~~FUNCȚII DERIVABILE~~

SPAȚII LINIARE NORMATE

→ normă pe spațiul liniar X: o funcție $p : X \to \mathbb{R}_+$ cu propr.:

a) $p(u+v) \le p(u) + p(v)$ $(\forall)\, u, v \in X$

b) $p(\alpha u) = \alpha\, p(u)$ $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, u \in X$

c) $p(u) = 0 \iff u = 0_X$

→ spațiu liniar normat: orice spațiu liniar real X pe care se definește cel puțin o normă $\|\ \|_X : X \to \mathbb{R}_+$.

FUNCȚII DERIVABILE

→ $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\ \|_X)$ derivabilă în x_0: $x_0 \in D \cap D'$, dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$

→ f derivabilă pe $A \iff A \subseteq D \cap D'$ + f derivabilă în orice punct din A

→ punct de minim local al $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x_0 \in D$ pct. de m. l. dacă $(\exists)\, V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ a.î. $f(x) \ge f(x_0)$ $(\forall)\, x \in V \cap D$.

→ $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă de 2 ori în $x_0 \in D \cap D'$: $(\exists)\, V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ a.î. f ~~de~~ derivabilă pe $V \cap D$ și $f' : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$.

→ $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă de n ori în $x_0 \in D \cap D'$: $(\exists)\, V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ a.î. f derivabilă de $n-1$ ori în $V \cap D$ și $f^{(n-1)} : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă de n ori și $x_0 \in D \cap D'$, $n \ge 1$.

→ polinomul Taylor atașat funcției f și punctului x_0

$$T_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

→ restul lui Taylor: $R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0}$

→ Formula lui Taylor:

• $I \subseteq \mathbb{R}$ • $n \in \mathbb{N}$ • $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă de $n+1$ ori pe I • $x_0 \in I$	$(\forall)\, x \in I$, $x \ne x_0$, $(\exists)\, c \in I$ între x și x_0 a.î.: $f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

→ **f de clasă C^n:**

- $I \subseteq \mathbb{R}$ interval
- $f: I \to \mathbb{R}$
- $n \in \mathbb{N}^*$
- f derivabilă de n ori pe I
- $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ cont pe I

$\Rightarrow$ f de clasă C^n

→ **f de clasă C^∞**: f de clasă C^n pe I, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

→ **funcție convexă**: $(\forall)\, x, y \in I$, $(\forall)\, t \in [0,1]$

$$f((1-t)\cdot x + ty) \leq (1-t) f(x) + t f(y)$$

→ **inegalitatea lui Jensen**:

- $I \subseteq \mathbb{R}$ interval
- $f: I \to \mathbb{R}$ f. convexă
- $x_1, \dots x_n \in I$
- $\alpha_1, \dots \alpha_n \in [0, +\infty)$
  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

APLICAȚIE LINIARĂ

→ **aplicație liniară de la X la Y**: $T: (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ cu propr că $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \in \mathbb{R}$ $(\forall)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, x, y \in X$.

F. DIFERENȚIALE

→ $f: D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ **diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$**: dacă $(\exists!)\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a.î.:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_X}{\| (x - x_0) \|_Y} = 0$$

→ $f = (f_1, \dots f_m): D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **admite derivata parțială** în raport cu variabila x_i, $1 \leq i \leq n$ în punctul $x_0 \in D \cap D'$:

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}^m$$

→ **matricea Jacobi** a funcției $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots f_m)$ în punctul $x_0 \in D \cap D'$ este:

$$J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

→ $x_0 \in D \cap D'$ **punct critic** al funcției $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dacă f diferențiabilă în x_0 și $df(x_0) = 0$

~~funcția de f ..~~

→ funcția $f: D = D^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funcție de clasă C^1 pe D dacă:

1) f admite toate derivatele parțiale pe D
2) derivatele parțiale sunt f. cont

F DIFERENȚIABILE DE 2 ORI

→ $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă de 2 ori în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ a.î. f diferențiabilă pe $V \cap D$ și $df: V \cap D \to$
$\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferențiabilă în x_0.

→ $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivata parțială în raport cu x_i și x_j în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists)\ V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ a.î. f admite derivata parțială în raport cu x_j pe $V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V \cap D \to \mathbb{R}^m$ admite derivată parțială în raport cu x_i ~~pe~~ în x_0.

→ **Teorema lui Schwarz**:

- $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferențiabilă de 2 ori în $x_0 \in D \cap D'$ $\Rightarrow$
  1) f admite toate derivatele parțiale de ordin 2 în x_0
  2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)\ (\forall)\ i, j \in \{1 \dots n\}$
  3) $d^2 f(x_0): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$d^2 f(x_0)((a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_n)) = a_1 b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) + a_2 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}(x_0) + \dots + a_n b_n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(x_0)$$

→ **Teorema lui Young**

- $f: D = D^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $x_0 \in D$
- $V \in \mathcal{U}_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$
- $V \subseteq D$
- $i \neq j \in \{1, \dots n\}$ a.î.: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe V
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ cont în x_0

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$

dacă f admite toate derivatele parțiale pe ordinul 2 pe V și acestea sunt cont în x_0.

→ $f: D \subseteq D^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^2 pe D:

1) admite toate derivatele parțiale de ordin 2 pe D
2) derivatele parțiale sunt cont

→ hessiana funcției $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ în punctul $x_0 \in D \cap D'$

$$H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=\overline{1,m}} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

→ CRITERIUL DE DETERMINARE AL PUNCTELOR DE EXTREM LOCAL a funcției $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \geq 2$

- $f: D = D^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe D
- $x_0 \in D$ punct critic pe D

dacă:
- $d^2 f(x_0)(u,u) > 0$ $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ punct de minim local
- $d^2 f(x_0)(u,u) < 0$ $(\forall)\, u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ punct de maxim local
- $(\exists)\, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a.î. $d^2 f(x_0)(u_1,u_1) > 0$ și $d^2 f(x_0)(u_2,u_2) < 0$ ⇒ nu e punct de extrem local

→ Teorema funcțiilor implicite

- $f: D = D^{\circ} \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$
- f de clasă C^1 pe D
- $\exists (x_0, y_0) \in D$ a.î.:
  a) $f(x_0, y_0) = 0$
  b) $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x_0, y_0) \neq 0$

$(\exists)\, r_1, r_2 > 0$ a.î. $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$

$(\exists!)\, \varphi: B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ a.î.:

1) $\varphi(x_0) = y_0$
2) $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(\forall)\, x \in B(x_0, r_1)$
3) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(x_0, y_0)}$

INTEGRALE CURBILINII

→ drum în $\mathbb{R}^m$: $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ cont
$\quad\quad [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

→ drum închis : $d(a) = d(b)$
→ drum simplu : $d\Big|_{(a,b)}$ injectivă

→ drum de clasă C^1, $d = (d_1, \dots d_m) : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$d_1, \dots d_m$: 1) derivabile
2) derivate cont

→ $C \subseteq \mathbb{R}^m$, C mulțime, C = curbă de clasă C^1 :
$(\exists)$ d de clasă C^1, $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a.î. $\operatorname{im} d = C$

→ funcția lungime $\ell: [a,b] \to \mathbb{R}$ asociată oricărui drum de clasă C^1

→ integrala curbilinie de primul tip a funcției F pe drumul d (c. C)

- $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^1
- $F: D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cont
- $C = \operatorname{im} d \subseteq D$

$\Rightarrow \int_d F d\ell = \int_C F d\ell \overset{def}{=} \int_a^b F\circ d(t)\, \ell'(t)\, dt$

→ formă diferențiabilă de gr 1 pe $\mathbb{R}^n$:
orice $\omega : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ continuă
$\omega(x_1, \dots x_m) = P_1(x_1, \dots x_m)dx_1 + \dots + P(x_1, \dots x_m)dx_m$

→ integrala curbilinie de al doilea tip a formei diferențiale ω pe drumul d (pe curba c)

- $d: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1
- $\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_m dx_m$
  $P_1, \dots P_m : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $C = \operatorname{im} d \subseteq D$

$\int_d \omega = \int_C \omega \overset{def}{=} \int_a^b (P_1 \circ d)(t) \cdot d_1'(t) + (P_2 \circ d)(t)\, d_2'(t) + \dots + (P_m \circ d)(t) \cdot d_m'(t)$

→ Formula lui Green :

- $\omega = P dx + Q dy : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $\exists \ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$ f. cont
- $K \subseteq D$ m. compactă, $\in J(\mathbb{R}^2)$
- $Fr\, K = \operatorname{im} d$, cu $d: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ drum simplu, închis, de clasă C^1

$\int_{d\,(c)} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$

JORDAN

→ ~~$X \neq \emptyset$~~ inel de mulțimi

- $X \neq \emptyset$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a.î.:

1) $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

2) $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

⇒ $\mathcal{A}$ inel de mulțimi

→ măsura:

- $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ inel de mulțimi
- $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ a.î.:
  1) $\mu(\emptyset) = 0$
  2) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $(\forall)\ A, B \in \mathcal{A}$ disjuncte

⇒ μ măsură

→ Suma exterioară a mulțimii E relativ la partiția G

- $I \subseteq \mathbb{R}^n$ i.î. n-dim
- $G = \{I_1, \dots I_p\}$ partiție a lui I
- $E \subseteq I$ nevidă

$$V(E, G) = \sum_{I_j \cap E = \emptyset} v[I_i] \in \mathbb{R}$$

→ ~~Suma~~ măsura exterioară Jordan a lui E

- $I \subseteq \mathbb{R}^n$ i.î. n-dim
- $E \subseteq I$ nevidă

$$\mu^*(E) = \inf_{\substack{G \text{ partiție} \\ \text{a lui } I}} V(E, G) \in \mathbb{R}$$

→ mulțime convexă $E \subseteq \mathbb{R}^n$: $(\forall)\ u, v \in E$, $(\forall)\ t \in [0,1]$
$(1-t)u + tv \in E$

→ mulțime simplă în raport cu axa Ox_j

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$
- $1 \leq j \leq n$
- $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \in J(\mathbb{R}^{n-1})$
- K compactă a.î.:

~~$E = \{x_j\}$~~

$(\exists)\ \varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ a.î. (continue)

$E = \{ (x_1 \dots x_j \dots x_n) \mid \varphi_1(x_1, \dots \hat{x}_j \dots x_n) \leq$
$\leq x_j \leq \varphi_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n)$
$(\forall)\ (x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n) \in K \}$

→ E mulțime simplă în raport cu Ox_j

→ descompunerea Jordan a lui $E \in J(\mathbb{R}^n)$: $\lambda = \{E_1, ... E_p\}$ a
1) $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_p$
2) $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ $(\forall)\, i \neq j \in \{1, 2, ... p\}$

→ diametrul mulțimii E:
- $E \subseteq \mathbb{R}^m$ mărginită $\Rightarrow$ $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{u,v \in E} d(u,v) = \sup\limits_{u,v \in E} \|u-v\| \in \mathbb{R}$

→ norma descompunerii $\alpha \in D(E)$, $\alpha \{E_1 ... E_p\}$ a mulțimii $E \in J(\mathbb{R}^n)$
$\|\alpha\| = \max \{\operatorname{diam} E_1, \operatorname{diam} E_2, ... \operatorname{diam} E_p\}$

→ suma Riemann cu Jordan:
$$\sigma_\alpha(f, t_\alpha) = f(t_1)\mu(E_1) + f(t_2)\mu(E_2) + ... + f(t_p)\mu(E_p)$$

→ CRITERIUL LUI LEBEGUE:
- $f: E \to \mathbb{R}$
- $E \in J(\mathbb{R}^n)$
- f mărg

$\Rightarrow$ int R.

→ Suma Darboux inferioară asociată funcției f și desc. α
- $E \in J(\mathbb{R}^n)$
- $f: E \to \mathbb{R}$ mărg.
- $\alpha = \{E_1, ..., E_p\} \in D(E)$

$\Rightarrow m_i = \inf\limits_{x \in E_i} f(x)$ $M_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)$
$s_\alpha(f) = m_1 \mu(E_1) + ... + m_p \mu(E_p)$
$S_\alpha(f) = M_1 \mu(E_1) + ... + M_p \mu(E_p)$

→ CRITERIUL DE INTEGRABILITATE AL LUI DARBOUX

- $f: [a,b]$ mărg
Echivalente:
1) $f \in \mathcal{R}([a,b])$
2) $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ aî
$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$
$(\forall)\, \Delta \in D([a,b])$ cu
$\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$
3) $(\forall)\, (\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}} \in D([a,b])$
cu $\lim\limits_{m \to \infty} \|\Delta_m\| = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{m \to \infty} (S_{\Delta_m}(f) - s_{\Delta_m}(f)) = 0$

- $E \in J(\mathbb{R}^n)$, $f: E \to \mathbb{R}$ mărg
Echivalente:
1) $f \in \mathcal{R}(E)$
2) $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ aî
$S_\alpha(f) - s_\alpha(f) < \varepsilon$
$(\forall)\, \alpha \in D(E)$ aî
$\|\alpha\| < \delta_\varepsilon$
3) $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, \alpha_\varepsilon \in D(E)$ aî
$S_{\alpha_\varepsilon}(f) - s_{\alpha_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

Teorema lui Fubini pe intervale închise n-dim

- $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$
- $f: I \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(I)$ a.î.:
- funcția $x_h \longmapsto f(x_1 \dots x_m)$ să fie int. Riemann pe $[a_h, b_h]$

$\Rightarrow$

1) funcția $(x_1, \dots \hat{x}_h \dots x_m) \longmapsto f(x_1 \dots x_m)$ e int R. pe $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{h-1}, b_{h-1}] \times \dots \times [a_m, b_m]$

2) $\int_I f(x_1 \dots x_m)\, dx_1 \dots dx_m =$

$$= \int \dots \int \left(\int_{a_h}^{b_h} f(x_1 \dots x_m)\, dx_h \right) dx_1 \dots dx_u$$

→ Teorema lui Fubini pe mulțimi simple în raport cu axa Ox_j

- $E \in \mathbb{R}^n$
- $1 \le j \le n$
- $K \in J(\mathbb{R}^{u-1})$
- K compactă
- $(\exists)\ \varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ cont

---

a.î. $E = \{ (x_1 \dots x_j \dots x_m) \in \mathbb{R}^u \mid \varphi_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_m) \le x_j \le \varphi_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_m),\ (\forall)\ (x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_m) \in \mathbb{R}^{u-1} \}$

$\Rightarrow$ 1) oricare $f: E \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$

2) $\int_E f(x_1 \dots x_j \dots x_m)\, dx_1 \dots dx_j \dots dx_u =$

$$= \int_K \left(\int_{\varphi_1(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_m)}^{\varphi_2(x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_m)} f(x_1 \dots x_m)\, dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_u$$

→ Teorema de schimbare de variabilă pt int. multiplă

- $\varphi: D = D^0 \subseteq \mathbb{R}^u \to \mathbb{R}^u$
- f de clasă C^1
- $E \in J(\mathbb{R}^u)$ a.î.:
  1) $\overline{E} \subseteq D$
  2) $f(E) \in J(\mathbb{R}^u)$
  3) $\det(J\varphi(x)) \neq 0$ $(\forall)\ x \in E^0$

$\Rightarrow$

1) $(\forall)\ f: \varphi(E) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(\varphi(E))$

2) $f \circ \varphi \cdot |\det J\varphi| : E \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(E)$

3) $S_{\varphi(E)} = \int_E f \circ \varphi\, |\det J\varphi|$

TOPOLOGIE

→ topologie:

- $\tau \in P(X)$

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$
2) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$
3) $G_i \in \tau$, $1 \le i \le n$, n finit, $\Rightarrow \bigcup_{1 \le i \le n} G_i \in \tau$

$\Rightarrow \tau$ topologie

→ multime neconexă A

- $A \subseteq X$
- $(\exists)\ G_1, G_2 \in \tau$ a.î.:

1) $G_1 \cap A \neq \emptyset$
2) $G_2 \cap A \neq \emptyset$
3) $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$
4) $(G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) = A$

$\Rightarrow A$ multime neconexă

→ x_0 punct interior (A°) multimii A

$A \in \mathcal{U}_\tau(x_0)$

→ punct de aderentă (x_0)

$V \cap A \neq \emptyset \ (\forall) V \in \mathcal{U}_\tau(x_0)$

→ punct de acumulare

$V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ (\forall)\ V \in \mathcal{U}_\tau(x_0)$

→ punct izolat

$\exists\ V_0 \in \mathcal{U}_\tau(x_0)$ a.î. $V_0 \cap A = \{x_0\}$

→ frontiera topologică:

$Fr\,A = \bar{A} \cap \overline{C_X A}$

→ Teorema Heine - Borel

- $K \subseteq \mathbb{R}^n$
- K multime închisă + mărg. $\Leftrightarrow$ multime compactă

F. CONTINUE

→ **funcție continuă** $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ în $x_0 \in D$ dacă:

1) $(\forall)\, W \in \mathcal{U}_{\tau_{d_2}}(f(x_0))$ $(\exists)\, V \in \mathcal{U}_{\tau_{d_1}}(x_0)$ a.î. $f(D \cap V) \subseteq W$

2) $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, d_\varepsilon > 0$ a.î. $d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ $(\forall)\, x \in D$ cu $d_1(x, x_0) < d_\varepsilon$

3) $(\forall)\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din D cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

→ $f : I \to \mathbb{R}$ are **propr. lui Darboux**:
$(\forall)\, x_1, x_2 \in I$ $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$ între $f(x_1)$ și $f(x_2)$
$(\exists)\, c \in I$ ~~a.î.~~ între x_1 și x_2 a.î. $f(c) = \lambda$

→ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **converge simplu** pe o mulțime nevidă $A \subseteq D$ dacă $(\forall)\, x \in A$ $(\exists) \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

→ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniform** către $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq D$, dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$ $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, $(\forall)\, x \in A$.

→ **Criteriul practic de convergență uniformă**

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \iff \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

→ **Teorema lui Weierstrass pt șiruri de funcții**

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$
- $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$
- $f_n \xrightarrow[A]{u} f$
- $(\exists)\, x_0 \in A$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ f_n cont pe x_0

$\Rightarrow f$ cont pe x_0

→ **Teorema lui Weierstrass pt serii de funcții**

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$
- $|f_n(x)| \leq a_n$ $(\forall)\, x \in D$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

dacă $\sum a_n$ conv $\Rightarrow \sum f_n$ uniform și abs conv pe D

→ **Criteriul lui Cauchy pt serii de funcții**

$\sum f_n$ uniform conv pe $A \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î.

$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+m}(x)$

$(\forall)\ x \in A\ (\forall)\ n > n_\varepsilon\ (\forall)\ m \in \mathbb{N}$

→ **Criteriul lui Dirichlet pt serii de funcții**

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$
- $f_{n+1}(x) \le f_n(x)\ (\forall) x \in D$
  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$
- $(\exists)\ M > 0$ a.î. $|g_0(x) + \dots + g_n(x)| \le M$

$\Rightarrow \sum f_n g_n$ uniform conv

→ **Criteriul lui Abel pt serii de funcții**

- $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$
  SAU
  $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$
- $\exists M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \le M$
- $\sum g_n$ uniform conv pe D

~~$\sum f_n g_n$ uniform conv pe D~~ dar ~~nu abs. conv pe D~~.

$\sum f_n \cdot g_n$ unif conv pe D