◇ Automate push down (stivă) APD

Def $A = (Q, \Sigma, \underline{\underline{\Gamma}}, q_0, \underline{\underline{Z_0}}, \delta, F)$ automat stivă

Γ = alfabetul stivei

Z_0 = simbol de start pe stivă

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \underbrace{\Gamma}_{\text{un simbol}} \to 2^{Q \times \Gamma^*} = \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$$

def descriere instantanee (configurație)

$$(q, a\alpha, \boxed{Z}\beta) \vdash (p, \alpha, \boxed{\gamma}\beta) \iff$$

$$\delta(q, a, Z) \ni (p, \gamma) \quad \underline{\underline{\text{desen}}} \quad q \xrightarrow{a, Z/\gamma} p$$

$\vdash^*$ e închiderea reflexivă și tranzitivă pt $\vdash$

$$L_F(A) = \{ w \mid (q_0, w, \underline{\underline{Z_0}}) \vdash^* (q_f, \lambda, \alpha), \underline{\underline{q_f \in F}} \}$$

$$L_\lambda(A) = \{ w \mid (q_0, w, \underline{\underline{Z_0}}) \vdash^* (q, \lambda, \underline{\underline{\lambda}}) \}$$

def APD determinist $\iff |\delta(q, a, X) \cup \delta(q, \lambda, X)| \leq 1$

$$\mathcal{L}(APDD) \subsetneq \mathcal{L}(APD) \qquad L = \{ w w^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$$

$$L \in \mathcal{L}(APD) \setminus \mathcal{L}(APDD)$$

Obs $(q, a\alpha, \boxed{Z}\beta) \vdash (p, \alpha, \boxed{\gamma}\beta)$, $\gamma \in \Gamma^*$

$\gamma = \lambda$ $\quad (q, a\alpha, \boxed{Z}\beta) \vdash (p, \alpha, \underline{\beta}) \simeq$ **se șterge** vârful stivei

$\gamma = \delta Z$ $\quad (q, a\alpha, \boxed{Z}\beta) \vdash (p, \alpha, \boxed{\delta Z}\beta) \simeq$ se adaugă δ pe stivă

Ex: Construiți APD pentru: $L = \{ a^m b^n \mid m > n \geq 1 \}$

Idee: - pentru fiecare "a" (simbol curent) pun pe stivă A.

- când ajung la analiza "b"-urilor - trebuie

! schimbată starea - pentru a nu permite alte "a"-uri

- fiecare "b" (simbol curent) va scoate din stivă un "A"

- când s-au terminat simbolurile din cuvânt → pe stivă mai este cel puțin un "A"

λ var 1 - sau scot 'A'-urile până se videază stiva

F var 2 - cu primul 'A' ajung în stare finală

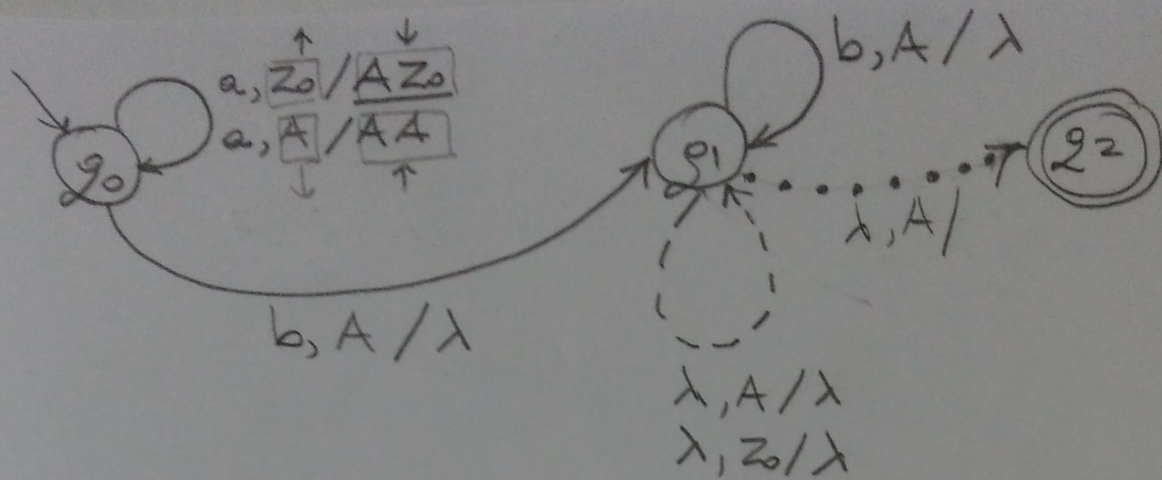
în ambele cazuri cuvântul e acceptat

ex pt a^3b^2 $\quad (q_0, \underline{a}^3b^2, Z_0) \vdash (q_0, \underline{a}^2b^2, \underline{A}Z_0)$

$\vdash (q_0, \underline{a}b^2, \underline{A}AZ_0) \vdash (q_0, b^2, \underline{A}AAZ_0) \vdash$

$\vdash (\underline{q_1}, \underline{b}, \underline{AAZ_0}) \vdash (q_1, \lambda, AZ_0) \vdash (q_1, \lambda, Z_0) \vdash (q_1, \lambda, \underline{\lambda})$

$\vdash (\underline{q_2}, \lambda, Z_0)$ $\underline{q_2 \in F}$



Ex: Construiți APD pt $L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid N_a(\alpha) = N_b(\alpha)\}$

💡 <u>Idee</u>:

- pentru 'a' (simbol curent) – dacă vf stivei e 'Z_0' – adaug 'A'
  – dacă vf stivei e 'A' – adaug 'A'
- pentru 'b' (simbol curent) – dacă vf stivei e 'Z_0' – adaug 'B'
  – dacă vf stivei e 'B' – adaug 'B'
  – dacă vf stivei e 'A' – îl sterg
  (un 'b' sterge un 'A' pus de un 'a')
- pentru 'a' (simbol curent) – dacă vf stivei e 'B' – îl șterg
  (un 'a' sterge un 'B' pus de un 'b')
- când s-a terminat cuvântul – dacă în stivă e doar Z_0 ⇒ nr de 'a' = nr de 'b' ⇒ cuvântul e acceptat

❗ <u>Obs</u> – în orice moment pe stivă vor fi sau $A^i Z_0$ sau $B^i Z_0$ (adică nu $A^i B^j A^k B^l Z_0$)

pentru că | orice b – scoate A ⇒ nu se poate $BA\alpha$
| orice a – scoate B ⇒ nu pot avea $AB\alpha$

Obs Z_0 e foarte important pe stivă = capăt stivă
semnalează stiva fără A și B (dacă nu ar întâlni 1 simbol pe stivă → se oprește

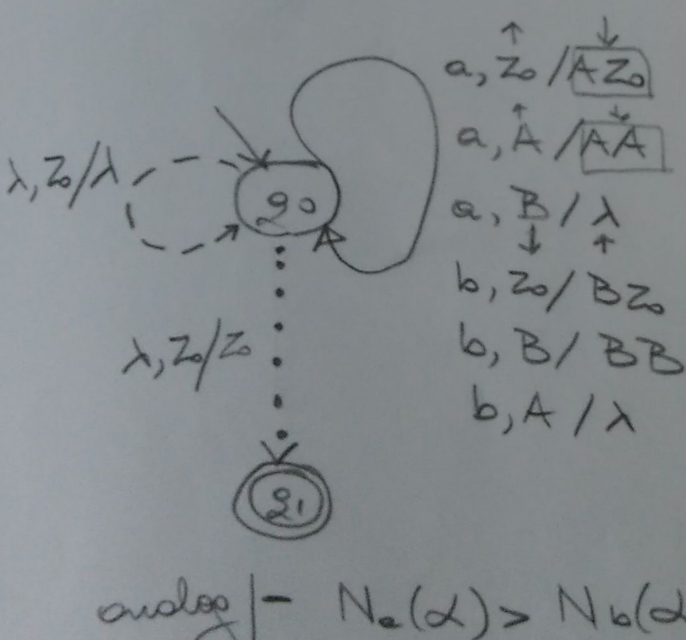
- fie recunoaște cuvântul - dacă nu mai sunt simboluri în cuvântul de intrare
- fie se blochează - dacă mai sunt simboluri în cuvântul de intrare

ex: a^2b^3a $\quad (q_0, \underline{a}^2b^3a, Z_0) \vdash (q_0, \underline{a}b^3a, \underline{A}Z_0)$

$\vdash (q_0, b^3a, \underline{A}AZ_0) \vdash (q_0, b^2a, AZ_0) \vdash (q_0, ba, Z_0)$

$\vdash (q_0, a, BZ_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0) \vdash (q_1, \lambda, Z_0)$ $\quad \underline{q_1 \in F}$

$\vdash (q_0, \lambda, \underline{\lambda})$



Obs se acceptă și λ

$(q_0, \lambda, Z_0) \vdash (q_0, \lambda, \lambda)$

$\vdash (q_1, \lambda, Z_0)$

analog
- $N_a(\alpha) > N_b(\alpha)$ → pe stivă rămân 'A'-uri (cel puțin unul) pe care le vom scoate
- $N_b(\alpha) \geq N_a(\alpha)$ → pe stivă rămân 'B'-uri (posibil niciunul)
- $N_a(\alpha) = N_b(\alpha) + 2$ → pe stivă 'AA' pe care le scoatem

T. $\mathcal{L}(APD) = \mathcal{L}(CFG)$

Limbajele recunoscute de automatele push-down (stivă) sunt limbajele generate de gramaticile independente de context ($\mathcal{G}_2$)

$\Downarrow$

pt $\forall\, G \in CFG \Rightarrow \exists\, A$ APD ai $L(G) = L(A)$

$\boxed{Alg}$ $G = (N, T, S, P)$ $\quad A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, unde $Q = \{q_0\}$, $\Sigma = T$, $\Gamma = N \cup T$, $Z_0 = S$

Idee

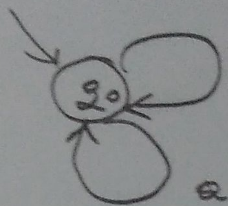
- dacă vf stivei e neterminal $\longrightarrow$ se pune în stivă membrul drepta al unei producții (se înlocuiește neterminalul cu membrul drepta al unei producții $\Rightarrow$ se <u>simulează derivarea</u> pe automat) !

  iese ↑ (neterminal), intră ↓ (în stivă)
- dacă vf stivei e terminal $\rightarrow$ verific dacă s-a obținut simbolul curent din cuvântul de intrare
  - dacă - da - se elimina din stivă (e recunoscut)
  - nu - se blochează $\rightarrow$ s-a produs alt cuvânt

!

$$\delta(q_0, \lambda, A) = \{(q_0, \alpha) \mid A \to \alpha \in P\} \quad \forall A \in N$$

$$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \lambda)\} \quad \forall a \in T$$



$\lambda, A / \alpha \quad \forall A \to \alpha \in P$

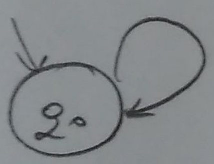
$a, a / \lambda \quad \forall a \in T$

Ex: pt G $\quad S \to aSb \mid ab \quad$ construiți APD A echivalent $(L(G) = L(A))$

ex: pt a^2b^2

$$(q_0, a^2b^2, \underline{S}) \begin{cases} \vdash (q_0, a^2b^2, ab) \vdash (q_0, ab^2, b) \not\vdash \\ \vdash (q_0, a^2b^2, aSb) \vdash (q_0, ab^2, \underline{S}b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdash (q_0, ab^2, a\underline{b}b) \vdash (q_0, b^2, b^2) \vdash (q_0, b, b) \vdash \underline{\underline{(q_0, \lambda, \lambda)}} \\ \vdash (q_0, ab^2, aSbb) \vdash (q_0, b^2Sb^2) \vdash (q_0, b^2, abb^2) \not\vdash \\ \qquad \vdash (q_0, b^2, aSbb^2) \not\vdash \end{cases}$$



$\lambda, S / ab \qquad S \Rightarrow ab$

$\lambda, S / aSb \qquad S \Rightarrow aSb$

$a, a / \lambda \qquad$ recunoaște a

$b, b / \lambda \qquad$ recunoaște b

Ex) Construiți APD pentru $L = \{ \alpha c \alpha^R \mid \alpha \in \{a, b\}^* \}$

Idee:

- pentru q_0
  - pentru sb curent 'a' – pun în stivă 'A'
  - pentru sb curent 'b' – pun în stivă 'B'
  - pentru sb curent 'c' → schimb starea q_1 pentru recunoașterea simbolurilor introduse în stivă

- pentru q_1 – pentru sb curent 'a' – dacă vf stivei este 'A' – îl șterg altfel blocare
  - pt sb curent 'b' – dacă vf stivei e 'B' îl șterg altfel blocare

ex: ab^2cb^2a

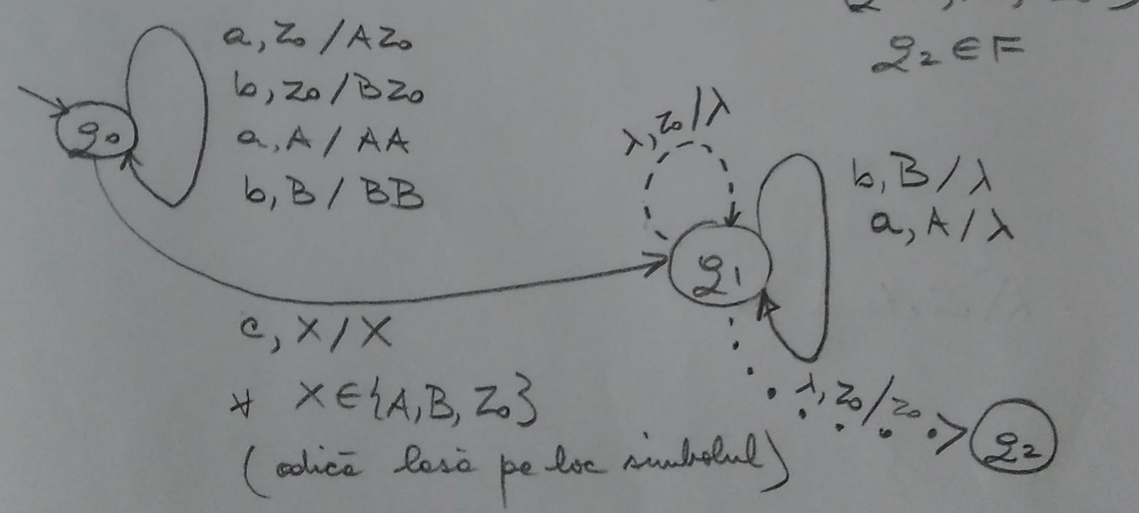
$(q_0, ab^2cb^2a, Z_0) \vdash (q_0, b^2cb^2a, AZ_0) \vdash$

$\vdash (q_0, bcb^2a, BAZ_0) \vdash (q_0, cb^2a, BBAZ_0)$

$\vdash (q_1, b^2a, B^2AZ_0) \vdash (q_1, ba, BAZ_0) \vdash$

$\vdash (q_1, a, AZ_0) \vdash (q_1, \lambda, Z_0) \begin{cases} \vdash (q_1, \lambda, \lambda) \\ \vdash (q_2, \lambda, Z_0) \end{cases}$

$q_2 \in F$



Ex | Construiți APD pentru $L = \{a^{2n} b^n \mid n \ge 1\}$

Idee 1
- la a^2 introduc A în stivă – cu st suplimentară
- la b se schimbă starea – să nu mai citească 'a'
- b șterge A

Idee 2
- a introduce A în stivă
- b șterge A^2 – cu starea – cu st suplimentară
- la primul b – se schimbă starea – pt a nu mai citi 'a'

Idee 1

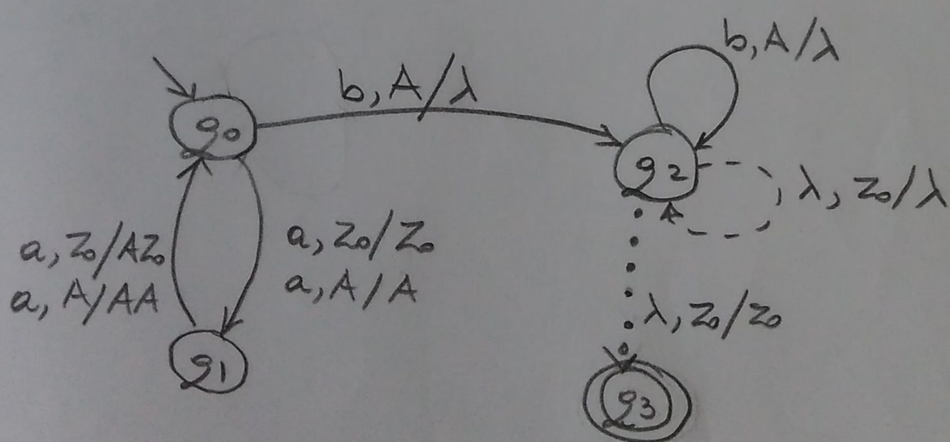
ex: $a^4 b^2$

$$(q_0, a^4b^2, Z_0) \vdash (q_1, a^3b^2, Z_0) \vdash (q_0, a^2b^2, AZ_0)$$

$$\vdash (q_1, ab^2, AZ_0) \vdash (q_0, b^2, AAZ_0) \vdash$$

$$\vdash (q_2, b, AZ_0) \vdash (q_2, \lambda, Z_0) \vdash (q_2, \lambda, \lambda)$$

$$\vdash (q_3, \lambda, Z_0)$$



$q_3 \in F$

Idee 2

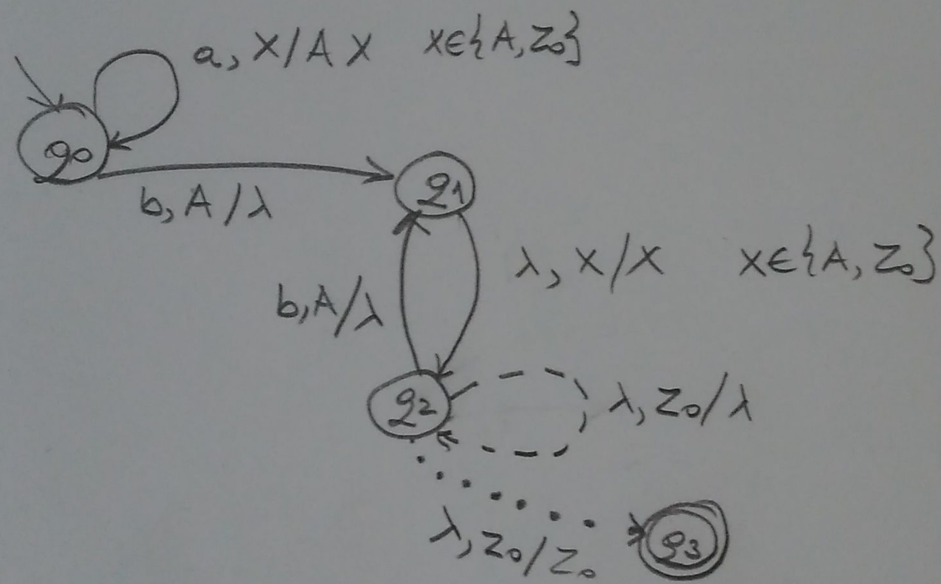
ex: a^4b^2

$(q_0, a^4b^2, Z_0) \vdash (q_0, a^3b^2, AZ_0) \vdash (q_0, a^2b^2, A^2Z_0) \vdash$

$\vdash (q_0, ab^2, A^3Z_0) \vdash (q_0, b^2, A^4Z_0) \vdash (q_1, b, A^3Z_0) \vdash$

$\vdash (q_2, b, A^2Z_0) \vdash (q_1, \lambda, AZ_0) \vdash (q_2, \lambda, Z_0)$

$\left[\begin{array}{l} \vdash (q_2, \lambda, \lambda) \\ \vdash (q_3, \lambda, Z_0) \quad \underline{q_3 \in F} \end{array}\right.$



Tema APD pentru $L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \,/\, N_a(\alpha) = 2 \cdot N_b(\alpha)\}$

Ex | Pt $L = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid N_a(\alpha) = 2 \cdot N_b(\alpha)\}$

construiți APD A ai $L(A) = L$

$L = \{aab, aba, baa, \ldots \}$

Ideea 1

- în q_0 - dacă în stivă am Z_0/B - b adaugă BB

  - dacă în stivă am Z_0/A a - adaugă A

  - dacă în stivă am AA - b - șterge AA

  (șterge A și schimbă starea, mai șterge A și revine)

  ! - dacă în stivă am AZ_0 - b - șterge A și schimbă starea = (datorie de șters un A) din care iese la citirea primului a.

exemplu aab

$(q_0, aab, Z_0) \vdash (q_0, ab, AZ_0) \vdash (q_0, b, AAZ_0)$

$\vdash (q_1, \lambda, AZ_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

exemplu aba

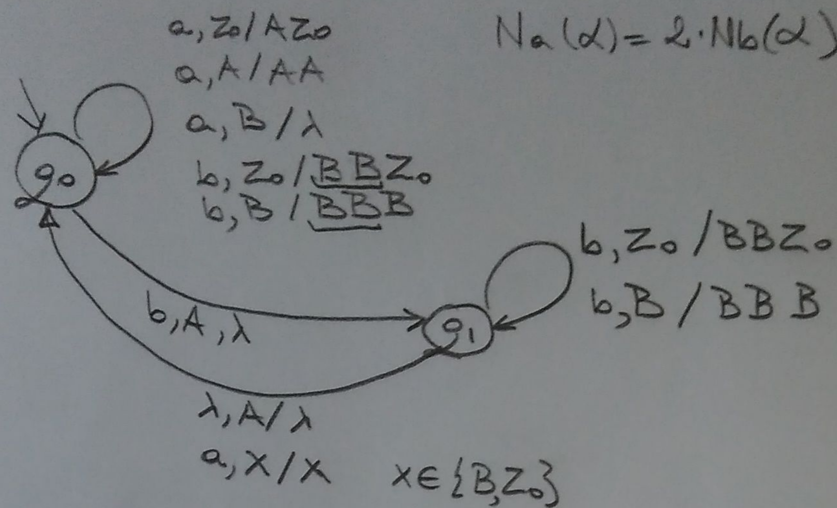
$(q_0, aba, Z_0) \vdash (q_0, ba, AZ_0) \vdash (q_1, a, Z_0)$

$\vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

exemplu baa

$(q_0, baa, Z_0) \vdash (q_0, aa, BBZ_0) \vdash (q_0, a, BZ_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

$N_a(\alpha) = 2 \cdot N_b(\alpha)$



Ideea 2

- din starea q_0
  - dacă în stivă am A sau Z_0 − a adaugă A
  - dacă în stivă am B sau Z_0 − b adaugă B
- fiecare b sau B scot:
  - AA
  - aA
  - aa
  - Aa

ex: aab

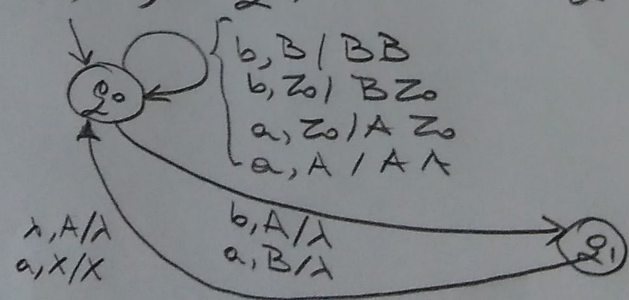
$(q_0, aab, Z_0) \vdash (q_0, ab, AZ_0) \vdash (q_0, b, AAZ_0) \vdash$
$\vdash (q_1, \lambda, AZ_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

ex: aba

$(q_0, aba, Z_0) \vdash (q_0, ba, AZ_0) \vdash (q_1, a, Z_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

ex: baa

$(q_0, baa, Z_0) \vdash (q_0, aa, BZ_0) \vdash (q_1, a, Z_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$



Analog

$N_a(\alpha) = 2\cdot N_b(\alpha) + 1$ – din starea de terminare schimb starea cu a

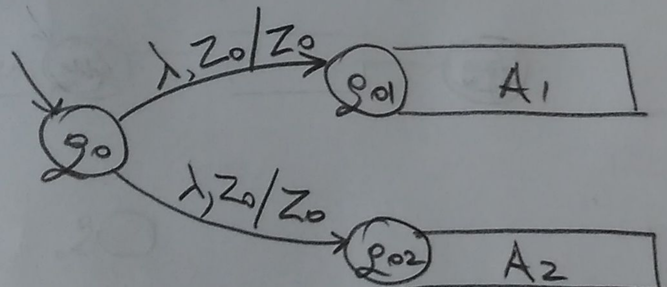
$N_a(\alpha) > 2\cdot N_b(\alpha)$ – din starea de terminare schimb în stare nouă cu a și apoi șterg oricâte a-uri

$N_a(\alpha) = 2N_b(\alpha) - 1$

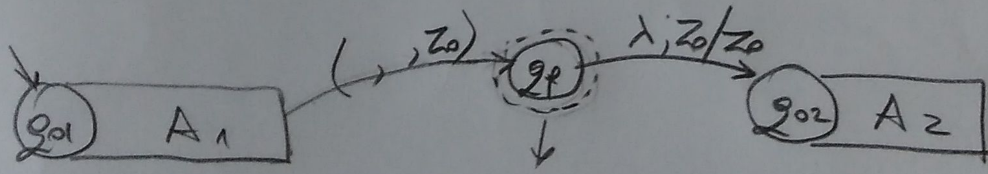
$\Downarrow$

$N_a(\alpha) + 1 = 2N_b(\alpha)$ – fie bag un simbol inițial pt a-ul lipsă
– fie echivalent ajung în starea terminală cu $\underset{b/2}{B}$ (în loc de BB)

– Reuniune de automate



– Concatenare de automate



$q_f \in F_1$

$\Downarrow$

$q_f \notin F'$

$F' = F_2$

– <u>Automat cu simboluri suplimentare</u> (în loc de stări suplimentare)

Ex: $L = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 1\}$

<u>Idee 3</u> – la 2 a introduc A (cu simbol suplimentar A_1)
– fiecare b sterge A

ex: a^4b^2

$(q_0, a^4b^2, Z_0) \vdash (q_0, a^3b^2, \underline{A_1}Z_0) \vdash (q_0, a^2b^2, \underline{A}Z_0)$

$\vdash (q_0, ab^2, A_1AZ_0) \vdash (q_0, b^2, AAZ_0) \vdash$

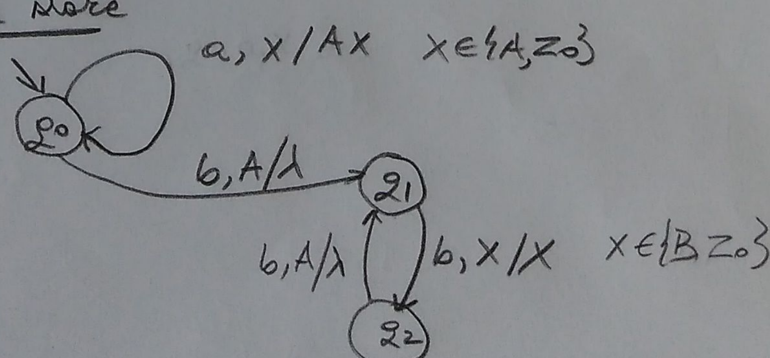
$\vdash (q_0, b, AZ_0) \vdash (q_0, \lambda, Z_0)$

<u>Exemplu</u> $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$

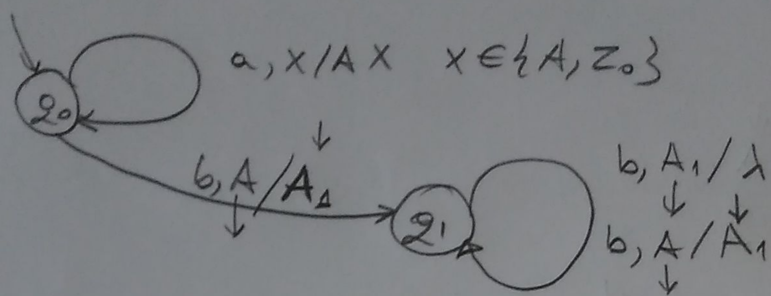
<u>Idee 1.</u>
- fiecare a introduce in stiva AA
- fiecare b sterge A

<u>Idee 2</u>
- fiecare a introduce A
- fiecare b^2 scoate un A
  — cu stare suplim
  — cu simbol suplim

<u>Idee 2</u> <u>cu stare</u>



Idee 2 cu simbol nou



Temă $L = \{a^{2n} b^{3n} \mid n \geq 1\}$