1 & \frac{2}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

22

$\Delta_1 = 1$
$\Delta_2 = 3$

$\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ punctul critic e punct de minim local

Pasul 6: (opțional) Se aplică definiția punctului de extrem local în următoarele categorii de puncte:

a) puncte de discontinuitate
b) puncte ~~de~~ în care f nu e diferențiabilă
c) puncte în care f nu este diferențiabilă de 2 ori.
d) puncte critice în care criteriul nu se pronunță

$E = \left\{\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right\}$ – mulțimea punctelor de extrem local

TEOREMA FUNCȚIILOR IMPLICITE

S10.2. Să se arate că ecuația $2x^2+2y+z^2-8xz-z+8=0$ are soluții definite implicit de forma $z=\varphi(x,y)$ pe vecinătatea punctului $(2,0,1)$. Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0)$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(2,0)$

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x,y,z) = 2x^2+2y+z^2-8xz-z+8$

1) $\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă ← prima condiție din teorema funcțiilor implicite

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x-8z$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z-8x-1$

3) cont pe $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

1) + 2) + 3) $\Rightarrow$ f de clasă C^1

a doua condiție din teorema funcțiilor implicite

$f(2,0,1) = 2\cdot 4+0+1-16-1+8 = 0$ ← a treia condiție

$\frac{\partial f}{\partial z}(2,0,1) = -15 \neq 0$ ← a patra condiție

$(\underbrace{\boxed{2,0}}_{x_0}, \underbrace{\boxed{1}}_{y_0})$

Th. f. implicite $\Rightarrow$ $(\exists)\ r_1, r_2 > 0$ a.î. $B((2,0), r_1) \times B(1, r_2) \subseteq \mathbb{R}^3$

$(\exists!)\ \varphi: B((2,0), r_1) \to B(1, r_2)$, $f \in C_1(\mathbb{R}^3)$

a.î.: 1) $\varphi(x_0) = y_0 \iff \varphi(2,0) = 1$

2) $f((x,y), \varphi(x,y)) = 0 \quad (\forall)\ (x,y) \in B((2,0), r_1)$

↑ am arătat că are soluții definite implicit de forma $z=\varphi(x,y)$

3) $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(2,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(2,0,1)}$

S10.3. Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = x^3+y^3$.

PUNCTELE DE EXTREM LOCAL

Pasul 1: f cont pe $\mathbb{R}^2$

Pasul 2: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

1) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \quad (\forall)(x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

3) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Pasul 3:

$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow C = \{(0,0)\}$ - mulțimea punctelor critice

Pasul 4:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6x$

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ $\Rightarrow$ admite toate derivatele parțiale

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 6y$

2) $\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ e cont

$\Rightarrow$ f diferențiabilă de 2 ori pe $\mathbb{R}^2$

Pasul 5: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ cazul 3

~~$f(x,y) - f(0,0)$~~

Pasul 6:

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) - f(0,0) = x^3+y^3 - 0 - 0 \\ f\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m^3} > 0 \\ f\left(\frac{-1}{m}, \frac{-1}{m}\right) = \frac{-2}{m^3} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (0,0) nu e punct de extrem local

511.1. Să se studieze integrabilitatea Riemann a următoarelor funcții:

INTEGRABILITATEA

(24)

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2\ln(x+1), & x\in(0,1)\\ 8, & x=0\\ -1, & x=1\end{cases}$

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}, & x\in[0,1)\\ 2, & x=1\\ x^2, & x\in(1,2]\end{cases}$

a) Verific mărginirea:

$\left.\begin{array}{l}\text{Se observă că } f(x)\geq -1\ (\forall)\, x\in[0,1]\\ \text{Se observă că } f(x)\leq 8\ (\forall)\, x\in[0,1]\end{array}\right| \Rightarrow f$ mărginită (1)

f cont pe $(0,1)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x+1)=0\\ f(0)=8\end{array}\right\}\Rightarrow f$ nu e cont în 0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2\ln(x+1)=\ln 2\\ f(1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow f$ nu e cont în 1

$D_f=\{0,1\}$ mulțime finită $\Rightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue (2)

(1) + (2) $\Rightarrow f\in\mathcal{R}([0,1])$

$\int_0^1 f(x)\,dx = ?$

Fie $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2\ln(x+1)$

g cont pe $[0,1]\Rightarrow$ integrabilă pe $[0,1]$

$\{x\in[0,1]\mid f(x)\neq g(x)\}=\{0,1\}$ - finită $\Rightarrow$ integralele sunt egale

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 x^2\ln(x+1)\,dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln(x+1)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\,dx=$

$=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1 x^2-x+1\,dx$

$+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1\right)\cdot$

b) $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1}, & x \in [0,1) \\ 2, & x = 1 \\ x^2, & x \in (1,2] \end{cases}$

f cont pe $[0,1) \cup (1,2]$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x^2 = 1$

$f(1) = 2$

$\Rightarrow$ f nu e cont în 1

$\Rightarrow D_f = \{1\}$ finită

$\Rightarrow$ neglijabilă Lebegue

f nu e mărginită inferior $\Rightarrow$ ~~nu pot să folosesc criteriul de integrabilitate al lui Lebegue~~ nu e integrabilă Riemann

S11.2 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \ln(1+x^n)\,dx$.

$f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ $f_n(x) = x^n \ln(1+x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

fie $x \in [0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n \ln(1+x^n) = \begin{cases} 0 \cdot \ln 1, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$

$A = [0,1]$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \ln 2, & x = 1 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

f nu e cont în 1
f_n e cont în 1
$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[{[0,1]}]{u} f \Rightarrow$ Folosesc teorema convergenței mărginite

~~$|f_n(x)| \le \ln 2 \ (\forall) x \in [0,1] \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$~~

$|f_n(x)| = |x^n \ln(1+x^n)| = x^n \ln(1+x^n) \le \ln 2 \ (\forall) x \in [0,1]$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

$|f_n(x)| \le \ln 2 \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*, x \in [0,1]$

$f \in \mathcal{R}([0,1])$

~~mărgin~~ criteriul de integrabilitate al lui Lebegue

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0 = 0$

S11.3 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

$f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \sin^n x, \; n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin^n x = \lim_{n\to\infty} (\sin x)^n = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$A = [0, \frac{\pi}{2}]$

$f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{\Delta} f$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ nu e cont în } \frac{\pi}{2} \\ f_n \text{ e contin } \frac{\pi}{2} \\ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[{[0,\frac{\pi}{2}]}]{u}} f$

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sin^{n+1} x - \sin^n x = \underbrace{\sin^n x}_{\geq 0} \underbrace{(\sin x - 1)}_{< 0} \leq 0 \quad (\forall) x \in [0, \frac{\pi}{2}] \; (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\cancel{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \mid \sin}$

$\cancel{0 \leq \sin x \leq 1 \mid ^n}$

$\cancel{0 \leq \sin^n x \leq 1}$

$\cancel{\Rightarrow (\exists) M = 1 > 0 \text{ a.î. } |f_n(x)| \leq M \; (\forall) x \in [0, \frac{\pi}{2}) \; (\forall) n \in \mathbb{N}^*}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ șir } \downarrow \text{ de funcții} \\ f_n \xrightarrow[{[0,\frac{\pi}{2}]}]{\Delta} f \end{array}\right| \xrightarrow[\text{MONOTONE}]{\text{TH. CONV}} f_n \in \mathcal{R}([0, \frac{\pi}{2}])$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0$

S11.4 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{e^{1-x}}{e^x + e^{1-x}}\,dx$

$I =$

$t = 1 - x$

$\Rightarrow x = 1 - t$

$dx = -dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{1-x}}{e^x + e^{1-x}}\,dx = \int_1^0 \frac{e^t}{e^{1-t} + e^t}(-dt) =$

$= \int_0^1 \frac{e^t}{e^{1-t} + e^t}\,dt$

$\Rightarrow 2I = \int_0^1 \frac{e^{1-x}}{e^x + e^{1-x}} + \frac{e^x}{e^x + e^{1-x}}\,dx = x \Big|_0^1 = 1$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$

Ap: Fie $F: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Calculați $F'(x)$.

$g, h : \underbrace{(0,+\infty)}_{J} \to \underbrace{(0,+\infty)}_{I}$

$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ h(x) = x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ funcții derivabile

(27)

$f: \overset{I}{(0,+\infty)} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin t}{t}\,dt$ continuă

$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt \ (\forall)\, t \in (0,+\infty) \Rightarrow F$ funcție derivabilă pe $(0,+\infty)$

$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) =$

$= \frac{\sin x^3}{x^3} (x^3)' - \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot (x^2)' =$

$= \frac{3 \sin x^3}{x} - \frac{2 \sin x^2}{x} \ (\forall)\, x \in (0,+\infty)$

Am aplicat teorema:

~~Fie i și J două intervale, f: i → R o funcție~~

- $i, J \subseteq \mathbb{R}$ 2 intervale
- $f: i \to \mathbb{R}$ o f. cont
- $g, h: J \to i$ 2 funcții derivabile
- $F: J \to \mathbb{R}$
  $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt \ (\forall) x \in J$

$\Rightarrow F$ derivabilă pe J

$F'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x) \ (\forall)\, x \in J$

Ap: Calculați:

a) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$y = x^2 \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = +\infty \Rightarrow y = +\infty$

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0+0}^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2} \int_{0+0}^{+\infty} e^{-y} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$

$p - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^{13} x\,dx =$ ~~$\frac{1}{2}$~~ $\int_0^1 t^3 (\sqrt{1-t^2})^{12} \cdot dt =$

~~$= \int_0^1 t^3 (1-t^2)^6\,dt$~~

~~$= \int_0^1$~~

$\left.\begin{array}{l} 2p - 1 = 3 \\ 2q - 1 = 13 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} p = 2 \\ q = 7 \end{array}$

~~$t = \sin x \quad x = 0 \Rightarrow t = 0$~~

~~$dt = \cos x \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$~~

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^{13} x\,dx = \frac{1}{2} B(2,7) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(7)}{\Gamma(9)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1!\,6!}{8!} =$

deoarece $B(p,q) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \sin x^{2p-1} \cos x^{2q-1}\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tg\, x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{-\frac{1}{2}} x \, dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) =$

$2p-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{4}$ $\qquad = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

$2q-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ $\qquad = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \frac{3}{4}\right)}$

512.1. Să se studieze natura următoarelor integrale improprii:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ $\qquad$ INTEGRALE IMPROPRII

Fie $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ și $g(x) = \frac{x^{18}}{(1+x^2)^{10}}$

f, g funcții cont. pe $[1, +\infty)$

$\Rightarrow f, g \in \mathcal{R}_{loc}([1, +\infty))$

$f(x) \geq 0 \ (\forall)\ x \in [1, +\infty)$

$g(x) \geq 0 \ (\forall)\ x \in [1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ este converg.

$f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^{18}}{(1+x^2)^{10}} = \frac{(1+x^2)^9 - (x^2)^9}{(1+x^2)^{10}} > 0$

$\left.\begin{array}{l} 0 \leq g(x) \leq f(x) \ (\forall)\ x \in [1, +\infty) \\ \int_1^{+\infty} f(x)dx \end{array}\right| \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)dx$ conv.

b) $\int_{0+0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$

Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$

f cont pe $(0, 1] \Rightarrow f \in \mathcal{R}_{loc}((0, 1])$

$f(x) \geq 0 \ (\forall)\ x \in (0, 1]$

CRITERIUL DE COMPARAȚIE CU LIMITE PT. INT. IMPROPRII

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

Fie $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Rightarrow \int_{0+0}^{1} f(x)\, dx$ și $\int_{0+0}^{1} g(x)\, dx$ au aceeași natură

$\int_{0+0}^{1} g(x)dx = \int_{0+0}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_{0+0}^{1} = \ln 1 - \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x =$

$= 0 - (-\infty) = +\infty$

$\Rightarrow \int_{0+0}^{1} g(x)dx$ divergentă $\Rightarrow \int_{0+0}^{1} f(x)$ divergentă

2. Calculați următoarele integrale improprii: INTEGRALE IMPROPRII

29

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$

$B(p,q) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2p-1} dx$

$2p-1 = 5 \quad p = 3$

$2q-1 = 4 \quad q = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}+0} \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{2} B\left(3, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9}$

b) $\int_{0+0}^{1-0} \frac{1}{\sqrt[6]{x^5(1-x)}} dx$

$I = \int_{0+0}^{1-0} \frac{1}{x^{\frac{5}{6}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{6}}} dx = \int_{0+0}^{1-0} x^{-\frac{5}{6}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{6}} dx$

$B(p,q) = \int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

$\Gamma(1-p)\Gamma(p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \ p \in (0,1)$

$\Rightarrow p-1 = -\frac{5}{6} \quad p = \frac{1}{6}$

$q-1 = -\frac{1}{6} \quad q = \frac{5}{6}$

$I = B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{1} =$

$I = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)}$

c) $I = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4} dx$

$B(p,q) = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$

$\cancel{p-1=2 \quad q=3}$

$\cancel{p+q=4}$

$t = x^2$

$\cancel{dx = 2x\,dx}$

$x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

$I = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_{0+0}^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1+t)^4} dt$

$p-1 = \frac{1}{2}, \ p+q = 4 \Rightarrow p = \frac{3}{2}, \ q = 3$

$\Rightarrow I = B\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{105}$

S12.3 Calculați $\int_{0+0}^{1-0} \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $m\in\mathbb{N}^*$

$B(p,q) = \int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (30)

$x^2 = t$
$x = \sqrt{t}$
$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$I = \int_{0+0}^{1-0} \frac{t^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$

$= \int_{0+0}^{1-0} t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\right) =$

$p = \frac{m+1}{2}$

$q = \frac{1}{2}$

$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} =$

$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\frac{m}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$

$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = ?$

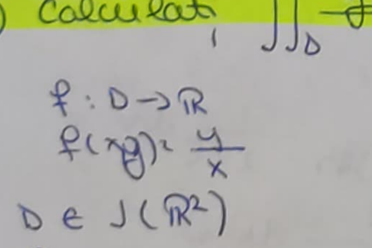
$m = 2k$, $k\in\mathbb{N}^*$

$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \Gamma(k) = (k-1)!$

$m = 2k+1$ $\quad\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1}{2\cdot\ldots\cdot2}\sqrt{\pi}$

S13.1 Fie $D: [-2,-1]\times[0,1]\subseteq\mathbb{R}^2$

a) Arătați că $D\in J(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\mu(D)$ JORDAN



$D\subseteq\mathbb{R}^2$ interval închis n-dimensional $\Rightarrow D\in J(\mathbb{R}^2)$

$\mu(D) = v(D) = (-1+2)(1-0) = 1$

b) Calculați $\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$ INT. CURBILINIE

$f: D\to\mathbb{R}$
$f(x,y) = \frac{y}{x}$

$\left.\begin{array}{l} D\in J(\mathbb{R}^2) \\ f \text{ cont pe } D \\ D \text{ mulțime închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ integrabilă Riemann pe D

$\boxed{\text{Fie } E\in J(\mathbb{R}^n) \text{ o mulțime închisă. Orice } f: E\to\mathbb{R} \text{ cont este int. R.}}$

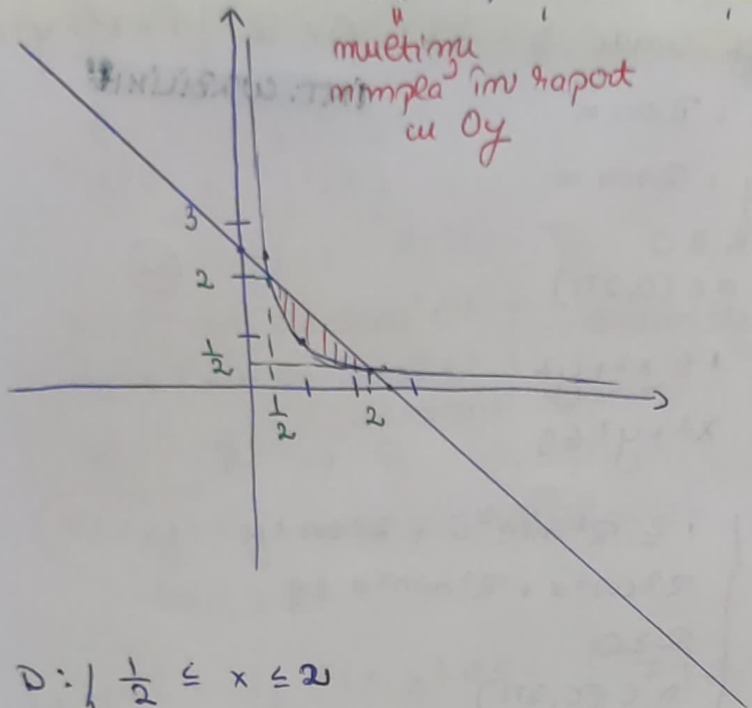
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{-1}\left(\int_0^1 \frac{y}{x}\,dy\right)dx = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)dx =$

$= \int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2}(0-\ln 2) = -\frac{\ln 2}{2}$

. 2 Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \ge 1,\ x+y \le \frac{5}{2},\ x,y \ge 0\}$

a) Arătați că $D \subseteq J(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\mu(D)$ INT. CURBILINIE

mulțime simplă în raport cu Oy



$xy \ge 1 \Rightarrow y \ge \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$x+y \le \frac{5}{2} \Rightarrow y \ge \frac{5}{2} - x \Rightarrow y = \frac{5}{2} - x$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

rezolvăm ecuațiile:

$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x \mid \cdot 2x$

$2 = 5x - 2x^2$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \langle {2 \atop \frac{1}{2}}$

$x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$

$$D: \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{\frac{5}{2} - x}_{\varphi_2(x)} \end{cases}$$

φ_1, φ_2 continue $\Rightarrow$ D mulțime simplă în raport cu Oy

dy e primul fiindcă e simplă față de Oy

$$\mu(D) = \iint_D 1\, dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2} - \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

b) $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Calculați $\iint_D xy\, dx\,dy$.

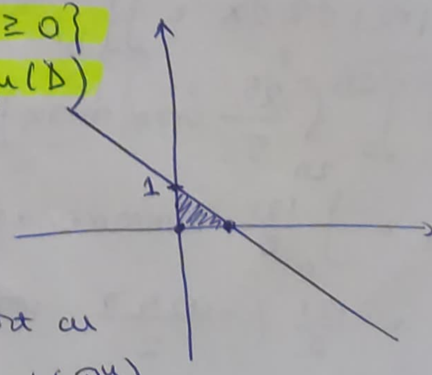
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont pe } D \\ D \subseteq J(\mathbb{R}^2) \\ D \text{ mulțime închisă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(D)$$

$$\iint_D xy\, dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy\, dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x\frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x^2} \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} - x^2\right)^2 - \frac{x}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx.$$

S13.3 Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \le 1,\ x,y \ge 0\}$

Arătați că $D \in J(\mathbb{R}^4)$ și calculați $\mu(D)$



$x+y \le 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \le 1-x \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \le 1$

$x \ge 0$

$y \ge 0$

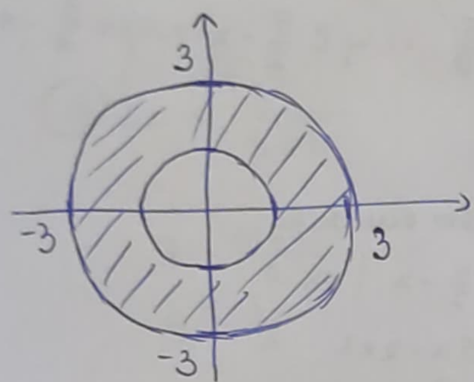
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \underbrace{0}_{\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{1-x}_{\varphi_2(x)} \end{cases}$$

φ_1, φ_2: funcții cont $\Rightarrow$ D simplă în raport cu axa Oy $\Rightarrow D \subseteq J(\mathbb{R}^4)$

$\mu(D) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1\, dy \right) dx = \int_0^1 1-x\, dx = x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$

S13.4 $\iint_D x \cdot y \sqrt{x^2+y^2}\, dx dy$ unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9$

INT. CURBILINIE



$\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \\ R \ge 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$

(32)

$D: \begin{cases} 1 \le x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \le 9 \end{cases}$

$D': \begin{cases} 1 \le R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha \\ R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha \le 9 \\ R \ge 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow D': \begin{cases} 1 \le R^2 \\ R^2 \le 9 \\ R \ge 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow D': \begin{cases} R \in [1, 3] \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$D' = [1, 3] \times [0, 2\pi]$

$dx\, dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\alpha)} \right| dR\, d\alpha$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -R\sin\alpha \\ \sin\alpha & R\cos\alpha \end{vmatrix} = R\cos^2\alpha + R\sin^2\alpha = R$

$dx dy = |R|\, dR\, d\alpha$

$\Rightarrow \iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\, dx dy = \iint_{D'} R\cos\alpha\, R\sin\alpha \sqrt{R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} \cdot |R|\, dR\, d\alpha = \iint_{D'} R^4 \cos\alpha \sin\alpha\, dR\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 R^4 \cos\alpha \sin\alpha\, dR\, d\alpha \right)$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^5}{5} \cos\alpha \sin\alpha \right) \Big|_1^3 d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{242}{5} \cos\alpha \sin\alpha\, d\alpha =$

$= \int_0^{2\pi} \frac{121}{5} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{121}{5} \int_0^{2\pi} \sin 2\alpha\, d\alpha = \frac{121}{5} \left(-\frac{\cos 2\alpha}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} =$

$= \frac{121}{5} \left(-\frac{\cos 4\pi}{2} \cdot \frac{\cos 0}{2} \right) = 0$

4.1. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a) $\int_d y\,de$; unde $d(t) = (t^2, t)$ $(\forall)\, t \in [1,2]$

INT. CURBILINIE

$d : [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (\underbrace{t^2}_{d_1(t)}, \underbrace{t}_{d_2(t)})$

$d_1(t)$ este de clasă C^1
$d_2(t)$ este de clasă C^1 } => drum de clasă C^1

domeniul maxim

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = y$ ~~cont~~ continuă pe $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{im} d \subseteq \mathbb{R}^2$

$\sqrt{(d_1'(t))^2 + (d_2'(t))^2}$

$$\int_d y\,de = \int_d F(x,y)\,de = \int_1^2 F(d_1(t), d_2(t))\, e'(t)\,dt =$$

$$= \int_1^2 F(t^2, t)\, e'(t)\,dt = \int_1^2 t\sqrt{(2t)^2 + (1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^2 8t\sqrt{\underbrace{4t^2+1}_{a}}\,dt = \frac{1}{8}\int_5^{17}\sqrt{a}\,da$$

$a = 4t^2+1$

$da = 8t\,dt$

b) $\int_c x^2\,de$ unde $c : y = \frac{x^4}{4}$, $x \in [0,2]$

$d : [0,2] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (t, \frac{t^4}{4})$,

d drum de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = y^2$ cont pe $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{im} d \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\int_c x^2\,de = \int_0^2 (d_1(t))^2\, e'(t)\,dt = \sqrt{1+t^6} = \frac{1}{3}\int_0^2 3t^2\sqrt{1+\underbrace{t^6}_{a^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^8 \sqrt{1+a^2}\,da = \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}}\,da = \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,da + \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\,da =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Big|_0^8 + \frac{1}{3}\int_0^8 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Big|_0^8}_{\alpha} + \frac{1}{3}\int_0^8 x\cdot(\sqrt{1+x^2})'\,dx$$

$$= \alpha + \frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^8 - \frac{1}{3}\int_0^8 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

2

c) $d: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ calculați $\int_d z(x^2+y^2)\,dl$ unde $d(t) = (t\cos t, t\sin t, t)\ (\forall) t \in [0,$

$d(t) = (\underbrace{t\cos t}_{d_1(t)}, \underbrace{t\sin t}_{d_2(t)}, \underbrace{t}_{d_3(t)})$

d_1, d_2, d_3 sunt de clasă C^1

$\Rightarrow d$ drum de clasă C^1

34

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$F(x,y,z) = z(x^2+y^2)$ cont pe $\mathbb{R}^3$

$\operatorname{im} d \subseteq C \subseteq \mathbb{R}^3$

$\int_d z(x^2+y^2)\,dl = \int_0^1 t(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t)\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,dt = \int_0^1 t^3 \sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t - \cancel{2\cos t \sin t\, t} + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + 1}\,dt =$

$= \int_0^1 t^3\sqrt{1 + t^2 + 1}\,dt =$

$= \int_0^1 t^3 \sqrt{t^2+2}\,dt$

~~$x = a\,tg\,t$~~

$t = \sqrt{2}\,tg\,u$

$t = 0 \Rightarrow u = 0$

$t = 1 \Rightarrow tg\,u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow u = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$dt = \sqrt{2}\frac{1}{\cos^2 u}\,du$

$\int_0^1 t^3\sqrt{t^2+2}\,dt = \int_0^1 2\sqrt{2}\cdot tg^3 u\sqrt{2tg^2 u + 2}\;\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du =$

$= 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} tg^3 u\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,du = 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{tg^3 u}{\cos^3 u}\,du =$

$= 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sin^3 u}{\cos^6 u}\,du = 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sin u}{\cos^6 u} - \frac{\sin u}{\cos^4 u}\,du$

$= 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos u)'\cdot\cos^{-6} u\,du - 4\sqrt{2}\int_0^{arctg\frac{\sqrt{2}}{2}} (\cos u)'\cdot\cos^{-4} u\,du =$

$= 4\sqrt{2}\,\frac{\cos^{-5} u}{-5} - 4\sqrt{2}\,\frac{\cos^{-3} u}{-3}$

Sn.2 Să se calculeze:

$\int_d (x^2+y^2)\,dx - (x^2-y^2)\,dy$ unde $d(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{1-t})\ (\forall) t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

$\omega(x,y) = (x^2+y^2)\,dx - (x^2-y^2)\,dy$

$d: \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$

$d(t) = (\underbrace{\sqrt{t}}_{d_1(t)}, \underbrace{\sqrt{1-t}}_{d_2(t)})$

clasă C^1

$P_1, P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$P_1(x,y) = (x^2+y^2)$

$P_2(x,y) = -(x^2-y^2)$ f cont pe $\mathbb{R}^2$

imd $\subseteq \mathbb{R}^2$

35

$$\int_d (x^2+y^2)\,dx - (x^2-y^2)\,dy =$$

$x \mapsto \sqrt{t}$

$y \mapsto \sqrt{1-t}$

$dx = d_1'(t)\,dt$

$dy = d_2'(t)\,dt$

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} \left[(t+1-t)\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} - (t-1+t)\,\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right]dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} + (2t-1)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right]dt =$$

$\sqrt{1-t} = u$

$t = 1-u^2$

$dt = -2u\,du$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{1}{5}}} (2-2u^2-1)\cdot\frac{1}{\cancel{u}}\cdot(-2\cancel{u})\,du =$$

$t^{-\frac{1}{2}}$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{\frac{1}{5}}^{\frac{3}{5}} + \frac{-2}{2}\int_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{1}{5}}}(1-2u^2)\,du =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} - 1\left(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}} - 2\left(\frac{u^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{\frac{3}{5}}}^{\sqrt{\frac{1}{5}}}\right)\right) =$$

(*) Calculați: $\int_C x^2\,dy + y^2\,dx$, $C: x^2+y^2=9$

$P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$P(x,y) = y^2$

$Q(x,y) = x^2$

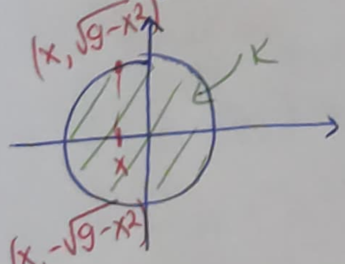
funcții cont pe $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2x$

f cont pe $\mathbb{R}^2$

$C = \operatorname{Fr} K$



$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 9\}$

$$\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_K (2x-2y)\,dx\,dy$$

$K: \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ -\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ K simplă în raport cu axa Oy

$$\Rightarrow \iint_K (2x-2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (2x-2y)\,dy\right)dx$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n x^n}{x^{2n} + 2x^n + 2} dx =$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \underbrace{\frac{n x^{n-1}}{(x^n+1)^2+1}}_{\left(\operatorname{arctg}(x^n+1)\right)'} \cdot x \, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(x^n+1) \cdot x \Big|_0^1 \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \operatorname{arctg}(x^n+1)\, dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} 2 - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \operatorname{arctg}(x^n+1)\, dx$$

fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}([0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n+1) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 1, & x \in [0,1) \\ \operatorname{arctg} 2, & x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in [0,1) \\ \operatorname{arctg} 2, & x = 1 \end{cases}$$

mulțimea punctelor de discontinuitate e mărginită

Jordan $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}([0,1])$

$$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$$

observ că $x \leq 1 \Leftrightarrow x^n \leq 1 \Leftrightarrow x^n+1 \leq 2$
$\Leftrightarrow f_n(x) \leq \operatorname{arctg} 2$

teorema conv mărginite $\Rightarrow$ $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$\Rightarrow L = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$

(*) Fie $(x_n)_n$, $x_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}$

LIMITA SUPERIOARĂ ȘI INFERIOARĂ

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

considerăm subșirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k \cdot 1}{2k+1} \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k+1)(-1)}{4k+2} \cdot 1 = -1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k+3)(-1)}{4k+4} (-1) = 1$$

$L((x_n)_n) = \{-1, 0, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\lim}\, x_n = -1 \\ \overline{\lim}\, x_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (\nexists) \lim_{n\to\infty} x_n$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu mărginit