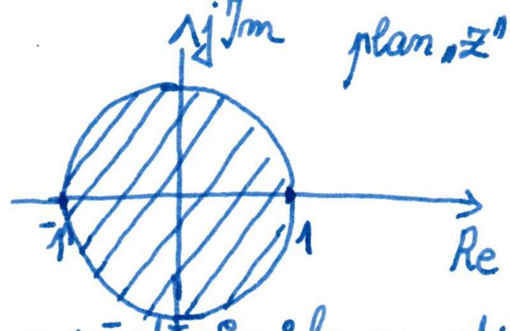
Stabilitatea sistemelor dinamice

1) Teorema 2 are o versiune corespunzătoare pentru sistemele în timp discret => Pentru un sistem cu un polinom caracteristic dat

$$\Delta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

condiția necesară și suficientă de stabilitate este ca toate rădăcinile să fie plasate în interiorul discului unitate al planului z,

$$|z_v| < 1, \quad v = 1 \dots n$$



Sistemul va fi:

- stabil, dacă $|z_v| < 1$, $v = 1 \dots n$ – rădăcinile ecuației caracteristice
- instabil, dacă cel puțin o rădăcină a ecuației caracteristice este $|z_v| > 1$
- pentru valorile $|z_v| = 1$, în sistem se instalează regimuri particulare care denotă instabilitate, astfel pentru:
  - $z_v = +1$, ieșirea este liniar crescătoare;
  - $z_v = -1$, ieșirea este oscilantă

Exemplul 5 (pag 6) a și b

2) Criteriul de stabilitate Jury

Ecuația caracteristică a sistemului

$$\Delta(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 > 0 \text{ cu } a_n > 0$$

este utilizată pentru construirea matricei pentru testul de stabilitate al lui Jury (denumită și matricea Jury). Elementele situate pe liniile pare sunt elementele de pe linia precedentă în ordine inversă. Elementele situate pe liniile impare sunt:

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}; \quad q_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ p_3 & p_1 \end{vmatrix}; \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

Linie	z^0	z^1	z^2	$\ldots z^{n-k} \ldots$	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\ldots a_{n-k} \ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots a_k \ldots$	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\ldots b_{n-k} \ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	—
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots b_k \ldots$	b_1	b_0	—
5	c_0	c_1	c_2	$\ldots c_{n-k} \ldots$	c_{n-2}	—	—
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\ldots c_k \ldots$	c_0	—	—
...	...	...	...	...	—	—	—
2n-5	p_0	p_1	p_2	p_3	—	—	—
2n-4	p_3	p_2	p_1	p_0	—	—	—
2n-3	q_0	q_1	q_2	—	—	—	—

Sistemul liniar cu polinomul caracteristic este stabil dacă şi numai dacă sunt îndeplinite cele n+1 condiţii (cu $a_n > 0$):

$\Delta(1) > 0,$ (1)

$\Delta(-1) > 0$ dacă n este par, (2)
$\quad < 0$ dacă n este impar,

$|a_0| < a_n,$ (3)

$|b_0| > |b_{n-1}|,$ (4)

$|c_0| > |c_{n-2}|,$ (5)

$|d_0| > |d_{n-3}|,$ (6)

....

$|q_0| > |q_2|$ (n+1)

Exemplul 3 (pag5)

Aplicația 1: Ecuația caracteristică a unui sistem în timp discret este dată de

$$\Delta(z) = z^3 + 2{,}1z^2 + 1{,}44z + 0{,}32 = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \Rightarrow$$

$a_3 = 1$
$a_2 = 2{,}1$
$a_1 = 1{,}44$
$a_0 = 0{,}32$

cu $n = 3$ și $a_3 = 1 > 0$

Sunt testate primele 3 condiții de stabilitate:

$\Delta(1) = 1 + 2{,}1 + 1{,}44 + 0{,}32 = 4{,}86 > 0$

$\Delta(-1) = -1 + 2{,}1 - 1{,}44 + 0{,}32 = -0{,}02 < 0$ ($n = 3$ impar)

$|a_0| = 0{,}32 < 1$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_3^2 = (0{,}32)^2 - 1 = -0{,}8976$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0a_1 - a_2a_3 = 0{,}32 \cdot 1{,}44 - 2{,}1 = -1{,}6392$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_2 - a_1a_3 = 0{,}32 \cdot 2{,}1 - 1{,}44 = -0{,}768$$

Linie	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0,32 (a_0)	1,44 (a_1)	2,1 (a_2)	1 (a_3)
2	1 (a_3)	2,1 (a_2)	1,44 (a_1)	0,32 (a_0)
3	−0,8976 (b_0)	−1,6392 (b_1)	−0,768 (b_2)	—
4	−0,768 (b_2)	−1,6392 (b_1)	−0,8976 (b_0)	—

$|b_0| = 0{,}8976$
$|b_2| = 0{,}768$
$\Rightarrow |b_0| > |b_2|$

Datorită faptului că cele 4 condiții sunt îndeplinite $\Rightarrow$ sistemul este stabil

Aplicația 2 (Tema de casă 6): Să se determine valoarea lui k pentru care sistemul cu f.d.t în buclă deschisă $H_0(z) = \frac{k(0{,}2z+0{,}5)}{z^2-1{,}2z+0{,}2}$ este stabil.