DECIDABILITATE

Reg ⊂ DPDA ⊂ CFL
NPDA ⟺ gramatici

① Fie o gramatică care respectă proprietățile: **S-grammar**

- orice producție este de forma: $A \to x\alpha$

și (∀) perechea (A,x) apare cel mult odată într-o producție.

A = neterminal
x = terminal
α = 1 sau mai multe neterminale

Generează această gramatică DCFL? (limbajele context-free deterministe)
NU: o astfel de gramatică nu poate genera a^n sau λ.

② **Orice CFG nevidă are o gramatică ambiguă.**

Fie o gramatică cu simbolul de start S.

putem adăuga:
$S' \to A'$
$S' \to B'$ ⇒
$A' \to S$
$B' \to S$

$S' \to A' \to S$ sau $S' \to B' \to S$

③ **Există CFL pur deterministe și pur ambigue?**

CFL pur deterministă = poate fi acceptată de un PDA determinist

CFL pur ambiguă = toate gramaticile care generează limbajul sunt ambigue

CFL determinist + neambiguu:
$$L = \{a^n b^n \in \{a,b\}^* \mid n \geq 0\}$$

CFL nedeterminist + neambiguu:
$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$$

CFL ambiguu:
$$L = \{a^n b^n c^m d^m \in \{a,b,c,d\}^* \mid n,m \geq 0\} \cup \{a^n b^m c^m d^n \in \{a,b,c,d\}^* \mid n,m \geq 0\}$$

Nu există CFL determinist și ambiguu.

(4) Se poate decide dacă o CFL este acceptată de un DPDA?

NU: Presupunem că (∃) un algoritm pentru asta denumit A_{DPDA}. Fie ~~g~~ G o CFG și $L = L(G)$.

$\Rightarrow A_{DPDA}$ decide dacă (∃) A DPDA a.î. A recunoaște L.

$\Rightarrow$ 1. dacă nu există acest DPDA $\Rightarrow$ L nu e regulat $\Rightarrow$ poate fi Σ^*

2. dacă există acest DPDA $\Rightarrow$ putem decide dacă $L = \Sigma^*$ (universalitatea e decidabilă pt DPDA)

$\Rightarrow$ am construit un algoritm care decide dacă $L(G) = \Sigma^*$ pentru orice CFL.

Știm de la curs că nu e decidabil dacă un CFL $= \emptyset$ sau dacă $\overline{CFL} = \emptyset$ $\Rightarrow$ nu e decidabilă universalitatea

$\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow$ nu se poate decide dacă o gramatică e acceptată de un DPDA.

(5) Este decidabil dacă pentru un limbaj L pentru care există NPDA există și un DPDA?

NU: analog punctul trecut

(6) ~~Este dec~~ Fie un PDA M a.î. L(M) este DCFL. Construiți un DPDA ~~echiv~~ N a.î. $L(N) = L(M)$

NU: dat fiind un PDA M a.î. L(M) e regulat, determinați dacă $L(M) = \Sigma^*$

(7) intersecția a două CFL:

$$\underbrace{\{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}}_{CFL} \cap \underbrace{\{a^m b^n c^n,\ n, m \geq 0\}}_{CFL} = \underbrace{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}}_{\not\in CFL}$$

CFL care nu sunt DCFL:

- $a^n b^n \cup a^n b^{2n}$
- $w w^R$
- $\overline{ww}$

9 Proprietăți de închidere:

Regulate:
- $\cup$
- $-$
- $\cap$
- $\cdot$
- $*$
- morfisme
- morfisme inverse
- substituții

Decidabilitate:
1) $w \in L$
2) $L = \emptyset$
3) $L = \Sigma^*$
4) $L_1 \subseteq L_2$
5) $L_1 = L_2$
6) L finit

($\forall$) L finit e regulat

10

CFL:
- $\cup$
- $\cdot$
- $*$
- $\cap$ cu Reg
- morfisme
- morfisme inverse
- substituții
- $\cap$
- $-$

Decidabilitate:
1) $w \in L$ ✓
2) $L = \emptyset$ ✓
3) L finit sau infinit ✓
4) $L = \Sigma^*$ ✗
5) $L_1 \subseteq L_2$ ✗
6) $L_1 = L_2$ ✗
7) CFG ambiguă ✗
8) $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ✗
9) $L(G_1) \setminus L(G_2) \neq \emptyset$ ✗
10) $L(G_1) = L(R)$ ✗
11) $L(R) \setminus L(G_1) \neq \emptyset$ ✗
12) $L(G_1) \setminus L(R) \neq \emptyset$ ✗

DCFL:
- morfisme inverse
- $-$
- $\cap$ cu Reg
- $\cap$
- $\cup$

Decidabilitate:
1) $w \in L$ ✓
2) $L = \emptyset$ ✓
3) $L = \Sigma^*$ ✓
4) $L_1 = L_2$ ✓ (demonstrată în 1997 de Géraud Sénizergues)
5) $L_1 \subseteq L_2$ ✗
6) L finit sau infinit ✓

(10) Este decidabil dacă $L(G) \subseteq L(R)$?

$\uparrow$ CFG $\qquad$ $\uparrow$ regular expression

$L(G) = \Sigma^*$ nedecidabilă
$L(G) = \emptyset$ decidabilă

DA: $L(G) \subseteq L(R) \Leftrightarrow L(G) \cap \overline{L(R)} = \emptyset$

R e închis la complementare $\Rightarrow \overline{L(R)} \in REG$

$\Rightarrow L(G_1) \cap L(R_1) = \emptyset$

CFL sunt închise la $\cap$ cu Reg

$\Rightarrow L(G_1) = \emptyset$ ceea ce e decidabil

(11) Este decidabil dacă $L(R) \subseteq L(G)$?

NU: $L(R) = \{\{a,b\}^*\} = \Sigma^*$

$\Leftrightarrow$ Este decidabil dacă $\Sigma^* \subseteq L(G)$?

Dacă și G e definit pe același alfabet

$\Rightarrow$ E decidabil $\Sigma^* = L(G)$? NU.

(12) Fie L în CFL și w un cuvânt. Se poate decide dacă $(\exists) k \geq 0$ a.î. $w^k \in L$?

Fie $L' = \{w, w^2, w^3, \dots\} = \{w^k \mid k \geq 0\} \in Reg$

$\Rightarrow \underset{\text{CFL}}{L} \cap \underset{\text{Reg}}{L'} \overset{?}{=} \emptyset$

$\Rightarrow$ E decidabil dacă $L'' = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ E trivialitatea decidabilă pentru L''? DA

$\underset{\text{CFL}}{L''} = \underset{\text{Reg}}{L'} \cap \underset{\text{CFL}}{L}$

(13) $\underset{\text{CF}}{L_2} \subseteq \underset{\text{Reg}}{L_1} \overset{?}{\Rightarrow} L_2 \in Reg$

NU: $L_2 = a^n b^n \mid n \geq 0 \notin Reg$

$L_1 = \Sigma^*$

$L_2 \subseteq L_1$

Există limbaje peste un alfabet unar (cu o singură literă) care au toate cuvintele de lungime pară, dar limbajul nu e regulat?

- lungime pară, $\notin Reg$, $\notin CFL$

  pe binar: $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

  $L = \{a^{2^p} \mid p > 0\}$, ~~$L = \{wwa \mid w \in \{a,b\}^*\}$~~

  $L = \{a^{p+1} \mid p \text{ prim} > 2\}$

- lungime pară, $\notin Reg$, $\in CFL$

  binar: $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

  unar: $L =$

- lungime impară, $\notin Reg$, $\notin CFL$

  $L = \{a^{2^p+1} \mid p > 0\}$

  $L = \{a^p \mid p \text{ prim}, p > 2\}$

  binar $L = \{wwa \mid w \in \{a,b\}^*\}$