

EXAMEN GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

30.06.2020

VARIANTA 77

Fiecare problemă este notată cu 0,5 puncte. Nota este suma notelor problemelor plus un punct din oficiu. Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Care din următoarele afirmații NU sunt adevărate pentru $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ CU EXCEPȚIA

- A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- B) A, B matrice ortogonale atunci $A \cdot B$ NU este ortogonală
- C) $\text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(A)$
- D) $\text{tr}(AB - BA) = 0$

2. Considerăm $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea $A = -{}^tA$, unde tA este transpusa matricei A . Atunci

- A) $\text{tr}(A) = 2n$
- B) $\det(A) = 0$
- C) $\det(A) = \pm 1$
- D) $\text{tr}(A) = 0$

3. Considerăm $A \in O_{2n+1}(\mathbb{R})$ și morfismul $f : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, $f(v) = A \cdot v$. Atunci

- A) $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$
- B) $\dim(\text{Im}(f)) = n$
- C) $\dim(\text{Ker}(f)) = n$
- D) $\dim(\text{Im}(f)) = 0$.

Pentru problemele 4, 5, 6 considerăm pentru fiecare $n \geq 2$ matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziția (i, i) , $1 \leq i \leq n$ sunt egale cu 4, cele de pe pozițiile $(i, i + 1)$, $1 \leq i \leq n - 1$ sunt egale cu 3 iar cele de pe pozițiile $(i + 1, i)$, $1 \leq i \leq n - 1$ egale cu 1, și toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 0. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

4. Atunci:

- A) $\Delta_3 = 26$ și $\Delta_4 = 80$ B) $\Delta_3 = -80$ și $\Delta_4 = -243$ C) $\Delta_3 = 13$ și $\Delta_4 = 40$
- D) $\Delta_3 = 40$ și $\Delta_4 = 121$

5. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:

A) $\Delta_n = 3^n - 1$ B) $\Delta_n = 1 - 3^{n+1}$ C) $\Delta_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ D) $\Delta_n = \frac{3^n-1}{2}$

6. Fie A_n ca mai sus. Atunci adjuncta matricei A_3 este:

A) $A_3^* = \begin{pmatrix} -13 & 10 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ B) $A_3^* = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & 13 \end{pmatrix}$ C) $A_3^* = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

D) $A_3^* = \begin{pmatrix} -13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & -13 \end{pmatrix}$

Pentru problemele 7, 8, 9, 10 considerăm operatorul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(v) = A \cdot v$,

pentru $(\forall)v \in \mathbb{R}^4$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Fie vectorii: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ și $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\text{Ker}(f)$

B) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\text{Im}(f)$

C) $v_1 \in \text{Ker}(f)$

D) $\{v_2\}$ generează $\text{Im}(f)$.

8. Fie subspațiul $\text{Ker}(f)$, atunci:

A) $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ și are ecuația $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$

B) $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$

C) $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ și este definit de ecuațiile

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

D) $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ și este definit de ecuațiile

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

9. Fie $L_1 = \text{Ker}(f)^\perp \subset \mathbb{R}^4$, atunci

- A) $\dim(L_1) = 3$ având baza $\{ {}^t(-1, 0, 1, 0), {}^t(-1, -1, 0, 2), {}^t(0, 0, 1, -1) \}$
 B) $\dim(L_1) = 2$ având baza $\{ {}^t(-1, 0, 1, 0), {}^t(-1, -1, 0, 2) \}$
 C) $\dim(L_1) = 1$ având baza $\{ {}^t(0, 0, 1, -1) \}$
 D) $\dim(L_1) = 0$ având baza \emptyset .

10. Vectorii $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- A) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este sistem de generatori liniar-dependent pentru \mathbb{R}^4
 B) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este bază pentru \mathbb{R}^4
 C) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru \mathbb{R}^4 și este sistem liniar-dependent
 D) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru \mathbb{R}^4 și este sistem liniar-independent

Pentru problemele 11 și 12 considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este

- A) $X(X-2)(X^2-2X+1)$ B) $X(X+2)(X^2-2X+1)$
 C) $X(X+2)(X^2-1)$ D) $X(X-2)(X^2+2X+1)$

12. Fie morfismul $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dat de $f(v) = (A - I_4) \cdot v$, $(\forall) v \in \mathbb{R}^4$. $\dim(\text{Im}(f))$ este

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Pentru problemele 13 și 14 considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2\alpha xz$$

13. Forma pătratică $Q_\alpha(x, y, z)$ este pozitiv definită pentru:

- A) $\alpha > 1$ B) $\alpha > 0$ C) $\alpha < 1$ D) $\alpha \in \emptyset$

14. Pentru $\alpha = 1$ forma canonică, obținută prin metoda transformărilor ortogonale, a formei pătratice $Q_1(x', y', z')$ este

- A) $x'^2 + (1 - \sqrt{3})y'^2 + (1 + \sqrt{3})z'^2$ B) $x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$
 C) $x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + \sqrt{2}z'^2$ D) $x'^2 + (1 - \sqrt{2})y'^2 + (1 + \sqrt{2})z'^2$

entru problemele **15** și **16** considerăm dreapta $d \subset \mathbb{R}^4$ ce are ecuația
 $d : \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3+1}{0} = \frac{x_4+2}{2}$ și punctul $P = {}^t(2, 1, 0, -1)$

15. Hiperplanul H care trece prin P și are normala dreapta d are ecuația

- A)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = -1$ **B)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$
C) $2x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3$ **D)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$

16. Distanța de la punctul $Q(2, 1, 3, 1)$ la hiperplanul H din problema **15'** este

- A)** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ **B)** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **C)** $3\sqrt{6}$ **D)** $2\sqrt{6}$

17. Pentru ce valori $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuație $\alpha x^2 + y^2 - 2xy - 4\beta x + 2y - 3 = 0$ reprezintă o parabolă ?

- A)** $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ **B)** $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ **C)** $(\alpha, \beta) = (0, 1)$

- D)** $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{2})$

18. Considerăm quadrica de ecuație $x^2 - y^2 - 2pz = 0, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Intersecția quadricii date cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate este o elipsă pentru

- A)** $p = 1$ **B)** $p = -1$ **C)** $p = 2$ **D)** $p \in \emptyset$