LAB-TS-5. ANALIZA ȘI PROIECTAREA SISTEMELOR DE REGLARE AUTOMATĂ PE BAZA CARACTERISTICILOR DE PULSAȚIE (FRECVENȚĂ)

A. OBIECTIVELE LUCRĂRII. 1. Înțelegerea unor instrumente din domeniul pulsației (frecvenței) disponibile în Matlab pentru analiza și proiectarea sistemelor de reglare automată.
2. Utilizarea unor instrumente Matlab din domeniul pulsației (frecvenței) în proiectarea sistemelor de reglare automată.

B. METODE DE "RĂSPUNS LA PULSAȚIE" (FRECVENȚĂ).

În mod simplu, "răspunsul la pulsație" al unui sistem este răspunsul de ieșire staționar constant generat de un semnal de intrare sinusoidal. Ipoteza necesară atunci când se lucrează cu caracteristici de pulsație este liniaritatea și stabilitatea sistemelor în discuție. Prin urmare, toate sistemele tratate sunt considerate a fi lineare invariante în timp (LIT). Pentru un sistem LIT cu intrare sinusoidală, ieșirea va fi întotdeauna o undă sinusoidală care diferă de semnalul de intrare doar ca amplitudine și fază.
Motivul principal al utilizării instrumentelor din domeniul pulsației pentru analiza și proiectarea sistemelor de reglare automată este că funcțiile de "răspuns la pulsație" pot fi obținute experimental, iar proiectarea poate fi realizată în întregime în domeniul pulsației (frecvenței).
Pornind de la reprezentarea funcției de transfer a unui sistem în timp continuu $H(s)$, caracteristicile de răspuns staționar constant ale sinusului de ieșire sunt complet cuprinse în numărul complex $H(j\omega)$, unde ω este pulsația (frecvența) și j este numărul complex. Acest număr complex are o amplitudine și o fază, ambele putând fi reprezentate în funcție de pulsația (frecvența) variabilă ω. Variația corespunzătoare a lui ω poate fi înțeleasă ca o pulsație (frecvență) de baleiaj a undei sinusoidale de intrare de la pulsații (frecvențe) mici la pulsații (frecvențe) înalte. Cazul funcțiilor de transfer în timp continuu este tratat în această lucrare, fiind disponibile și descrieri echivalente pentru funcțiile de transfer în timp discret.
Mai întâi studiem sistemul de ordinul doi cu funcție de transfer $H(s)=\omega_n^2/(s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2)$, unde ω_n este pulsația (frecvența) naturală și ς este coeficientul de amortizare (sau factorul). Motivul pentru care se studiază această funcție de transfer în domeniul pulsației (frecvenței) este că performanțele multor sisteme de control în buclă închisă sunt prescrise în termeni de răspuns în domeniul timp al acestei funcții de transfer. Următoarele linii de cod produc așa-numita diagramă Bode în domeniul pulsației (frecvenței).

```
s=tf('s');
wn=1;csi=0.3;
h=wn^2/(s^2+2*csi*wn*s+wn^2);
bode(h),grid
```

Diagrama Bode constă din amplitudinea "răspunsului la pulsație" în funcție de pulsația (frecvența) exprimată în decibeli [dB] și faza "răspunsului la pulsație" în funcție de pulsația (frecvența) ω. În mod normal, amplitudinea și faza rezultă din expresia polară a numărului complex $H(j\omega)=|H(j\omega)|\,e^{j\arg(H(j\omega))}$. Amplitudinea exprimată în decibeli se obține ca $20\log_{10}(|H(j\omega)|)$. Un exemplu de diagramă Bode este ilustrat în Fig. 1; diagramele sunt obținute prin rularea codului Matlab de mai sus.

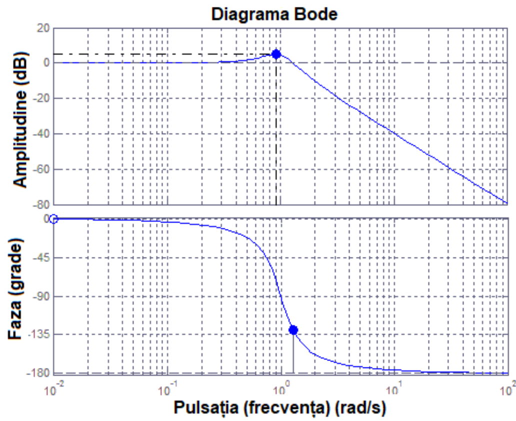

Fig. 1.

Pentru sistemul de ordinul doi sunt utile mai multe metrici definite pe diagrama de amplitudine. Prima este amplitudinea maximă $M_{p\omega}$ găsită la pulsația (frecvența) de rezonanță ω_r pe axa x. Pulsația (frecvența) de tăiere ω_c este pulsația (frecvența) la care diagrama de amplitudine taie linia orizontală de 0 dB. Lărgimea de bandă este pulsația (frecvența) ω_b după care amplitudinea scade sub pragul de –3dB.
Aspectul interesant este că există unele relații între caracteristicile de răspuns în timp ale sistemului de ordinul 2 și metricile din domeniul pulsației (frecvenței). Timpul de reglare depinde de coeficientul (factorul) de amortizare și de pulsația (frecvența) naturală, iar suprereglajul depinde de amplitudinea maximă și de coeficientul (factorul) de amortizare. Următoarele linii de cod generează graficul ilustrat în Fig. 2 cu relațiile dintre amplitudinea maximă și coeficientul (factorul) de amortizare și pulsația (frecvența) de rezonanță față de coeficientul (factorul) de amortizare:

```
w=logspace(-2,2,200);
mp=[],wr=[]; % initializare vectori
csi=0.15:0.005:0.8;
for i=1:length(csi)
    h=wn^2/(s^2+2*csi(i)*wn*s+wn^2);
    [mag,phase,w]=bode(h,w);
    [mp(i),l]=max(mag);wr(i)=w(l);
end
subplot(121),plot(csi,mp),xlabel('\zeta'),ylabel('M_p_\omega')
subplot(122),plot(csi,wr),xlabel('\zeta'),ylabel('\omega_r/\omega_n')
```

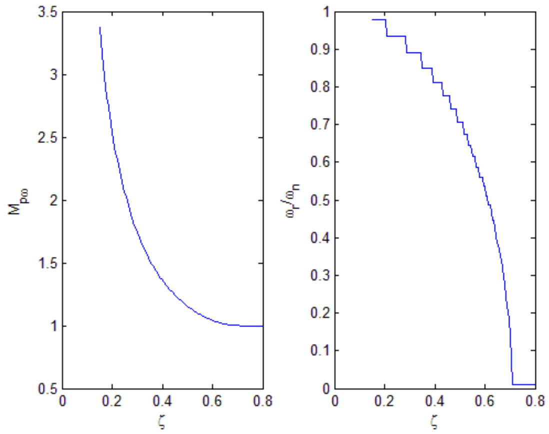

Fig. 2.

Diagramele prezentate în Fig. 2 sunt utile deoarece următoarele două relații țin cont de indicii de calitate (performanță), cum ar fi timpul de reglare T_s și suprareglajul procentual S.P:

$$T_s = \frac{4}{\varsigma\omega_n}, S.P. = 100\exp\left(\frac{-\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right). \tag{1.1}$$

Aceste relații sunt doar aproximări grosiere pentru sistemele de ordin superior, dar pot duce totuși la o proiectare de succes.

Exemplul 1: Pentru un exemplu de proiectare al unui sistem de reglare automată, se consideră mecanismul unei mașini de gravat cu actuator și senzor inclus în următoarea funcție de transfer $H(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$. Se ia în considerare un sistem de reglare automată în buclă închisă cu feedback unitar și de asemenea se consideră un regulator proporțional cu funcția de transfer $C(s) = K$. Indicatorii de calitate (performanță) sunt: timp de reglare acceptabil sub 16 secunde și suprareglajul procentual sub 20%.

Următoarele linii de cod ilustrează pentru $K = 2$ amplitudinea maximă și pulsația (frecvența) de rezonanță:

```
>> K=2;
h=1/s/(s+1)/(s+2);
cl=feedback(K*h,1,-1);
[mag,phase,w]=bode(cl,w);
[mp,l]=max(mag);wr=w(l);mp,wr

mp =
    1.8368

wr =
    0.8120
```

Pentru amplitudinea maximă de 1.836 din Fig. 2, rezultă un coeficient de amortizare de 0.285 pentru care, având în vedere pulsația (frecvența) de rezonanță de 0.8120 rad/sec, pulsația (frecvența) naturală din Fig. 2 este ω_n =0.8120/0.9329=0.8704. Conform formulelor (1.1) timpul de reglare este deci T_s =16,12 sec și suprareglajul este de aproximativ 39,3%. Răspunsul sistemului aplicând un semnal treaptă este ilustrat în Fig. 3 și se obține folosind în Matlab comanda “**step**”.

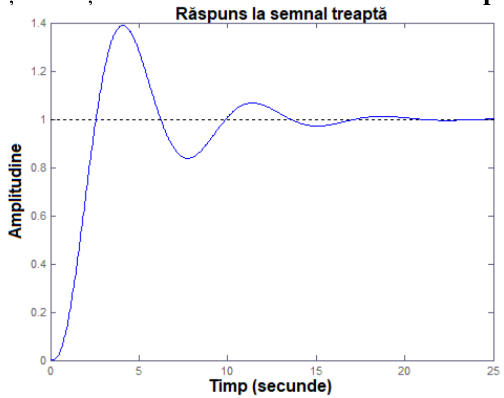

Fig. 3.

Suprareglajul și timpul de reglare sunt foarte apropiate de valorile dorite folosind această abordare. Cu toate acestea, valoarea actual a parametrului K nu îndeplinește specificațiile de proiectare. Putem ajusta acest parametru pentru a ajunge la $K = 1$ pentru care sunt îndeplinite specificațiile de proiectare, așa cum este ilustrat în Fig. 4.

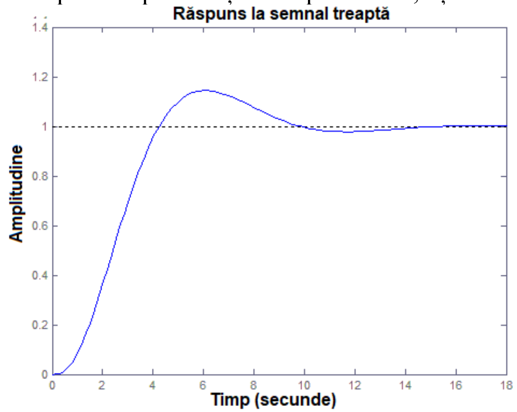

Fig. 4.

C. ANALIZA DE STABILITATE ÎN DOMENIUL PULSAȚIEI (FRECVENȚEI). CRITERIUL DE STABILITATE NYQUIST.

Pentru un sistem de reglare automată în buclă închisă, stabilitatea poate fi dedusă din diagrama de pulsație (frecvență) Nyquist în buclă deschisă. Considerând două cazuri de sisteme de reglare automată cu feedback unitar, primul caz în care regulatorul cu funcția de transfer $C(s)$ este în conexiune serie pe canalul direct (feedforward) cu procesul care are funcția de transfer $H(s)$ și al doilea caz în care $C(s)$ este pe canalul cu reacție (feedback). Funcțiile de transfer corespunzătoare sistemului în buclă închisă pentru cele două cazuri sunt:

$$T(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)} \text{ si } T(s) = \frac{H(s)}{1+C(s)H(s)}, \text{respectiv}. \qquad (1.2)$$

Polinomul de la numitor este identic în ambele cazuri, și anume $1+C(s)H(s)$. Prin urmare, având în vedere cunoștințele despre $C(s)H(s)$, stabilitatea lui poate fi dedusă. Fie ca funcția de transfer în buclă deschisă să fie notată ca $L(s) = C(s)H(s)$. Reprezentarea grafică a lui *L(s)* în planul "s" este numită *diagramă de contur sau loc* (diagramă Nyquist) și este notată cu Γ_L. *Criteriul de stabilitate Nyquist* poate fi formulat după cum urmează:

Sistemul de reglare în buclă închisă este stabil dacă și numai dacă numărul de rotații în sens trigonometric ale diagramei Γ_L *în jurul punctului (–1,0) este egal cu numărul de poli ai lui* $L(s)$ *cu partea reală pozitivă.*

Diagrama Nyquist aferentă unui sistem poate fi obținută folosind în Matlab comanda **nyquist**. În timp ce diagrama Bode oferă diagrame separate de amplitudine și fază în funcție de pulsație (frecvență) (ambele pot descrie numărul complex ca o funcție de pulsație (frecvență) în formă polară), diagrama Nyquist folosește planul cartezian pentru a reprezenta numerele complexe în direcția crescătoare a pulsației (frecvență) ω. Criteriul Nyquist este un criteriu absolut care oferă un răspuns "da" sau "nu" despre stabilitatea în buclă închisă cu privire la funcția de transfer a buclei. Se pot folosi unele metrici de stabilitate relativă care subliniază legătura dintre diagrama Bode și diagrama Nyquist. O funcție Matlab numită **margin** găsește automat *marginea de amplitudine (rezerva de modul)* și *marginea de fază (rezerva de fază)*.

- *Marginea de amplitudine (rezerva de modul)*: în cazul unui sistem stabil, marginea de amplitudine (rezerva de modul) se referă la valoarea necesară pentru ca amplitudinea sistemului să devină egală cu 1 atunci când faza este egală cu -180°, altfel spus măsoară cât de mult trebuie crescută valoarea până când locul geometric al punctelor *L*(*j*ω) trece prin punctul (–1,0), adică momentul în care sistemul în buclă închisă devine instabil.
- *Marginea de fază (rezerva de fază)*: în cazul unui sistem stabil se referă la valoarea necesară, din punct de vedere al fazei, pentru ca sistemul să ajungă la limita stabilității, altfel spus măsoară decalajul suplimentar de fază înainte ca sistemul în buclă închisă să devină instabil. În cazul diagramei Bode, marginea de fază (rezerva de fază) este distanța răspunsului de fază de la faza de -180° la pulsația (frecvența) de tăiere.

Următoarele linii de cod prezintă diagrama Bode și diagrama Nyquist ale aceluiași sistem și sunt ilustrate în Fig. 5:

```
num=0.5;
den=[1 2 1 0.5];
sys1=tf(num,den);
[mag,phase,w]=bode(sys1);
subplot(121),margin(sys1);
subplot(122),nyquist(sys1,w);
```

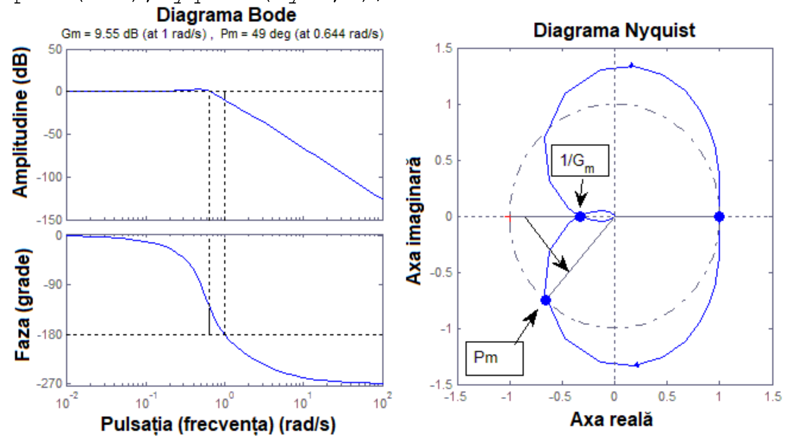

Fig. 5.

În Fig. 5, marginea de amplitudine (rezerva de modul) și marginea de fază (rezerva de fază) din diagrama Bode sunt corelate cu diagrama Nyquist. Pe diagrama Nyquist, marginea de amplitudine (rezerva de modul) este inversul distanței de la origine până la punctul de pe axa orizontală unde graficul Nyquist taie mai întâi axa orizontală în direcția de creștere a pulsației (frecvenței). Prima pulsație (frecvență) pentru care graficul traversează cercul cu raza 1 centrată în origine este pulsația (frecvența) corespunzătoare marginii de fază (rezerva de fază). Marginea de fază (rezerva de fază) se măsoară în grade așa cum indică săgeata, începând cu axa orizontală și în sens trigonometric.

Pe diagrama Nyquist prezentată în Fig. 5, aplicarea criteriului Nyquist oferă un număr de zero rotații în sens trigonometric în jurul punctului critic (-1,0). Având în vedere faptul că funcția de transfer a buclei $L(s) = 0.5/(s^3 + 2s^2 + s + 0.5)$ are toți polii cu parte reală negativă, concluzionăm că sistemul obținut prin închiderea buclei de reacție va fi stabil.

Într-un alt exemplu, considerăm mecanismul unei mașini de gravat studiat anterior în Exemplul 1. Funcția de transfer a mașinii este $H(s) = 1/[s(s+1)(s+2)]$. Pentru un regulator proporțional cu $C(s) = K = 1$ și $C(s) = K = 10$, liniile de culoare albastră și respectiv roșie prezentate în Fig. 6, ilustrează diagramele Nyquist pentru funcția de transfer a buclei $L(s) = C(s)H(s)$.

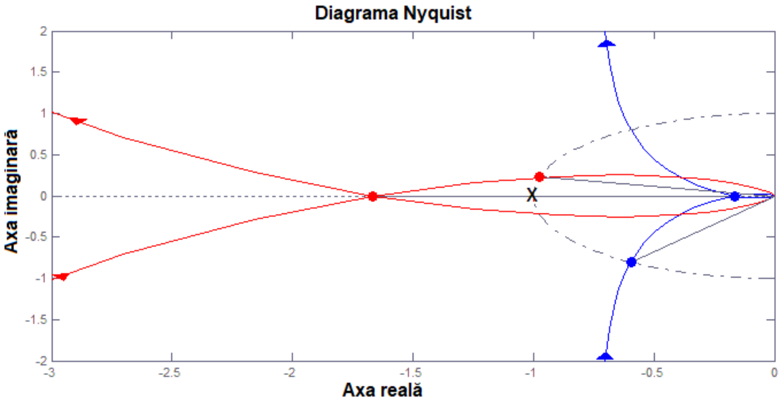

Fig. 6.

Folosind Fig. 6, punctul critic este marcat cu **x**. Marginile de stabilitate relativă (marginea de amplitudine (rezerva de modul) și marginea de fază (rezerva de fază)) sunt vizibile cu puncte colorate. În cazul în care $K=1$ (linia albastră), linia nu înconjoară punctul critic, astfel încât sistemul în buclă închisă va fi stabil. Același lucru este valabil și pentru linia roșie corespunzătoare lui $K=10$. Deoarece încercuirea punctului critic nu se face în sens trigonometric, ci în sensul acelor de ceasornic, numărul de încercuiri este egal cu zero și este de asemenea egal cu numărul de poli ai $L(s)=C(s)H(s)$ din semiplanul drept. Prin urmare, sistemul în buclă închisă va fi de asemenea stabil.

În multe sisteme fizice, timpul mort (sau întârzierea) este prezent și de obicei apare în funcțiile de transfer în timp continuu ca $\exp(-T\,s)$. Pentru a utiliza instrumentele din domeniul pulsației (frecvenței) trebuie să aproximăm exponențialul cu o funcție de transfer care va avea polinoame la numărător și numitor. O așa-numită funcție **pade** este un astfel de aproximator. În Matlab, **pade(T,n)**, oferă o aproximare a funcției de transfer Pade pentru întârzierea de T secunde și de ordinul n. Următoarele linii cod ilustrează aproximarea:

```
>> [num,den]=pade(1,2);tf(num,den)

ans =

  s^2 - 6 s + 12
  --------------
  s^2 + 6 s + 12

Continuous-time transfer function.
```

References

[1] R.H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design Using Matlab*, Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 1993.