Ecuația diferențială a undelor

$$\Psi = \Psi(\vec{r},t) = \Psi\left(t \mp \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{\omega}\right) \equiv \Psi(\tau) = \Psi[\tau(\vec{r},t)]$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{d\Psi}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x} = \mp\frac{k_x}{\omega}\frac{d\Psi}{d\tau}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d\tau}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = \mp\frac{k_x}{\omega}\frac{d}{d\tau}\left(\mp\frac{k_x}{\omega}\frac{d\Psi}{d\tau}\right) = \left(\frac{k_x}{\omega}\right)^2\frac{d^2\Psi}{d\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right) = \frac{d^2\Psi}{d\tau^2}$$

Ecuaţia diferenţială a undelor

Ecuaţia diferenţială a undelor: $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

operatorul lui Laplace: $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta\Psi-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale a undelor este o suprapunere de două soluţii de argumente diferite: $$\Psi(\vec{r},t)=F\left(t-\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{\omega}\right)+G\left(t+\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{\omega}\right)$$

Prima soluţie *F* se propagă dinspre sursă, are sens fizic şi se numeşte ***undă progresivă*** sau *undă divergentă*. Cea de a doua soluţie *G* se propagă înspre sursă, nu are sens fizic şi se numeşte ***undă regresivă*** sau *undă convergentă*.

Caracteristici energetice ale undei

Unda elastică posedă energie mecanică, sub formă de energie cinetică şi energie potenţială elastică.

Într-un mediu conservativ, deci care nu are pierderi de energie, energia mecanică totală primită de mediu este egală cu energia mecanică totală a undei:

$$W = W_c + W_p$$

Considerăm că ecuaţia undei elastice este unidimensională:

$$y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Energia cinetică pe care o primeşte o particulă la care a ajuns unda este:

$$W_{c,1} = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 A^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Caracteristici energetice ale undei

Energia cinetică a tuturor particulelor din volumul ΔV

$$\Delta W_c = \frac{1}{2}\rho \cdot \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Conform legii lui Hooke, forţa elastică este proporţională cu deformaţia relativă ε , respectiv cu deformaţia absolută (elongaţia) x

$$F_e = -E\Delta S\varepsilon = -E\frac{\Delta S}{l_0}x \equiv -kx$$

Lucru mecanic este egal cu:

$$L = \int_0^{\Delta l} F_{el} \cdot dx = -E\frac{\Delta S}{l_0}\int_0^{\Delta l} x \cdot dx = -\frac{E}{2}\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 (l_0 \Delta S) = -\frac{E}{2}\varepsilon^2 \Delta V \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\omega}{u}A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\Delta W_p = -L = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2}\rho u^2 \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

Caracteristici energetice ale undei

Densităţile de energie ale undei în mediul de propagare sunt definite astfel:

$$w = \frac{dW}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = w_c + w_p = \rho \omega^2 A^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

Se observă că densitatea de energie cinetică este egală cu densitatea de energie potenţială elastică, ambele fiind dependente de timp. De aceea este util a se calcula ***valoarea medie a densităţii totale de energie*** în decursul unei perioade:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = const$$

Fluxul de energie este mărimea fizică ce reprezintă cantitatea de energie transmisă de undă printr-o suprafaţă oarecare, în unitatea de timp:

$$\Phi = \frac{dW}{dt} \qquad [\Phi]_{SI} = 1\frac{J}{s} = 1W$$

Caracteristici energetice ale undei

Densitatea fluxului de energie a undei reprezintă fluxul de energie transportat de undă prin unitatea de suprafaţă, perpendicular pe această suprafaţă:

$$\vec{j} = \frac{d\Phi}{d\vec{S}} = \frac{d}{d\vec{S}}\left(\frac{dW}{dt}\right) = \frac{dW}{dV}\frac{d\vec{r}}{dt} = w \cdot \vec{u} \qquad [j]_{SI} = 1\frac{W}{m^2}$$

Intensitatea energetică a undei, $\vec{I} = <\vec{j}>$

vectorul lui Poynting -arată că unda transportă energie în direcţia şi sensul propagării sale, adică în direcţia şi sensul vitezei de fază.

$$<\vec{I}> = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

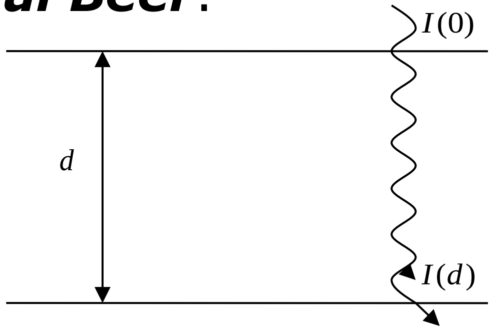
Absorbţia undelor

Dacă unda se propagă printr-un anumit mediu dat, atunci are loc ***absorbţia*** treptată a energiei undei de către particulele mediului de propagare. Drept consecinţă, amplitudinea undei scade, adică are loc atenuarea undei. Experienţa arată că scăderea amplitudinii undei se face după o lege exponenţială, de forma:

$$A(\vec{r}) = A_0 e^{-\gamma\, \vec{n}\cdot\vec{r}}$$

Intensitatea undei este proporţională cu amplitudinea deci, în cazul unui mediu absorbant obţinem ***legea de absorbţie a lui Beer***:

$$I(d) = I_0 e^{-\kappa\, d}$$



Coeficientul de absorbţie : $\kappa = 2\gamma$

este egal cu inversul distanţei după care intensitatea undei scade de *e* (baza logaritmilor naturali) ori, când pătrunde în mediul respectiv.

Interferența undelor.Unde staționare

Dacă într-un mediu se propagă mai multe unde, acestea nu se perturbă reciproc ci se suprapun şi compun, adică ***interferă***.

$$\Psi_1 = A\cos(\omega t - kr_1)$$

$$\Psi_2 = A\cos(\omega t - kr_2)$$

Din suprapunerea şi compunerea lor rezultă:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos[k(r_2 - r_1)/2]\cos[\omega t - k(r_2 + r_1)/2]$$

o ***undă staţionară,*** a cărei amplitudine, pentru un punct *dat, are aceeaşi valoare în orice moment.* $A(r) = |\,2A\cos[k(r_2 - r_1)/2]\,|$

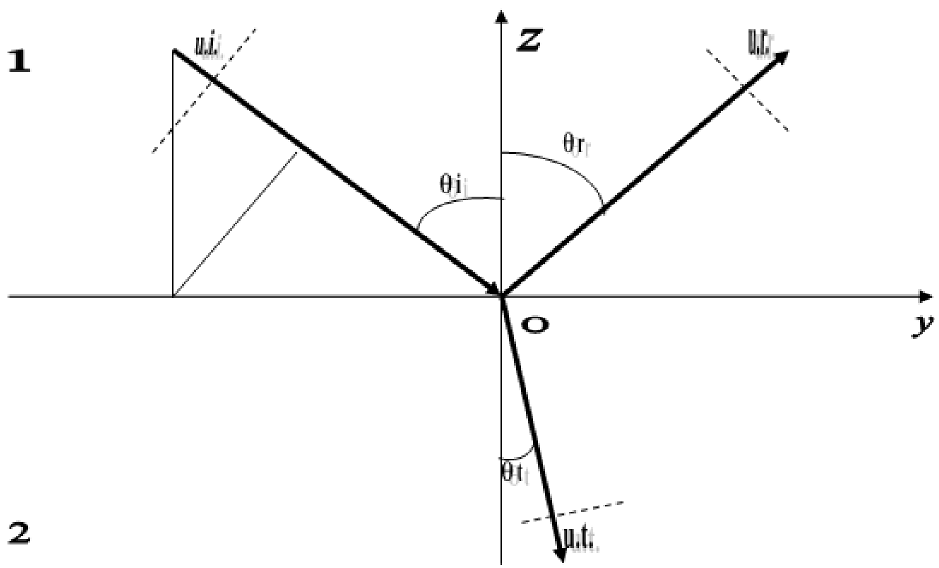
Dacă $A(r) = 0,$ $(r_2 - r_1) = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$ punctele se numesc **noduri**.

Dacă $A(x) = 2A,$ $(r_2 - r_1) = 2n\dfrac{\lambda}{2}$ punctele se numesc ***ventre.***

Reflexia și refracția undelor

Reflexia reprezintă schimbarea direcției de propagare a undei atunci când, propagându-se printr-un mediu, notat generic cu 1, întâlnește o discontinuitate (sau un alt mediu de propagare, notat generic cu 2), fenomen în urma căruia unda se întoarce în mediul inițial 1.

Refracția *(sau transmisia)* reprezintă tot o schimbare a direcției de propagare a undei, dar ea nu se mai întoarce în mediul 1, ci pătrunde în mediul 2.



$$\vec{n}_{i,t} = \sin\theta_{i,t}\,\vec{j} - \cos\theta_{i,t}\,\vec{k}$$

$$\vec{n}_{r} = \sin\theta_{r}\,\vec{j} + \cos\theta_{r}\,\vec{k}$$

Reflexia și refracția undelor

Legile fenomenelor de reflexie și refracție trebuie să fie aceleeași indiferent de poziția observatorului și indiferent de momentul observării. Cele două variabile, $\vec{r}$ și t sunt independente, ceea ce, din punct de vedere matematic înseamnă că

$$\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t}$$

adică pulsațiile (sau, echivalent, frecvențele) undelor reflectată și transmisă trebuie să fie egale cu pulsația (frecvența) undei incidente. Prin urmare, pentru medii omogene frecvenţa undelor este invariantă în raport cu fenomenele de reflexie și de refracție.

Pentru ca legea de conservare a fluxului energetic să nu depindă nici de poziția observatorului, trebuie să fie îndeplinite relațiile:

$$\boxed{\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{k} = k\,\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$$

$$\frac{\omega}{\mathrm{v}_1}\vec{n}_i \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{\mathrm{v}_1}\vec{n}_r \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{\mathrm{v}_2}\vec{n}_t \cdot \vec{r}$$

Reflexia și refracția undelor

Prima lege a reflexiei, respectiv a refracției : direcțiile de propagare (determinate de direcția vectorului de undă) ale celor trei unde (incidentă, reflectată, refractată sau transmisă) se găsesc în același plan (yOz) numit plan de incidență.

Pe de altă parte, dacă alegem ca poziția observatorului să fie în planul de incidență, chair pe axa Oy, adică să avem $\vec{r} = y\vec{j}$, efectuând produsele scalare, vom ajunge la egalitățile :

Vom avea :

$$\vec{n}_i \cdot \vec{r} = r\sin\theta_i \quad ; \quad \vec{n}_r \cdot \vec{r} = r\sin\theta_r \quad ; \quad \vec{n}_t \cdot \vec{r} = r\sin\theta_t$$

$$\frac{\omega}{\mathrm{v}_1} r\sin\theta_i = \frac{\omega}{\mathrm{v}_1} r\sin\theta_r = \frac{\omega}{\mathrm{v}_2} r\sin\theta_t$$

Indicele de refracție al unui mediu se definește, în general, ca raportul dintre viteza undei într-un mediu de referință (în optică acest mediu se ia a fi vidul) și viteza undei în mediul respectiv :

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}}$$

Reflexia și refracția undelor

astfel încât, amplificând cu *c*, relațiile devin :

$$n_1 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_r = n_2 \sin\theta_t$$

Aceste relații conțin *legea a doua a reflexiei, respectiv a refracției.*
Din prima egalitate rezultă *legea a doua a reflexiei* :

$$\theta_i = \theta_r$$

care spune că reflexia undelor are loc în așa fel încât unghiul de incidență θ_i este egal cu unghiul de reflexie θ_r.

Prima și a treia egalitate ne conduc la *legea a doua a refracției sau a transmisiei* :

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

care precizează că refracția (transmisia) undelor se face în așa fel încât produsul dintre indicele de refracție și sinusul unghiului de refracției este constant pentru ambele medii. Această ultimă relație mai poartă denumirea și de legea lui Snellius.

UNDE SONORE

Dacă undele elastice care se propagă printr-un mediu solid, lichid sau gazos au frecvenţe cuprinse între limitele 16 Hz şi 20 kHz, ele produc o senzaţie auditivă şi se numesc ***unde sonore*** sau ***sunete***. Undele elastice cu frecvenţe sub 16 Hz se numesc *unde infrasonore* sau ***infrasunete***, iar undele elastice cu frecvenţa peste 20 kHz se numesc ***unde ultrasonore*** sau **ultrasunete.**

Acustica este ramura fizicii care se ocupă cu studiul producerii, propagării şi recepţionării undelor acustice, precum şi cu studiul efectelor produse în urma interacţiunilor acestora cu mediul prin care se propagă .

Fiecare sunet real este o suprapunere de oscilaţii armonice cu un set determinat de frecvenţe, set numit ***spectru acustic***.

În funcţie de senzaţia auditivă produsă, sunetele se deosebesc după **înălţime, timbru şi intensitate** (tărie).

Urechea poate percepe un sunet de o anumită frecvenţă numai dacă acesta are o intensitate cuprinsă între o valoare minimă, numită **prag de audibilitate** (P.A.) şi o intensitate maximă, numită **pragul senzaţiei dureroase** (P.S.D)

Nivel de intensitate sonoră

Urechea omenească are cea mai mare sensibilitate acustică în domeniul de frecvenţe între 1000 Hz şi 4000 Hz, domeniu în care *intensitatea sonoră (energetică)* are valoarea $I_{s0} = 10^{-12}$ W / m2 .

Frecvenţa ν_0 = 10^3 Hz a fost luată drept *frecvenţă standard*.

Intensitatea maximă corespunzătoare pragului auditiv superior este :

$$I_{s,\max} = 10^2 \text{ W / m}^2$$

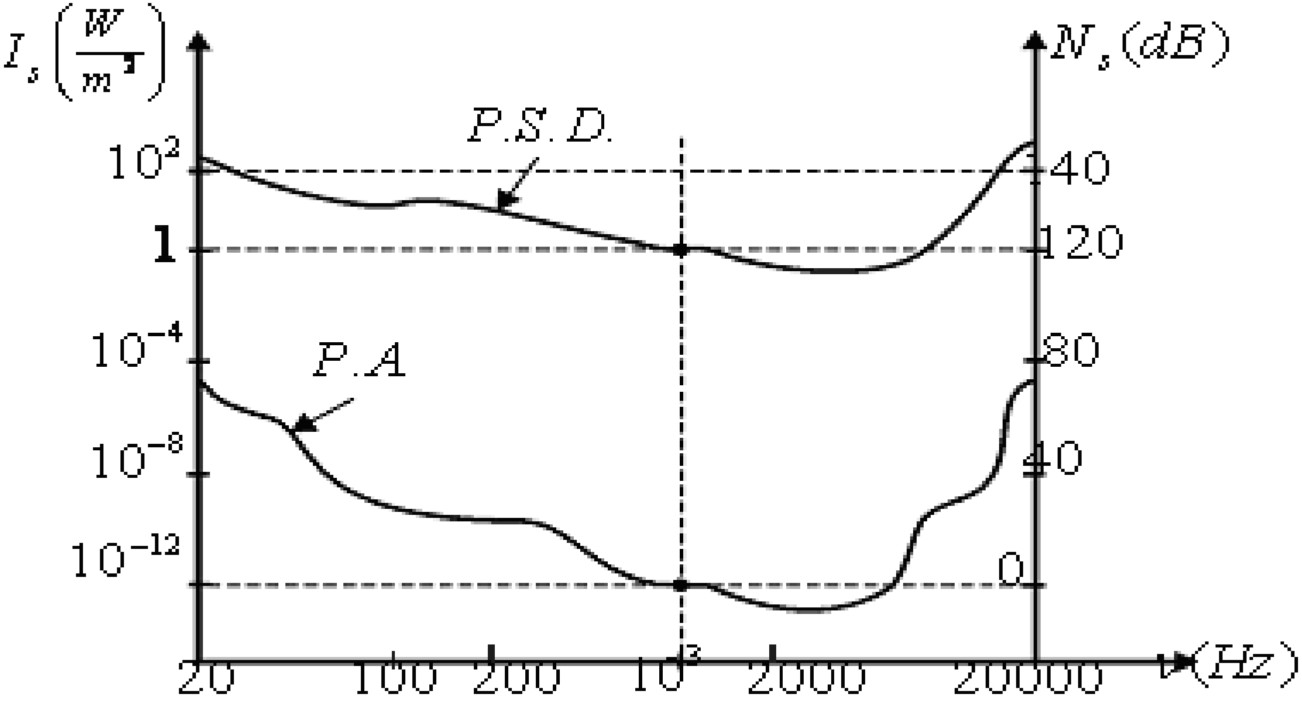
Nivel de intensitate sonoră:

$$N_s = 10 \lg \frac{I_s}{I_{s0}} \qquad [N_s]_{SI} = 1\,\mathrm{dB}$$

Unitatea de măsură în SI a nivelului de intensitate sonoră se numeşte *decibel* şi are simbolul dB.

Intervalul nivelului sonor al sunetelor percepute de urechea umană se întinde între valorile de la 0 la 140 dB.

Nivel de intensitate sonoră



Intensitatea auditivă

Legea Weber-Fechner: creşterea minimă percepută a senzaţiei auditive (*S*)produsă de un sunet este direct proporţională cu creşterea relativă a intensităţii sonore a sunetului respectiv:

$$\Delta S = k\frac{\Delta I_s}{I_s} \qquad dS = k\frac{dI_s}{I_s}$$

$$S_2 - S_1 = k\lg\frac{I_{s2}}{I_{s1}}$$

Intensitatea auditivă I_a este egală cu intensitatea sonoră a sunetului standard de referinţă care produce aceeaşi senzaţie auditivă ca şi sunetul dat: $I_{a;\nu_0} = I_{s;\nu_0}$

Sursa de unde sonore	**Nivelul sonor, dB**
Foşnetul produs de căderea unei frunze	10
Tic-tacul unui ceasornic, la distanţa de 1 m	20
Şoapte într-o cameră liniştită	30
Paşi sau vorbire înceată, la distanţa de 1 m	40
Vorbire obişnuită, la distanţa de 1 m	60
Vorbire tare, la distanţa de 5 m	70
Stradă cu trafic automobilistic intens	90
Orchestră mare sau zgomotul unei motociclete	100
Zgomotul produs de un ciocan de nituire	110
Zgomotul motorului de avion, la distanţa de 5 m	120
Zgomotul motorului de avion, la distanţa de 3m	130

Nivel auditiv

***Nivelul* auditiv:**

$$N_a = 10\lg \frac{I_{a;\nu}}{I_{a;\nu_0}} \qquad \left[N_a\right]_{SI} = 1\,\text{fon}$$

Nivelul auditiv de 1 fon reprezintă nivelul auditiv al unui sunet de o frecvenţă oarecare a cărui intensitate auditivă este de 1,26 ori mai mare decât intensitatea auditivă a sunetului standard de referinţă, care produce aceeaşi senzaţie auditivă ca şi sunetul de studiat. Evident, că cele două unităţi sunt egale 1 dB = 1 fon, doar că măsoară mărimi fizice diferite.

Reverberaţia este fenomenul de persistenţă a unui sunet într-un spaţiu închis, după ce sursa încetează să mai emită, datorită reflexiilor multiple pe pereţii încăperii, înainte de absorbţia sa totală.

Timpul de reverberaţie: determinat de volumul şi suprafaţa încăperii şi de coeficientul de absorbţie mediu al acesteia.

Efectul Doppler-Fizeau clasic

•Fenomenul de modificare a frecventei undei receptionate faţă de unda emisă, atunci când sursa şi receptorul se află în mişcare relativă unul faţă de celălalt.

a) Receptor şi sursă mobile pe direcţia comună:

-Apropiere relativă: $$\omega_R = \omega_S \frac{u + v_R}{u - v_S}$$

-Departare relativă: $$\omega_R = \omega_S \frac{u - v_R}{u + v_S}$$

b) Receptor fix şi sursă mobilă pe direcţia comună: $$\omega_R = \omega_S \frac{u}{u \mp v_S}$$

c) Receptor mobil şi sursă fixă pe direcţia comună: $$\omega_R = \omega_S \frac{u \pm v_R}{u}$$