Gramatici independente de context (G_2) (CFG)

1

def $G = (N, T, S, P)$ este independentă de context (CFG) — context free grammar

$\Leftrightarrow$ P are reguli de forma $\boxed{A \to \alpha \quad \alpha \in (N \cup T)^*}$

ex: $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow a^2b^2$

$S \to aSb \;/\; \lambda$

ex: $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

$S \to aSb \;/\; ab$

ex: $L(G) = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid N_a(\alpha) = N_b(\alpha)\}$

$= \{\lambda, ab, ba, a^2b^2, \underline{abba}, b^2a^2, abab, \dots\}$

$S \to aSb \;/\; bSa \;/\; SS \;/\; \lambda$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow abSab \Rightarrow abab$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbbSa \Rightarrow abba$

ex: $L(G) = \{\alpha\alpha^R \mid \alpha \in \{a,b\}^*\}$

$S \to aSa \;/\; bSb \;/\; \lambda$

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abba$

ex: $L(G) = \{a^n b^k c^k d^n \mid k, n \geq 0\}$

$S \to aSd \;/\; S_1$

$S_1 \to bS_1c \;/\; \lambda$

$S \Rightarrow aSd \Rightarrow aaSdd \Rightarrow a^2S_1d^2 \Rightarrow a^2bS_1cd^2 \Rightarrow a^2bcd^2$

T. Limbajele independente de context (CF) sunt incluse
content free

la $\cup, \cdot, *$

$\Downarrow$

$G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$, $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ daca $G_1, G_2 \in CFG \Rightarrow \exists\, G \in CFG$, $G = (N, T, S, P)$

1

$$\boxed{L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)}$$

$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$

$T = T_1 \cup T_2$

S

$$\boxed{P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 / S_2\}}$$

2

$$\boxed{L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)}$$

$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$

$T = T_1 \cup T_2$

S

$$\boxed{P = P_1 \cup P_2 \cup \{\boxed{S \to S_1 S_2}\}}$$

3

$$L(G) = (L(G_1))^*$$

$N = N_1 \cup \{S\}$

$T = T_1$

S

$$P = P_1 \cup \{\boxed{S \to S_1 S / \lambda}\}$$

ex: $L(G) = \{a^n b^m \mid m \neq n\} =$

$\underbrace{\{a^n b^m \mid m > n\}}_{L_1} \cup \underbrace{\{a^n b^m \mid m < n\}}_{L_2}$

pentru $\boxed{L_1 : S_1 \to aS_1b / aS_1 / a}$

$S_1 \Rightarrow aS_1b \Rightarrow a^2S_1b^2 \Rightarrow a^2aS_1b^2 \Rightarrow a^4b^2$

obs 1) regulile $S_1 \to aS_1b / \underline{S_1a} / a$ nu sunt corecte

$S_1 \Rightarrow S_1a \Rightarrow aS_1ba \Rightarrow a^2ba \notin L$

obs 2 putem stabili o ordine de aplicare a regulilor:

$S_1 \to aS_1a / A$ prima care se aplică (repetat)

$A \to aA / a$ a doua care se aplică (repetat)

L_2 : $\boxed{S_2 \to aS_2b / S_2b / b}$

$S_2 \Rightarrow aS_2b \Rightarrow a^2S_2b^2 \Rightarrow a^2S_2bb^2 \Rightarrow a^2b^4$

obs 3 regulile $S_2 \to aS_2b / bS_2 / b$ nu sunt corecte

$S_2 \Rightarrow bS_2 \Rightarrow baS_2b \Rightarrow bab^2 \notin L$

obs 4 putem stabili ordinea de aplicare:

$S_2 \to aS_2b / B$

$B \to bB / b$

adaugăm $\boxed{S \to S_1 / S_2}$

ex: $L(G)=\{\underbrace{a^n b^n}\ \underbrace{c^{2k} d^{2k}} \mid n \ge 0,\ k \ge 1\} =$

$=\underbrace{\{a^n b^n \mid n \ge 0\}}_{L_1} \cdot \underbrace{\{c^{2k} d^{2k} \mid k \ge 1\}}_{L_2}$

L_1: $S_1 \to a S_1 b \,/\, \lambda$

L_2: $S_2 \to c^2 S_2 d^2 \,/\, c^2 d^2$

adaugăm $S \to S_1 \cdot S_2$

---

ex: $L(G)=\{\alpha \in \{a,b\}^* \mid N_a(\alpha) \ge N_b(\alpha)\}$

$S \to aSb \mid bSa \mid SS \mid \underline{aS} \mid \lambda$

---

ex: $L(G)=\{\alpha \in \{a,b\}^* \mid \underline{N_a(\alpha) > N_b(\alpha)}\}$

$S_e \to a S_e b \,/\, b S_e a \,/\, S_e S_e \,/\, \lambda$

$\boxed{S \to S_e S_i S_e \,/\, SS}$

$S_i \to a S_i \,/\, a$

- întâi trebuie să se poată obține și $N_a(\alpha) = N_b(\alpha) + \underline{1}$

  S_{egal} și S_{inegal} (nu neapărat $\underline{+2}$)

- necesar ca nr suplimentar de a-uri să fie dispersat

  $S \to SS$

Lema de pompare pt CFG (Teorema uvwxy)

$\boxed{\text{L limbaj independent de context (CF)}} \Rightarrow$

$\exists n_0 > 0$ a.î. $\forall \alpha \in L, |\alpha| \geq n_0$, $\exists$ descompunere a.î. $\alpha = uvwxy$

1) $|vwx| \leq n_0$
2) $|vx| \geq 1$
3) $\forall i \in \mathbb{N}$ $uv^iwx^iy \in L$

(Ipoteză => Concluzie) ≡ ($\overline{\text{Concluzie}}$ => $\overline{\text{Ipoteză}}$)

Deci:

$\forall n_0 > 0$, $\exists \alpha \in L$ $\boxed{\text{ALEG}}$!, $|\alpha| \geq n_0$, $\forall$ descompunere $\alpha = uvwxy$
1) $|vwx| \leq n_0$
2) $|vx| \geq 1$
$\overline{3}$) $\exists i_0 \geq 0$ $uv^iwx^iy \notin L$ $\boxed{\text{ALEG}}$!

$\Downarrow$

$\boxed{\text{L nu e independent de context}}$

Atenție
- se ALEGE α și i (inspirat)
- !NU se alege n_0 (se ia $\forall n_0$)
- !NU se alege descompunerea - se demonstrează pentru <u>orice</u> descompunere

Exemplul 1 demonstrați că $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$

nu este independent de context.

$\forall n_0$ Aleg $\alpha = a^{n_0^2} \Rightarrow$ $\alpha \in L$

$|\alpha| \geq n_0$

$\forall$ descompunere

$\alpha = uvwxy$

cazuri / se deduce $\Rightarrow$ nu aleg

$\Rightarrow$
$u = a^k$
$v = a^l$
$w = a^m$
$x = a^p$
$y = a^r$

$a^k \cdot a^l \cdot a^m \cdot a^p \cdot a^r = a^{k+l+m+p+r} = a^{n_0^2}$

$\Downarrow$

$k+l+m+p+r = n_0^2$

1) $|vwx| \leq n_0 \Rightarrow l+m+p \leq n_0$

2) $|vx| \geq 1 \Rightarrow l+p \geq 1$

3) Aleg $i_0 \geq 0$ ai $uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

$uv^{i_0}wx^{i_0}y = a^{k+l\cdot i_0+m+p\cdot i_0+r} = a^{k+l+m+p+r+(l+p)(i_0-1)}$

$= a^{n_0^2+(l+p)(i_0-1)}$

pt ca $n_0^2 + (l+p)(i_0-1) \neq k^2$ e necesar să-l plasez între k^2 și $(k+1)^2$

[ex: $k^2 < s < (k+1)^2 \Rightarrow s \neq l^2 \ \forall l \in \mathbb{N}$]

Aleg $\boxed{i_0 = 2}$ $\Rightarrow s = n_0^2 + l + p$

$l + p \geq 1 \Rightarrow n_0^2 + (l+p) > n_0^2$

$l + m + p \leq n_0 \Rightarrow n_0^2 + (l+p) \leq n_0^2 + n < n_0^2 + 2n + 1 = (n_0+1)^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow n_0^2 < n_0^2 + l + p < (n_0+1)^2 \Rightarrow n_0^2 + l + p$ nu e pătrat perfect

$\Rightarrow \exists\, i_0 = 2$ ai $a^{n_0^2 + (l+p)(i_0 - 1)} \notin L$ $\Longrightarrow$

$= u v^{i_0} w x^{i_0} y \notin L$

$\Rightarrow L$ nu e independent de context

Exemplul 2 demonstrați că $L = \{ a^k b^l c^m \mid k > l > m \geq 10 \}$ nu este independent de context

$\forall n_0$, Aleg $\alpha = a^{p+2} b^{p+1} c^p$ cu $p \geq \max(n_0, 10) \Rightarrow \alpha \in L$, $|\alpha| \geq n_0$

$\forall$ descompunere $\alpha = u v w x y$ | cu 1. $|vwx| \leq n_0$ 2. $|vx| \geq 1$ deci am cazurile

1. $vx = a^k$ $k \neq 0$
2. $vx = a^k b^q$ $k, q \neq 0$
3. $vx = b^q$ $q \neq 0$
4. $vx = b^q c^k$ $q, k \neq 0$
5. $vx = c^k$ $k \neq 0$
6. $vx = a^k b^{p+1} c^q$ $k, q \neq 0$ nu e posibil pt că $|vx| \leq n_0 \leq p$

Aleg i_0 pentru fiecare din cazurile 1-5

1. Aleg $i_0 = 0 \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y = a^{p+2-k}b^{p+1}c^{p}$

$k \geq 1 \Rightarrow p+2+k \not> p+1 \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

2. Aleg $i_0 = 0 \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y = a^{p+2-k}b^{p+1-q}c^{p}$

$q \geq 1 \Rightarrow p+1-q \not> p \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

3. Analog 2

4. Aleg $i_0 = 2 \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y = a^{p+2}b^{p+1+q}c^{p+k}$

$q \geq 1 \rightarrow p+2 \not> p+1+q \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

5. Aleg $i_0 = 2 \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y = a^{p+2}b^{p+1}c^{p+k}$

$k \geq 1 \Rightarrow p+1 \not> p+k \Rightarrow uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

Din 1-5 $\Rightarrow \exists i_0$ ai $uv^{i_0}wx^{i_0}y \notin L$

$\Downarrow$

L nu este independent de context

Temă: Demonstrați că $L = \{a^k b^p \mid k \geq 5, p \text{ prim}\}$ nu este independent de context