◇ Expresiile regulate REG

Definiție 1) $\emptyset$ e exp reg pt mulțimea $\emptyset$
λ —— " —— $\{\lambda\}$
a —— " —— $\{a\}$

2) dacă r e exp reg pt mulțimea de cuvinte R
s —— " —— " —— S | atunci

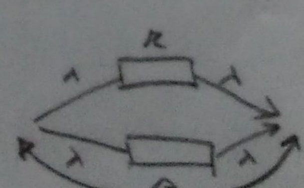
$r+s$ exp reg pt mulțimea $R \cup S$
$r \cdot s$ —— " —— $R \cdot S$
r^* —— " —— R^*

3) orice exp reg se obține aplicând pașii 1 și 2 de un nr finit de ori

---

exemple: $a+b$ exp reg pt $\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$
ab exp reg pt $\{ab\} = \{a\} \cdot \{b\}$
a^* exp reg pt $\{a^n \mid n \geq 0\} = (\{a\})^* = \{\lambda\} \cup \{a\} \cup \{a\}^2 \cup \dots$
$a \cdot a^*$ exp reg pt $\{a^n \mid n \geq 1\} = \{a\} \cdot \{a^n \mid n \geq 0\}$
$a^* \cdot b^*$ exp reg pt $\{a^n b^m \mid m, n \geq 0\} = \{a^n \mid n \geq 0\} \cdot \{b^m \mid m \geq 0\}$
$a^* + b^*$ exp reg pt $\{a^n \mid n \geq 0\} \cup \{b^m \mid m \geq 0\}$

obs $(r+s)^* = (r^* s^*)^*$



! **Notație** $L(E)$ este mulțimea cuvintelor și
E exp regulată pt $L(E)$

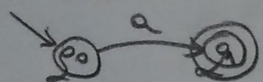
$Reg = \mathcal{L}(AF)$

Alg 1 Pentru $\forall$ exp reg α construim iterativ A automat finit astfel ca α exp reg pt $L(A)$.

Construcție după operatorii $+, \cdot, *$ care apar în α

Pas 1

pt $\alpha = \emptyset$



pt $\alpha = a$

Pas 2

a) dacă $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

deja pt α_1 $\exists A_1$ AF ai α_1 exp reg pt $L(A_1)$

α_2 $\exists A_2$ AF ai α_2 exp reg pt $L(A_2)$

A_1, A_2 AF $\Rightarrow \exists A$ AF ai $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ α exp reg pt $L(A)$

Concluzie: construim A ai $L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$ automatul cerut

b) dacă $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

deja pt α_1 $\exists A_1$ AF ai α_1 exp reg pt $L(A_1)$

pt α_2 $\exists A_2$ AF ai α_2 exp reg pt $L(A_2)$

A_1, A_2 AF $\Rightarrow \exists A$ AF ai $L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ α exp reg pt $L(A)$

Concluzie: construim A ai $L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$ automatul cerut

c) dacă $\alpha = (\alpha_1)^*$

deja pt α_1 $\exists A_1$ AF ai α_1 exp reg pt $L(A_1)$

A_1 A.F $\Rightarrow \exists A$ AF. ai $L(A) = (L(A_1))^*$ $\Rightarrow$ A automatul cerut.

Alg 2 Pentru orice A automat finit, construim α expresie regulată astfel ca α exp reg pt $L(A)$.

Def A' este un automat finit extins (AFE)

$A' = (Q, \Sigma, q_0, \delta, f)$ unde

f = singura stare finală $\neq q_0$ stare inițială

$\delta : Q \times Q \to Reg_{\Sigma}$

expresiile regulate peste alfabetul Σ

$q \xrightarrow{E} p$ $\qquad \delta(q, p) \ni E$

def - se definește relația $\vdash$:

$(p, w_1) \vdash (q, w_2) \Leftrightarrow$
1) $w_1 = \alpha w_2$
2) $\delta(p, q) = E$ exp reg pt $L(E)$
3) $\alpha \in L(E)$

- se extinde reflexiv și tranzitiv la $\overset{*}{\vdash}$

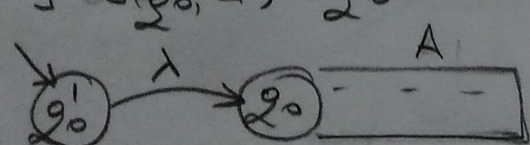
def A' AFE $L(A') \doteq \{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \overset{*}{\vdash} f \}$

Pas 1 Pentru A AF construim A_1 - AF. și

1) $\nexists$ arce spre q_0 $\quad (q_0 \notin \delta(q, a) \ \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\})$

dacă $\exists\ \delta(q_0, a) \ni q_0$ adăugăm
- q_0' stare inițială nouă
- $\delta(q_0', \lambda) \ni q_0$

și



2) există o singură stare finală f

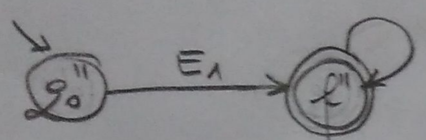
dacă $f_1 \ldots f_n$ stări finale în A $\leadsto$ în A' f' stare finală

și $f_1 \ldots f_n \xrightarrow{\lambda} f'$

Pas 2 pentru A' AF (la pas 1) care

- are o singură stare finală
- nu are arce spre starea inițială

construim A'' AFE de forma:

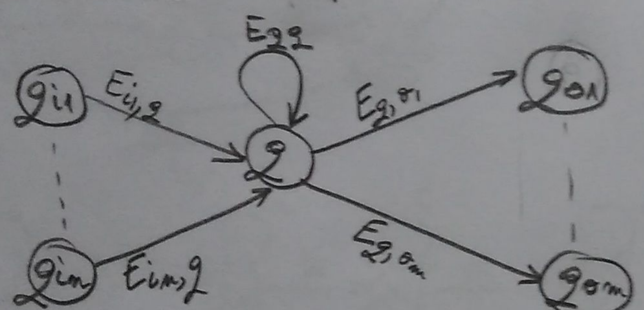


pentru care

$$L(A) = L(A') = L(A'') = L(E_1 \cdot E_2^*)$$

eliminând la fiecare pas o stare $q \notin \{q_0, f\}$ astfel

pentru

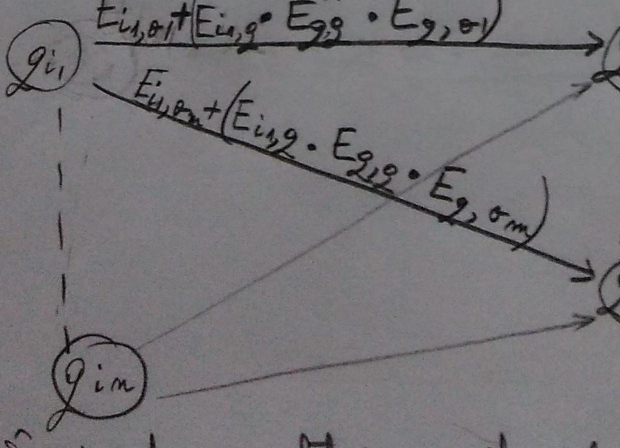


unde

- $q_{i1} \dots q_{in}$ stările cu arce spre q $E_{i1,q} \dots E_{in,q}$
- $q_{o1} \dots q_{om}$ stările cu arce din q $E_{q,o1}, \dots, E_{q,om}$

și bucla $E_{q,q}$, putem elimina starea $q \notin \{q_0, f\}$

etichetând arcele (cu expresiile ce s-ar fi format prin q)

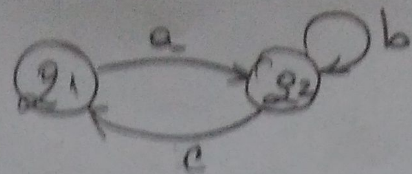


între

- q_{i1} și q_{o1}
- ⋮
- q_{i1} și q_{om}
- ⋮
- q_{in} și q_{o1}
- ⋮
- q_{in} și q_{om}

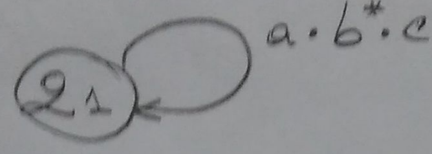
Evident se obține exact aceleași cuvinte

Obs 1. pentru

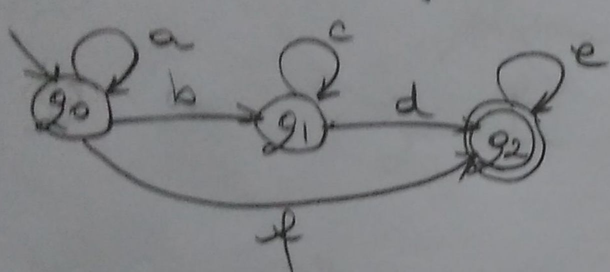


eliminarea lui q_2

duce la starea echivalentă:

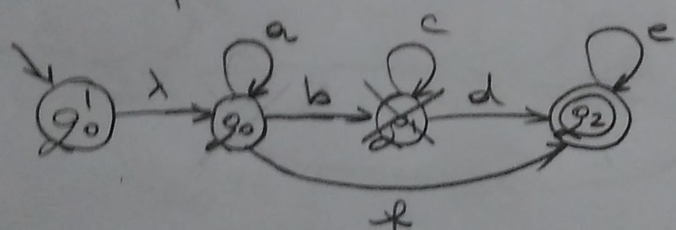


Ex 1. Construiți expresia regulată corespunzătoare automatului



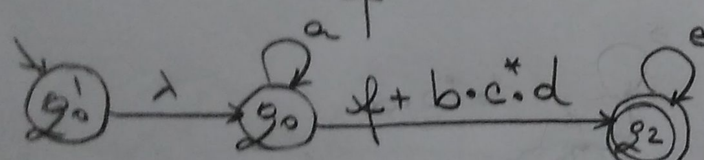
– se adaugă q_0' stare inițială nouă

pas 1:



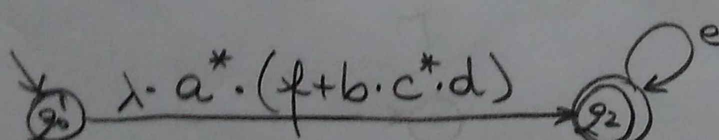
– se elimină starea q_1

pas 2:



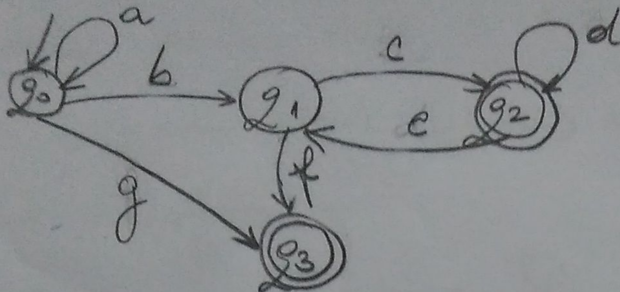
– se elimină starea q_0

pas 3:



$$L(A) = L(\underline{a^* \cdot (f + b \cdot c^* \cdot d) \cdot e^*})$$

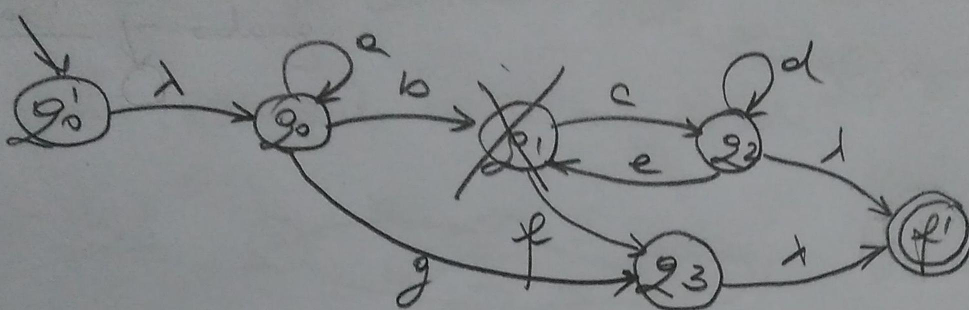
Ex 2 Construiți expresia regulată corespunzătoare automatului



pas 1 - adaug

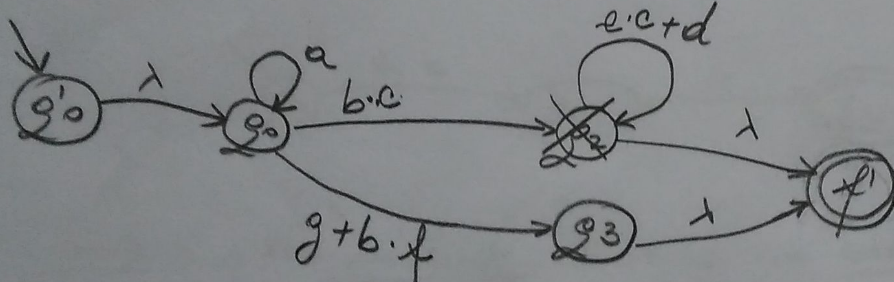
q_0' - st inițială

f' - st finală



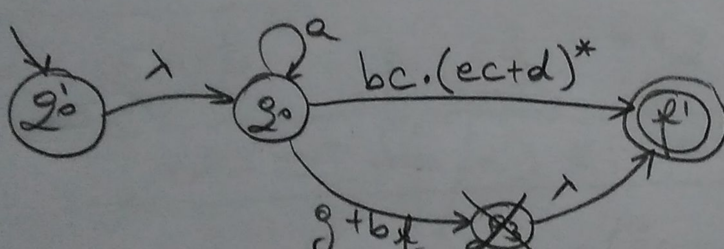
pas 2

elimin q_1

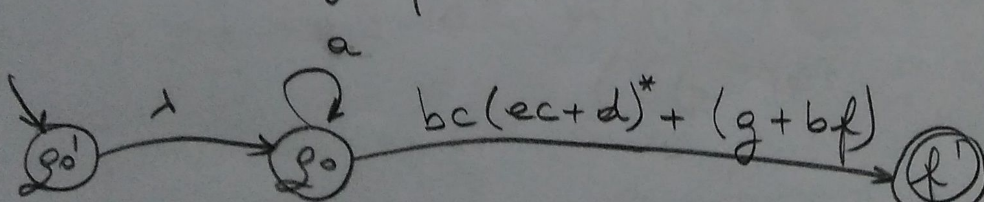


pas 3

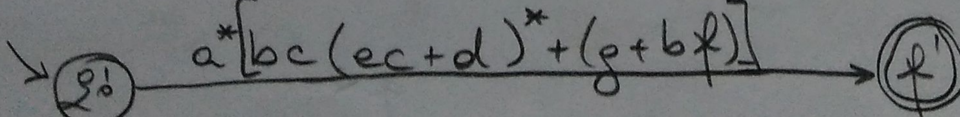
elimin q_2



elimin q_3



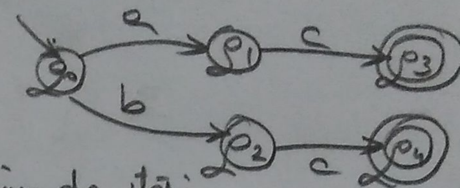
elimin q_0



Automatul minimal $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

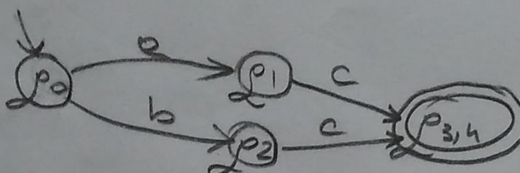
Teoremă pentru orice $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ A.F.D complet definit există A_m AFD echivalent $(L(A) = L(A_m))$ cu numar minim de stări.

exemplu: pt automatul

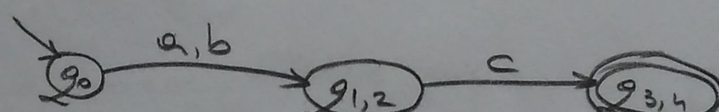


găsiți automatul cu nr minim de stări

- **obs 1**



are mai puține stări



are nr minim de stări

- **obs 2** s-au "unificat" stările cu același "comportament"

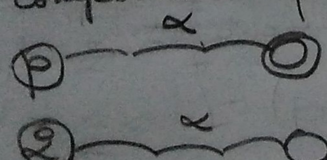
---

def A AFD $p, q \in Q$ echivalente $p \equiv q$ (relație de echivalență) (același comportament)

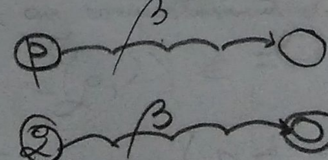
$$p \equiv q \Leftrightarrow \boxed{\forall \alpha \in \Sigma^* \ \tilde{\delta}(p, \alpha) \in F \Leftrightarrow \tilde{\delta}(q, \alpha) \in F}$$

def $p \not\equiv q$ separabile (se comportă diferit)

$$p \not\equiv q \Leftrightarrow \left[\exists \alpha \in \Sigma^* \text{ ai } (\tilde{\delta}(p,\alpha) \in F \text{ și } \tilde{\delta}(q,\alpha) \notin F) \text{ sau } (\tilde{\delta}(p,\alpha) \notin F \text{ și } \tilde{\delta}(q,\alpha) \in F) \right]$$



sau



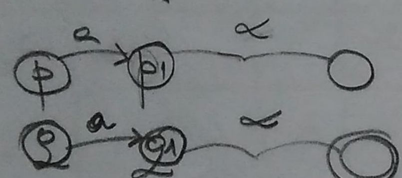
__Obs 1__

$$p \underset{\lambda}{\not\equiv} q \iff \left[\begin{array}{l} \big(\underset{p}{\underbrace{\delta(p,\lambda)}} \in F \text{ și } \underset{q}{\underbrace{\delta(q,\lambda)}} \notin F\big) \text{ sau} \\ \big(p \notin F \text{ și } q \in F\big) \end{array} \right]$$

stările separabile prin λ (comportament diferit la λ)

__Obs 2__

$$\left.\begin{array}{l} \delta(p,a) = p_1 \\ \delta(q,a) = q_1 \\ p_1 \underset{\alpha}{\not\equiv} q_1 \end{array}\right| \Rightarrow p \underset{a\alpha}{\not\equiv} q$$



__Algoritm__ – găsesc stările separabile prin tabel astfel:

- pas 0 – stări __finale__ sunt __separabile__ (prin λ) de cele __nefinale__
- pas 1 $\left[\begin{array}{l} \forall\, p, q, p_1, q_1 \in Q \quad \forall a \in \Sigma \\ \delta(p,a) = p_1 \\ \delta(q,a) = q_1 \\ p_1 \text{ și } q_1 \text{ marcate în tabel (separabile)} \end{array} \right] \Rightarrow p \not\equiv q$ marchez în tabel (separabile)
- pas 2 – reiau pas 1 până când nu se mai marchează nimic în tabel

$\Downarrow$

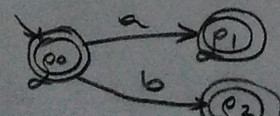
$\forall\, p, q$ nemarcate (neseparabile) $\Rightarrow p \equiv q$ (echivalente)

deci obținem __stările echivalente__

! __Important__ Automatul trebuie să fie __complet definit__

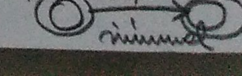
($\delta : Q \times \Sigma \to Q$ complet definită)

ex 1: A



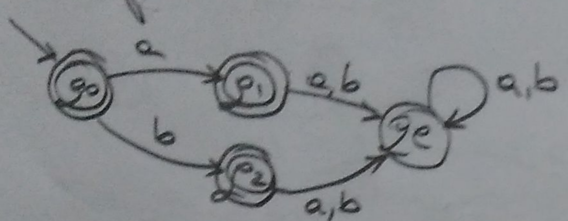
– nu are stări nefinale => nu pot aplica pas 0 => nu pot aplica pas 1 ... ?

=> automat minimal? fals



Contradicția: A nu e complet definit

ex 2. fie A' automatul complet definit echivalent.



q_e stare de eroare (nu conduce la cuvinte noi)

	q_0	q_1	q_2	q_e
q_0				
q_1	a			
q_2	b			
q_e	λ	λ	λ	

Obs relația de echivalență este [-simetrică, -reflexivă, -tranzitivă] $\Leftarrow$ doar 1/2 din tabel

pas 0 $q_e \not\equiv_\lambda q_1$ $q_e \not\equiv q_2$ $q_e \not\equiv q_0$

pas 1 $\left.\begin{matrix} \delta(q_0, a) = q_1 \\ \delta(q_1, a) = q_e \\ q_1 \not\equiv_\lambda q_e \end{matrix}\right| \Rightarrow q_0 \overset{a}{\not\equiv} q_1$ (analog $q_0 \overset{b}{\not\equiv} q_2$)

Obs.3 $\left.\begin{matrix} p \equiv q \\ p \in F \end{matrix}\right| \Rightarrow q \in F$
(altfel aș avea $p \in F$ $q \notin F \Rightarrow p \not\equiv_\lambda q$ absurd)

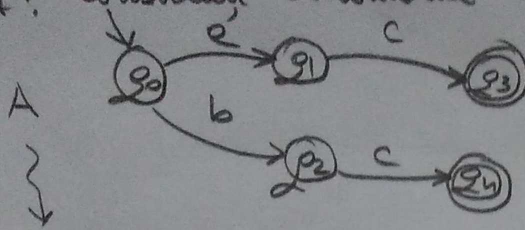
Obs.4. $\left.\begin{matrix} p \equiv q \\ \delta(p, a) = p_1 \\ \delta(q, a) = q_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow p_1 \equiv q_1$

[altfel aș avea $p_1 \overset{\alpha}{\not\equiv} q_1$ dar $\delta(p, a) = p_1$, $\delta(q, a) = q_1$ | $\rightarrow p \overset{a\alpha}{\not\equiv} q$ absurd
$p \xrightarrow{a} p_1 \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} \circ$
$q \xrightarrow{a} q_1 \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} \circledcirc$]

$\Downarrow$

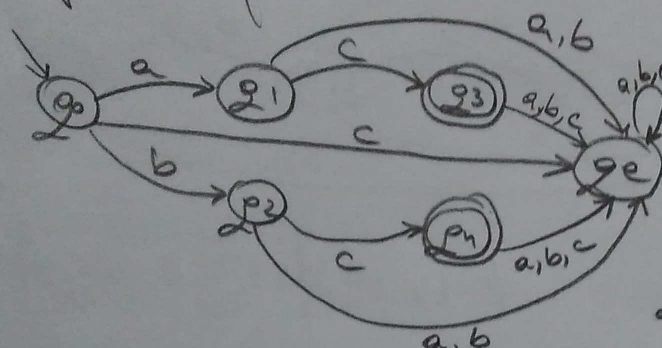
!
$A_m = (Q_m, \Sigma, q_{0m}, \delta_m, F_m)$ automat minimal unde
$Q_m = \{[q] \mid q \in Q\}$ clasele de echivalență
$q_{0m} = [q_0]$
$\delta([q], a) = [\delta(q, a)]$ conf obs 4 !
$F = \{[q] \mid q \in F\}$ conf obs 3 !

ex: construiți automatul minimal pentru automatul:



↓

A' complet definit



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_e
q_0						
q_1	c					
q_2	c					
q_3	λ	λ	λ			
q_4	λ	λ	λ			
q_e		c	c	λ	λ	

pas 0 $\quad \underset{F}{\underset{\in}{q_3}}$ separabil prin λ de $q_0, q_1, q_2, q_e \notin F$

q_4 ——— " ——— ——— " ———

pas 1
$$\left.\begin{array}{l} \delta(q_1, c) = q_3 \\ \delta(q_e, c) = q_e \\ q_3 \underset{\lambda}{\not\equiv} q_e \end{array}\right| \Rightarrow q_1 \overset{c}{\not\equiv} q_e \quad (\text{analog } q_2 \overset{c}{\not\equiv} q_e)$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta(q_0, c) = q_e \\ \delta(q_1, c) = q_3 \\ q_e \underset{\lambda}{\not\equiv} q_3 \end{array}\right| \Rightarrow q_0 \overset{c}{\not\equiv} q_1 \quad (\text{analog } q_0 \overset{c}{\not\equiv} q_2)$$

pas 2
$$\left.\begin{array}{l} \delta(q_0, a) = q_1 \\ \delta(q_e, a) = q_e \\ q_1 \overset{c}{\not\equiv} q_e \ (\text{deja marcat})! \end{array}\right| \Rightarrow q_0 \overset{ac}{\not\equiv} q_e$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{obs: } \tilde{\delta}(q_0, ac) = q_3 \in F \\ \tilde{\delta}(q_e, ac) = q_e \notin F \end{array}\right]$$

pasul 2 nu mai marchează alte stări ca separabile

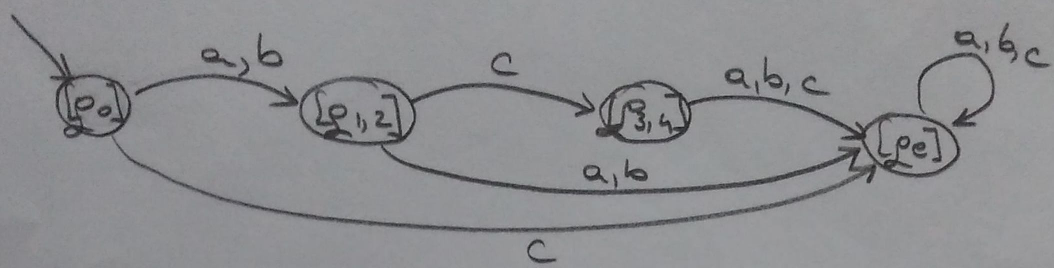
⇓

obținî $q_3 \equiv q_4$ și $q_1 \equiv q_2$

Construim $A_m = (Q_m, \Sigma, q_{0m}, \delta_m, F_m)$ unde

$Q_m = \{[q_0], [q_{1,2}], [q_{3,4}], [q_e]\}$ $\Sigma = \{a, b, c\}$

$q_{0m} = [q_0]$



conf obs 3 $F = \{[q_{3,4}]\}$

obs 4. $\delta(\underbrace{[q_1]}_{[q_{1,2}]}, a) = \delta(\underbrace{[q_2]}_{[q_{1,2}]}, a) = [\delta(q_1, a)] = [q_{3,4}]$

- s-a obținut automatul minimal complet definit din care se pot elimina stările nefolositoare
  - stările inaccesibile din starea inițială

  - stările care nu au drum spre stări finale