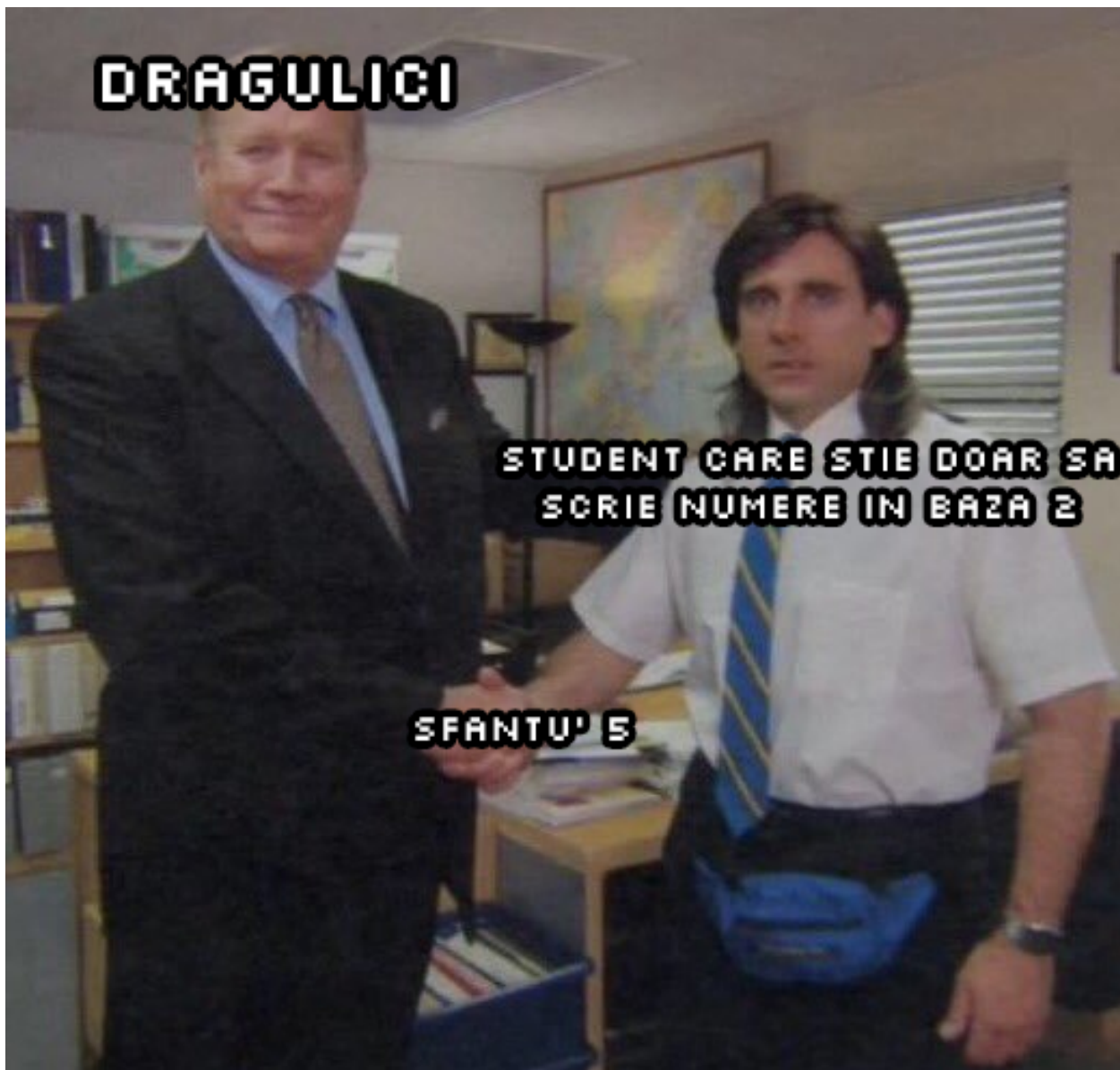


Tutoriat 1 - Arhitectura sistemelor de calcul

Stan Bianca-Mihaela, Stăncioiu Silviu



Contents

1 [IMPORTANT] Transformarea din baza 10 in baza b

2

1.1	Nr. intregi	2
1.2	Fractii	4
2	[IMPORTANT] Transformarea din baza b in baza 10	5
3	[IMPORTANT] Trecerea din baza 2 într-o bază care este putere a lui 2 (și invers)	7
4	[IMPORTANT] Operații în baza b	9
4.1	Adunarea	9
4.2	Scaderea	9
4.3	Inmultirea	9
4.4	Impartirea	11

1 [IMPORTANT] Transformarea din baza 10 in baza b

1.1 Nr. intregi

Cum se face transformarea lui x din baza 10 in baza b?

- impart x cu rest la b ($x : b = c_1 \text{ rest } r_1$)
- impart c_1 cu rest la b ($c_1 : b = c_2 \text{ rest } r_2$)
- impart c_2 cu rest la b ($c_2 : b = c_3 \text{ rest } r_3$) . . .
- impart c_n cu rest la b ($c_n : b = c_{n+1} \text{ rest } r_{n+1}$) si $c_{n+1} = 0$
- numarul x in baza b va fi concatenarea: $r_{n+1}r_n \dots r_1$

Exemplul 1: $(7954)_{16} = ?$

$$7954 : 16 = 497 \text{ rest } 2$$

$$497 : 16 = 31 \text{ rest } 1$$

$$31 : 16 = 1 \text{ rest } 15$$

$$1 : 16 = 0 \text{ rest } 1 \Rightarrow \text{aici ne oprim}$$

Luam resturile obtinute in ordine inversa: 1, 15, 1, 2.

Totusi, nu putem sa concatenam numerele direct. De ce? Concatenarea lor ar fi 1512. Dar cum stim ca numarul a fost obtinut prin concatenarea 1, 15, 1, 2 si nu prin concatenarea 1, 1, 5, 1, 2? Ca sa putem face diferenta, numerele de la 10 la 15, in baza 16, vor fi reprezentate prin literele de la A la F, asa cum se vede si in tabelul de mai jos:

Binary Base-2	Decimal Base-10	Hexa- Decimal Base-16	Octal Base-8	BCD Code	Gray Code
0000	0	0	0	0	0000
0001	1	1	1	1	0001
0010	2	2	2	2	0011
0011	3	3	3	3	0010
0100	4	4	4	4	0110
0101	5	5	5	5	0111
0110	6	6	6	6	0101
0111	7	7	7	7	0100
1000	8	8	10	8	1100
1001	9	9	11	9	1101
1010	10	A	12	---	1111
1011	11	B	13	---	1110
1100	12	C	14	---	1010
1101	13	D	15	---	1011
1110	14	E	16	---	1001
1111	15	F	17	---	1000

Deci noi vom concatena numerele 1, F, 1 si 2.

$$\Rightarrow (7954)_{16} = \overline{1F12}$$

Exemplul 2: $(243)_2 = ?$

Pentru transformarea in baza 2 putem sa facem o mica "optimizare" in calcul. Scriem $x \mid 1$ daca x e impar si $x \mid 0$ daca x e par.

$243 \mid 1$, pe linia urmatoare vom scrie catul lui 243 la impartirea cu 2

$121 \mid 1$

$60 \mid 0$

$30 \mid 0$

$15 \mid 1$

$7 \mid 1$

$3 \mid 1$

1 | 1

0 - am ajuns la 0 deci ne oprim

Retineti! sensul de parcurgere a resturilor este de **j**os in **s**us

Urmatorul pas este sa luam toate resturile in ordine inversa: 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1.

$\Rightarrow (243)_2 = \overline{11110011}$ **Exercitii** Sa se transforme:

- 712 in baza 5
- 9934 in baza 2
- 721 in baza 8
- 6290 in baza 16

1.2 Fractii

La ce ne referim prin fractie: numere cu virgula (pot sa aiba si perioada). Cum facem conversia din baza 10 in baza b pentru o fractie?

- Pentru partea intreaga a numarului, transformarea se face fix ca ala numere intregi (ex: pentru 167,89(3) transformam 167 in baza b ca la numere intregi, punem virgula si separat facem transformarea pentru ce e dupa virgula)
- Pentru partea fractionara, avem: perioada si neperioada.
Mai intai transformam in fractie:
 - la numarator punem: partea fractionara minus neperioada
 - la numitor punem: atati de 9 cate cifre are perioada, urmati de atati de 0 cate cifre are neperioada

Ca sa fie mai usor de inteles procesul vom lua:

Exemplul 1: Transformati 18,4(8) din baza 10 in baza 8.

$$(18,7(45))_8 = ?$$

Facem conversia lui 18 in baza 8:

$$18 : 8 = 2 \text{ rest } 2$$

$$2 : 8 = 0 \text{ rest } 2$$

0 - ne oprim

$$\Rightarrow (18)_8 = \overline{22}$$

Facem conversia lui 0,4(8) in baza 8 : $\frac{48-4}{90} = \frac{44}{90} = \frac{22}{45}$

Acum inmultim succesiv cu baza b:

$$\frac{22}{45} * 8 = \frac{176}{45} = 3 + \frac{41}{45} \text{ (retinem ca aici partea intreaga a fost 3)}$$

$$\frac{41}{45} * 8 = \frac{328}{45} = 7 + \frac{13}{45} \text{ (retinem ca aici partea intreaga a fost 7)}$$

$$\frac{13}{45} * 8 = \frac{104}{45} = 2 + \frac{14}{45} \text{ (retinem ca aici partea intreaga a fost 2)}$$

$$\frac{14}{45} * 8 = \frac{112}{45} = 2 + \frac{22}{45} \text{ (retinem ca aici partea intreaga a fost 2)}$$

Am ajuns inapoi la fractia $\frac{22}{45} \Rightarrow$ avem o perioada.

De data aceasta concatenam partile intregi de **sus** in **jos**.

$$\Rightarrow 0,4(8)_8 = 0,(3722)$$

$$\Rightarrow 18,4(8)_8 = \overline{22,(3722)}$$

Exemplul 2 : Transformati 215,65 din baza 10 in baza 16.

$$215 : 16 = 13 \text{ rest } 7 \text{ (reamintim ca } 13_{16} = D)$$

$$13 : 16 = 0 \text{ rest } 13$$

0 - ne oprim

$$\Rightarrow (215)_{16} = \overline{D7}$$

$$0,65 * 16 = 10,4 \text{ retinem ca partea intreaga este } 10_{16} = A$$

$$0,4 * 16 = 6,4 \text{ retinem ca partea intreaga este } 6$$

0,4 - se repeta deja aceasta valoare \Rightarrow ne oprim si avem perioada pe 6

$$0,65_{16} = 0,A(6)$$

$$\Rightarrow (215,65)_{16} = \overline{D7,A(6)} \text{ Exercitii Sa se transforme:}$$

- 82,61(3) in baza 8
- 6,(18) in baza 2
- 99,1(5) in baza 5
- 0,6(7) in baza 16

2 [IMPORTANT] Transformarea din baza b in baza 10

Cand avem de transformat din baza b in baza 10, impartim din nou numarul in 2 sectiuni:

- partea intreaga : plecam de la sfarsitul numarului, indexand de la 0
- partea fractionara: daca avem perioada transformam in fractie, daca nu, indexam de la -1 descrescator

Exemplul 1 : Transformati 110110 din baza 2 in baza 10

- Plecam de la sfarsitul numarului cu un index de la 0:
 $110110_2 \rightarrow 11011_10_0 \rightarrow 1101_21_10_0 \rightarrow \dots \rightarrow 1_51_40_31_21_10_0$

- Inmultim fiecare cifra cu 2^{index} :

$$(\overline{110110})_2^{-1} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 54$$

$$\Rightarrow (\overline{110110})_2^{-1} = 54$$

Exemplul 2: Transformati $A_{25,1C}(4)$ din baza 16 in baza 10.

- Plecam de la sfarsitul numarului cu un index de la 0:

$$A_{25_0} \rightarrow A_{2_1 5_0} \rightarrow A_2 2_1 5_0$$

- Inmultim fiecare cifra cu 16^{index} :

$$(\overline{A25})_{16}^{-1} = A \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 2597$$

- Luam acum partea fractionara si o transformam in fractie (numerator=parte fractionara-neperioada, numitor=atati de F (baza in care suntem -1 = 16-1) cate cifre are perioada urmati de atati de 0 cate cifre are neperioada):

$$\begin{aligned} (\overline{0,1C(4)})_{16}^{-1} &= (\frac{\overline{1C4}-\overline{1C}}{\overline{F00}})_{16}^{-1} = \frac{(\overline{1C4})_{16}^{-1} - (\overline{1C})_{16}^{-1}}{(\overline{F00})_{16}^{-1}} = \frac{1 \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 - 1 \cdot 16^1 + C \cdot 16^0}{F \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0} = \frac{1 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 - 1 \cdot 16^1 - 12 \cdot 16^0}{F \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0} \\ \frac{424}{3840} &= 0,11041(6) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\overline{A25})_{16}^{-1} = 2597,11041(6)$$

Exemplul 3: Să se scrie în baza 10 următoarele numere:

- $(\overline{1101})_2^{-1} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$
- $(\overline{A2C})_{16}^{-1} = 10 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2604$
- $(\overline{12.4})_5^{-1} = 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^{-1} = 7 + \frac{4}{5} = \frac{39}{5} = 7.8$

Exemplul 4: Să se scrie în baza 10 următoarele numere:

- $(\overline{1010001011})_2$
- $(\overline{1001.1001})_2$
- $(\overline{513})_6$
- $(\overline{C1D})_{16}$
- $(\overline{ABC.ABC})_{16}$

3 [IMPORTANT] Trecerea din baza 2 într-o bază care este putere a lui 2 (și invers)



Fie n un număr reprezentat în baza 2 pe care vrem să-l reprezentăm în baza 2^k . Putem grupa reprezentarea binară a numărului în bucăți de lungime k . Scriem fiecare bucată în baza 2^k , concatenăm rezultatele și obținem reprezentarea în baza 2^k .

Exemplul 1 : Să se convertească $(11011.101)_2$ în baza 16.

Grupăm numărul în bucăți de câte 4 deoarece $16 = 2^4$. Pentru partea întreagă vom începe împărțirea de la dreapta spre stânga, iar pentru partea fracționară vom începe de la stânga la dreapta. Astfel, vom obține gruparea: 0001 1011.1010. Observăm că se completează cu 0 pentru a obține bucățile de lungime 4. Acum transformăm bucățile în baza 16.

$$(0001)_2 = (\overline{1})_{16},$$

$$(1011)_2 = (\overline{B})_{16},$$

$$(1010)_2 = (\overline{A})_{16}.$$

$$\text{Prin urmare } (11011.101)_2 = (\overline{1B.A})_{16}$$

Pentru a reprezenta un număr scris într-o bază $b = 2^k$ în baza 2, aplicăm procedeul invers. Luăm fiecare cifră din reprezentarea în baza b a numărului, o reprezentăm în baza 2, iar la final concatenăm ”bucățile” obținute.

Exemplul 2 : Să se convertească $(\overline{1A.C})_{16}$ în baza 2.

Deoarece $16 = 2^4$ știm că fiecare cifră din reprezentarea numărului în baza 2 va avea lungimea 4 (se completează cu 0-uri acolo unde este cazul). Luăm fiecare cifră și o scriem în baza 2.

$$(\overline{1})_{16} = (\overline{0001})_2,$$

$$(\overline{A})_{16} = (\overline{1010})_2,$$

$$(\overline{C})_{16} = (\overline{1100})_2,$$

Reprezentarea lui $(\overline{1A.C})_{16}$ în baza 2 este concatenarea celor 3 rezultate obținute anterior, adică $(\overline{00011010.1100})_2 = (\overline{11010.11})_2$ (am eliminat 0-urile redundante).

Exemplul 3 : Sa se transforme 6A,D din baza 16 in baza 2.

Fiindcă $16=2^4$ fiecare cifra din numarul in baza 16 reprezinta 4 cifre din numarul in baza 2.

$$(\overline{6A, D})_{16} = ?$$

$$6_{(16)} = \overline{0110}_{(2)}$$

$$A_{(16)} = \overline{1010}_{(2)}$$

$$D_{(16)} = \overline{1101}_{(2)}$$

$$\Rightarrow (\overline{6A, D})_{(16)} = \overline{01101010, 1101}_{(2)} = \overline{1101010, 1101}_{(2)}$$

Exemplul 4 : Transformati 1011001,101 din baza 2 in baza 8.

Cum $8 = 2^3$ impart in bucatele de cate 3 cifre (pornind de la virgula) si adaug 0-uri la inceput si sfarsit daca este cazul.

$$\overline{10111001, 101}_2 = ?$$

$$001_{(2)} = \overline{1}_{(8)}$$

$$011_{(2)} = \overline{3}_{(8)}$$

$$001_{(2)} = \overline{1}_{(8)}$$

$$101_{(2)} = \overline{5}_{(8)}$$

$$\Rightarrow (\overline{1011001, 101})_{(2)} = \overline{131, 5}_{(8)}$$

Exemplul 5 : Să se reprezinte în baza 2 următoarele numere:

- $(\overline{47.3})_8$
- $(\overline{113.3})_4$
- $(\overline{ABC.ABC})_{16}$
- $(\overline{AB.G})_{32}$

Exemplul 6 : Să se reprezinte numerele în următoarele baze:

- $(\overline{1011.1011})_2$ în baza 8
- $(\overline{111.111})_2$ în baza 4
- $(\overline{101010.010111})_2$ în baza 16
- $(\overline{101010.010111})_2$ în baza 32

4 [IMPORTANT]Operații în baza b

Operațiile aritmetice cu numerele scrise într-o bază $b \geq 2$ oarecare se fac după reguli asemănătoare ca în baza 10, dar transportul și împrumutul trebuie să se facă la b, nu la 10. Pentru calculele de o cifră în baza b putem trece numerele în baza 10, facem acolo calculele, apoi trecem rezultatele în baza b.

4.1 Adunarea

Exemplul 1 : Să se calculeze $(\overline{1011})_2 + (\overline{110})_2$ fără a trece prin baza 10.

$$\begin{array}{rcccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Pe poziția unităților am avut $\overline{1} + \overline{0} = \overline{1}$, fără transport. Pe următoarea poziție am avut $\overline{1} + \overline{1} = \overline{10}$ (adică numărul 2), s-a păstrat $\overline{0}$ și s-a propagat $\overline{1}$; pe următoarea poziție am avut $\overline{0} + \overline{1} + \overline{1}$ (ultimul $\overline{1}$ provenit din transport) = $\overline{10}$, s-a păstrat $\overline{0}$ și s-a propagat $\overline{1}$; etc.

4.2 Scaderea

Exemplul 2 : În baza 16, să se scadă BA - 9B.

$$\begin{array}{r} \text{B} \quad \text{A} \\ - \quad 9 \quad \text{B} \\ \hline 1 \quad \text{F} \end{array}$$

Pe poziția unităților avem $\overline{A} - \overline{B} = 10 - 11 < 0$; de aceea, împrumutăm $\overline{1}$ de pe poziția următoare și atunci calculul este $1 \cdot 16 + 10 - 11 = 15 = \overline{F}$. Pe poziția următoare avem $\overline{B} - \overline{1} - \overline{9}$ (acel $\overline{1}$ a fost cedat la împrumut) = $11 - 1 - 9 = 1 = \overline{1}$.

4.3 Înmulțirea

Exemplul 3 : În baza 2, să se înmulțească $110.11 \cdot 1.001$.

$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 1 & 0 & .1 & 1 \\ \cdot & & 1 & .0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & .1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & .1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Înmulțirea într-o bază oarecare se face tot după reguli asemănătoare ca în baza 10, dar pentru baza 2 aceste reguli se pot simplifica, deoarece singurele cifre sunt $\bar{0}$ și $\bar{1}$, care desemnează respectiv 0 și 1, care sunt factor anulator, respectiv element neutru, la înmulțire; înmulțirea cu $\bar{0}$ presupune scrierea unui rând de $\bar{0}$ -uri, care nu contează la adunare și se pot omite, iar înmulțirea cu un $\bar{1}$ revine la a scrie o copie a deînmulțitului; așadar, pentru a face înmulțirea, este suficient să parcurgem înmulțitorul de la dreapta spre stânga și pentru fiecare $\bar{1}$ întâlnit să mai scriem o copie a deînmulțitului, cu cifra unităților aliniată la acel $\bar{1}$, iar în final să adunăm rândurile scrise - ceea ce am făcut mai sus; în final, numărul de zecimale ale produsului este suma numerelor de zecimale ale factorilor, la fel ca în cazul bazei 10.

4.4 Impartirea

Exemplul 4 : Impartiti 10100,011 la 11 in lucrand cu operatiile in baza 2.

$$\begin{array}{r}
 10100,011 \mid 11 \\
 \underline{11} \\
 100 \\
 \underline{11} \\
 100 \\
 \underline{11} \\
 11 \\
 \underline{11} \\
 = 100 \\
 \underline{11} \\
 1
 \end{array}$$

- Ca la impartirea normala, incep din stanga. Ma uit la prima cifra, clar 11 nu se cuprinde in 1 deci mai adaug o cifra din numar.
- Acum am 10 si 11. Clar 11 nu se cuprinde in 10 deci mai adaug o cifra.
- 101 si 11, acum putem sa facem impartirea. Fiind in baza 2, lucrurile stau destul de simplu: catul ori e 0 ori e 1. In cazul nostru catul e 1 si restul 10.

- Adaug urmatoarea cifra din numar si am 100 si 11. \Rightarrow catul 1, restul 1.
- Adaug urmatoarea cifra care e 0. 11 nu se cuprinde in 10 \Rightarrow catul 0, restul 10.
- Inainte de a adauga urmatoarea cifra, observ ca intalnesc virgula, pe care o adaug si la rezultat. Abia acum pot adauga urmatorul 0. \Rightarrow 100 impartit la 11, cat 1 rest 1.
- Adaug urmatoarea cifra. \Rightarrow 11 impartit la 11, cat 1 rest 0.
- Adaug urmatoarea cifra, care este 1. 11 nu se cuprinde in 1 \Rightarrow cat 0 rest 1.
- S-a terminat numarul, dar nu s-a terminat si impartirea. Adaugam cati de 0 avem nevoie pana ajungem la restul 0 sau gasim perioada. Asadar, 10 impartit la 11 \Rightarrow cat 0 rest 10.
- Mai adaug un 0 \Rightarrow 100 impartit la 11, cat 1 rest 1. Am ajuns inapoi la 1 \Rightarrow avem perioada pe 01.

Exercițiul 5 : Să se efectueze următoarele calcule:

- $(\overline{1010})_2 + (\overline{1111})_2$
- $(\overline{F3})_{16} + (\overline{AB})_{16}$
- $(\overline{12})_8 + (\overline{46})_8$
- $(\overline{1000})_2 - (\overline{1})_2$

Exercițiul 6 : Să se efectueze următoarele calcule:

- $(\overline{110})_2 \cdot (\overline{10101})_2$
- $(\overline{AB})_{16} \cdot (\overline{3})_{16}$

References

- [1] Dumitru Daniel Drăgulici. *Curs*.
- [2] Larisa Dumitrache *Tutoriat 2019*