Matematici Asistate de Calculator

Dr. Călin-Adrian POPA

Cursul 5

5 Martie 2019

4 Interpolarea

- modalităţi eficiente de reprezentare a datelor sunt fundamentale pentru avansarea înţelegerii problemelor ştiinţifice
- la nivel fundamental, aproximarea datelor printr-un polinom este o formă de compresie a datelor
- să presupunem că punctele (x, y) sunt generate de o anumită funcţie $y = f(x)$, sau, de exemplu, de un experiment în care x reprezintă temperatura şi y reprezintă viteza de reacţie
- o funcţie definită pe mulţimea numerelor reale reprezintă o cantitate infinită de informaţie
- găsirea unui polinom care trece printr-un set de puncte înseamnă înlocuirea informaţiei cu o regulă care poate fi evaluată într-un număr finit de paşi
- deşi este nerealist să ne aşteptăm ca polinomul să reprezinte funcţia exact în puncte noi x, ar putea să fie suficient de aproape de valoarea exactă pentru a rezolva probleme practice
- acest capitol prezintă interpolarea polinomială şi splină ca instrumente convenabile pentru a găsi funcţii care trec prin anumite puncte date

4.1 Funcţii de interpolare

- o funcţie se zice că interpolează o mulţime de puncte dacă trece prin acele puncte
- presupunem că o mulţime (x, y) de puncte a fost colectată, ca, de exemplu, $(0, 1)$, $(2, 2)$, şi $(3, 4)$
- există o parabolă care trece prin cele trei puncte, cea din Figura 1
- această parabolă se numeşte polinomul de interpolare de gradul 2 care trece prin cele trei puncte

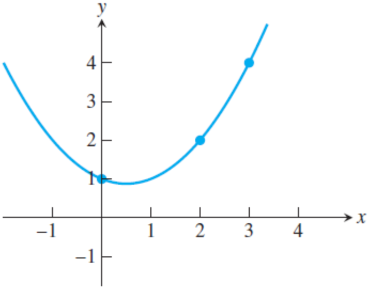

Figura 1: **Interpolarea printr-o parabolă.** Punctele $(0, 1)$, $(2, 2)$, şi $(3, 4)$ sunt interpolate de funcţia $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$.

4.1 Funcţii de interpolare

Definiţia 1

Funcţia $y = P(x)$ interpolează punctele $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ dacă $P(x_i) = y_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

- observăm că P trebuie să fie o funcţie; şi anume, fiecărei valori x îi corespunde un singur y
- aceasta impune o restricţie mulţimii de puncte $\{(x_i, y_i)\}$ care pot fi interpolate—toate valorile x_i trebuie să fie distincte pentru ca o funcţie să poată trece prin ele
- nu există o astfel de restricţie pentru valorile y_i
- iniţial, căutăm un polinom de interpolare
- există întotdeauna un astfel de polinom?
- presupunând că toate coordonatele x ale punctelor sunt distincte, răspunsul este afirmativ
- indiferent de cât de multe puncte sunt date, există un polinom $y = P(x)$ care trece prin toate acele puncte

4.1 Funcţii de interpolare

- acesta şi alte fapte despre polinoamele de interpolare sunt demonstrate în această secţiune
- interpolarea este operaţia inversă evaluării
- în cadrul evaluării polinoamelor (cum ar fi înmulţirea imbricată din Capitolul 1), ni se dă un polinom şi ni se cere să evaluăm o valoare y pentru o valoare x dată—şi anume, să calculăm puncte care se află pe graficul polinomului
- interpolarea polinomială presupune operaţia inversă: fiind date aceste puncte, trebuie să găsim un polinom care poate să le genereze

4.1.1 Interpolarea Lagrange

- presupunem că n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ sunt date, şi că vrem să găsim un polinom de interpolare pentru aceste puncte
- există o formulă explicită, numită formula de interpolare a lui Lagrange, pentru a găsi un polinom de gradul $d = n - 1$ care interpolează punctele respective
- de exemplu, să presupunem că ne sunt date trei puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)
- atunci polinomul

$$P_2(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \tag{1}$$

  este **polinomul de interpolare al lui Lagrange** pentru aceste puncte
- în primul rând, să observăm de ce toate punctele se află pe graficul polinomului
- când înlocuim pe x cu x_1, termenii devin $y_1 + 0 + 0 = y_1$
- al doilea şi al treilea numărător sunt aleşi astfel încât să dispară când polinomul este evaluat în x_1, iar primul numitor este ales astfel încât să se simplifice cu primul numărător, pentru a da valoarea y_1 în acest caz

4.1.1 Interpolarea Lagrange

- acelaşi lucru se întâmplă şi când polinomul este evaluat în x_2 şi, respectiv, x_3
- când înlocuim pe x cu orice alt număr, rezultatul nu mai poate fi controlat, dar noi am avut doar de interpolat cele trei puncte
- în al doilea rând, observăm că polinomul (1) este de gradul 2 în variabila x

Exemplul 1

- găsiţi polinomul de interpolare pentru punctele $(0, 1)$, $(2, 2)$, şi $(3, 4)$ din Figura 1
- înlocuind în formula lui Lagrange (1), obţinem

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 1\frac{(x-2)(x-3)}{(0-2)(0-3)} + 2\frac{(x-0)(x-3)}{(2-0)(2-3)} + 4\frac{(x-0)(x-2)}{(3-0)(3-2)} \\
&= \frac{1}{6}(x^2-5x+6) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-3x) + 4\left(\frac{1}{3}\right)(x^2-2x) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.
\end{aligned}$$

- făcând verificarea, avem $P_2(0) = 1$, $P_2(2) = 2$, şi $P_2(3) = 4$

4.1.1 Interpolarea Lagrange

- în general, să presupunem că avem n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- pentru fiecare k între 1 şi n, definim polinomul de gradul $n-1$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

- proprietatea interesantă a lui L_k este că $L_k(x_k) = 1$, însă $L_k(x_j) = 0$, unde x_j este oricare dintre celelalte puncte
- apoi, definim polinomul de gradul $n-1$

$$P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x).$$

- aceasta este o generalizare imediată a polinomului din (1) şi funcţionează în acelaşi fel
- înlocuind pe x cu x_k, obţinem

$$P_{n-1}(x_k) = y_1 L_1(x_k) + \cdots + y_n L_n(x_k) = 0 + \cdots + 0 + y_k L_k(x_k) + 0 + \cdots + 0 = y_k,$$

  exact cum am dorit
- am construit un polinom de grad cel mult $n-1$ care trece prin orice mulţime de n puncte care au valorile x_i distincte
- este interesant de observat că acest polinom este unic

4.1.1 Interpolarea Lagrange

Teorema 1 (Teorema fundamentală a interpolării polinomiale)

Fie $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ n puncte din plan cu valorile x_i distincte. Atunci există un unic polinom P de grad cel mult $n-1$ care satisface $P(x_i) = y_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$.

- existenţa este demonstrată de formula explicită pentru interpolarea Lagrange
- pentru a arăta că există doar unul, presupunem, prin reducere la absurd că există două polinoame, notate $P(x)$ şi $Q(x)$, care au gradul cel mult $n-1$ şi ambele interpolează toate cele n puncte
- mai exact, presupunem că $P(x_1) = Q(x_1) = y_1$, $P(x_2) = Q(x_2) = y_2$, ..., $P(x_n) = Q(x_n) = y_n$
- acum definim un nou polinom $H(x) = P(x) - Q(x)$
- evident, gradul lui H este de asemenea cel mult $n-1$, şi observăm că $0 = H(x_1) = H(x_2) = \cdots = H(x_n)$; şi anume, H are n rădăcini distincte
- potrivit teoremei fundamentale a algebrei, un polinom de gradul d poate avea cel mult d rădăcini, dacă nu este polinomul identic nul

- prin urmare, H este polinomul identic nul, şi $P(x) \equiv Q(x)$
- concluzionăm că există un unic $P(x)$ de grad $\leq n-1$ care interpolează cele n puncte (x_i, y_i)

Exemplul 2

- găsiţi polinomul de grad cel mult 3 care interpolează punctele $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, şi $(3,-1)$
- formula lui Lagrange este în acest caz:

$$\begin{aligned}
P(x) &= 2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 1\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
&\quad +0\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} - 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \\
&= -\frac{1}{3}(x^3-6x^2+11x-6) + \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x) - \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x) \\
&= -x+2.
\end{aligned}$$

4.1.1 Interpolarea Lagrange

- Teorema 1 ne spune că există un unic polinom de interpolare de grad cel mult 3, dar s-ar putea să fie sau să nu fie exact de gradul 3
- în Exemplul 2, punctele sunt coliniare, şi astfel polinomul de interpolare are gradul 1
- Teorema 1 implică faptul că nu există polinoame de interpolare de gradul 2 sau 3
- este evident din punct de vedere intuitiv că o parabolă sau o curbă cubică nu pot trece prin patru puncte coliniare, dar aceasta este explicaţia formală

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- metoda de interpolare Lagrange, după cum a fost descrisă în subsecţiunea anterioară, este o metodă constructivă de a scrie unicul polinom de interpolare care există, conform Teoremei 1
- este de asemenea şi intuitivă; o singură privire este suficientă pentru a explica de ce funcţionează
- totuşi, este rareori folosită în calcule deoarece metodele alternative dau forme mai uşor de gestionat şi mai puţin complexe din punct de vedere computaţional
- metoda diferenţelor divizate a lui Newton dă o modalitate destul de simplă de a scrie polinomul de interpolare
- fiind date n puncte, rezultatul va fi un polinom de grad cel mult $n-1$, exact ca în formula lui Lagrange
- Teorema 1 ne spune că nu poate fi altul decât acelaşi polinom de interpolare Lagrange, scris însă într-o altă formă
- ideea diferenţelor divizate este destul de simplă, dar unele notaţii trebuie să fie stăpânite mai întâi
- să presupunem că punctele vin dintr-o funcţie $f(x)$, astfel că scopul nostru este să interpolăm $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

Definiţia 2

Notăm prin $f[x_1 \cdots x_n]$ coeficientul termenului x^{n-1} în (unicul) polinom care interpolează $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

- Exemplul 1 arată că $f[0\ 2\ 3] = 1/2$, unde am presupus că $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, şi $f(3) = 4$
- desigur, datorită unicităţii, toate permutările numerelor $0, 2, 3$ dau aceeaşi valoare: $1/2 = f[0\ 3\ 2] = f[3\ 0\ 2]$ etc.
- folosind această definiţie, are loc următoarea formulă alternativă pentru polinomul de interpolare, numită **formula diferenţelor divizate a lui Newton**

$$\begin{aligned} P(x) = f[x_1] \quad &+ \quad f[x_1\ x_2](x - x_1) \\ &+ \quad f[x_1\ x_2\ x_3](x - x_1)(x - x_2) \\ &+ \quad f[x_1\ x_2\ x_3\ x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &+ \quad \cdots \\ &+ \quad f[x_1 \cdots x_n](x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

- mai mult, coeficienţii $f[x_1 \ldots x_k]$ din definiţia de mai sus pot fi calculaţi recursiv după cum urmează
- listăm punctele într-un tabel:

$$\begin{array}{c|c} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

- acum definim diferenţele divizate, care sunt numerele reale

$$\begin{aligned} f[x_k] &= f(x_k) \\ f[x_k\ x_{k+1}] &= \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k} \\ f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}] &= \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}] - f[x_k\ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\ f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] &= \frac{f[x_{k+1}\ x_{k+2}\ x_{k+3}] - f[x_k\ x_{k+1}\ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}, \quad (3) \end{aligned}$$

şi aşa mai departe

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- ambele fapte importante că (1) unicul polinom care interpolează $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ este dat de (2) şi (2) coeficienţii pot fi calculaţi folosind (3), nu sunt evidente, şi demonstraţiile lor vor fi date în Subsecţiunea 4.2.2
- observăm că formula diferenţelor divizate ne dă polinomul de interpolare direct în formă imbricată, fiind astfel automat pregătit pentru a fi evaluat în mod eficient

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

Algoritmul 1 (Metoda diferenţelor divizate a lui Newton)

Fiind daţi $x = [x_1, \ldots, x_n]$,$y = [y_1, \ldots, y_n]$

for $j = 1, \ldots, n$

$\quad f[x_j] = y_j$

end

for $i = 2, \ldots, n$

$\quad$ **for** $j = 1, \ldots, n + 1 - i$

$\quad\quad f[x_j \cdots x_{j+i-1}] = (f[x_{j+1} \cdots x_{j+i-1}] - f[x_j \cdots x_{j+i-2}])/(x_{j+i-1} - x_j)$

$\quad$ **end**

end

Polinomul de interpolare este

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \cdots x_i](x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}).$$

- definiţia recursivă a metodei diferenţelor divizate a lui Newton permite aranjarea valorilor care trebuie calculate într-un tabel

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- pentru trei puncte, forma tabelului este:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_1 & f[x_1] & & \\
 & & f[x_1\ x_2] & \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1\ x_2\ x_3] \\
 & & f[x_2\ x_3] & \\
x_3 & f[x_3] & &
\end{array}
$$

- coeficienţii polinomului (2) pot fi citiţi de pe latura superioară a triunghiului format în tabel

Exemplul 3

- folosiţi metoda diferenţelor divizate pentru a găsi polinomul de interpolare care trece prin punctele $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$
- aplicarea definiţiilor diferenţelor divizate ne conduce la următorul tabel:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & \\
 & & \frac{1}{2} & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} \\
 & & 2 & \\
3 & 4 & &
\end{array}
$$

- acest tabel este calculat după cum urmează: după ce scriem coordonatele lui x şi y în coloane separate, calculăm următoarele coloane, de la stânga la dreapta, ca diferenţe divizate, ca în (3)
- de exemplu,

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{2-1}{2-0} & = & \dfrac{1}{2} \\
 & & \dfrac{2-\frac{1}{2}}{3-0} = \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{4-2}{3-2} & = & 2.
\end{array}
$$

- după terminarea triunghiului de diferenţe divizate, coeficienţii polinomului 1, $1/2$, $1/2$ pot fi citiţi de pe latura superioară a triunghiului format în tabel

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- polinomul de interpolare poate fi scris ca

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2),$$

sau, în formă imbricată,

$$P(x) = 1 + (x-0)\left(\frac{1}{2} + (x-2)\cdot\frac{1}{2}\right).$$

- punctele de bază pentru forma imbricată (a se vedea Capitolul 1) sunt $r_1 = 0$ şi $r_2 = 2$
- în mod alternativ, am putea face mai multe calcule şi scrie polinomul de interpolare ca

$$P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1,$$

care are aceeaşi formă cu cea obţinută mai sus folosind interpolarea Lagrange

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- folosirea metodei diferenţelor divizate permite ca punctele noi care apar după calcularea polinomului de interpolare iniţial să fie uşor de adăugat

Exemplul 4

- adăugaţi al patrulea punct $(1, 0)$ la lista de puncte din Exemplul 3
- putem să păstrăm calculele care au fost deja efectuate şi doar să adăugăm un nou rând de jos la triunghiul iniţial:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \\
2 & 2 & & \frac{1}{2} & \\
 & & 2 & & -\frac{1}{2} \\
3 & 4 & & 0 & \\
 & & 2 & & \\
1 & 0 & & &
\end{array}
$$

4.1.2 Metoda diferenţelor divizate a lui Newton

- rezultatul este adăugarea unui nou termen la polinomul iniţial $P_2(x)$
- citind de pe latura superioară a triunghiului din tabel, vedem că noul polinom de interpolare de gradul 3 este

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-2) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3).$$

- observăm că $P_3(x) = P_2(x) - \frac{1}{2}(x-0)(x-2)(x-3)$, astfel încât polinomul anterior poate fi reutilizat ca parte dintr-unul nou

- este interesant să comparăm efortul suplimentar pe care trebuie să-l facem pentru a adăuga un nou punct la formularea Lagrange versus formularea diferenţelor divizate
- polinomul lui Lagrange trebuie recalculat de la început când se adaugă un punct; nimic din calculul anterior nu poate fi folosit
- pe de altă parte, în formularea cu diferenţe divizate, păstrăm ceea ce am făcut anterior, şi adăugăm un singur termen nou polinomului
- prin urmare, metoda diferenţelor divizate are o proprietate de „actualizare în timp real”, care îi lipseşte metodei lui Lagrange

Exemplul 5

- folosiţi metoda diferenţelor divizate a lui Newton pentru a găsi polinomul de interpolare care trece prin punctele $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,-1)$
- triunghiul diferenţelor divizate este

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 2 & & & \\
 & & -1 & & \\
1 & 1 & & 0 & \\
 & & -1 & & 0 \\
2 & 0 & & 0 & \\
 & & -1 & & \\
3 & -1 & & &
\end{array}$$

- citind coeficienţii, găsim că polinomul de interpolare de gradul 3 sau mai mic este

$$P(x) = 2 + (-1)(x-0) = 2 - x,$$

acelaşi cu cel din Exemplul 2, dar la care am ajuns mult mai uşor

4.1.3 Reprezentarea funcţiilor prin polinoame de aproximare

- o utilizare importantă a interpolării polinomiale este de a înlocui evaluarea unei funcţii complicate prin evaluarea unui polinom, care presupune doar operaţiile elementare din calculator, cum ar fi adunarea, scăderea şi înmulţirea
- putem să ne gândim la această utilizare ca la o formă de compresie: ceva complex este înlocuit cu ceva simplu şi uşor calculabil, probabil cu ceva pierdere în acurateţe, pe care va trebui s-o analizăm
- începem cu un exemplu din trigonometrie

Exemplul 6

- interpolaţi funcţia $f(x) = \sin x$ în 4 puncte egal depărtate din $[0, \pi/2]$
- vom face compresia funcţiei sinus pe intervalul $[0, \pi/2]$
- luăm patru puncte egal depărtate şi formăm triunghiul diferenţelor divizate
- vom prezenta valorile cu patru zecimale exacte:

4.1.3 Reprezentarea funcţiilor prin polinoame de aproximare

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0.0000 & & & \\
 & & 0.9549 & & \\
\pi/6 & 0.5000 & & -0.2443 & \\
 & & 0.6990 & & -0.1139 \\
2\pi/6 & 0.8660 & & -0.4232 & \\
 & & 0.2559 & & \\
3\pi/6 & 1.0000 & & &
\end{array}
$$

- polinomul de interpolare de gradul 3 este prin urmare

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= 0 + 0.9549x - 0.2443x(x - \pi/6) - 0.1139x(x - \pi/6)(x - \pi/3) \\
&= 0 + x(0.9549 + (x - \pi/6)(-0.2443 + (x - \pi/3)(-0.1139))). \quad (4)
\end{aligned}
$$

- acest polinom este reprezentat grafic împreună cu funcţia sinus în Figura 2

4.1.3 Reprezentarea funcţiilor prin polinoame de aproximare

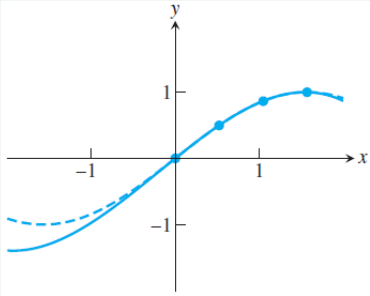

Figura 2: **Interpolarea de gradul 3 a lui sin *x*.** Polinomul de interpolare este reprezentat grafic cu linie continuă împreună cu $y = \sin x$, care este reprezentată cu linie punctată. Nodurile de interpolare egal depărtate sunt 0, $\pi/6$, $2\pi/6$, şi $3\pi/6$. Aproximarea este foarte bună între 0 şi $\pi/2$.

4.1.3 Reprezentarea funcţiilor prin polinoame de aproximare

- la acest nivel de rezoluţie, $P_3(x)$ şi $\sin x$ sunt indiscernabile pe intervalul $[0, \pi/2]$
- am făcut compresia cantităţii infinite de informaţie cuprinsă în curba sinus în câţiva coeficienţi stocabili în memorie şi în capacitatea de a efectua 3 adunări şi 3 înmulţiri în (4)
- pentru a putea implementa o aproximare a funcţiei `sin` pe un calculator, trebuie să vedem cum putem trata intrări de pe toată dreapta reală
- dar, datorită simetriilor funcţiei sinus, partea grea a fost deja făcută
- intervalul $[0, \pi/2]$ reprezintă un aşa-numit **domeniu fundamental** pentru funcţia sinus, ceea ce înseamnă că o intrare din orice alt interval poate fi redusă la una din acest interval
- fiind dată o intrare x din $[\pi/2, \pi]$, putem să calculăm $\sin x$ ca $\sin(\pi - x)$, deoarece funcţia sin este simetrică faţă de $x = \pi/2$
- fiind dată o intrare x din $[\pi, 2\pi]$, avem $\sin x = -\sin(2\pi - x)$ datorită antisimetriei faţă de $x = \pi$

4.1.3 Reprezentarea funcţiilor prin polinoame de aproximare

- în final, deoarece sin este periodică având perioada 2π, putem calcula valoarea funcţiei pentru orice valoare reducând prima dată această valoare modulo 2π
- câteva ieşiri tipice ale acestei interpolări sunt date în tabelul de mai jos

x	$\sin x$	$P_3(x)$	$\lvert \sin x - P_3(x) \rvert$
1	0.8415	0.8411	0.0004
2	0.9093	0.9102	0.0009
3	0.1411	0.1428	0.0017
4	−0.7568	−0.7557	0.0011
14	0.9906	0.9928	0.0022
1000	0.8269	0.8263	0.0006

- nu este rău pentru o primă încercare
- eroarea este de obicei sub 1 procent
- pentru a obţine suficiente cifre corecte pentru a umple afişajul unui calculator, va trebui să ştim mai multe despre eroarea de interpolare, care reprezintă subiectul secţiunii următoare

4.2 Eroarea de interpolare

- acurateţea implementării funcţiei `sin` pe un calculator depinde de aproximarea din Figura 2
- cât de bună este această aproximare?
- am prezentat un tabel care indică faptul că, pentru câteva exemple, primele două zecimale sunt exacte, dar după aceea cifrele nu sunt întotdeauna corecte
- în această secţiune, investigăm metode de a măsura această eroare şi de a o face mai mică

4.2.1 Formula erorii de interpolare

- presupunem că pornim cu o funcţie $y = f(x)$ şi luăm puncte de pe graficul ei pentru a construi un polinom de interpolare $P(x)$, cum am făcut cu $f(x) = \sin x$ în Exemplul 6
- **eroarea de interpolare** în x este $f(x) - P(x)$, diferenţa dintre funcţia iniţială care a dat punctele şi polinomul de interpolare, evaluat în x
- eroarea de interpolare este distanţa pe verticală între cele două curbe din Figura 2
- următoarea teoremă ne dă o formulă pentru eroarea de interpolare care este de obicei imposibil de evaluat exact, dar poate cel puţin să ne dea o limită a erorii

Teorema 2

Dacă $P(x)$ este polinomul de interpolare (de grad cel mult $n-1$) pentru n puncte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, eroarea de interpolare este

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c), \tag{5}$$

unde c se află între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele $x, x_1, \ldots, x_n$.

4.2.1 Formula erorii de interpolare

- demonstraţia Teoremei 2 va fi dată în Subsecţiunea 4.2.2
- putem folosi această teoremă pentru a determina acurateţea interpolării funcţiei `sin` pe care am realizat-o în Exemplul 6
- ecuaţia (5) devine în acest caz

$$\sin x - P(x) = \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{4!} f''''(c),$$

  unde $0 < c < \pi/2$
- derivata a patra $f''''(c) = \sin c$ variază între 0 şi 1 pe acest interval
- în cel mai defavorabil caz, $|\sin c|$ nu depăşeşte valoarea 1, şi prin urmare putem fi asiguraţi de o limită superioară a erorii de interpolare:

$$|\sin x - P(x)| \leq \frac{\left|(x-0)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{24}|1|.$$

- pentru $x = 1$, eroarea în cel mai defavorabil caz este

$$|\sin 1 - P(1)| \leq \frac{\left|(1-0)\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\left(1-\frac{\pi}{3}\right)\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.0005348. \tag{6}$$

- aceasta este o limită superioară a erorii, deoarece am folosit o limită de tip „cel mai defavorabil caz” pentru derivata a patra

4.2.1 Formula erorii de interpolare

- observăm că eroarea propriu-zisă în $x = 1$ a fost 0.0004, care este mai mică decât limita dată în (6)
- putem să tragem anumite concluzii pe baza formulei erorii de interpolare
- ne aşteptăm la erori mai mici când x este mai aproape de mijlocul intervalului în care se află valorile x_i, decât atunci când este mai aproape de unul dintre capete, deoarece vor fi termeni mai mici în acest produs
- de exemplu, putem să comparăm limita superioară a erorii pe care am obţinut-o mai sus cu cea din cazul $x = 0.2$, care este aproape de capătul din stânga al intervalului în care se află punctele
- în acest caz, formula de eroare este

$$|\sin 0.2 - P(0.2)| \leq \frac{\left|(0.2-0)\left(0.2-\frac{\pi}{6}\right)\left(0.2-\frac{\pi}{3}\right)\left(0.2-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{24}|1| \approx 0.00313,$$

  aproximativ de şase ori mai mare
- corespunzător, eroarea propriu-zisă este şi ea mai mare, şi anume,

$$|\sin 0.2 - P(0.2)| = |0.19867 - 0.20056| = 0.00189.$$

Exemplul 7

- găsiţi o limită superioară pentru diferenţa în $x = 0.25$ şi $x = 0.75$ dintre $f(x) = e^x$ şi polinomul care interpolează această funcţie în punctele $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$

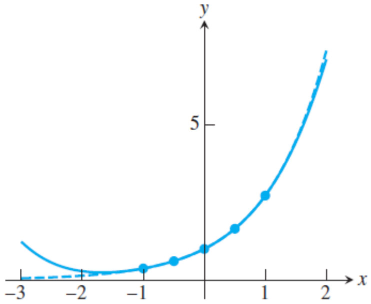

Figura 3: **Polinomul de interpolare pentru aproximarea funcţiei $f(x) = e^x$.** Nodurile de interpolare egal depărtate sunt $-1, -0.5, 0, 0.5, 1$. Linia continuă reprezintă polinomul de interpolare.

4.2.1 Formula erorii de interpolare

- construirea polinomului de interpolare, prezentat în Figura 3, nu este necesară pentru a găsi această limită
- formula erorii de interpolare (5) ne dă

$$f(x) - P_4(x) = \frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{5!} f^{(5)}(c),$$

  unde $-1 < c < 1$
- derivata a cincea este $f^{(5)}(c) = e^c$
- deoarece e^x creşte odată cu x, maximul se atinge în partea dreaptă a intervalului, deci $|f^{(5)}| \le e^1$ pe $[-1, 1]$
- pentru $-1 \le x \le 1$, formula erorii devine

$$|e^x - P_4(x)| \le \frac{\left|(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\right|}{5!} e.$$

- în $x = 0.25$, eroarea de interpolare are limita superioară

$$|e^{0.25} - P_4(0.25)| \leq \frac{|(1.25)(0.75)(0.25)(-0.25)(-0.75)|}{120} e \approx 0.000995.$$

- în $x = 0.75$, eroarea de interpolare poate fi mai mare:

$$|e^{0.75} - P_4(0.75)| \leq \frac{|(1.75)(1.25)(0.75)(0.25)(0.25)|}{120} e \approx 0.002323.$$

- observăm din nou că eroarea de interpolare tinde să fie mai mică în apropierea centrului intervalului de interpolare

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- în această subsecţiune, vom explica raţionamentul din spatele a două fapte importante folosite mai devreme
- mai întâi, vom deduce formula diferenţelor divizate a lui Newton pentru polinomul de interpolare, iar apoi vom demonstra formula erorii de interpolare
- să ne amintim ce ştim până acum
- dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt n puncte distincte pe dreapta reală şi $y_1, \ldots, y_n$ sunt arbitrare, ştim din Teorema 1 că există exact un polinom de interpolare (de grad cel mult $n-1$) $P_{n-1}(x)$ pentru aceste puncte
- ştim de asemenea că formula de interpolare a lui Lagrange ne dă un asemenea polinom
- lipseşte demonstraţia faptului că formula diferenţelor divizate a lui Newton dă şi ea un polinom de interpolare
- de îndată ce demonstrăm că acest lucru se întâmplă în Teorema 4, vom şti că acesta trebuie să fie identic cu cel dat de formula lui Lagrange

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- fie $P(x)$ (unicul) polinom care interpolează $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, şi, ca în Definiţia 2, notăm cu $f[x_1 \cdots x_n]$ coeficientul de gradul $n-1$ al lui $P(x)$
- prin urmare, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, unde $a_{n-1} = f[x_1 \cdots x_n]$, şi două fapte ies în evidenţă

Faptul 1

$f[x_1 \cdots x_n] = f[\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_n)]$ pentru orice permutare σ a valorilor x_i.

- rezultă clar din unicitatea polinomului de interpolare, demonstrată în Teorema 1

Faptul 2

$P(x)$ poate fi scris sub forma

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + c_{n-1}(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- evident, trebuie să alegem $c_{n-1} = a_{n-1}$
- celelalte valori $c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots, c_0$ sunt definite recursiv luând c_k ca fiind coeficientul de gradul k al polinomului (de grad cel mult k)

$$P(x)-c_{n-1}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})-c_{n-2}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})-\ldots-c_{k+1}(x-x_1)\cdots(x-x_{k+1}).$$

- acesta este un polinom de grad cel mult k datorită alegerii lui c_{k+1}

Teorema 3 (Teorema lui Rolle)

Fie f derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $[a, b]$, şi presupunem că $f(a) = f(b)$. Atunci există un număr c între a şi b astfel încât $f'(c) = 0$.

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

Teorema 4

Fie $P(x)$ polinomul de interpolare a punctelor $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ unde valorile x_i sunt distincte. Atunci

(a) $P(x) = f[x_1] + f[x_1\ x_2](x - x_1) + f[x_1\ x_2\ x_3](x - x_1)(x - x_2) + \cdots + f[x_1\ x_2 \cdots x_n](x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$, şi

(b) pentru $k > 1$, $f[x_1 \cdots x_k] = \frac{f[x_2 \cdots x_k] - f[x_1 \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_1}$.

- (a) trebuie să demonstrăm că $c_{k-1} = f[x_1 \cdots x_k]$ pentru $k = 1, \ldots, n$
- este deja clar pentru $k = n$ prin definiţie
- în general, înlocuim succesiv $x_1, \ldots, x_k$ în formula lui $P(x)$ din Faptul 2
- doar primii k termeni sunt nenuli
- concluzionăm că polinomul format din primii k termeni ai lui $P(x)$ este suficient pentru a interpola $x_1, \ldots, x_k$, şi astfel din Definiţia 2 şi din unicitatea polinomului de interpolare, $c_{k-1} = f[x_1 \cdots x_k]$

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- (b) conform cu (a), polinomul de interpolare a punctelor $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_1, x_k$ este

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_2] + f[x_2\ x_3](x-x_2) + \dots + f[x_2\ x_3\ \cdots x_{k-1}\ x_1](x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}) \\ &\quad + f[x_2\ x_3 \cdots x_{k-1}\ x_1\ x_k](x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_1) \end{aligned}$$

şi polinomul de interpolare a punctelor $x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k, x_1$ este

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_2] + f[x_2\ x_3](x-x_2) + \dots + f[x_2\ x_3 \cdots x_{k-1}\ x_k](x-x_2)\cdots(x-x_{k-1}) \\ &\quad + f[x_2\ x_3 \cdots x_{k-1}\ x_k\ x_1](x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_k). \end{aligned}$$

- din unicitate, $P_1 = P_2$
- luând $P_1(x_k) = P_2(x_k)$ şi reducând termenii identici, obţinem

$$\begin{aligned} f[x_2 \cdots x_{k-1}\ x_1](x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1}) + f[x_2 \cdots x_{k-1}\ x_1\ x_k](x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_1) \\ = f[x_2 \cdots x_k](x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1}) \end{aligned}$$

sau

$$f[x_2 \cdots x_{k-1}\ x_1] + f[x_2 \cdots x_{k-1}\ x_1\ x_k](x_k - x_1) = f[x_2 \cdots x_k].$$

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- folosind Faptul 1, această relaţie poate fi rearanjată în forma

$$f[x_1 \cdots x_k] = \frac{f[x_2 \cdots x_k] - f[x_1 \cdots x_{k-1}]}{x_k - x_1}.$$

- în continuare, vom demonstra Teorema 2
- să presupunem că mai adăugăm un punct x la mulţimea punctelor de interpolare
- noul polinom de interpolare va fi

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) + f[x_1 \cdots x_n\, x](t - x_1) \cdots (t - x_n).$$

- evaluat în nou punct x, avem $P_n(x) = f(x)$, deci

$$f(x) = P_{n-1}(x) + f[x_1 \cdots x_n\, x](x - x_1) \cdots (x - x_n). \tag{7}$$

- această formulă este adevărată pentru orice x
- acum definim

$$h(t) = f(t) - P_{n-1}(t) - f[x_1 \cdots x_n\, x](t - x_1) \cdots (t - x_n).$$

4.2.2 Demonstraţia formulei lui Newton şi a formulei erorii

- observăm că $h(x) = 0$ din (7) şi $0 = h(x_1) = \cdots = h(x_n)$ deoarece P_{n-1} interpolează pe f în aceste puncte
- între fiecare două puncte învecinate dintre cele $n+1$ puncte $x, x_1, \ldots, x_n$, trebuie să existe un nou punct în care $h' = 0$, din Teorema lui Rolle 3
- există n astfel de puncte
- între fiecare două dintre acestea, trebuie să existe un nou punct în care $h'' = 0$; există $n-1$ astfel de puncte
- continuând în acelaşi fel, trebuie să existe un punct c pentru care $h^{(n)}(c) = 0$, unde c se află între cea mai mică şi cea mai mare valoare dintre $x, x_1, \ldots, x_n$
- observăm că
$$h^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n! f[x_1 \cdots x_n\ x],$$
deoarece a n-a derivată a polinomului $P_{n-1}(t)$ este zero
- înlocuind pe c în această relaţie, obţinem $f[x_1 \cdots x_n\ x] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, ceea ce conduce la $f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, unde am folosit (7)

4.2.3 Fenomenul Runge

- polinoamele pot interpola orice mulţime de puncte, după cum arată Teorema 1
- totuşi, există anumite forme pe care polinoamele le preferă mai mult decât pe altele
- luăm exemplul unor puncte egal depărtate $x = -3, -2.5, -2, -1.5, \ldots, 2.5, 3$ pentru care valorile y sunt zero, cu excepţia celei pentru $x = 0$, unde valoarea lui y este 1
- punctele sunt plate de-a lungul axei x, cu excepţia unei ridicături triangulare în $x = 0$, după cum se prezintă în Figura 4

4.2.3 Fenomenul Runge

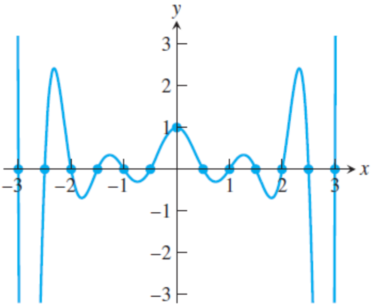

Figura 4: **Interpolarea unei funcţii bombate triangulare.** Polinomul de interpolare variază mai mult decât punctele de intrare.

- polinomul care trece prin puncte situate în acest fel refuză să stea între 0 şi 1, spre deosebire de punctele propriu-zise
- aceasta este o ilustrare a aşa-numitului **fenomen Runge**
- este folosit de obicei pentru a descrie variaţia polinomială extremă asociată cu un polinom de interpolare de grad mare a unor puncte egal depărtate

4.2.3 Fenomenul Runge

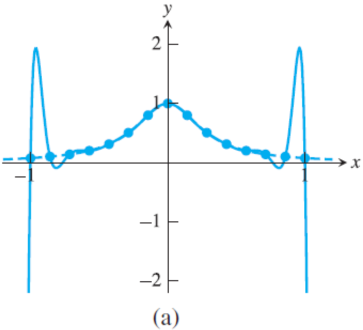

Figura 5: **Exemplul Runge.** Interpolarea polinomială a funcţiei Runge din Exemplul 8 în puncte egal depărtate determină o variaţie extremă în apropierea capetelor intervalului, ca în Figura 4 (a) 15 puncte de interpolare (b) 25 puncte de interpolare.

4.2.3 Fenomenul Runge

Exemplul 8

- interpolaţi $f(x) = 1/(1 + 12x^2)$ în puncte egal depărtate din $[-1, 1]$
- acesta se numeşte **exemplul Runge**
- funcţia are aceeaşi formă generală ca funcţia bombată triangulară din Figura 4
- Figura 5 prezintă rezultatul interpolării, comportament care este caracteristic fenomenului Runge: variaţie polinomială în apropierea capetelor intervalului de interpolare

- după cum am văzut, exemplele în care se manifestă fenomenul Runge au o eroare mare în apropierea capetelor intervalului în care se află punctele
- rezolvarea acestei probleme este intuitivă: trebuie să mutăm anumite puncte de interpolare spre capetele intervalului, unde funcţia care a produs datele poate fi mai bine interpolată
- vom vedea cum se realizează acest lucru în secţiunea următoare privind interpolarea Cebîşev

4.3 Interpolarea Cebîşev

- de obicei, punctele de bază x_i pentru interpolare se aleg astfel încât ele să fie egal depărtate
- în multe cazuri, punctele care trebuie interpolate sunt disponibile doar în acea formă—de exemplu, când punctele constau din valori date de instrumentele de măsură la intervale constante de timp
- în alte cazuri—de exemplu, implementarea funcţiei sinus pe un calculator—putem să alegem punctele de bază cum considerăm că este cel mai bine
- se dovedeşte că alegerea distanţelor dintre punctele de bază poate avea un efect semnificativ asupra erorii de interpolare
- interpolarea Cebîşev se referă la o modalitate optimă de alegere a acestor distanţe

4.3.1 Teorema lui Cebîşev

- motivaţia pentru interpolarea Cebîşev este de a îmbunătăţi controlul asupra valorii maxime a erorii de interpolare

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

  pe intervalul de interpolare
- să presupunem, deocamdată, că fixăm acest interval să fie $[-1, 1]$
- numărătorul

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{8}$$

  din formula erorii de interpolare este el însuşi un polinom de gradul n în x şi are o anumită valoare maximă pe $[-1, 1]$
- este posibil să găsim anumite puncte $x_1, \ldots, x_n$ în $[-1, 1]$ care determină ca valoarea maximă a lui (8) să fie cât mai mică posibil?
- aceasta este numită problema minimax a interpolării
- de exemplu, Figura 6(a) prezintă un grafic al polinomului de gradul 9 din (8) când $x_1, \ldots, x_9$ sunt egal depărtate

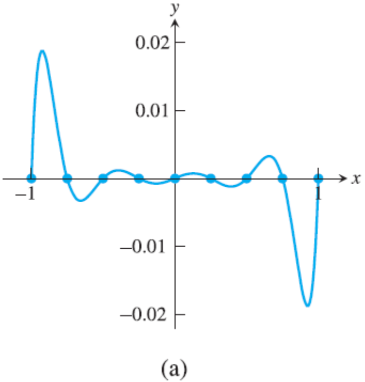

Figura 6: **Parte din formula erorii de interpolare.** Graficul lui $(x - x_1) \cdots (x - x_9)$ pentru (a) nouă puncte de bază egal depărtate x_i (b) nouă rădăcini Cebîşev x_i.

4.3.1 Teorema lui Cebîşev

- tendinţa acestui polinom de a avea valori mari în apropierea capetelor intervalului $[-1, 1]$ este o manifestare a fenomenului Runge
- Figura 6(b) prezintă acelaşi polinom (8), dar punctele $x_1, \ldots, x_9$ au fost alese astfel încât valoarea polinomului să fie egalizată de-a lungul intervalului $[-1, 1]$
- punctele au fost alese conform Teoremei 5, prezentată mai jos
- de fapt, exact această poziţionare, în care punctele de bază x_i sunt $\cos\frac{\pi}{18}, \cos\frac{3\pi}{18}, \ldots, \cos\frac{17\pi}{18}$, face ca maximul valorii absolute a lui (8) să fie egal cu $1/256$, minimul posibil pentru nouă puncte pe intervalul $[-1, 1]$
- această poziţionare, datorată lui Cebîşev, este rezumată în teorema următoare:

Teorema 5

Alegerea numerelor reale $-1 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$ care face ca valoarea lui

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

să fie cât mai mică posibil este

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \qquad \text{pentru } i = 1, \ldots, n,$$

şi valoarea minimă este $1/2^{n-1}$. De fapt, minimul este atins de către

$$(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

unde prin $T_n(x)$ am notat polinomul Cebîşev de gradul n.

- demonstraţia acestei teoreme este dată mai târziu, după ce stabilim câteva proprietăţi ale polinoamelor Cebîşev

4.3.1 Teorema lui Cebîşev

- concluzionăm din teoremă că eroarea de interpolare poate fi minimizată dacă cele n puncte de interpolare din $[-1, 1]$ sunt alese astfel încât să fie rădăcinile polinomului Cebîşev de gradul n $T_n(x)$
- aceste rădăcini sunt:
$$x_i = \cos \frac{\text{impar} \cdot \pi}{2n}, \tag{9}$$
unde „impar” înseamnă numerele impare de la 1 la $2n - 1$
- atunci avem garanţia că valoarea absolută a lui (8) este mai mică decât $1/2^{n-1}$ pentru orice x din $[-1, 1]$
- alegerea rădăcinilor Cebîşev ca puncte de bază pentru interpolare distribuie eroarea de interpolare cât mai uniform posibil de-a lungul intervalului $[-1, 1]$
- vom numi polinomul de interpolare care foloseşte rădăcinile Cebîşev ca puncte de bază **polinomul de interpolare Cebîşev**

Exemplul 9

- găsiţi limita inferioară a erorii în cazul cel mai defavorabil pentru diferenţa pe $[-1, 1]$ dintre $f(x) = e^x$ şi polinomul de interpolare Cebîşev de gradul 4
- formula erorii de interpolare (5) ne dă

$$f(x) - P_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)}{5!} f^{(5)}(c),$$

unde

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{10},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{10},\ x_3 = \cos\frac{5\pi}{10},\ x_4 = \cos\frac{7\pi}{10},\ x_5 = \cos\frac{9\pi}{10}$$

sunt rădăcinile Cebîşev şi unde $-1 < c < 1$

- conform Teoremei lui Cebîşev 5, pentru $-1 \leq x \leq 1$,

$$|(x - x_1)\cdots(x - x_5)| \leq \frac{1}{2^4}.$$

- în plus, $|f^{(5)}| \leq e^1$ pe $[-1, 1]$
- eroarea de interpolare este

$$|e^x - P_4(x)| \leq \frac{e}{2^4 5!} \approx 0.00142,$$

pentru orice x din intervalul $[-1, 1]$
- comparăm acest rezultat cu Exemplul 7
- limita superioară a erorii pentru interpolarea Cebîşev pentru întreg intervalul este doar cu puţin mai mare decât limita superioară pentru un punct aflat în apropierea centrului intervalului, când se folosesc puncte egal depărtate
- în apropierea capetelor intervalului, eroarea Cebîşev este mult mai mică

4.3.1 Teorema lui Cebîşev

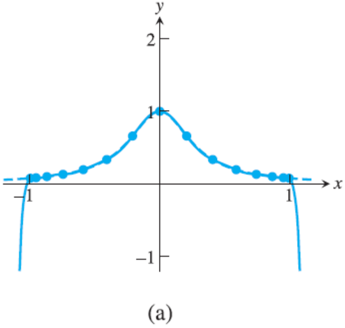

Figura 7: **Interpolarea exemplului Runge cu noduri Cebîşev.** Funcţia Runge $f(x) = 1/(1 + 12x^2)$ este reprezentată grafic împreună cu polinomul ei de interpolare Cebîşev pentru (a) 15 puncte (b) 25 puncte. Eroarea pe $[-1, 1]$ este neglijabilă la această rezoluţie. Variaţia polinomului din Figura 5 a dispărut, cel puţin între -1 şi 1.

- întorcându-ne la Exemplul Runge 8, putem elimina fenomenul Runge alegând punctele de interpolare conform ideii lui Cebîşev
- Figura 7 arată că eroarea de interpolare este mică de-a lungul întregului interval $[-1, 1]$

4.3.2 Polinoame Cebîşev

- definim al n-lea **polinom Cebîşev** prin $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$
- în ciuda aparenţei, acesta este un polinom în variabila x pentru orice n
- de exemplu, pentru $n = 0$ acesta este polinomul de gradul 0 identic egal cu 1, iar pentru $n = 1$ obţinem $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$
- pentru $n = 2$, ne reamintim formula $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- luăm $y = \arccos x$, astfel încât $\cos y = x$
- atunci $T_2(x) = \cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y = 2\cos^2 y - 1 = 2x^2 - 1$, un polinom de gradul 2
- în general, observăm că

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos(n+1)y = \cos(ny + y) = \cos ny \cos y - \sin ny \sin y \\ T_{n-1}(x) &= \cos(n-1)y = \cos(ny - y) = \cos ny \cos y - \sin ny \sin(-y). \end{aligned} \tag{10}$$

- deoarece $\sin(-y) = -\sin y$, putem aduna ecuaţiile anterioare pentru a obţine

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos ny \cos y = 2xT_n(x). \tag{11}$$

- relaţia rezultată,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \tag{12}$$

  se numeşte **relaţie de recurenţă** pentru polinoamele Cebîşev
- mai multe fapte rezultă din (12):

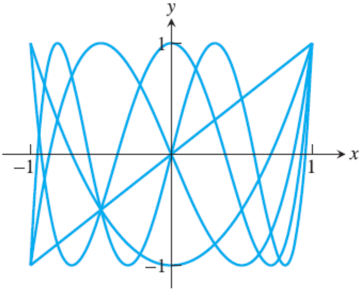

Figura 8: **Graficele polinoamelor Cebîşev de gradele 1 până la 5.** Observăm că $T_n(1) = 1$ şi valoarea absolută maximă a lui $T_n(x)$ pe $[-1, 1]$ este 1.

Faptul 3

Funcţiile T_n sunt polinoame. Am arătat acest lucru explicit pentru T_0, T_1, şi T_2. Deoarece T_3 este o combinaţie polinomială a lui T_1 şi T_2, T_3 este de asemenea un polinom. Acelaşi argument este valabil pentru toate funcţiile T_n. Primele câteva polinoame Cebîşev (a se vedea Figura 8) sunt

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Faptul 4

$\mathrm{grad}(T_n) = n$, şi coeficientul dominant este 2^{n-1}. Acest lucru este clar pentru $n = 1$ şi 2, iar relaţia de recurenţă extinde această proprietate pentru orice n.

Faptul 5

$T_n(1) = 1$ şi $T_n(-1) = (-1)^n$. Ambele sunt clare pentru $n = 1$ şi 2. În general,

$$T_{n+1}(1) = 2(1)T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(1) - 1 = 1$$

şi

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-1) &= 2(-1)T_n(-1) - T_{n-1}(-1) \\ &= -2(-1)^n - (-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}(2-1) = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Faptul 6

Valoarea absolută maximă a lui $T_n(x)$ pentru $-1 \leq x \leq 1$ este 1. Aceasta rezultă imediat din faptul că $T_n(x) = \cos y$ pentru un anumit y.

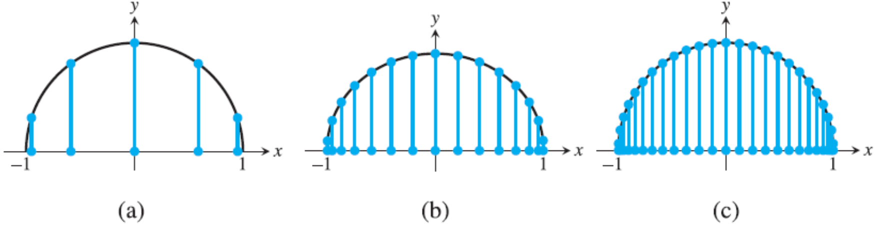

Figura 9: **Locaţiile rădăcinilor polinomului Cebîşev.** Rădăcinile sunt coordonatele x ale punctelor egal depărtate de pe cerc pentru (a) gradul 5 (b) gradul 15 (c) gradul 25.

Faptul 7

Toate rădăcinile lui $T_n(x)$ se află între -1 şi 1. A se vedea Figura 9. De fapt, rădăcinile sunt soluţia ecuaţiei $0 = \cos(n \arccos x)$. Deoarece $\cos y = 0$ dacă şi numai dacă $y =$ întreg impar $\cdot (\pi/2)$, avem că

$$\begin{aligned} n \arccos x &= \text{impar} \cdot \pi/2 \\ x &= \cos \frac{\text{impar} \cdot \pi}{2n}. \end{aligned}$$

Faptul 8

$T_n(x)$ alternează între -1 şi 1 de $n+1$ ori în total. De fapt, acest lucru se întâmplă în punctele $\cos 0, \cos \pi/n, \ldots, \cos(n-1)\pi/n, \cos \pi$.

- rezultă din Faptul 4 că polinomul $T_n(x)/2^{n-1}$ este monic (are coeficientul dominant egal cu 1)

- deoarece, conform Faptului 7, toate rădăcinile lui $T_n(x)$ sunt reale, putem scrie $T_n(x)/2^{n-1}$ în formă factorizată ca $(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ unde valorile x_i sunt nodurile Cebîşev descrise în Teorema 5
- teorema lui Cebîşev rezultă direct din aceste fapte
- *Demonstraţia Teoremei 5*
- fie $P_n(x)$ un polinom monic cu un maxim în valoare absolută şi mai mic pe $[-1, 1]$; cu alte cuvinte, $|P_n(x)| < 1/2^{n-1}$ pentru $-1 \leq x \leq 1$
- această presupunere conduce la o contradicţie
- deoarece $T_n(x)$ alternează între -1 şi 1 de $n+1$ ori în total (Faptul 8), în acele $n+1$ puncte, diferenţa $P_n - T_n/2^{n-1}$ este alternativ pozitivă şi negativă
- prin urmare, $P_n - T_n/2^{n-1}$ trebuie să treacă prin zero de cel puţin n ori; adică, trebuie să aibă cel puţin n rădăcini
- aceasta contrazice faptul că, deoarece P_n şi $T_n/2^{n-1}$ sunt monice, diferenţa lor este de grad $\leq n - 1$

4.3.3 Schimbarea intervalului

- până acum, discuţia noastră despre interpolarea Cebîşev a fost limitată la intervalul $[-1, 1]$, deoarece Teorema 5 este mai uşor de enunţat pe acest interval
- în continuare, vom muta întreaga metodologie pe un interval general $[a, b]$
- punctele de bază sunt mutate astfel încât să aibă aceleaşi poziţii relative în $[a, b]$ pe care le-au avut în $[-1, 1]$
- cel mai bine este să ne gândim că facem acest lucru în două etape: (1) *extindem* punctele cu un factor de $(b - a)/2$ (raportul dintre lungimile celor două intervale), şi (2) *translatăm* punctele cu $(b + a)/2$ pentru a muta centrul de masă din 0 în mijlocul lui $[a, b]$
- cu alte cuvinte, mutăm punctele iniţiale

$$\cos \frac{\text{impar} \cdot \pi}{2n}$$

în

$$\frac{b-a}{2} \cos \frac{\text{impar} \cdot \pi}{2n} + \frac{b+a}{2}.$$

4.3.3 Schimbarea intervalului

- cu noile puncte de bază Cebîşev $x_1, \ldots, x_n$ în $[a, b]$, limita superioară corespunzătoare numărătorului formulei erorii de interpolare este schimbată datorită extinderii cu $(b-a)/2$ a fiecărui factor $x - x_i$
- ca o consecinţă, valoarea minimax $1/2^{n-1}$ trebuie înlocuită cu $[(b-a)/2]^n/2^{n-1}$

Algoritmul 2 (Nodurile de interpolare Cebîşev)

Pe intervalul $[a, b]$,

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

pentru $i = 1, \ldots, n$. Inegalitatea

$$|(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} \tag{13}$$

are loc pe $[a, b]$.

- următorul exemplu ilustrează folosirea interpolării Cebîşev pe un interval general

Exemplul 10

- găsiţi cele patru puncte de bază Cebîşev pentru interpolarea pe intervalul $[0, \pi/2]$, şi găsiţi limita superioară pentru eroarea de interpolare Cebîşev pentru funcţia $f(x) = \sin x$ pe intervalul respectiv
- aceasta este a doua încercare
- am folosit puncte de bază egal depărtate în Exemplul 6
- punctele de bază Cebîşev sunt

$$\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \cos\left(\frac{\text{impar} \cdot \pi}{2(4)}\right) + \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2},$$

sau

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8},\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{8},\ x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{8},\ x_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{8}.$$

- din (13), eroarea de interpolare în cel mai nefericit caz pentru $0 \leq x \leq \pi/2$ este

$$
\begin{aligned}
|\sin x - P_3(x)| &= \frac{|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)|}{4!}|f''''(c)| \\
&\le \frac{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right)^4}{4!2^3} 1 \approx 0.00198.
\end{aligned}
$$

- polinomul de interpolare Cebîşev pentru acest exemplu este evaluat în mai multe puncte, în tabelul de mai jos:

x	$\sin x$	$P_3(x)$	$\|\sin x - P_3(x)\|$
1	0.8415	0.8408	0.0007
2	0.9093	0.9097	0.0004
3	0.1411	0.1420	0.0009
4	−0.7568	−0.7555	0.0013
14	0.9906	0.9917	0.0011
1000	0.8269	0.8261	0.0008

- erorile de interpolare sunt mult sub estimarea din cel mai nefericit caz

4.3.3 Schimbarea intervalului

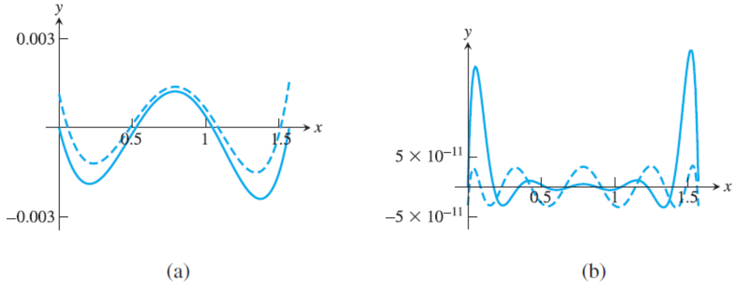

Figura 10: **Eroarea de interpolare pentru aproximarea funcţiei $f(x) = \sin x$.** (a) Eroarea de interpolare pentru polinomul de interpolare de gradul 3 cu punctele de bază egal depărtate (curba continuă) şi cu punctele de bază Cebîşev (curba punctată). (b) La fel ca (a), dar pentru gradul 9.

- Figura 10 reprezintă grafic eroarea de interpolare ca funcţie de x pe intervalul $[0, \pi/2]$, comparată cu aceeaşi eroare pentru interpolarea cu puncte egal depărtate
- eroarea Cebîşev (curba punctată) este puţin mai mică şi este distribuită mai uniform de-a lungul intervalului de interpolare

Vă mulţumesc!