RECAPITULARE GEOMETRIE

① Stabiliți dacă $S = \{u_1 = 1,\ u_2 = x-1,\ u_3 = (x-1)^2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ este sistem de generatori ~~pt~~.

Fie ~~$ax+b \in$~~ ~~$\mathbb{R}x^2 + b\mathbb{R}$~~

~~$a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1} \in \mathbb{R}_2[X]$~~

~~cu $a, b \in \mathbb{R}_2$~~

~~$x = u_2 + u_1$~~

~~$\Rightarrow (\exists)\ \alpha, \beta, \gamma$ ai $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (x-1) + \gamma (x-1)^2 = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$~~

→ pt $\mathbb{R}_2[X]$ o bază este $\{1, x, x^2\}$

~~notez vreau să văd~~

$$1 = 1 = u_1$$

$$x = (x-1) + 1 = u_2 + u_1$$

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 1 =$$

$$= u_3 + 2(u_2 + u_1) - u_1$$

$$\mathbb{R}_2[X] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Fie $u = ax^2 + bx + c = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$b \cdot (u_2 + u_1)$ $\quad$ $c \cdot u_1$

$a \cdot (u_3 + 2u_2 + u_1)$

$$ax^2 + bx + c = a u_3 + (2a+b) u_2 + (a+b+c) u_1$$

$\Rightarrow$ este sistem de generatori

(2) Fie $u_1 = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$
$u_2 = (2,-1,1)$

Determinați $u_3 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $B = \{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ bază

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

B bază $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 5x + 5y - 5z \neq 0$
$\Leftrightarrow x + y - z \neq 0$

(3) Fie aplicația liniară $f(x,y,z) = (x+y+z,\ x-y+z,\ x-y-z)$
Scrieți matricea asociată lui f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

(4) Fie aplicația liniară $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x,y) = (x+y,\ x,\ -y)$

a) Determinați Ker f și Im f. $\leftarrow \{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \mid x' - y' + z' = 0\}$ cu dim = 2

dă pe net $\mathrm{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

(5) Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ baza canonică și forma liniară f definită prin: $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = 2$, $f(e_3) = 3$
Fie $B_1 = \{u_1 = (1\,1\,0)\ \ u_2 = (0\,1\,-1)\ \ u_3(1\,0\,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ bază

Determinați baza duală B_1^* și exprimați forma liniară f în raport cu B_1^*.

$\Rightarrow f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este de forma
$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ (\forall)\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 1 = a_1 \\ 2 = a_2 \\ 3 = a_3 \end{cases} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\Rightarrow f(u_1) = f(1,1,0) = 3$$
$$f(u_2) = f(0,1,-1) = -1$$
$$f(u_3) = f(-1,0,1) = 2$$

Notăm cu $B_1^* = \{f^1, f^2, f^3\}$ baza duală a lui B_1

$\Leftrightarrow f^i(u_j) = \delta_{ij}, \ (\forall)\ i,j = \overline{1,3}$

Fie $f^1(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow f^1(u_1) = f^1(1\,1\,0) = \alpha_1 + \alpha_2 = \delta_{11} = 1$

$f^1(u_2) = \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$f^1(u_3) = -\alpha_1 + \alpha_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow f^1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

analog $f^2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{-1}{2}x_3$

$f^3(x_1, x_2, x_3) = \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

așezate pe linii

$\Rightarrow$ noua matrice va fi: $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

observăm că $A = (A^*)^{-1}$

unde A e matricea formată cu noile baze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} *$$

⑥ În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$, cu structura canonică, se consideră subspațiile vectoriale:

$V' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$

$V'' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 4y - 2z = 0\}$

și fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație liniară definită prin:

$f(x,y,z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z) \quad (\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

a) Determinați $f(V' \cap V'')$

$$V' \cap V'' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + y - z = 0 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{6}{7}z, y = \frac{1}{7}z, z \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$f\left(\frac{6}{7}x, \frac{1}{7}x, x\right) = \left(\frac{12x}{7} + \frac{2x}{7}, \frac{6}{7}x + x, \frac{6x}{7} + \frac{3}{7}x - 2x\right) =$$

$$= \left(2x, \frac{13x}{7}, -\frac{5x}{7}\right)$$

b) Determinați sistemul omogen de ec. liniare al subspațiului vectorial $\left\{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}f(u) \mid u \in V'\right\}$

$V''' = \left\{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}f(u) \mid u \in V'\right\}$

$u \in V' \Rightarrow u = (x, y, x+y)$

$\Rightarrow f(u) = (2x + 2y, x + x + y, x + 3y - 2(x+y)) =$
$= (2x + 2y, 2x + y, -x + y)$

$$\Rightarrow V''' = \frac{1}{2}(3x + 2y, 2x + 2y, 2y) = (\underbrace{\tfrac{3}{2}x + y}_{a}, \underbrace{x + y}_{b}, \underbrace{y}_{c})$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = a \\ x + y = b \\ y = c \end{cases} \Rightarrow \quad x + c = b \qquad x = b - c$$

$$\frac{3}{2}x + c = a \qquad \frac{3}{2}(b - c) + c = a$$

$\left| 3b - 2c = 2a \right.$

d) Determinați izomorfismele liniare $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a.î. $F/_{V_1} = f/_{V_1}$

Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - matricea asociată aplicației liniare în raport cu baza canonică B_0

$F/V_1 = f/V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} F(1,0,1) = (2,2,-1) \\ F(0,1,1) = (2,1,1) \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} a_{11} + a_{13} = 2 \\ a_{21} + a_{23} = 2 \\ a_{31} + a_{33} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{12} + a_{13} = 2 \\ a_{22} + a_{23} = 1 \\ a_{32} + a_{33} = 1 \end{cases}$

Not $\begin{cases} a_{12} = \alpha \\ a_{22} = \beta \\ a_{32} = \gamma \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2-\alpha \\ 1+\beta & \beta & 1-\beta \\ -2+\gamma & \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix}$

F izomorfism $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 4\beta + 2\gamma \neq 0$

(4) Fie forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3$

a) Determinați forma biliniară simetrică asociată lui Q (not F) folosind formula de polarizare

$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1, x_2, x_3) - Q(y_1, y_2, y_3)\right] = \frac{1}{2}\left((x_1+y_1)^2 + 3(x_2+y_2)^2 + \right.$

$+ (x_3+y_3)^2 -$

(V2) metoda dedublării

$\cancel{x_1^2 \rightarrow x_1y_1 \quad x_1x_2 \, 2}$

$\cancel{x_2^2 \rightarrow x_2y_2}$

$\cancel{x_3^2 \rightarrow x_3y_3}$

$(x_1+y_1)^2 \rightsquigarrow 2x_1y_1$

$(x_2+y_2)^2 \rightsquigarrow 2x_2y_2$

$(x_3+y_3)^2 \rightsquigarrow 2x_3y_3$

$\cancel{-2x_1x_2 - 2y_1y_2} \rightsquigarrow$

$-2(x_1+x_2)(y_1+y_2) - 2x_1y_1 - 2x_2y_2 \rightsquigarrow -2x_1y_2 - 2x_2y_1$

$\hookrightarrow -2x_1y_3 - 2x_3y_1$

$-$

$-2(x_1y_2 + x_2y_1)$

$-4(x_2y_3 + x_3y_2)$

$-3(x_1y_3 + x_3y_1)$

2) $F(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$

b) Scrieți matricea asociată formei biliniare simetrice F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

$$F(x,y) = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

celelalte ∗ împart la 2

alea de pe diagonală rămân la fel

Fie $g, g_s, g_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forme biliniare

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G_s = \frac{1}{2}(G + G^T)$$
$$G_a = \frac{1}{2}(G - G^T)$$

sunt matricile asociate lui g, g_s, g_a în raport cu reperul canonic.

a) Să se determine g, g_s, g_a

$$G_s = \frac{1}{2}(G + G^T) = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$G_a = \cancel{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \cancel{2x_1y_1 - x_2y_2 - 2x_3y_3}$
$2x_1y_1 + x_1y_2 -$
$- x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 -$
$- x_3y_2 - 2x_3y_3$

$g_s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g_s(x, y) = 2x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 -$
$- x_3y_2 - 2x_3y_3$

$g_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g_a(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$

b) Fie Q forma pătratică asociată lui G_s. Să se aducă la o formă canonică. Este pozitiv definită?

Metoda Gauss

$$Q(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_3x_2$$
$$= 2x_1^2 - (x_2^2 + 2x_3x_2 + x_3^2) - x_3^2$$
$$= 2x^2 - y^2 - z^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

în baza $e_1' = e_1$
$e_2' = e_2$
$e_3' = -e_2 + e_3$

signatura = (1, 2) = (nr termeni ~~poz~~, nr termeni neg)

Metoda Jacobi

$$G_S = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$\Delta_3 = \cancel{-4 + 0 + 0 + 0 - 2 = -6} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(2-1) = 2$

$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{2} x_1'^2 + (-1) x_2'^2 + \cancel{(\ )} - x_3'^2$

$\Rightarrow$ signatura $(1,2)$

(8) $Q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2xz$. Q e poz. definită pt $\alpha = ?$

Q_α pozitiv definită $\Leftrightarrow \alpha x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2xz$

$2xy$

$\Downarrow$

forma canonică

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \alpha$

$\Delta_2 = \alpha$

$\Delta_3 = \alpha^2 - 4 > 0 \quad \alpha > 2$

$\Rightarrow Q_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} x^2 + y^2 + \frac{1}{\alpha} z^2$

$\frac{1}{\Delta_1} x^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} z^2$

$S(2, 1)$

determinanții din metoda lui Jacobi

~~Criteriul lui Sylvester.~~

~~Q formă pătratică. Q pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_i > 0, i = \overline{1,n}$~~

~~Q negativ definită $\Leftrightarrow (-1)^i \Delta_i > 0$~~

Cum găsesc forma canonică a unei forme pătratice?

construiesc matricea SIMETRICĂ a formei pătratice și îi găsesc matricea diagonală.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$

~~pt Q(x, y, z) = x² + y² + z² + 2xz, forma canonică este?~~

~~Q = x'² + y'² + z'²~~

(10). Fie $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$g(X,Y) = 2Tr(X\cdot Y) - Tr(X)\cdot Tr(Y),\ (\forall)\, X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

a) Să se precizeze G matricea asociată lui g în raport cu reperul canonic $R = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1E_{11} + x_2E_{12} + x_3E_{22} + x_4E_{22}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\mathbb{R}^4}{(x_1, x_2, x_3, x_4)} = x_1e_{11} + x_2e_{12} + x_3e_{21} + x_4e_{22}$$

$$X\cdot Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2y_4 \\ x_3y_1 + x_1y_3 & x_3y_2 + x_4y_4 \end{pmatrix}$$

$$2Tr(XY) = 2(\cancel{x_1y_1} + x_2y_3 + x_3y_2 + \cancel{x_4y_4})$$

$$Tr X\cdot Tr Y = (x_1 + x_4)(y_1 + y_4) = \cancel{x_1y_1} + x_1y_4 + x_4y_1 + \cancel{x_4y_4}$$

$$\Rightarrow g(X,Y) = x_1y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_4y_4$$

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Fie $Q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată lui g. Este Q pozitiv definită?

$\Rightarrow Q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_4) \to \mathbb{R}$

$$Q(X) = x_1^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_4$$

Metoda gauss

$Q(x) = (x_1 - x_4)^2 + 4x_2x_3$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 - x_4 \\ x_j' = x_j \end{cases} \Rightarrow Q(x) = x_1'^2 + 4x_2'x_3'$

$\begin{cases} x_2'' = x_2' + x_3' \\ x_3'' = x_2' - x_3' \end{cases}$

$\Rightarrow x_2' = \frac{1}{2}(x_2'' + x_3'')$

$x_3' = \frac{1}{2}(x_2'' - x_3'')$

$\Rightarrow Q(x) = x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2$ (2,1) signatura $\Rightarrow$ nu e pozitiv definită

(11) Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3$. Aduceți la o formă canonică, utilizând metoda valorilor proprii.

Valorile proprii pt: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$

$\Rightarrow V_1 = \langle (1,0,0) \rangle$
$V_2 = \langle (0,1,0) \rangle$
$V_3 = \langle (0,1,-2) \rangle$

toate au dim 1

$\Rightarrow (\exists)\ R' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,-2)\}$ a.î. matricea asociată lui Q este $G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q(x) = x_1'^2 + 4x_2'^2 - x_3'^2$

(12) Pentru $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$, forma canonică este?

matricea diagonală $\Rightarrow x^2 - y^2 + 3z^2$

jordan: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 1 - 4 = -3$

$g_0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_0(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$,

g_0 produs scalar canonic

Fie $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

a) $U^\perp = ?$

$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g((x_1, x_2, x_3)(1,1,-1)) = 0\}$

$\Rightarrow U^\perp = \langle (1,1,-1) \rangle$

$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, $\dim U = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \dim U^\perp = 1$

b) Să se afle un reper ortonormat $R = R_1 \cup R_2$ în $\mathbb{R}^3$ unde R_1 reper ortonormat în U, respectiv R_2 reper ortonormat în $U^\perp$

$U = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

$x_1 \underbrace{(1,0,1)}_{f_1} + x_2 \underbrace{(0,1,1)}_{f_2}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \{f_1, f_2\} \text{ } \cancel{\text{bază}} \text{ SG pt } U \\ \dim U = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \{f_1, f_2\}$ bază în U

aplic POGS $\Rightarrow \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\}$

pt $U^\perp$ știu $(1,1,-1)$.

aplic POGS $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

$\Rightarrow R = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\}$

reper ortonormat în $\mathbb{R}^3$.

(3) (14) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid Au = 0\}$

$\langle u, w \rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 + u_4 w_4$, $L^\perp = ?$

$L = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \\ u_3 - u_4 = 0 \\ u_4 - u_1 = 0 \end{array}\}$ $\Rightarrow L = \{x(1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4\}$

$L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 u + x_2 u + x_3 u + x_4 u = 0\}$

$L^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

(15) Determinați coordonatele lui $u = (1,2,3)$ în baza

$B' = \{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\}$

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

$\Rightarrow \langle u, e_1 \rangle = u_1 \langle e_1, e_1 \rangle + u \langle e_2, e_1 \rangle + u_3 \langle e_3, e_1 \rangle = u_1$

$u_1 = \langle u, e_1 \rangle$

analog $u_2 = \langle u, e_2 \rangle$

$u_3 = \langle u, e_3 \rangle$

$\Rightarrow u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \langle u, e_3 \rangle e_3$

$u_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}, u_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}, u_3 = 0$

$\Rightarrow [u]_{B'} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

(16) În $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$ se consideră vectorii $f_1 = (2,2,1)$
$f_2 = (-2,-1,2)$

a) calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre f_1 și f_2

$\|f_1\| = \sqrt{9} = 3$

$\|f_2\| = \sqrt{9} = 3$

$\cos\theta = \frac{\langle f_1, f_2 \rangle}{\|f_1\| \|f_2\|} = \frac{-4 - \cancel{2} + \cancel{2}}{9}$

MAT

Determinați $f_3 \subset E_3$ perpendicular pe f_1, f_2

$f_3 = (\alpha, \beta, \gamma) \in E_3$ a.î. $f_3 \perp f_1$ $\Leftrightarrow$ $\langle f_3, f_1 \rangle = 0$

$f_3 \perp f_2$ $\qquad \langle f_3, f_2 \rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta + \cancel{2}2\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\alpha = -\beta$

$\Rightarrow f_3 = (1, -1, 0)$

(14) Fie $E_3 = (\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, \langle , \rangle)$. Determinați suplimentul ortogonal al următoarelor spații vectoriale:

a) $U = \langle (0,0,1), (1,1,0) \rangle$

suplimentul ortogonal:

$U^\perp = \{ y \in E \mid y \perp x \ (\forall) x \in U \}$

dacă $U \oplus U^\perp = E \Rightarrow U^\perp$ suplimentul ortogonal al lui U

$$U^\perp = \left\{ y \in E \;\middle|\; \begin{array}{l} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$ $c = 0$

$a + b = 0$

$\Rightarrow U^\perp = \cancel{\{} \langle (1, -1, 0) \rangle$ - suplimentul ortogonal

b) $V = \langle (1,2,3) \rangle$

$V^\perp = \{ \cancel{x}\, y \in E \mid a + 2b + 3c = 0 \}$

$V^\perp = \{ \langle (a, b, \frac{a+2b}{-3}) \rangle \cancel{\in E} \}$

(18) Stabiliți dacă următoarele aplicații liniare sunt transformări ortogonale:

a) $T : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$

$T(e_1) = e_1$

$T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3$

$T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$

❗ Un endomorfism $T : E \to E$ este transformare ortogonală dacă matricea asociată A are propr.: $\left| \begin{array}{l} A^t \cdot A = I_n \\ \dim_{\mathbb{R}} E = n \end{array} \right.$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$