MATRICE ȘI MORFISME ORTOGONALE

Matrice ortogonală: $S^t S = I_n$

morfism ortogonal: $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ sau are matricea asociată ortogonală

→ f ortogonal $\Leftrightarrow$ $\|f(u)\| = \|u\|$ (păstrează norma)

→ V spațiu vectorial real de dimensiune finită
$f \in End(V)$
| f injectiv $\Leftrightarrow$ f surjectiv $\Leftrightarrow$ f bijectiv

→ f endomorfism ortogonal al unui spațiu euclidian $\Rightarrow$ f bijectiv

→ V spațiu euclidian
$\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$
| $f \in O(V) \Leftrightarrow f$ endomorfism ortogonal
$\Updownarrow$
$M_B(f) \in O_n(\mathbb{R})$ pt B bază ortonormată a spațiului V

→ ~~aut~~ endomorfism autoadjunct : $\langle f(u), w \rangle = \langle u, f(w) \rangle$

→ $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu euclidian finit dimensional
$f \in End(V)$
B bază ortonormată a lui V
$M_B(f) = S$
| f autoadjunct $\Leftrightarrow$ $S = S^t$

unghiul dintre 2 vectori: $\dfrac{\langle f_1, f_2 \rangle}{\|f_1\| \|f_2\|}$

unghiul dintre 2 drepte: $\dfrac{\langle u, u' \rangle}{\|u\| \cdot \|u'\|}$

$L_1 = g_1 + \langle u_1 \rangle$
$L_2 = g_2 + \langle u_2 \rangle$

distanța dintre 2 drepte: $\dfrac{(g_1\ g_2,\ u_1,\ u_2)}{\|u_1 \times u_2\|} = \dfrac{(g_2 - g_1,\ u_1,\ u_2)}{\|u_1 \times u_2\|}$

RECAPITULARE GEOMETRIE

TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM

$f: V \to W$ morfism

$$\Rightarrow \frac{V}{\operatorname{Ker} f} \cong \operatorname{Im} f$$

TEOREMA I DE IZOMORFISM

$$\frac{V/X}{U/X} \cong \frac{V}{U}, \text{ cu } X \subset U, \ U \subset V$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$\Rightarrow$ rang $= 2$

TEOREMA II DE IZOMORFISM

$$\frac{U+X}{\cancel{X}U} \cong \frac{X}{X \cap U} \quad \text{cu} \quad \cancel{X}U, X \subset V$$

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X$$

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

SISTEM COMPATIBIL $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^e$

$$D = C^{-1} A C$$

matricia de trecere

TRECEREA UNEI FORME BILINIARE DIN BAZA B ÎN BAZA C

$$A_C = M_{C,B}^{t} \cdot A_B \cdot M_{CB}$$

matricia în baza C

matricia în baza B

matricia de trecere

ex: dacă $C = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{f_1}, \underbrace{(2,-1,2)}_{f_2}, \underbrace{(1,3,-3)}_{f_3} \}$

$$\Rightarrow \cancel{\Rightarrow} \ M_{CB} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \end{array}$$

EOREMA LUI SYLVESTER

$Q: V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $B = \{e_1, \dots e_n\}$ o bază a lui V

1) Q pozitiv definită $\Leftrightarrow$ $\Delta_i > 0$ $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$

2) Q negativ definită $\Leftrightarrow$ $(-1)^i \Delta_i > 0$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$

FORME BILINIARE

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

doar la forma pătratică e simetrică

→ F simetrică $\Leftrightarrow$ ~~baza~~ matricea simetrică