Material 3

1. INCERTITUDINEA DE MĂSURARE - INTRODUCERE

Incertitudinea de măsurare reprezintă un concept important, asociat dispersiei valorilor pe care le putem atribui în mod rezonabil unui măsurand. De reținut că valoarea măsurată x se poate modifica în funcție de condiții externe, chiar mijlocul nostru de măsurare este supus îmbătrânirii, uzurii, erorilor de zero, liniarității, erorilor de histerezis sau lipsei calibrării. Procesul de măsurare sau metoda prin care lucrăm pot fi supuse fie erorilor aleatorii, fie erorilor sistematice (despre care vom discuta ulterior). Totodată, pot apărea greșeli de citire a rezultatelor sau erori cauzate de necunoașterea influenței condițiilor de mediu asupra sistemului de măsurare. În fine, operatorul poate să nu prezinte consistență în execuția procedurilor aferente. Toate aceste chestiuni, dar și altele, conduc la concluzia că niciodată nu putem avea încredere totală în valoarea măsurată x. Intervalul de incertitudine, prin dispersia valorilor măsurate și analiza statistică, însumează toți acești factori. Cu alte cuvinte, *incertitudinea de măsurare reprezintă un cumul de factori care definesc limitele de acceptanță ale valorilor măsurate*.

*Intervalul de încredere (*sau *de incertitudine)* se întinde simetric în jurul valorii măsurate, x, de la *limita inferioară de încredere* (Li) până la *limita superioară de încredere* (Ls). După cum precizam în cadrul C1, semnificaţia intervalului de încredere este că valoarea adevărată a măsurandului se află, *cu o anumită probabilitate* ($P \in [0 \div 1]$), în acest interval: $Li \leq X_a \leq Ls$. Această probabilitate exprimată în procente ($P \cdot 100\ [\%]$) *se numeşte nivel de încredere*. Cu cât intervalul de încredere este mai larg, cu atât este mai mare şi probabilitatea ca valoarea adevărată a măsurandului să se afle în acest interval, respectiv nivelul de încredere este mai mare. Însă, lărgirea intervalului de încredere înseamnă implicit creşterea incertitudinii asupra rezultatului măsurării, pentru că, *incertitudinea corespunde jumătăţii intervalului de încredere*. După cum precizam, în practica inginerească, *intervalul de încredere* este deseori numit *interval de incertitudine*. Iar limitele Li și Ls se mai numesc și *limite de incertitudine*.

Incertitudinea de măsurare standard se clasifică în două tipuri: *incertitudinea de tip A* și *incertiudinea de tip B*. Cele două categorii sunt clasificate în funcție de metoda de lucru pe care o abordăm pentru evaluarea rezultatelor noastre.

Incertitudinea de tip A (și care este des întâlnită în context industrial) se determină pe baza analizei unui set de date prin intermediul unor metode statistice. Această analiză presupune existența unui set de date, obținute în condiții aparent similare, suficient de consistent încât să putem aprecia cu o rezoluție satisfăcătoare caracteristicile sistemului nostru de măsurare. Cu alte cuvinte, utilizăm termenul de *incertitudine de tip A* când evaluăm un set de zeci (sau chiar sute) de valori măsurate în aceleași condiții de lucru. Cu ajutorul *incertitudinii de tip A,* vom caracteriza global acel set de valori.

Incertitudinea de tip B se determină pe baza analizei metodelor experimentale și de măsurare utilizate. Aici discutăm despre cumularea unor factori care țin de experiența inginerească, de cunoașterea comportamentului unui sistem de măsurare din perspectiva unor proiecte anterioare de cunoașterea datelor de calibrare ale aparatului, precum și tot ceea ce înseamnă judecată critică a metodelor utilizate. Pentru analiza *incertitudinii de tip B,* vom utiliza valori singulare și metode care analizează incertitudinea propagată, prin calcule indirecte ale valorii unui anumit parametru, sau vom utiliza informații pe care le vom identifica în manualele tehnice.

După cum observăm, dacă în cazul *incertitudinii de tip A* lucrurile sunt relativ uşor de implementat (după cum vom vedea), analiza *incertitudinii de tip B* depinde de complexitatea aplicației și de experiența inginerului. Nu vom insista asupra altor detalii. Pentru scopul acestui material, este suficient să cunoaștem cele două tipuri de evaluare a incertitudinii. Evident, trebuie să știm că rezultatele furnizate de un sistem de măsurare includ incertitudinea formată din contribuții din ambele clasificări.

Incertitudinea de măsurare include, la modul general, două tipuri de erori elementare, despre care vom discuta în continuare. Acestea tipuri sunt *erorile sistematice* și *erorile aleatorii*. Apariția erorilor într-un sistem de măsurare nu poate fi evitată. Însă, prin alegerea instrumentelor potrivite și cu ajutorul analizei riguroase a datelor obținute, efectul erorilor poate fi minimizat, dar nu eliminat. În cele ce urmează, trecem deocamdată cu vederea posibilele așa-numite *erori grosolane,* cauzate de unele greşeli ale operatorului în modul de utilizare a instrumentelor de măsură.

Înainte a a discuta despre *erori sistematice* și *erori aleatorii*, este necesar să clarificăm *modul în care prezentăm rezultatele* obținute în urma procesului de măsurare. Reținem o regulă importantă. *Când prezentăm rezultatul unei măsurări, trebuie să precizăm întotdeauna limitele de eroare sau intervalul de încredere aferent.*

Dacă valoarea unei tensiuni măsurate *x = 4,23V*, iar limitele de eroare acceptate sunt diferite, fără a fi calculate în baza unei analize statistice riguroase, *Lei = -0,02V* și *Les = +0,05V*, putem nota *x = 4,23V, -0,02V, +0,05V*. Însă acest caz este rar întâlnit.

De cele mai multe ori, limitele de eroare sunt egale în valoare absolută. Dacă presupunem că valoarea erorii absolut tolerate este de 0,05V, putem prezenta compact rezultatul măsurării alături de inacuratețea aferentă ca *x = (4,23±0,05)V*. După cum precizam, în acest caz *intervalul de inacuratețe nu a fost construit pe baza unei analize statistice. El arată strict ceea ce numim limitele de eroare sau eroarea absolut tolerată.*

Cu recomandarea ca domeniul de măsură să fie ales acoperitor, dar pe cât posibil apropiat de valoarea convențional adevărată a măsurandului, se poate aprecia că în măsurările curente, în care predomină erorile sistematice, rezultatul se poate exprima sub forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_m} \pm \Delta_{\boldsymbol{t}}$ în care $\boldsymbol{x_m}$ este valoarea măsurată, iar $\Delta_{\boldsymbol{t}}$ reprezintă *eroarea absolută tolerată*. Astfel, utilizăm specificațiile producătorului instrumentului de măsură în vederea estimării acurateței (sau, în sens negativ, inacurateței) și ne asigurăm că am urmat procedura corectă pentru a măsura valorile acestor componente.

Dacă valoarea tensiunii măsurate *x = 4,23V* are asociat un interval de incertitudine calculat în baza unei analize statistice riguroase, de exemplu *±0,05V,* cu un nivel de încredere de 95% (adică probabilitatea de 0,95), vom prezenta rezultatul ca $x_{0,95}$ = *(4,23±0,05)V* sau *x = (4,23±0,05)V*$; P = 0{,}95$. În acest caz estimarea inacurateței de măsurare s-a făcut pe baza metodelor de calcul probabilistic, iar din acest motiv discutăm despre un interval de incertitudine.

Există câteva reguli de reprezentare a rezultatelor și este util ca acestea să fie luate în considerare în vederea respectării rigurozității inginerești. Astfel, cifrele diferite de 0 contează ca fiind semnificative (1); cifrele de 0 care se află între cifre diferite de 0 contează ca fiind semnificative (2); cifrele de 0 aflate la dreapta virgulei sunt semnificative doar dacă se află în continuarea unor cifre diferite de 0 (3); cifrele de 0 care sunt prezente doar pentru a indica poziția virgulei nu sunt semnificative (4); cifrele de 0 care pot fi omise fără a afecta prezentarea valoarii măsurate nu sunt semnificative (5).

Prin urmare, dacă *x = 4,2356V,* înseamnă că am utilizat 5 cifre semnificative și 4 cifre de precizie (regula 1). Dacă *x = 40,2356V,* atunci am utilizat 6 cifre semnificative și 4 cifre de precizie (regulile 1 și 2). Dacă $x = 4{,}2306V$, atunci am utilizat 5 cifre semnificative și 4 cifre de precizie (regulile 1 și 2). Dacă $x = 0{,}2306V$, atunci am utilizat 4 cifre semnificative și 4 cifre de precizie. Pentru cifra 0 din stânga virgulei se aplică regula 4. Atenție la situația în care $x = 4{,}230V$. În acest caz, avem 4 cifre semnificative (regula 3) și 3 cifre de precizie. Numărul a fost obținut prin rotunjire, el fiind probabil $x = 4{,}2295V$ cu rezoluția de reprezentare de ±0,0005V. Dacă $x = 0{,}03060V$, atunci am utilizat 4 cifre semnificative și 5 cifre de precizie. Cifra 0 din stânga virgulei nu este semnificativă (regula 4). Prima cifră 0 din dreapta virgulei nu este semnificativă (regula 3). Cifra 0 aflată între cifrele 3 și 6 este semnificativă (regula 2). Ultima cifră 0 este semnificativă fiind rezultatul unei rotunjiri.

Este foarte important ca rezultatul prezentat să aibă aceeași unitate de măsură pentru valoarea măsurată și pentru caracteristica de inacuratețe. Astfel, reprezentarea $x = (4 \pm 0{,}1)V$ utilizează aceeași unitate de măsură și o singură cifră semnificativă. La fel, pentru $x = (43 \pm 0{,}11)g$ utilizează aceeași unitate de măsură și două cifre semnificative. Contraexemple ar putea fi $x = 4V \pm 200mV$ sau $x = 43g \pm 250mg$. În fine, dacă inițial $x_1 = 4{,}2195V$ și $x_2 = 4{,}23V$, atunci și reprezentarea primei valori măsurate va fi $x_1 = 4{,}22V$. Ambele rezultate prezentate vor avea numărul minim de cifre semnificative (adică 3), vor avea 2 cifre de precizie și aceeași unitate de măsură.

Dacă într-un proces de măsurare cele două tipuri de erori (sistematice și aleatorii) coexistă, mai întâi trebuie încercată reducerea erorilor sistematice şi apoi aplicate metode statistice pentru reducerea erorilor aleatorii.

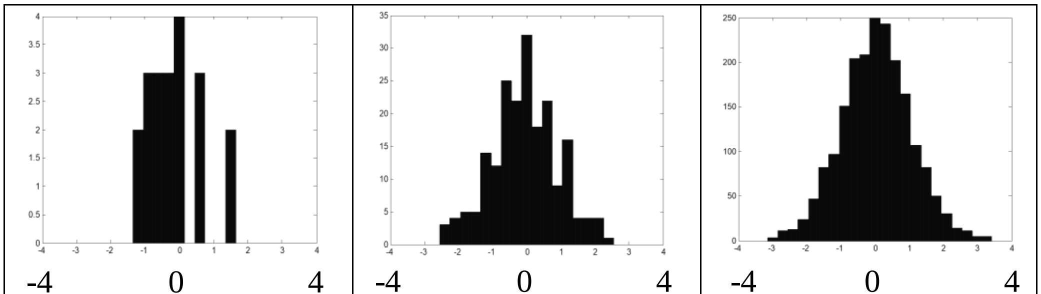
Cauzele care determină apariţia erorilor aleatorii au un caracter imprevizibil. De exemplu, perturbaţiile (zgomotele) de natură electrică pot fi induse fie direct la nivelul instrumentelor de măsură, fie pe parcursul transmiterii la distanţă a semnalelor captate de senzori. Liniile electrice de putere pot perturba prin cuplaje inductive sau capacitive cablurile de semnal care trec prin apropiere. Efect perturbator au şi regimurile tranzitorii ale diferitelor echipamente electrice sau circuite de radiofrecvenţă din proximitatea sistemului de măsură. Schimbările imprevizibile ale condiţiilor de mediu pot cauza de asemenea erori aleatorii. În cazul instrumentelor analogice, chiar şi aprecierea poziţiei acului indicator între două gradaţii ale scalei este o sursă de erori aleatorii.

Acuratețea și precizia măsurărilor sunt afectate de *zgomotele* care se suprapun peste semnalele utile. Se consideră că aceste manifestări parazite sunt fluctuații aleatorii, cu valoare medie nulă, ale tensiunilor și curenților din sistemul de măsurare. Originea zgomotelor se află în chiar componentele instrumentației de măsurare și se explică prin caracterul discret al sarcinii electrice. Pentru creșterea performanțelor măsurării (implicit reducerea erorilor aleatorii) se recomandă folosirea unor componente de zgomot redus care, asociate cu tehnici de proiectare adecvate, imprimă același caracter întregului sistem de măsurare. Eventualele influențe continue ale zgomotelor, numite curenți sau tensiuni de decalaj, sunt eliminate prin tehnici de proiectare a circuitelor care implică utilizarea amplificatoare operaționale.

Interferențele sunt perturbații care afectează semnalele de măsurare, dar provin din afara instrumentației. Ele au, în general, un caracter periodic și sunt cauzate de alte instalații tehnice, cum ar fi liniile de transport al energiei electrice, antenele de radio și televiziune, circuite de comutare etc. Toate acestea produc câmpuri electrice și magnetice care pot perturba, prin interferență, sistemele de măsurare. Pentru a reduce posibilele interferențe se procedează la *ecranarea* echipamentelor de măsurare, sau la *modificarea conexiunilor la masă* ale acestora. O altă posibilă soluție este *plasarea sistemului de măsurare la o distanță suficient de mare* (cel puțin 0,5m), astfel încât acesta să nu fie afectat de interferențe generate de echipamente care funcționează în comutație. Există posibilitatea ca liniile de transmitere a semnalelor să fie *torsadate* (twisted pair), sau *ecranate* (de exemplu prin utilizarea modelului de cabluri coaxiale RG316). Foarte des, aceste metode sunt aplicate în momentul în care lucrăm cu semnale de înaltă frecvență. În aplicațiile de măsurare se recomandă conectarea aparatului sau echipamentului de măsurare la sursa semnalului util cu ajutorul unor fire cât mai scurte. Prin urmare, pe cât este posibil, *păstrați lungimea firelor de conexiune cât mai mică*.

Presupunând că valoarea măsurandului rămâne constantă pe durata repetării operaţiunii de măsurare, erorile cu caracter aleatoriu vor fi atât pozitive, cât şi negative, iar valorile măsurate se vor situa de o parte şi de alta a valorii adevărate a mărimii. Ca urmare, este firesc să considerăm că *valoarea adevărată* a măsurandului este aproximativ egală cu *media valorilor măsurate*.

Totuşi, chiar dacă măsurările succesive se desfăşoară în condiţii practic identice, iar măsurandul îşi păstrează constantă valoarea, prin operaţiunea de mediere nu se pot elimina cu totul, ci doar reduce, erorile aleatorii. Teoretic, pentru ca prin mediere să se obţină valoarea adevărată a măsurandului, ar trebui să se facă un număr infinit de măsurări ($n \to \infty$).



a) *n*=20; $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{-0,18}$ b) *n*=200; $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{-0,05}$ c) *n*=2000; $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{0,03}$

Histograme ale erorilor aleatorii pentru $n = 20 \div 2.000$ de măsurări simulate.

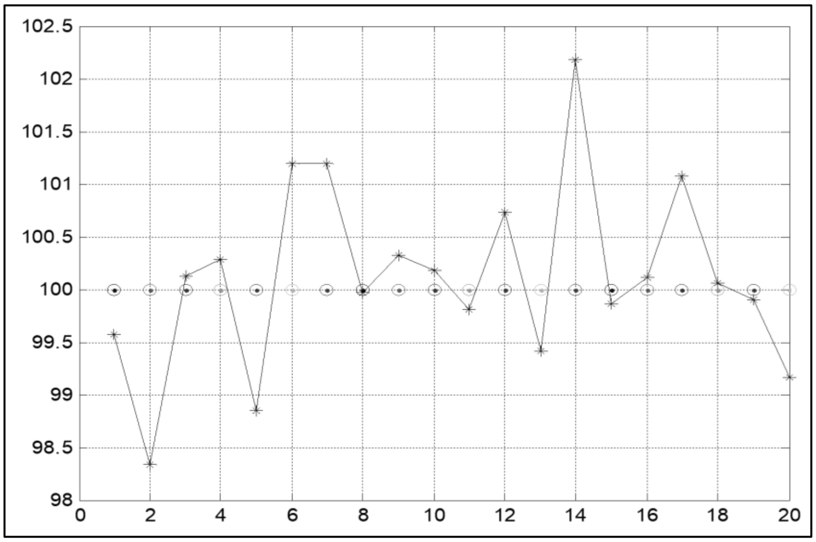
Astfel, pentru *n* = 20 de măsurări succesive, în 4 cazuri erorile de măsurare sunt aproximativ nule (coloana cea mai înaltă a histogramei) dar, în general, predomină erorile negative. Pentru *n* = 200 de măsurări, efectuate în condiţii practic identice, histograma erorilor evidenţiază o tendinţă de simetrizare, în jurul coloanei cu 32 de erori aproximativ nule. Ultimul caz corespunzătoare unui număr foarte mare de măsurări repetate ($\boldsymbol{n} = \mathbf{2000}$). Se observă că cele mai multe erori se încadrează în intervalul din jurul valorii zero (coloana cea mai înaltă din histogramă corespunde la 250 de valori obţinute prin simulare).

Pentru ca prin medierea valorilor obţinute în măsurări repetate să se elimine total erorile aleatorii, ar trebui ca media acestor erori să fie nulă, ceea ce nu se întâmplă. Se constată că media erorilor ar tinde spre zero odată cu creşterea spre infinit a numărului de măsurări repetate. De exemplu, mediile erorilor redate de histogramele au fost: $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{-0,18}$ pentru $\boldsymbol{n} = \mathbf{20}$, $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{-0,05}$ pentru $\boldsymbol{n} = \mathbf{200}$, respectiv $\bar{\boldsymbol{e}} \cong \mathbf{0,03}$ pentru $\boldsymbol{n} = \mathbf{2000}$.

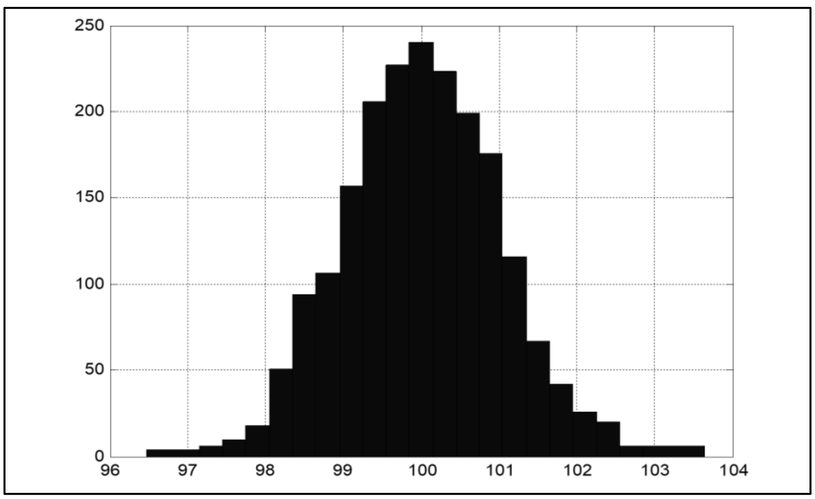
În imaginea următoare se poate urmări poziţionarea rezultatelor a 20 de măsurări succesive (notație *), faţă de valoarea adevărată a măsurandului (notație o). De exemplu, presupunând că mărimea de măsurat este o tensiune constantă U = 100V, cele mai multe rezultate se plasează în apropierea acestei valori, ceea ce înseamnă că în histograma corespunzătoare, coloana cea mai înaltă ar corespunde unor erori apropiate de zero. Cele mai mari abateri de la valoarea adevărată se constată la măsurările a doua ($U2 \cong 98{,}3V$ cu eroarea absolută $\Delta_2 \cong -1{,}7V$) şi a patrusprezecea ($U14 \cong 102{,}2V$ cu eroarea absolută $\Delta_{14} \cong +2{,}2V$).

Urmărind histogramele erorilor, se observă că, odată cu creşterea numărului de măsurări repetate, alura histogramei tinde clar spre o *distribuţie normală*, redată prin aşa-numita *curbă a lui*

Gauss, în formă de clopot. Aceeaşi alură se constată şi în histograma rezultatelor a n = 2000 de măsurări simulate, pentru un măsurand având valoarea 100. Trebuie reţinut că în histograme, pe abscisă se reprezintă valoarea erorii sau valoarea măsurandului, iar pe ordonată apare numărul de erori, respectiv de valori ale măsurandului, situate într-un anumit interval. De exemplu, se observă că, din cele 2000 de măsurări simulate, aproximativ 240 conduc la rezultate foarte apropiate de valoarea adevărată a măsurandului (coloana, sau banda, sau fâşia corespunzătoare valorii 100 este cea mai înaltă).



Rezultatele unor măsurări succesive (*), faţă de valoarea adevărată (o).



Histograma rezultatelor unor măsurări succesive simulate.

Cea mai cunoscută funcţie densitate de probabilitate - un concept teoretic corespunzător unui număr infinit de măsurări ($n \to \infty$), descrie aşa-numita *distribuţie normală*, redă curba (clopotul) lui Gauss şi are următoarea expresie matematică:

$$fdp(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1)$$

În expresia anterioară, x reprezintă valoarea măsurată, iar parametrii μ şi σ sunt *media*, respectiv *abaterea standard*, ambele determinate pentru un număr infinit de măsurări ($n \rightarrow \infty$).

Probabilitatea ca valoarea măsurandului să se afle în intervalul $[\boldsymbol{x_1} \div \boldsymbol{x_2}]$ este egală cu aria mărginită de *fdp*(x) în cadrul acestui interval:

$$\boldsymbol{P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} fdp(x) \cdot dx}. \tag{2}$$

Densitatea de probabilitate normală (gaussiană), având valoarea medie μ și deviația/abaterea standard σ, se notează condensat ca $N(\mu,\sigma)$.

Cum valoarea maximă a densităţii de probabilitate corespunde abscisei $x = \mu$, şi anume $fdp(\mu) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, înseamnă că parametrul μ reprezintă *valoarea medie* pentru distribuţia normală. Semnificaţia parametrului σ rezultă cu claritate dacă se calculează probabilitatea ca valorile măsurate să se încadreze în intervale simetrice în jurul valorii medii. Patru astfel de date statistice privitoare la ipotetice seturi de valori măsurate care aparțin unei densități de probabilitate normală $N(\mu,\sigma)$, se prezintă tabelul următor.

Probabilităţi pentru intervale simetrice ale distribuţiei normale $N(\mu,\sigma)$.

Intervalul simetric în jurul mediei $\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{P(x_1 \leq x \leq x_2) \cdot 100}$ (Probabilitatea în %)	Numărul probabil de valori în afara intervalului
$[(\boldsymbol{\mu-\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+\sigma})]$	68,27	1 din 3
$[(\boldsymbol{\mu-2\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+2\sigma})]$	95,45	1 din 22
$[(\boldsymbol{\mu-3\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+3\sigma})]$	99,73	1 din 370
$[(\boldsymbol{\mu-4\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+4\sigma})]$	99,99	1 din 15.625

Astfel, se constată că, deşi funcţia densitate de probabilitate este definită pentru tot domeniul $(-\infty, +\infty)$, practic este aproape imposibil să rezulte valori ale măsurandului în afara intervalului $[(\boldsymbol{\mu-4\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+4\sigma})]$. Probabilitatea ca rezultatele măsurărilor să fie în intervalul $[(\boldsymbol{\mu-\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+\sigma})]$ este suficient de mare ($\cong \boldsymbol{0,68}$), astfel încât cel mult unul din trei rezultate să se abată cu mai mult de $\boldsymbol{\pm\sigma}$ de la valoarea medie $\boldsymbol{\mu}$. De aceea, parametrul $\boldsymbol{\sigma}$ se numeşte *abatere standard* (sau *standard deviation*). De exemplu, histogramele anterioare s-au generat cu un algoritm pentru o distribuţie normală cu parametrii $\boldsymbol{\mu = 0}$ şi $\boldsymbol{\sigma = 1}$ şi se observă că niciuna dintre erorile aleatorii nu iese din intervalul $[(\boldsymbol{\mu-4\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+4\sigma})] = [\boldsymbol{-4} \div \boldsymbol{+4}]$. Similar, în secvenţa de valori măsurate, în condiţiile în care valoarea adevărată a măsurandului este $\boldsymbol{\mu = 100}$ şi abaterea standard $\boldsymbol{\sigma = 1}$, nicio valoare, din cele $\boldsymbol{n = 20}$ obţinute prin simulare, nu iese din intervalul $[(\boldsymbol{\mu-4\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+4\sigma})] = [\boldsymbol{-96} \div \boldsymbol{+104}]$.

În concluzie, se poate afirma că parametrul abatere standard $\boldsymbol{\sigma}$ descrie împrăştierea valorilor măsurate în jurul mediei $\boldsymbol{\mu}$. Practic, din tabel rezultă că e foarte puţin probabil ca o valoare măsurată în condiţii de manifestare a erorilor aleatorii să se afle în afara intervalului $[(\boldsymbol{\mu-3\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+3\sigma})]$ (doar un rezultat din 370 de valori măsurate). Pe această constatare s-a formulat *criteriul* $\boldsymbol{3\sigma}$. Adică se consideră că rezultatele care se află în afara intervalului $[(\boldsymbol{\mu-3\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu+3\sigma})]$ sunt cauzate de unele *erori grosolane*, care trebuie eliminate.

Prin urmare, în terminologia industrială este comună discuția despre așa-numitele intervale/niveluri de încredere. Un nivel de încredere de „un sigma” înseamnă că aproximativ 68% dintre valorile măsurate trebuie să se regăsească în intervalul admis ca fiind valid. În cele mai multe situații, nivelul de încredere utilizat pentru validarea unei soluții de măsurare industrială este de $\boldsymbol{2\sigma}$. Soluția de măsurare va fi acceptată dacă valorile furnizate se găsesc în procent de cel puțin 95% între limitele intervalului $[(\boldsymbol{\mu - 2\sigma}) \div (\boldsymbol{\mu + 2\sigma})]$.

Practic, nu putem efectua decât un număr relativ limitat de măsurări. Dar media teoretică, $\boldsymbol{\mu}$, corespunde unui număr infinit de măsurări. Presupunând că operaţia de măsurare s-a repetat de *n* ori şi s-au obţinut valorile măsurandului $\boldsymbol{x_i}$, **unde** $\boldsymbol{i = 1 \div n}$, putem calcula *media empirică*:

$$\boldsymbol{m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3}$$

Statistic, valoarea medie *m* apare ca fiind cea mai probabilă dintre valorile măsurate. Pentru a stabili valoarea centrală a unui șir de valori măsurate, se poate folosi așa-numita *valoare mediană*, definită ca valoarea situată numeric la mijlocul șirului de valori măsurate (50% dintre valorile măsurate sunt mai mici, iar 50% sunt mai mari decât mediana). De exemplu, presupunând că s-au măsurat și aranjat în ordine crescătoare un număr impar de valori, $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_9}$, mediana va fi valoarea măsurată $\boldsymbol{x_5}$. Dacă însă șirul valorilor măsurate și aranjate în ordine crescătoare cuprinde un număr par de valori, mediana poate fi determinată ca media aritmetică a valorilor centrale din șir. De pildă, pentru zece valori măsurate și aranjate în ordine crescătoare, $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_{10}}$, mediana se determină ca $\boldsymbol{(x_5 + x_6)/2}$.

Faţă de media empirică *m* (uneori notată $\boldsymbol{\mu}$, cu acceptul că $\mu \cong \boldsymbol{m}$ dacă $n \geq 100$), rezultatele măsurărilor individuale prezintă *abateri* care au semnificaţia unor *erori de măsurare*: $\boldsymbol{a_i = x_i - m}$, **unde** $\boldsymbol{i = 1 \div n}$. Media pătratelor acestor abateri se numeşte *varianţă* şi caracterizează global măsura în care rezultatele individuale se depărtează de media empirică *m*. S-a dovedit că deoarece media *m* este ea însăşi calculată cu o anumită eroare, în calculul varianţei este util un factor de corecţie $[\boldsymbol{n/(n-1)}]$, care tinde spre unu odată cu creşterea lui *n*. Astfel, *varianţa empirică* se calculează, în funcție de abaterile individuale, cu formula:

$$\boldsymbol{V = \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}. \tag{4}$$

Pe această bază se poate calcula o *abatere standard empirică* numită şi *eroare medie pătratică experimentală*, sau incertitudine de tip A:

$$\boldsymbol{s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}}. \tag{5}$$

Putem reține ideea că validarea unei soluții de măsurare, în condiții industriale, va parcurge un proces de analiză a rezultatelor înregistrate. Spre exemplu, un stand pentru testarea funcțională a unor plăci electronice generează un set de valori ale măsurărilor de tensiune, curent sau frecvență, în anumite noduri (sau puncte de test, „*Test Points*"). Pentru validarea caracteristicilor de acuratețe și repetabilitate, *este posibil ca procesul de măsurare să fie repetat de câteva sute de ori*, pentru același produs, sau pentru produse diferite. Generalizând, un set de valori prezintă un *grad de încredere mai ridicat dacă dispersia acestora este cât mai redusă.* În această situație putem avea convingerea că valoarea medie empirică *m* este foarte apropiată de valoarea adevărată a măsurandului. *Cu cât numărul valorilor măsurate crește, cu atât valoarea mediană tinde să se apropie de valoarea medie.*

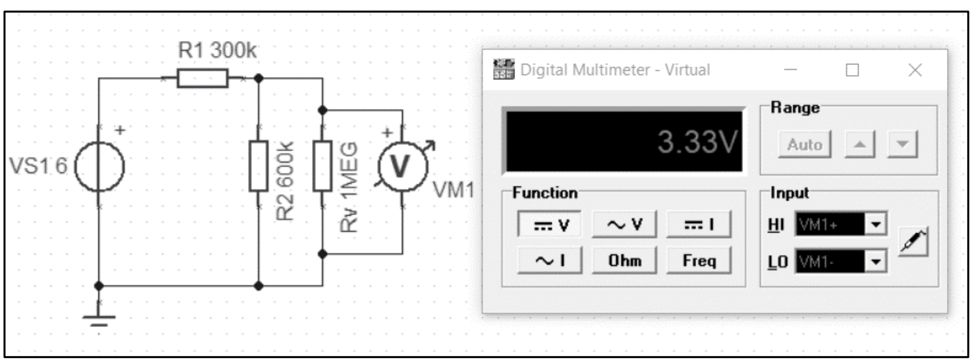
2. APLICAȚII

Exemplu: Estimarea erorilor cumulate în cazul determinării valorii unei mărimi pe baza unor măsurări indirecte – legea de propagare a erorilor.
O metodă des întâlnită în calculul incertitudinii pentru măsurările indirecte este numită *propagarea incertitudinilor sau erorilor*. Metoda permite calculul incertitudinii dacă măsurandul $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$. Cu alte cuvinte, relația pentru calculul măsurandului Y include alți parametri, fiecare contribuind în calculul final cu o anumită incertitudine relativă. Însă este important să știm că acest caz este cel al mărimilor independente. Practic, nu există o corelație între parametrii funcției *f*. Se poate dovedi că relația (6) reprezintă o formă simplificată generală a *legii de propagare a erorilor* în cazul măsurărilor independente.

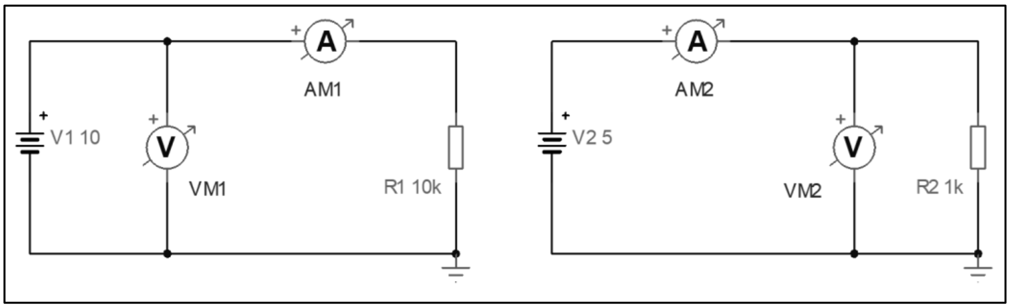
$$(\delta Y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \delta X_i \right)^2. \tag{6}$$

În relația (6) întâlnim coeficienții de sensibilitate $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ (derivatele parțiale ale funcției *f*), și incertitudinile individuale δX_i asociate fiecărui măsurand considerat în calculul mărimii *Y*.

Exemplu: Problema aduce în discuție *eroarea sistematică de interacțiune,* care apare atunci când aranjamentul experimental nu asigură măsurarea exclusivă a mărimii vizate, ci o valoare modificată a acesteia. În acest caz, conectarea unui voltmetru nepotrivit aplicației de măsurare generează rezultate eronate. În montajul experimental propus observăm următoarele componente: o sursă de tensiune continuă, *VS1*, care alimentează circuitul cu tensiunea de 6V, două rezistențe conectate în serie (valori de sute de kΩ, toleranță 5%) și un aparat de tip voltmetru numeric. Voltmetrul VM1 este setat în modul automat (AutoRange). Rezistența internă a voltmetrului Rv, pe domeniul de măsură selectat, are valoarea de 1MΩ. În manualul aparatului putem consulta specificația de acuratețe a măsurării, care pentru domeniile de 1V, 3V, 40V și 400V este de ±(0,5%+1).



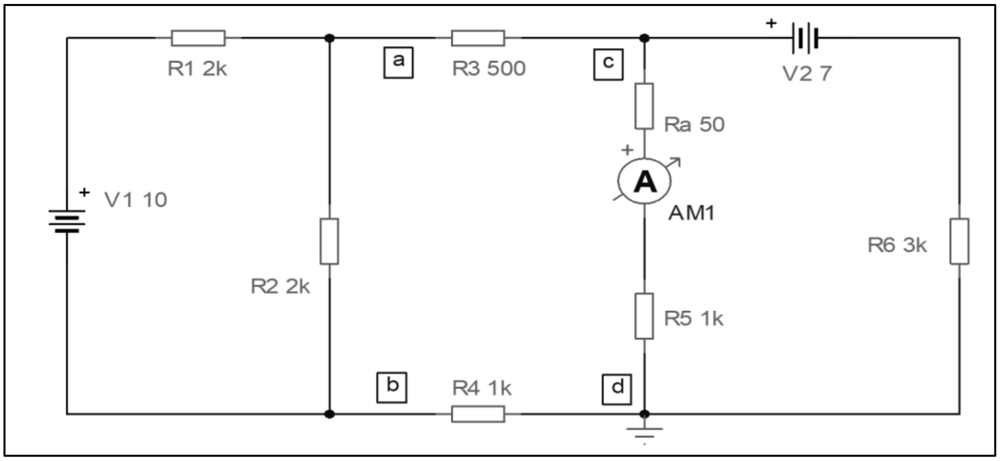
Exemplu: Vom prezenta specificul *erorilor sistematice de metodă* prin măsurarea rezistenţelor prin aşa-numita *metodă voltampermetrică*. Denumirea acestui procedeu vine de la faptul că, pentru a determina valoarea rezistenţei, se folosesc două instrumente, un voltmetru şi un ampermetru. În principiu, metoda de măsurare se bazează pe legea lui Ohm: valoarea rezistenţei necunoscute se determină ca raportul dintre valoarea măsurată a tensiunii la bornele rezistenţei şi valoarea măsurată a curentului care trece prin ea. Putem aprecia faptul că utilizăm un tip de măsurare indirectă. Cu ajutorul argumentelor *tensiune* și *curent*, determinăm valoarea rezistenței necunoscute.



Cele două variante ale metodei voltampermetrice de măsurare a rezistenţelor.

Exemplu: Într-un circuit cu schema de mai jos dorim să măsurăm curentul care trece prin rezistenţa R5. În acest scop, conectăm în serie cu rezistenţa R5 ampermetrul AM1 având rezistenţa internă $R_a = 50\Omega$. Cele două surse din circuit au rezistenţele interne nule şi prezintă tensiunile constante $V_1 = 10V$, respectiv $V_2 = 7V$. Rezistenţele au valorile: $R_1 = R_2 = 2k\Omega, R_3 = 500\Omega$; $R_4 = R_5 = 1k\Omega$; $R_6 = 3k\Omega$. Se pune întrebarea dacă introducerea ampermetrului AM1 pentru măsurarea curentului prin rezistenţa R5 modifică valoarea acestui curent şi în ce măsură?

Obs: Teorema lui Thévenin este foarte utilă pentru analiza reţelelor electrice relativ complexe. Astfel, în cazul unei reţele care cuprinde surse de tensiune, surse de curent, voltmetre, ampermetre şi rezistenţe, teorema permite înlocuirea unei părţi a circuitului situată între două puncte a şi b cu o singură sursă de tensiune (Etab) şi o rezistenţă înseriată (Rtab). Elementele înseriate, după Thévenin, între punctele a şi b (Etab şi Rtab) trebuie să aibă acelaşi efect asupra restului circuitului ca şi porţiunea de reţea înlocuită. În acest scop, sursa de tensiune echivalentă Etab se determină ca fiind tensiunea produsă între punctele a şi b de porţiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită, atunci când acea porţiune ar fi decuplată de restul circuitului. La rândul ei, rezistenţa echivalentă Rtab se determină ca fiind egală cu rezistenţa prezentată între punctele a şi b de porţiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită şi în care oricare sursă de curent este tratată ca circuit deschis şi oricare sursă de tensiune este considerată ca scurtcircuit.



Schemă pentru ilustrarea erorilor sistematice de interacţiune.