Matematici Asistate de Calculator

Dr. Călin-Adrian POPA

Cursul 3

26 Februarie 2019

3 Sisteme de ecuaţii

- în capitolul precedent, am studiat metode de rezolvare a unei singure ecuaţii într-o singură necunoscută
- în acest capitol, considerăm problema rezolvării mai multor ecuaţii în acelaşi timp în mai multe necunoscute
- mare parte din atenţia noastră va fi îndreptată spre cazul în care numărul de ecuaţii şi numărul de necunoscute este acelaşi
- eliminarea gaussiană este cea mai bună soluţie pentru sisteme de ecuaţii liniare de dimensiune rezonabilă
- capitolul începe cu dezvoltarea unor versiuni eficiente şi stabile ale acestei tehnici foarte cunoscute
- mai departe în decursul capitolului, atenţia noastră va fi îndreptată către metode iterative, care sunt necesare pentru sisteme foarte mari
- în final, vom dezvolta metode pentru sisteme de ecuaţii neliniare

- să considerăm sistemul

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - 4y &= 2. \end{aligned} \tag{1}$$

- un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute poate fi privit atât din perspectivă algebrică, cât şi din perspectivă geometrică
- din perspectivă geometrică, fiecare ecuaţie liniară reprezintă o dreaptă în planul xy, după cum se prezintă în Figura 1

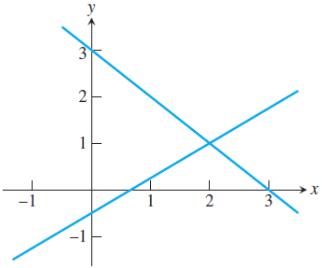

Figura 1: **Soluţia geometrică a unui sistem de ecuaţii.** Fiecare ecuaţie din (1) corespunde unei drepte din plan. Punctul de intersecţie reprezintă soluţia.

- punctul $x = 2$, $y = 1$ în care cele două drepte se intersectează satisface ambele ecuaţii şi reprezintă soluţia pe care o căutăm
- perspectiva geometrică este de ajutor pentru vizualizarea soluţiilor sistemelor, dar pentru calculul acestor soluţii cu precizie mare, trebuie să ne întoarcem la algebră
- metoda cunoscută ca eliminarea gaussiană este o modalitate eficientă de a rezolva n ecuaţii în n necunoscute
- în următoarele câteva subsecţiuni, vom explora implementările eliminării gaussiene care funcţionează cel mai bine pentru anumite probleme tipice

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- începem prin a descrie cea mai simplă formă a eliminării gaussiene
- de fapt, este atât de simplă încât nu avem garanţia reuşitei de a găsi o soluţie, nemaivorbind de acurateţea acestei soluţii
- modificările necesare pentru a îmbunătăţi această metodă naivă vor fi introduse începând din subsecţiunea următoare
- trei operaţii utile pot fi aplicate unui sistem liniar de ecuaţii care dau un sistem echivalent, adică unul care are aceleaşi soluţii
- aceste operaţii sunt:
  (1) Interschimbarea unei ecuaţii cu o altă ecuaţie.
  (2) Adunarea sau scăderea unui multiplu al unei ecuaţii dintr-o altă ecuaţie.
  (3) Înmulţirea unei ecuaţii cu o constantă nenulă.
- pentru sistemul (1), putem scădea de 3 ori prima ecuaţie din a doua ecuaţie pentru a elimina necunoscuta x din a doua ecuaţie
- scăzând $3 \cdot [x + y = 3]$ din a doua ecuaţie, obţinem sistemul echivalent

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -7y &= -7. \end{aligned} \tag{2}$$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- pornind de la ecuaţia de jos, putem rezolva de jos în sus ecuaţiile, până obţinem o soluţie completă, ca în

$$-7y = -7 \Rightarrow y = 1$$

şi

$$x + y = 3 \Rightarrow x + (1) = 3 \Rightarrow x = 2.$$

- prin urmare, soluţia sistemului (1) este $(x, y) = (2, 1)$
- aceeaşi operaţie de eliminare poate fi făcută în absenţa necunoscutelor prin scrierea sistemului în aşa-numita formă tabulară:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } 3\times\text{rândul 1 din rândul 2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{array}\right]. \tag{3}$$

- avantajul formei tabulare este acela că necunoscutele sunt ascunse în timpul eliminării
- când matricea pătratică din stânga tabloului este triangulară, putem rezolva de jos în sus sistemul pentru a găsi soluţia

Exemplul 1

- aplicaţi eliminarea gaussiană în formă tabulară pentru sistemul de trei ecuaţii cu trei necunoscute:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y - 2z &= 3 \\ -3x + y + z &= -6. \end{aligned} \tag{4}$$

- sistemul poate fi scris în formă tabulară astfel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right]. \tag{5}$$

- doi paşi sunt necesari pentru a elimina coloana 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } 2 \times \text{rândul 1 din rândul 2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -3 \times \text{rândul 1 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

şi încă un pas pentru a elimina coloana 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } -\frac{7}{3} \times \text{rândul 2 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

- întorcându-ne la ecuaţii

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -3y &= -3 \\ -2z &= -4, \end{aligned} \tag{6}$$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- putem rezolva aceste ecuaţii pentru necunoscutele

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2y + z \\ -3y &= -3 \\ -2z &= -4. \end{aligned} \tag{7}$$

  şi apoi pentru necunoscutele z, y, x în această ordine
- ultima parte se numeşte **substituţie înapoi**, sau **rezolvare înapoi** deoarece, după eliminare, ecuaţiile sunt uşor de rezolvat pornind de jos în sus
- soluţia este $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- forma generală a unui tablou pentru n ecuaţii cu n necunoscute este

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

- pentru a efectua pasul de eliminare, trebuie să facem zerouri în triunghiul de jos, folosind operaţiile permise între rânduri
- putem scrie pasul de eliminare sub forma buclei

for $j = 1, \dots, n-1$
    eliminăm coloana j
end

- unde, „eliminăm coloana j", înseamnă „folosim operaţii între rânduri pentru a face zero în fiecare locaţie de sub diagonala principală, adică în locaţiile $a_{j+1,j}$, $a_{j+2,j}, \dots$, a_{nj}"
- de exemplu, pentru a efectua eliminarea pentru coloana 1, trebuie să facem zerouri în $a_{21}, \dots, a_{n1}$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- acest lucru poate fi scris ca următoarea buclă în interiorul buclei anterioare:

  for $j = 1, \ldots, n-1$
      for $i = j+1, \ldots, n$
          eliminăm intrarea a_{ij}
      end
  end

- mai rămâne să completăm pasul interior al buclei duble, pentru a aplica o operaţie între rânduri care face intrarea a_{ij} să fie zero
- de exemplu, prima intrare care va fi eliminată va fi a_{21}
- pentru a realiza aceasta, scădem a_{21}/a_{11} înmulţit cu rândul 1 din rândul 2, presupunând că $a_{11} \neq 0$
- mai exact, primele două rânduri se transformă din

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \end{array}$$

în

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & \ldots & a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \end{array}.$$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- operaţia de rânduri folosită pentru a elimina intrarea a_{i1} a primei coloane, şi anume,

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i2} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{12} & \dots & a_{in} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1n} & b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \end{array},$$

  se face într-o manieră similară
- procedura pe care tocmai am descris-o funcţionează cât timp numărul a_{11} este nenul
- acest număr şi alte numere a_{ii} care vor deveni la un moment dat divizori în eliminarea gaussiană se numesc **pivoţi**
- un pivot egal cu zero va determina oprirea algoritmului, după cum am explicat până acum
- această problemă va fi ignorată deocamdată, şi discutată mai pe larg în Secţiunea 3.3
- după eliminarea primei coloane, pivotul a_{22} este utilizat pentru a elimina cea de-a doua coloană în aceeaşi manieră, precum şi coloanele rămase după aceea

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- de exemplu, operaţia de rânduri folosită pentru a elimina intrarea a_{ij} este

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & a_{jj} & a_{j,j+1} & \dots & a_{jn} & | & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,j+1} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{j,j+1} & \dots & a_{in} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jn} & | & b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j \end{array}.$$

- în notaţia noastră, a_{22}, de exemplu, se referă la noul număr aflat în acea poziţie după eliminarea coloanei 1, şi nu la valoarea iniţială a lui a_{22}
- introducând acest pas în aceeaşi buclă dublă obţinem următorul algoritm:

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

Algoritmul 1 (Eliminarea gaussiană)

for $j = 1, \dots, n-1$
  if $a_{jj} = 0$, **stop**, **end**
  for $i = j+1, \dots, n$
    for $k = j+1, \dots, n$
      $a_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jk}$
    end
    $b_i = b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j$
  end
end

- două comentarii în legătură cu acest algoritm trebuie făcute: în primul rând, făcând indexul k să se deplaseze de la j la n va face zero în locaţia a_{ij}; totuşi, deplasarea de la $j+1$ la n este mai eficientă
- ultima variantă nu va face zero în locaţia a_{ij}, care a fost intrarea pe care încercăm să o eliminăm

- deşi aceasta pare a fi o greşeală, observăm că nu ne vom mai întoarce la această intrare în continuarea eliminării gaussiene sau a procesului de substituţie înapoi, ceea ce înseamnă că a pune un zero în acea poziţie reprezintă un pas irosit din punctul de vedere al eficienţei
- în al doilea rând, facem algoritmul să se oprească dacă un pivot egal cu zero este întâlnit
- după cum s-a menţionat deja, această posibilitate va fi luată în considerare mai serios atunci când vom discuta interschimbările de rânduri în Secţiunea 3.3
- după terminarea eliminării, tabloul este superior triangular:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

- scris sub formă de ecuaţie, avem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{8}$$

unde, din nou, a_{ij} se referă la noile întrări, şi nu la cele iniţiale

- pentru a încheia calculul soluţiei x, trebuie să facem pasul de substituţie înapoi, care este o simplă rescriere a lui (8):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{aligned} \tag{9}$$

3.1.1 Eliminarea gaussiană naivă

- sub formă de algoritm, pasul de substituţie înapoi este

Algoritmul 2 (Substituţia înapoi pentru eliminarea gaussiană)

for $i = n, \ldots, 1$
    for $j = i + 1, \ldots, n$
        $b_i = b_i - a_{ij} x_j$
    end
    $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$
end

3.2 Factorizarea LU

- ducând ideea formei tabulare un pas mai departe ne aduce la forma matricială a unui sistem de ecuaţii
- forma matricială ne va economisi timp prin simplificarea algoritmilor şi a analizei lor

3.2.1 Forma matricială a eliminării gaussiene

- sistemul (1) poate fi scris ca $Ax = b$ în formă matricială, sau

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

- vom nota de obicei **matricea coeficienţilor** cu A şi **vectorul coeficienţilor liberi** cu b
- în forma matricială a sistemelor de ecuaţii, vom considera că x este un vector coloană şi Ax este o înmulţire matrice-vector
- vrem să găsim x astfel încât vectorul Ax este egal cu vectorul b
- bineînţeles, aceasta este echivalent cu a avea egalitate între toate componentele lui Ax şi ale lui b, exact ceea ce cere sistemul iniţial (1)
- avantajul scrierii sistemelor de ecuaţii în formă matricială este că putem folosi operaţii cu matrici, cum ar fi înmulţirea matricilor, pentru a urmări paşii eliminării gaussiene
- factorizarea LU este o reprezentare matricială a eliminării gaussiene
- ea constă din scrierea matricii coeficienţilor A ca un produs dintre o matrice inferior triangulară L şi o matrice superior triangulară U
- factorizarea LU este versiunea eliminării gaussiene a unei lungi tradiţii în ştiinţă şi inginerie—descompunerea unei probleme complicate în părţi mai simple

Definiţia 1

O matrice L de dimensiune $m \times n$ este **inferior triangulară** dacă intrările sale satisfac $l_{ij} = 0$ pentru $i < j$. O matrice U de dimensiune $m \times n$ este **superior triangulară** dacă intrările sale satisfac $u_{ij} = 0$ pentru $i > j$.

Exemplul 2

- găsiţi factorizarea LU pentru matricea A din (10)
- paşii de eliminare sunt aceiaşi ca pentru forma tabulară pe care am văzut-o anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } 3\times\text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = U. \tag{11}$$

- diferenţa este că acum stocăm multiplicatorul 3 folosit în pasul de eliminare
- observăm că am definit U ca fiind matricea superior triangulară care reprezintă rezultatul eliminării gaussiene

3.2.1 Forma matricială a eliminării gaussiene

- definim L ca fiind matricea 2×2 inferior triangulară cu 1-uri pe diagonala principală şi multiplicatorul 3 în locaţia $(2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- acum putem verifica faptul că

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = A. \tag{12}$$

- vom discuta motivul pentru care această relaţie are loc imediat, însă mai întâi vom ilustra aceiaşi paşi pe un exemplu de dimensiune 3×3

Exemplul 3

- găsiţi factorizarea LU a matricii

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

- această matrice este matricea coeficienţilor sistemului (4)
- paşii de eliminare sunt aceiaşi ca mai sus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } 2\times \text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -3\times \text{rândul 1 din rândul 3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -\frac{7}{3}\times \text{rândul 2 din rândul 3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U.$$

3.2.1 Forma matricială a eliminării gaussiene

- se formează matricea inferior triangulară L, ca în exemplul anterior, prin plasarea de 1-uri pe diagonala principală şi a multiplicatorilor în triunghiul inferior—în locaţiile unde au fost folosiţi pentru eliminare
- mai exact,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

- observăm că, de exemplu, 2 se află în locaţia $(2,1)$ a matricii L, pentru că multiplicatorul a fost folosit pentru a elimina intrarea $(2,1)$ a matricii A
- acum putem verifica faptul că

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A. \tag{15}$$

- motivul pentru care această procedură ne dă factorizarea LU rezultă din trei fapte care caracterizează matricile inferior triangulare

3.2.1 Forma matricială a eliminării gaussiene

Faptul 1

Notăm cu $L_{ij}(-c)$ matricea inferior triangulară ale cărei intrări nenule sunt 1-uri pe diagonala principală şi $-c$ în poziţia (i, j). Atunci $A \to L_{ij}(-c)A$ reprezintă operaţia de rânduri „scădem c înmulţit cu rândul j din rândul i”.

- de exemplu, înmulţirea cu $L_{21}(-c)$ ne dă

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ca_{11} & a_{22} - ca_{12} & a_{23} - ca_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

3.2.1 Forma matricială a eliminării gaussiene

Faptul 2

$L_{ij}(-c)^{-1} = L_{ij}(c)$.

- de exemplu,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- folosind Faptele 1 şi 2, putem înţelege factorizarea LU din Exemplul 2
- deoarece pasul de eliminare poate fi reprezentat ca

$$L_{21}(-3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

putem înmulţi ambele părţi la stânga cu $L_{21}(-3)^{-1}$ pentru a obţine

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix},$$

care este factorizarea LU a lui A

- pentru a trata matrici de dimensiune $n \times n$ cu $n > 2$, mai avem nevoie de încă un fapt

Faptul 3

Are loc următoarea ecuaţie:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ c_2 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & c_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ c_1 & 1 & \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- acest fapt ne permite să colectăm L_{ij}-urile inversate într-o singură matrice, care devine matricea L din factorizarea LU
- pentru Exemplul 3, aceasta revine la

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 3 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -3 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = LU. \end{aligned} \tag{16}$$

3.2.2 Substituţia înapoi pentru factorizarea LU

- acum că am exprimat pasul de eliminare din eliminarea gaussiană ca un produs matricial LU, cum traducem pasul de substituţie înapoi?
- mai important, cum obţinem soluţia x?
- odată ce L şi U sunt cunoscute, problema $Ax = b$ poate fi scrisă ca $LUx = b$
- definim un nou vector auxiliar $c = Ux$
- atunci substituţia înapoi este o procedură în doi paşi:
  (a) Rezolvăm $Lc = b$ pentru a găsi c.
  (b) Rezolvăm $Ux = c$ pentru a găsi x.
- ambii paşi sunt simplu de realizat deoarece L şi U sunt matrici triangulare
- ilustrăm acest fapt pe cele două exemple folosite anterior

Exemplul 4

- rezolvaţi sistemul (10), folosind factorizarea LU (12)
- sistemul are factorizarea LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

din (12), şi partea dreaptă este $b = [3, 2]^T$

- pasul (a) este

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ceea ce corespunde sistemului

$$\begin{aligned} c_1 + 0c_2 &= 3 \\ 3c_1 + c_2 &= 2. \end{aligned}$$

3.2.2 Substituţia înapoi pentru factorizarea LU

- pornind de sus, soluţiile sunt $c_1 = 3$, $c_2 = -7$
- pasul (b) este

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix},$$

  ceea ce corespunde sistemului

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -7x_2 &= -7. \end{aligned}$$

- pornind de jos, soluţiile sunt $x_2 = 1$, $x_1 = 2$
- aceasta este în acord cu eliminarea gaussiană clasică pe care am făcut-o anterior

Exemplul 5

- rezolvaţi sistemul (4), folosind factorizarea LU (15)
- sistemul are factorizarea LU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

din (15), şi $b = [3, 3, -6]^T$

- pasul $Lc = b$ este

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

3.2.2 Substituţia înapoi pentru factorizarea LU

- ceea ce corespunde sistemului

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \\ 2c_1 + c_2 &= 3 \\ -3c_1 - \frac{7}{3}c_2 + c_3 &= -6. \end{aligned}$$

- pornind de sus, soluţiile sunt $c_1 = 3$, $c_2 = -3$, $c_3 = -4$
- pasul $Ux = c$ este

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix},$$

ceea ce corespunde sistemului

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -3x_2 &= -3 \\ -2x_3 &= -4, \end{aligned}$$

ceea ce se rezolvă pornind de jos în sus, dând $x = [3, 1, 2]^T$

3.2.2 Substituţia înapoi pentru factorizarea LU

- factorizarea LU este un pas semnificativ înainte în încercarea de a eficientiza eliminarea gaussiană
- din păcate, nu orice matrice admite o astfel de factorizare

Exemplul 6

- demonstraţi că $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nu are o factorizare LU
- factorizarea trebuie să aibă forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ ab & ac + d \end{bmatrix}.$$

- egalizând coeficienţii obţinem $b = 0$ şi $ab = 1$, ceea ce este o contradicţie

- faptul că nu toate matricile au o factorizare LU înseamnă că mai sunt necesari anumiţi paşi înainte să declarăm factorizarea LU ca fiind un algoritm general de eliminare gaussiană
- în Secţiunea 3.3, factorizarea PA=LU este introdusă, care va rezolva această problemă

3.3 Factorizarea PA = LU

- forma eliminării gaussiene discutată până acum este adesea numită naivă, deoarece are o dificultate serioasă: descoperirea unui pivot egal cu zero
- pentru o matrice nesingulară, această problemă poate fi evitată folosind un algoritm îmbunătăţit
- cheia acestei îmbunătăţiri o reprezintă un protocol eficient pentru interschimbarea rândurilor matricii coeficienţilor numit pivotare parţială

3.3.1 Pivotarea parţială

- la începutul eliminării gaussiene clasice pentru un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute, primul pas este să folosim elementul de pe diagonala principală a_{11} ca pivot pentru a elimina prima coloană
- protocolul de **pivotare parţială** constă din compararea numerelor înainte de a efectua fiecare pas de eliminare
- cea mai mare intrare a primei coloane este localizată, şi rândul pe care ea se află este interschimbat cu rândul pivot, în acest caz cu primul rând
- cu alte cuvinte, la începutul eliminării gaussiene, pivotarea parţială presupune selectarea rândului p, unde

$$|a_{p1}| \geq |a_{i1}|, \tag{17}$$

  pentru orice $1 \leq i \leq n$, şi interschimbarea rândurilor 1 şi p
- apoi, eliminarea coloanei 1 se face ca de obicei, folosind noua versiune a lui a_{11} pe post de pivot
- multiplicatorul folosit pentru a elimina a_{i1} va fi

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

  şi $|m_{i1}| \leq 1$

3.3.1 Pivotarea parţială

- aceeaşi verificare este aplicată fiecărei alegeri a pivotului pe tot parcursul algoritmului
- atunci când se decide al doilea pivot, vom începe cu valoarea curentă a lui a_{22} şi vom verifica toate intrările care se află direct sub aceasta
- selectăm rândul p astfel încât

$$|a_{p2}| \geq |a_{i2}|,$$

  pentru orice $2 \leq i \leq n$, şi dacă $p \neq 2$, rândurile 2 şi p vor fi interschimbate
- rândul 1 nu este niciodată implicat în acest pas
- dacă $|a_{22}|$ este deja cel mai mare, nu are loc nicio interschimbare
- protocolul se aplică fiecărei coloane pe parcursul eliminării
- înaintea eliminării coloanei k, acel p cu $k \leq p \leq n$ şi cea mai mare valoare a lui $|a_{pk}|$ este localizat, şi rândurile p şi k sunt interschimbate, dacă este necesar, înaintea continuării eliminării
- observăm că pivotarea parţială asigură faptul că toţi multiplicatorii, adică toate intrările lui L, nu vor fi mai mari decât 1 în valoare absolută

Exemplul 7

- aplicaţi eliminarea gaussiană cu pivotare parţială pentru a rezolva sistemul (1)
- ecuaţiile pot fi scrise în formă tabulară astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & -4 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

- conform pivotării parţiale, comparăm $|a_{11}| = 1$ cu toate intrările de sub el, în acest caz doar cu intrarea $a_{21} = 3$
- deoarece $|a_{21}| > |a_{11}|$, trebuie să interschimbăm rândurile 1 şi 2
- noul tablou este

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & | & 2 \\ 1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } \frac{1}{3} \times \text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 3 & -4 & | & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & | & \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

- după substituţia înapoi, soluţia este $x_2 = 1$ şi apoi $x_1 = 2$
- când am rezolvat acest sistem prima dată, multiplicatorul a fost 3, dar în cazul pivotării parţiale acesta nu ar apărea niciodată

3.3.1 Pivotarea parţială

Exemplul 8

- aplicaţi eliminarea gaussiană cu pivotare parţială pentru a rezolva sistemul

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -x_1 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

- acest exemplu poate fi scris în formă tabulară astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & -3 \\ -1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

- conform pivotării parţiale, comparăm $|a_{11}| = 1$ cu $|a_{21}| = 1$ şi $|a_{31}| = 2$, şi alegem pe a_{31} ca fiind noul pivot

3.3.1 Pivotarea parţială

- acest lucru este obţinut prin interschimbarea rândurilor 1 şi 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{interschimbăm rândul 1 şi rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{2} \times \text{rândul 1 din rândul 2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } \frac{1}{2} \times \text{rândul 1 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

- înainte de a elimina coloana 2 trebuie să comparăm valoarea curentă a lui $|a_{22}|$ cu valoarea curentă a lui $|a_{32}|$

- deoarece cel din urmă este mai mare, interschimbăm din nou rândurile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{interschimbăm rândul 2 şi rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{2} \times \text{rândul 2 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

- observăm că toţi multiplicatorii sunt mai mici decât 1 în valoare absolută
- acum ecuaţiile sunt simplu de rezolvat
- din

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_3 &= -\frac{1}{2} \\ -2x_2 + x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0, \end{aligned}$$

găsim că $x = [1, 1, -1]^T$

3.3.1 Pivotarea parţială

- observăm că pivotarea parţială rezolvă şi problema pivoţilor egali cu zero
- când un potenţial pivot egal cu zero este întâlnit, spre exemplu, dacă $a_{11} = 0$, acesta este imediat înlocuit cu un pivot nenul de undeva din coloana în care se află
- dacă nu există o astfel de intrare pe sau sub diagonala principală, atunci matricea este singulară şi eliminarea gaussiană oricum nu va putea oferi o soluţie

3.3.2 Matrici de permutare

- înainte de a arăta cum se poate folosi interschimbarea rândurilor cu factorizarea LU pentru eliminare gaussiană, vom discuta proprietăţile fundamentale ale matricilor de permutare

Definiţia 2

O **matrice de permutare** este o matrice $n \times n$ ale cărei intrări sunt toate zerouri, cu excepţia unui singur 1 pe fiecare rând şi pe fiecare coloană.

- echivalent, o matrice de permutare P se poate crea aplicând interschimbări arbitrare de rânduri matricii identitate de dimensiune $n \times n$ (sau interschimbări arbitrare de coloane)

3.3.2 Matrici de permutare

- de exemplu,
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$
sunt singurele matrici de permutare de dimensiune 2×2, şi
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
sunt cele şase matrici de permutare de dimensiune 3×3
- următoarea teoremă ne spune ce acţiune cauzează o matrice de permutare când este înmulţită la stânga cu o altă matrice

3.3.2 Matrici de permutare

Teorema 1 (Teorema fundamentală a matricilor de permutare)

Fie P o matrice de permutare de dimensiune $n \times n$ formată printr-un anumit set de interschimbări de rânduri aplicate matricii identitate. Atunci, pentru orice matrice A de dimensiune $n \times n$, PA este matricea obţinută prin aplicarea exact aceluiaşi set de interschimbări de rânduri matricii A.

- de exemplu, matricea de permutare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

este formată prin interschimbarea rândurilor 2 şi 3 ale matricii identitate

3.3.2 Matrici de permutare

- înmulţind o matrice arbitrară la stânga cu P are efectul interschimbării rândurilor 2 şi 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

- o bună metodă de a reţine Teorema 1 este de a ne imagina înmulţirea lui P cu matricea identitate I:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- există două moduri diferite de a privi această egalitate: în primul rând, ca o înmulţire cu matricea identitate (astfel că obţinem matricea de permutare în dreapta); în al doilea rând, ca acţiunea matricii de permutare asupra rândurilor matricii identitate
- conţinutul Teoremei 1 este acela că interschimbările de rânduri cauzate de înmulţirea cu P sunt exact cele implicate în construcţia lui P

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- în această subsecţiune, vom pune la un loc tot ce ştim despre eliminarea gaussiană pentru a da naştere factorizării PA=LU
- aceasta este formularea matricială a eliminării gaussiene cu pivotare parţială
- factorizarea PA=LU este abordarea standard pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare
- după cum îi spune şi numele, factorizarea PA=LU este pur şi simplu factorizarea LU a unei versiuni cu rândurile interschimbate a matricii A
- sub acţiunea pivotării parţiale, rândurile care necesită interschimbare nu sunt ştiute de la început, deci trebuie să fim atenţi cu introducerea informaţiei despre interschimbare în factorizare
- în particular, trebuie să ţinem evidenţa multiplicatorilor anteriori când se face o interschimbare de rânduri
- începem cu un exemplu

Exemplul 9

- găsiţi factorizarea PA=LU a matricii

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- în primul rând, rândurile 1 şi 2 trebuie interschimbate, conform pivotării parţiale:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{interschimbăm rândurile 1 şi 2}]{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- vom folosi matricea de permutare P pentru a ţine evidenţa permutării cumulative a rândurilor care a fost făcută până la momentul actual

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- acum vom face două operaţii de rânduri, şi anume,

$$\xrightarrow{\text{scădem } \frac{1}{2} \times \text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } \frac{1}{4} \times \text{rândul 1 din rândul 3}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

  pentru a elimina prima coloană
- am făcut ceva inedit—în loc să plasăm doar un zero în poziţia eliminată, am făcut zero o locaţie de stocare
- în interiorul zero-ului de la poziţia (i, j), stocăm multiplicatorul m_{ij} pe care l-am folosit pentru eliminarea acelei poziţii
- facem acest lucru pentru un motiv: acesta este mecanismul prin care multiplicatorii vor rămâne pe rândul lor în cazul efectuării unor interschimbări viitoare
- în continuare, trebuie să facem o comparaţie pentru a alege al doilea pivot
- deoarece $|a_{22}| = 1 < 2 = |a_{32}|$, o interschimbare de rânduri este necesară înaintea eliminării celei de-a doua coloane

- observăm că multiplicatorii anteriori se mişcă împreună cu rândurile interschimbate:

$$\xrightarrow[\text{interschimbăm rândurile 2 şi 3}]{P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}4 & 4 & -4\\ \frac{1}{4} & 2 & 2\\ \frac{1}{2} & -1 & 7\end{bmatrix}.$$

- în final, eliminarea se termină cu încă o operaţie de rânduri:

$$\xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{2}\times\text{rândul 2 din rândul 3}} \begin{bmatrix}4 & 4 & -4\\ \frac{1}{4} & 2 & 2\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 8\end{bmatrix}.$$

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- cu aceasta, eliminarea este terminată
- acum putem citi factorizarea PA=LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}. \tag{18}$$

- intrările lui L se află în interiorul zerourilor din triunghiul inferior al matricii (sub diagonala principală), şi U este format de triunghiul superior
- permutarea finală (cumulativă) reprezintă matricea P

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- folosirea factorizării PA=LU pentru a rezolva sistemul de ecuaţii $Ax = b$ reprezintă doar o mică variaţie a versiunii A=LU
- înmulţim ecuaţia $Ax = b$ cu P la stânga, şi apoi continuăm ca mai înainte:

$$\begin{aligned} PAx &= Pb \\ LUx &= Pb \end{aligned} \tag{19}$$

- rezolvăm

$$\begin{aligned} &1. \qquad Lc = Pb \text{ pentru a găsi } c. \\ &2. \qquad Ux = c \text{ pentru a găsi } x. \end{aligned} \tag{20}$$

- cel mai important aspect este că, aşa cum am menţionat mai devreme, partea cea mai dificilă a calculului, şi anume determinarea factorizării PA=LU, poate fi făcută fără a cunoaşte pe b
- deoarece factorizarea LU rezultată este a lui PA, o versiune cu rândurile interschimbate a matricii coeficienţilor sistemului, este necesară o permutare a vectorului coeficienţilor liberi b în acelaşi fel, înainte de a se trece la etapa de substituţie înapoi

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- acest lucru se realizează prin folosirea lui *Pb* în primul pas al substituţiei înapoi
- valoarea formulării matriciale a eliminării gaussiene este evidentă: toate detaliile eliminării şi pivotării sunt automate şi sunt cuprinse în ecuaţii matriciale

Exemplul 10

- folosiţi factorizarea PA=LU pentru a rezolva sistemul $Ax = b$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- factorizarea PA=LU este cunoscută din (18)
- rămâne să efectuăm cele două substituţii înapoi

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- 1. $Lc = Pb$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- pornind de sus, avem

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ \frac{1}{4}(0) + c_2 &= 6 \Rightarrow c_2 = 6 \\ \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(6) + c_3 &= 5 \Rightarrow c_3 = 8. \end{aligned}$$

- 2. $Ux = c$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- pornind de jos, avem

$$\begin{aligned} 8x_3 &= 8 \Rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2(1) &= 6 \Rightarrow x_2 = 2 \\ 4x_1 + 4(2) - 4(1) &= 0 \Rightarrow x_1 = -1. \end{aligned} \tag{21}$$

- prin urmare, soluţia este $x = [-1, 2, 1]^T$

Exemplul 11

- rezolvaţi sistemul $2x_1 + 3x_2 = 4$, $3x_1 + 2x_2 = 1$ folosind factorizarea PA=LU cu pivotare parţială
- în formă matricială, sistemul se scrie sub formă de ecuaţie astfel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Factorizarea PA = LU

- începem prin a ignora vectorul coeficienţilor liberi b
- conform pivotării parţiale, rândurile 1 şi 2 trebuie interschimbate (deoarece $a_{21} > a_{11}$)
- pasul de eliminare este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{interschimbăm rândul 1 şi rândul 2}]{P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } \frac{2}{3} \times \text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

- prin urmare, factorizarea PA=LU este

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}}_{U}.$$

- prima substituţie înapoi $Lc = Pb$ este

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- pornind de sus, avem

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ \frac{2}{3}(1) + c_2 &= 4 \Rightarrow c_2 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

- a doua substituţie înapoi $Ux = c$ este

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

- pornind de jos, avem

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x_2 &= \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2(2) &= 1 \Rightarrow x_1 = -1. \end{aligned} \tag{22}$$

- prin urmare, soluţia este $x = [-1, 2]^T$

- orice matrice $n \times n$ are o factorizare PA=LU
- pur şi simplu urmăm regula pivotării parţiale, iar dacă pivotul care rezultă este zero, înseamnă că toate intrările care trebuie eliminate sunt deja zero, deci coloana este terminată

Vă mulţumesc!