Matematici Asistate de Calculator

Dr. Călin-Adrian POPA

Cursul 6

12 Martie 2019

- curbele spline reprezintă o abordare alternativă a interpolării datelor
- în interpolarea polinomială, o singură formulă, dată printr-un polinom, este folosită pentru a interpola toate punctele
- ideea curbelor spline este de a folosi mai multe formule, fiecare fiind un polinom de grad mic, pentru a interpola punctele
- cel mai simplu exemplu de curbă splină este o curbă splină liniară, în care punctele sunt unite prin segmente de dreaptă
- presupunem că ni se dă o mulţime de puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ cu $x_1 < \cdots < x_n$
- o curbă splină liniară constă din $n - 1$ segmente de dreaptă care sunt trasate între perechi adiacente de puncte
- Figura 1(a) prezintă o curbă splină liniară, în care, între fiecare pereche adiacentă de puncte (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), funcţia liniară $y = a_i + b_i x$ este trasată, având cele două puncte drept capete

4.4 Curbe spline cubice

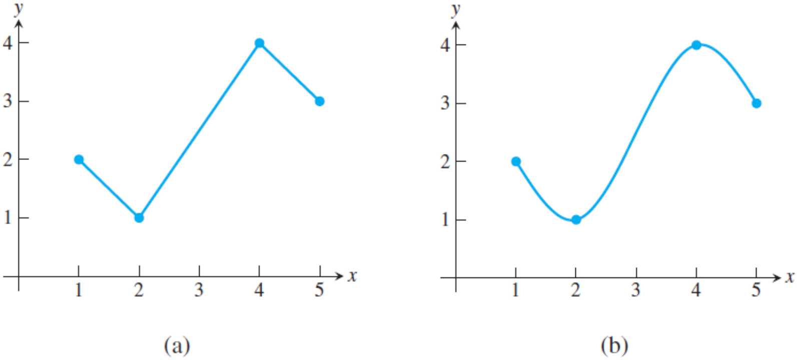

Figura 1: **Curbe spline care trec prin patru puncte.** (a) Curba splină liniară care trece prin $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(4, 4)$, şi $(5, 3)$ constă din trei polinoame liniare date de (1). (b) Curba splină cubică interpolând aceleaşi puncte, dată de (2).

4.4 Curbe spline cubice

- punctele date în figură sunt $(1,2)$, $(2,1)$, $(4,4)$, şi $(5,3)$, şi curba splină liniară este dată prin

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 2-(x-1) \text{ pe } [1,2] \\ S_2(x) &= 1+\frac{3}{2}(x-2) \text{ pe } [2,4] \\ S_3(x) &= 4-(x-4) \text{ pe } [4,5]. \end{aligned} \tag{1}$$

- curba splină liniară interpolează cu succes o mulţime arbitrară de n puncte
- totuşi, curbelor spline liniare le lipseşte netezimea
- curbele spline cubice sunt menite să împlinească acest neajuns al curbelor spline liniare
- o curbă splină cubică înlocuieşte funcţiile liniare trasate între puncte prin polinoame (cubice) de gradul 3
- un exemplu de curbă splină cubică interpolând aceleaşi puncte $(1,2)$, $(2,1)$, $(4,4)$, şi $(5,3)$ este prezentată în Figura 1(b)

4.4 Curbe spline cubice

- ecuaţiile care definesc acestă curbă sunt

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 2 - \frac{13}{8}(x-1) + 0(x-1)^2 + \frac{5}{8}(x-1)^3 \text{ pe } [1,2] \\ S_2(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{15}{8}(x-2)^2 - \frac{5}{8}(x-2)^3 \text{ pe } [2,4] \\ S_3(x) &= 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{15}{8}(x-4)^2 + \frac{5}{8}(x-4)^3 \text{ pe } [4,5]. \end{aligned} \qquad (2)$$

- observăm trecerea netedă de la un S_i la următorul în punctele de bază, numite şi „noduri” $x = 2$ şi $x = 4$
- acest lucru se realizează prin aranjarea părţilor adiacente S_i şi S_{i+1} ale curbei spline astfel încât să aibă aceleaşi valori ale derivatelor de ordinul zero, unu şi doi evaluate în noduri
- cum se face acest lucru reprezintă subiectul secţiunii următoare
- fiind date n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, există în mod evident o singură curbă splină liniară care trece prin aceste puncte
- acest lucru nu este adevărat pentru curbele spline cubice
- vom vedea că există o infinitate de astfel de curbe care trec printr-o mulţime de puncte
- condiţii suplimentare vor fi adăugate atunci când este necesară fixarea unei anumite curbe spline cubice de interes

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- pentru a vorbi mai precis despre proprietăţile curbelor spline cubice, dăm următoarea definiţie: presupunem că avem n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, în care valorile x_i sunt distincte şi ordonate crescător
- o **curbă splină cubică** $S(x)$ care trece prin punctele $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ este o mulţime de polinoame cubice

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \text{ pe } [x_1, x_2] \\
S_2(x) &= y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \text{ pe } [x_2, x_3] \\
&\vdots \\
S_{n-1}(x) &= y_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3 \text{ pe } [x_{n-1}, x_n]
\end{aligned} \tag{3}$$

cu următoarele proprietăţi:

Faptul 1

$S_i(x_i) = y_i$ şi $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

Faptul 2

$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, n-1$.

Faptul 3

$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ pentru $i = 2, \ldots, n-1$.

- Faptul 1 garantează că splina cubică $S(x)$ interpolează punctele date
- Faptul 2 forţează părţile adiacente ale splinei să se întâlnească în acelaşi punct, şi Faptul 3 face acelaşi lucru pentru curbură, reprezentată prin a doua derivată

Exemplul 1

- verificaţi că $\{S_1, S_2, S_3\}$ din (2) satisfac toate proprietăţile curbelor spline cubice pentru punctele de bază $(1,2)$, $(2,1)$, $(4,4)$, şi $(5,3)$
- verificăm toate cele trei proprietăţi
- *Faptul 1.* Sunt $n = 4$ puncte de bază
- trebuie să verificăm că

$$
\begin{aligned}
S_1(1) &= 2 \quad \text{şi} \quad S_1(2) = 1 \\
S_2(2) &= 1 \quad \text{şi} \quad S_2(4) = 4 \\
S_3(4) &= 4 \quad \text{şi} \quad S_3(5) = 3.
\end{aligned}
$$

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- aceste egalităţi rezultă uşor din ecuaţiile (2)
- *Faptul 2.* Primele derivate ale funcţiilor spline sunt

$$\begin{aligned}
S_1'(x) &= -\frac{13}{8} + \frac{15}{8}(x-1)^2 \\
S_2'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{15}{4}(x-2) - \frac{15}{8}(x-2)^2 \\
S_3'(x) &= \frac{1}{4} - \frac{15}{4}(x-4) + \frac{15}{8}(x-4)^2.
\end{aligned}$$

- trebuie să verificăm că $S_1'(2) = S_2'(2)$ şi $S_2'(4) = S_3'(4)$
- prima egalitate este

$$-\frac{13}{8} + \frac{15}{8} = \frac{1}{4},$$

iar a doua este

$$\frac{1}{4} + \frac{15}{4}(4-2) - \frac{15}{8}(4-2)^2 = \frac{1}{4},$$

ambele fiind adevărate

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- *Faptul 3.* Derivatele secunde sunt

$$\begin{aligned} S_1''(x) &= \frac{15}{4}(x-1) \\ S_2''(x) &= \frac{15}{4} - \frac{15}{4}(x-2) \\ S_3''(x) &= -\frac{15}{4} + \frac{15}{4}(x-4). \end{aligned} \tag{4}$$

- trebuie să verificăm că $S_1''(2) = S_2''(2)$ şi $S_2''(4) = S_3''(4)$, ambele fiind adevărate
- prin urmare, (2) este o curbă splină cubică

- construirea unei curbe spline dintr-o mulţime de puncte înseamnă găsirea coeficienţilor b_i, c_i, d_i care fac ca Faptele 1–3 să aibă loc
- înainte de a vedea cum putem determina coeficienţii necunoscuţi b_i, c_i, d_i ai curbei spline, să numărăm câte condiţii impune definiţia
- prima jumătate din Faptul 1 este deja reflectată în forma (3); aceasta ne spune că termenul constant al curbei cubice S_i trebuie să fie y_i

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- a doua jumătate din Faptul 1 constă din $n-1$ ecuaţii separate care trebuie să fie satisfăcute de coeficienţi, pe care îi vom considera ca fiind necunoscute
- fiecare din Faptele 2 şi 3 adaugă încă $n-2$ ecuaţii, totalizând astfel $n-1+2(n-2)=3n-5$ ecuaţii independente care trebuie satisfăcute
- câţi coeficienţi necunoscuţi avem?
- pentru fiecare porţiune S_i a curbei spline, trei coeficienţi b_i, c_i, d_i sunt necesari, totalizând $3(n-1)=3n-3$ coeficienţi
- prin urmare, găsirea coeficienţilor presupune rezolvarea a $3n-5$ ecuaţii liniare în $3n-3$ necunoscute
- dacă nu cumva există ecuaţii inconsistente în sistem (şi nu există), sistemul de ecuaţii este subdeterminat, şi prin urmare are o infinitate de soluţii
- cu alte cuvinte, există o infinitate de curbe spline cubice care trec printr-o mulţime arbitrară de puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- utilizatorii curbelor spline exploatează de obicei lipsa de ecuaţii prin adăugarea a două ecuaţii suplimentare celor $3n-5$ ecuaţii existente, pentru a forma un sistem de m ecuaţii cu m necunoscute, unde $m=3n-3$

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- în afară de a permite utilizatorului să constrângă curba splină pentru a satisface specificaţiile date, reducerea posibilităţilor la o singură soluţie face mai simplă calcularea şi descrierea rezultatului
- cea mai simplă modalitate de a adăuga două constrângeri suplimentare este de a cere, în plus faţă de cele $3n - 5$ constrângeri anterioare, ca $S(x)$ să aibă un punct de inflexiune la fiecare capăt al intervalului de definiţie $[x_1, x_n]$
- constrângerile adăugate Faptelor 1–3 sunt

Faptul 4

Curbă splină naturală. $S_1''(x_1) = 0$ şi $S_{n-1}''(x_n) = 0$.

- o curbă splină care satisface aceste condiţii suplimentare se numeşte curbă splină **naturală**
- observăm că (2) este o curbă splină cubică naturală, deoarece se poate verifica uşor din (4) că $S_1''(1) = 0$ şi $S_3''(5) = 0$
- există şi alte feluri de a adăuga cele două condiţii suplimentare

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- de obicei, ca în cazul splinelor naturale, acestea determină proprietăţi suplimentare ale capetelor din stânga şi din dreapta ale curbei spline, astfel încât acestea sunt numite **condiţii de capăt**
- acum că avem numărul corect de ecuaţii, $3n-3$ ecuaţii în $3n-3$ necunoscute, putem să le rezolvăm pentru a găsi coeficienţii curbei spline
- mai întâi, vom scrie ecuaţiile în necunoscutele b_i, c_i, d_i
- partea a doua a Faptului 1 implică atunci următoarele $n-1$ ecuaţii:

$$\begin{aligned} y_2 &= S_1(x_2) = y_1 + b_1(x_2-x_1) + c_1(x_2-x_1)^2 + d_1(x_2-x_1)^3 \\ &\vdots \\ y_n &= S_{n-1}(x_n) = y_{n-1} + b_{n-1}(x_n-x_{n-1}) + c_{n-1}(x_n-x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x_n-x_{n-1})^3. \end{aligned} \tag{5}$$

- Faptul 2 generează alte $n-2$ ecuaţii,

$$\begin{aligned} 0 &= S_1'(x_2) - S_2'(x_2) = b_1 + 2c_1(x_2-x_1) + 3d_1(x_2-x_1)^2 - b_2 \\ &\vdots \\ 0 &= S_{n-2}'(x_{n-1}) - S_{n-1}'(x_{n-1}) = b_{n-2} + 2c_{n-2}(x_{n-1}-x_{n-2}) \\ &\quad +3d_{n-2}(x_{n-1}-x_{n-2})^2 - b_{n-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- iar Faptul 3 implică următoarele $n-2$ ecuaţii:

$$\begin{aligned} 0 &= S_1''(x_2) - S_2''(x_2) = 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) - 2c_2 \\ &\vdots \\ 0 &= S_{n-2}''(x_{n-1}) - S_{n-1}''(x_{n-1}) = 2c_{n-2} + 6d_{n-2}(x_{n-1} - x_{n-2}) - 2c_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

- în loc să rezolvăm ecuaţiile în această formă, sistemul poate fi simplificat drastic prin decuplarea ecuaţiilor
- făcând anumite calcule, un sistem de ecuaţii mult mai mic în necunoscutele c_i poate fi rezolvat mai întâi, fiind urmat de formule explicite pentru b_i şi d_i în funcţie de valorile determinate ale necunoscutelor c_i
- este mai simplu din punct de vedere conceptual dacă se introduce o necunoscută suplimentară $c_n = S_{n-1}''(x_n)/2$
- în plus, introducem notaţiile $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ şi $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$
- atunci (7) poate fi rezolvată pentru a găsi coeficienţii

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i} \text{ pentru } i = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- rezolvând (5) pentru a găsi necunoscutele b_i, obţinem

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - d_i\delta_i^2 \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - c_i\delta_i - \frac{\delta_i}{3}(c_{i+1} - c_i) \\ &= \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \end{aligned} \tag{9}$$

  pentru $i = 1, \ldots, n-1$
- înlocuind (8) şi (9) în (6) rezultă în următoarele $n-2$ ecuaţii în necunoscutele $c_1, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned} \delta_1 c_1 + 2(\delta_1 + \delta_2)c_2 + \delta_2 c_3 &= 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ &\vdots \\ \delta_{n-2}c_{n-2} + 2(\delta_{n-2} + \delta_{n-1})c_{n-1} + \delta_{n-1}c_n &= 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right). \end{aligned}$$

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- încă două ecuaţii sunt date de condiţiile de curbă splină naturală (Faptul 4):

$$\begin{aligned} S_1''(x_1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2c_1 = 0 \\ S_{n-1}''(x_n) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2c_n = 0. \end{aligned}$$

- aceasta ne dă un total de n ecuaţii cu n necunoscute c_i, care pot fi scrise în formă matricială astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1 + 2\delta_2 & \delta_2 & \ddots & & \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2 + 2\delta_3 & \delta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2} + 2\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

- după ce $c_1, \ldots, c_n$ sunt obţinute din (10), $b_1, \ldots, b_{n-1}$ şi $d_1, \ldots, d_{n-1}$ pot fi calculate din (8) şi (9)
- observăm că (10) are întotdeauna o soluţie pentru necunoscutele c_i

4.4.1 Proprietăţile curbelor spline

- matricea coeficienţilor este strict diagonal dominantă, deci rezultă că există o soluţie unică pentru necunoscutele c_i şi prin urmare şi pentru b_i şi d_i
- am demonstrat astfel următoarea teoremă:

Teorema 1

Fie $n \geq 2$. Pentru o mulţime de puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ cu valori x_i distincte, există o singură curbă splină cubică naturală care interpolează punctele.

Algoritmul 1 (Curbă splină cubică naturală)

Dându-se $x = [x_1, \ldots, x_n]$, unde $x_1 < \cdots < x_n$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$
for $i = 1, \ldots, n-1$
$a_i = y_i$
$\delta_i = x_{i+1} - x_i$
$\Delta_i = y_{i+1} - y_i$
end
Rezolvăm (10) pentru a găsi $c_1, \ldots, c_n$
for $i = 1, \ldots, n-1$
$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$
$b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$
end
Curba splină cubică naturală este
$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ pe $[x_i, x_{i+1}]$ pentru $i = 1, \ldots, n-1$.

Exemplul 2

- găsiţi curba splină cubică naturală care trece prin $(0, 3)$, $(1, -2)$, şi $(2, 1)$
- coordonatele x sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, şi $x_3 = 2$
- coordonatele y sunt $a_1 = y_1 = 3$, $a_2 = y_2 = -2$, şi $a_3 = y_3 = 1$, iar diferenţele sunt $\delta_1 = \delta_2 = 1$, $\Delta_1 = -5$, şi $\Delta_2 = 3$
- ecuaţia matricială tridiagonală (10) este

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- soluţia este $[c_1, c_2, c_3]^T = [0, 6, 0]^T$

- acum, (8) şi (9) ne dau

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{c_2 - c_1}{3\delta_1} = \frac{6}{3} = 2 \\
d_2 &= \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = \frac{-6}{3} = -2 \\
b_1 &= \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3}(2c_1 + c_2) = -5 - \frac{1}{3}(6) = -7 \\
b_2 &= \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3}(2c_2 + c_3) = 3 - \frac{1}{3}(12) = -1.
\end{aligned}$$

- prin urmare, curba splină cubică este

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 3 - 7x + 0x^2 + 2x^3 \text{ pe } [0, 1] \\
S_2(x) &= -2 - 1(x - 1) + 6(x - 1)^2 - 2(x - 1)^3 \text{ pe } [1, 2].
\end{aligned}$$

4.5 Curbe Bézier

- curbele Bézier sunt curbe spline care permit utilizatorului să controleze pantele curbei în noduri
- în schimbul acestui control suplimentar, netezimea primei şi celei de-a doua derivate într-un anumit nod, care au loc automat în cazul curbelor spline cubice din secţiunea anterioară, nu sunt garantate în acest caz
- curbele Bézier sunt potrivite pentru cazurile în care colţurile (prime derivate discontinue) şi schimbări bruşte ale curburii (derivate secunde discontinue) sunt proprietăţi necesare
- Pierre Bézier a dezvoltat ideea cât timp lucra pentru compania de automobile Renault
- aceeaşi idee a fost descoperită independent de Paul de Casteljau, care lucra pentru Citroen, o companie de automobile rivală
- a fost considerat un secret industrial de către ambele companii, iar faptul că ambii au dezvoltat ideea a ieşit la lumină abia după ce Bézier şi-a publicat rezultatele
- astăzi, curbele Bézier sunt o piatră de temelie a proiectării asistate de calculator (CAD)

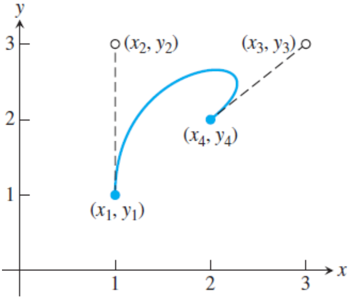

Figura 2: **Curba Bézier din Exemplul 3.** Punctele (x_1, y_1) şi (x_4, y_4) sunt puncte spline, în timp ce (x_2, y_2) şi (x_3, y_3) sunt puncte de control.

4.5 Curbe Bézier

- fiecare parte dintr-o curbă Bézier planară este determinată de patru puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)
- primul şi ultimul dintre puncte sunt capetele curbei spline, iar cele două puncte din mijloc sunt puncte de control, după cum se arată în Figura 2
- curba părăseşte punctul (x_1, y_1) de-a lungul direcţiei tangente $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ şi se termină la (x_4, y_4) de-a lungul direcţiei tangente $(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$
- ecuaţiile care realizează aceasta sunt exprimate sub forma curbei parametrice $(x(t), y(t))$, pentru $0 \leq t \leq 1$

Algoritmul 2 (Curbă Bézier)

Dându-se capetele (x_1, y_1), (x_4, y_4)
Dându-se punctele de control (x_2, y_2), (x_3, y_3)
Considerăm

$$\begin{aligned}
b_x &= 3(x_2 - x_1)\\
c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x\\
d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x\\
b_y &= 3(y_2 - y_1)\\
c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y\\
d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y.
\end{aligned}$$

Curba Bézier este definită pentru $0 \leq t \leq 1$ prin

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3\\
y(t) &= y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3.
\end{aligned}$$

- sunt uşor de verificat cerinţele de mai sus din aceste ecuaţii
- de fapt,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_1 \\ x'(0) &= 3(x_2 - x_1) \\ x(1) &= x_4 \\ x'(1) &= 3(x_4 - x_3), \end{aligned} \tag{11}$$

şi cele analoage au loc pentru $y(t)$

Exemplul 3

- găsiţi curba Bézier $(x(t), y(t))$ care trece prin punctele $(x, y) = (1, 1)$ şi $(2, 2)$, având punctele de control $(1, 3)$ şi $(3, 3)$
- cele patru puncte sunt $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (1, 3)$, $(x_3, y_3) = (3, 3)$, şi $(x_4, y_4) = (2, 2)$
- formulele Bézier ne dau $b_x = 0$, $c_x = 6$, $d_x = -5$ şi $b_y = 6$, $c_y = -6$, $d_y = 1$

4.5 Curbe Bézier

- curba Bézier rezultată

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 1 + 6t^2 - 5t^3 \\
y(t) &= 1 + 6t - 6t^2 + t^3
\end{aligned}
$$

  este prezentată în Figura 2, împreună cu punctele de control

- curbele Bézier sunt elementele de bază care pot fi înlănţuite pentru a interpola valori arbitrare ale funcţiilor şi ale pantelor
- ele reprezintă o îmbunătăţire a curbelor spline cubice, în sensul că pantele şi nodurile pot fi specificate de către utilizator
- totuşi, această libertate este în detrimentul netezimii: derivatele secunde din cele două direcţii diferite nu sunt în general egale în noduri
- în anumite aplicaţii, această diferenţă reprezintă un avantaj
- ca un caz special, când punctele de control sunt egale cu capetele, curba este un simplu segment de dreaptă, după cum se arată în următorul exemplu

Exemplul 4

- demonstraţi că o curbă Bézier pentru care $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ şi $(x_3, y_3) = (x_4, y_4)$ este un segment de dreaptă
- formulele Bézier arată că ecuaţiile sunt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + 3(x_4 - x_1)t^2 - 2(x_4 - x_1)t^3 = x_1 + (x_4 - x_1)t^2(3 - 2t) \\ y(t) &= y_1 + 3(y_4 - y_1)t^2 - 2(y_4 - y_1)t^3 = y_1 + (y_4 - y_1)t^2(3 - 2t), \end{aligned}$$

  pentru $0 \leq t \leq 1$
- fiecare punct de pe această curbă splină are forma

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) &= (x_1 + r(x_4 - x_1), y_1 + r(y_4 - y_1)) \\ &= ((1 - r)x_1 + rx_4, (1 - r)y_1 + ry_4), \end{aligned}$$

  unde $r = t^2(3 - 2t)$
- deoarece $0 \leq r \leq 1$, fiecare punct se află pe segmentul de dreaptă care uneşte pe (x_1, y_1) cu (x_4, y_4)

5 Cele mai mici pătrate

- conceptul de cele mai mici pătrate datează din vremea muncii de pionierat al lui Gauss şi Legendre, de la începutul secolului al 19-lea
- folosirea lui este foarte răspândită în statistica modernă şi în modelarea matematică
- tehnicile fundamentale ale regresiei şi estimării parametrice au devenit instrumente de bază în ştiinţe şi în inginerie
- în acest capitol, ecuaţiile normale sunt introduse şi aplicate pentru o varietate de probleme de interpolare a datelor
- apoi, o abordare mai sofisticată, folosind factorizarea QR, este explorată, urmată de o discuţie despre problemele neliniare de tip cele mai mici pătrate

5.1 Cele mai mici pătrate şi ecuaţiile normale

- nevoia pentru metode de tip cele mai mici pătrate vine din două direcţii diferite, corespunzând celor studiate în Capitolele 3 şi 4
- în Capitolul 3, am învăţat cum să găsim o soluţie a lui $Ax = b$, când aceasta există
- în acest capitol, vom afla ce să facem atunci când nu există o soluţie
- când ecuaţiile sunt inconsistente, ceea ce este foarte posibil dacă numărul de ecuaţii este mai mare decât numărul de necunoscute, răspunsul este că trebuie să găsim o aproximare de tip cele mai mici pătrate
- Capitolul 4 a tratat problema găsirii unor polinoame care interpolează exact punctele de bază
- însă, dacă punctele sunt foarte multe, sau sunt colectate doar cu o anumită eroare, interpolarea exactă a unui polinom de grad mare este rareori cea mai bună abordare
- în aceste cazuri, este mai rezonabil să fie interpolat un model mai simplu, care s-ar putea doar să aproximeze punctele de bază
- ambele probleme, rezolvarea de sisteme inconsistente de ecuaţii şi interpolarea aproximativă a datelor, sunt cele care motivează metodele de tip cele mai mici pătrate

5.1.1 Sisteme inconsistente de ecuaţii

- nu este greu să scriem un sistem de ecuaţii care nu are soluţii
- să considerăm următoarele trei ecuaţii în două necunoscute:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned} \tag{12}$$

- orice soluţie trebuie să satisfacă prima şi a treia ecuaţie, ceea ce nu este posibil
- un sistem de ecuaţii care nu are nicio soluţie se numeşte **inconsistent**
- dar ce înseamnă un sistem care nu are nicio soluţie?
- poate coeficienţii sunt uşor inexacţi
- în multe cazuri, numărul de ecuaţii este mai mare decât numărul de variabile necunoscute, făcând puţin probabil faptul ca o soluţie să satisfacă toate ecuaţiile
- de fapt, m ecuaţii în n necunoscute nu au de obicei soluţie când $m > n$
- deşi eliminarea gaussiană nu ne va da o soluţie a unui sistem inconsistent $Ax = b$, nu ar trebui să renunţăm complet
- o alternativă în această situaţie este de a găsi un vector x care se apropie cel mai mult de faptul de a fi o soluţie

5.1.1 Sisteme inconsistente de ecuaţii

- dacă alegem această „apropiere" să însemne aproape în sensul distanţei euclidiene, există un algoritm simplu pentru a afla cea mai apropiată valoare a lui x
- acest x special va fi numit **soluţia în sensul celor mai mici pătrate**
- putem vedea mai bine eşecul sistemului (12) de a avea o soluţie scriindu-l într-o altă formă
- forma matricială a sistemului este $Ax = b$, sau

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

- perspectiva alternativă a înmulţirii matrice-vector este de a scrie ecuaţia echivalentă

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

- de fapt, orice sistem $m \times n$ $Ax = b$ poate fi privit ca ecuaţia vectorială

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = b, \tag{15}$$

  care îl exprimă pe b ca o combinaţie liniară a coloanelor v_i ale lui A, cu coeficienţii $x_1, \ldots, x_n$
- în cazul nostru, încercăm să obţinem vectorul ţintă b ca o combinaţie liniară a doi alţi vectori tridimensionali
- deoarece combinaţiile de doi vectori tridimensionali formează un plan în $\mathbb{R}^3$, ecuaţia (14) are o soluţie doar dacă vectorul b se află în acel plan
- aceasta va fi întotdeauna situaţia când încercăm să rezolvăm m ecuaţii în n necunoscute, cu $m > n$
- prea multe ecuaţii fac problema să fie supraspecificată şi ecuaţiile să fie inconsistente

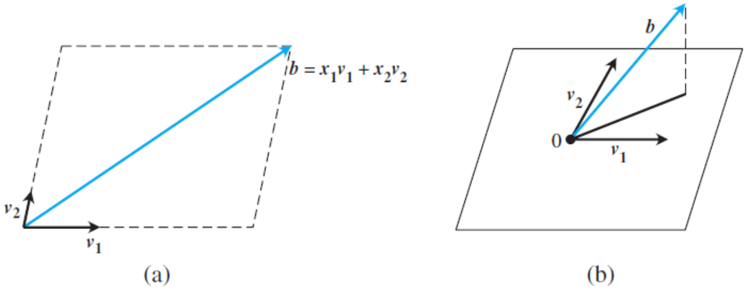

Figura 3: **Soluţia geometrică a unui sistem de trei ecuaţii cu două necunoscute.** (a) Ecuaţia (14) cere ca vectorul b, partea dreaptă a ecuaţiei, să fie o combinaţie liniară a vectorilor coloană v_1 şi v_2. (b) Dacă b se află în afara planului definit de v_1 şi v_2, nu va exista nicio soluţie. Soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ face ca vectorul combinaţie $A\overline{x}$ să fie acela din planul Ax care este cel mai aproape de b în sensul distanţei euclidiene.

5.1.1 Sisteme inconsistente de ecuaţii

- Figura 3(b) prezintă o direcţie în care să pornim în cazul în care nu există o soluţie
- nu există nicio pereche x_1, x_2 care rezolvă (12), dar există un punct în planul Ax al tuturor candidaţilor posibili care este cel mai aproape de b
- acest vector special $A\overline{x}$ se distinge prin următorul fapt: vectorul rezidual $b - A\overline{x}$ este perpendicular pe planul $\{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$
- vom exploata acest fapt pentru a găsi o formulă pentru $\overline{x}$, soluţia în sensul celor mai mici pătrate
- în primul rând, stabilim anumite notaţii
- reamintim conceptul de **transpusă** A^T a matricii $m \times n$ A, care este matricea $n \times m$ ale cărei rânduri sunt coloanele lui A şi ale cărei coloane sunt rândurile lui A, în aceeaşi ordine
- transpusa sumei a două matrici este suma transpuselor, $(A + B)^T = A^T + B^T$
- transpusa produsului a două matrici este produsul transpuselor în ordine inversă—şi anume, $(AB)^T = B^T A^T$
- pentru a lucra cu perpendicularitatea, ne reamintim că doi vectori sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este zero

- pentru doi vectori coloană m-dimensionali u şi v, putem scrie produsul scalar doar în termeni de înmulţire de matrici astfel:

$$u^T v = [u_1, \ldots, u_m] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}. \tag{16}$$

- vectorii u şi v sunt perpendiculari, sau **ortogonali**, dacă $u^T \cdot v = 0$, folosind înmulţirea matricială obişnuită
- acum revenim la a căuta formula pentru $\overline{x}$
- am stabilit că

$$(b - A\overline{x}) \perp \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

- exprimând perpendicularitatea în termeni de înmulţire de matrici, găsim că

$$(Ax)^T (b - A\overline{x}) = 0, \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbb{R}^n.$$

5.1.1 Sisteme inconsistente de ecuaţii

- folosind faptul anterior despre transpuse, putem rescrie această expresie în forma

$$x^T A^T (b - A\overline{x}) = 0, \text{ pentru orice } x \text{ din } \mathbb{R}^n,$$

ceea ce înseamnă că vectorul n-dimensional $A^T(b - A\overline{x})$ este perpendicular pe orice vector x din $\mathbb{R}^n$, inclusiv el însuşi

- există un singur fel în care acest lucru se poate întâmpla:

$$A^T(b - A\overline{x}) = 0.$$

- aceasta ne dă un sistem de ecuaţii care defineşte soluţia în sensul celor mai mici pătrate, şi anume

$$A^T A\overline{x} = A^T b. \tag{17}$$

- sistemul de ecuaţii (17) este cunoscut ca ecuaţiile normale
- soluţia $\overline{x}$ a lui este aşa-numita soluţie în sensul celor mai mici pătrate a sistemului $Ax = b$

Algoritmul 3 (Ecuaţiile normale pentru cele mai mici pătrate)

Dându-se sistemul inconsistent

$$Ax = b,$$

rezolvăm

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ care minimizează lungimea euclidiană a vectorului rezidual $r = b - Ax$.

Exemplul 5

- folosiţi ecuaţiile normale pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului inconsistent (12)
- problema în formă matricială $Ax = b$ are componentele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- componentele ecuaţiilor normale sunt

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

şi

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- ecuaţiile normale

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

pot fi rezolvate acum prin eliminare gaussiană

- forma tabulară este

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 6 \\ 1 & 3 & | & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & 8/3 & | & 2 \end{bmatrix},$$

care, rezolvată, ne dă $\overline{x} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}]^T = [7/4, 3/4]^T$

5.1.1 Sisteme inconsistente de ecuaţii

- înlocuind soluţia în sensul celor mai mici pătrate în problema iniţială ne dă

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- pentru a măsura succesul cu care am interpolat datele, calculăm rezidualul soluţiei în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ ca fiind

$$r = b - A\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

- dacă rezidualul este vectorul zero, atunci am rezolvat sistemul iniţial $Ax = b$ exact
- dacă nu, lungimea euclidiană a vectorului rezidual este o măsură a cât de departe este $\overline{x}$ de a fi o soluţie
- există cel puţin trei moduri de a exprima mărimea rezidualului

- lungimea euclidiană a unui vector,

$$||r||_2 = \sqrt{r_1^2 + \cdots + r_m^2}, \qquad (18)$$

  este o normă, numită **2-normă**
- **eroarea pătratică**

$$\text{EP} = r_1^2 + \cdots + r_m^2,$$

  şi **rădăcina erorii medii pătratice** (rădăcina pătrată a mediei erorii pătratice)

$$\text{REMP} = \sqrt{\text{EP}/m} = \sqrt{\left(r_1^2 + \cdots + r_m^2\right)/m}, \qquad (19)$$

  sunt de asemenea folosite pentru a măsura eroarea soluţiei în sensul celor mai mici pătrate
- cele trei expresii sunt strâns legate între ele; şi anume

$$\text{REMP} = \frac{\sqrt{\text{EP}}}{\sqrt{m}} = \frac{||r||_2}{\sqrt{m}},$$

  astfel că acel $\overline{x}$ care minimizează una dintre ele, le minimizează pe toate

- pentru Exemplul 5, EP $= (0.5)^2 + 0^2 + (-0.5)^2 = 0.5$, 2-norma erorii este $||r||_2 = \sqrt{0.5} \approx 0.707$, şi REMP $= \sqrt{0.5/3} = 1/\sqrt{6} \approx 0.408$

Exemplul 6

- rezolvaţi următoarea problemă de tip cele mai mici pătrate:
$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$
- ecuaţiile normale $A^T Ax = A^T b$ sunt

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

- soluţia ecuaţiilor normale este $\overline{x_1} = 3.8$ şi $\overline{x_2} = 1.8$

- vectorul rezidual este

$$\begin{aligned} r &= b - A\overline{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.8 \\ 1.8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.4 \\ 13 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2 \\ -2.2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

care are norma euclidiană $||r||_2 = \sqrt{(0.4)^2 + 2^2 + (-2.2)^2} = 3$

5.1.2 Interpolarea unor modele pentru mulţimi de date

- fie $(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m)$ o mulţime de puncte din plan, la care ne vom referi de multe ori sub numele de „date”
- fiind dată o clasă fixată de modele, cum ar fi, de exemplu, toate dreptele $y = c_1 + c_2 t$, căutăm să localizăm acea instanţă a modelului care interpolează cel mai bine punctele în 2-normă
- nucleul ideii de cele mai mici pătrate constă din măsurarea rezidualului interpolării prin erorile pătratice ale modelului în punctele date şi găsirea acelor parametri ai modelului care minimizează această cantitate
- acest criteriu este ilustrat în Figura 4

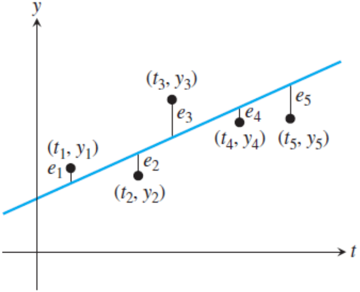

Figura 4: **Interpolarea de tip cele mai mici pătrate a unei drepte pentru o mulţime de date.** Cea mai bună dreaptă este cea pentru care eroarea pătratică $e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_5^2$ este cea mai mică posibil dintre toate dreptele $y = c_1 + c_2 t$.

Exemplul 7

- găsiţi dreapta care interpolează cel mai bine punctele $(t, y) = (1, 2)$, $(-1, 1)$, şi $(1, 3)$ din Figura 5

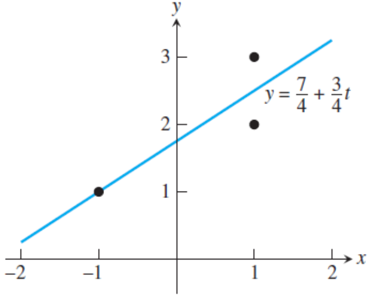

Figura 5: **Cea mai bună dreaptă în Exemplul 7.** Fiecare dintre punctele date se află deasupra, pe, sau dedesubtul celei mai bune drepte.

- modelul este $y = c_1 + c_2 t$, şi scopul este de a găsi cele mai bune valori ale lui c_1 şi c_2
- înlocuind punctele în model, obţinem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(1) &= 2 \\ c_1 + c_2(-1) &= 1 \\ c_1 + c_2(1) &= 3, \end{aligned}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- ştim că acest sistem nu are o soluţie (c_1, c_2) din două motive diferite
- primul, dacă ar avea o soluţie, atunci $y = c_1 + c_2 t$ ar fi o dreaptă care conţine punctele date

- totuşi, se poate vedea uşor că punctele nu sunt coliniare
- al doilea, acesta este sistemul corespunzător ecuaţiei (13) pe care am discutat-o la începutul acestui capitol
- am observat atunci că prima şi a treia ecuaţie sunt inconsistente, şi am găsit că cea mai bună soluţie în sensul celor mai mici pătrate este $(c_1, c_2) = (7/4, 3/4)$
- prin urmare, cea mai bună dreaptă este $y = 7/4 + 3/4t$

- putem evalua interpolarea folosind statistica definită anterior
- rezidualii punctelor date sunt

t	y	dreapta	eroarea
1	2	2.5	-0.5
-1	1	1.0	0.0
1	3	2.5	0.5

- REMP-ul este $1/\sqrt{6}$, după cum am văzut mai sus
- exemplul anterior sugerează o metodă în trei paşi pentru rezolvarea problemelor de interpolare de date în sensul celor mai mici pătrate

5.1.2 Interpolarea unor modele pentru mulţimi de date

Algoritmul 4 (Interpolarea datelor folosind cele mai mici pătrate)

Dându-se o mulţime de m puncte $(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m)$.
PASUL 1. Alegem un model. Identificăm un model parametrizat, de exemplu $y = c_1 + c_2 t$, care va fi folosit pentru a interpola datele.
PASUL 2. Forţăm modelul să interpoleze datele. Înlocuim punctele în model. Fiecare punct dă naştere unei ecuaţii ale cărei necunoscute sunt parametri, de exemplu c_1 şi c_2 în modelul cu dreapta. Aceasta rezultă într-un sistem $Ax = b$, în care necunoscuta x reprezintă parametrii necunoscuţi.
PASUL 3. Rezolvăm ecuaţiile normale. Soluţia în sensul celor mai mici pătrate pentru parametri va fi găsită ca soluţia sistemului de ecuaţii normale $A^T Ax = A^T b$.

- aceşti paşi sunt ilustraţi în următorul exemplu:

Exemplul 8

- găsiţi cea mai bună dreaptă şi cea mai bună parabolă pentru cele patru puncte $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, -2)$ din Figura 6

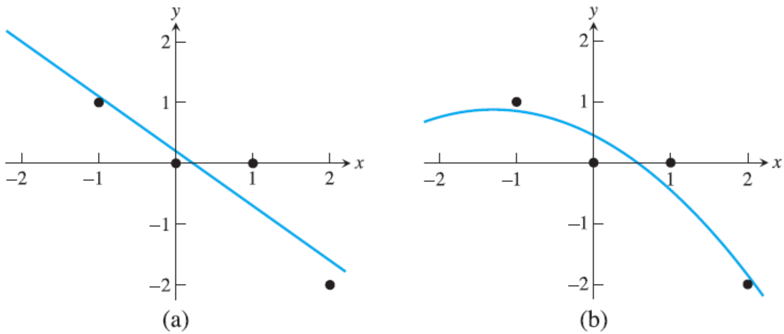

Figura 6: **Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru punctele din Exemplul 8.** (a) Cea mai bună dreaptă $y = 0.2 - 0.9t$. REMP-ul este 0.418. (b) Cea mai bună parabolă $y = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$. REMP-ul este 0.335.

5.1.2 Interpolarea unor modele pentru mulţimi de date

- conform algoritmului precedent, vom urma trei paşi:
- (1) alegem modelul $y = c_1 + c_2 t$ ca mai înainte
- (2) forţând modelul să interpoleze datele, obţinem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(-1) &= 1 \\ c_1 + c_2(0) &= 0 \\ c_1 + c_2(1) &= 0 \\ c_1 + c_2(2) &= -2, \end{aligned}$$

sau, în formă matricială,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- (3) ecuaţiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienţii c_1 şi c_2 rezultă în găsirea celei mai bune drepte ca fiind $y = c_1 + c_2 t = 0.2 - 0.9t$
- rezidualii sunt

t	y	dreapta	eroarea
-1	1	1.1	-0.1
0	0	0.2	-0.2
1	0	-0.7	0.7
2	-2	-1.6	-0.4

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică $\text{EP} = (-0.1)^2 + (-0.2)^2 + (0.7)^2 + (-0.4)^2 = 0.7$ şi $\text{REMP} = \sqrt{0.7}/\sqrt{4} = 0.418$

- în continuare, extindem acest exemplu păstrând aceleaşi patru puncte, dar schimbând modelul
- luăm $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ şi înlocuim punctele date, obţinând

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2(-1) + c_3(-1)^2 &= 1 \\
c_1 + c_2(0) + c_3(0)^2 &= 0 \\
c_1 + c_2(1) + c_3(1)^2 &= 0 \\
c_1 + c_2(2) + c_3(2)^2 &= -2,
\end{aligned}
$$

sau, în formă matricială,

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.
$$

- de data aceasta, ecuaţiile normale sunt trei ecuaţii în trei necunoscute:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

- rezolvând pentru a găsi coeficienţii rezultă în găsirea celei mai bune parabole $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0.45 - 0.65t - 0.25t^2$
- erorile reziduale sunt date în tabelul următor:

t	y	parabola	eroarea
-1	1	0.85	-0.15
0	0	0.45	-0.45
1	0	-0.45	0.45
2	-2	-1.85	-0.15

- statisticile de eroare sunt eroarea pătratică $\mathrm{EP} = (0.15)^2 + (-0.45)^2 + (0.45)^2 + (-0.15)^2 = 0.45$ şi $\mathrm{REMP} = \sqrt{0.45}/\sqrt{4} \approx 0.335$

5.2 O trecere în revistă a modelelor

- modelele anterioare liniare şi polinomiale ilustrează folosirea celor mai mici pătrate pentru a interpola datele
- arta modelării datelor include o varietate largă de modele, unele dintre ele derivate din principiile fizice care stau la baza sursei datelor, iar altele bazate pe factori empirici

- datele periodice necesită modele periodice
- temperatura aerului de afară, de exemplu, respectă cicluri pe numeroase scale de timp, incluzând cicluri zilnice şi anuale guvernate de rotaţia pământului şi de revoluţia pământului în jurul soarelui
- ca un prim exemplu, datele de temperatură orare sunt interpolate folosind sinuşi şi cosinuşi

Exemplul 9

- interpolaţi temperaturile înregistrate în Washington, D.C., pe 1 ianuarie 2001, listate în următorul tabel, folosind un model periodic:

ora	t	temperatura (°C)
0	0	-2.2
3	$\frac{1}{8}$	-2.8
6	$\frac{1}{4}$	-6.1
9	$\frac{3}{8}$	-3.9
12	$\frac{1}{2}$	0.0
15	$\frac{5}{8}$	1.1
18	$\frac{3}{4}$	-0.6
21	$\frac{7}{8}$	-1.1

5.2.1 Date periodice

- alegem modelul $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$ pentru a se potrivi cu faptul că temperatura este aproximativ periodică cu o perioadă de 24 de ore, cel puţin în absenţa unor modificări de temperatură pe termen mai lung
- modelul foloseşte această informaţie fixând perioada pentru a fi exact o zi, unde folosim zilele ca unităţi pentru t
- variabila t este listată în aceste unităţi în tabelul de mai sus
- înlocuind datele în model, rezultă următorul sistem supradeterminat de ecuaţii liniare:

5.2.1 Date periodice

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 \cos 2\pi(0) + c_3 \sin 2\pi(0) &= -2.2\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1.
\end{aligned}$$

- ecuaţia matricială inconsistentă corespunzătoare este $Ax = b$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 \\ 1 & \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ 1 & \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ 1 & \cos \frac{3\pi}{4} & \sin \frac{3\pi}{4} \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi \\ 1 & \cos \frac{5\pi}{4} & \sin \frac{5\pi}{4} \\ 1 & \cos \frac{3\pi}{2} & \sin \frac{3\pi}{2} \\ 1 & \cos \frac{7\pi}{4} & \sin \frac{7\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2.2 \\ -2.8 \\ -6.1 \\ -3.9 \\ 0.0 \\ 1.1 \\ -0.6 \\ -1.1 \end{bmatrix}.$$

- ecuaţiile normale $A^T Ac = A^T b$ sunt

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.6 \\ -2.9778 \\ -10.2376 \end{bmatrix},$$

  a căror soluţie este $c_1 = -1.95$, $c_2 = -0.7445$, şi $c_3 = -2.5594$
- cea mai bună versiune a modelului, în sensul celor mai mici pătrate, este $y = -1.9500 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t$, care are REMP ≈ 1.063

- Figura 7(a) compară modelul de interpolare de tip cele mai mici pătrate cu temperaturile care au fost înregistrate în realitate

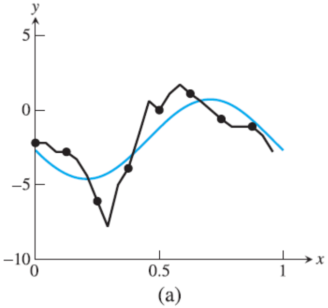

Figura 7: **Interpolări de tip cele mai mici pătrate pentru datele periodice din Exemplele 9 şi 10.** (a) Modelul sinusoidal $y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t$ prezentat îngroşat, împreună cu temperaturile înregistrate în 1 ianuarie 2001. (b) Sinusoida îmbunătăţită $y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t + 1.125 \cos 4\pi t$ interpolează datele mai exact.

Exemplul 10

- interpolaţi datele de temperatură folosind modelul îmbunătăţit

$$y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t + c_4 \cos 4\pi t. \tag{20}$$

- sistemul de ecuaţii este acum

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 \cos 2\pi(0) + c_3 \sin 2\pi(0) + c_4 \cos 4\pi(0) &= -2.2\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{8}\right) &= -2.8\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{4}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{4}\right) &= -6.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{3}{8}\right) &= -3.9\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.0\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{5}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{5}{8}\right) &= 1.1\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{3}{4}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{3}{4}\right) &= -0.6\\
c_1 + c_2 \cos 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_3 \sin 2\pi\left(\frac{7}{8}\right) + c_4 \cos 4\pi\left(\frac{7}{8}\right) &= -1.1,
\end{aligned}$$

- care conduce la următoarele ecuaţii normale:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.6 \\ -2.9778 \\ -10.2376 \\ 4.5 \end{bmatrix},$$

- soluţiile sunt $c_1 = -1.95$, $c_2 = -0.7445$, $c_3 = -2.5594$, şi $c_4 = 1.125$, cu REMP ≈ 0.705
- Figura 7(b) arată că modelul extins $y = -1.95 - 0.7445 \cos 2\pi t - 2.5594 \sin 2\pi t + 1.125 \cos 4\pi t$ îmbunătăţeşte în mod substanţial interpolarea

Vă mulţumesc!