

## LAB-TS-1. MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR FIZICE. EXEMPLE DE MODELE AFERENTE UNOR PROCESE CONDUSE

**A. OBIECTIVELE LUCRĂRII.** 1. Aplicarea principiilor de modelare matematică a proceselor.

2. Determinarea modelelor matematice (MM) aferente unor aplicații de laborator: modelare teoretică; MM liniare simplificate; MM simplificate obținute prin identificare experimentală (identificare data-driven).

### B. CONSIDERAȚII TEORETICE

**1. Conducerea proceselor** (proceselor conduse, PC) solicită cunoașterea MM aferente PC. Aceste MM pot fi:

- MM teoretice detaliate obținute analitic (MM primare, “first principles models”) deduse din ecuațiile fizice care guvernează funcționarea PC, Aceste MM sunt adeseori greu de obținut iar determinarea valorilor parametrilor (identificarea parametrilor) este de regulă laborioasă;
- MM simplificate, adeseori liniare (liniarizate), obținute pe baza unor ipoteze simplificatoare și transformări matematice adecvate ale MM primare (teoretice);
- MM simplificate obținute prin procedee de identificare experimentală.

În literatură [1], [2] este prezentată detaliat teoria generală de obținere a MM aferente diverselor PC.

### 2. Categorisirea MM tipice (tipizate) utilizate în conducerea proceselor:

(a) După structurarea MM (reprezentarea în domeniul timp):

MM intrare-ieșire (MM-II)      MM de tip intrare-stare-ieșire (MM-ISI)  
sau MM de stare

$$y(t)=f\{u(t)\} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x(t), u(t)), \\ y(t) &= f_2(x(t)); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$f(\cdot)$  – o funcție care caracterizează atât structura cât și funcționarea sistemului.

(b) După modul de explicitare a MM (domeniul variabilei independente)

- MM în domeniul timp ( $t$ -timp continuu (TC);  $t_k=kT_e$ - timp discret (TD));
- MM în domeniul operațional (Laplace, Z, de exemplu,  $H(s)|(t=TC)$ ,  $H(z)|(t=TD)$ );
- MM în domeniul pulsație (de exemplu,  $H(j\omega)$ ).

Vă rugăm să consultați fișierele atașate „Transformările\_Laplace\_Z.pdf”, „LaplaceTransform.pdf” și „Z-Transform.pdf” pentru o scurtă introducere a acestor transformări.

(c) După modul de explicitare a proprietăților MM

- MM parametrice (în diferite domenii);
- MM neparametrice:
  - caracteristici de răspuns în domeniul timp;
  - caracteristici de răspuns în domeniul pulsație.

### 3. Modele matematice liniare (liniarizate) monovariabile (Single Input-Single Output, SISO). Modele matematice intrare-ieșire (MM-II)

#### A. Reprezentări în domeniul timp

- Modele matematice intrare-ieșire (MM-II) în timp continuu (TC):

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t), \quad (1.3)$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n; \quad (1.4)$$

- Modele matematice intrare-ieșire (MM-II) în timp discret (TD):

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \quad (1.5)$$

de regulă cu  $a_n=1$  și  $m \leq n$  (în anticipări),

$$a_n y(k) + \dots + a_1 y(k-n+1) + a_0 y(k-n) = b_m u(k-n+m) + \dots + b_0 u(k-n) \quad (1.6)$$

de regulă cu  $a_n=1$  și  $m \leq n$  (în întârzieri sau forma de tip filtru).

Forma recurentă a MM în timp discret (în întârzieri) (pentru  $a_n=1$  și  $m=n$ ):

$$y(k) = -a_{n-1}y(k-1) - \dots - a_1 y(k-n+1) - a_0 y(k-n) + b_n u(k) + \dots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n) \quad (1.7)$$

#### B. Reprezentări în operațional (TC și TD):

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}; \quad H(z) = \frac{b_m + \dots + b_1 z^{-m+1} + b_0 z^{-m}}{a_n + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} z^{-d}, \quad (1.8)$$

cu:  $n-m=d$ ,  $T_m=d T_e$ ,  $T_m$  – timpul mort al procesului,  $T_e$  – perioada de eșantionare.

#### Modele matematice intrare-stare-ieșire (MM-ISI) sau modele de stare

- Modele matematice intrare-stare-ieșire (MM-ISI) în timp continuu (TC) în condiții inițiale nule:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underline{A} x(t) + \underline{b} u(t) & \longleftrightarrow & s \underline{x}(s) = \underline{A} \underline{x}(s) + \underline{b} u(s) \\ y(t) &= \underline{c}^T x(t) & & y(s) = \underline{c}^T \underline{x}(s) \end{aligned} \quad (1.9)$$

cu reprezentările echivalente (legăturile reciproce) (1.4) și (1.9) (pentru  $m < n$ ) [3]:

$$H(s) = \underline{c}^T (sI - \underline{A})^{-1} \underline{b}, \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n},$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, \underline{c}^T = [b_0 \ b_1 \ \dots b_m \ 0 \ \dots 0] \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$$

(1.10)

- Modele matematice intrare-stare-ieșire (MM-ISI) în timp discret (TD) în condiții inițiale nule:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_d \underline{x}_k + \underline{b}_d u_k \quad \longleftrightarrow \quad z \underline{x}(z) = \underline{A}_d \underline{x}(z) + \underline{b}_d u(z) \quad (1.11)$$

$$y_k = \underline{c}^T \underline{x}_k \quad y(z) = \underline{c}^T \underline{x}(z)$$

cu reprezentările echivalente (legăturile reciproce) (1.8) și (1.11) similare cazului TC.

- MM discret aferent procesului condus extins. PC este extins cu un eșantionator (ES) pe ieșire și cu un ES și un element de reținere (ER, extrapolator de ordinul zero) pe intrare (fig. 1.1). Pentru a fi condus în timp discret, PC continuu va avea:
  - mărimea de intrare de comandă în timp discret, aplicată ER;
  - mărimea de ieșire măsurată în timp discret, la intervale de timp discrete.

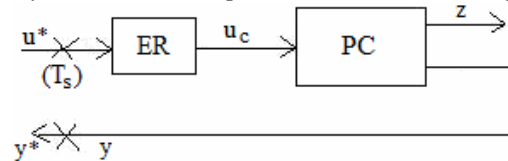


Fig. 1.1.

$$H_{EP}(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z-1}{z} Z \{ L^{-1} \{ \frac{1}{s} H_p(s) \} | t_k \}, \quad (1.12)$$

sau

$$\underline{A}_d = e^{\underline{A}T_s} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\underline{A}T_s)^i, \underline{b}_d = \underline{A}^{-1} (\underline{A}_d - I) \underline{b}, \underline{c}_d = \underline{c}. \quad (1.13)$$

### C. Principalele tipuri de elemente de transfer (ET)

În tabelul 1 sunt prezentate principalele tipuri de elemente de transfer (ET) folosite (proporțional (P), integrator (I), derivativ (D), filtru trece jos / proporțional cu temporizare de ordinul 1 (PT1), proporțional-integrator (PI)) împreună cu funcțiile de transfer (f.d.t.) aferente acestora.

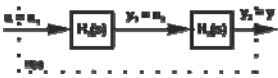
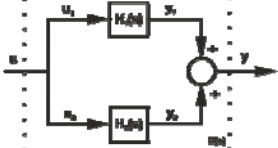
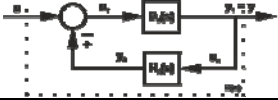
Tabelul 1.

Tipul ET	Simbolizare	Funcția de transfer în timp continuu
P		$H(s) = k$
I		$H(s) = \frac{k_i}{s}$
D		$H(s) = sk_D$
PT1		$H(s) = \frac{k}{sT + 1}$
PI		$H(s) = \frac{k}{sT} (sT + 1)$

### D. Principalele conexiuni de sisteme

În tabelul 2 sunt ilustrate principalele conexiuni de sisteme sub formă de scheme bloc: conexiunea serie, conexiunea paralel și conexiunea cu reacție.

Tabelul 2.

Tipul conexiunii	Reprezentarea conexiunii	Funcția de transfer în timp continuu
serie		$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = H_1(s)H_2(s)$
paralel		$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = H_1(s) + H_2(s)$
cu reacție		$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$

### C. MM ALE UNOR APLICAȚII DE LABORATOR. LINIARIZAREA MM PRIMARE. MM ȘI REPREZENTĂRI GRAFICE PRIN SCHEME BLOC

**(1) Sistemul cu un rezervor.** Obiectiv: reglarea nivelului lichidului  $h$  din rezervor, adică menținerea constantă a nivelului, prin modificarea debitului de aducție  $q_a$ . Modificarea debitului de aducție este asigurată prin modificarea turației  $\omega$  a pompei de alimentare (fig. 1.2). Modificarea turației  $\omega$  este asigurată prin modificarea tensiunii de alimentare  $u_a$  a motorului de curent continuu (m.c.c.).

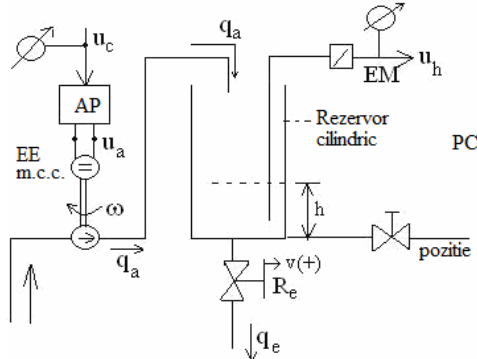


Fig. 1.2.

Mărimile caracteristice ale PC:

- Mărimi de intrare: -  $u_c$ , comanda aplicată pompei, adaptată prin adaptorul de nivel de putere (AP) la  $u_a$  (pompa este elementul de execuție); -  $q_e$  ( $v$ ) – debitul de scurgere printr-un orificiu de ieșire;
- Mărimile de ieșire reglate:  $h$ [m] – nivelul lichidului;  $u_h$  – mărimea de ieșire măsurată [V].
- Ecuațiile primare care caracterizează procesul:

Pentru elementul de execuție (EE în fig. 1.2, reprezentat de pompă):

$$u_a(t) \approx k_A u_c(t); \quad \omega(t) \approx k_m u_a; \quad q_a(t) \approx k_p \omega(t)$$

Pentru elementul de măsură (senzorul, EM în fig. 1.2):

$$u_h(t) = k_M h(t); \quad (1.14)$$

Ecuația de dinamică a PC:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(q_a(t) - q_e(t));$$

Conform principiului lui Bernoulli, debitul de scurgere printr-un orificiu relativ mic cu aria secțiunii  $S$ ,  $S \ll A$  este calculat cu formula  $q_e(t) = S\sqrt{2gh(t)}$ .

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}k_E u_c(t) - \frac{S}{A}\sqrt{2gh(t)}, \quad k_E = k_A k_m k_p \quad (1.15)$$

$$A\dot{h}(t) + S\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} = k_E u_c(t).$$

**Remarcă:** MM primar este neliniar.

- Liniarizarea MM primar: termenul neliniar se referă la scurgerea din rezervor care rezultă din aplicarea principiului lui Bernoulli.
- *Important:* dacă  $q_e=0$ , MM primar este liniar și evidențiază caracterul integrator al PC (pentru intrare nenulă constantă, nivelul lichidului crește).

Liniarizarea în jurul unui punct de funcționare staționară constantă  $P(h(t)=\text{const}=h_0, u_c(t)=\text{const})$  permite o aproximare a termenului neliniar folosind dezvoltarea în serie Taylor până la termenul de ordinul întâi

$$\frac{S}{A}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \approx \frac{S}{A}\sqrt{2g}\sqrt{h_0} + \frac{S}{A}\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h(t). \quad (1.16)$$

Înlocuind în (1.15) se obține:

$$\dot{\Delta h}(t) = \frac{1}{A}k_E \Delta u_c(t) - \frac{S}{A}\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h(t)$$

sau

$$\Delta h(t) + \frac{S}{A}\frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h_0}}\Delta h(t) = \frac{1}{A}k_E \Delta u_c(t). \quad (1.17)$$

Comportare de tip PT1      Efectul comenzii

Unitățile de măsură pentru mărimi și parametri:

$$\begin{array}{lll} \langle h \rangle: \langle m \rangle; & \langle u_c \rangle: \langle V \rangle; & \langle g \rangle: \langle m/sec^2 \rangle; \\ \langle A \rangle: \langle m^2 \rangle; & \langle k_E \rangle: \langle m^3/sec/V \rangle; & \langle k_R \rangle: \langle m \rangle \end{array}$$

$$T = \frac{A}{S} \frac{2\sqrt{h_0}}{\sqrt{2g}} \text{ cu } \langle T \rangle : \langle \text{sec} \rangle \rightarrow \text{constanta de timp a procesului.}$$

**Remarca 1:** Valoarea constantei de tip T depinde de punctul de funcționare staționară ( $h_0, v_0$ ).

**Remarca 2:** Suprafața variabilă a secțiunii orificiului de scurgere poate fi modelată cu relația  $\mu(t) \cdot S, 0 \leq \mu \leq 1$ . Atunci coeficientul  $\mu(t)$  poate fi considerat ca o perturbație variabilă în timp.

- Schemele bloc informaționale ale sistemului cu un rezervor sunt prezentate în fig. 1.3 în cazul orificiului de scurgere cu secțiune variabilă:

- (a) schema bloc neliniară,
- (b) schema bloc liniarizată.

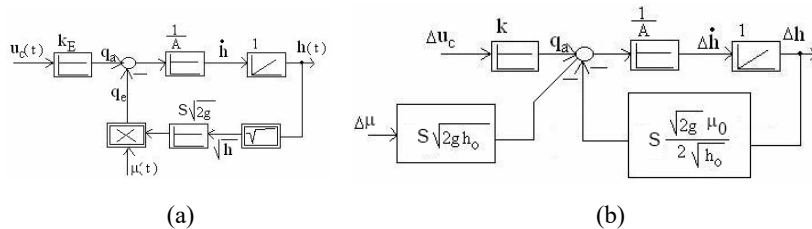


Fig. 1.3.

Reprezentarea schemei bloc este o reprezentare grafică convențională a sistemelor dinamice. Fiecare bloc are o funcție unică de transfer caracteristică ai cărei parametri sunt specificați deasupra blocului. Schemele bloc sunt numite și Elemente de transfer. Schemele bloc cu casete simple reprezintă sisteme liniare, în timp ce schemele bloc cu casete duble sunt neliniare. Pentru o caracterizare completă a schemelor bloc vă rugăm să consultați „Transfer Elements Table.pdf”.

**(2) Modelarea unui motor de curent continuu (m.c.c.).** În fig 1.4 este prezentată structura sistemului (aplicație de laborator). M.c.c. are excitația constantă relativă la câmpul magnetic creat de magnetul aferent statorului, care produce fluxul magnetic ( $\Phi_e = \text{const}$ ).

- Mărimi caracteristice ale PC:
  - mărimi de intrare: - mărimea de comandă  $u_c$ ;
  - mărimea de perturbație  $m_s$ ;
  - mărimi de ieșire: - viteza unghiulară a rotorului / tensiunea aferentă senzorului EM- $\omega$ :  $\omega$  și  $u_\omega$ ;
  - curentul absorbit de m.c.c.:  $i_a$ .

**Observație:** Ambele mărimi de ieșire sunt și mărimi de stare ale PC.

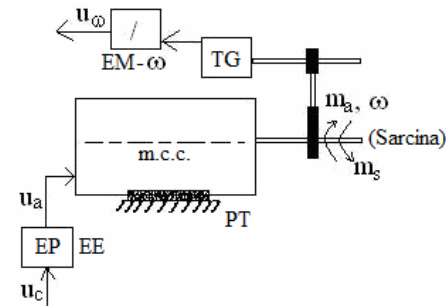


Fig. 1.4.

- Ecuațiile primare aferente PC

Elementul de execuție (EE) reprezentat de electronica de putere (EP):

$$u_a = k_E u_c$$

Procesul tehnic (PT, este m.c.c.):

$$\frac{L_a}{R_a} \frac{di_a}{dt} + i_a = \frac{1}{R_a} (u_a - e_\omega) \quad e_\omega = k_e \omega \quad T_a = \frac{L_a}{R_a}$$

$$m_a = k_m i_a, \quad m_f = k_f \omega \quad (k_f \approx 0) \quad (1.18)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_a - m_f - m_s$$

Aici  $m$  sunt cupluri (momente) și  $e_\omega$  este tensiunea electromotoare indusă.

Senzorul (elementul de măsură, EM):

$$u_\omega = k_{M\omega} \omega, \quad u_i = k_{Mi} i_a$$

**Remarcă:** MM primar este neliniar.

Pe baza ecuațiilor primare pot fi construite MM tipice (II, ISI). În fig. 1.5 este prezentată schema bloc informațională (DC – dispozitivul de conducere).

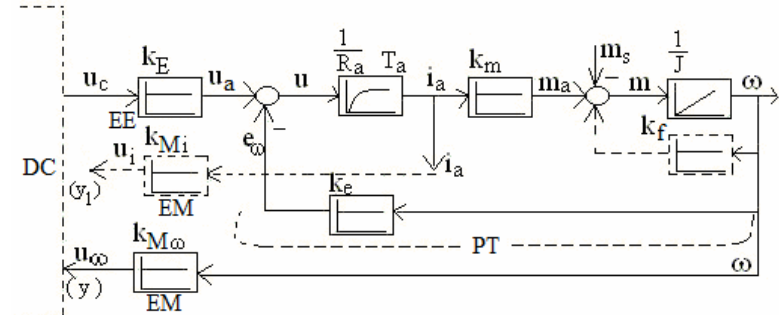


Fig. 1.5.

Modelele matematice tipice - MM-ISI și MM-II - sunt obținute prin aranjarea corespunzătoare a ecuațiilor primare.

- MM-ISI:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{T_a}x_1 - \frac{k_e}{L_a}x_2 + \frac{k_E}{L_a}u_c \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_m}{J}x_1 - \frac{k_f}{J}x_2 - \frac{1}{J}m_s \\ y_1 &= k_{Mi}i_a \quad x_1 = i_a \\ y_2 &= k_{M\omega}\omega \quad x_2 = \omega\end{aligned}\quad (1.19)$$

**Temă de casă:** Explicitarea matricelor: A, B, C și D.

- MM-II: Acceptând, pentru simplificarea explicitării, că  $k_f=0$ , sunt obținute relativ ușor următoarele MM-II aferente sistemului fizic (procesului tehnic, PT) ilustrat în fig. 1.6.

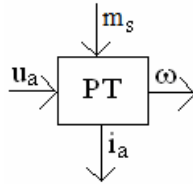


Fig. 1.6.

$$\begin{aligned}H_{\omega, u_a}(s) &= \frac{\omega(s)}{u_a(s)} = \frac{1/k_e}{1 + sT_m + s^2T_mT_a} \quad (a) \\ H_{\omega, m_s}(s) &= \frac{\omega(s)}{m_s(s)} = -\frac{R_a}{k_m k_e} \frac{1 + sT_a}{1 + sT_m + s^2T_mT_a} \quad (b) \\ H_{i_a, u_a}(s) &= \frac{i_a(s)}{u_a(s)} = \frac{sT_m / R_a}{1 + sT_m + s^2T_mT_a} \quad (c) \\ H_{i_a, m_s}(s) &= \frac{i_a(s)}{m_s(s)} = -\frac{1/k_m}{1 + sT_m + s^2T_mT_a} \quad (d) \\ T_a &= \frac{L_a}{R_a} \quad \text{si} \quad T_m = \frac{JR_a}{k_m k_e}\end{aligned}\quad (1.20)$$

**Temă de casă:** Calculați funcțiile de transfer de mai sus folosind MM (1.19) și relația (1.10).

În situațiile uzuale în care  $T_m \gg T_a$ , polinomul caracteristic  $\Delta_p(s)$  este exprimat în forma specifică unui numitor de element de transfer proporțional cu temporizare de ordinul 2 (ET-PT2):

$$\Delta_p(s) = 1 + sT_m + s^2T_mT_a \approx (1 + sT_a)(1 + sT_m) \quad (1.21)$$

- Identificarea experimentală a PC (identificarea data-driven). În multe situații determinarea pe cale teoretică și experimentală a parametrilor este greoaie. Din acest motiv este preferată determinarea experimentală a MM (1.20).
- Identificarea modelului (1.20) (a) prin metoda răspunsului la semnal treaptă (analiza regimului tranzitoriu).
- Pentru prelucrarea înregistrărilor experimentale pot fi utilizate diferite tehnici.
- (a) În cazul unui MM de aproximare de tip proporțional cu temporizare de ordinul 1 cu timp mort (PT1- $T_m$ ), fig. 1.7 (a):

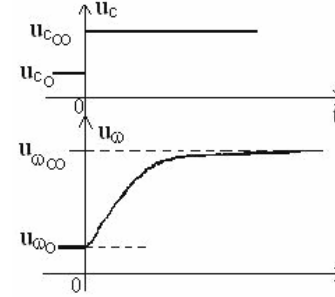


Fig. 1.7.

$$\tilde{H}_p(s) = \frac{\Delta u_\omega(s)}{u_c(s)} = \frac{k_p}{(1 + sT)} e^{-sT_m}, \quad k_p = \frac{u_{\omega\infty} - u_{\omega0}}{u_{c\infty} - u_{c0}},$$

$T$  si  $T_m$  grafic.

(b) În cazul unui MM de aproximare de tip PT2 (fără sau cu timp mort):

$$\tilde{H}_p(s) = \frac{\Delta u_\omega(s)}{u_c(s)} = \frac{k_p}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} e^{-sT_m} \quad (1.22)$$

$$k_p = \frac{u_{\omega\infty} - u_{\omega0}}{u_{c\infty} - u_{c0}}$$

$T_1, T_2, T_m$  sunt determinate prin diferite metode grafo-analitice (de exemplu, fig. 1.8).

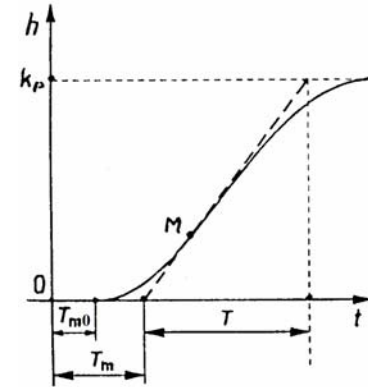


Fig. 1.8.

Pentru validare, MM rezultat prin identificare este comparat cu comportarea reală (datele măsurate) prin simularea răspunsului la semnal treaptă.

**(3) Sistem de încălzire electrică prin pardoseală a unei camere**, fig. 1.9 (a). Scop: asigurarea confortului termic în cameră,  $\theta_c = \text{const}$ , independent de fluctuațiile temperaturii exterioare  $\theta_e$ . Mărimile caracteristice ale PC:

- $u_c$ , mărime de comandă ( $u$ ), intrare în puntea cu tiristoare (PTTr);
- $p_e$ , mărime de execuție ( $m$ ), puterea electrică disipată;
- $\theta_c$ , mărime reglată ( $z$  – notație generală), temperatura în încălț (cameră);
- $\theta_e$ , perturbație ( $v$  – notație generală), temperatura exterioară.

Parametri:  $C_p$ ,  $C_c$  sunt capacitățile termice ale elementului de încălzire și respectiv ale camerei.

Ecuatiile primare aferente PC sunt:

Elementul de execuție (EE):  $p_e = k_E u_c(t)$ ;  $k_E$  – determinat experimental

$$C_p \dot{\theta}_p = p_e - k_p (\theta_p - \theta_c)$$

Procesul tehnic (TP):  $C_c \dot{\theta}_c = k_p (\theta_p - \theta_c) - k_c (\theta_c - \theta_e)$  (1.23)

$$z = \theta_c$$

Elementul de măsură (EM, ST indică senzorul de temperatură):

$$u_\theta = k_M \theta_c \quad (1.24)$$

Notații pentru constantele de timp:  $T_p = \frac{C_p}{k_p}$ ,  $T_c = \frac{C_c}{k_c}$ .

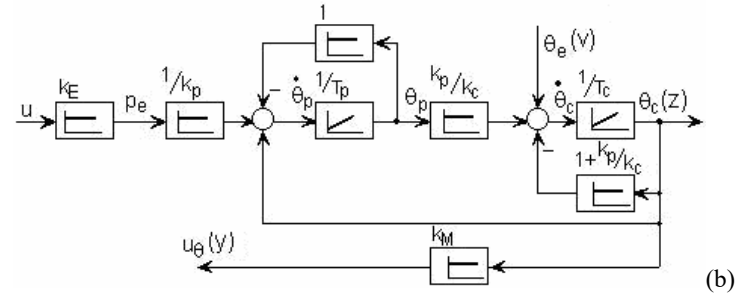
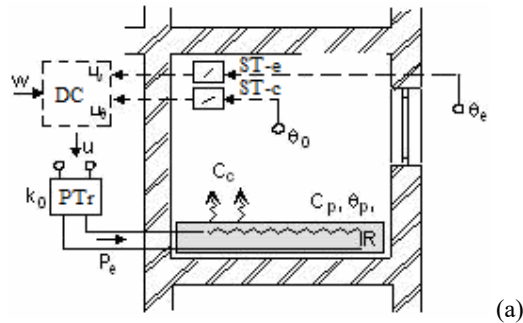


Fig. 1.9.

Pe baza MM de bază se explicitează:

- MM-ISI:  $x_1 = \theta_p$ ,  $x_2 = \theta_c$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_p} & \frac{1}{T_p} \\ \frac{k_p}{k_c T_c} & -\frac{1+k_p/k_c}{T_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_E}{k_p T_p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$z = \theta_c; \quad u_\theta = k_M \theta_c$$

în care parametrii constanți ai procesului sunt:  $k_E = 1000$ ,  $T_p = 60$  (s),  $k_p = 500$  (W/°),  $k_c = 125$ ,  $T_c = 300$  (s). Condițiile de simulare ale PC în circuit deschis sunt: timp de simulare 12000 (s),  $u_c = 2.5$  (V) și aplicarea perturbației  $\theta_e = -10$  (°C) după 5000 (s).

În fig. 1.10 sunt prezentate trei implementări diferite în Matlab&Simulink ale sistemului de încălzire electrică prin pardoseală a unei camere: fig. 1.10 (a) – implementarea procesului folosind schema bloc informațională, fig. 1.10 (b) – implementarea procesului folosind funcții de transfer, fig. 1.10 (c) – implementarea procesului folosind MM-ISI.

**Temă de casă:** Funcțiile de transfer aferente PC (sunt determinate pe baza schemei bloc din fig. 1.9 (b) folosind algebra schemelor bloc):

$$H_{\theta_c, u_c}(s) = \frac{\Delta \theta_c(s)}{u_c(s)} = \dots, \quad H_{\theta_c, \theta_e}(s) = \frac{\Delta \theta_c(s)}{\theta_e(s)} = \dots \quad (1.26)$$

- Caracteristicile statice pot fi construite în baza MM. Apoi aceste caracteristici pot fi utilizate în definirea diverselor probleme de reglare.

**Temă de casă:** Calculați f.d.t. din (1.26) folosind MM-ISI (1.25).

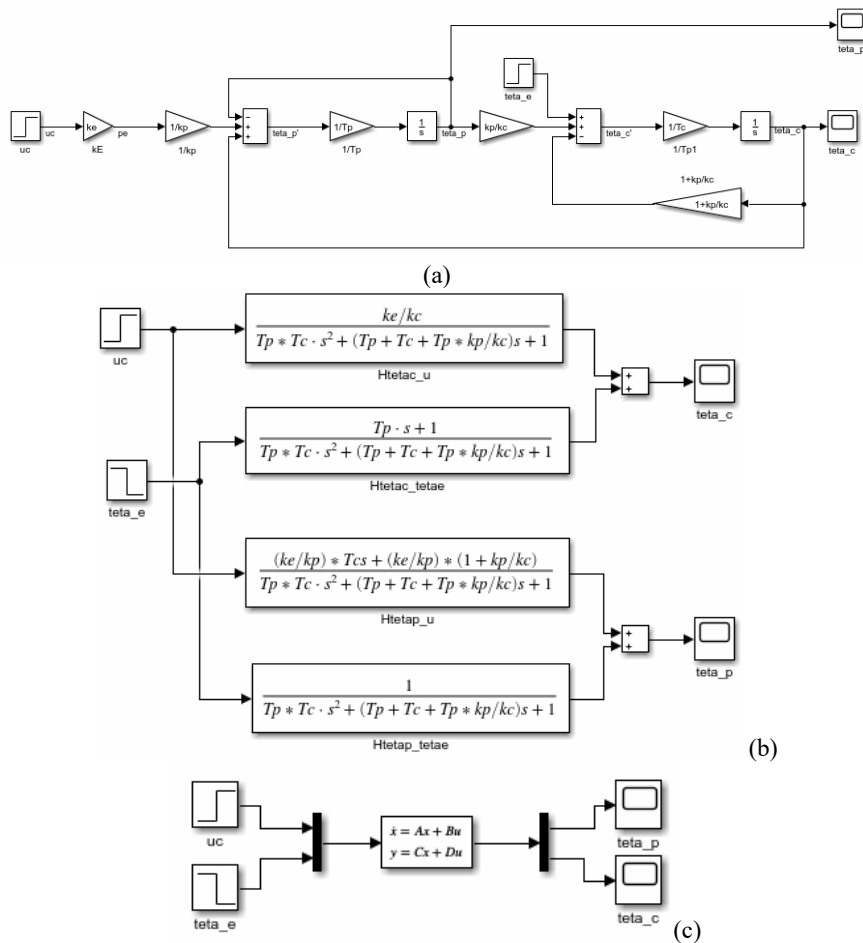


Fig. 1.10.

#### (4) Modelul dinamic al virusului HIV [8]

Dinamica virusului HIV poate fi modelată sub forma următorului model matematic neliniar intrare-stare-ieșire în timp continuu:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda - dx(t) - \beta x(t)v(t) \\ \dot{y}(t) &= \beta x(t)v(t) - ay(t) \\ \dot{v}(t) &= ky(t) - uv(t)\end{aligned}\quad (1.27)$$

Modelul descrie interacțiunea dintre virus și celulele țintă.  $x$  reprezintă numărul celulelor neinfectate (neafectate),  $y$  reprezintă numărul celulelor infectate și  $v$  este

numărul particulelor libere ale virusului. Celulele neinfectate sunt produse cu rata  $\lambda$  și mor cu rata  $dx$ . Virusul liber infectează celulele neinfectate pentru a produce celule infectate cu rata  $\beta xv$ . Termenul  $\beta xv$  reflectă interacțiunea dintre două populații celulare. Celulele infectate mor cu rata  $ay$ . Virusul nou este produs din celulele infectate la rata  $ky$  și virusul moare la rata  $uv$ .

Pentru a putea simula corect sistemul se consideră condiții inițiale nenule, fie pentru  $y(0)$ , fie pentru  $v(0)$ .

Acest model neliniar este folosit pentru a studia dinamica virusului sub tratament medicamentos și ajută la înțelegerea rezistenței virusului la medicamente.

#### (5) Un exemplu de model matematic intrare-stare-ieșire în timp discret: modelul prădător-pradă [6]

Problema prădător-pradă se referă la un sistem ecologic în care există două specii dintre care una se hrănește cu cealaltă. În fig. 1.11 este ilustrată o înregistrare istorică pe un orizont de timp de 90 de ani pentru o populație de râși în comparație cu o populație de iepuri de câmp. După cum poate fi observat din grafic, înregistrările anuale ale populațiilor fiecărei specii sunt de natură oscilantă.

Este construit un model matematic pe baza unui model în timp discret, urmărind rata nașterilor și deceselor fiecărei specii.  $H$  reprezintă populația de iepuri de câmp și  $L$  reprezintă populația de râși. Putem descrie starea în termeni de populații în perioade discrete de timp, așa cum se arată în fig. 1.11, care corespunde înregistrărilor populațiilor de iepuri de câmp și râși între 1845 și 1935 în Canada.

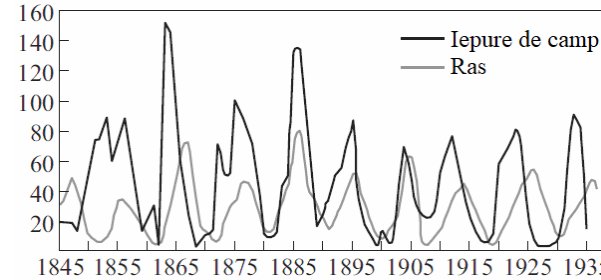


Fig. 1.11 [6].

Notând cu  $k$  indicele timp discret (de exemplu, numărul zilei sau lunii), sunt exprimate ecuațiile următoare:

$$\begin{aligned}H(k+1) &= H(k) + b_r(u)H(k) - aL(k)H(k) \\ L(k+1) &= L(k) + cL(k)H(k) - d_f L(k)\end{aligned}\quad (1.28)$$

în care  $b_r(u)$  este rata natalității iepurilor pe unitatea de perioadă de timp ca funcție de aprovizionarea cu alimente  $u$ ,  $d_f$  este rata mortalității râșilor și  $a$  și  $c$  sunt coeficienții de interacțiune. Termenul de interacțiune  $aL(k)H(k)$  modelează rata de pradă, care se presupune că este proporțională cu rata la care prădătorii și prada se întâlnesc și, prin urmare, este dată de produsul mărimilor populațiilor. Termenul de interacțiune  $cL(k)H(k)$  în dinamica râșilor are o formă similară și reprezintă rata de creștere a populației de râși (ca și în modelul HIV). Acest model este exprimat ținând seama de



multe ipoteze simplificatoare—cum ar fi faptul că iepurii de câmp scad în număr numai prin prădarea de către râși (nu prin boli sau moarte naturală) —dar este adesea suficient să răspundă la întrebările de bază despre sistem. De asemenea, rețineți că sistemul modelat este neliniar.

Pentru o populație inițială de iepuri de câmp și râși dată ca și condiții inițiale pentru sistemul dinamic (1.28) ( $x(0)=(H(0), L(0))$ ), pot fi efectuate simulări pentru a observa dinamica celor două populații de-a lungul timpului. Folosind parametrii  $a=c=0.014$ ,  $b_1(u)=0.6$  și  $d=0.7$  în ecuațiile (1.28) cu actualizări zilnice, perioada și amplitudinea ciclurilor populațiilor de râși și iepuri prezentate în fig. 1.12 se potrivesc aproximativ cu datele din fig. 1.11.

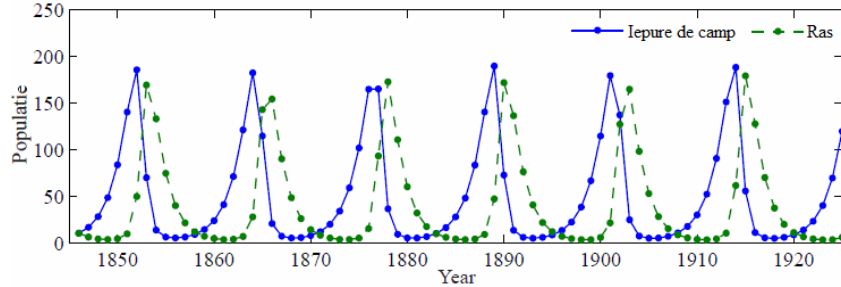


Fig. 1.12 [6].

#### (6) Un server de e-mail modelat ca un sistem în timp discret [6]

Serverul IBM Lotus este un sistem software colaborativ care administrează e-mailul, documentele și notele utilizatorilor. Mașinile client interacționează cu utilizatorii finali pentru a oferi acces la date și aplicații. Serverul se ocupă și de alte sarcini administrative. La începutul dezvoltării sistemului a fost observat faptul că performanțele erau slabe atunci când unitatea centrală de prelucrare (central processing unit, CPU) a fost supraîncărcată din cauza prea multor solicitări de servicii și, prin urmare, au fost introduse mecanisme de reglare a (control al) încărcării.

Interacțiunea dintre client și server este sub formă de apeluri de procedură la distanță (remote procedure calls, RPC). Serverul menține un jurnal al statisticilor cererilor finalizate. De asemenea, este măsurat numărul total de cereri deservite, numite RIS (RPC-uri în server). Încărcarea pe server este controlată de un parametru numit MaxUsers, care stabilește numărul total de conexiuni ale clienților la server. Acest parametru este controlat de administratorul de sistem. Serverul poate fi privit ca un sistem dinamic cu MaxUsers ca intrare și RIS ca ieșire. Relația dintre intrare și ieșire a fost investigată mai întâi prin explorarea performanțelor în regim staționar constant și s-a constatat că este liniară.

Pentru a descrie comportamentul dinamic al acestui sistem este utilizat un model dinamic sub forma unei ecuații diferențiale de ordinul întâi. Folosind tehnici de identificare a sistemelor, poate fi utilizat următorul model matematic intrare-ieșire liniar în timp discret:

$$y(k+1) = ay(k) + bu(k), \quad (1.29)$$

în care  $u = \text{MaxUsers} - \overline{\text{MaxUsers}}$  și  $y = \text{RIS} - \overline{\text{RIS}}$ . Parametrii  $a=0.43$  și  $b=0.47$  descriu dinamica sistemului în jurul punctului de funcționare;  $\overline{\text{MaxUsers}}=165$  și  $\overline{\text{RIS}}=135$  reprezintă punctul de funcționare al sistemului. Numărul de cereri a fost mediat pe o perioadă de eșantionare de 60 s.

Aplicând transformarea Z relației (1.29) în condiții inițiale nule, este obținută funcția de transfer în timp discret de la intrarea  $u$  la ieșirea  $y$ , cu expresia  $H(z) = Y(z)/U(z) = b/(z-a)$ .

Modelul serverului de e-mail este interesant și datorită faptului că are variabile care pot lua doar valori întregi.

#### (7) Un model în timp discret asociat unui cont bancar [7]

Un cont bancar poate fi modelat ca un sistem liniar în timp discret. Fie dinamica sistemului exprimată în forma

$$x(k+1) = (1+\rho)x(k) + u(k), \quad (1.30)$$

$$x(0) = x_0$$

în care  $k$  este contorul anului,  $\rho$  este rata dobânzii,  $x(k)$  este valoarea contului la începutul anului  $k$ ,  $u(k)$  sunt banii economisiți la sfârșitul anului  $k$ ,  $x_0$  este valoarea inițială a contului (banii inițiali în contul bancar). Pentru  $x_0=10.000\text{€}$ ,  $u(k)=5000\text{€}$  și  $\rho=10\%$ , simularea evoluției contului bancar în timp conduce la rezultatul

$$x(k) = (1.1)^k \cdot 10 + (1 - 1.1^k)/(1 - 1.1) \cdot 5 = 60 \cdot (1.1)^k - 50. \quad (1.31)$$

Pentru acest sistem simplu, folosind relația (1.10) și considerând o singură mărime de ieșire  $y(k)=x(k)$ , funcția de transfer în timp discret poate fi calculată pentru matricele  $A=1.1$ ,  $B=1$ ,  $C=1$  rezultând  $H(z)=1/(z-1.1)$ . Rădăcina numitorului este 1.1 și aceasta arată că sistemul este instabil așa cum este predictat și în relația (1.31), unde pentru o intrare constantă, ieșirea va crește după fiecare an.

#### (8) Dinamica studenților modelată ca un sistem în timp discret [7]

Având în vedere un program de licență de 3 ani, în care pentru simplificare se consideră ca procentele de studenți promovați, repetenți și care abandonează sunt aproximativ constante, nu este permisă înscrierea directă în anii 2 și 3 și studenții nu pot fi înscriși pe o perioadă mai lungă de 3 ani, un model dinamic liniar de ordinul 3 în timp discret poate fi exprimat în forma MM-ISI următor:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) &= \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) &= \alpha_3 x_3(k) \end{aligned} \quad (1.32)$$

în care  $k$  este anul calendaristic,  $x_i(k)$  este numărul studenților înmatriculați în anul de studii  $i$  în anul  $k$ ,  $u(k)$  este numărul de studenți începători în anul  $k$ ,  $y(k)$  este numărul de absolvenți în anul  $k$ ,  $\alpha_i$  este rata de promovare pe parcursul anului  $i$ ,  $\beta_i$  este rata de eșec pe parcursul anului  $i$ . De asemenea, sunt considerate condiții inițiale nule!



### Temă de casă:

Problema de **predicție**: pentru  $\alpha_1=0.6$ ,  $\alpha_2=0.8$ ,  $\alpha_3=0.9$ ,  $\beta_1=0.2$ ,  $\beta_2=0.15$ ,  $\beta_3=0.08$ ,  $u(k)=50$  pentru toți anii  $k$ , începând cu anul  $k=2022$ , simulați evoluția sistemului până în anul 2033 și observați evoluția numărului de absolvenți.

Problema de **reglare**: Să presupunem că dorim 115 absolvenți în anii 2025, 2026, 2027, ... Cum ar trebui să arate secvența numărului de studenți începători?

Ținând seama de MM-ISI din relația (1.32), calculați funcția de transfer discretă de la intrarea  $u(k)$  la ieșirea  $y(k)$ , folosind relația (1.11).

Ținând seama de valorile parametrilor din tema de casă, o reprezentare intrare-stare-ieșire (în formă matriceală) pentru sistemul din relația (1.33) este

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.08 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k). \quad (1.33)$$

$$y(k) = (0 \ 0 \ 0.9) \mathbf{x}(k)$$

Folosind relația (1.10), funcția de transfer în timp discret de la intrarea  $u(k)$  la ieșire este calculată ca fiind  $H(z)=0.432/(z^3-0.43z^2+0.058z-0.0024)$ . Forma recurentă a MM în timp discret (în întârzieri) este

$$y(k) = 0.43y(k-1) - 0.058y(k-2) + 0.0024y(k-3) + 0.432u(k-3). \quad (1.34)$$

### (9) Modelarea unui lanț de aprovizionare [7]

$S$  cumpără cantitatea  $u(k)$  de materie primă în fiecare lună  $k$  așa cum este ilustrat în fig. 1.12. O fracțiune  $\delta_1$  din materia primă este aruncată și o altă fracțiune  $\alpha_1$  este expediată producătorului  $P$ .  $P$  vinde o fracțiune  $\alpha_2$  vânzătorului  $R$ , o altă fracțiune  $\delta_2$  fiind aruncată. Vânzătorul  $R$  vinde o fracțiune  $\gamma_3$  clienților și returnează producătorului o fracțiune  $\beta_3$  din produsele defecte.

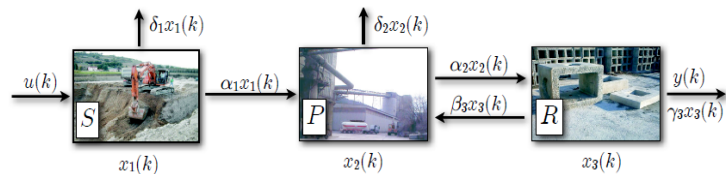


Fig. 1.12 [7].

Modelul matematic linear intrare-stare-ieșire în timp discret poate fi formulat în forma:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (1 - \alpha_1 - \delta_1)x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= (1 - \alpha_2 - \delta_2)x_2(k) + \alpha_1x_1(k) + \beta_3x_3(k), \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ x_3(k+1) &= (1 - \beta_3 - \gamma_3)x_3(k) + \alpha_2x_2(k) \\ y(k) &= \gamma_3x_3(k) \end{aligned} \quad (1.35)$$

În acest exemplu, sunt considerate condiții inițiale nule. Acest model poate fi scris și sub formă matriceală astfel:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 - \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_2 - \delta_2 & \beta_3 \\ 0 & \alpha_2 & 1 - \beta_3 - \gamma_3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(k). \quad (1.36)$$

$$y(k) = (0 \ 0 \ \gamma_3) \mathbf{x}(k)$$

**Temă de casă:** Folosind relația (1.10), calculați funcția de transfer discretă de la intrarea  $u(k)$  la ieșirea  $y(k)$ .

### Teme suplimentare:

1) Calculați transformatele Laplace ale funcțiilor următoare (în mod explicit „de mână”):

- $2t^2$
- $3\sin(2t)$
- $3e^{-t}$
- $te^{-t}$

2) Găsiți transformatele Laplace inverse pentru funcțiile următoare:

- $1/(s^2+2s+1)$
- $(2s+4)/[(s+1)(s^2-2)]$

*Idee:* Folosiți descompunerea în fracții simple și identificarea coeficienților.

3) Folosiți transformarea Laplace pentru a rezolva următoarele ecuații diferențiale:

- $y' + y = 2t^2 - 1$ ,  $y(0) = -1$ .
- $y'' + 4y = \sin(2t)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

4) Calculați transformata Z pentru funcțiile următoare:

- $x(k) = (1/2)^k$
- $x(k) = k$
- $x(k) = e^{ak}$
- $x(k) = \begin{cases} 2, & k \geq 3 \\ 0, & k < 3 \end{cases}$

5) Folosiți transformarea Z și tabelele pentru a găsi soluția modelului de creștere exponențială  $y(k+1) = (1+r)y(k)$  cu  $r=0.1$  și  $y(0)=100$ .

6) Folosiți transformarea Z pentru a rezolva ecuația diferențială  $y(k+1) - 3y(k) = 4^k$  în condiții inițiale  $y(0)=2$ .

7) Folosiți transformarea Z pentru a rezolva sistemul de ecuații diferențiale:

$x(k+1)-y(k)=0$ ,  
 $y(k+1)+x(k)=0$ , cu  $x(0)=1$  și  $y(0)=0$ .

**Bibliografie:**

- [1] S. Preitl, R.-E. Precup and Z. Preitl, *Structuri și algoritmi pentru conducerea automată a proceselor, vol. 1 și 2*, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2009.
- [2] S. Preitl, *Tehnica reglării automate*, Note de curs, Universitatea “Politehnica” din Timișoara, Timișoara, 2006-2008.
- [3] S. Preitl, *Elemente de reglare automată*, Note de curs, Universitatea “Politehnica” din Timișoara, Timișoara, 2006-2008.
- [4] S. Preitl, *Introducere în automatică*, Note de curs, Universitatea “Politehnica” din Timișoara, Timișoara, 2006-2008.
- [5] R.H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design Using Matlab*, Addison-Wesley, 1993.
- [6] K.J. Astrom and R.M. Murray, *Feedback Systems – An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
- [7] A. Bemporad, *Discrete-time Linear Systems*, Course at University of Trento, Trento, Italy, 2010.
- [8] D. Wodarz and M.A. Nowak, *Mathematical models of virus dynamics and resistance*, Journal of HIV Therapy, no. 3, pp. 36-41, 1998.