PROPRIETĂȚI

TRANSPUSA:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$
2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4) $(A^T)^T = A$

URMA:

1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2) $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$
3) $tr(AB) = tr(BA)$
4) $tr(U^{-1} A U) = tr(A)$

INVERSA

1) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
2) $(A^{-1})^{-1} = A$
3) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

INVERSA + TRANSPUSA

6) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

NORMA $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$
3) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
4) $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$
5) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$

$d(p,q) = \|p-q\| = \cancel{\Sigma}$

DISTANȚA între p și q $\in \mathbb{R}^n$ ~~DREAPTE~~

1) $d(p,q) \geq 0$

   $d(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
2) $d(p,q) = d(q,p)$
3) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

PRODUSUL VECTORIAL

1) $u \times v \perp \langle u, v\rangle$
2) $(u, v, u \times v)$ este pozitiv
3) $\|u \times v\|$ = aria paralelogramului construit cu vectorii u și v $= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(u,v)$
4) $u \times v = 0 \Leftrightarrow u, v$ coliniari
5) $u \times v = -v \times u$
6) $(\alpha u + \beta w) \times v = \alpha\, u \times v$ $+ \beta w$

Formula dublului produs vectorial

7) $u \times v$

$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$

PRODUS MIXT

1) liniar în fiecare argument
2) $(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$
3) $(u,v,w) = -(v,u,w)$ semnul se schimbă la permutări aciclice
4) $(u,v,w) = (v,w,u)$ nu se schimbă la permutări ciclice
5) $(u,v,w) = 0 \Rightarrow u,v,w$ coplanari
6) u,v,w necoplanari $\Rightarrow |(u,v,w)|$ volumul paralelipipedului

SPAȚII DUALE

$f: V \to W$ morfism de spații vectoriale

$f^*: W^* \to V^*$ ai $f^*(w^*) = w^* \circ f$ $(\forall) w^* \in W^*$

1) $f: V \to W$ și $g: W \to U$ morfisme
$\Rightarrow (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

2) $1_V: V \to V$, $(1_V)^* = 1_{V^*}$

3) $f: V \to W$ izomorfism $\Rightarrow f^*$ izomorfism

4) $V \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(V^*) = n$

defect $(A) = n - \text{rang}(A)$

RANG

1) $\text{rang}(^tA) = \text{rang}\,A$
2) $\text{rang}\,A \le \min\{m, n\}$
3) $\text{rang}(A \cdot B) \le \min\{\text{rang}\,A, \text{rang}\,B\}$
4) $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}\,A = \text{rang}(A \cdot V)$ cu U și V inversabile

$\text{rang}\,A = \dim \langle C_1(A) \dots C_n(A) \rangle$

PRODUSUL SCALAR

1) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

2) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

3) $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

4) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \ge 0$
$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ (pozitiv definită)

5) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

SUME DIRECTE EXTERNE

1) $(u_1, \dots, u_n) + (w_1, \dots, w_n) = (u_1 + w_1, \dots u_n + w_n)$

2) $\alpha \cdot (u_1, \dots, u_n) = (\alpha u_1, \dots \alpha u_n)$

3) $q_i: V_j \to \bigoplus_{i=\overline{1,n}} V_i$

$q_i(u) = (0 \dots, u, \dots 0)$ cu u pe poziția j
q_i morfism injectiv

4) $\pi_j: \bigoplus_{i=\overline{1,n}} V_i \to V_j$, $\pi(u_1, \dots u_n) = u_i$
π_j morfism surjectiv

5) $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$