GRAMATICI

① CFG pentru $w \in \{a,b\}^*$ cu $2|w|_a = 3|w|_b$

$S \to SaSaSaSbSbS \mid SaSaSbSaSb \mid SaSaSbSbSaS \mid$
$SaSbSaSaSbS \mid SaSbSaSbSaS \mid SaSbSbSaSaS \mid$
$SbSaSaSaSbS \mid SbSaSaSbSaS \mid SbSaSbSaSaS \mid$
$SbSbSaSaSaS \mid \lambda$

② CFG dependentă de context ~~pt.~~ $L = \{w c^m d^n \mid m = |w|_a,\ n = |w|_b\}$

$S \to S_1 \#$
$S_1 \to aS_1C$
$S_1 \to bS_1D$
$S_1 \to \lambda$
$DC \to CD$
$D\# \to d$
$Dd \to dd$
$C\# \to c$

ultimul D se transformă în d

❗ O gramatică e ambiguă dacă există cel puțin un cuvânt care poate fi generat de gramatică prin 2 arbori de derivare

❗ Un CFL este ambiguu dacă toate gramaticile care îl generează sunt ambigue.

③ $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ e un set de paranteze închise corect $\}$

$S \to (S)S \mid \lambda$

④ $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \lambda$

⑤ ~~[illegible]~~ $L = \{\overline{ww}\}$

$S \to AB \mid BA \mid A \mid B$ ~~[illegible]~~
$A \to a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb$ // A și B vor genera mereu cuvinte de lungime impară
$B \to b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb$

Pot să generez abba?

Da: $S \to AB \to aB \to abBa \to abba$

Demonstrația corectitudinii:

1) Orice ~~cu~~ cuvânt cu nr impar de litere o să ~~fie~~ $\in L$ și e generat de A sau B

2) Fie $x \in L$, $|x|$ = par. Presupun că x poate fi descompus ca $x = uv$, $|u|, |v|$ impare și u și v au litere centrale diferite

$\Rightarrow$ x poate fi împărțit în AB sau în BA.

Justificarea presupunerii:

fie $x = x_1 x_2 \dots x_m$

cum $x \notin L \Rightarrow (\exists)\ x_i$ a.î. $x_i \neq x_{i+\frac{m}{2}},\ i \leq \frac{m}{2}$

$\Rightarrow$ pot să aleg $u = x_1 x_2 \dots x_{2i-1}$ cu litera centrală x_i

$v = x_{2i} \dots x_m$ cu litera centrală $x_{i+\frac{m}{2}}$

$\Rightarrow$ am demonstrat că $L \subset L(G)$

Vreau să demonstrez și că $L(G) \subset L$

1) Orice cuvânt de lungime impară $\in L$ generat de G

2) Fie $x \in L(G)$, $|x| =$ par, $\Rightarrow$ a fost generat din AB sau BA

presupunem că a fost derivat din AB (analog pt BA)

$\Rightarrow x = uv$ cu litere centrale diferite

dacă $|u| = |v| \Rightarrow u \neq v$ (au litere centrale diferite)

$\Rightarrow x \in L$

dacă $|u| \neq |v|$ notez $|u| = e$

$|v| = m - e$

litera centrală pt u: $u_{\frac{e+1}{2}}$ și pt v $v_{\frac{m-e+1}{2}}$

și cum u a fost generat de A și v de B

$\Rightarrow u_{\frac{e+1}{2}} \neq v_{\frac{m-e+1}{2}}$

Dacă încerc să îl descompun pe $x = ww'$, $|w| = |w'|$

atunci în w va exista poziția $\frac{e+1}{2}$ a.î.

$x_{\frac{e+1}{2}} \neq x_{\frac{m-e+1}{2}}$

$\Leftrightarrow w_{\frac{e+1}{2}} \neq w'_{\frac{e+1}{2}} \Rightarrow w \neq w' \Rightarrow x \notin L$

$\Rightarrow L \subset L(G) \Rightarrow L = L(G)$

$L = \{ xy \mid |x| = |y|, x \neq y \}$

$S \to AB \mid BA$ // L are doar cuvinte de lungime pară

$A \to a \mid aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb$

$B \to b \mid aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb$

G generează $L(G) = \{ \underbrace{w_1}_{k} x \underbrace{w_2}_{k} \underbrace{u_1}_{e} y \underbrace{u_2}_{e} \mid |w_1| = |w_2| = k, |u_1| = |u_2| = e, x \neq y \}$

~~(8) $L = \{ xyz \mid |x| = |y| = |z|, x \neq y \neq z \}$~~

~~un cuvânt de lungime 3n este par~~

$L = \{ \cancel{w} = w^R \}$

$L = \{ \cancel{a^i b^j} \mid gcd(i, j) = 1 \}$

(7) Dați o CFG cu:

- cel puțin 7 producții
- o producție de lungime ≥ 5
- 2 empty production
- o producție care șterge neterminalele.

Precizați simbolurile gramaticii.

-> empty production: $A \to \lambda$

-> unit-productions: $A \to B$

-> linear la dreapta: $A \to x$ sau $A \to xB$ | $A \in N$, $B \in N$, $x \in \Sigma^*$

-> regular: right linear sau left linear

$S \to abcdA \mid \lambda$

$A \to \lambda \mid B$

$B \to a \mid b \mid c$

$L(G) = \{ \lambda, abcd, abcda, abcdb, abcdc \}$

(8) Transformați în FNC: -> $A \to BC$

-> $A \to a$

-> singura regulă care produce λ poate fi S și în acest caz S nu apare în membrul drept al niciunei producții

Pasul 1

~~$A \to \lambda$ și A apare în membrul drept al lui $B \to A \mid \alpha$~~

~~$\Rightarrow B \to \lambda \mid \alpha$~~

FNC

Pasul 1: Eliminarea simbolurilor neterminabile (care nu produc cuvinte formate doar din terminale) la care nu se ajunge prin derivari din S

Pasul 2: Eliminarea λ - productiilor (si eliminarea din nou a simbolurilor nefolositoare)

$A \to \lambda$ si $B \to A \mid \alpha$

$\Rightarrow$ $B \to \lambda \mid \alpha$

Pasul 3: Elimin unit productions

Pasul 4: $c \rightsquigarrow X_c \Rightarrow X_c \to c$ si inlocuiesc fiecare aparitie a lui c

Pasul 5: Elimin productiile de lungime ≥ 3

$\Rightarrow$ pt gramatica mea

pas 2: $S \to abcd \mid abcdA \mid \lambda$

$A \to B$

$B \to a \mid b \mid c$

pas 3: $S \to abcd \mid abcdA \mid \lambda$

$A \to a \mid b \mid c$

pas 4: $S \to X_a X_b X_c X_d \mid X_a X_b X_c X_d A \mid \lambda$

$A \to X_a \mid X_b \mid X_c$

$X_a \to a$

$X_b \to b$

$X_c \to c$

$X_d \to d$

$S \to X_a Y_1 \mid X_a Y_3 \mid \lambda$

$Y_1 \to X_b Y_2$

$Y_2 \to X_c X_d$

$Y_3 \to X_b Y_4$

$Y_4 \to X_c Y_5$

$Y_5 \to X_d A$

$A \to X_a \mid X_b \mid X_c$

9. $L = \{ w 2^i w^R 0^{k+3} \mid w \in \{0,1\}^*, i, k \geq 0 \}$

S → AB
B → 000B | λ
A → 0A0 | 1A1 | C
C → 2C | λ

10. $L = \{ w \mid w \in \{0,1,2\}^*, |w|_0 = |w|_1 > 2 \} \cup \{0100, 1101\}$

S → 0100 | 1101 | A
A → B0B0B1B1B | B0B1B0B1B | B0B1B1B0B | B1B0B0B1B |
B1B0B1B0B | B1B1B0B0B | AA
B → 2B | λ

A → 0011 | 0101 | 0110 | 1001 | 1010 | 1100

~~S → S0S0S01 | S~~
~~S → ASA0AS~~
S → A0A0A1A1A | A0A1A0A1A | A1A0A0A1A |
A0A1A1A0A | A1A0A1A0A | A1A1A0A0A | SS // toate posibilitățile de cuvinte cu $|w|_0 = |w|_1$ și ce putem ~~20~~ 2 de 0 și 2 de 1
A → 2A | λ
~~B → 2B | λ~~

11. $L = \{ a^i b^j c^k \mid i + j \neq k \} \cdot \{ w \mid 2|w|_a = 3|w|_b \}$

S → AB
A → C | D // C = i+j > k , D = i+j < k
i+j > k C → aCc | aE | F
am deja una în plus E → bEc | bE | λ // E înseamnă că deja am una în plus
F → bEc | bF | b // F înseamnă că nu am una în plus și trebuie să le pun de la b

D → aDc | Dc | Gc | H
G → bGc | Gc | λ // G înseamnă că am pus deja un c în plus
H → bGc | Hc | c // H înseamnă că trebuie să-l pun acum

B → BaBaBbBbBbB | BaBbBaBbBbB |
BaBbBbBaBbB | BaBbBbBbBaB |
BbBaBaBbBbB | BbBaBbBaBbB |
BbBaBbBbBaB | BbBbBaBbBaB | BbBbBbBaBaB |

$3)$ $L = \{ w \mid w \in \{0,1,2\}^*, 3|w|_0 = |w|_1 + 2 \}$

~~S → S1S1S1S0S | S1S1S0S1S | S1S0S1S1S | S0S1S1S1S | 01 | 10~~

~~S → 10101 | SS | S1110 | S1101 | S1011 | S0111~~

S → B0B1B | B1B0B

~~S → B01 | 0B1 | 01B | B10 | 1B0 | 10B~~

B → B1B1B1B0B | B1B1B0B1B | B1B0B1B1B |
B0B1B1B1B | λ // B generează toate cuvintele cu proprietatea că $3|w|_0 = |w|_1$

⇒ să genereze toate cuvintele cu k+1 0-uri și 3k+1 1-uri

$3(k+1) = 3k+1+2$ ✓

(13) $L = \{ w \mid w = w^R \}$

S → aSa | bSb | a | b | λ

~~(15) $L = \{ a^i b^j \mid \gcd(i,j) = 1 \}$~~

~~$L = \{ xyz \mid |x| \neq |y| \}$~~

(15) $L = \{ xyz \mid x \neq y \neq z, |x| = |y| = |z| \}$