Matematici Asistate de Calculator

Dr. Călin-Adrian POPA

Cursul 2

20 Februarie 2019

2.2 Iteraţia de punct fix

- folosiţi un calculator pentru a aplica funcţia `cos` în mod repetat unui număr iniţial arbitrar ales
- mai exact, aplicaţi funcţia `cos` numărului iniţial, apoi aplicaţi `cos` rezultatului, apoi noului rezultat, şi aşa mai departe
- continuaţi până când cifrele nu se mai modifică deloc
- şirul de numere rezultat va converge la 0.7390851332, cel puţin cu 10 zecimale exacte
- în această secţiune, scopul nostru este de a explica de ce acest calcul, care este un exemplu de iteraţie de punct fix, converge
- în timp ce facem acest lucru, majoritatea problemelor de convergenţă ale algoritmului vor fi puse în discuţie

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- şirul de numere rezultat în urma iterării funcţiei cosinus pare să conveargă la un număr r
- aplicări ulterioare ale funcţiei cosinus nu schimbă acest număr
- pentru această intrare, ieşirea funcţiei cosinus este egală cu intrarea, sau $\cos r = r$

Definiţia 1

Numărul real r este un **punct fix** al funcţiei g dacă $g(r) = r$.

- numărul $r = 0.7390851332$ este o aproximare a punctului fix al funcţiei $g(x) = \cos x$
- funcţia $g(x) = x^3$ are trei puncte fixe, $r = -1$, 0 şi 1
- am folosit metoda bisecţiei pentru a rezolva ecuaţia $\cos x - x = 0$
- ecuaţia de punct fix $\cos x = x$ este aceeaşi problemă, însă dintr-un alt punct de vedere
- când ieşirea este egală cu intrarea, acel număr este un punct fix al funcţiei $\cos x$, şi, în acelaşi timp, o soluţie a ecuaţiei $\cos x - x = 0$
- de îndată ce ecuaţia este scrisă ca $g(x) = x$, iteraţia de punct fix începe cu o valoare iniţială x_0 şi iterează funcţia g

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

Algoritmul 1 (Iteraţia de punct fix)

x_0= valoarea iniţială
$x_{i+1} = g(x_i)$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$.

- prin urmare,

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ x_3 &= g(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

  şi aşa mai departe
- şirul x_i poate să conveargă sau nu pe măsură ce numărul de paşi tinde la infinit
- însă, dacă g este continuă şi x_i converge, de exemplu, la un număr r, atunci r este un punct fix

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- de fapt, Teorema 1 implică

$$g(r) = g\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = r. \qquad (1)$$

Teorema 1 (Limite continue)

Fie f o funcţie continuă într-o vecinătate a lui x_0, şi presupunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Cu alte cuvinte, limitele pot fi introduse în interiorul funcţiilor continue.

- iteraţia de punct fix rezolvă problema de punct fix $g(x) = x$, însă noi suntem interesaţi în principal de rezolvarea ecuaţiilor
- se pune întrebarea: orice ecuaţie $f(x) = 0$ poate fi transformată într-o problemă de punct fix $g(x) = x$?
- răspunsul este da, şi în multe feluri diferite

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- de exemplu, ecuaţia

$$x^3 + x - 1 = 0, \tag{2}$$

poate fi rescrisă sub forma

$$x = 1 - x^3, \tag{3}$$

şi putem să definim $g(x) = 1 - x^3$

- ca o alternativă, termenul x^3 din (2) poate fi izolat, rezultând astfel

$$x = \sqrt[3]{1 - x}, \tag{4}$$

unde $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

- ca o a treia şi nu foarte evidentă abordare, putem să adunăm $2x^3$ în ambii termeni ai ecuaţiei (2), obţinând

$$\begin{aligned} 3x^3 + x &= 1 + 2x^3 \\ (3x^2 + 1)x &= 1 + 2x^3 \\ x &= \frac{1 + 2x^3}{1 + 3x^2} \qquad (5) \end{aligned}$$

şi definim $g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- în cele ce urmează, vom ilustra iteraţia de punct fix pentru cele trei alegeri anterioare ale lui $g(x)$
- ecuaţia care trebuie rezolvată este $x^3 + x - 1 = 0$
- mai întâi vom considera forma $x = g(x) = 1 - x^3$
- punctul iniţial $x_0 = 0.5$ este ales arbitrar

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- aplicând IPF obţinem următorul rezultat:

i	x_i
0	0.50000000
1	0.87500000
2	0.33007813
3	0.96403747
4	0.10405419
5	0.99887338
6	0.00337606
7	0.99999996
8	0.00000012
9	1.00000000
10	0.00000000
11	1.00000000
12	0.00000000

- în loc să conveargă, iteraţia tinde să alterneze între numerele 0 şi 1
- niciunul dintre ele nu este un punct fix, deoarece $g(0) = 1$ şi $g(1) = 0$
- iteraţia de punct fix eşuează

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

- în metoda bisecţiei, ştim că dacă f este continuă şi $f(a)f(b) < 0$ pe intervalul iniţial, atunci trebuie să vedem o convergere către rădăcină
- acest lucru nu se întâmplă pentru IPF
- a doua variantă este $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
- vom menţine aceeaşi valoare iniţială, $x_0 = 0.5$

2.2.1 Punctele fixe ale unei funcţii

i	x_i
0	0.50000000
1	0.79370053
2	0.59088011
3	0.74236393
4	0.63631020
5	0.71380081
6	0.65900615
7	0.69863261
8	0.67044850
9	0.69072912
10	0.67625892
11	0.68664554
12	0.67922234

i	x_i
13	0.68454401
14	0.68073737
15	0.68346460
16	0.68151292
17	0.68291073
18	0.68191019
19	0.68262667
20	0.68211376
21	0.68248102
22	0.68221809
23	0.68240635
24	0.68227157
25	0.68236807

- de această dată, IPF înregistrează o reuşită
- iteraţiile par să conveargă către un număr apropiat de 0.6823

- în final, vom folosi rearanjarea $x = g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$
- ca în cazul anterior, există convergenţă, dar într-un mod mult mai izbitor

i	x_i
0	0.50000000
1	0.71428571
2	0.68317972
3	0.68232842
4	0.68232780
5	0.68232780
6	0.68232780
7	0.68232780

- aici avem patru zecimale exacte după patru iteraţii ale IPF, şi mult mai multe zecimale exacte imediat după
- comparând cu încercările anterioare, acesta este un rezultat uimitor
- următorul nostru obiectiv este acela de a încerca să explicăm diferenţele dintre cele trei rezultate

- în subsecţiunea anterioară, am găsit trei moduri diferite de a rescrie ecuaţia $x^3 + x - 1 = 0$ ca o problemă de punct fix, cu rezultate diferite
- pentru a afla de ce metoda IPF converge în anumite situaţii şi nu în altele, este folositor să ne uităm la geometria metodei

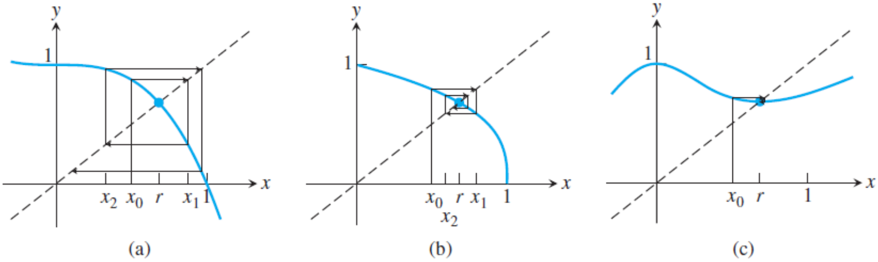

Figura 1: **Geometria IPF.** Punctul fix este intersecţia lui $g(x)$ cu prima bisectoare. Trei exemple pentru $g(x)$ sunt prezentate împreună cu primii paşi ai metodei IPF. (a) $g(x) = 1 - x^3$ (b) $g(x) = (1 - x)^{1/3}$ (c) $g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$

2.2.2 Geometria iteraţiei de punct fix

- Figura 1 prezintă cele trei variante pentru $g(x)$ discutate mai sus, împreună cu o ilustrare a primilor paşi ai metodei IPF în fiecare caz
- punctul fix r este acelaşi pentru fiecare $g(x)$
- el este reprezentat prin punctul în care graficele lui $y = g(x)$ şi $y = x$ se intersectează
- fiecare pas din IPF poate fi schiţat prin desenarea unor segmente de dreaptă (1) **verticale la funcţie** şi apoi (2) **orizontale la prima bisectoare** $y = x$
- săgeţile verticale şi orizontale din Figura 1 urmăresc paşii făcuţi de către IPF
- săgeata verticală care se mişcă de la axa x la funcţia g reprezintă $x_i \rightarrow g(x_i)$
- săgeata orizontală reprezintă transformarea ieşirii $g(x_i)$ de pe axa y în acelaşi număr x_{i+1} de pe axa x, gata de a fi intrarea funcţiei g în pasul următor
- acest lucru este realizat prin desenarea segmentului orizontal de la înălţimea de ieşire $g(x_i)$ până la prima bisectoare $y = x$
- această ilustrare geometrică a iteraţiei de punct fix se numeşte **diagramă cobweb**

2.2.2 Geometria iteraţiei de punct fix

- în Figura 1(a), traiectoria începe de la $x_0 = 0.5$, şi se mişcă în sus până la funcţie şi orizontal până la punctul $(0.875, 0.875)$ de pe prima bisectoare, care este (x_1, x_1)
- apoi, x_1 va trebui să fie înlocuit în $g(x)$
- acest lucru se face la fel cum a fost făcut pentru x_0, cu o mişcare verticală până la funcţie
- se obţine $x_2 \approx 0.3300$, şi după o mişcare orizontală pentru a transforma valoarea y în valoare x, continuăm în aceeaşi manieră şi obţinem x_3, x_4, ...
- după cum am văzut mai devreme, rezultatul IPF pentru acest $g(x)$ nu înregistrează o reuşită—iteraţiile tind în cele din urmă spre o alternare între 0 şi 1, niciunul dintre acestea nefiind punct fix
- iteraţia de punct fix înregistrează o reuşită în Figura 1(b)
- deşi funcţia $g(x)$ arată asemănător cu funcţia $g(x)$ din cazul (a), există o diferenţă semnificativă, care va fi clarificată în subsecţiunea următoare
- se poate specula asupra a ceea ce reprezintă această diferenţă
- ce face IPF să conveargă către punctul fix în (b), şi să diveargă de la punctul fix în (a)?

2.2.2 Geometria iteraţiei de punct fix

- Figura 1(c) arată un exemplu de convergenţă foarte rapidă
- ajută această imagine în cadrul speculaţiei?
- dacă aţi ghicit că este ceva care are de a face cu panta lui $g(x)$ în apropierea punctului fix, aveţi dreptate

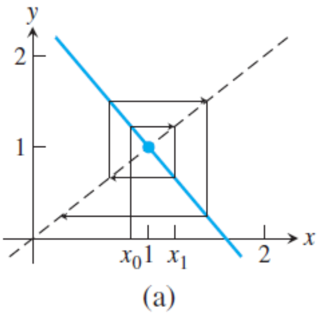

Figura 2: **Diagrama cobweb pentru funcţii liniare.** (a) Dacă funcţia liniară are panta mai mare decât 1 în valoare absolută, valori iniţiale din apropierea punctului se depărtează de punctul fix pe măsură ce IPF progresează, ceea ce duce la eşecul metodei. (b) Pentru o pantă mai mică decât 1 în valoare absolută, are loc fenomenul invers, şi punctul fix este găsit.

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- proprietăţile de convergenţă ale IPF pot fi uşor explicate la o privire atentă asupra algoritmului în cea mai simplă situaţie
- Figura 2 prezintă iteraţia de punct fix pentru două funcţii liniare $g_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ şi $g_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
- în fiecare caz, punctul fix este $x = 1$, dar $|g_1'(1)| = \left|-\frac{3}{2}\right| > 1$ pe când $|g_2'(1)| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$
- urmărind săgeţile verticale şi orizontale care descriu IPF, vedem motivul acestei diferenţe
- deoarece panta lui g_1 în punctul fix este mai mare decât 1, segmentele verticale, cele care reprezintă trecerea de la x_n la x_{n+1}, cresc în lungime pe măsură ce IPF avansează
- ca o consecinţă, iteraţia se depărtează de la punctul fix $x = 1$, chiar dacă valoarea iniţială x_0 a fost destul de aproape
- pentru g_2, situaţia este inversată: panta lui g_2 este mai mică decât 1, lungimea segmentelor verticale se diminuează, iar IPF se apropie de soluţie
- prin urmare, valoarea lui $|g'(r)|$ face diferenţa crucială între divergenţă şi convergenţă
- aceasta este perspectiva geometrică

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- în termeni de ecuaţii, este util să scriem $g_1(x)$ şi $g_2(x)$ în funcţie de $x - r$, unde $r = 1$ este punctul fix:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{3}{2}(x-1)+1 \\ g_1(x)-1 &= -\frac{3}{2}(x-1) \\ x_{i+1}-1 &= -\frac{3}{2}(x_i-1). \end{aligned} \tag{6}$$

- dacă privim pe $e_i = |r - x_i|$ ca fiind eroarea la pasul i (reprezentând distanţa dintre cea mai bună aproximare la pasul i şi punctul fix), vedem din (6) că $e_{i+1} = 3e_i/2$, ceea ce implică o creştere a erorii la fiecare pas cu un factor de aproximativ $3/2$
- aceasta este divergenţa

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- repetând calculele anterioare pentru g_2, avem

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= -\frac{1}{2}(x-1)+1 \\
g_2(x)-1 &= -\frac{1}{2}(x-1) \\
x_{i+1}-1 &= -\frac{1}{2}(x_i-1).
\end{aligned}
$$

- rezultatul este $e_{i+1} = e_i/2$, ceea ce implică faptul că eroarea, şi anume distanţa până la punctul fix, este înmulţită cu $1/2$ la fiecare pas
- eroarea descreşte la zero pe măsură ce numărul de paşi creşte
- aceasta este convergenţa de un anumit tip

Definiţia 2

Fie e_i eroarea la pasul i al unei metode iterative. Dacă

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se spune că metoda este **liniar convergentă** cu rata S.

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- iteraţia de punct fix pentru g_2 este liniar convergentă la rădăcina $r = 1$ cu rata $S = 1/2$
- deşi discuţia anterioară a fost simplificată de faptul că g_1 şi g_2 sunt liniare, acelaşi tip de raţionament se aplică unei funcţii generale derivabilă cu derivata continuă $g(x)$ cu punctul fix $g(r) = r$, după cum se arată în următoarea teoremă

Teorema 2

Să presupunem că g este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, că $g(r) = r$, şi că $S = |g'(r)| < 1$. Atunci iteraţia de punct fix converge liniar cu rata S la punctul fix r pentru o valoare iniţială suficient de apropiată de r.

Teorema 3 (Teorema de medie)

Fie f o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci există un număr c între a şi b astfel încât $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- fie x_i iteraţia lui x la pasul i
- conform teoremei de medie 3, există un număr c_i între x_i şi r astfel încât
$$x_{i+1} - r = g'(c_i)(x_i - r), \tag{7}$$
unde am înlocuit pe $x_{i+1} = g(x_i)$ şi $r = g(r)$
- definind $e_i = |x_i - r|$, (7) poate fi scris sub forma
$$e_{i+1} = |g'(c_i)|e_i. \tag{8}$$
- dacă $S = |g'(r)|$ este mai mic decât 1, atunci din continuitatea lui g', există o vecinătate mică în jurul lui r pentru care $|g'(x)| < (S+1)/2$, limită puţin mai mare decât S, dar totuşi mai mică decât 1
- dacă se întâmplă ca x_i să se afle în această vecinătate, atunci şi c_i se află în această vecinătate (fiind situat între x_i şi r), şi astfel
$$e_{i+1} \le \frac{S+1}{2} e_i.$$
- prin urmare, eroarea descreşte cu un factor de $(S+1)/2$ sau mai bun în pasul curent şi în fiecare pas viitor

- aceasta înseamnă că $\lim_{i\to\infty} x_i = r$, şi trecând la limită în (8), obţinem

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \lim_{i\to\infty} |g'(c_i)| = |g'(r)| = S.$$

- conform Teoremei 2, relaţia aproximativă pentru eroare

$$e_{i+1} \approx Se_i \tag{9}$$

  are loc la limită pe măsură ce se apropie convergenţa, unde $S = |g'(r)|$

Definiţia 3

O metodă iterativă se numeşte **local convergentă** la r dacă metoda converge la r pentru valori iniţiale suficient de apropiate de r.

- cu alte cuvinte, metoda este local convergentă la rădăcina r, dacă există o vecinătate $(r-\epsilon, r+\epsilon)$, unde $\epsilon > 0$, astfel încât convergenţa la r rezultă din toate valorile iniţiale din vecinătate
- concluzia Teoremei 2 este că iteraţia de punct fix este local convergentă dacă $|g'(r)| < 1$

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- Teorema 2 explică ce s-a întâmplat în rulările anterioare ale iteraţiei de punct fix pentru $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$
- ştim că rădăcina este $r \approx 0.6823$
- pentru $g(x) = 1 - x^3$, derivata este $g'(x) = -3x^2$
- în apropierea rădăcinii r, IPF are comportarea $e_{i+1} \approx Se_i$, unde $S = |g'(r)| = |-3(0.6823)^2| \approx 1.3966 > 1$, deci erorile cresc, şi prin urmare nu poate exista convergenţă
- există garanţia că această relaţie pentru eroare între e_{i+1} şi e_i are loc doar în apropierea lui r, dar înseamnă totuşi că o convergenţă la r nu poate avea loc
- pentru a doua alegere, $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$, derivata este $g'(x) = 1/3(1-x)^{-2/3}(-1)$, şi $S = |(1 - 0.6823)^{-2/3}/3| \approx 0.716 < 1$
- Teorema 2 implică existenţa convergenţei, exact cum am obţinut în calculele noastre anterioare

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- pentru a treia alegere, $g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{6x^2(1 + 3x^2) - (1 + 2x^3)6x}{(1 + 3x^2)^2} \\
&= \frac{6x(x^3 + x - 1)}{(1 + 3x^2)^2},
\end{aligned}
$$

  şi $S = |g'(r)| = 0$
- aceasta este cea mai mică valoare posibilă a lui S, ceea ce duce la convergenţa foarte rapidă observată în Figura 1(c)

Exemplul 1

- explicaţi de ce iteraţia de punct fix $g(x) = \cos x$ converge
- aceasta este explicaţia promisă mai sus
- aplicarea repetată a funcţiei cosinus pe un calculator corespunde unei IPF cu $g(x) = \cos x$
- conform Teoremei 2, soluţia $r \approx 0.74$ atrage valorile iniţiale aflate în apropiere, deoarece $g'(r) = -\sin r \approx -\sin 0.74 \approx -0.67$ este mai mic decât 1 în valoare absolută

Exemplu 2

- folosiţi iteraţia de punct fix pentru a găsi o soluţie a ecuaţiei $\cos x = \sin x$
- cea mai simplă metodă de a converti acestă ecuaţie într-o problemă de punct fix este de a aduna x la ambii termeni ai ecuaţiei
- putem rescrie problema ca $x + \cos x - \sin x = x$ şi defini

$$g(x) = x + \cos x - \sin x. \tag{10}$$

- rezultatul aplicării iteraţiei de punct fix pentru funcţia $g(x)$ este prezentat în tabelul următor

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

i	x_i	$g(x_i)$	$e_i = \|x_i - r\|$	e_i/e_{i-1}
0	0.0000000	1.0000000	0.7853982	
1	1.0000000	0.6988313	0.2146018	0.273
2	0.6988313	0.8211025	0.0865669	0.403
3	0.8211025	0.7706197	0.0357043	0.412
4	0.7706197	0.7915189	0.0147785	0.414
5	0.7915189	0.7828629	0.0061207	0.414
6	0.7828629	0.7864483	0.0025353	0.414
7	0.7864483	0.7849632	0.0010501	0.414
8	0.7849632	0.7855783	0.0004350	0.414
9	0.7855783	0.7853235	0.0001801	0.414
10	0.7853235	0.7854291	0.0000747	0.415
11	0.7854291	0.7853854	0.0000309	0.414
12	0.7853854	0.7854035	0.0000128	0.414
13	0.7854035	0.7853960	0.0000053	0.414
14	0.7853960	0.7853991	0.0000022	0.415

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

i	x_i	$g(x_i)$	$e_i = \|x_i - r\|$	e_i/e_{i-1}
15	0.7853991	0.7853978	0.0000009	0.409
16	0.7853978	0.7853983	0.0000004	0.444
17	0.7853983	0.7853981	0.0000001	0.250
18	0.7853981	0.7853982	0.0000001	1.000
19	0.7853982	0.7853982	0.0000000	

- există mai multe lucruri interesante care pot fi observate în tabel
- în primul rând, iteraţia pare să conveargă la 0.7853982
- deoarece $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 = \sin \pi/4$, soluţia exactă a ecuaţiei $\cos x - \sin x = 0$ este $r = \pi/4 \approx 0.7853982$
- a patra coloană este „coloana de eroare”
- ea prezintă valoarea absolută a diferenţei dintre cea mai bună aproximaţie x_i la pasul i şi valoarea exactă a punctului fix r
- această diferenţă devine mică în partea de jos a tabelului, indicând convergenţa către punctul fix

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- observăm tiparul care apare în coloana de eroare
- erorile par să descrească cu un factor constant, fiecare eroare fiind mai puţin decât jumătate din eroarea anterioară
- pentru a fi mai precişi, raportul dintre erori succesive este prezentat în ultima coloană
- în cea mai mare parte a tabelului, vedem că raportul erorilor succesive e_i/e_{i-1} se apropie de un număr constant, aproximativ egal cu 0.414
- cu alte cuvinte, observăm relaţia de convergenţă liniară

$$e_i \approx 0.414 e_{i-1}. \tag{11}$$

- acest lucru este exact ceea ce era de aşteptat, deoarece Teorema 2 implică

$$S = |g'(r)| = |1 - \sin r - \cos r| = \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = |1 - \sqrt{2}| \approx 0.414.$$

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

- cititorul atent va observa o discrepanţă spre finalul tabelului
- am folosit doar şapte zecimale exacte pentru punctul fix corect r pentru calculul erorilor e_i
- ca o consecinţă, precizia relativă a lui e_i este slabă pe măsură ce e_i se apropie de 10^{-8}, şi rapoartele e_i/e_{i-1} devin inexacte
- această problemă ar dispărea dacă am folosi o valoare mai precisă pentru r

Exemplul 3

- găsiţi punctele fixe ale funcţiei $g(x) = 2.8x - x^2$
- funcţia $g(x) = 2.8x - x^2$ are două puncte fixe 0 şi 1.8, care pot fi determinate rezolvând analitic ecuaţia $g(x) = x$, sau observând unde se intersectează graficele funcţiilor $y = g(x)$ şi $y = x$
- Figura 3 prezintă o diagramă cobweb a IPF cu valoarea iniţială $x_0 = 0.1$

2.2.3 Convergenţa liniară a iteraţiei de punct fix

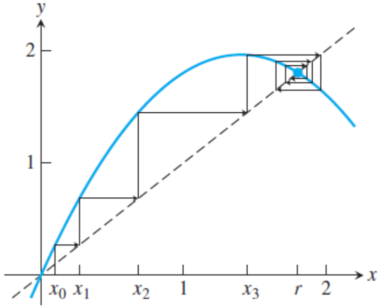

Figura 3: **Diagrama cobweb pentru iteraţia de punct fix.** Exemplul 3 are două puncte fixe, 0 şi 1.8. O iteraţie cu valoarea iniţială 0.1 este prezentată. Iteraţia de punct fix va converge doar la 1.8.

- pentru acest exemplu, iteraţiile

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.1000 \\
x_1 &= 0.2700 \\
x_2 &= 0.6831 \\
x_3 &= 1.4461 \\
x_4 &= 1.9579,
\end{aligned}
$$

pot fi citite ca intersecţii de-a lungul primei bisectoare

- deşi punctul iniţial $x_0 = 0.1$ este în apropierea punctului fix 0, IPF se mişcă spre celălalt punct fix $x = 1.8$ şi converge acolo
- diferenţa dintre cele două puncte fixe este că panta lui g în $x = 1.8$, dată prin $g'(1.8) = -0.8$, este mai mică decât 1 în valoare absolută
- pe de altă parte, panta lui g în celălalt punct fix $x = 0$, cel care respinge punctele, este $g'(0) = 2.8$, care este mai mare decât 1 în valoare absolută

- spre deosebire de metoda bisecţiei, numărul de paşi necesari pentru convergenţa IPF în limitele unei toleranţe date nu poate fi prezisă dinainte
- în absenţa unei formule de eroare cum este cea pentru metoda bisecţiei, o decizie trebuie luată cu privire la încheierea algoritmului, numită **criteriu de oprire**
- pentru o anume toleranţă TOL, putem formula un criteriu de oprire cu privire la eroarea absolută

$$|x_{i+1} - x_i| < \text{TOL}, \tag{12}$$

sau, în cazul în care soluţia nu este prea aproape de zero, un criteriu de oprire cu privire la eroarea relativă

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \text{TOL}. \tag{13}$$

2.2.4 Criterii de oprire

- un criteriu hibrid cu privire la eroarea absolută/relativă

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{\max(|x_{i+1}|, \theta)} < \text{TOL} \tag{14}$$

  pentru un anumit $\theta > 0$ este adesea folositor în cazul în care soluţia este apropiată de 0
- în plus, un cod bun pentru IPF setează o limită a numărului maxim de paşi în cazul în care convergenţa eşuează
- problema criteriului de oprire este una importantă
- metoda bisecţiei are o convergenţă liniară garantată
- iteraţia de punct fix este doar local convergentă, iar atunci când converge, este liniar convergentă
- ambele metode necesită o evaluare de funcţie la fiecare pas
- metoda bisecţiei reduce incertitudinea cu un factor de $1/2$ la fiecare pas, prin comparaţie cu aproximativ $S = |g'(r)|$ pentru IPF
- prin urmare, iteraţia de punct fix poate fi mai rapidă sau mai lentă decât metoda bisecţiei, depinzând dacă S este mai mic sau mai mare decât $1/2$
- vom studia metoda lui Newton, o versiune rafinată a IPF, unde S este proiectat să fie egal cu zero

2.3 Metoda lui Newton

- metoda lui Newton, denumită de asemenea metoda Newton–Raphson, converge de obicei mult mai repede decât metodele liniar convergente pe care le-am văzut mai sus
- perspectiva geometrică a metodei lui Newton este prezentată în Figura 4

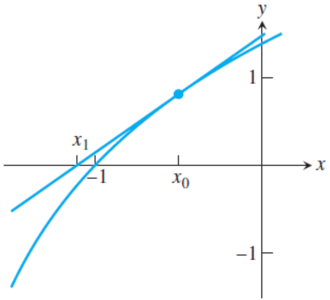

Figura 4: **Un pas pentru metoda lui Newton.** Pornind de la x_0, dreapta tangentă la curba $y = f(x)$ este trasată. Punctul de intersecţie cu axa x este x_1, următoarea aproximare a rădăcinii.

2.3 Metoda lui Newton

- pentru a găsi o rădăcină a lui $f(x) = 0$, o valoare iniţială x_0 este dată, şi dreapta tangentă la funcţia f în punctul x_0 este trasată
- dreapta tangentă va urmări aproximativ funcţia până jos la axa x spre rădăcină
- punctul de intersecţie al acestei drepte cu axa x este o aproximare a rădăcinii, dar probabil nu este exactă dacă f se curbează
- prin urmare, acest pas este iterat
- din perspectiva geometrică, putem dezvolta o formulă algebrică pentru metoda lui Newton
- dreapta tangentă în x_0 are panta dată de derivata $f'(x_0)$
- un punct de pe dreapta tangentă este $(x_0, f(x_0))$

2.3 Metoda lui Newton

- ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct şi are o anumită pantă este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, astfel încât găsirea punctului de intersecţie al dreptei tangente cu axa x este echivalent cu înlocuirea lui $y = 0$ în această ecuaţie:

$$\begin{aligned} f'(x_0)(x - x_0) &= 0 - f(x_0) \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

- scoţând pe x din această ecuaţie, obţinem o aproximare a rădăcinii, pe care o notăm cu x_1
- apoi, întreg procesul este repetat, începând cu x_1, pentru a-l produce pe x_2, şi aşa mai departe, rezultând astfel următoarea formulă iterativă:

Algoritmul 2 (Metoda lui Newton)

x_0= valoarea iniţială
$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$.

2.3 Metoda lui Newton

Exemplul 4

- găsiţi formula pentru metoda lui Newton în cazul ecuaţiei $x^3 + x - 1 = 0$
- deoarece $f'(x) = 3x^2 + 1$, formula este dată prin

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{x_i^3 + x_i - 1}{3x_i^2 + 1} \\ &= \frac{2x_i^3 + 1}{3x_i^2 + 1}. \end{aligned}$$

- iterând această formulă pornind de la valoarea iniţială $x_0 = -0.7$, obţinem

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} = 2(-0.7)^3 + 13(-0.7)^2 + 1 \approx 0.1271 \\ x_2 &= \frac{2x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 1} \approx 0.9577. \end{aligned}$$

2.3 Metoda lui Newton

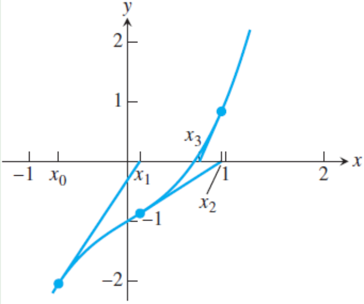

Figura 5: **Trei paşi din metoda lui Newton.** Ilustrarea Exemplului 4. Pornind cu $x_0 = -0.7$, iteraţiile din metoda lui Newton sunt reprezentate grafic împreună cu dreptele tangente. Se observă că metoda converge către rădăcină.

- aceşti paşi sunt prezentaţi geometric în Figura 5

2.3 Metoda lui Newton

- paşii următori sunt daţi în tabelul de mai jos:

i	x_i	$e_i = \|x_i - r\|$	e_i / e_{i-1}^2
0	-0.70000000	1.38232780	
1	0.12712551	0.55520230	0.2906
2	0.95767812	0.27535032	0.8933
3	0.73482779	0.05249999	0.6924
4	0.68459177	0.00226397	0.8214
5	0.68233217	0.00000437	0.8527
6	0.68232780	0.00000000	0.8541
7	0.68232780	0.00000000	

- după doar şase paşi, rădăcina este cunoscută cu opt zecimale exacte
- observăm în tabel că în momentul în care convergenţa începe să apară, numărul de zecimale exacte din x_i se dublează aproximativ la fiecare iteraţie
- aceasta este o caracteristică a metodelor „pătratic convergente”, după cum vom vedea în cele ce urmează

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

- convergenţa din Exemplul 4 este mai rapidă calitativ decât convergenţa liniară pe care am văzut-o la metoda bisecţiei şi la iteraţia de punct fix
- o nouă definiţie este necesară

Definiţia 4

Fie e_i eroarea după pasul i al unei metode iterative. Iteraţia este **pătratic convergentă** dacă

$$M = \lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty.$$

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

Teorema 4 (Teorema lui Taylor cu rest)

Fie x şi x_0 numere reale, şi fie f o funcţie de $k+1$ ori derivabilă cu derivate continue pe intervalul dintre x şi x_0. Atunci există un număr c între x şi x_0 astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \end{aligned}$$

Teorema 5

Fie f de două ori derivabilă cu derivata continuă şi $f(r) = 0$. Dacă $f'(r) \neq 0$, atunci metoda lui Newton este local şi pătratic convergentă la r. Eroarea e_i la pasul i satisface

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M, \text{ unde } M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

- pentru a demonstra local convergenţa, observăm că metoda lui Newton este o formă particulară a iteraţiei de punct fix, unde

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

cu derivata

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

- deoarece $g'(r) = 0$, metoda lui Newton este local convergentă conform Teoremei 2
- pentru a demonstra convergenţa pătratică, deducem metoda lui Newton într-un alt mod, fiind atenţi de data aceasta la eroarea de la fiecare pas
- prin eroare, înţelegem diferenţa dintre valoarea corectă a rădăcinii şi cea mai bună aproximare curentă
- formula lui Taylor din Teorema 4 ne dă diferenţa dintre valorile unei funcţii într-un anumit punct şi un alt punct aflat în apropierea acestuia

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

- pentru cele două puncte, vom folosi rădăcina r şi aproximarea curentă x_i după i paşi, şi ne vom opri şi vom lua restul după doi termeni:

$$f(r) = f(x_i) + (r - x_i)f'(x_i) + \frac{(r - x_i)^2}{2} f''(c_i).$$

- aici, c_i este între x_i şi r
- deoarece r este rădăcina, avem că

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_i) + (r - x_i)f'(x_i) + \frac{(r - x_i)^2}{2} f''(c_i) \\ -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} &= r - x_i + \frac{(r - x_i)^2}{2} \frac{f''(c_i)}{f'(x_i)}, \end{aligned}$$

presupunând că $f'(x_i) \neq 0$

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

- rearanjând, putem compara următoarea iteraţie Newton cu rădăcina:

$$\begin{aligned} x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - r &= \frac{(r - x_i)^2}{2}\frac{f''(c_i)}{f'(x_i)} \\ x_{i+1} - r &= e_i^2 \frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)} \\ e_{i+1} &= e_i^2 \left|\frac{f''(c_i)}{2f'(x_i)}\right|. \end{aligned} \tag{15}$$

- în această ecuaţie, am definit eroarea la pasul i ca fiind $e_i = |x_i - r|$
- deoarece c_i se află între r şi x_i, acesta converge la r la fel ca x_i, şi

  $$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|,$$

  adică exact definiţia convergenţei pătratice
- formula de eroare (15) pe care am dedus-o, poate fi văzută ca

  $$e_{i+1} \approx M e_i^2, \tag{16}$$

  unde $M = |f''(r)/2f'(r)|$, presupunând că $f'(r) \neq 0$

2.3.1 Convergenţa pătratică a metodei lui Newton

- aproximarea devine mai bună pe măsură ce metoda lui Newton converge, deoarece aproximările x_i se deplasează spre r, şi deoarece c_i este prins între x_i şi r
- această formulă de eroare trebuie comparată cu $e_{i+1} \approx Se_i$ de la metodele liniar convergente, unde $S = |g'(r)|$ pentru IPF şi $S = 1/2$ pentru metoda bisecţiei
- deşi valoarea lui S este critică pentru metodele liniar convergente, valoarea lui M este mai puţin critică, deoarece formula implică pătratul erorii anterioare
- odată ce eroarea devine semnificativ mai mică decât 1, ridicarea ei la pătrat va determina o scădere suplimentară; câtă vreme M nu este foarte mare, eroarea potrivit lui (16) va descreşte de asemenea
- întorcându-ne la Exemplul 4, putem analiza tabelul de ieşire pentru a demonstra această rată de eroare
- coloana din dreapta prezintă raportul e_i/e_{i-1}^2, care, conform formulei de eroare pentru metoda lui Newton (16), ar trebui să tindă la M pe măsură ce are loc convergenţa către rădăcină
- pentru $f(x) = x^3 + x - 1$, derivatele sunt $f'(x) = 3x^2 + 1$ şi $f''(x) = 6x$; evaluând în $x_c \approx 0.6823$ obţinem $M \approx 0.85$, ceea este în acord cu raportul de eroare din coloana din dreapta a tabelului

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

- Teorema 5 nu ne spune dacă metoda lui Newton converge întotdeauna pătratic
- să ne amintim că trebuie să împărţim cu $f'(r)$ pentru ca argumentul de convergenţă pătratică să aibă sens
- această presupunere se dovedeşte a fi crucială
- următorul exemplu prezintă o situaţie în care metoda lui Newton nu converge pătratic:

Exemplul 5

- folosiţi metoda lui Newton pentru a găsi o rădăcină a lui $f(x) = x^2$
- aceasta poate părea o problemă banală, deoarece ştim că există o singură rădăcină: $r = 0$
- dar de multe ori este instructiv să aplicăm o metodă nouă pe un exemplu pe care îl înţelegem foarte bine

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

- formula pentru metoda lui Newton este

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &= x_i - \frac{x_i^2}{2x_i} \\ &= \frac{x_i}{2}. \end{aligned}$$

- rezultatul surpinzător este că metoda lui Newton se reduce la împărţirea la 2
- deoarece rădăcina este $r = 0$, avem următorul tabel de iteraţii Newton pentru valoarea iniţială $x_0 = 1$:

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

i	x_i	$e_i = \|x_i - r\|$	e_i/e_{i-1}
0	1.000	1.000	
1	0.500	0.500	0.500
2	0.250	0.250	0.500
3	0.125	0.125	0.500
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- metoda lui Newton converge către rădăcina $r = 0$
- formula de eroare este $e_{i+1} = e_i/2$, deci convergenţa este liniară cu constanta de proporţionalitate a convergenţei $S = 1/2$

- metoda lui Newton, la fel ca IPF, s-ar putea să nu conveargă la o rădăcină
- următorul exemplu prezintă doar unul dintre posibilele comportamente neconvergente ale metodei

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

Exemplul 6

- aplicaţi metoda lui Newton pentru $f(x) = 4x^4 - 6x^2 - 11/4$ cu valoarea iniţială $x_0 = 1/2$
- această funcţie are rădăcini, deoarece este continuă, negativă în $x = 0$, şi tinde la plus infinit pentru valori mari pozitive sau valori mari negative ale lui x
- totuşi, nicio rădăcină nu va fi găsită pentru valoarea iniţială $x_0 = 1/2$, după cum se prezintă în Figura 6

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

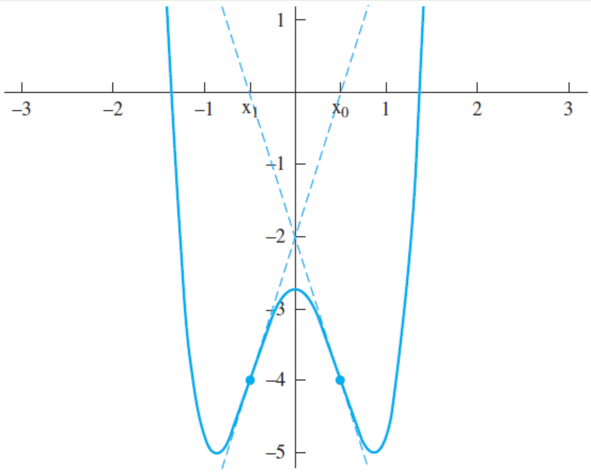

Figura 6: **Eşecul metodei lui Newton în Exemplul 6.** Iteraţia alternează între $1/2$ şi $-1/2$, şi nu converge către o rădăcină.

2.3.2 Convergenţa liniară a metodei lui Newton

- formula lui Newton este

$$x_{i+1} = x_i - \frac{4x_i^4 - 6x_i^2 - 11/4}{16x_i^3 - 12x_i}. \tag{17}$$

- înlocuind obţinem $x_1 = -1/2$, şi apoi din nou $x_2 = 1/2$
- metoda lui Newton alternează pe acest exemplu între două numere $1/2$ şi $-1/2$, care nu sunt rădăcini, şi eşuează în găsirea unei rădăcini

- metoda lui Newton poate eşua şi în alte moduri
- evident, dacă $f'(x_i) = 0$ la orice pas al iteraţiei, metoda nu poate să continue
- sunt şi alte exemple în care iteraţia diverge la infinit sau imită un generator de numere aleatoare
- deşi nu orice valoare iniţială conduce la convergenţa către o rădăcină, Teorema 5 garantează existenţa unei vecinătăţi de valori iniţiale a fiecărei rădăcini, pentru care convergenţa la acea rădăcină este asigurată

2.4 Găsirea rădăcinilor fără derivate

- metoda lui Newton converge mai repede decât metoda bisecţiei şi decât iteraţia de punct fix
- atinge această rată de convergenţă mai rapidă deoarece utilizează mai multe informaţii—în particular, informaţii despre dreapta tangentă la funcţie, care vine din derivata funcţiei
- în anumite circumstanţe însă, derivata s-ar putea să nu fie disponibilă
- metoda secantei este un bun înlocuitor pentru metoda lui Newton, în acest caz
- înlocuieşte dreapta tangentă cu o aproximare a acesteia, numită dreapta secantă, şi converge aproape la fel de repede

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

- metoda secantei este asemănătoare metodei lui Newton, dar înlocuieşte derivata cu un raport de diferenţe
- din punct de vedere geometric, dreapta tangentă este înlocuită cu o dreaptă care trece prin ultimele două aproximări
- punctul de intersecţie al dreptei secante cu axa x este noua aproximare
- o aproximare a derivatei în punctul curent x_i este dată de raportul de diferenţe

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

- înlocuind această aproximare pentru $f'(x_i)$ în metoda lui Newton, obţinem metoda secantei

Algoritmul 3 (Metoda secantei)

x_0, x_1 = valorile iniţiale

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ **for** $i = 1, 2, 3, \ldots$.

- spre deosebire de iteraţia de punct fix şi de metoda lui Newton, este nevoie de două valori iniţiale pentru a porni metoda secantei

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

- se poate demonstra că, în ipoteza că metoda secantei converge la r şi $f'(r) \neq 0$, relaţia de eroare aproximativă

$$e_{i+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| e_i e_{i-1}$$

  are loc, şi aceasta implică

$$e_{i+1} \approx \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|^{\alpha - 1} e_i^{\alpha},$$

  unde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62$
- convergenţa metodei secantei către rădăcină este numită **superliniară**, ceea ce înseamnă că este între metodele liniar şi pătratic convergente

Exemplul 7

- aplicaţi metoda secantei cu valorile iniţiale $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ pentru a găsi rădăcina lui $f(x) = x^3 + x - 1$
- formula devine

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 + x_i - 1)(x_i - x_{i-1})}{x_i^3 + x_i - (x_{i-1}^3 + x_{i-1})}. \tag{18}$$

- pornind de la $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$, putem calcula

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - \frac{(1)(1-0)}{1+1-0} = \frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{-\frac{3}{8}(1/2-1)}{-\frac{3}{8}-1} = \frac{7}{11}, \end{aligned}$$

după cum se arată în Figura 7

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

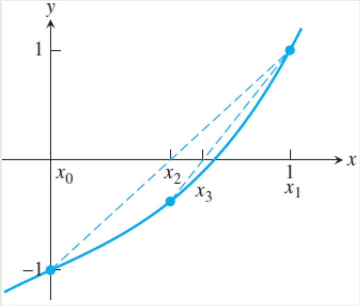

Figura 7: **Doi paşi din metoda secantei.** Ilustrarea Exemplului 7. Pornind de la $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$, iteraţiile metodei secantei sunt reprezentate grafic împreună cu dreptele secante.

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

- următoarele iteraţii sunt date în tabelul de mai jos:

i	x_i
0	0.00000000000000
1	1.00000000000000
2	0.50000000000000
3	0.63636363636364
4	0.69005235602094
5	0.68202041964819
6	0.68232578140989
7	0.68232780435903
8	0.68232780382802
9	0.68232780382802

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

- există o generalizare a metodei secantei care este de asemenea importantă
- **metoda falsei poziţii**, sau **regula falsi**, este asemănătoare cu metoda bisecţiei, în care mijlocul este înlocuit cu o aproximare similară celei din metoda secantei
- dându-se un interval $[a, b]$ în care se află o rădăcină (presupunem că $f(a)f(b) < 0$), definim următorul punct

$$c = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a)-f(b)} = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a)-f(b)}$$

  ca în metoda secantei, dar, spre deosebire de metoda secantei, este garantat că noul punct se află în $[a, b]$, deoarece punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ se află de părţi diferite ale axei x
- noul interval, ori $[a, c]$, ori $[c, b]$, este ales depinzând dacă avem $f(a)f(c) < 0$ sau, respectiv, $f(c)f(b) < 0$, şi va conţine în mod sigur rădăcina

2.4.1 Metoda secantei şi o variantă a ei

Algoritmul 4 (Metoda falsei poziţii)

Dându-se intervalul $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$

for $i = 1, 2, 3, \ldots$

$\quad c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$

$\quad$ **if** $f(c) = 0$, **stop**, **end**

$\quad$ **if** $f(a)f(c) < 0$

$\quad\quad b = c$

$\quad$ **else**

$\quad\quad a = c$

$\quad$ **end**

end

- metoda falsei poziţii pare la prima vedere să fie o îmbunătăţire atât a metodei bisecţiei cât şi a metodei secantei, preluând cele mai bune proprietăţi ale fiecăreia
- totuşi, câtă vreme metoda bisecţiei garantează reducerea incertitudinii cu un factor de $1/2$ la fiecare pas, în cazul metodei falsei poziţii nu există o astfel de garanţie, şi pentru anumite exemple poate converge foarte încet

Exemplul 8

- aplicaţi metoda falsei poziţii pe intervalul iniţial $[-1, 1]$ pentru a găsi rădăcina $r = 0$ a lui $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x$

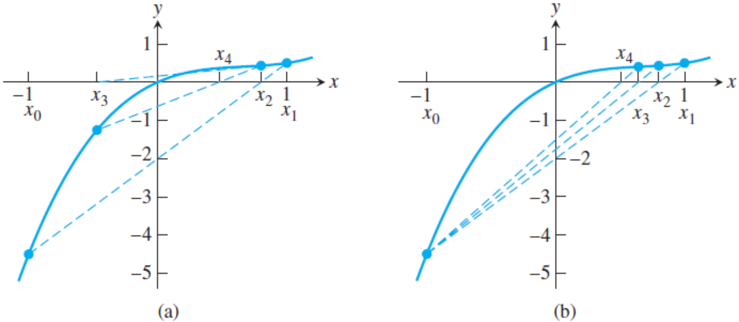

Figura 8: **Convergenţa lentă în Exemplul 8.** Atât (a) metoda secantei cât şi (b) metoda falsei poziţii converg lent către rădăcina $r = 0$.

- dându-se $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ ca interval iniţial, calculăm noul punct

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} = \frac{1(-9/2) - (-1)1/2}{-9/2 - 1/2} = \frac{4}{5}.$$

- deoarece $f(-1)f(4/5) < 0$, noul interval este $[x_0, x_2] = [-1, 0.8]$
- aceasta încheie primul pas
- observăm că incertitudinea soluţiei a scăzut cu mult mai puţin decât un factor de $1/2$
- după cum arată Figura 8(b), următorii paşi continuă să facă progrese lente spre rădăcina $x = 0$

Vă mulţumesc!