Seminar 4 seminar 4

INFO
gr. 132–134

# Geometrie și algebră liniară

## Spații vectoriale

spatiu vectorial liniar independent / dependent
sisteme de generatori
baze

- Liniar indep. Liniar dep.
- Sist. de generatori
- Baze

**Def:** Fie $V/_K$ sp. vect.

$S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$

a) $S$ – s.v. lin. indep. dacă:

$(\forall)\ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

$\alpha_i \in K,\ i = \overline{1,m}$

b) $S$ – s.v. lin. dep. dacă

$(\exists)\ \alpha_i \in K,\ i = \overline{1,m}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_V$

nu toți nuli

**Ap. 1.** Stabiliți dacă următoarele sisteme vect. sunt liniar indep. sau liniar dependente

a) $S_1 = \{v_1 = (-1,1,1),\ v_2 = (1,-1,+1),\ v_3 = (+1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

b) $S_2 = \{v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (5,4,3)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

c) $S_3 = \{v_1 = e^x,\ v_2 = e^{-x},\ v_3 = \operatorname{sh} x\} \subset C^0(\mathbb{R})$

**Rez.** a) Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ → comb. lin. nulă, arbitrară

$\alpha_i \in \mathbb{R},\ (\forall) i = \overline{1,3}$

$\alpha_1(-1,1,1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(1,1,-1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_1 \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$ → sistem liniar omogen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\downarrow$ m. sist. $S_1$

$\det A = 4 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ sol. unică

$\Rightarrow S_1' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$
s.v. lin. indep.

b) Raționament analog

Fie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow S_2 \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$ S. Liniar Omogen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\downarrow$ m. sist. $S_2$

$\det A = 0 \Rightarrow S_2$ admite și sol. nenule

$\Rightarrow S_2' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$
s.v. lin. dep.

$\Delta_p = d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2$

$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 - \text{nec. princ.} \\ \alpha_3 = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{nec. sec.} \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = -5\lambda \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -4\lambda \end{cases} \Big| \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\lambda \\ \alpha_2 = -2\lambda \\ \alpha_3 = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$
$\alpha_3 = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$-\lambda v_1 - 2\lambda v_2 + \lambda v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

e.p.

$\lambda = -1 \Rightarrow v_1 + 2v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \rightarrow$ rel. de dep. liniară.

c). $\text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$ sinus hiperbolic

$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2\, \text{sh}\, x, \ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{v_1 - v_2 - 2v_3 = 0} \rightarrow$ Rel. de dep. lin. $\Rightarrow S_3' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset C(\mathbb{R})$
s.v. lin. dependent

Scanned with CamScanner

$\boxed{P_1}$ Fie $K^n/_K$ sp. aritmetic

$S' = \{v_1, \dots, v_m\} \subset K^n$, $A = \begin{pmatrix} \square & \square & & \square \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(K)$

a) $S'$ s.v. lin indep. $\overset{dc}{\Longleftrightarrow}$ $\text{rg} A = m \leq n$ (i.e. rg A max. posibil)

b) $S'$ s.v. lin. dep. $\overset{dc}{\Longleftrightarrow}$ $\text{rg} A \neq m$ $(m > n)$

$\boxed{T}$ Determinați valoarea parametrului real $m$ a.î. s.v. următor să fie a) liniar dependent

b) liniar independent

Sist. de generatori

Def: Fie $V/_K$ sp. vect. (finit generat)

$S' = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$

$S'$ s.n. sistem de generatori pt. sp. vect. $V/_K$

dacă: $\langle S' \rangle = V$ i.e. $(\forall)\, v \in V$, $\underline{(\exists)}\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$

a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$\boxed{A_p 1}$ Stabiliți dacă următoarele s.v. sunt sisteme de generatori pentru sp. vect. din care fac parte:

a) $S'_1 = \{v_1 = (1,1),\ v_2 = (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$

b) $S'_2 = \{v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (3,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

T c) $S'_3 = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

T d) $S'_4 = \{v_1 = 1,\ v_2 = X-1,\ v_3 = (X-1)^2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$

Rez: a) $S'_1 \subset \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$ sist. de gen $\Leftrightarrow (\forall)\, v \in \mathbb{R}^2$, $(\exists)\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

Fie $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$
vector arbitrar

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \iff (x, y) = \alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (0,1)$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$

Deci $(\exists) \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$ a.î. $(\forall)\ v = (x, y) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow S_1 = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{R}$
sist. de generatori (pt. $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$)

$\boxed{P_2}$ Fie $K^n/$ sp. aritmetic

$S' = \{v_1, \dots, v_m\} \subset K^n$, $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \square & \square & \dots & \square \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m \end{array} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(K)$

a) $S'$ - sist. de generatori pt. $K^n/K$ dc. $rg\, A = n \le m$ (i.e. $rg\, A$ = max posibil)

b) $S'$ - nu este sist. de gen. pt. $K^n/K$ dc. $rg\, A \neq n$ $(n > m)$

b) Aplicăm $P_2$:

$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \end{array} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R}) \Rightarrow rg\, A \le 2 < 3 \Rightarrow$

$\underset{P_2}{\overset{Cf.}{\Rightarrow}}$ $S'_2$ nu este sist. de gen. pt. sp. vect. $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

c), d) $\rightarrow$ temă pt. acasă.

**Def:** Fie $V/_K$ sp. vect (finit generat)

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$$

$B$ s.n. <u>bază</u> pt. sp. vect. $V/_K$ dacă $\begin{cases} 1) \ B \text{ s.v. lin. indep.} \\ 2) \ B \text{ s. de gen. pt. } V/_K \end{cases}$

$\boxed{P}$. 1) $(\forall)$ sp. vect. admite (foarte multe) baze.

2) Fie $\underset{\text{baze}}{B_1, B_2} \subset V/_K \implies \operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2$

**Def:** $\dim_K V \overset{def}{=} \operatorname{card} B, \ \underset{\text{bază arb.}}{B \subset V}$

$\boxed{P_3}$ Fie $K^n/_K$ sp. aritmetic.

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset K^n$$

$B$ bază pt. sp. vect. $K^n/_K \iff \begin{cases} 1) \ B \text{ s.v. lin. indep.} \\ 2) \ B \text{ s. de gen. pt. } K^n/_K \end{cases}$

$\iff \operatorname{rg} A = n \iff \det A \neq 0 \ (\in K^*)$

$$A \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$A = \begin{pmatrix} \Box & \Box & \dots & \Box \end{pmatrix}$$
$\quad\ v_1 \ \ v_2 \quad\ v_n$

$\boxed{Ap\ 1!}$ Fie vectorii $v_1 = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$
$v_2 = (2, -1, 1)$

Determinați $v_3 \in \mathbb{R}^3$ a.î. $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ <u>bază</u>

Rez: Aplicăm $P_3$:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\-1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$$

Considerăm: $v_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}$

bază $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow 5x + 5y - 5z \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - z \neq 0.$

Deci $(\forall)\ v_3 = (x, y, z)_{\in \mathbb{R}^3}$, unde $z \neq x + y$ este sol.

Obs: $\infty$ - infinitate de sol.

## Subspații vectoriale

Def: Fie $V/_K$ sp. vect. și $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$

$V'$ s.n. subsp. vect. al lui $V$ dacă: e închis (stabil) la adunarea vect. și la înmulțirea cu scalari

i.e. $\left[\begin{matrix} (\forall)\ v_1, v_2 \in V' \Rightarrow v_1 + v_2 \in V' \\ (\forall)\ \alpha \in K, v \in V' \Rightarrow \alpha v \in V' \end{matrix}\right]$

$\boxed{P}$ $V' \subseteq V$

ssp. vect. $\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} (\forall)\ v_1, v_2 \in V' \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V' \\ \alpha_1, \alpha_2 \in K \end{matrix}\right]$

Exemple: ① $\{0_V\}$, $V \subseteq V$ ssp. vect. improprii

② $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ ssp. vect.

③ Fie $V/_K$ sp. vect.

$W \subseteq V$

submulț. $\not\ni 0_V \Rightarrow W$ nu este subsp. vect.

---

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie $\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}$ sp. vect. real

$$S(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \ (\forall)\, i = \overline{1,m}\}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad m \le n, \quad rg\, A = m$$

Dem. că: $S'(A) \subset \mathbb{R}^n$ ssp. vect. $(\dim_{\mathbb{R}} S'(A) = n - m)$

Sol: Fie $x, y \in S'(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,m}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\alpha x_j + \beta y_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0$$

$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S'(A) \Rightarrow S'(A) \subset \mathbb{R}^n$ ssp. vect.

$$\dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - m = n - rg\, A \ (\text{cogA})$$

Consecințe:

1) $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$

- $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $\mathbb{R}^2$ ssp. vect. triviale (improprii) $\to$ 0, resp. 2-dim.
- $d = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ ssp. vect. 1-dim (dr. vect $\ni 0_{\mathbb{R}^2}$)

$rg\,(a_1\ a_2) = 1$ (i.e. $a_1^2 + a_2^2 > 0$)

2) $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

- $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathbb{R}^3$ ssp. vect. improprii (de dim. 0, resp. 3)
- $d = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \end{cases}, \ rg\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2 \right\} \underset{\text{ssp. vect. 1-dim}}{\subset} \mathbb{R}^3$

(dr. vect. $\ni 0_{\mathbb{R}^3}$)

- $P = \{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0, \ rg(a_1\ a_2\ a_3)=1 \} \underset{\text{ssp. vect. 2-dim}}{\subset} \mathbb{R}^3$

(plan vect. $\ni 0_{\mathbb{R}^3}$)

$\boxed{Ap1}$ Fie sp. vect. $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ și $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$

a) Stabiliți dacă $U \underset{\text{ssp. vect.}}{\subset} \mathbb{R}^3$

b) Determinați $\dim_{\mathbb{R}} U = ?$

Rez a) Fie $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 = (x_1,y_1,z_1), \ x_1+2y_1+3z_1=0$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ $\quad v_2 = (x_2,y_2,z_2), \ x_2+2y_2+3z_2=0$

Ar. că: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\underbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}_{x}, \underbrace{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}_{y}, \underbrace{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}_{z})$$

$$x+2y+3z = \alpha_1x_1+\alpha_2x_2 + 2(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2) + 3(\alpha_1z_1+\alpha_2z_2) =$$

$$= \alpha_1(\underbrace{x_1+2y_1+3z_1}_{\overset{\shortparallel}{0}}) + \alpha_2(\underbrace{x_2+2y_2+3z_2}_{\overset{\shortparallel}{0}}) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in U$

Deci: $U \underset{\text{ssp. vect.}}{\subset} \mathbb{R}^3$

b) (V1) Folosim aplicația (teoretica) anterioară:

În cazul nostru $A = (1\ 2\ 3) \in \mathcal{M}_{(1,3)}(\mathbb{R})$

$U = S(A) \underset{\text{ssp. vect.}}{\subset} \mathbb{R}^3$ și $\dim_{\mathbb{R}} U = 3 - rg\,A = 3-1 = 2$

$\Rightarrow U \subset \mathbb{R}^3$ plan vect. ($\ni 0_{\mathbb{R}^3}$)

($V_2$) Determinăm, în mod explicit, o bază pt. $U$

Fie $v \in U$ arbitr.

$v = (x, y, z)$, $x + 2y + 3z = 0$
$\Rightarrow x = -2y - 3z$

$U \ni v = (-2y-3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-3z, 0, z)$
$= y\underbrace{(-2, 1, 0)}_{u_1} + z\underbrace{(-3, 0, 1)}_{u_2} = yu_1 + zu_2 \Rightarrow S' = \{u_1, u_2\} \subset U$ sist. de generatori

În plus, se poate arăta că $S' \subset U$ s.v. lin. indep. + sist. de gen.

$\Rightarrow \underset{\text{bază}}{S' \subset U} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} = 2$

[T] Fie $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

a) Stabiliți dacă $U \subset \mathbb{R}^3$ sp. vect.

b) Determinați $\dim_{\mathbb{R}} U$.

T. dimensiunii (Grassmann)

Fie $V/K$ sp. vect. (finit dimensional) și $V_1, V_2 \subseteq V$ sp. vect.

Atunci $\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$

$\boxed{Ap1}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$
$V_2 = \{(t,0,t) / t \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că $V_1, V_2 \underset{\text{ssp vect.}}{\subset} \mathbb{R}^3$ și precizați dimensiunile lor

b) Determinați $V_1 + V_2 = ?$

**Rez:** a) Fie $u_1, u_2 \in V_1 \Rightarrow u_1 = (x_1, y_1, 0)$, $u_2 = (x_2, y_2, 0)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, 0)$, unde $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in V_1 \Rightarrow V_1 \underset{\text{ssp. vect.}}{\subset} \mathbb{R}^3$

$V_1 \ni (x,y,0) = x e_1 + y e_2 \Rightarrow B_1 = \{e_1, e_2\} \subset V_1$ bază $\Rightarrow \dim B_1 = 2$
$x, y \in \mathbb{R}$
(plan vectorial)

Analog se arată că: $V_2 \underset{\text{ssp. vect}}{\subset} \mathbb{R}^3$ și $\dim V_2 = 1$ (dr. vect.)
$B_2 = \{(1,0,1)\} \subset V_2$ bază

$V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Aplicăm t. dimensiunii (Grassmann):
$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Obs: $V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow x = y = t = 0 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 2 + 1 - 0 = 3$
Dar: $V_1 + V_2 \underset{\text{ssp. vect.}}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ $\Big| \Rightarrow \boxed{V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3}$ suma directă
(deoarece $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$)

$\boxed{T}$ Fie $V_1 = \{(x,y,0) / x,y \in \mathbb{R}\}$
$V_2 = \{(u,0,v) / u,v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \underset{\text{ssp vect}}{\subset} \mathbb{R}^3$ și precizați $\dim V_2$

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ ($\exists$ adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 \underset{=}{=} \mathbb{R}^3$ ?)

Scanned with CamScanner

Seminar 5 seminar 5 INFO

gr. 132-134

# Geometrie și algebră liniară

**Apl** (T) Fie $V_1 = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(u, 0, v) / u, v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect. și precizați $\dim V_2$.

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

**Rez:**

a) Fie $w_1, w_2 \in V_2 \Rightarrow w_1 = (u_1, 0, v_1)$, $w_2 = (u_2, 0, v_2)$, $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, unde $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in V_2 \Rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect.

$V_2 \ni (u, 0, v) = u e_1 + v e_3$, $u, v \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow B_2 = \{e_1, e_3\}$ bază $\Rightarrow \dim V_2 = 2$ (plan vectorial)

b) T. dimensiunii (Grassmann) teorema lui Grassman

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

$V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow \begin{cases} x = u \ (\overset{not}{=} t) \\ y = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{(t, 0, 0) / t \in \mathbb{R}\}$

$= \{t e_1 / t \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle$

$\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = 1$

Avem: $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$

Așadar: $\dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$\dim(V_1+V_2)=3$

Der: $V_1+V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ssp. vect. $\Rightarrow \boxed{V_1+V_2=\mathbb{R}^3}$

! Relația $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ nu este adevărată deoarece: $V_1 \cap V_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (mai exact, $V_1 \cap V_2 = \langle e_1 \rangle$).

(T)* Fie $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \underset{\text{urma}}{Tr}\, A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

---

a) Ar. că: $V_1, V_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssp. vect.

b) Dem. că: $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

## Aplicații liniare

aplicatii liniare

(morfisme de spații vectoriale)

Def: Fie $V, W/_K$ → spații vectoriale

O aplicație $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară (sau morfism de sp. vect.) dacă:
$$\begin{cases} 1) & f(x+y) = f(x)+f(y), \\ 2) & f(\lambda x) = \lambda f(x), \end{cases} (\forall)\, x, y \in V,\ \lambda \in K \iff$$

$$\iff \left[ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), (\forall)\, x, y \in V,\ \alpha, \beta \in K \right]$$

Obs: $f(0_V) = 0_W$.

Exemple:

1) $V/_K$ sp. vect.

$0_V : V \to V$, $0_V(x) = 0$, $(\forall)\, x \in V$ (apl. nulă)

$1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$, $(\forall)\, x \in V$ (apl. identică)

2) $T_r : \mathcal{M}_n(K) \to K$, $T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (apl. urmă)

Avem: $\begin{cases} T_r(A+B) = T_r(A) + T_r(B) \\ T_r(\lambda A) = \lambda T_r(A) \end{cases}$, $(\forall)\, A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$

3) $f : \mathcal{M}_n(K) \to K^{n^2}$

$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$, $(\forall)\, A = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,n}}$

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$f_A : K^n \to K^m$, $f_A(X) = AX$

Avem: $f_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f_A(X) + f_A(Y)$, $(\forall)\, X, Y \in K^n$

$f_A(\lambda X) = A(\lambda X) = (A\lambda)X = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda f_A(X)$, $(\forall)\, X \in K^n$, $\lambda \in K$

Obs: 1) $(\exists)$ tot atâtea apl. liniare câte matrice.
2) $(\forall)$ apl. liniară e de tipul acesta.

5) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ nu e apl. liniară pt. că $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V \,/\, f(x) = 0_W\} \subseteq V$ ssp. vect.
(nucleul)

$\operatorname{Im} f = \{y \in W \,/\, (\exists)\, x \in V$ a.î. $f(x) = y\} \subseteq W$ ssp. vect.
(imaginea)

$\boxed{P}$. a) O apl. lin. $f: V \to W$ e inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

b) O apl. lin $f: V \to W$ e surj. $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

c) O apl. lin $f: V \to W$ e bij $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \\ \operatorname{Im} f = W \end{cases}$

T (rang-defect) teorema rang-defect

Fie $V, W/_K$ – 2 sp. vect. (finit dimensionate).

$f: V \to W$ apl. liniară.

Atunci: $\underbrace{\dim_K \operatorname{Ker} f}_{\text{"}def(f)} + \underbrace{\dim_K \operatorname{Im} f}_{\text{"}rg(f)} = \dim_K V$

---

$\boxed{Apl}$. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x-y, y)$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Ar. că $f$ e aplicație liniară.

b) Scrieți matricea asociată lui $f$ în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

Rez:

a)

$(V_1)$ Fie $v_1 = (x_1, y_1)$ 
$v_2 = (x_2, y_2)$ $\in \mathbb{R}^2$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Atunci: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2)) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2), \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= \alpha_1 (x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) = \alpha_1 f(x_1, y_1) + \alpha_2 f(x_2, y_2) =$

$= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

$V_2$ Scriem $f(X) = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(f. matriceală)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$

Fie: $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$
$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1) + A(\alpha_2 X_2)$$
$$= (A\alpha_1)X_1 + (A\alpha_2)X_2 = (\alpha_1 A)X_1 + (\alpha_2 A)X_2 = \alpha_1(AX_1) + \alpha_2(AX_2)$$
$$= \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2)$$ $\Rightarrow f$ apl. lin. (morf. de sp. vect.)

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\to$ m. asoc. apl. lin. $f$ în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

coloanele: $f(e_1)$, $f(e_2)$, unde $\underbrace{\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2}_{\text{b. canonică}}$

$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0)$
$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,1)$

$\boxed{\text{Apl}}$ : Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x,y) = (x+y, x, -y)$ apl. liniară.
a) Determinați $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$
b) Precizați dacă $f$ e injectivă, surjectivă, resp. bijectivă
c) Verificați t. rang-defect în acest caz.

(T) Aceleași cerințe pentru:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x-y-z)$

Rez: a) $\text{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$
(nucleul) $\quad$ " $(x,y)$

$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ Teoria S.L.O. $\Rightarrow x = y = 0$ sol. unică
$(\text{rg } A = 2)$
" $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Deci: $\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\text{Im} f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\exists)\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ a.î. } f(x,y) = (x', y', z') \}$
(imaginea)

$f(x,y) = (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' & (1) \\ x = y' & (2) \\ -y = z' \Leftrightarrow y = -z' & (3) \end{cases}$

(2)(3) în (1)
$\Leftarrow\Rightarrow y' - z' = x' \Leftrightarrow x' - y' + z' = 0$

Deci: $\text{Im} f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, x' - y' + z' = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$
ssp. vect.

b) $\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Leftrightarrow f$ injectivă
$\text{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ nu este surj
subsp. propriu
$\Rightarrow f$ nu este nici bijectivă.

c) Verificăm T. rang-defect în acest caz, i.e.

$\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$

Evident: $\dim \text{Ker} f = 0$

și

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Determinăm $\dim \text{Im} f$.

(V1) $\operatorname{rg} f = \underline{\dim(\operatorname{Im} f)} = n - \operatorname{rg} \underset{\substack{\| \\ (1\ -1\ 1)}}{A'} = 3-1=\underline{2}$

<u>sau</u>

(V2) $\operatorname{Im} f \ni (x', y', z') = (x', x'+z', z') = (x', x', 0) + (0, z', z')$

$x'-y'+z'=0 \iff y'=x'+z'$

$= x'\underbrace{(1,1,0)}_{v_1} + z'\underbrace{(0,1,1)}_{v_2} = x'v_1 + z'v_2 \Rightarrow B = \{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Im} f$

$x', z' \in \mathbb{R}$ s. de generatori

+ s.v. lin. indep.

(se verifică ușor)

$\Rightarrow B \subset \operatorname{Im} f$

<u>bază</u> $\Rightarrow$ $\underline{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$

Revenim, și observăm că:

$0+2=2$, i.e. $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$,

echivalent cu $\boxed{\operatorname{def} f + \operatorname{rg} f = 2}$.

<u>Forme liniare pe un sp. vect.</u> forme liniare pe un spatiu vectorial

<u>Dualul unui sp. vect. Baze duale</u> dualul unui spatiu vectorial baze duale

<u>Def:</u> Fie $V/_K$ sp. vect. și $f: V \to K$ o aplicație care satisface cond.: $\left[ (\forall)\ \alpha_1, \alpha_2 \in K,\ v_1, v_2 \in V \quad f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \right]$

$f$ s.n. formă liniară pe $V$ (sau funcțională liniară pe $V$)

Exemplu: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

$a_i \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$
const.

$f$ este o formă liniară

$V^* \overset{not}{=} \{ f : V \to K \ / \ f$ - formă lin. pe $V \}$

$+ : V^* \times V^* \to V^*$

$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$, $(\forall)\ v \in V$

$\cdot : K \times V^* \to V^*$

$(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$, $(\forall)\ v \in V$, $\alpha \in K$

$(V^*, +, \cdot)$ sp. vect. dual al lui $V$.

$\boxed{P}$. Fie $V/K$ sp. vect.

Atunci: $\dim V = \dim V^*$

Obs: Dacă $\underset{bază}{B = \{e_1, \dots, e_n\}} \subset V$, $\dim V = n$

$\Rightarrow B^* = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq V^*$, unde $f_i : V \to K$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$

bază (bază duală bazei $B$ din $V$), def. prin $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $(\forall)\ i, j = \overline{1,n}$

$\{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dc } i = j \\ 0, & \text{dc } i \neq j \end{cases} \}$

simbolul lui Kronecker

$\boxed{A_1 1}$ Fie $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$
baza canonică

O formă liniară $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este definită prin:

$$\begin{cases} f(e_1) = 1 \\ f(e_2) = 2 \\ f(e_3) = 3 \end{cases}$$

Fie $B_1 = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (-1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$
bază

Determinați baza duală $B_1^*$ și exprimați forma liniară $f$ în raport cu $B_1^*$.

Rez: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este de forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Avem: $\begin{cases} 1 = f(e_1) = f(1,0,0) = a_1 \\ 2 = f(e_2) = f(0,1,0) = a_2 \\ 3 = f(e_3) = f(0,0,1) = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rezultă că

$$\begin{cases} f(v_1) = f(1,1,0) = 3 \\ f(v_2) = f(0,1,-1) = -1 \\ f(v_3) = f(-1,0,1) = 2 \end{cases}$$

Notăm cu $B_1^* = \{f^1, f^2, f^3\}$ baza duală lui $B_1$.

$\Leftrightarrow f^i(v_j) = \delta_{ij}, \ (\forall)\ i,j = \overline{1,3}$

Fie $f^1(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Avem: $\begin{cases} f^1(v_1) = f^1(1,1,0) = \alpha_1 + \alpha_2 = \delta_{11} = 1 \\ f^1(v_2) = f^1(0,1,-1) = \alpha_2 - \alpha_3 = \delta_{12} = 0 \\ f^1(v_3) = f^1(-1,0,1) = -\alpha_1 + \alpha_3 = \delta_{13} = 0 \end{cases}$

$$\Leftarrow (S_1) \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S}_1 = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Deci: $f^1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

Analog, se calculează: $f^2(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$,

$f^3(x_1,x_2,x_3) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

! Obs. că matricea coord. formelor liniare ce formează baza duală $B_1^*$ (așezate pe linii), adică $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

este inversa matricii coord. vect. ce formează baza $B_1$ (așezate pe coloane),

adică $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (A^*)^{-1}$

# Geometrie si algebra liniara

## A) EXERCITII ÎN CLASA ONLINE

1) Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calculaţi detA

b) Construiţi transpusa lui A, $A^t$

c) Construiţi matricea adjunctă, $A^*$

d) Construiţi inversa matricii A, $A^{-1}$, apoi verificaţi corectitudinea rezultatului obţinut utilizând relaţia $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$, unde $I_3$ este matricea unitate cu trei linii şi trei coloane.

2) Stabiliţi dacă sistemul de ecuaţii de mai jos este compatibil, apoi calculaţi valorile necunoscutelor utilizând următoarele metode de rezolvare:
reducere, substituţie, metoda matriceală şi metoda Cramer.

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

3) Determinaţi rangul matricilor de mai jos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii liniare:

$$a) \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x - y + z + t = 1 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases};\ b) \begin{cases} 2x + y - z - t = 1 \\ x - y + 2z + t = 3 \\ x + 2y - 3z - 2t = 6 \end{cases}$$

5) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare de mai jos, utilizând metoda eliminării complete (alg. Gauss-Jordan) :

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases};\quad b) \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ x - y + 2z + t = 3 \\ x + 2y - 3z - 2t = 6 \end{cases}$$

**B) REZOLVĂRI ONLINE**

1) a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-1+2-2-1-2 = -6 \neq 0 \Rightarrow$ exista inversa lui A.

b) Matricea transpusă lui A este matricea care are drept coloane, liniile lui A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Matricea adjunctă are forma:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

unde $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}, (\forall) i, j \in \{1, 2, 3\}$, $d_{ij}$ reprezentând determinantul matricei care rămâne după ce în matricea $A^t$ au fost eliminate linia i şi coloana j.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^* = -\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Verificarea prin calcul direct că $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$ este imediată.

2. Matricea sistemului, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, este tocmai matricea pe care am întâlnit-o la exerciţiul 1). Determinantul ei a fost calculat şi a rezultat o valoare nenulă, ceea ce ne asigură că sistemul are soluţie şi aceasta este unică.
Rezolvăm sistemul prin metodele cerute:

<u>Metoda reducerii:</u> Grupăm ecuaţiile două câte două şi reducem necunoscuta z:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \; 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \;\big|\; \cdot 2 \\ 2x+y+2z=4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \; 4x+3y=6 \text{ şi } x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=0$$

Din prima ecuaţie a sistemului dat, obţinem $z=-\frac{1}{2}$.

<u>Metoda substituţiei:</u> Exprimăm necunoscuta z din prima ecuaţie şi o înlocuim în ecuaţiile doi şi trei:

$$\begin{cases} z=x+y-1 \\ x-y+x+y-1=2 \\ 2x+y+2(x+y-1)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x+y-1 \\ 2x=3 \\ 4x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=0 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Metoda matriceală:</u> Cu notaţiile:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ - matricea sistemului, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ - vectorul termenilor liberi, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - vectorul necunoscutelor, sistemul dat capătă scrierea matriceală:

$$AX=b \Rightarrow X=A^{-1}b$$

Dar, matricea $A^{-1}$ a fost calculată la exerciţiul 1, deci

$$X=A^{-1}b=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Metoda Cramer:</u> Dacă notăm $\Delta = \det A = -6$, atunci calculăm necunoscutele x, y, z din formulele:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

unde $\Delta_x$ este determinantul care se obţine înlocuind în $\Delta$ coloana corespunzătoare lui x cu termenul liber etc.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

Deci, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{2}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{1}{2}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Deoarece A este matrice pătratică de dimensiune 2 şi $\det A = 1 \neq 0$, rangul lui A va fi egal cu dimensiunea matricei, deci $\operatorname{rang} A = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece B este matrice pătratică de dimensiune 3 şi $\det B = 0$, rangul lui B va fi mai mic decât dimensiunea matricei, deci $\operatorname{rang} B < 3$

$$d_1 = 1 \neq 0;\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\ ;\ d_3 = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deci, $\operatorname{rang} B = 2$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deoarece matricea C nu este pătratică, nu mai are sens calculul detC.

$$d_1 = 1 \neq 0;\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\ ;\ d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$d'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow d_2$ este ultimul minor nenul, deci $\operatorname{rang} C = 2$.

4. a) $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ x - y + z + t = 1 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$

Sistemul are patru necunoscute şi trei ecuaţii liniare. Matricea A ataşată sistemului, matricea extinsă $\overline{A}$ şi vectorul termenilor liberi sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condiţia ca sistemul să admită soluţie este ca: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$. Calculăm, deci, rangurile celor două matrice:

Pentru $\text{rang}A$ :

$$d_1 = 1 \neq 0;\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\ ;\ d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\ \Rightarrow \text{rang}A = 3.$$

Analog, obţinem $\text{rang}\overline{A} = 3$, deci din egalitatea rangurilor celor două matrice deducem că sistemul este compatibil. Deoarece elementele determinantului $d_3$ , care dă rangul matricei A, corespund necunoscutelor x, y şi z din sistem, necunoscuta t este necunoscută secundară şi o notăm $t = \alpha, \alpha \in R$. Sistemul se rescrie:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 - \alpha \\ x - y + z = 1 - \alpha \\ 2x + y + 2z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \det.\ \text{sistem} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{aplicăm metoda Cramer.}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 1 & -1 \\ 1-\alpha & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2\alpha - 3);\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2-\alpha & -1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2(2 - 3\alpha);$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 1 & -1 & 1-\alpha \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 7 - 6\alpha.$$

Deci, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{3 - 2\alpha}{2}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{3\alpha - 2}{3}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{6\alpha - 7}{6}$.

b) $\begin{cases} 2x + y - z - t = 1 \\ x - y + 2z + t = 3 \\ x + 2y - 3z - 2t = 6 \end{cases}$

Matricea A ataşată sistemului şi matricea extinsă $\overline{A}$ sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix};\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix};$$

Calculăm rangurile celor două matrice:

Pentru $\text{rang}A$ : $d_1 = 2 \neq 0;\ d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\ ;\ d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;$

$$d_3' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}A = 2$$

Pentru $\text{rang}\overline{A}$: minorii $d_1, d_2, d_3, d_3'$ se menţin identici ca pentru calculul lui $\text{rang}A$. Apare în plus:

$$d_3'' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}\overline{A} = 3,$$

deci sistemul este incompatibil, deoarece $\text{rang}A \neq \text{rang}\overline{A}$.

5.a) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, pentru care $\det A=-6\neq 0$. Deci, sistemul de ecuaţii este compatibil determinat.

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 2\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2}\end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{3}{2}\\ y=0\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$$ este soluţia sistemului determinata prin metoda eliminarii complete (alg. Gauss-Jordan).

b) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$, iar matricea extinsă este $\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -3 & -2 & 6\end{pmatrix}$. Pentru a stabili dacă sistemul este sau nu compatibil, calculăm $\operatorname{rang}A$ şi $\operatorname{rang}\overline{A}$.

Pentru calculul $\operatorname{rang}A$ :

$$d_1=1\neq 0,\ d_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0,\ d_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0,$$

$$d_3'=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=6\neq 0\Rightarrow \operatorname{rang}A=3.$$

Un calcul similar arată că $\operatorname{rang}\overline{A}=3$, deci sistemul este compatibil datorită egalităţii rangurilor celor două matrice. Notăm $z=\alpha\in R$, necunoscută secundară. Sistemul se rescrie: $\begin{cases}2x+y+t=1+\alpha\\ x-y+t=3-2\alpha\\ x+2y-2t=6+3\alpha\end{cases}\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$ este matricea noului sistem, pentru care $\det A'=6\neq 0$. Deci, acest nou sistem are soluţie pe care o putem determina cu metoda eliminării complete (alg. Gauss-Jordan).

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & -1 & 1 & 3-2\alpha \\ 1 & 2 & -2 & 6+3\alpha \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5(1-\alpha)}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{11+5\alpha}{2} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4-\alpha}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5(\alpha-1)}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{12-\alpha}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5\alpha-9}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12-\alpha}{3} \\ y = \frac{5\alpha-9}{3} \\ t = -4 \end{cases},\ z = \alpha \in R$$ , este soluţia sistemului.

## C) PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE

1) Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 3x+2y+z-t=1 \\ 2x+3y+z+t=1 \end{cases}$$

2) Determinaţi rangul matricelor urmatoare:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii urmatoare, utilizând metoda eliminării complete (alg. Gauss-Jordan):

a) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y-3z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ ; b) $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y+3z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$ ; d) $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z-t=2 \\ x-2y-2t=-1 \end{cases}$

# <u>Geometrie si algebra liniara</u>

## <u>A) EXERCITII ÎN CLASA ONLINE</u>

1. Construiţi inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, utilizând metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan). Comparaţi această metodă de lucru cu cea din rezolvarea exerciţiului 1, seminar 6.

2. Utilizând transformări similare celor de la metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan), să se determine rangul matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

3. Rezolvaţi urmatoarele sistemele de ecuaţii liniare omogene, utilizând metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan):

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$

## B) REZOLVĂRI ONLINE

1. Construim un tablou asemănător celui de la rezolvarea sistemelor, dar de această dată în căsuţa a doua înscriem matricea unitate. Efectuăm transformările după regulile deja cunoscute, având grijă să modificăm atât elementele matricei A, cât şi pe cele ale matricei unitate. În momentul în care în prima căsuţă am obţinut matricea unitate, în căsuţa a doua am obţinut inversa matricei A.

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right\rangle \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. a) Pornim cu primul element al matricii pe poziţia pivotului:

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deci, $\text{rang}A = 3$.

b) Cu acelaşi prim element pe post de pivot, transformăm matricea B:

$$B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci, $\text{rang}B = 3$

c) Înainte de a începe transformările, permutăm linia 1 cu linia 2 în matricea C pentru a aduce pe poziţia pivotului elementul 1.

$$C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculele se opresc aici, deoarece următoarea alegere a pivotului ar trebui să fie 0. Prin urmare, $\operatorname{rang} C = 2$.

3. a) Matricea sistemului este :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ i.e. matricea de la exercitiul 2.a).

Forma esalon determinata deja este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Rangul este 3 (det$A \neq 0$) si in consecinta solutia nula este solutie unica.

Multimea solutiilor este S={(0,0,0)}.

b) Matricea sistemului este :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ i.e. matricea de la exercitiul 2.b).

Forma esalon determinata deja este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rangul este 3, x,y,z sunt necunoscutele principale iar t este necunoscuta secundara.

Obtinem:

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y-t=0 \\ z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \\ t=\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Multimea solutiilor este S={(-λ, λ, λ, λ)/ $\lambda \in \mathbb{R}$}={λ(-1,1,1,1)/ $\lambda \in \mathbb{R}$}

## C) PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE

1. Utilizând metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan), determinaţi inversele următoarelor matrice:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. Determinaţi rangul matricelor de mai jos, utilizând metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan) :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ ;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; d) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Rezolvaţi urmatoarele sistemele de ecuaţii liniare omogene, utilizând metoda eliminării complete (algoritmul Gauss-Jordan):

a) $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ ;

c) $\begin{cases} x+4y+z-2t=0 \\ 2x-5y-4z+2t=0 \\ 5x+3y-3z+4t=0 \\ 2x-\lambda y-2z=0 \end{cases}$ (Discutie dupa $\lambda$ real)

d) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+(1+\lambda)y+z+t=0 \\ x+y+(2+\lambda)z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ (Discutie dupa $\lambda$ real)

4. Sa se gaseasaca conditii necesare si suficiente pentru ca sistemul de ecuatii urmator sa aiba solutie unica:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

4'. Aceeasi problema si pentru sistemul:

$$a_ix+b_iy+c_iz=0, 1\le i\le n$$

# Geometrie si algebra liniara

## A) EXERCITII ÎN CLASA ONLINE

1. Determinaţi valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatoari(e) pentru matricele urmatoare:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. Stabiliţi dacă matricele de la exerciţiul precedent sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, precizaţi forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicaţia $T:R^3 \to R^3, T(x,y,z)=(x+2y, 2y, -2y+z)$.

a) Arataţi că T este transformare (aplicatie) liniară.
b) Scrieţi matricea asociata lui T, $A_T$.
c) Determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzatori(e) lui $A_T$.
d) Scrieţi subspaţiile proprii corespunzătoare transformării (aplicatiei) liniare T şi stabiliţi dacă aceasta este diagonalizabila.
e) Scrieţi, dacă există, matricea diagonalizatoare C şi matricea diagonală D.

B) **REZOLVĂRI ONLINE**

1. a) Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_2\right)$.

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, adică $\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$ şi obţinem rădăcinile reale

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 7,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$ : căutăm $v \in R^2$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pentru care $Av = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a+4b = -2a \\ 5a+2b = -2b \end{cases} \Rightarrow 5a + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}a, a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -\frac{5}{4}a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow v \ = a'\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = a' v_1,\ a' \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$ .

$V(\lambda_1 = -2) = sp < v_1 >$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 7$ : căutăm $v \in R^2$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pentru care $Av = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ 5a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a \\ 7b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3a+4b = 7a \\ 5a+2b = 7b \end{cases} \Rightarrow b = a,\ a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v \ = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a v_2, a \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 7$ .

$V(\lambda_2 = 7) = sp < v_2 >$.

b) Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_2\right)$.

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, de unde obţinem rădăcinile cu multipicitatile algebrice aferente:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$ : căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $Av = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = -a \\ b = -b \\ a = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}, \ a \in R^*$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a v_0$, $a \in R^*$ este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -1$.

$V(\lambda_1 = -1) = sp < v_0 >$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 1$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $Av = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = a \\ b = b \\ a = c \end{cases} \Rightarrow c = a, \quad (a,b) \in R^2 - \{(0,0)\}$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(a,b) \in R^2 - \{(0,0)\}$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 1$ sunt o combinaţie liniară de vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} si v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$V(\lambda_2 = 1) = sp < v_1, v_2 >$.

2. Studiem dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă:

valorile proprii pe care le-am obţinut sunt $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$, ambele cu ordin de multiplicitate algebrica egal cu 1 în ecuaţia caracteristică, deci $\mu_1 = \mu_2 = 1$.
Vectorii proprii generează următoarele subspaţii proprii:
$V(\lambda = -2) = sp < v_1 > \Rightarrow \dim V(\lambda = -2) = 1 = \mu_1$
$V(\lambda = 7) = sp < v_2 > \Rightarrow \dim V(\lambda = 7) = 1 = \mu_2$

Deci, A este diagonalizabila şi forma ei diagonală este

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, valorile proprii sunt

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

cu ordinele de multiplicitate $\mu_1 = \mu(\lambda = -1) = 1$ şi $\mu_2 = \mu(\lambda = 1) = 2$. Vectorii proprii generează următoarele subspaţii proprii:

$$V(\lambda = -1) = sp < v_0 > \Rightarrow \dim V(\lambda = -1) = 1 = \mu_1$$

Pentru $V(\lambda = 1) = sp < v_1, v_2 >$, dimensiunea o vom putea determina abia după ce vom studia liniar independenţa vectorilor $v_1, v_2$. Fie B matricea construită cu acesti doi vectori, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul simplu arată ca ea are rangul 2, egal cu numărul de vectori din care a fost construită. Deci, $v_1, v_2$ sunt liniar independenţi şi deci $\dim V(\lambda = 1) = 2 = \mu_2$.
Prin urmare, şi pentru cazul b) de la exerciţiul 1, matricea A este diagonalizabilă.
Forma ei diagonală este:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. a) Arătăm că T este transformare (aplicatie) liniară.
Fie $v_1, v_2 \in R^3$ şi fie $\alpha, \beta \in R$. Arătăm că

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

$$v_1, v_2 \in R^3 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ v_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha v_1, +\beta v_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

$$T(\alpha v_1, +\beta v_2) = \alpha(x_1 + 2y_1, 2y_1, -2y_1 + z_1) +$$

$$+\beta(x_2 + 2y_2, 2y_2, -2y_2 + z_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(\beta v_2)$$

Deci, aplicaţia T este aplicaţie liniară.

b) Matricea asociată aplicaţiei T in raport cu baza canonica din $R^3$ este $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Calculăm valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatori(e) lui $A_T$.
Construim polinomul caracteristic, $P(\lambda) = \det(A_T - \lambda I_2)$

$$A_T - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Deci, $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Rezolvăm ecuaţia caracteristică, $P(\lambda) = 0$, de unde obţinem rădăcinile reale:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

care sunt valorile proprii corespunzătoare matricei A, cu ordinele de multiplicitate algebrica $\mu_1(\lambda = 1) = 2$ şi $\mu_2(\lambda = 2) = 1$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

pentru care $A_T v = \lambda_1 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ 2b \\ -2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = a \\ 2b = b \quad \Rightarrow b = 0, (a,c) \in R^2 - \{(0,0)\} \\ -2b + c = c \end{cases}$$

Atunci, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(a,c) \in R^2 - \{(0,0)\}$

Deci, vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ sunt o combinaţie liniară de vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$: căutăm $v \in R^3$, v de forma $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, pentru care $A_T v = \lambda_2 v$. Înlocuim şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ 2b \\ -2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ b \in R^* \\ c = -2b \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ -2b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b v_3, b \in R, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

este forma generala a vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 2$.

d) Subspaţiile proprii sunt: $V(\lambda_1 = 1) = sp < v_1, v_2 >$ şi $V(\lambda_2 = 2) = sp < v_3 >$.

Evident, $\dim V(\lambda_2 = 2) = \dim sp < v_3 > = 1 = \mu(\lambda_2 = 2)$.

Pentru a determina $\dim V(\lambda_1 = 1)$, studiem liniar independenţa vectorilor $v_1$ şi $v_2$.

Matricea construită cu ajutorul acestor doi vectori este $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi are rangul doi, egal cu numărul de vectori din care a fost construită.

Atunci, $\dim V(\lambda_1 = 1) = 2 = \mu(\lambda_1 = 1)$.

Prin urmare, matricea $A_T$ şi implicit transformarea (aplicatia) liniara T sunt diagonalizabile.

Matricea diagonală este $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, iar matricea diagonalizatoare este

$$C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

## C) PROBLEME PROPUSE PENTRU TEMA ONLINE

1. Determinaţi valorile şi vectorii (subspatiile) proprii corespunzatoari(e) pentru matricele urmatoare:

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Stabiliţi dacă matricele de la exerciţiul precedent sunt diagonalizabile şi, în caz afirmativ, determinaţi forma lor diagonală.

3. Considerăm aplicaţia $T: R^3 \to R^3, T(x,y,z) = (x+4y, 2y+3z, y)$.

a) Aratati că T este transformare (aplicatie) liniară.
b) Scrieţi matricea asociata lui T, $A_T$.
c) Determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzatori(e) lui $A_T$.
d) Precizaţi subspaţiile proprii corespunzătoare transformării (aplicatiei) T şi stabiliţi dacă aceasta este diagonalizabila.
e) Scrieţi, dacă există, matricea diagonalizatoare C şi matricea diagonală D.
f) Verificati rezultatul obtinut.

Seminar 9

ONLINE

INFO

Gr. 132-134

# Geometrie și algebră liniară

baza canonica, diagonalizare, transformari liniare

$\boxed{\text{Apl. 1}}$ Considerăm transf. liniară

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x-y+2z,\ -x+2y-z,\ x+y+z),$$
$$(\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

a) Scrieți matricea asociată lui $f$ în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) Determinați valorile proprii și subsp. proprii coresp.

c) Verificați dacă $f$ este diagonalizabilă.

d) În caz afirmativ, scrieți matricea (forma) diagonală și baza în care se realizează.

Rez: a) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$\qquad f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Ec. caracteristică: $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \in \mathbb{R} \quad \text{valorile proprii} \quad Spec(f) = \{0, 2, 3\}$$

şi $m_a(\lambda_1) = m_a(\lambda_2) = m_a(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile algebrice}

Subspații proprii:

$$S'_\lambda : \begin{cases} (2-\lambda)x - y + 2z = 0 \\ -x + (2-\lambda)y - z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$S'_{\lambda_1} \; \{\lambda_1 = 0\} : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{sistem liniar omogen, cu 3 ec. și 3 nec.}$$

$$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \left| \begin{array}{l} x, y \text{ nec principale} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{nec. secundară} \end{array} \right.$$

$$\implies \begin{cases} 2x - y = -2\alpha \;|\cdot 2 \\ -x + 2y = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 0 \\ \boxed{z = \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}} \end{cases}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \underbrace{(-1, 0, 1)}_{\substack{\text{unit} \\ v_1}} / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Analog, rezolvând sistemele $S'_{\lambda_2}$ și $S'_{\lambda_3}$ vom obține

$$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(1, -2, 1)}_{\substack{\text{unit} \\ v_2}} / \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1, -1, 0)}_{\substack{\text{unit} \\ v_3}} / \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Deci: $\dim V_{\lambda_1} = \dim V_{\lambda_2} = \dim V_{\lambda_3} = 1$

$\Rightarrow m_g(\lambda_1) = m_g(\lambda_2) = m_g(\lambda_3) = 1$

{multiplicitățile geometrice}

Avem $\begin{cases} 1)\ m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + m_a(\lambda_3) = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \\ 2)\ m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i),\ (\forall)\ i = \overline{1,3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este diagonalizabilă, deci $(\exists)\ B \subset \mathbb{R}^3$ {bază formată din vectori proprii coresp. lui $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt liniar indep. deoarece valorile proprii sunt distincte)}

în raport cu care, matricea asociată lui $f$ are forma diagonală:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

$B = \{ v_1 = (-1, 0, 1),\ v_2 = (1, -2, -1),\ v_3 = (1, -1, 0) \}$

Suplimentar:

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{C} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & & \boxed{D = C^{-1} A_f C}\ \checkmark \end{array}$$

$C \Rightarrow$ m. de trecere de la baza canonică $B_0$ la baza $B$,

i.e. $C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$

$\boxed{Apl.2}$ Același enunț ca în apl. $\boxed{1}$ pentru transf. liniară:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z)$,
$(\forall)\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

<u>Rez</u>: a) $A_f = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_2)$

b) Polinomul caracteristic:

$$P(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

Ec. caracteristică:

$$P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow -(\lambda-2)^3 = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2}_{\text{valoare proprie}},\ \underbrace{m_a(\lambda_1) = 3}$$

$Spec(f) = \{2\}$

<u>Subspații proprii</u>:

$$S_\lambda : \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\lambda_1} \ \{\lambda_1 = 2\} : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 1 \Rightarrow$ Luăm $\left| \begin{array}{l} x \text{ nec. principală} \\ y = \alpha \\ z = \beta, \end{array} \right.$ nec. secundare

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Deci: $V_{\lambda_1} = \{(-\alpha+\beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha \underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + \beta \underbrace{(1, 0, 1)}_{v_2} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Rezultă că:

$\Rightarrow B_1 = \{v_1, v_2\} \subset V_{\lambda_1}$

sistem de gen. + sistem $\underbrace{\text{lin. indep.}}_{\text{(se verifică!)}}$ $\rightarrow$ bază $\rightarrow$ $\dim V_{\lambda_1} = 2$

i.e. $m_g(\lambda_1) = \dim V_{\lambda_1} = 2 < 3 = m_a(\lambda_1)$, deci $f$ $\boxed{\text{nu}}$ este diagonalizabilă.

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț ca în ap! $\boxed{1}$ pentru următoarele transf. liniare

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x+3y-z, -3x+5y-z, -3x+3y+z)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (6x-5y-3z, 3x-2y-2z, 2x-2y)$, $(\forall)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

c) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t, x-y+z-t, x-y-z+t)$, $(\forall)(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Ap! 3}}$ Fie $f$ transf. liniară în $\mathbb{R}^3$ dată de rotația spațiului în jurul axei $Oz$ cu un unghi $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Determinați valorile proprii și subsp. proprii corespunzătoare și interpretați geometric rezultatele obținute.

Rez: $A_f = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Downarrow$

m. asoc. rotației de $\measuredangle \frac{\pi}{3}$, în sens direct trigonometric, în jurul axei $Oz$ {de ec. $x = y = 0$}

$$\Rightarrow \underset{\{\theta = \frac{\pi}{3}\}}{A_f} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii. Rezolv ec. caract. în corpul $\mathbb{R}$.

Ec. caract. $\det(A_f - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$ singura valoare proprie reală $\Rightarrow Spec(f) = \{1\}$

$\{\lambda_2 = \overline{\lambda_3} \rightarrow$ rădăcini pur complexe $\}$

Subsp. proprii

$$S_\lambda : \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)x - \frac{\sqrt{3}}{2} y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) y = 0 \\ (1-\lambda) z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = 1} \Rightarrow S_{\lambda_1} : \begin{cases} -\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$rg(A_f - \lambda_1 I_3) = 2$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x, y \text{ nec. princ.} \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ nec. sec.} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=\alpha, \alpha\in\mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(0,0,\alpha) / \alpha\in\mathbb{R}\} = \{\alpha(0,0,1) / \alpha\in\mathbb{R}\}$

Interpretare geometrică:

Evident: $V_{\lambda_1} = Oz$, i.e. singurul subsp. propriu (invariant) este axa $Oz$ ($\equiv$ axa de rotație)

$\boxed{\text{Apl. 4}}$ În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$, cu structura canonică, se consideră subsp. vectoriale:

$V' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

$V'' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 3x - 4y - 2z = 0\}$

și fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o apl. liniară definită prin:

$$f(x,y,z) = (2x+2y,\ x+z,\ x+3y-2z),\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

a) Arătați că: $f$ nu este un izomorfism liniar al lui $\mathbb{R}^3$, dar restricția sa $f/_{V'}$ este un izomorfism între $V'$ și $V''$.

b) Determinați $f(V'\cap V'')$.

c) Determinați sistemul omogen de ec. liniare ale subsp. vect. $\{\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}f(v) / v\in V'\}$.

d) Determinați izomorf. liniar $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a.î. $F/_{V'} = f/_{V'}$.

Rez: a) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

m. asoc. lui $f$ în rap. cu baza canonică $B_0\subset\mathbb{R}^3$.

$\det A_f = 0$ $(C_1 - C_2 = C_3)$ $\Rightarrow$ $f$ nu este izomorf. liniar al lui $\mathbb{R}^3$.

Arătăm că: $f/_{V'} : V' \to V''$ izomorf. liniar

<u>Obs</u>: E suficient să arătăm că $f$ aplică o bază a lui $V'$ într-o bază a lui $V''$.

$V' \ni (x,y,z) = (x,y,x+y) = (x,0,x) + (0,y,y) = x\underbrace{(1,0,1)}_{v_1} + y\underbrace{(0,1,1)}_{v_2}$

$x+y-z=0 \iff z = x+y$

$\Rightarrow \underbrace{\{v_1, v_2\} \subset V'}_{\text{s. de gen. + s. lin. indep}} \to \boxed{\text{bază}}$

$f(v_1) = f(1,0,1) = \underbrace{(2,2,-1)}_{w_1} \in V''$

$f(v_2) = f(0,1,1) = \underbrace{(2,1,1)}_{w_2} \in V''$

$\underbrace{\{w_1, w_2\} \subset V''}_{\text{s. lin. indep. + s. de gen (se verifică!)}} \to \boxed{\text{bază}}$

Deci: $f/_{V'} : V' \to V''$ <u>izomorf. liniar</u>

b) $V' \cap V''$ $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x-4y-2z=0 \end{cases}$

$rg\left(\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}_{\Delta_p} \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}\right) = 2 \Rightarrow$ $x, y$ nec. princ.; $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ nec. sec.

$\begin{cases} x+y=\alpha \\ 3x-4y=2\alpha \\ z=\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{7}\alpha \\ y = \frac{1}{7}\alpha \\ z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$V' \cap V'' = \{\alpha(\frac{6}{7}, \frac{1}{7}, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha'(6,1,7) / \alpha' \in \mathbb{R}\}$

<u>$f(V' \cap V'')$</u> $= \{f(\alpha'(6,1,7)) / \alpha' \in \mathbb{R}\} =$ <u>$\{\alpha'(19,13,-5) / \alpha' \in \mathbb{R}\}$</u>

c) $V''' = \{\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}f(v) / v \in V'\}$

$v \in V' \Rightarrow v = (x,y,x+y),\ x,y \in \mathbb{R}$

$V''' = \{\frac{1}{2}(x,y,x+y) + \frac{1}{2}(2x+2y, 2x+y, -x+y) / x,y \in \mathbb{R}\} = \{(\overset{X}{\frac{3}{2}x+y}, \overset{Y}{x+y}, \overset{Z}{y}) / x,y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \boxed{2X - 3Y + Z = 0} \to$ sist. omogen (redus la o singură ec. lin.) de ec. lin. al lui $V'''$

d) Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to$ m. asoc. unei apl. lin. în raport cu baza canonică $B_0 \subset \mathbb{R}^3$

$F/_{V'} = f/_{V'} \iff \begin{cases} F(1,0,1) = (2,2,-1) \\ F(0,1,1) = (2,1,1) \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}+a_{13}=2 & a_{12}+a_{13}=2 \\ a_{21}+a_{23}=2 & a_{22}+a_{23}=1 \\ a_{31}+a_{33}=-1 & a_{32}+a_{33}=1 \end{cases}$

Not. $\begin{cases} a_{12} = \alpha \\ a_{22} = \beta \\ a_{32} = \gamma \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 2-\alpha \\ 1+\beta & \beta & 1-\beta \\ -2+\gamma & \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

$F$ izomorfism $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{-3\alpha + 4\beta + 2\gamma \neq 0}$

Seminar 10 — ONLINE

INFO — Gr. 132-134

# Geometrie și algebră liniară

forme biliniare, forme patratice

## ① Forme biliniare. Forme pătratice

**Def**: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ sp vectorial real, n-dimensional.
Se numește formă biliniară o aplicație $F: V\times V \to \mathbb{R}$, a.î.

$$\begin{cases} 1)\ F(\alpha x_1+\beta x_2, y) = \alpha F(x_1,y)+\beta F(x_2,y) \\ 2)\ F(x, \alpha y_1+\beta y_2) = \alpha F(x,y_1)+\beta F(x,y_2) \end{cases} \quad (\forall)\ x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V,\ (\forall)\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

(i.e. liniară în ambele argumente)

$\boxed{F(x,y) = x^T A y}$ $(\forall)\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V$ → forma matriceală

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ bază

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$

$A = (F(e_i, e_j))_{i,j=\overline{1,n}}$ — matricea asociată formei bilin. $F$, în raport cu baza $B \subset V$.

• Dacă $B \xrightarrow{C} B'$ $\Rightarrow$ $\boxed{A' = {}^tC A C}$ {formula de transf. a matricei asoc. unei f. bilin. la sch. de bază}

$C$ — matricea de trecere de la baza $B$ la baza $B'$

$A$, $A'$ — m. asoc. f. bilin. $F$ în raport cu bazele $B$, resp. $B'$.

**Def**: Forma biliniară $F: V\times V\to\mathbb{R}$ s.n. simetrică dacă:

$$F(x,y) = F(y,x),\ (\forall)\ x,y\in V$$

Pentru o formă biliniară simetrică $F: V\times V \to \mathbb{R}$ se definește forma pătratică $\left| \begin{array}{l} Q: V \to \mathbb{R}, \\ Q(x) = F(x,x), (\forall) x \in V \end{array} \right.$

<u>Formula de polarizare:</u>

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall) x, y \in V$$

$$Q(x) = F(x,x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$\boxed{Ap\ 1}$ Fie <u>forma pătratică</u> $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3,$$
$$(\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Determinați forma biliniară simetrică asociată lui $Q$ (not. cu $F$) folosind formula de polarizare.

b) Scrieți matricea asociată formei bilin. simetrice $F$, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

<u>Rez:</u> (a) $V_1$ Utilizăm formula de polarizare

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right], (\forall) \underset{(x_1,x_2,x_3)}{x}, \underset{(y_1,y_2,y_3)}{y} \in \mathbb{R}^3$$

Avem: $F(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) - Q(x_1,x_2,x_3) - Q(y_1,y_2,y_3)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1+y_1)^2 + 3(x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 - 2(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 4(x_2+y_2)(x_3+y_3) - 3(x_1+y_1)(x_3+y_3)\right.$$
$$\left. - (x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 3x_1x_3) - (y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 4y_2y_3 - 3y_1y_3)\right]$$

$$= \ldots = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$$

$V_2$ Metoda <u>DEDUBLĂRII</u>:

$x_1^2 \rightsquigarrow x_1y_1 \qquad x_1x_2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$

$x_2^2 \rightsquigarrow x_2y_2 \qquad x_2x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_2y_3 + x_3y_2)$

$x_3^2 \rightsquigarrow x_3y_3 \qquad x_1x_3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1)$

$F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$F(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - \frac{3}{2}x_1y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1$,

$(\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

b) $F(x,y) = (x_1\ x_2\ x_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

unde

$A \to$ m. asoc. formei bilin. sim. $F$, în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

aducerea la o forma canonica a unei forme patratice

## Aducerea la o formă canonică a unei forme pătratice

**Def:** Dată fiind forma pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$, spunem că $Q$ are forma canonică într-o bază $B \subset V$, dacă matricea asociată lui $Q$ în raport cu baza $B$ are forma diagonală,

i.e. $A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$Q(x) = x^T A_B x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 .$$

① Metoda Gauss (construcția de pătrate)

② Metoda Jacobi

$\boxed{P}$ Fie forma pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}\ (\forall)\ i,j = \overline{1,n}$$

Notăm: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_n = \det A$

Dacă: $\Delta_j \neq 0, (\forall)\ j = \overline{1,n}$ atunci $(\exists)\ B' \subset V$ bază a.î.:

$$Q(x)=\frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2+\dots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2,$$ unde

$x=(x_1,\dots,x_n)$
în baza $B=\{e_1,\dots,e_n\}$
şi $x=(x_1',\dots,x_n')$
în baza $B'=\{e_1',\dots,e_n'\}$

$\boxed{\text{Ap1}}$ Considerăm forma pătratică $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$Q(x)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$, $(\forall)\, x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

Să se aducă la o formă canonică forma pătratică $Q$ utilizând
a) metoda Gauss
b) metoda Jacobi

Rez: a) Matricea asociată f. pătratice $Q$ în raport cu baza canonică este:
$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3)+5x_2^2-4x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3+5x_2^2-4x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2^2+4x_2x_3-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4(x_2^2+x_2x_3)-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4\left[\left(x_2+\tfrac{1}{2}x_3\right)^2-\tfrac{1}{4}x_3^2\right]-8x_3^2=\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4\left(x_2+\tfrac{1}{2}x_3\right)^2-9x_3^2\end{aligned}$$

Efectuăm sch. de coordonate: $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\y_2=x_2+\frac{1}{2}x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

$\Rightarrow Q(x)=y_1^2+4y_2^2-9y_3^2$, $(\forall)\, x=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

coord. în raport cu noua bază de raportare.

Scanned with CamScanner

b) Avem: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ \hline -2 & 0 & -4 \end{array}\right)$ $\longrightarrow$ m. asociată lui $Q$ în baza can.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \\ \Delta_3 = \det A = -36 \end{vmatrix} \qquad \Delta_i \neq 0, \ (\forall)\, i = \overline{1,3}$$

$\boxed{P} \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$

$$Q(x) = (x_1')^2 + \frac{1}{4}(x_2')^2 - \frac{1}{9}(x_3')^2, \ (\forall)\, x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$$

coord. în raport cu noua bază $B'$ de vectori

Obs: Prin cele 2 metode (Gauss și Jacobi) se obțin pt. formele canonice coeficienți diferiți ca valoare dar nu și ca semn. (i.e. signatura formei pătratice se păstrează, este un invariant, la sch. de bază)

$\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț, ca în aplicația anterioară pentru f. pătratica $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3, \ (\forall)\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2,$$

$$(\forall)\ \begin{matrix} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{matrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Arătați că F este formă biliniară simetrică
b) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$. ($B_0$)
c) Scrieți matricea formei bilin. simetrice F în raport cu baza următoare: $B_1 = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{f_1}, \underbrace{(2,-1,2)}_{f_2}, \underbrace{(1,3,-3)}_{f_3} \} \subset \mathbb{R}^3$

d) Determinați forma pătratică Q coresp. lui F și să se aducă la o formă canonică utilizând metodele Gauss, respectiv Jacobi

Rez: a) Se demonstrează liniaritatea lui F în ambele argumente (ca la aplicații liniare) +b) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{TEMĂ}}$

Matricea asociată lui F în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}^3$ este: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ matrice simetrică $(A = {}^tA)$

$\Longrightarrow$ F - formă biliniară simetrică

c) $B_0 \xrightarrow{C} B_1$

$C$ m. de trecere de la baza canonică $B_0$ la baza arbitrară $B_1$

$A$ $\qquad \boxed{A' = C^T A C}$ (*) { formula de transf. }

m. asoc. f. bilin. sim. F în rap. cu $B_0$, resp. $B_1$

Avem: $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array}$

! $\boxed{\text{Temă}}$ Efectuați calculul lui $A'$ (după formula (*)).

## ② Spații vectoriale euclidiene:

**Def**: Fie $V/_{\mathbb{R}}$ - spațiu vectorial real și $F: V\times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită

- $F$ se numește produs scalar pe $V$.

•• Un spațiu vectorial real $V$ dotat cu un produs scalar se numește spațiu vectorial euclidian

**Exemplu**: Fie sp. vectorial real $(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$

Definim $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ (\forall)\ x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$

produsul scalar canonic

$(\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}}, <,>) \to$ spațiu vectorial euclidian

- $\|x\| = \sqrt{<x,x>}, (\forall)\ x \in V$
- $d: V\times V \to \mathbb{R}_+$,

$d(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{<y-x, y-x>}, (\forall)\ x,y \in V$

**Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz**:

În orice sp. vectorial euclidian $(E/_{\mathbb{R}}, <,>)$ are loc inegalitatea:

$$|<x,y>| \le \|x\|\ \|y\|, (\forall)\ x,y \in E.$$

"=" $\Longleftrightarrow \{x,y\}$ sistem vectorial liniar dependent (i.e. $x$ și $y$ sunt vectori coliniari)



**Procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt**:

$(\forall)\ \underbrace{\{f_1,\dots,f_n\}}_{\text{bază arbitrară}} \subset E/_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\exists)\ \underbrace{\{e_1,\dots,e_n\}}_{\text{bază ortonormată}} \subset E/_{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\overline{\{e_1,\dots,e_i\}} = \overline{\{f_1,\dots,f_i\}}, (\forall)\ i=\overline{1,n}$$

$\boxed{Ap1}$ În spațiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}, <,>)$ să se
{produsul scalar canonic}

construiască o bază ortonormată pornind de la baza:

$$B = \{f_1 = (-1,1,1),\ f_2 = (1,-1,1),\ f_3 = (1,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt (P.O.G-S)

Rez: Avem:

(V$_1$)
$$\begin{cases} e_1' = f_1 \\ e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{<f_i, e_j'>}{\|e_j'\|^2} e_j',\ (\forall)\, i=\overline{2,n} \end{cases} \to \{e_1', \dots, e_n'\} \text{ bază ortogonală}$$

$\{$i.e. $<e_i', e_j'> = 0$, $(\forall)\, 1 \le i \ne j \le n\}$

$$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|},\ (\forall)\, i=\overline{1,n} \to \{e_1, \dots, e_n\} \text{ bază ortonormată}$$

$\{$i.e. $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}\}$

$\delta_{ij}$ ↓ simbolul lui Kronecker

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i=j \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}}$$

În cazul nostru obținem:

$$\begin{cases} e_1' = f_1 = (-1,1,1) \\ e_2' = f_2 - \frac{<f_2, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' = (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2) \\ e_3' = f_3 - \frac{<f_3, e_1'>}{\|e_1'\|^2} e_1' - \frac{<f_3, e_2'>}{\|e_2'\|^2} e_2' = \end{cases} \to \text{bază ortogonală}$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \cdot 6} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) =$$

$$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

$$\begin{cases} e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \\ e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) \\ e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \end{cases} \to \text{bază ortonormată.}$$

Scanned with CamScanner

$(V_2)$ Avem: $\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle f_i, e_j \rangle e_j, \ (\forall)\ i = \overline{2,n} \end{cases}$

Prin calcul obținem:

$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}$, $e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$
$= (1,-1,1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1)$
$= (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2)$

$\|e_2'\| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

$e_2 = \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{3}(1,-1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$

$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}$, $e_3' = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2$
$= (1,1,-1) - \frac{1}{3}(-1)(-1,1,1) - \frac{1}{6}(-2)(1,-1,2)$
$= (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$

$\|e_3'\| = \sqrt{2}$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

Așadar: $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ bază ortonormată obținută prin (P.O.G-Ș) din baza dată.

! $\boxed{\text{Temă}}$ Același enunț ca în aplicația anterioară pentru baza:
$B = \{ f_1 = (1,1,1),\ f_2 = (1,1,-1),\ f_3 = (1,-1,-1) \}$



Scanned with CamScanner

Seminar 11 INFO

Gr. 132-134

ONLINE

# Geometrie și algebră liniară

## Spații vectoriale euclidiene

$\boxed{Ap1.}$ Pornind de la baze

$B = \{f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,0,1), f_3 = (1,1,0)\} \subset E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{produsul scalar canonic}}}{<,>})$,

determinați o bază ortonormată prin utilizarea procedeului de ortonormalizare Gram-Schmidt.

Rez. Reamintim $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_i = \dfrac{e_i'}{\|e_i'\|}, \text{ unde } e_i' = f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} <f_i, e_j> e_j, (\forall) i = \overline{2,n} \end{cases}$

Avem: $\|f_1\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

$$e_2' = f_2 - <f_2, e_1> e_1 = (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) =$$

$$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2,-1,1)$$

$$\|e_2'\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Rezultă $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{1}{2}(2,-1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

$$e_3' = f_3 - \underbrace{<f_3, e_1>}_{=1/2} e_1 - \underbrace{<f_3, e_2>}_{=1/6} e_2 =$$

$$= (1,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(1,1,-1)$$

$$\| e_3' \| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\| e_3' \|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3}(1,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

Verificare: $\begin{cases} \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0 \\ \| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1 \end{cases}$

adică: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, (\forall) i,j=\overline{1,3} \Leftrightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată.

În concluzie, baza ortonormată obținută prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt din baza inițială $B=\{f_1, f_2, f_3\}$ este $B' = \{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \}$

$\boxed{Ap1.}$ Considerând spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{p.s.c}{\langle , \rangle})$ și baza ortonormată $B'$ obținută în aplicația anterioară, să se determine coordonatele următorilor vectori în această bază:

a) $v = (1,2,3)$

b) $w = (-1,1,2) \rightarrow \boxed{TEMA}$

Rez: Considerăm scrierea vectorului $v$ în baza $B'$ dată:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

Atunci: $\langle v, e_1 \rangle = v_1 \overbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}^{=1} + v_2 \overbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}^{0} + v_3 \overbrace{\langle e_3, e_1 \rangle}^{0} = v_1$

$$\Rightarrow v_1 = \langle v, e_1 \rangle$$

Analog $\Rightarrow v_2 = \langle v, e_2 \rangle$

$$v_3 = \langle v, e_3 \rangle$$

Deci: $v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3$, unde $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Calculând, obținem:

$$v_1 = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}, \quad v_3 = 0$$

Deci: $[v]_{B'} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

$\boxed{A_p 1}$ În spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{\{produsul scalar canonic\}}}}{<\,,\,>})$

se consideră vectorii $f_1 = (2,2,1)$ și
$f_2 = (-2,-1,2)$.

a) Calculați $\|f_1\|$, $\|f_2\|$ și unghiul dintre $f_1$ și $f_2$.

b) Determinați un vector nenul $f_3 \in E_3$ a.î. $f_3$ să fie perpendicular pe $f_1$ și $f_2$.

c) Pentru $f_3$ obținut la punctul (b), ortonormați sistemul $\{f_1, f_2, f_3\}$ prin procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt.

Rez: a) $\|f_1\| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$

$\|f_2\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = 3$

Not: $\theta = \sphericalangle(f_1, f_2)$

Avem: $\cos\theta = \dfrac{<f_1, f_2>}{\|f_1\|\,\|f_2\|} = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right) = \pi - \arccos\left(\dfrac{4}{9}\right)$

b) Fie $f_3 = (\alpha, \beta, \gamma) \in E_3$ a.î. $\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} <f_3, f_1> = 0 \\ <f_3, f_2> = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ $\alpha, \beta$ nec. principale; $\gamma = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ nec. secundară

$\operatorname{rg} A = 2$

Rescriem sistemul:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = -\lambda \\ -2\alpha - \beta = -2\lambda \end{cases} \Big|\overset{+}{\Rightarrow} \Big| \begin{array}{l} \beta = -3\lambda \\ \alpha = \frac{5}{2}\lambda \\ \gamma = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow f_3 = \lambda\left(\frac{5}{2}, -3, 1\right),\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ (deoarece $f_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$)

Așadar, determinarea lui $f_3$ nu este unică.

Luăm $\boxed{\lambda = 2} \to f_3 = (5, -6, 2)$

(pentru ușurința rezolvării apl. la pct. c)

c) $\boxed{\text{TEMĂ}}$ Ortonormați sistemul:

$\{f_1 = (2, 2, 1),\ f_2 = (-3, -1, 2),\ f_3 = (5, -6, 2)\}$

prin <u>P.O.G-S</u>.

$\boxed{\text{Obs}}$ $\langle f_1, f_3 \rangle = \langle f_2, f_3 \rangle = 0$ (așa a fost construit $f_3$)

$\Rightarrow$ raționament <u>simplificat</u>.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $E_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ ↓ produsul scalar canonic

Determinați suplementul ortogonal al următoarelor subspații vectoriale:

a) $U = \langle \underbrace{(0,0,1)}_{u_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{u_2} \rangle = Sp\{u_1, u_2\}$

b) $V = \langle \underbrace{(1,2,3)}_{v} \rangle = Sp\{v\}$

<u>Rez</u>: <u>Reamintim</u>: Fie $(E/_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$ sp. vectorial euclidian

$U \subset E$ subspațiu vectorial

$U^{\perp} = \{y \in E \,/\, y \perp x, (\forall) x \in U\}$

s.n. complementul ortogonal al lui $U$

Dacă $U \oplus U^{\perp} = E \Rightarrow U^{\perp}$ s.n. suplementul ortogonal al lui $U$.

$\boxed{P}$ $(\forall)\ \underset{\text{subsp. vectorial}}{U \subset E} \Rightarrow (\exists)!$ suplementul ortogonal $U^{\perp}$

Revenim la rezolvarea aplicației date:

a) $U^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^3 \,/\, y \perp x, (\forall) x \in U\}$

$\underset{\text{bază}}{B = \{u_1, u_2\}} \subset U$

E suficient să verificăm rel. pe bază

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\begin{cases} y \perp u_1 \\ y \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y, u_1 \rangle = 0 \\ \langle y, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

$\Rightarrow$ $y_2, y_3$ nec principale

$y_1 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ nec secundară

$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda \\ y_2 = -\lambda \\ y_3 = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Deci $y = \lambda(1, -1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$U^{\perp} = \{\lambda(1,-1,0) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1,0) \rangle$

suplementul ortogonal al lui $U$ (ssp. vect. 1-dimensional)

b) $V^{\perp} = \{ y \in \mathbb{R}^3 / y \perp x, (\forall) x \in V \}$

$B = \{ v \} \subset V$
bază

Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a.î. $y \perp v \Leftrightarrow \langle y, v \rangle = 0$

$\Leftrightarrow y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$

Deci: $V^{\perp} = \{ \underset{(y_1, y_2, y_3)}{y} \in \mathbb{R}^3 / y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0 \}$

supl. ortogonal al lui V (este un ssp. vectorial 2-dimensional)

$\boxed{\text{Temă:}}$ Același enunț ca în aplicația anterioară pentru:

a) $U = \langle (1,2,1), (1,-1,2) \rangle$

b) $V = \langle (2,-3,1) \rangle$

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie spațiul vectorial euclidian $\mathbb{E}_3 = (\mathbb{R}^3/_{\mathbb{R}}, \underset{\text{p.s.c}}{\langle , \rangle})$,

$B_0 = \{ e_1, e_2, e_3 \} \subset \mathbb{E}_3$
bază canonică

Stabiliți dacă următoarele aplicații liniare sunt transformări ortogonale.

$\boxed{\text{TEMA}}$

a) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 \\ T(e_2) = \frac{1}{2} e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \end{cases}$$

b) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = e_1 + e_2 \\ T(e_2) = e_2 + e_3 \\ T(e_3) = e_3 + e_1 \end{cases}$$

c) $T: \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$,
$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{2}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3 \\ T(e_2) = \frac{2}{3} e_1 - \frac{1}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2 + \frac{2}{3} e_3 \end{cases}$$

Rez. $\boxed{\text{Th}}$ Un endomorfism $T: E \to E$ este transf. ortogonală $\Leftrightarrow$ A – matricea se asociată într-un reper ortonormat este matrice ortogonală (i.e. ${}^tA \cdot A = I_n$, $\dim_{\mathbb{R}} E = n$)

Rez: a) $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E_3$

bază ortonormată ($<e_i, e_j> = \delta_{ij}, (\forall) i, j = \overline{1,3}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to$$ m. asoc. endomorf. $T$ în raport cu baza canonică $B_0$.

Avem: ${}^tA \cdot A = I_3 \Rightarrow A$ m. ortogonală

Deci: $T$ este transf. ortogonală (mai exact, o rotație de $\measuredangle \frac{\pi}{3}$, în jurul axei $Ox$)

b) Raționament analog!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$ m. asoc. endm. $T$ în raport cu baza canonică $B_0$.

Dar: ${}^tA \cdot A \neq I_3 \Rightarrow A$ nu este m. ortogonală.

$\Rightarrow T$ nu este transf. ortogonală (în schimb este o transf. ciclică)

aducerea unei forme patratice la o forma canonica

Aducerea unei forme pătratice la o formă canonică

$\to$ Metoda transformărilor ortogonale (sau metoda valorilor proprii)

– constă în determinarea valorilor proprii ale matricei $A_B$ (pentru că aceasta este simetrică $\Rightarrow$ toate valorile proprii vor fi reale)

Atunci, în baza $B'$ formată din vectori proprii ortonormați (prin P.O.G-S) $Q$ are forma canonică următoare:

$$Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2,$$ unde $x = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, coord. în baza $B'$.

$\boxed{A_p 1}$ Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3, \ (\forall)\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Să se aducă $Q$ la o formă canonică utilizând:

a) metoda Gauss

b) metoda Jacobi

c) $\boxed{\text{metoda transf. ortogonale}}$

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p. $Q$ în raport cu baza canonică $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) $Q(x) = (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2^2 + 2x_2x_3) + 3x_3^2$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2 = \underbrace{(x_1')^2 - 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2}$$

Sch. de coordonate $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_2 = x_2' - x_3' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ m. asoc. f.p. $Q$ în raport cu baza $B'$.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \{e_1' = (1,0,0), e_2' = (2,1,0), e_3' = (-3,-1,1)\}$

m. de trecere de la baza $B_0$ la $B'$

b) $\begin{cases} \Delta_1 = 1 \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \\ \Delta_3 = \det A = -10 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \Delta_i \neq 0, (\forall)\ i = \overline{1,3}$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}(x_3')^2$$

$$\underline{Q(x) = (x_1')^2 - \frac{1}{2}(x_2')^2 + \frac{1}{5}(x_3')^2}, \ (\forall)\ x = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$$

$\hookrightarrow$ coord. în raport cu noua bază $B'$

c) Metoda transf. ortogonale

Determinăm valorile proprii coresp. lui A

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$

Ec. caract.: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$ valorile proprii

Subspațiile proprii:

$V_{\lambda_1} = \{\alpha \underbrace{(2,2,1)}_{v_1} / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha v_1 / \alpha \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\beta \underbrace{(-2,1,2)}_{v_2} / \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta v_2 / \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_3} = \{\gamma \underbrace{(1,-2,2)}_{v_3} / \gamma \in \mathbb{R}\} = \{\gamma v_3 / \gamma \in \mathbb{R}\}$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

bază ortogonală (i.e. $\langle v_i, v_j \rangle = 0, (\forall) 1 \le i \ne j \le 3$)

$\xrightarrow{\text{P.O. G-S}} B' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\} = \left\{\frac{1}{3}(2,2,1), \frac{1}{3}(-2,1,2), \frac{1}{3}(1,-2,2)\right\}$

bază ortonormată

Avem: $Q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \lambda_3 (x_3')^2$

$= -(x_1')^2 + 2(x_2')^2 + 5(x_3')^2$, unde $x = (x_1', x_2', x_3')$

coord. lui $x$ în raport cu baza ortonormată $B'$ formată din vectori proprii

Signatura f. pătratice se conservă, indiferent de metoda folosită pt. aducerea la o formă canonică.

$\operatorname{sgn}(Q) = \underset{\text{nr. termeni pozitivi}}{p} - \underset{\text{nr. termeni negativi}}{q} = 2 - 1 = 1$

TEMĂ Același enunț ca în apl. precedentă pentru forma pătratică $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3, (\forall) x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

Seminar 13 INFO

ONLINE Gr. 132-134

# Geometrie și algebră liniară

## Conice

---

$\boxed{Ap\,1}$ Fie conica $\Gamma$ de ecuație:

$$\overbrace{x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 - 1}^{not.\ f(x_1,x_2)} = 0$$

Să se aducă la o formă canonică conica $\Gamma$ prin izometrii

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\delta = \det A = -\frac{5}{4}$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -2 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Delta = \det A' = \frac{9}{4}$$

$\left.\begin{matrix} \delta < 0 \\ \Delta \neq 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \Gamma$ este HIPERBOLĂ (CLASIFICAREA CONICELOR)

Centrul conicii $\Gamma$ este $P_0(x_1^0, x_2^0)$, unde coord. $(x_1^0, x_2^0)$ se determină ca sol. unică a sist. de ec. liniare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

Deci: $P_0\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ - centrul conicii $\Gamma$.

Efectuăm translația $t$:

$$t\ \begin{cases} x_1' = x_1 - x_1^0 \\ x_2' = x_2 - x_2^0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{2}{5} \\ x_2' = x_2 + \frac{8}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - \frac{2}{5} \\ x_2 = x_2' - \frac{8}{5} \end{cases}$$

$$t(\Gamma):\ (x_1')^2 - 3x_1'x_2' + (x_2')^2 \underbrace{- \frac{9}{5}}_{f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\Delta}{\delta}} = 0$$

Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale lui $A$

Rezolv: $\boxed{\det(A - \lambda I_2) = 0}$, în $\mathbb{R}$.

(ec. caracteristică)

$$\iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(-\lambda + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{2}$$ valorile proprii

Determinăm subsp. proprii corespunzătoare:

$$V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \ /\ Av = \lambda_1 v \}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad Av = \lambda_1 v \iff (A - \lambda_1 I_2)v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 = 0 \iff v_1 - v_2 = 0$$

$$\implies v_1 = v_2 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,1) \ /\ \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (1,1) \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \ /\ Av = \lambda_2 v \}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad Av = \lambda_2 v \iff (A - \lambda_2 I_2)v = 0_{(2,1)}$$

$$\begin{pmatrix} -3/2 & -3/2 \\ -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -\frac{3}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 = 0 \iff v_1 + v_2 = 0$$

$$\implies \begin{cases} v_1 = -\alpha \\ v_2 = +\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda_2} = \{ \alpha(-1,+1) \ /\ \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle (-1,+1) \rangle$$

Considerăm vectorii proprii:

$$\begin{cases} f_1 = (1,1) \\ f_2 = (-1,+1) \end{cases}$$ <u>Obs</u>: $\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow f_1 \perp f_2$

Normăm vectorii $f_1, f_2$ şi obţinem un <u>reper ortonormat</u>:

$$\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} \\ e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} \end{cases} \to \begin{cases} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,+1) \end{cases}$$

Efectuăm rotaţia $r$:

$$r \begin{cases} x_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \to \text{m. rotaţie}$$

$R\,{}^tR = I_2 \to R$ m. ortogonală

$\to R^{-1} = {}^tR \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' - x_2'') \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1'' + x_2'') \end{cases}$

$$(\text{rot})(\Gamma): -\frac{1}{2}(x_1'')^2 + \frac{5}{2}(x_2'')^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \Big| : \frac{9}{5}$$

$$-\frac{(x_1'')^2}{\frac{18}{5}} + \frac{(x_2'')^2}{\frac{18}{25}} - 1 = 0$$

i.e. $-\frac{(x_1'')^2}{a^2} + \frac{(x_2'')^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $a = \sqrt{\frac{18}{5}}$, $b = \frac{\sqrt{18}}{5}$

$\nwarrow$ forma canonică a conicii $\Gamma$ obţinută prin izometrii (<u>clasif. metrică</u>)

$\boxed{\text{Temă}}$: Aceleaşi cerinţe ca în aplicaţia anterioară pentru conica:

$$\Gamma: x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 - 17 = 0$$

Cerințe suplimentare apl. 1:

• Determinați (centrul), direcțiile asimptote ale lui $\Gamma$ și ec. planului tangent la $\Gamma$ într-un pct. $P(x_1^0, x_2^0) \in \Gamma$

Rez: Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Centrul lui $\Gamma$:

$A x + B = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$P_0\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ centrul conicei $\Gamma$.

Axele (direcțiile asimptote)

$^t v A v = 0$

$$(v_1\ v_2)\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 - 3v_1v_2 + v_2^2 = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{3}{2}v_2\right)^2 - \frac{5}{4}v_2^2 = 0$$

$$\left(v_1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}v_2\right)\left(v_1 + \frac{\sqrt{5}-3}{2}v_2\right) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}v_2 \\ v_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}v_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} v = \lambda\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \\ v = \lambda\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \end{matrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Axele:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_1^1} = \frac{x_2 - x_2^0}{v_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \frac{2}{5}}{1} = \frac{x_2 + \frac{8}{5}}{1} \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{6}{5} = 0}$$

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_2^1} = \frac{x_2 - x_2^0}{v_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \frac{2}{5}}{1} = \frac{x_2 + \frac{8}{5}}{-1} \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + 2 = 0}$$

$$T_{P_0}\Gamma: x_1^0 x_1 - \frac{3}{2}(x_1 x_2^0 + x_1^0 x_2) + x_2^0 x_2 - 4 \cdot \frac{x_1 + x_1^0}{2} + 2 \cdot \frac{x_2 + x_2^0}{2} - 1 = 0$$

$\boxed{\text{Apl. 2}}$ Fie conica :

$\Gamma : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$

Clasificați din pct. de vedere metric (i.e. prin izometrii) conica dată.

Rez: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta = \det A = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = \det A' = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \Gamma$ parabolă

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \quad < \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$ valorile proprii

Subspații proprii: ① $V_{\lambda_1} = \{ v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_1 v \}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \alpha \\ v_2 = -\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_1} = \{ \alpha(1,-1) / \alpha \in \mathbb{R} \} = < \underbrace{(1,-1)}_{\text{unit } f_1} >$

$V_{\lambda_2} = \{ v \in \mathbb{R}^2 / Av = \lambda_2 v \}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$V_{\lambda_2} = \{ \alpha(1,1) / \alpha \in \mathbb{R} \} = < \underbrace{(1,1)}_{\text{unit } f_2} >$

$f_1 \Rightarrow e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$f_2 \Rightarrow e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Efectuăm rotația:

$$r \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1' + x_2') \end{cases}$$

$$r(\Gamma): \ 2(x_1')^2 - \sqrt{2}(x_1' + x_2') + 2\sqrt{2}(-x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 - 3\sqrt{2}x_1' + \sqrt{2}x_2' + 1 = 0$$

$$2(x_1')^2 + \sqrt{2}(-3x_1' + x_2') + 1 = 0$$

$$2\left((x_1')^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_1'\right) + \sqrt{2}x_2' + 1 = 0$$

$$2\left(x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt{2}x_2' - \frac{5}{4} = 0$$

Efectuăm translația $t$:

$$t \begin{cases} x_1'' = x_1' - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2'' = x_2' \end{cases} \Rightarrow$$

$$(t \circ r)(\Gamma): \ 2(x_1'')^2 + \sqrt{2}x_2'' - \frac{5}{4} = 0$$

$$2x_1''^2 + \sqrt{2}\left(x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$t' \begin{cases} x_1''' = x_1'' \\ x_2''' = x_2'' - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t' \circ t \circ r)(\Gamma): \ 2x_1'''^2 + \sqrt{2}x_2''' = 0$$

$$\boxed{x_1'''^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'''} \longrightarrow V(\overset{0}{x_1'''}, \overset{0}{x_2'''})$$

$$\Updownarrow$$

$$t' \circ t \circ r: \begin{cases} x_1''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ x_2''' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) - \frac{5}{4\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Deci $V\left(\frac{11}{8}, -\frac{1}{8}\right) \to$ vârful PARABOLEI

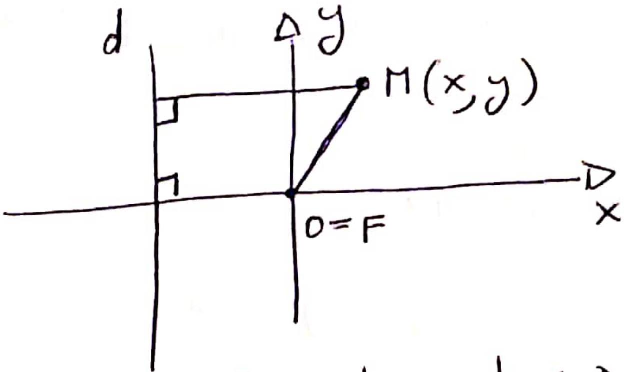
Axa parabolei: $x_1''' = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 - x_2) - 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - \frac{3}{2} = 0}$

## Definiția unitară a conicelor nedegenerate:

Locul geometric al pct. din planul afin euclidian $\mathbb{R}^2$, pentru care raportul distanțelor la un pct. fix F (focar) și la o dreaptă fixă d (directoare) cu $F \notin d$, este o constantă $e \in (0, \infty)$ (excentricitate) este o conică nedegenerată.

Avem cazurile:
1) $e = 1 \rightarrow$ conica este o PARABOLĂ
2) $e \in (0,1) \rightarrow$ conica este o ELIPSĂ
3) $e \in (1,+\infty) \rightarrow$ conica este o HIPERBOLĂ.

Considerăm un reper a.î. F este originea și prima axă de coordonate $(Ox)$ este $\perp d$.




$d: x=\varkappa,\ \varkappa\neq 0\ (F\notin d)$

$$\frac{d(M,F)}{d(M,d)} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x-\varkappa|} = e$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = e|x-\varkappa| \Leftrightarrow \underbrace{(1-e^2)x^2+y^2+2\varkappa e^2x-e^2\varkappa^2}_{\stackrel{\text{not}}{=} f(x,y)} = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-e^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Gamma: f(x,y)=0 \\ \{\text{ec. unei CONICE}\} \end{array}}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-e^2 & 0 & \varkappa e^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \varkappa e^2 & 0 & -e^2\varkappa^2 \end{vmatrix} = -e^2\varkappa^2(1-e^2) - \varkappa^2e^4 =$$

$$= -e^2\varkappa^2 + \cancel{\varkappa^2e^4} - \cancel{\varkappa^2e^4} = -e^2\varkappa^2 \neq 0$$

$\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \Gamma$ conică $\boxed{\text{NEDEGENERATĂ}}$

- $\Gamma$ elipsă $\Leftrightarrow \delta > 0 \Leftrightarrow 1-e^2>0 \underset{\{e>0\}}{\Rightarrow} \underline{e\in(0,1)}$
- $\Gamma$ parabolă $\Leftrightarrow \delta = 0 \Leftrightarrow 1-e^2=0 \underset{\{e>0\}}{\Rightarrow} \underline{e=1}$
- $\Gamma$ hiperbolă $\Leftrightarrow \delta < 0 \Leftrightarrow 1-e^2<0 \underset{\{e>0\}}{\Rightarrow} \underline{e\in(1,+\infty)}$

# Proprietățile optice ale conicelor:

## 1. Proprietatea optică a elipsei:

$\boxed{P_1}$ Tangenta și normala la elipsa $E$ în pct. $M_0$ sunt bisectoarele $\measuredangle$ determinate de suporturile razelor focale ale lui $M_0$.

Dem: Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $b^2=a^2-c^2$

$M_0(x_0,y_0)\in E \iff \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$

Fie $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$ focarele elipsei $E$.

Suporturile razelor focale sunt dreptele:

$M_0F: y-0=\frac{y_0}{x_0-c}(x-c) \iff y_0x-(x_0-c)y-cy_0=0$

$-y_0x+(x_0-c)y+cy_0=0$

$M_0F': y-0=\frac{y_0}{x_0+c}(x+c) \iff y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0$

Dacă: $x_0=0 \Rightarrow \Delta F'M_0F$ isoscel, tangenta $M_0T$ este orizontală, iar normala $M_0N$ este verticală (coincide cu $Oy$).

Pp. $x_0\neq 0$ și avem identitățile:

$\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}=\frac{a^2+cx_0}{a} = a+ex_0$ ; $\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}=a-ex_0$

$tg_{M_0}: \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \iff y=\frac{b^2}{y_0}\left(-\frac{x_0}{a^2}x+1\right)$

$m_{tg_{M_0}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$ Dar: $m_{tg}\cdot m_{nor}=-1$ $(\perp)$

Rezultă că: $m_{nor}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}$ ; $nor_{M_0}: y-y_0=\frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$

Ec. bisectoarei:

$$\frac{|y_0 x-(x_0+c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}=\frac{|-y_0 x+(x_0-c)y+cy_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}$$

Rezultă că: panta normalei este egală cu panta bisect., deci aceste 2 dr. coincid.

<u>Obs</u>: Proprietatea geometrică anterioară corespunde următorului fenomen optic: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar.

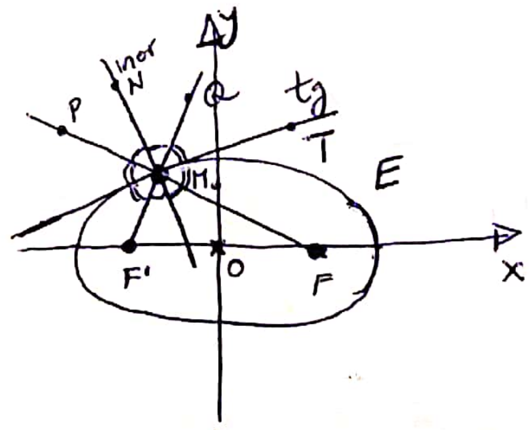
Proprietăți <u>analoage</u> avem și pentru hiperbolă, respectiv parabolă:

$\boxed{P_2}$ Tangenta și normala la o <u>hiperbolă</u> $H$ în pct. $M_0$ sunt bisectoarele ∡ determinate de suporturile razelor focale ale lui $M_0$.

$\boxed{P_3}$ Tangenta și normala la o <u>parabolă</u> $P$ în pct. $M_0$ sunt bisectoarele ∡ determinate de suportul razei focale a lui $M_0$ și de paralela (||) prin $M_0$ la axa parabolei.

---

Fig. $\boxed{P_1}$



Seminar 14 — ONLINE

INFO — Gr. 132-134

# Geometrie și algebră liniară

## $\boxed{\text{Cuadrice}}$ (în spațiul euclidian $\mathbb{R}^3$)

$\boxed{\text{Apl}}$ Fie cuadrica

$$\Gamma: \underbrace{x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z}_{=f(x,y,z)}=0$$

Să se aducă cuadrica $\Gamma$ la o formă canonică prin izometrii.

Rez: Avem $A_3=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\1&5&1&3\\3&1&1&1\\-1&3&1&0\end{pmatrix}$

$\delta=\det A_3=-36\neq 0 \Rightarrow \Gamma$ are centru unic.

$\Delta=\det A=36\neq 0\Rightarrow \Gamma$ cuadrică nedegenerată

Determinăm coordonatele centrului unic, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+6z-2=0\\2x+10y+2z+6=0\\6x+2y+2z+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+3z=1\\x+5y+z=-3\\3x+y+z=-1\end{cases}$$

Sistem Cramer (comp. determinat) cu sol. unică $\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\y=-\frac{2}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$

$P_0(\underbrace{-\frac{1}{3}}_{x_0},\underbrace{-\frac{2}{3}}_{y_0},\underbrace{\frac{2}{3}}_{z_0})\rightarrow$ centrul unic al cuadricei $\Gamma$

Efectuăm translația $t\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\\z'=z-z_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x+\frac{1}{3}\\y'=y+\frac{2}{3}\\z'=z-\frac{2}{3}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=x'-\frac{1}{3}\\y=y'-\frac{2}{3}\\z=z'+\frac{2}{3}\end{cases}$

Obținem:

$$t(\Gamma): x'^2+5y'^2+z'^2+2x'y'+6x'z'+2y'z'\underbrace{-1}_{\frac{\Delta}{\delta}=f(x_0,y_0,z_0)}=0$$

Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii coresp. matricei $A_3$:

- Ec. caracteristică: (rezolvare în $\mathbb{R}$)

$$\underbrace{\det(A_3 - \lambda I_3)}_{P(\lambda)} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

$P(\lambda)$ (polinomul caracteristic)

Valorile proprii: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$

$m_1 = m_2 = m_3 = 1$ (multiplicitățile algebrice)

$$V_{\lambda_1 = 3} = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid A_3 v = \lambda_1 v \}$$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $(A_3 - \lambda_1 I_3) v = O_{(3,1)}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$\to$ sistem liniar omogen, $\det(A_3 - \lambda_1 I_3) = 0$ $\to$ admite și sol. nenule

$$(\Delta_p) = \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A_3 - \lambda_1 I_3) = 2$$

minor principal

$\to$ $x_1, x_2$ necunoscute principale

$x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ nec. secundară

Rescriem sistemul
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -3\alpha \quad | \cdot (-2) \\ x_1 + 2x_2 = -\alpha \end{cases} \Rightarrow 5x_1 = 5\alpha \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Deci: $V_{\lambda_1 = 3} = \{ \alpha(1,-1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,-1,1)}_{f_1} \rangle$

Analog, obținem: $V_{\lambda_2 = 6} = \{ \beta(1,2,1) \mid \beta \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(1,2,1)}_{f_2} \rangle$

$V_{\lambda_3 = -2} = \{ \gamma(-1,0,+1) \mid \gamma \in \mathbb{R} \} = \langle \underbrace{(-1,0,+1)}_{f_3} \rangle$

Folosind procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt vom obține o bază ortonormată pornind de la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ formată din vectori proprii.

Obs: $f_1 \perp f_2$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază ortogonală.

$f_2 \perp f_3$

$f_1 \perp f_3$

În consecință, trebuie doar să normăm vectorii $f_1, f_2, f_3$ pentru a obține baza ortonormată căutată.

Luăm:
$$\begin{cases} e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) \\ e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1) \\ e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \end{cases}$$

Efectuăm rotația $r$
$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x'-y'+z') \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x'+2y'+z') \\ z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+z') \end{cases}$$

$$\underset{\text{m. rotației}}{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\det R = 1$

${}^tR R = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \\ y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'' \\ z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'' + \frac{1}{\sqrt{6}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \end{cases}$$

$$(r \circ t)(\Gamma): 3x''^2 + 6y''^2 - 2z''^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{6}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0}$$

$$\left\{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0\right\}$$

$\Rightarrow \Gamma$ este un HIPERBOLOID CU O PÂNZĂ.

$\boxed{\text{Apl.}}$ Fie cuadrica:

$$\Gamma: 5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

Aduceți cuadrica $\Gamma$ la o formă canonică prin izometrii (i.e. realizați clasificarea izometrică a cuadricei $\Gamma$).

Rez: Avem $A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

$\delta = \det A_3 = 0$ (deci, nu există centru unic)

$\Delta = \det A = 16 \neq 0$ (cuadrica $\Gamma$ este nedegenerată)

• Determinăm valorile proprii și subspațiile proprii coresp. matricei $A_3$.

– Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = 0$

Valorile proprii: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$

La fel ca în apl. anterioară determinăm subsp. proprii:

$$V_{\lambda_1} = \{\alpha(1,2,-3) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,2,-3)}_{f_1} \rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \{\beta(4,1,2) \,/\, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(4,1,2)}_{f_2} \rangle$$

$$V_{\lambda_3} = \{\gamma(+1,-2,-1) \,/\, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(+1,-2,-1)}_{f_3} \rangle$$

Obs: $\left| \begin{array}{l} f_1 \perp f_2 \\ f_2 \perp f_3 \\ f_1 \perp f_3 \end{array} \right.$ i.e. $\{f_1, f_2, f_3\}$ bază ortogonală.

Considerăm: $\begin{cases} e_1 = \dfrac{f_1}{\|f_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3) \\ e_2 = \dfrac{f_2}{\|f_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4,1,2) \\ e_3 = \dfrac{f_3}{\|f_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1) \end{cases}$

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(x+2y-3z) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4x+y+2z) \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y-z) \end{cases}$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \underline{\det R = 1} \qquad R\,{}^tR = I_3 \Rightarrow \underline{R^{-1} = {}^tR}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{4}{\sqrt{21}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{21}}y' - \dfrac{2}{\sqrt{6}}z' \\ z = -\dfrac{3}{\sqrt{14}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{21}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$

$$r(\Gamma): \quad 7y'^2 - 2z'^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}x' + \frac{24}{\sqrt{21}}y' + \frac{12}{\sqrt{6}}z' - 8 = 0$$

care se poate pune sub forma:

$$7\left(y' + \frac{12}{7\sqrt{21}}\right)^2 - 2\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}\left(x' + \frac{293\sqrt{14}}{392}\right) = 0$$

Efectuăm translația:

$$t \begin{cases} x'' = x' + \frac{293\sqrt{14}}{392} \\ y'' = y' + \frac{12}{7\sqrt{21}} \\ z'' = z' - \frac{3}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t \circ r)(\Gamma): 7y''^2 - 2z''^2 - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{y''^2}{\frac{1}{7}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} - \frac{8}{\sqrt{14}}x'' = 0}$$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un PARABOLOID HIPERBOLIC.

$\boxed{Apl}$ Fie cuadrica:

$$\Gamma: x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

Aduceți cuadrica $\Gamma$ la o formă redusă.

Rez: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Evident: $\delta = \det A_3 = 0 \Rightarrow \Gamma$ nu are centru unic

$\Delta = \det A = 0 \Rightarrow \Gamma$ cuadrică degenerată.

La fel ca în apl. precedentă, determinăm valorile proprii și subsp. proprii coresp. matricei $A_3$.

- Ec. caracteristică:

$\det(A_3 - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda - 6) = 0$

Valorile proprii

$\lambda_1 = 0,\ m_1 = 2$

$\lambda_2 = 6,\ m_2 = 1$

Obținem:

$V_{\lambda_1} = \{(\alpha, \beta, -\frac{1}{2}(\alpha+\beta)) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$V_{\lambda_2} = \{\gamma(1,1,2) / \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{(1,1,2)}_{f_3} \rangle$

Scanned with CamScanner

Din $V_{\lambda_1}$ extragem 2 vectori proprii liniar indep. (i.e. o bază)

- $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases} \to f_1 = (2,0,-1)$

- $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \to f_2 = (1,-1,0)$

Utilizăm procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt pentru a obține o bază ortonormată (în $V_{\lambda_1}$) pornind de la baza $\{f_1, f_2\}$

Avem: $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$

$e_2' = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$

$= (1,-1,0) - \frac{2}{5}(2,0,-1) = \frac{1}{5}(1,-5,2)$

$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{\cancel{5}}{\sqrt{30}} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}(1,-5,2) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1,-5,2)$

și $e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ bază ortonormată

Efectuăm rotația: $r \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + z) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{30}}(x - 5y + 2z) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y + 2z) \end{cases}$ $R = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\det R = 1$

$R \cdot {}^tR = I_3$

$\Rightarrow R^{-1} = {}^tR$

Obținem:

$r(\Gamma): z'^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' + 2\sqrt{6}z' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z' + \sqrt{6})^2 - \sqrt{6}x' + \sqrt{6}y' - 5 = 0$

Efectuăm izometria:

$$i \begin{cases} x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z'' = z' + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (i \circ r)(\Gamma): z''^2 - 2\sqrt{3}\,x'' - 5 = 0 \iff z''^2 - 2\sqrt{3}\left(x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) = 0$$

Efectuăm translația:

$$t \begin{cases} x''' = x'' + \frac{5}{2\sqrt{3}} \\ y''' = y'' \\ z''' = z'' \end{cases}$$

Obținem:

$$(t \circ i \circ r)(\Gamma): \boxed{z'''^2 - 2\sqrt{3}\,x''' = 0}$$

$\Rightarrow \Gamma$ reprezintă un <u>CILINDRU PARABOLIC</u>.

Descriem în continuare câteva proprietăţi geometrice metrice (prin definiţie invariante la izometrii) ale cuadricelor. Conform teoremelor de clasificare, e suficient să le studiem pe cuadricele scrise în forma canonică.

**Elipsoizii.** Ecuaţiile

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+ - \{0\}$$

reprezintă elipsoizi neechivalenţi din punct de vedere metric. Intersecţiile axelor de coordonate cu elipsoidul se numesc *vârfuri*. Acestea au coordonatele $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$. Segmentele determinate de centrul reperului şi vârfuri se numesc *semiaxe*. Denumirea de „elipsoid“ e justificată de următoarea proprietate pe care cititorul o va demonstra singur:

PROPOZIŢIA 2.45. *Intersecţia dintre un elipsoid şi un plan paralel cu un plan de coordonate este o elipsă, un punct sau mulţimea vidă.*

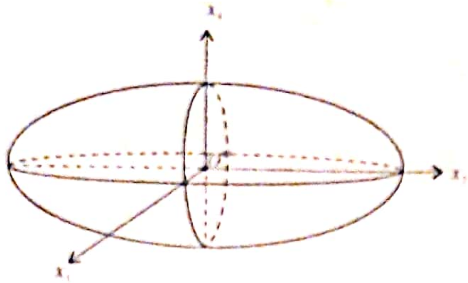


FIGURA 2.3 Elipsoidul

Dacă două dintre semiaxe sunt egale, de exemplu dacă $a = b$, secţiunile făcute în elipsoid cu plane paralele cu planul de coordonate $x_1Ox_2$, dacă există, sunt cercuri sau se reduc la un punct. În acest caz, elipsoidul este un corp de rotaţie (vezi şi exerciţiul 2.37): se poate obţine prin rotirea unei elipse de centru $O$ şi semiaxe de lungime $a$ (pe $Ox_1$), $c$, situată în planul $x_1Ox_3$, în jurul axei verticale $Ox_3$.
Când toate trei semiaxele sunt egale, $a = b = c$ se obţine *sfera* de centru $O$ şi rază $a$. Ea este locul geometric al punctelor din spaţiul afin euclidian $\mathbb{R}^3$ aflate la distanţă $a$ de un punct fix (centrul). Aplicând o izometrie oarecare unei sfere de rază $r$ centrate în originea reperului, vedem că ecuaţia generală a unei sfere de rază $r$ şi centru $(m, n, p)$ este

$$(x_1 - m)^2 + (x_2 - n)^2 + (x_3 - p)^2 - r^2 = 0.$$

**Hiperboloizii cu o pânză.** Şi acestea sunt cuadrice cu centru unic. Ecuaţiile canonice care descriu clasele neechivalente metric sunt:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+ - \{0\}.$$

Ca şi la elipsoid, intersecţiile axelor cu cuadrica se numesc vârfuri şi au coordonatele $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$. Aici avem doar patru vârfuri, axa $Ox_3$ este interioară cuadricei. Cititorul va demonstra:

PROPOZIŢIA 2.46. *Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu cele de coordonate sunt elipse sau hiperbole. Atunci când $a = b$, secţiunile orizontale în hiperboloid sunt cercuri.*

Dacă punem ecuaţia de mai sus sub forma echivalentă:

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 - \frac{x_2}{b}\right)\left(1 + \frac{x_2}{b}\right),$$

observăm că dreptele familiei indexate după parametrul $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$d_\lambda \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} - \dfrac{x_3}{c} = \lambda\left(1 - \dfrac{x_2}{b}\right) \\ \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_3}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{x_2}{b}\right) \end{cases}$$

sunt, toate, incluse în hiperboloid. Spunem că fiecare dreaptă $d_\lambda$ e o *generatoare* sau o *riglă* a hiperboloidului. La fel, se constată uşor că şi dreptele familiei

$$d_\mu \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} - \dfrac{x_3}{c} = \mu(1 + \dfrac{x_2}{b}) \\ \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_3}{c} = \dfrac{1}{\mu}(1 - \dfrac{x_2}{b}) \end{cases}$$

sunt generatoare. Deci *hiperboloidul cu o pânză are două familii distincte de generatoare*. Se mai spune că este o cuadrică dublu riglată.

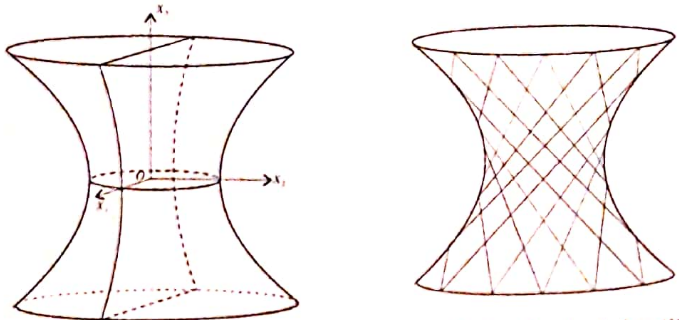


FIGURA 2.4 Hiperboloidul cu o pânză şi cele două familii de generatoare ale sale

EXERCIŢIUL 2.43. Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză trece una şi numai o generatoare din fiecare familie. Două generatoare sunt coplanare dacă şi numai dacă fac parte din familii diferite. Dacă o dreaptă este conţinută în hiperboloidul cu o pânză, atunci ea aparţine uneia dintre familiile de generatoare.

**Hiperboloizii cu două pânze.** Ecuaţiile diferitelor lor clase de echivalenţă metrică sunt:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+ - \{0\}.$$

Se observă că, în mod necesar, $|x_1| \geq a$, deci hiperboloidul cu două pânze este o cuadrică neconexă (are două componente conexe). Are două vârfuri, anume $(\pm a, 0, 0, )$. Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze cu plane paralele cu cele de coordonate sunt elipse, hiperbole sau $\emptyset$.

EXERCIŢIUL 2.44. Hiperboloidul cu două pânze nu conţine drepte, în particular nu conţine generatoare.

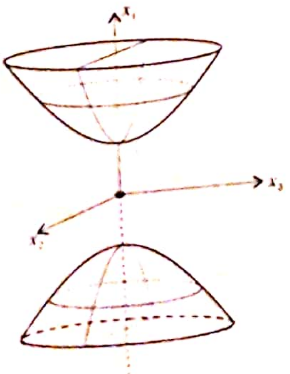


FIGURA 2.5 Hiperboloidul cu două pânze. Pentru comoditatea desenului, am schimbat poziţia tradiţională axelor de coordonate

**Paraboloizii eliptici.** Clasele de echivalenţă metrică sunt descrise de ecuaţii de forma:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 2x_3 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}_+ - \{0\}.$$

Sunt cuadrice conexe, fără centru unic. Secţiunile lor prin plane paralele cu cele de coordonate sunt elipse sau parabole (de aici denumirea).

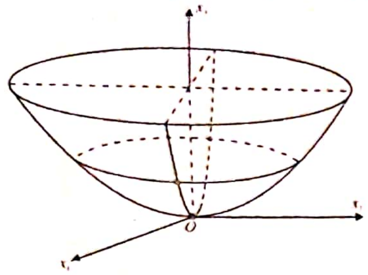



FIGURA 2.6 Paraboloidul eliptic

**Paraboloizii hiperbolici.** Aceştia sunt descrişi de ecuaţiile:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 2x_3 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}_+ - \{0\}.$$

Intersecţiile lor cu plane paralele cu cele de coordonate, când nu sunt vide, sunt hiperbole sau parabole, justificând denumirea. În vecinătatea originii reperului, cuadrica are forma unei şei.

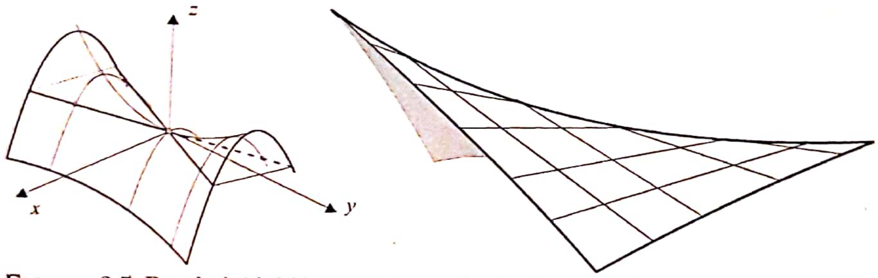



FIGURA 2.7 Paraboloidul hiperbolic cu cele două familii de generatoare

Şi paraboloizii hiperbolici sunt cuadrice dublu riglate. Cele două familii de generatoare sunt

$$d_\lambda \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = 2\lambda \\ \dfrac{x_1}{a} - \dfrac{x_2}{b} = \dfrac{1}{\lambda}x_3 \end{cases} \qquad d_\mu \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} = \dfrac{1}{\mu}x_3 \\ \dfrac{x_1}{a} - \dfrac{x_2}{b} = 2\mu \end{cases}$$

Generatoarele au aceleaşi proprietăţi ca şi cele descrise în exerciţiul 2.43 pentru hiperboloidul cu o pânză.

**Cilindrii.** Ecuaţiile lor conţin numai două dintre variabile, ceea ce înseamnă că a treia ia toate valorile reale. Deci cilindrii sunt cuadrice ale căror intersecţii nevide cu plane paralele cu cele de coordonate sunt drepte sau conice plane congruente (dacă apar doar $x_1, x_2$, intersecţiile cu $x_3 = const.$ sunt conice). Astfel distingem cilindrii parabolici, eliptici, hiperbolici. De exemplu, ecuaţia cilindrului eliptic este: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Evident, cilindrii sunt cuadrice riglate.

FIGURA 2.8 Cilindru eliptic (stânga) şi cilindru parabolic (dreapta)

**Conurile** sunt cuadrice ale căror intersecţii nevide cu plane paralele cu cele de coordonate sunt drepte sau conice plane omotetice. Originea reperului este vârf pentru orice con (pe ecuaţia canonică). Conurile sunt caracterizate de ecuaţii omogene şi sunt cuadrice riglate.

Scanned with CamScanner