Lema de pompare

Dacă limbajul L e regulat	Ipoteză
⇓	⇓
$\exists n_0 \ \forall \alpha \in L, |\alpha| \geq n_0 \ \exists$ descompunere ai $\underline{\alpha = uvw}$	1) $|uv| \leq n_0$ 2) $|v| \geq 1$ 3) $\forall i \geq 0 \ uv^iw \in L$
	Concluzie

ideea lemei (se reține lema ușor!) (o puteți sări)

L e regulat $\Rightarrow \exists \underset{(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)}{A}$ A.F. (automat finit) $L = L(A)$ și deg $n_0 = |Q|$

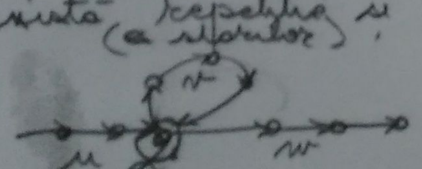
- $\alpha \in L \Rightarrow \exists$ drum de la q_0 la $q_f \in F$ drum etichetat cu α
- $|\alpha| \geq n_0 \Rightarrow \alpha = a_1 \dots a_{n_0} \dots a_{n_0+k}$
- redenumim stările $q_0, q_1, q_2 \dots q_f$ ai

$\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}$ adică $\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_{n_0+k}} q_f$

(unde $a_1 \dots a_{n_0+k} = \alpha$)

și observăm că avem n_0+k simboluri și doar n_0 stări $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există repetiție (a stărilor) și alegem <u>prima repetiție</u>

$\Rightarrow$ 

găsim descompunere $\alpha = uvw$

- evident $|uv| \leq n_0$ (pt că e <u>prima</u> repetiție)
- evident $|v| \geq 1$ (pt că există repetiție a unei stări!)
- evident $uv^iw \in L$ (pt că se pleacă din q_0 și se ajunge în $q_f \Rightarrow$ recunoscut de automat)

- Avem $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ($^{-}$ este negația)
- echivalent pentru orice propoziție (mecanismul reducerii la absurd)

$$\underbrace{\text{Ipoteză} \Rightarrow \text{Concluzie}}_{\text{adevărat}} \equiv \underbrace{\overline{\text{Concluzie}} \Rightarrow \overline{\text{Ipoteză}}}_{\text{adevărat}}$$

au aceași valoare de adevăr

Ceea ce vom folosi va fi $\overline{\text{Concluzie}} \Rightarrow \overline{\text{Ipoteză}}$:

$\forall n_0 \; \exists \alpha \in L$ $\forall$ descompunere 1) $|uv| \leq n_0$

$|\alpha| \geq n_0$ $\alpha = uvw$ 2) $|v| \geq 1$

$\boxed{\text{ALEG}}$!

$\overline{3}$) $\exists i \geq 0$ $uv^iw \notin L$

$\boxed{\text{ALEG}}$!

$\overline{\text{Concluzie}}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\overline{\text{Ipoteză}}$ $\boxed{L \text{ nu e regulat}}$

[observăm că $\overline{(1) \wedge (2) \wedge (3)} = \overline{(1)} \vee \overline{(2)} \vee \overline{(3)}$ din care noi am folosit $(1) \wedge (2) \wedge \overline{(3)}$]

Atenție
- se Alege (inspirat!) α și i
- Nu se alege n_0 (demonstrăm pt $\forall n_0$)
- Nu se alege descompunerea (demonstrăm pt $\forall$ descompunere)

<u>Exemplul 1</u> demonstrați că $L = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$ <u>nu e regulat</u>

- <u>$\forall n_0$</u>, Aleg $\alpha = a^p$, p <u>prim</u>, $p \geq n_0$ $\Rightarrow$ $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq n_0$, <u>$\forall$ descompunere</u> $\alpha = uvw$

$\Longrightarrow$ <u>nu aleg!</u> $\begin{cases} u = a^k \\ v = a^l \\ w = a^m \end{cases}$ ai $a^k \cdot a^l \cdot a^m = a^{k+l+m} = a^p$

$\Downarrow$

$k + l + m = p$

am 1. $|uv| \leq n_0 \Rightarrow k + l \leq n_0$

2. $|v| \geq 1 \Rightarrow$ <u>$l \geq 1$</u>

3. Aleg ($\exists$) $i_0 \geq 0$ ai $uv^{i_0}w \notin L$

- $uv^{i_0}w = a^k \cdot (a^l)^{i_0} \cdot a^m = a^{k + l \cdot i_0 + m} = a^{k+l+m+l(i_0-1)}$

$= a^{p + l(i_0-1)}$

- deci aleg i_0 ai $p + l(i_0 - 1)$ sa nu fie prim (adică să fie produs de cel puțin 2 nr ≥ 2)

Aleg $i_0 = p + 1$

$p + l(i_0 - 1) = p + l(p + 1 - 1) = p + l \cdot p = p \cdot (l + 1)$

p prim $\Rightarrow p \geq 2$

<u>$l \geq 1$</u> $(|v| \geq 1) \Rightarrow l + 1 \geq 2$

$\Rightarrow p \cdot (l+1)$ nu e prim

$\Downarrow$

$uv^{i_0}w \notin L$

(adică am demonstrat negația concluziei) $\Downarrow$

$\boxed{L \text{ nu e regulat}}$

Exemplul 2. demonstrați că $L=\{a^k b^p \mid k \geq 5,\ p \text{ prim}\}$ nu e regulat

$\forall n_0$, Aleg $\alpha = a^5 b^p$, p prim, $p \geq n_0$ $\Rightarrow \alpha \in L$, $|\alpha| \geq n_0$, $\forall$ descompunere $\alpha = uvw$

PNU deg! $\Rightarrow$
caz 1. $v = a^m$
caz 2. $v \in a^m b^k$ $m, k \neq 0$
caz 3. $v \in b^k$ $k \neq 0$

și 1) $|uv| \leq n_0$
2) $|v| \geq 1$

$$\overbrace{a \ldots a \underset{\shortparallel}{\,} b \ldots b}^{\alpha}$$
$$u \quad v \quad w$$

caz 1. $v = a^m \Rightarrow \begin{cases} u = a^l \\ w = a^{5-l-m} b^p \end{cases}$

Aleg $\boxed{i_0 = 0}$! $\Rightarrow uv^{i_0}w = a^l \cdot a^{5-l-m} \cdot b^p \notin L$
$= a^{5-m} b^p$

(pt că $m \geq 1 \Rightarrow 5-m < 5$)

caz 2. $v = a^m b^k$ $m, k \neq 0$ — analog caz 1
(aleg $i_0 = 0$ și obținem $uv^{i_0}w = a^{5-m} b^{p-k} \in L$)

caz 3. $v = b^k \Rightarrow \begin{cases} u = a^5 b^l \\ w = b^{p-k-l} \end{cases} \Rightarrow uv^{i_0}w =$
(analog exercițiul 1)
$= a^5 b^l \cdot b^{k \cdot i_0} \cdot b^{p-k-l} = a^5 \cdot b^{l + k \cdot i_0 + p - k - l} = a^5 \cdot b^{p + k(i_0 - 1)}$
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ aleg $i_0 = p+1 \Rightarrow uv^{i_0}w \notin L$. Din caz 1+2+3 $\Rightarrow$ L nu e regulat