# Proiectarea și Analiza Algoritmilor SII-2025

# Curs 2 Arbori Generalizați

Fie V o mulțime având elementele a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..., a<sub>n</sub>.

Pe V se poate defini o relație de precedență:  $a_i$  precede pe  $a_j$  dacă i < j și notăm  $a_i \prec a_j$ 

#### Proprietăți:

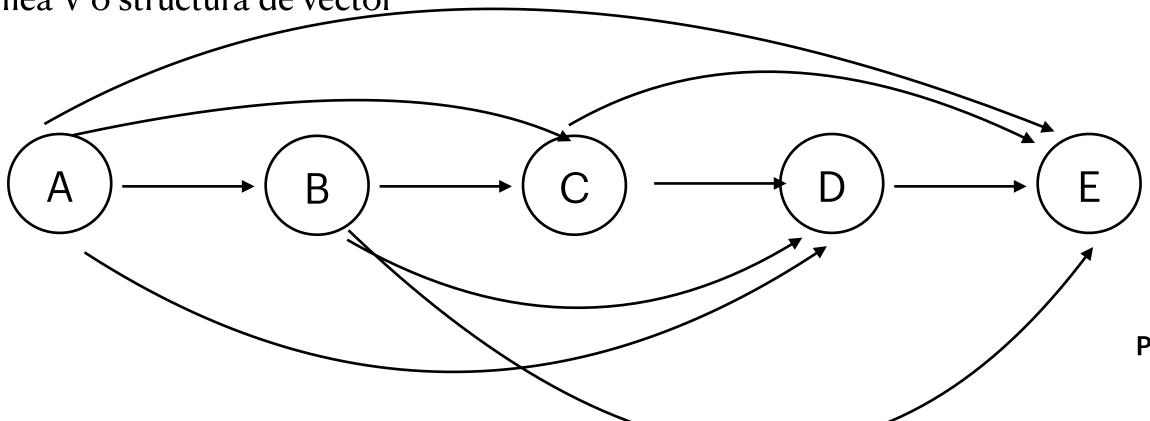
- (1)  $\forall$  a ∈ V => a  $\prec$  a (a nu precede pe el însuși) (antireflexivitate)
- (2) Dacă  $a \prec b$  și  $b \prec c => a \prec c$  (tranzitivitate)
- $(3) \forall a \in V \text{ si } b \in V \text{, dacă } a \neq b \text{ atunci avem fie } a \prec b \text{ fie } b \prec a$

Din (1) și (2) rezultă că relația de precedență nu determină in V bucle închise. Adică nu există o secvență de elemente care se preced două câte două și în care ultimul element este același cu primul. Ex: a < b < c < d < a

Prop. (3) precizează că relația de precedență e definită pentru oricare două elemente a și b a lui V cu singura condiție ca a ≠ b

Fie V o mulțime peste elementele căreia s-a definit relația o relație de precedență care respectă (1), (2) și (3)

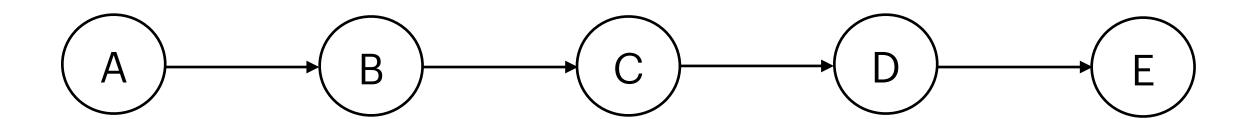
Această relație imprimă peste mulțimea V o structură de vector



Curs 2 - Arbori Generalizați

PAA - S II - 2025 - Răzvan CIOARGĂ, Bogdan ANCA

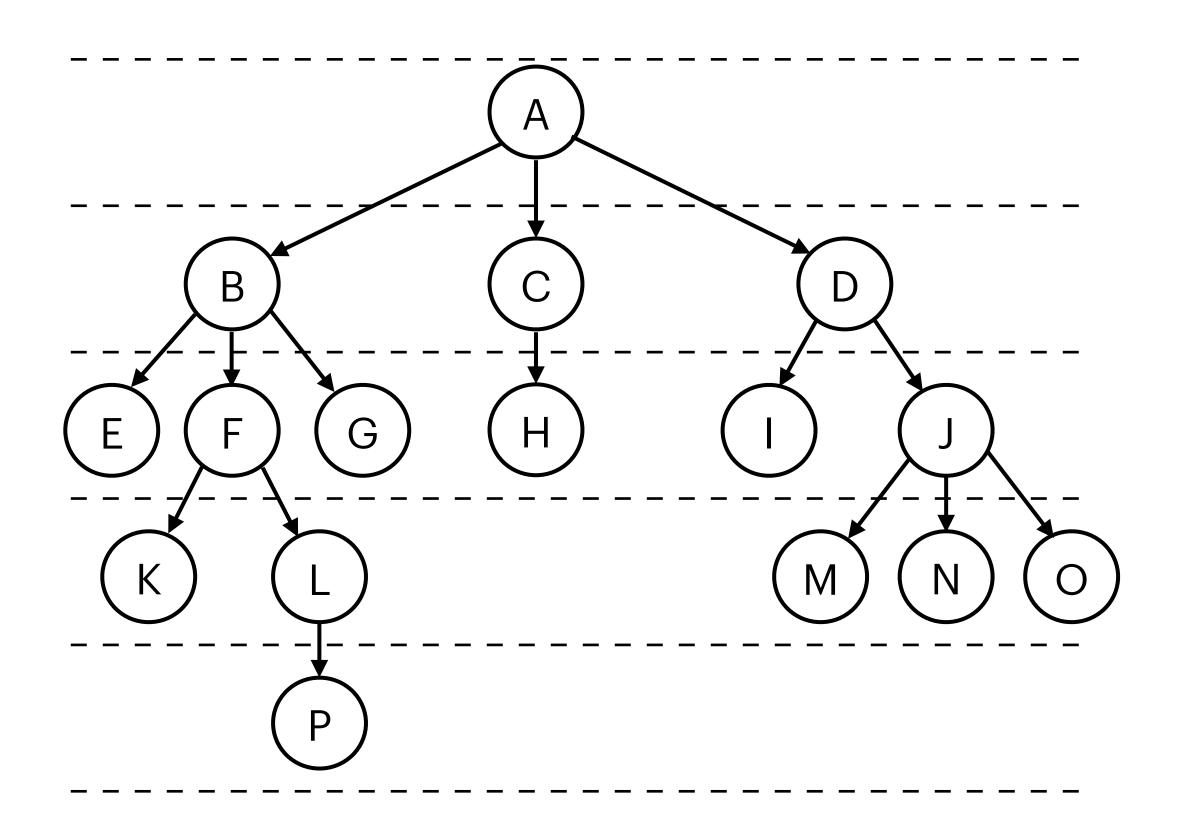
O reprezentare intuitivă a unei structuri vector este prin indicarea relației succesor



Relația succesor se definește cu ajutorul relației de precedență

Dacă între elementele a și b ale lui V este valabilă relația a  $\prec$  b și nu există un c  $\in$  V astfel încât a  $\prec$  c  $\prec$  b atunci se zice că b este **succesorul** lui a

Relația succesor precizează relația precedență fără a fi indentică cu ea



O structură **arbore** se definește prin **generalizarea** structurii **vector** În structura **vector**, toate elementele cu excepția ultimului au exact un succesor

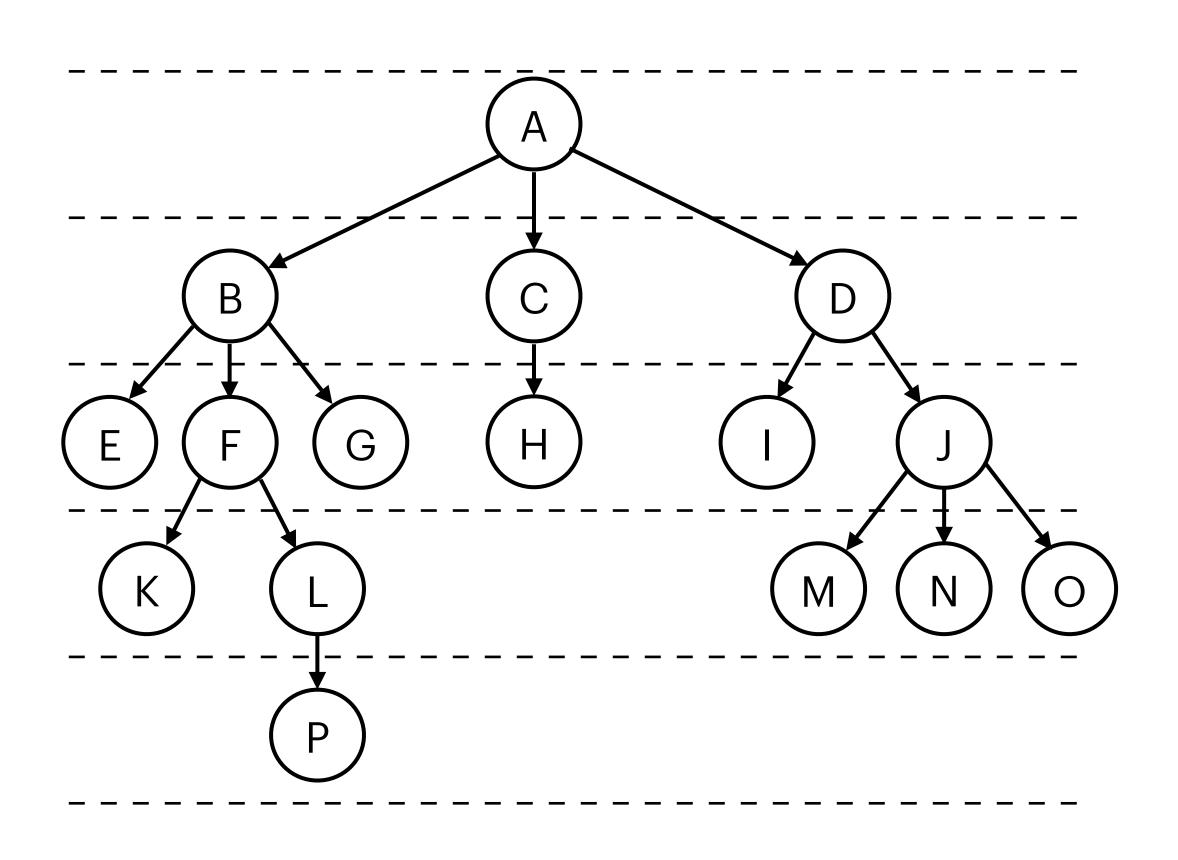
În structurii **arbore** se admite ca fiecare element să aibă un **număr oarecare** de succesori, inclusiv **zero**, cu restricția ca două elemente distincte **să nu aibă același succesor.** 

Relația succesor definește o relație de precedență pe structura arbore

În figură avem b < p, d < n, etc...

Relația de precedență definită pe structura arbore **respectă** proprietățile (1) și (2) dar **nu satisface** (3).

Relația de precedență definită pe structura arbore e definită doar pe o parte a perechilor de elemente ale arborelui. Deci e o **relație parțială.** 



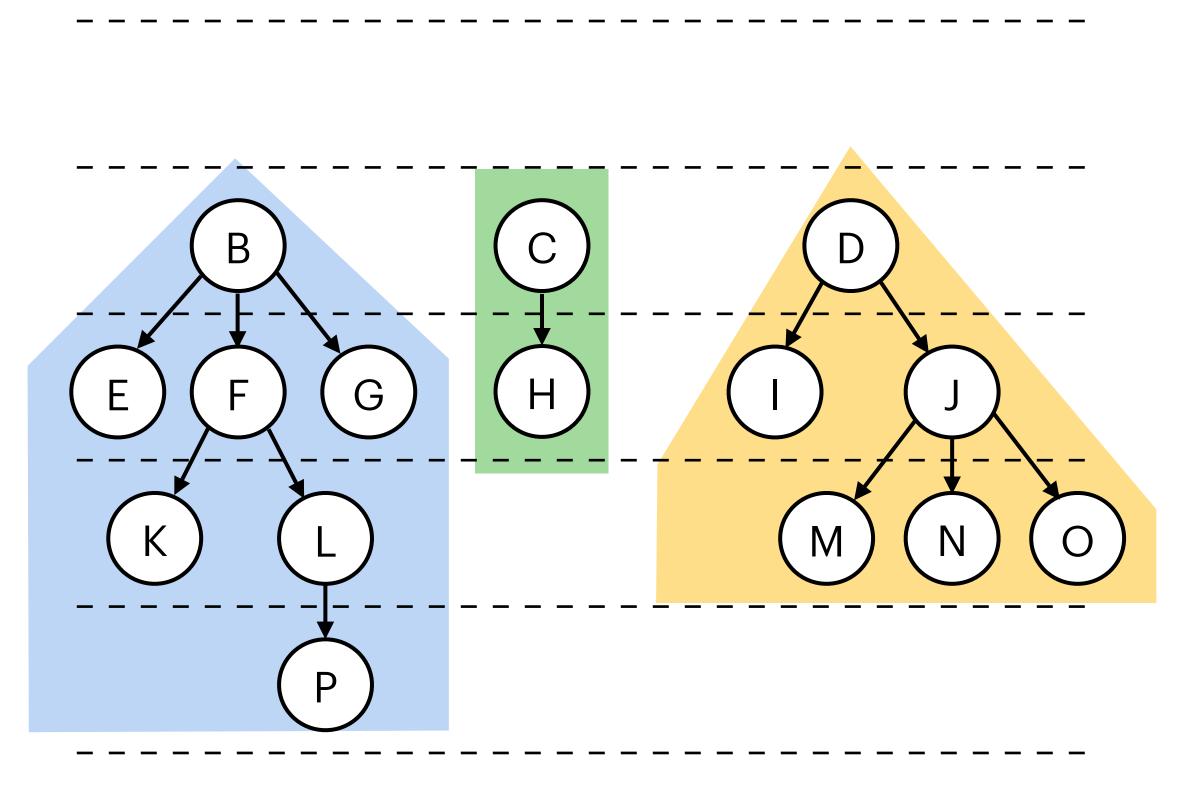
O structură arbore se definește ca o mulțime A de n ≥ o noduri de același tip, peste care s-a definit o relație de precedență având proprietățile (1) și (2) precum și următoarele două proprietăți:

- (3) ∀ b, c ∈ A astfel încât b ⊀ c și c ⊀ b dacă b ≺ d și c ≺ e atunci d ≠ e Adică două elemente oarecare între care **nu** există relația de precedență **nu pot** avea același succesor
- (4) Dacă A nu este vidă (n > 0) atunci există un element numit rădăcină, care precede toate celelalte elemente.

#### Definiție alternativă:

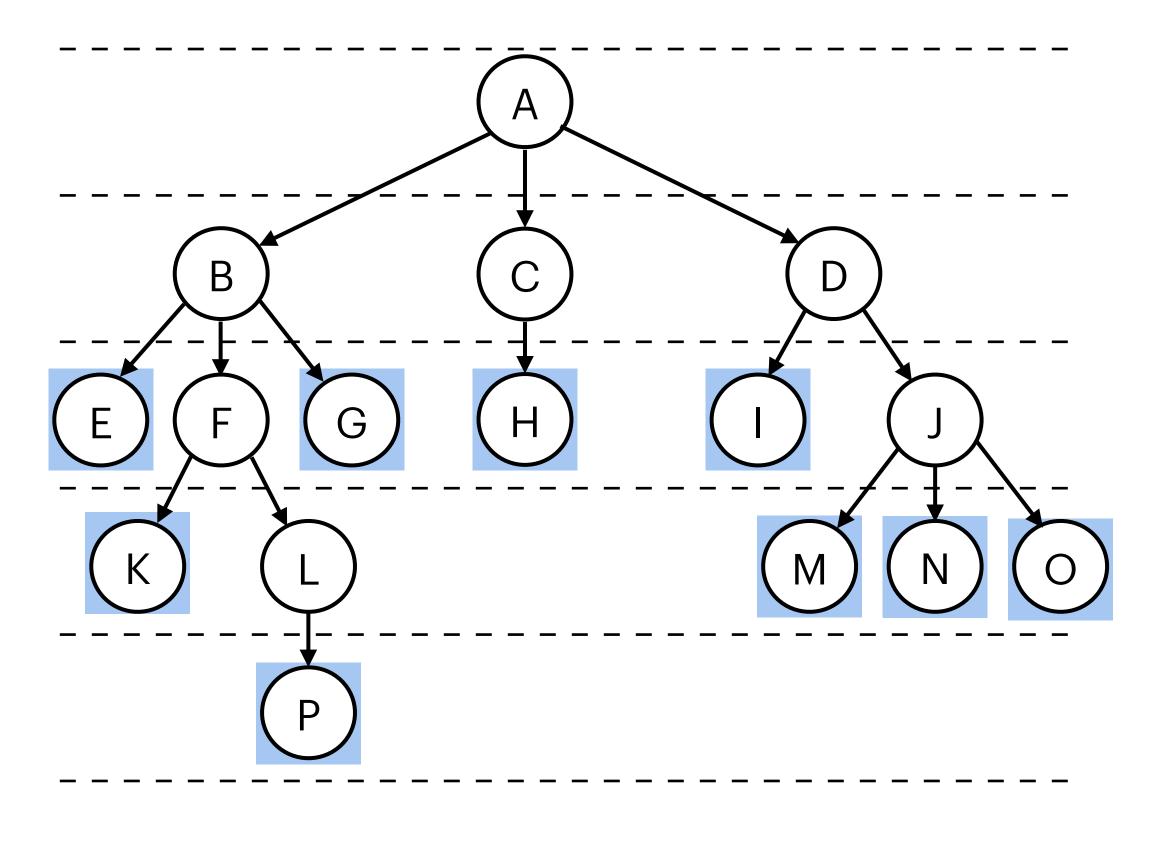
Prin **arbore** se înțelege o mulțime de  $n \ge 0$  noduri **de același tip**, care dacă nu este vidă atunci are un anumit nod numit **rădăcină**, iar restul nodurilor formează un număr finit de arbori, **doi câte doi disjuncți.** 

Structura definită e una recursivă.



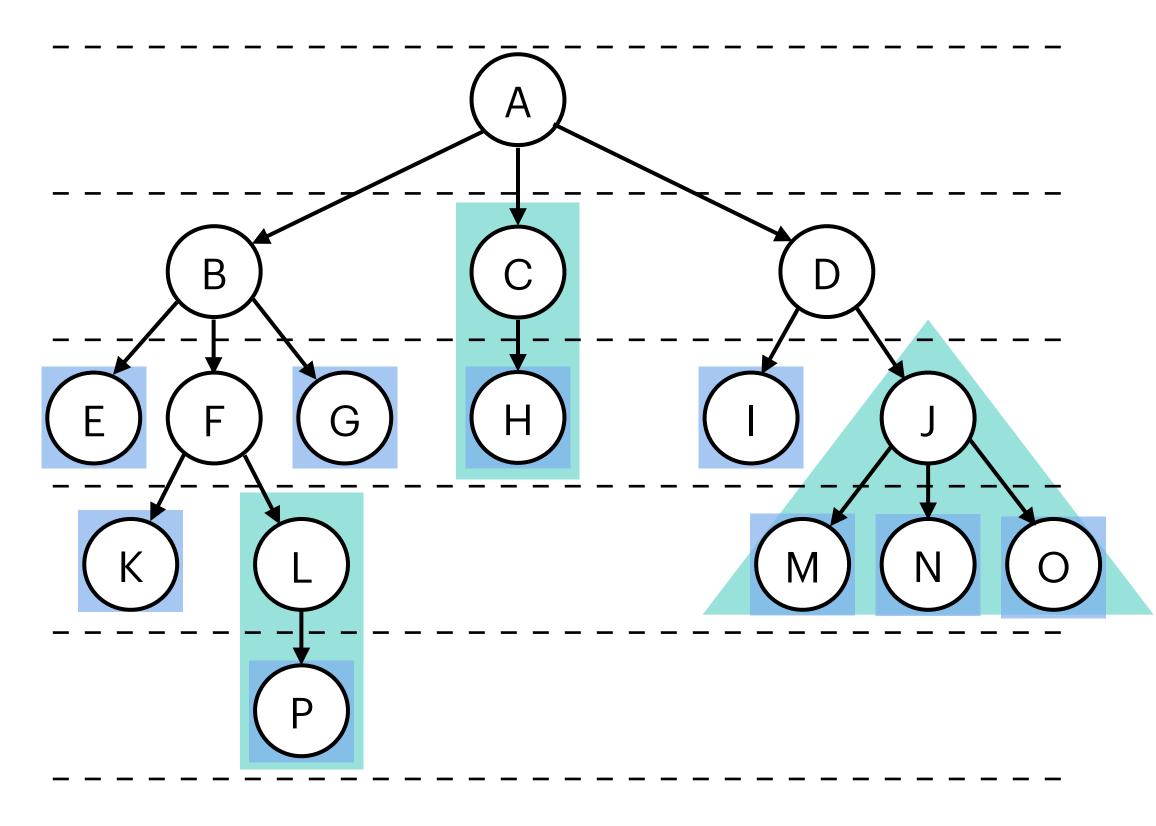
#### Subarborii

sunt arborii în care se descompune un arbore prin îndepărtarea rădăcinii



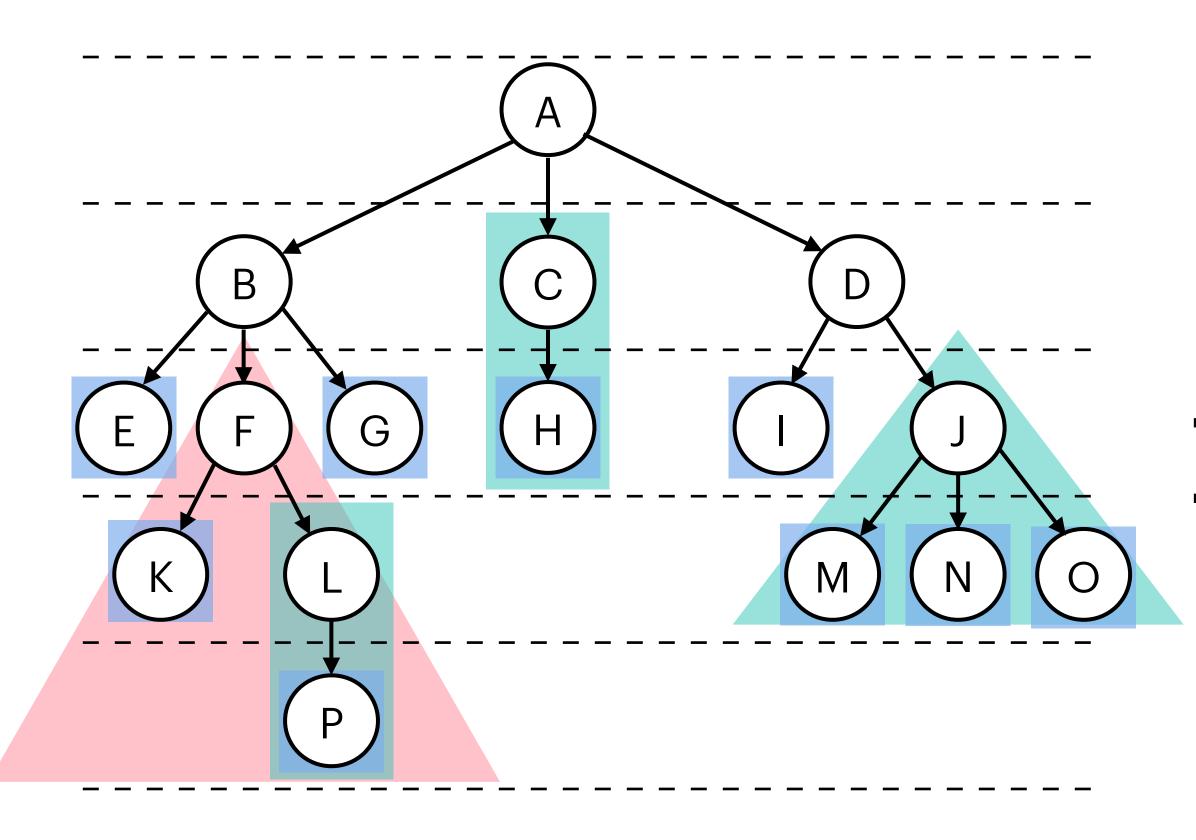
## Arbori parțiali

- →un arbore parțial NU este întotdeauna un subarbore
- →orice subarbore este întotdeauna și arbore parțial



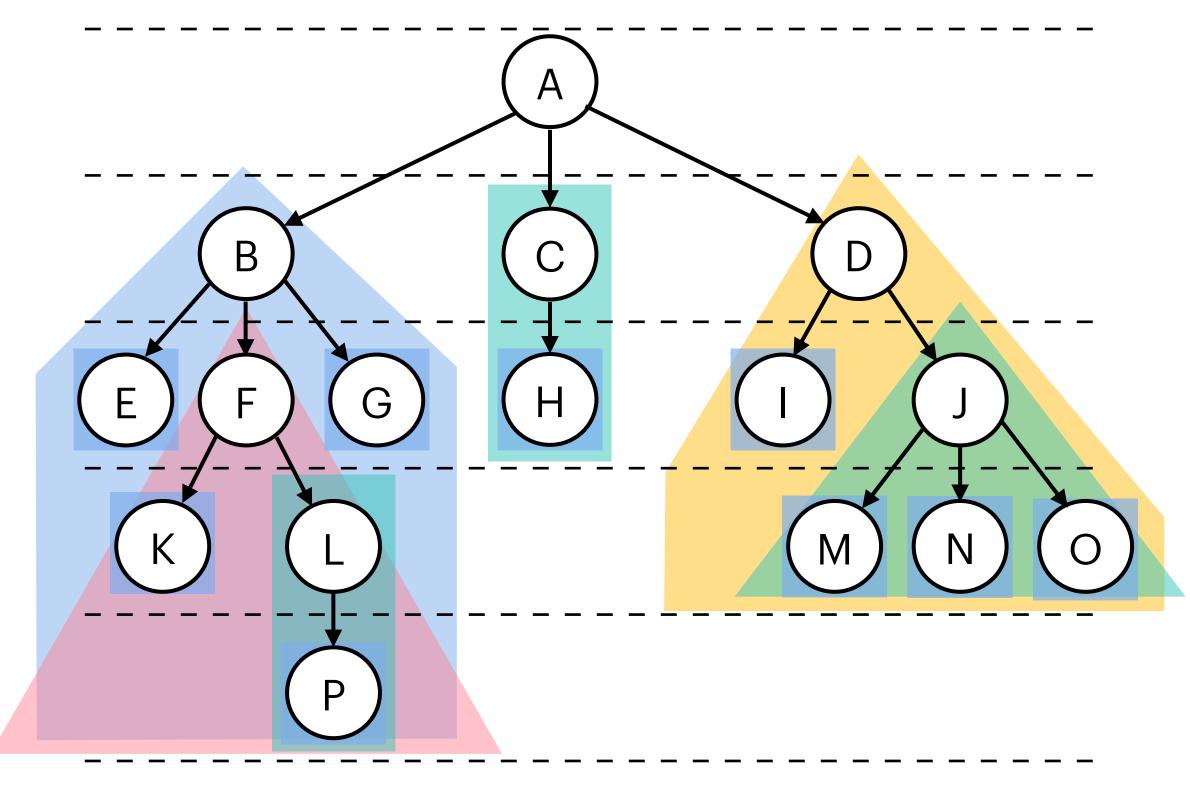
## Arbori parțiali

- →un arbore parțial NU este întotdeauna un subarbore
- →orice subarbore este întotdeauna și arbore parțial



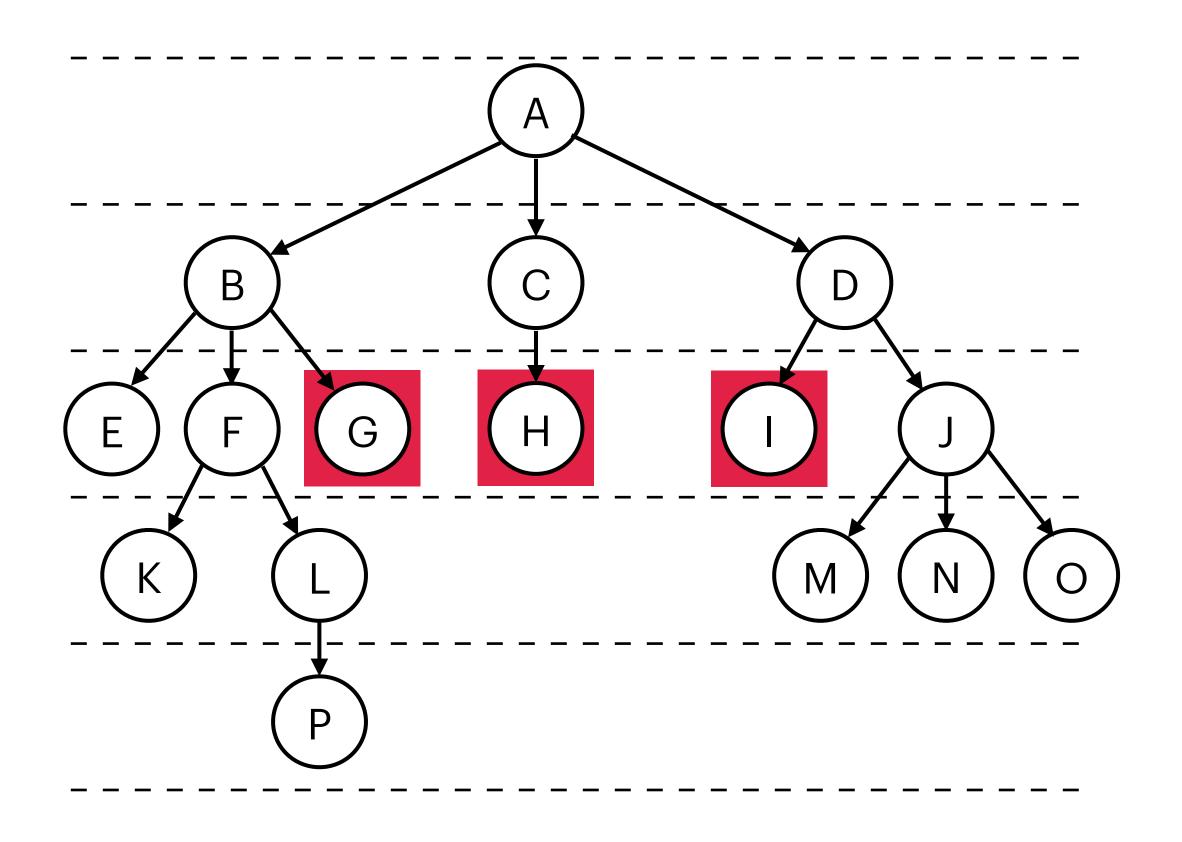
## Arbori parțiali

- →un arbore parțial NU este întotdeauna un subarbore
- →orice subarbore este întotdeauna și arbore parțial



## Arbori parțiali

- →un arbore parțial NU este întotdeauna un subarbore
- →orice subarbore este întotdeauna și arbore parțial



Succesorul unui nod se numește fiul sau urmașul său.

B, C, D sunt fii lui A

K, L sunt fii lui F

Dacă un nod are fii atunci el se numește **tatăl** sau **părintele** acestora.

J este tatăl nodurilor M, N, O

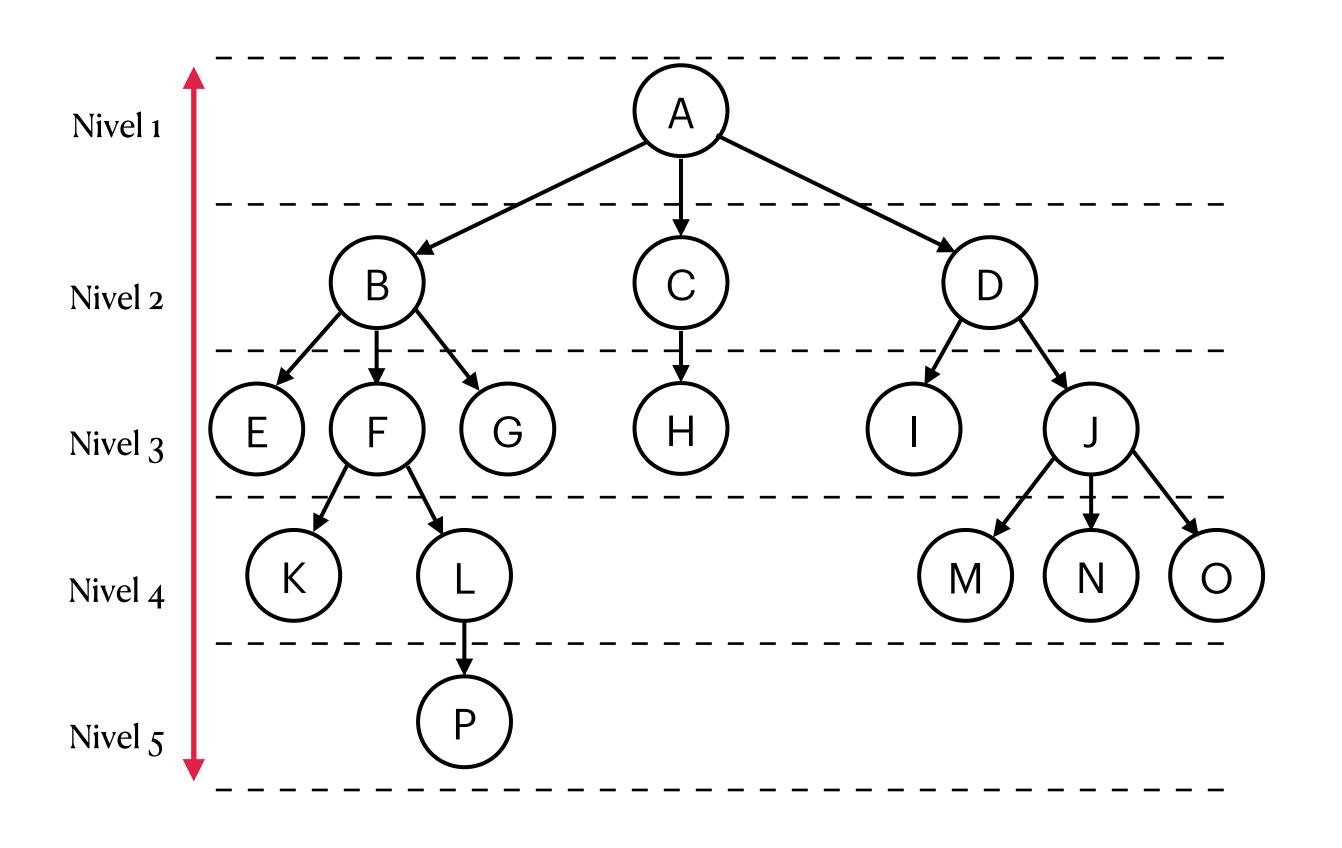
L este tatăl nodului P

Dacă un nod are mai mulți fii, aceștia se numesc frați între ei.

B, C, D sunt frați

K, L sunt frați

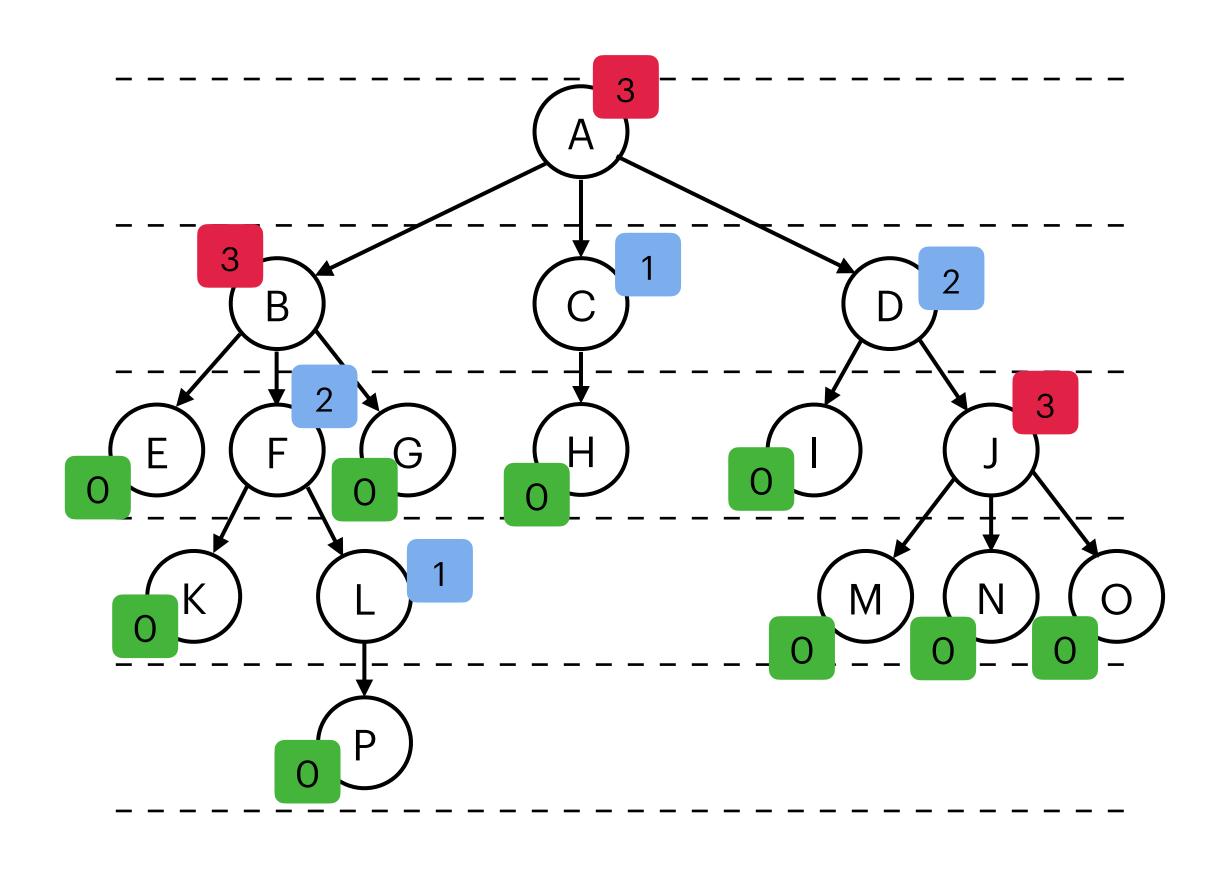
G, H, I NU sunt frați



#### Niveluri

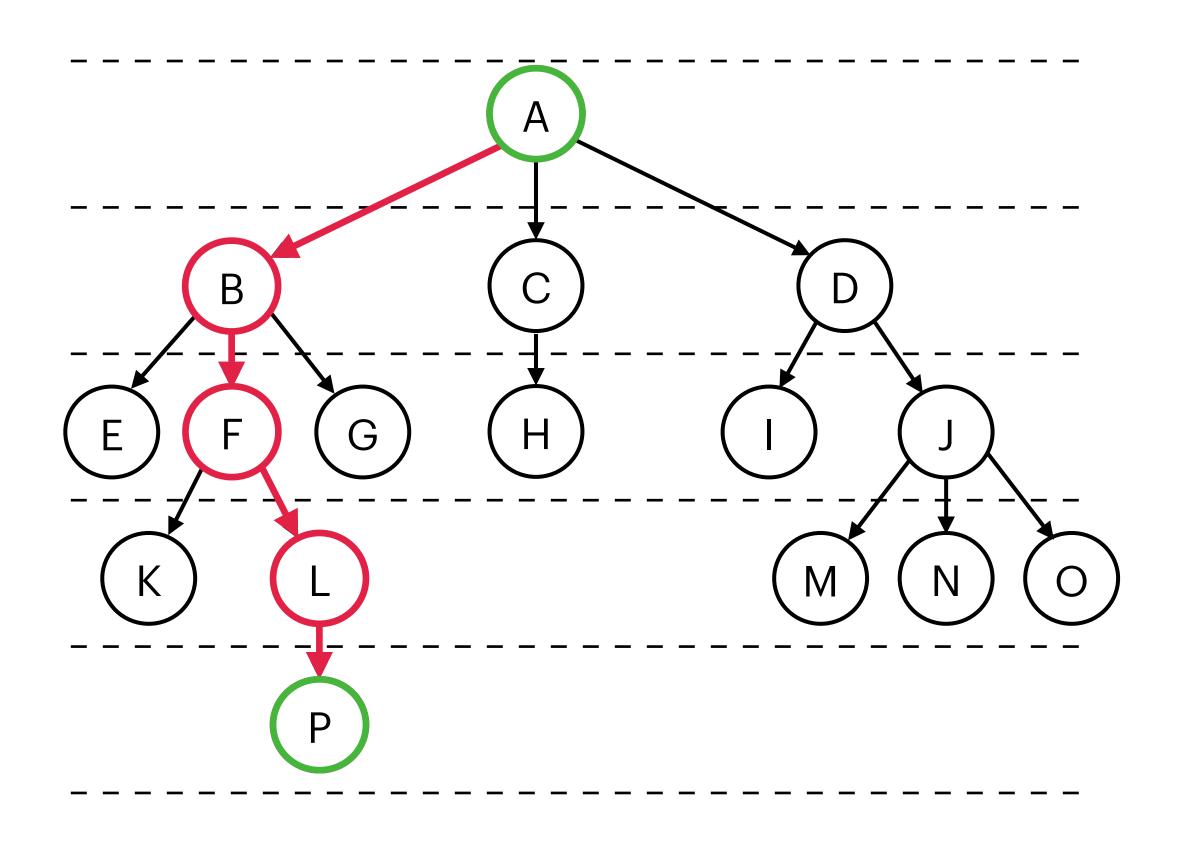
Rădăcina formează nivelul 1 Fii rădăcinii formează nivelul 2 Fii tuturor nodurilor nivelului n formeaza nivelul n+1

Nivelul maxim al nodurilor se numește înălțimea arborelui



#### Gradul

Numărul fiilor unui nod definește **gradul nodului** respectiv Un nod de grad o (zero) se mai numește **nod terminal** sau **frunză Gradul arborelui** este gradul nodului cu grad maxim



#### **Drum / Cale**

Fie  $n_1$ ,  $n_2$ , ...,  $n_k$  o secvență de noduri ale unui arbore Dacă  $n_i$  este părintele  $n_{i+1}$  pentru oricare 1 <= i <= kSecvența  $n_1$ ,  $n_2$ , ...,  $n_k$  se numește drum sau cale de la nodul  $n_1$  la nodul  $n_k$ 

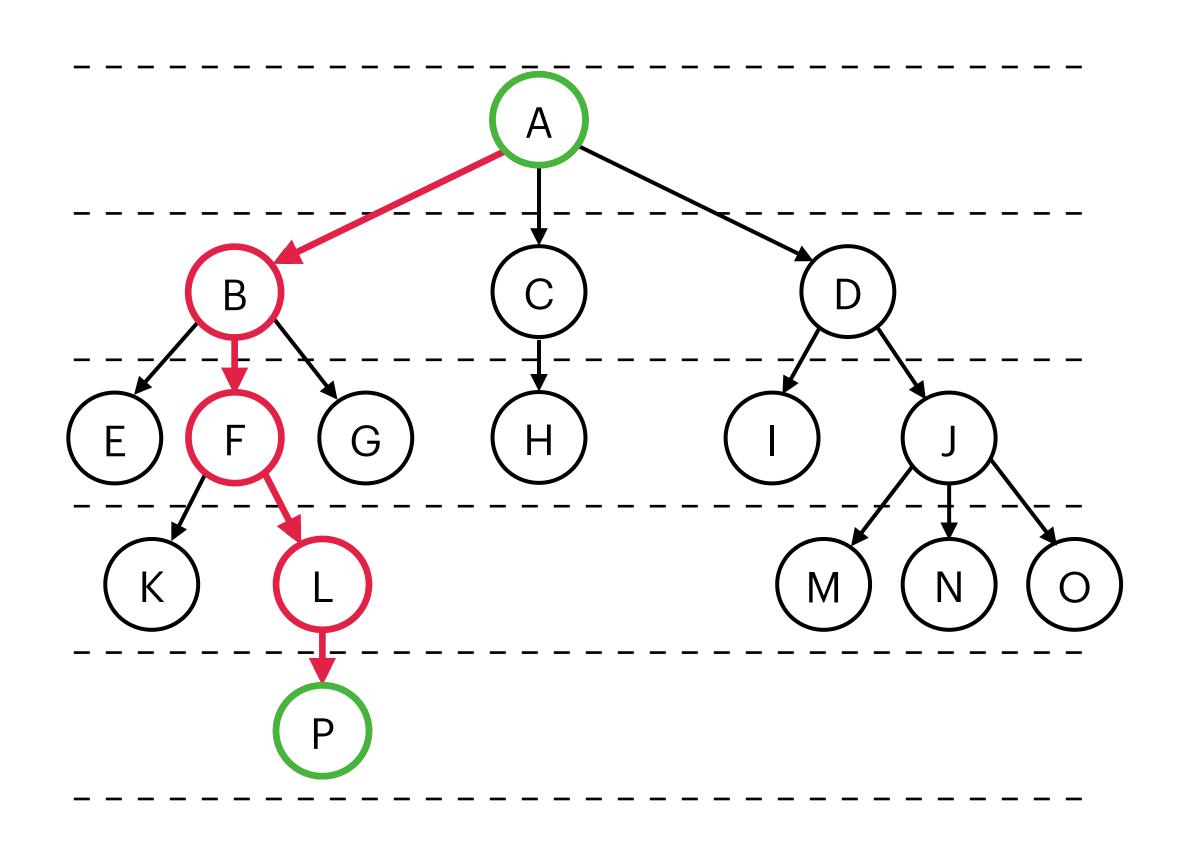
**Lungimea drumului** = numărul de ramuri care trebuiesc traversate pentru a ajunge de la  $n_1$  la  $n_k$ 

Radăcina are lungimea drumului = 1

Dacă există un drum de la nodul n<sub>1</sub> la nodul n<sub>2</sub> atunci

n<sub>1</sub> e strămoș a lui n<sub>2</sub>

n<sub>2</sub> e descendent a lui n<sub>1</sub>



Tatăl / părintele unui nod este strămoșul său direct (predecesor)

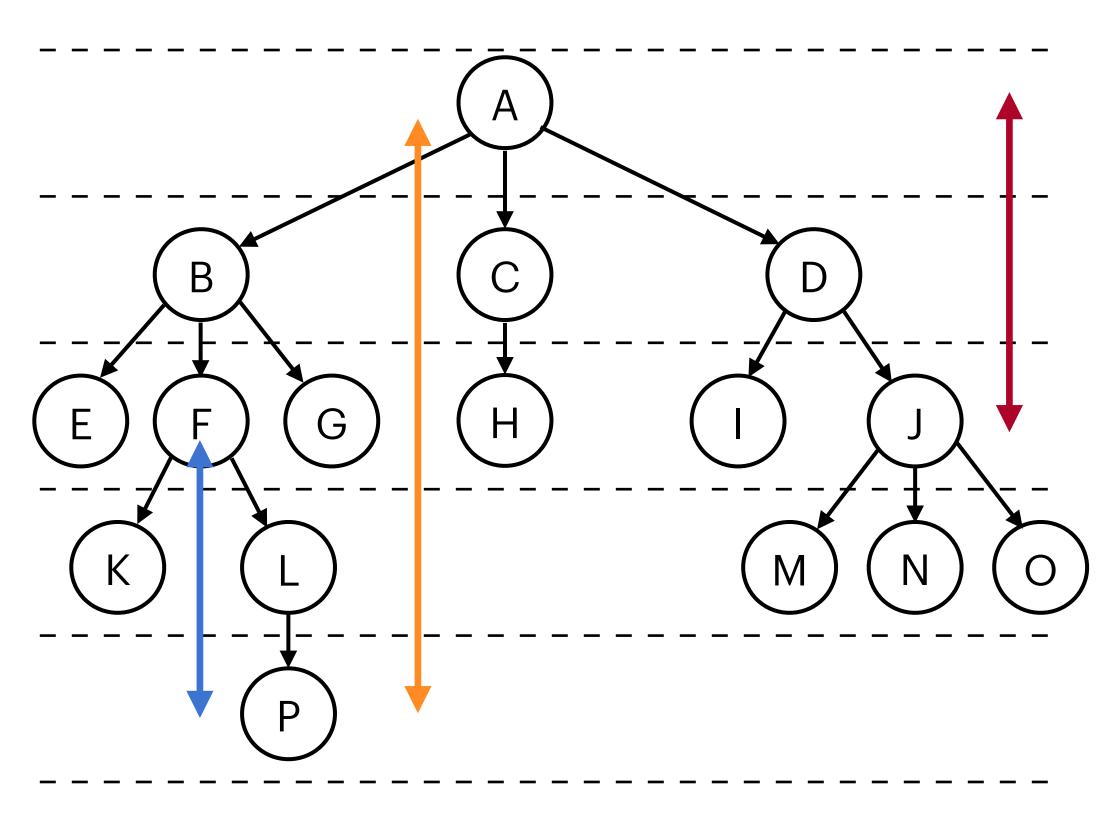
Fiul unui nod este descendentul său direct (succesor)

**Strămoș propriu** = strămoș al unui nod, diferit de nodul însuși

**Descendent propriu** = descendent al unui nod, diferit de nodul însuși

Rădăcina e singurul nod fără nici un strămoș propriu

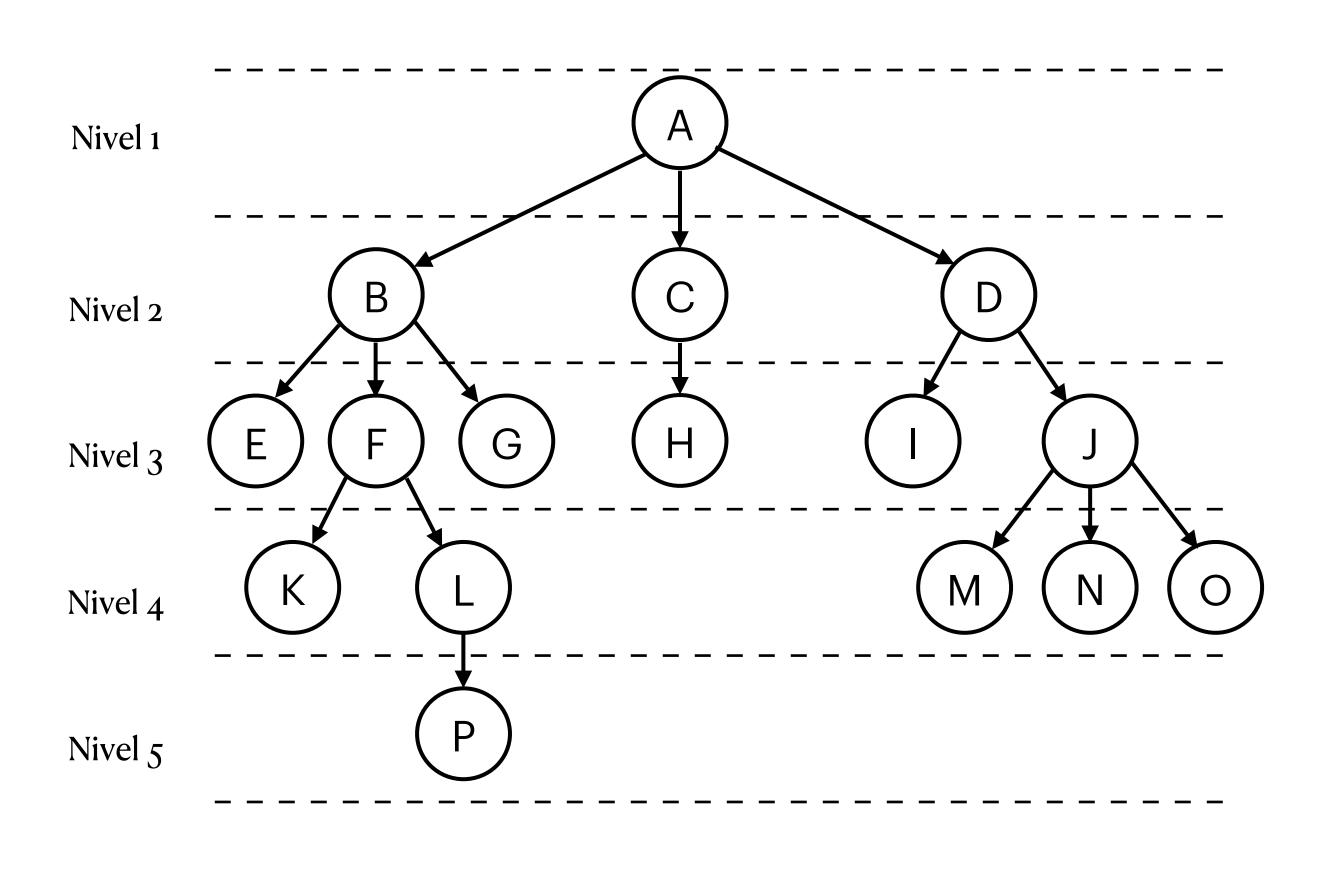
Un **nod frunză** / **terminal** nu are descendenți proprii



Înălțimea unui nod este lungimea celui mai lung drum de la nodul respectiv până la un nod terminal

Înălțimea arborelui este înălțimea nodului rădăcină

Adâncimea unui nod este lungimea drumului (unic) de la acel nod până la rădăcină.



Lungimea drumului unui arbore aka. lungimea drumului intern

suma lungimilor drumurilor tuturor nodurilor și rădăcină

Lungimea medie a drumului intern al unui arbore, P<sub>I</sub>

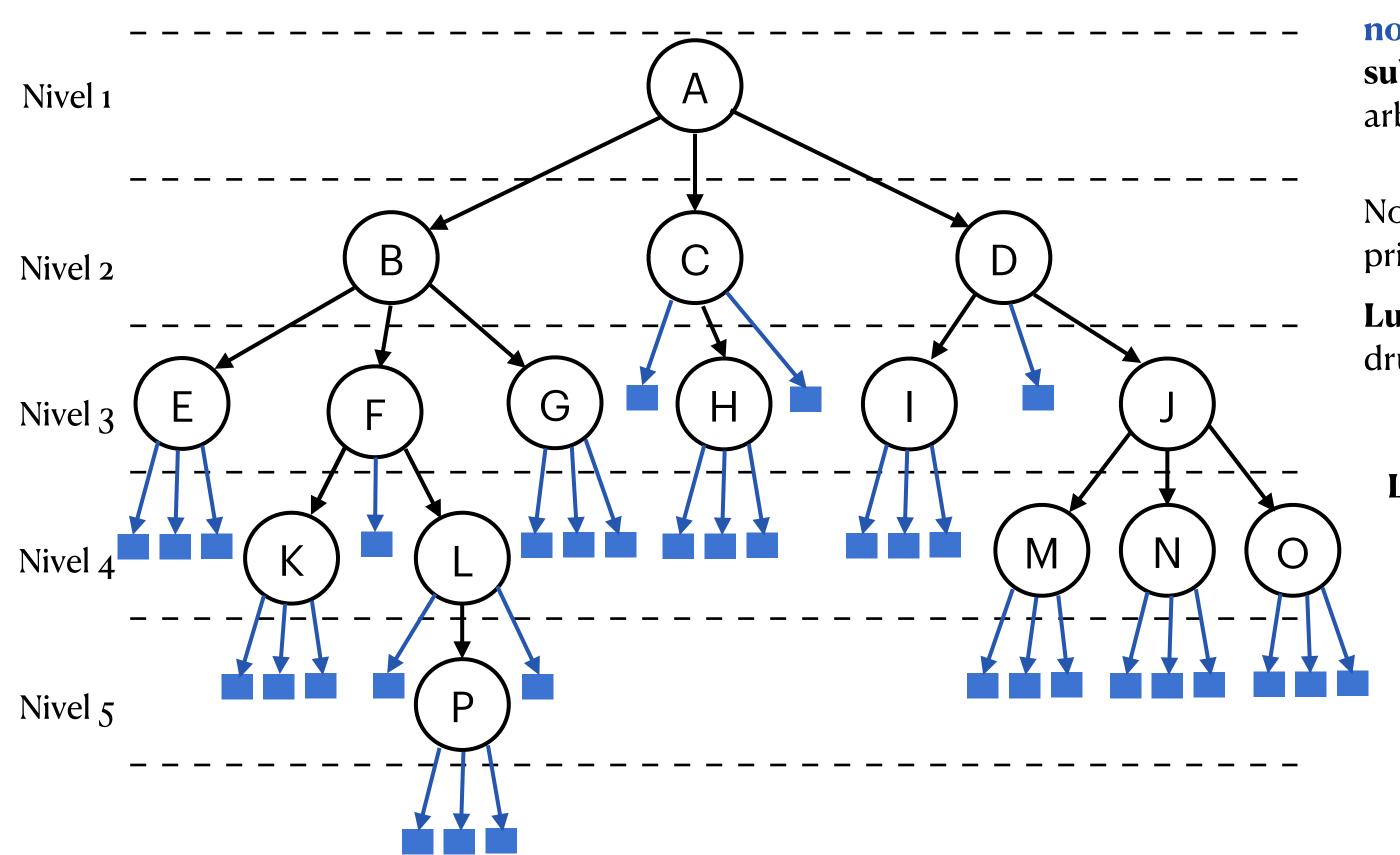
$$P_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^h n_i \cdot i$$

n - numărul de noduri

i - nivelul nodului

ni - numărul de noduri pe nivelul i

h - înălțimea arborelui



Pentru definirea **lungimii drumului extern** se adaugă la arbore un **nod special** ori de câte ori se întâlnește în arborele inițial un **subarbore vid** astfel încât toate nodurile să aibă același grad: gradul arborelui.

Nodurile speciale care au înlocuit ramurile lipsă nu au descendenți prind definiție

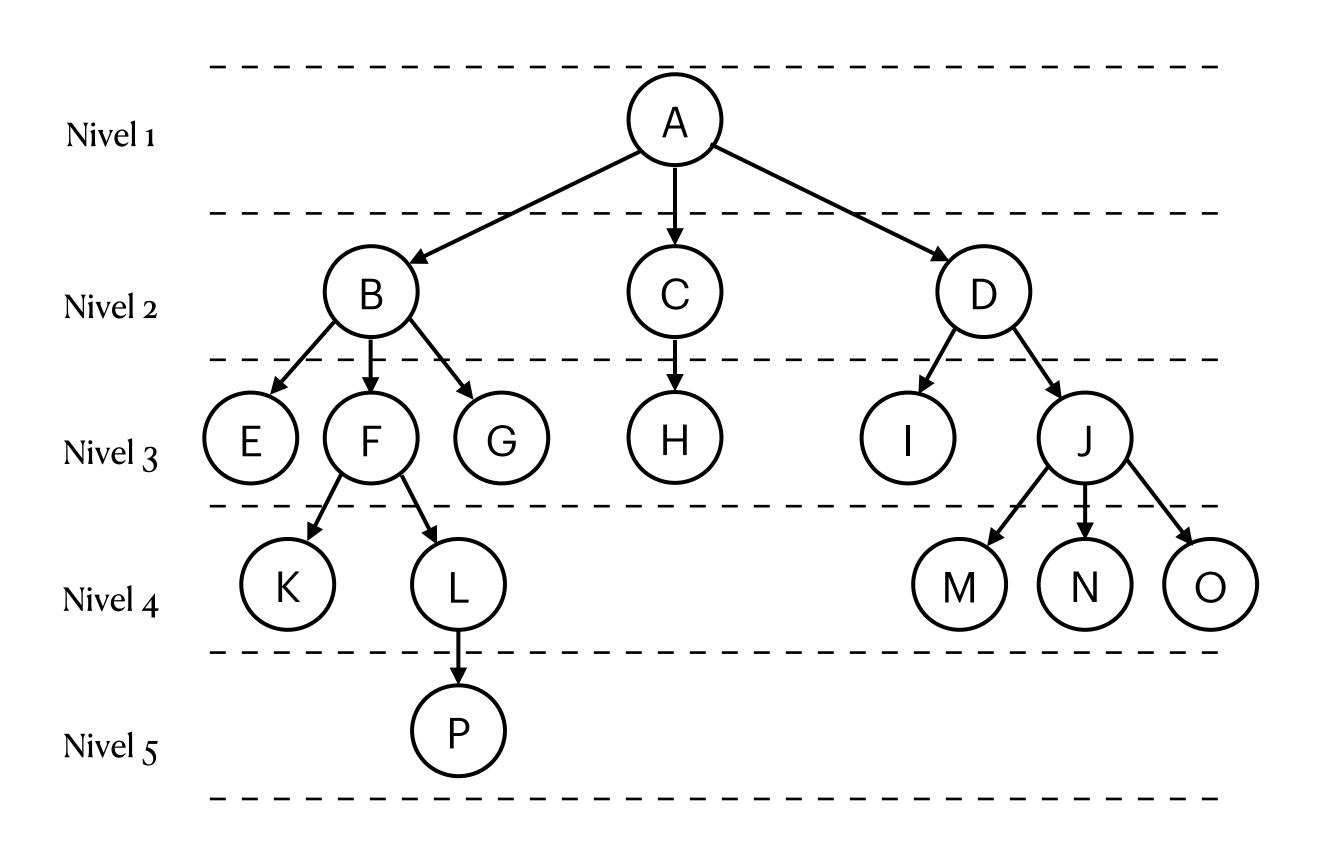
Lungimea drumului extern se definește ca fiind suma lungimilor drumurilor la toate nodurile speciale.

#### Lungimea medie a drumului extern

$$P_E = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{h+1} m_i \cdot i$$

m - numărul total de noduri speciale  $m_i$  - numărul de noduri speciale pe nivelul i i - nivelul

h - înălțimea arborelui



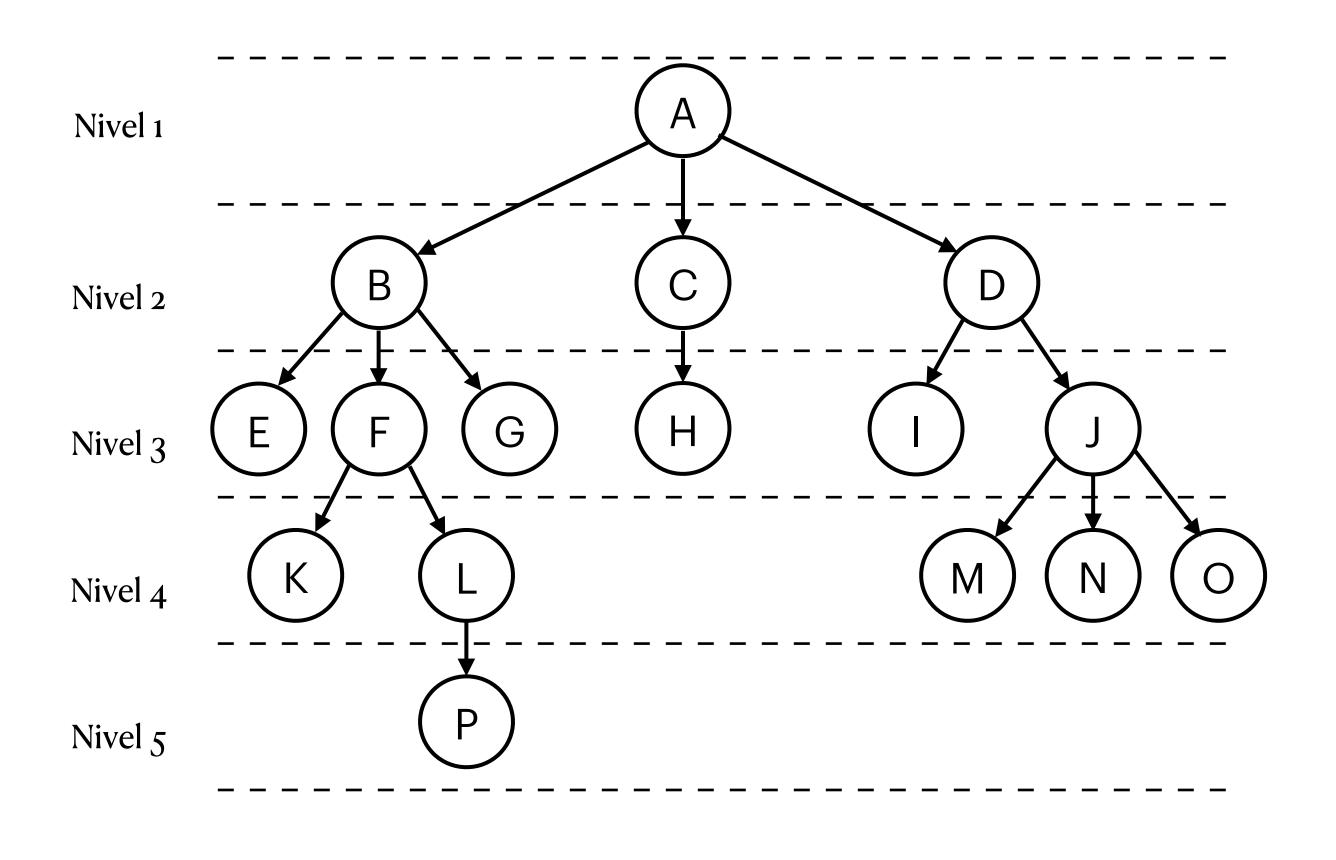
Execuția unei anumite operații asupra tuturor nodurilor arborelui în anumită ordine

Traversarea unui arbore duce la o forma liniarizată a nodurilor

#### Categorii:

Căutarea în adâncime (depth first search)

Căutarea în cuprindere (breadth first search)



#### Principiul căutării în adâncime:

- 1. Parcurgerea "în adâncime" a structurii, prin îndepărtare de punctul de pornire, până acest lucru nu mai este posibil
- 2.Se revine pe drumul parcurs până la următoarea posibilitate de înaintare în adâncime
- 3. Procesul continuă în această manieră până când se parcurge toată structura de arbore.

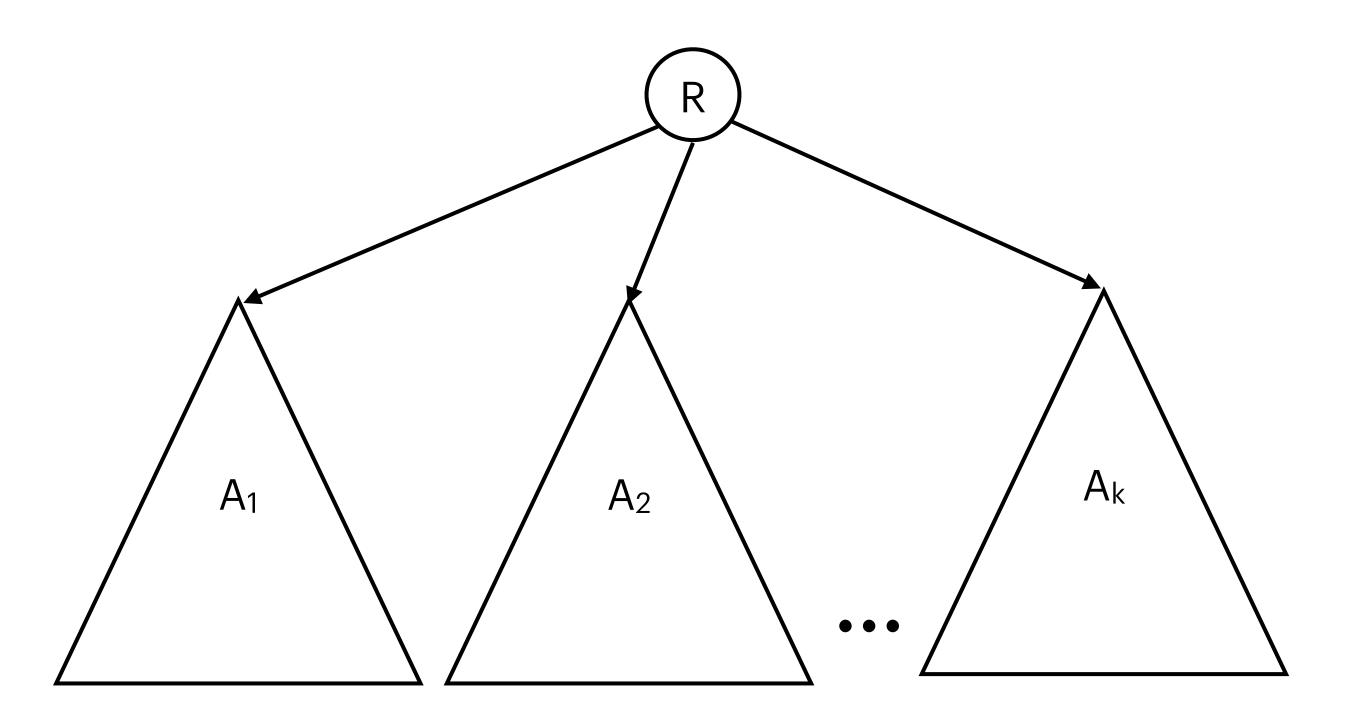
Trei moduri de traversare (liniarizare) bazate pe căutarea în adâncime:

Preordine

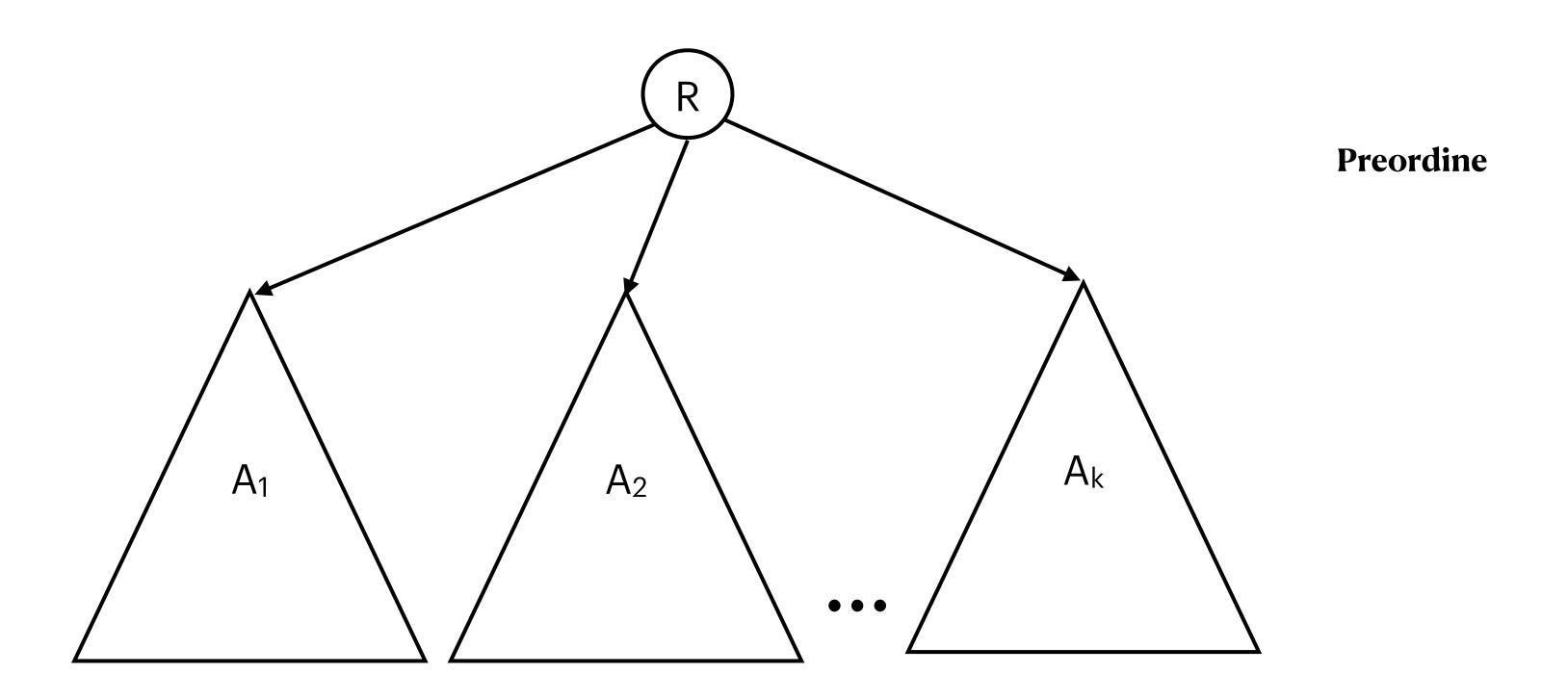
Inordine

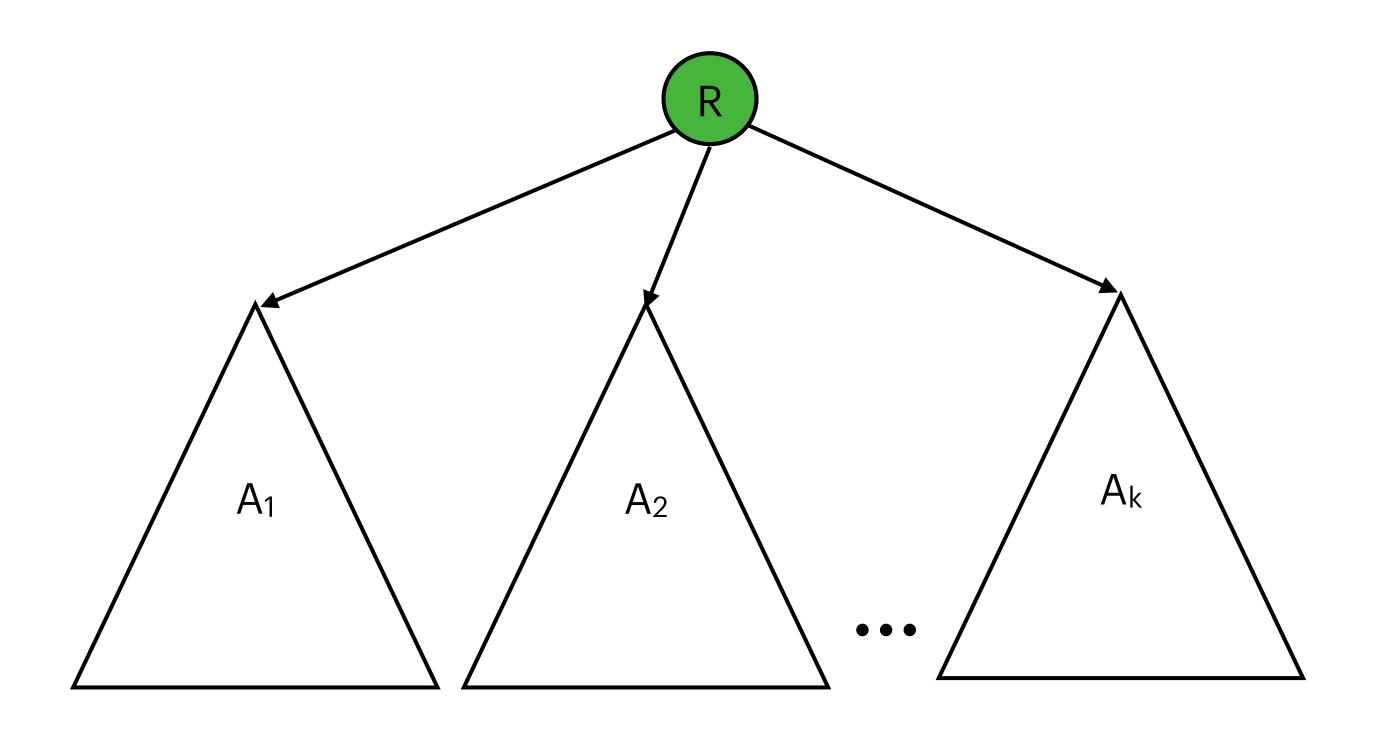
**Postordine** 

Cele 3 modalități de parcurgere se definesc, de regulă, în manieră recursivă, ordonarea unui arbore se definește presupunând că subarborii săi s-au ordonat deja



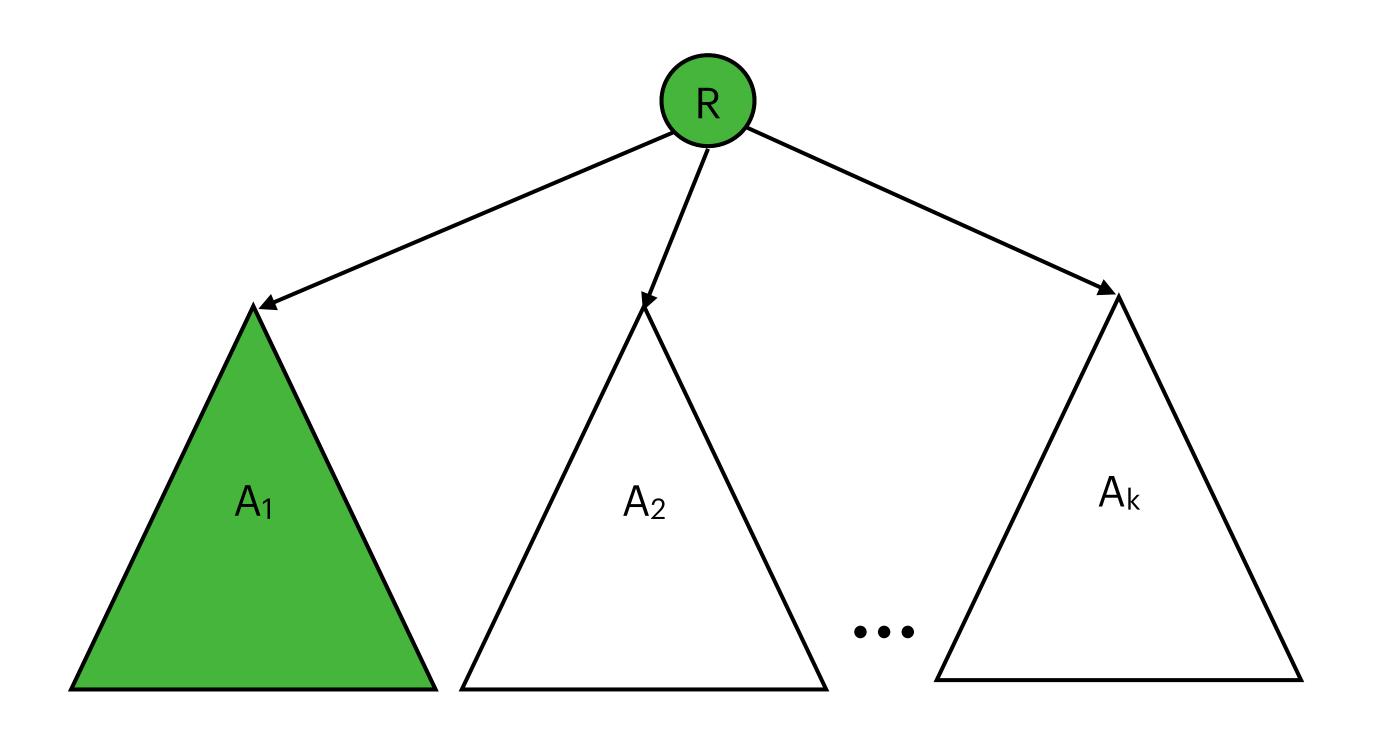
- Dacă arborele A este nul atunci ordonarea lui A în preordine, inordine și postordine se reduce la lista vidă
- Daca A se reduce la un singur nod, atunci nodul însuși reprezită traversarea lui A în oricare din cele 3 moduri
- Pentru restul cazurilor, fie arborele A cu rădăcina R și subarborii  $A_1,\,A_2,\,...,\,A_k$





## Preordine

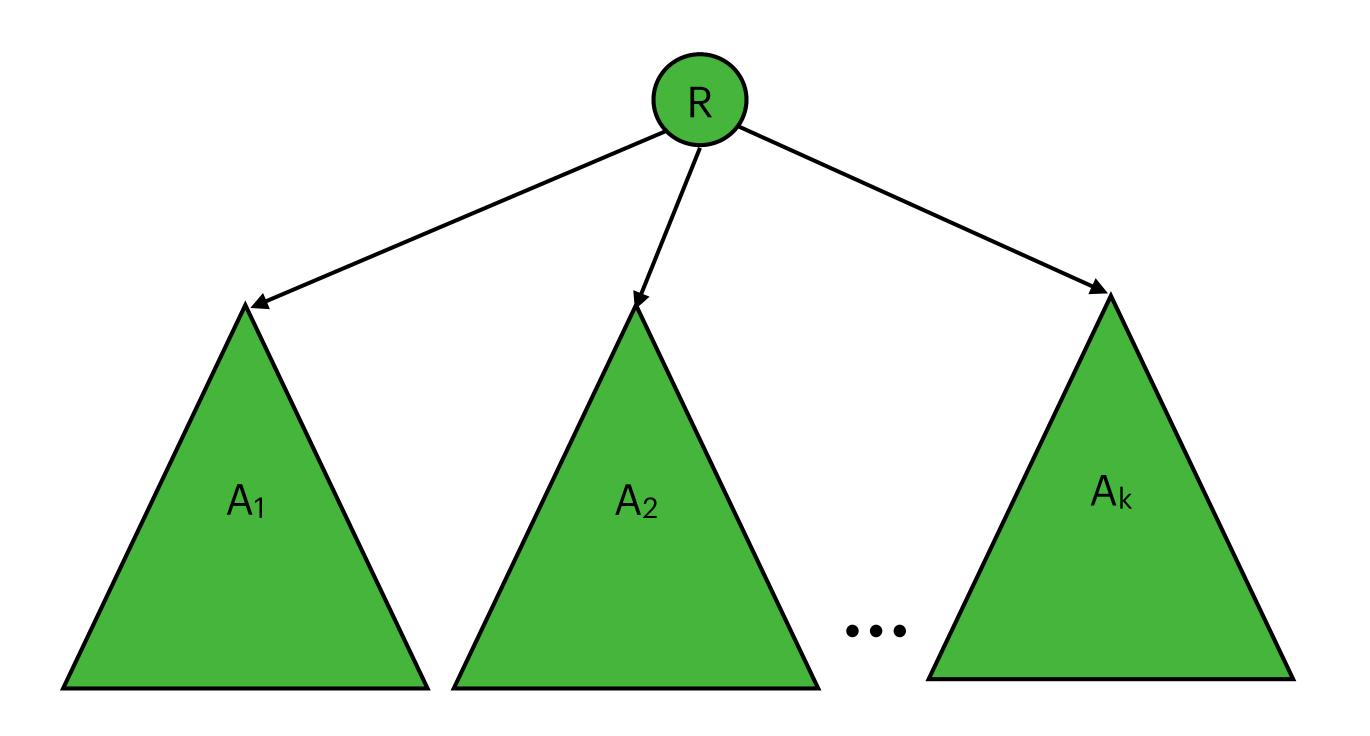
Traversarea rădăcinii R



## Preordine

Traversarea rădăcinii R

Traversarea în preordine a lui A<sub>1</sub>

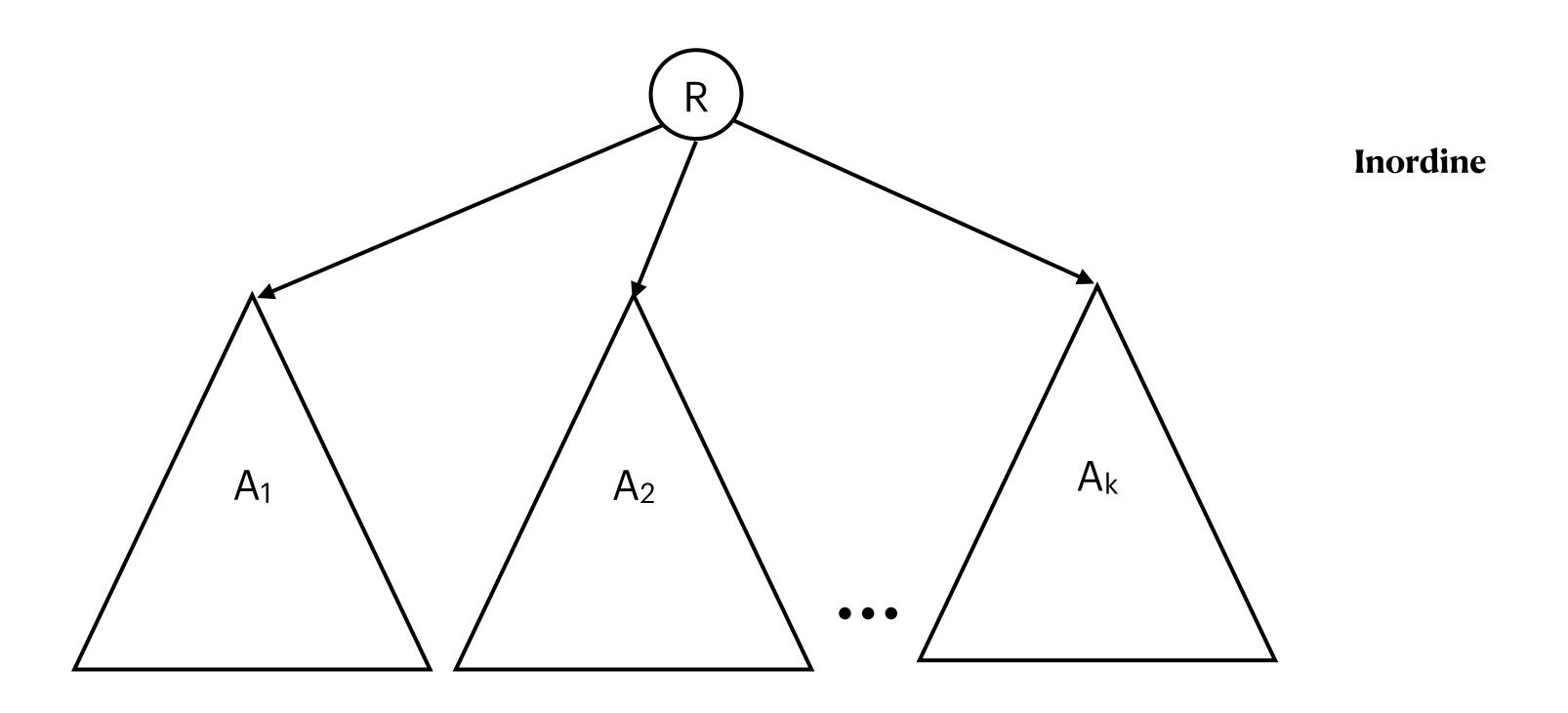


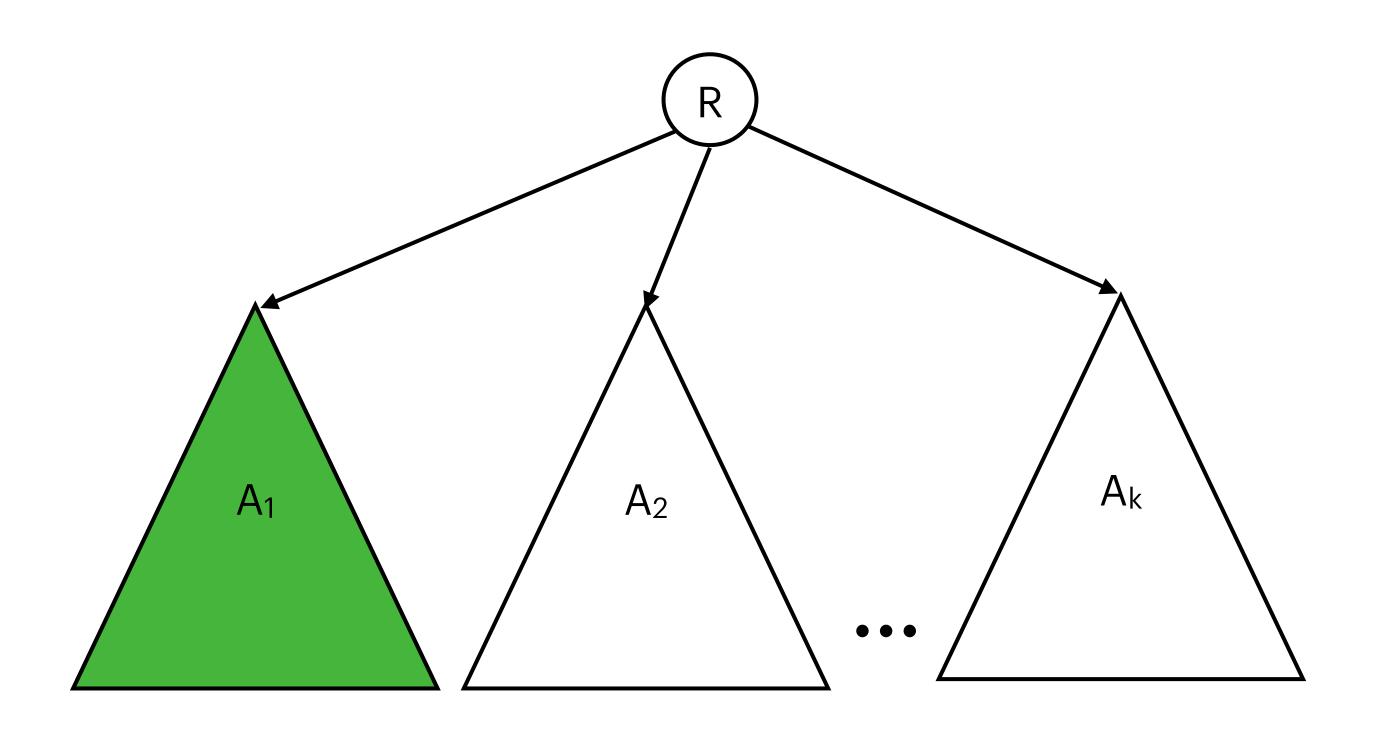
## Preordine

Traversarea rădăcinii R

Traversarea în preordine a lui A<sub>1</sub>

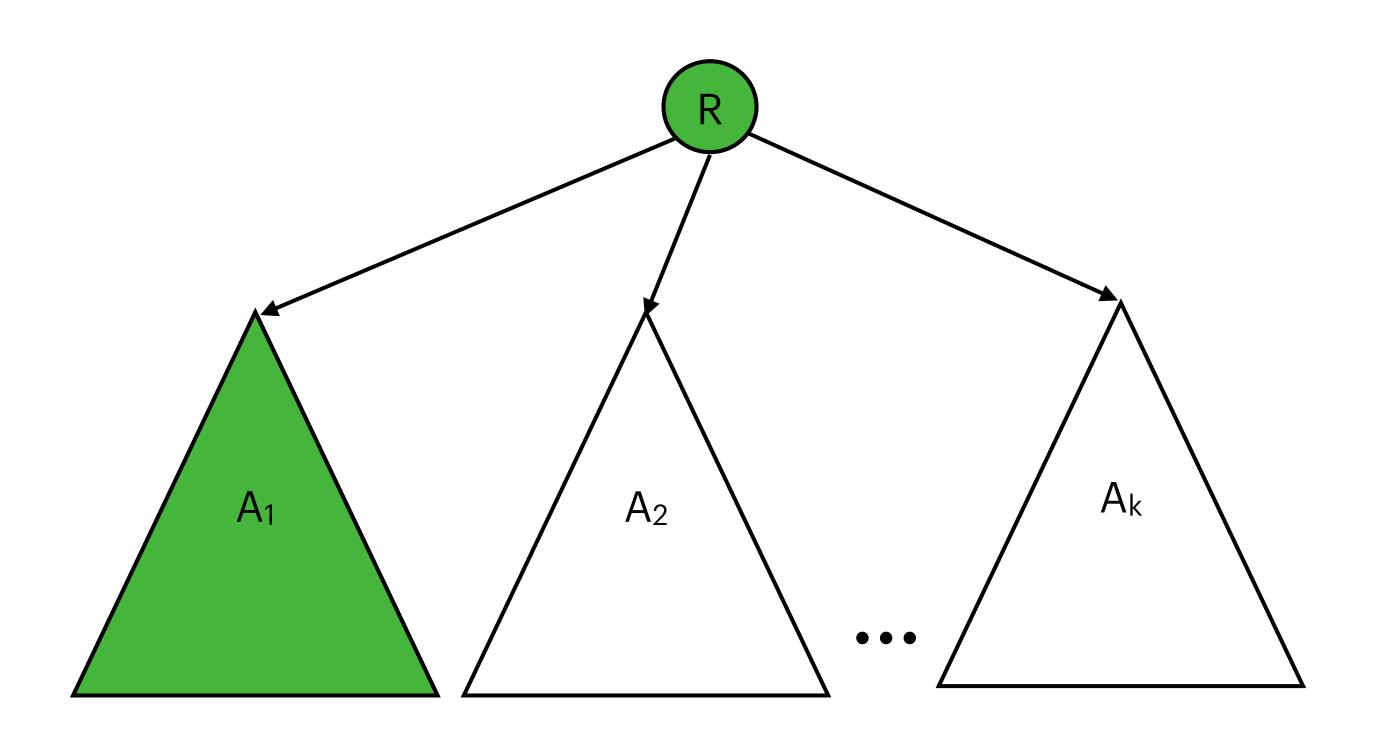
Traversarea în preordine a lui A2, ..., Ak





## Inordine

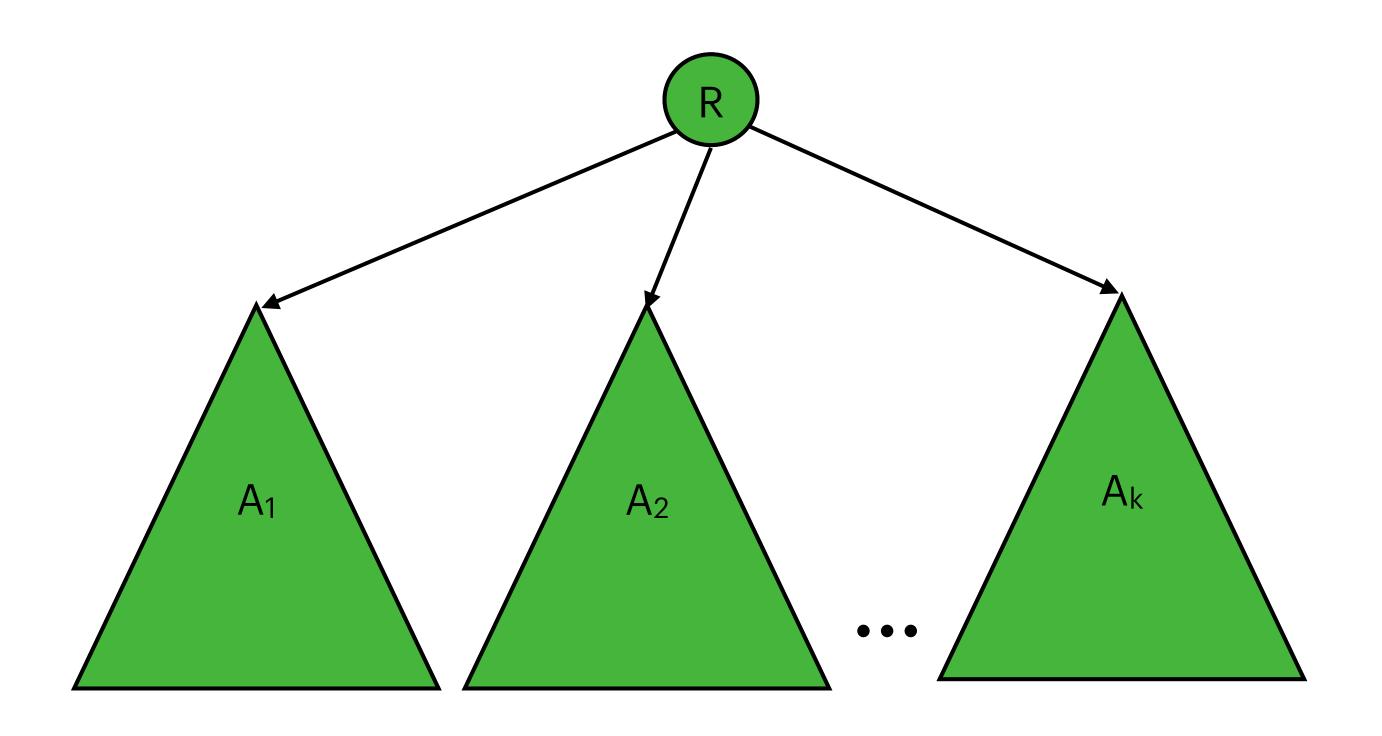
Traversarea în inordine a lui A<sub>1</sub>



## Inordine

Traversarea în inordine a lui A<sub>1</sub>

Traversarea rădăcinii R

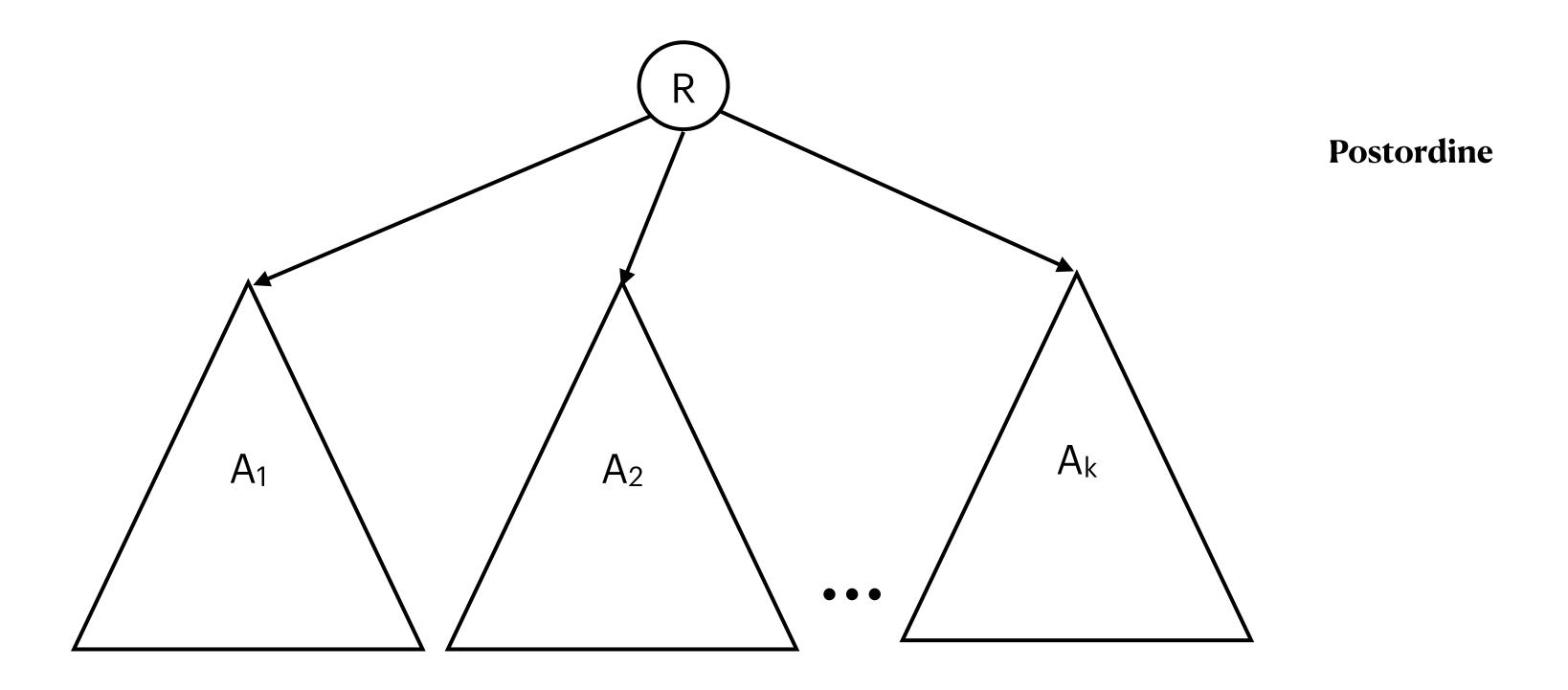


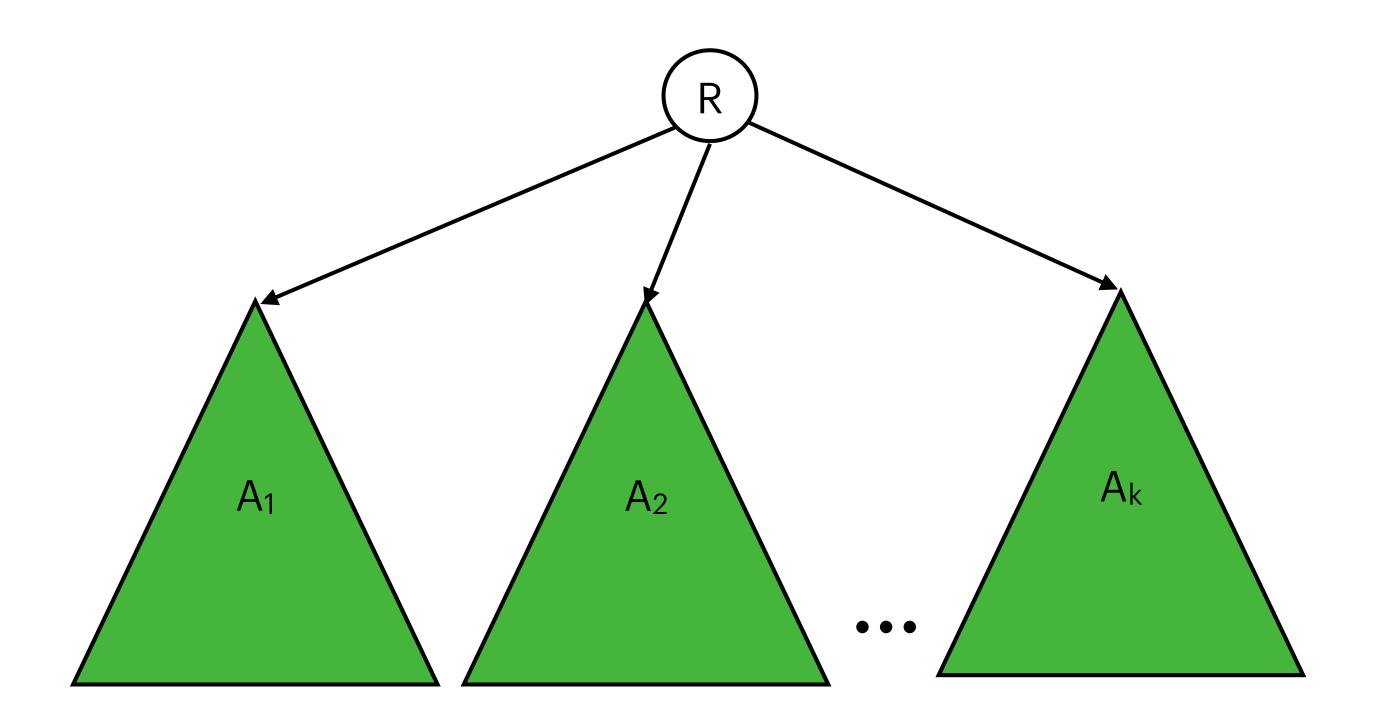
## Inordine

Traversarea în inordine a lui A<sub>1</sub>

Traversarea rădăcinii R

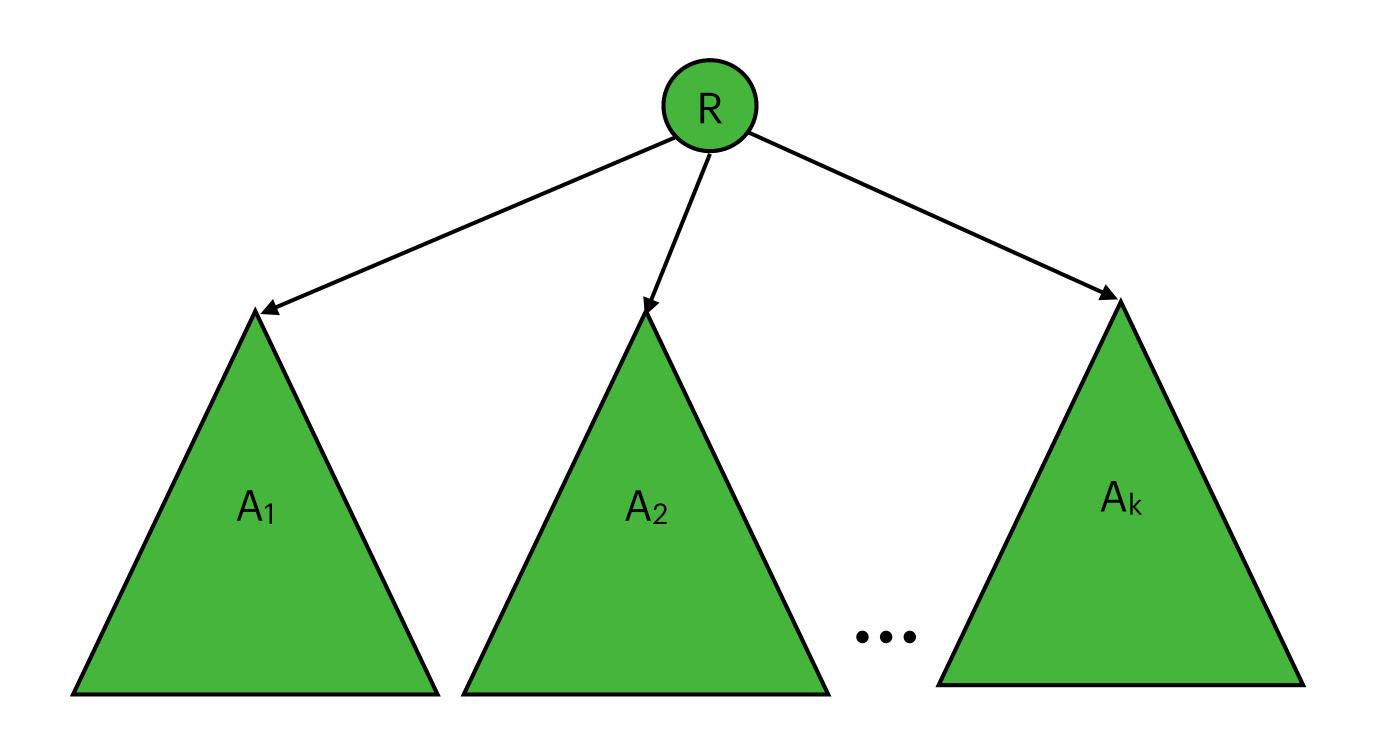
Traversarea în inordine a lui A<sub>2</sub>, ..., A<sub>k</sub>





## Postordine

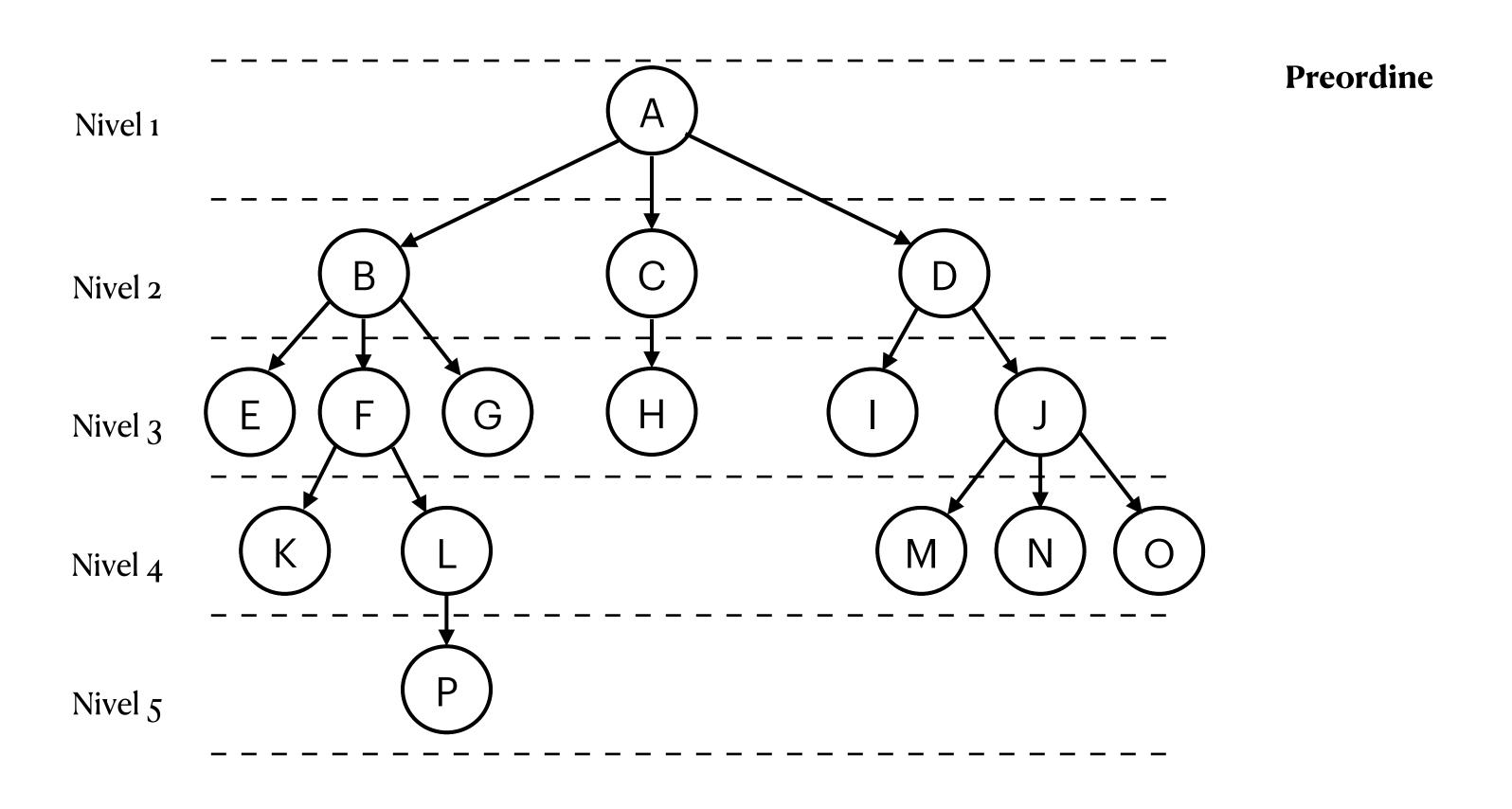
Traversarea în inordine a lui  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_k$ 

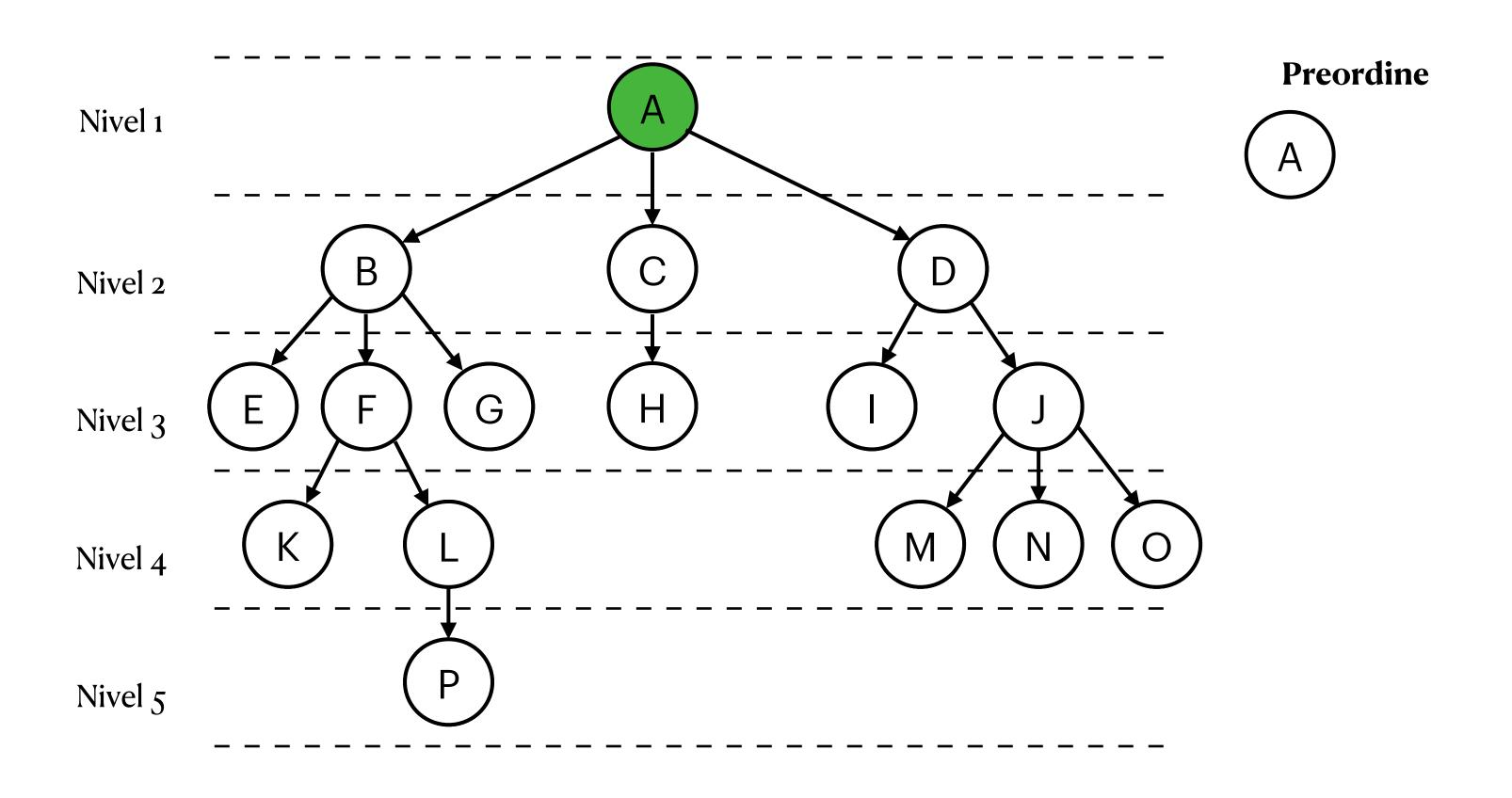


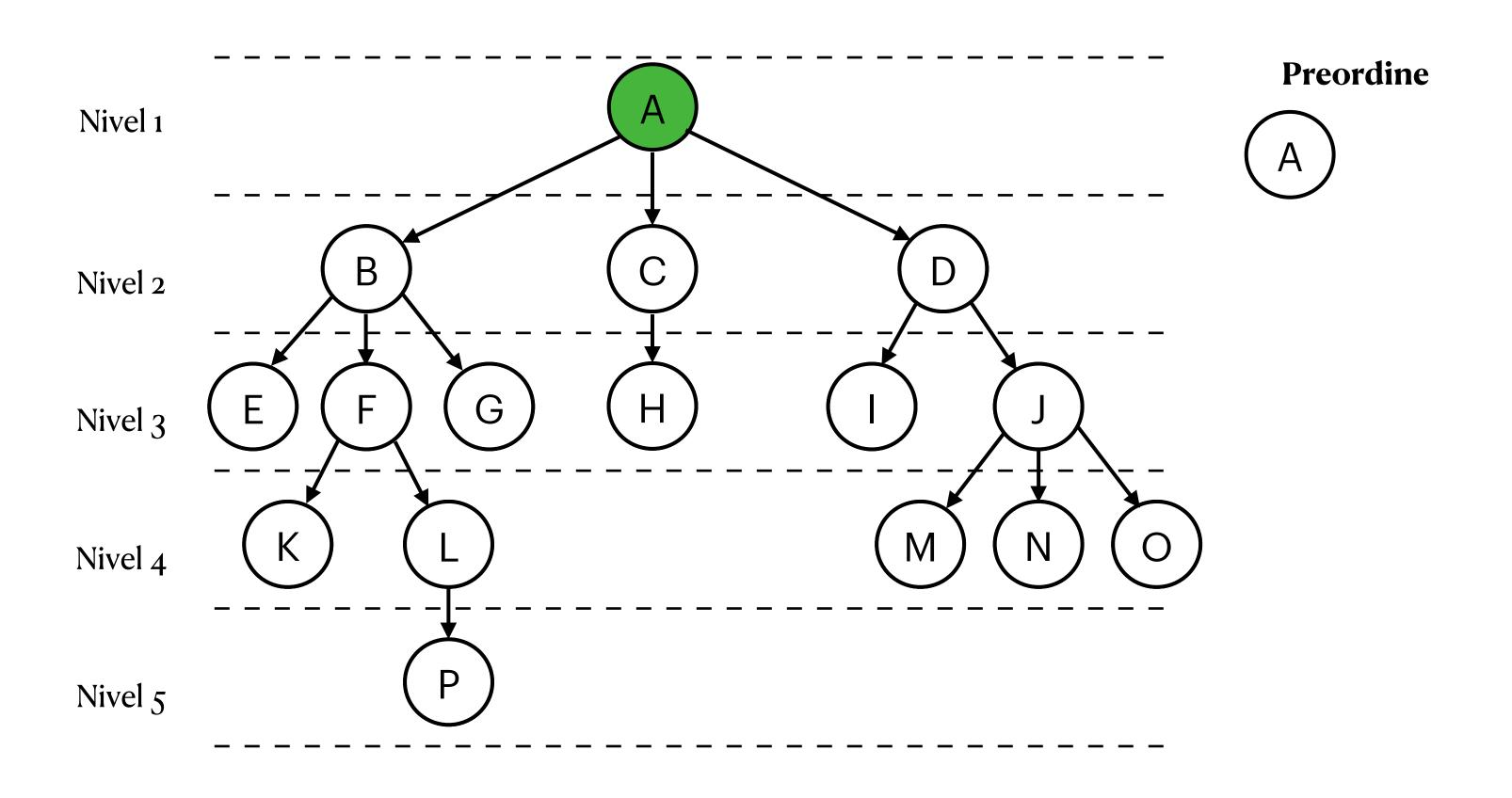
## Postordine

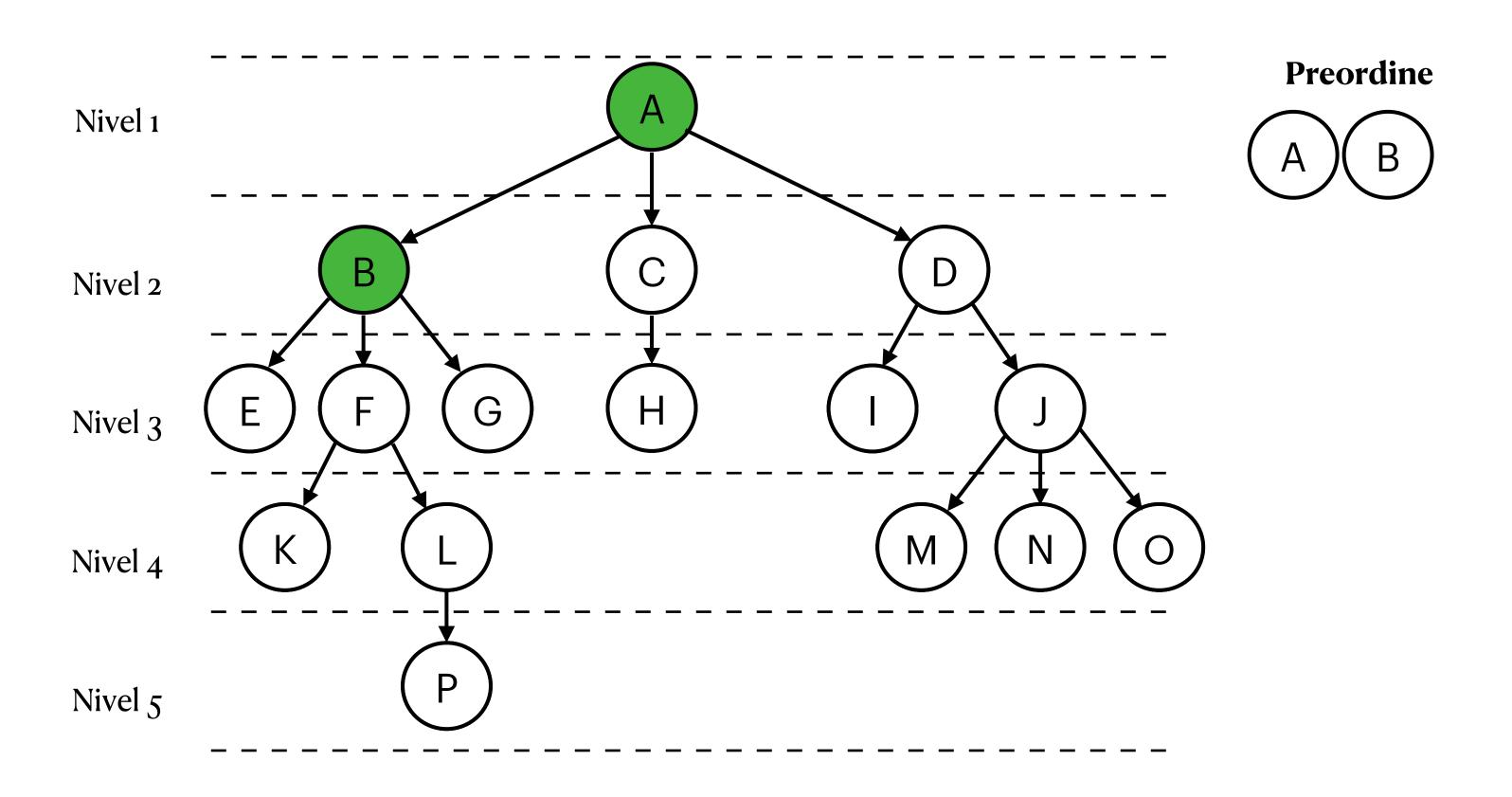
Traversarea în inordine a lui  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_k$ 

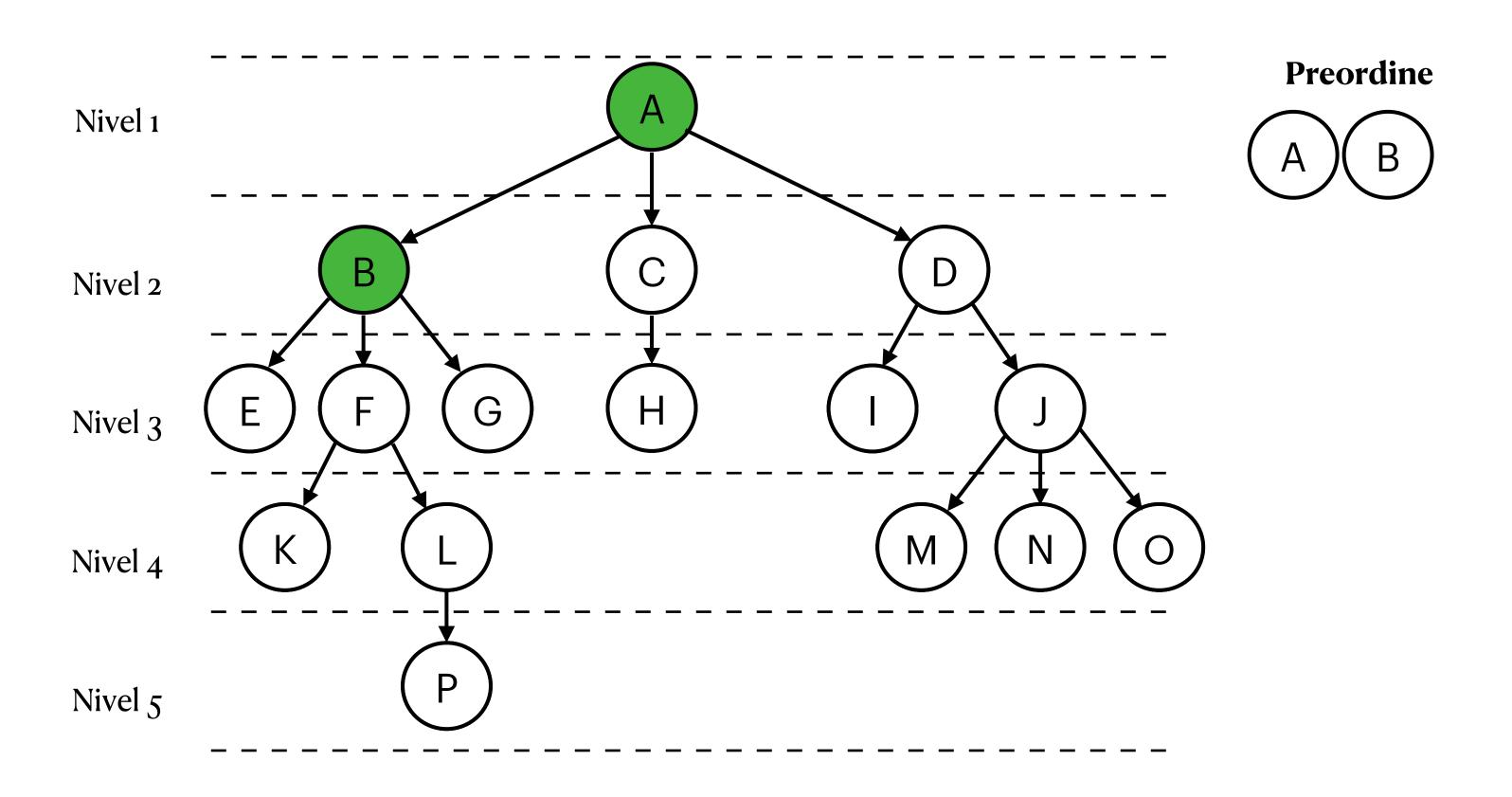
Traversarea rădăcinii R

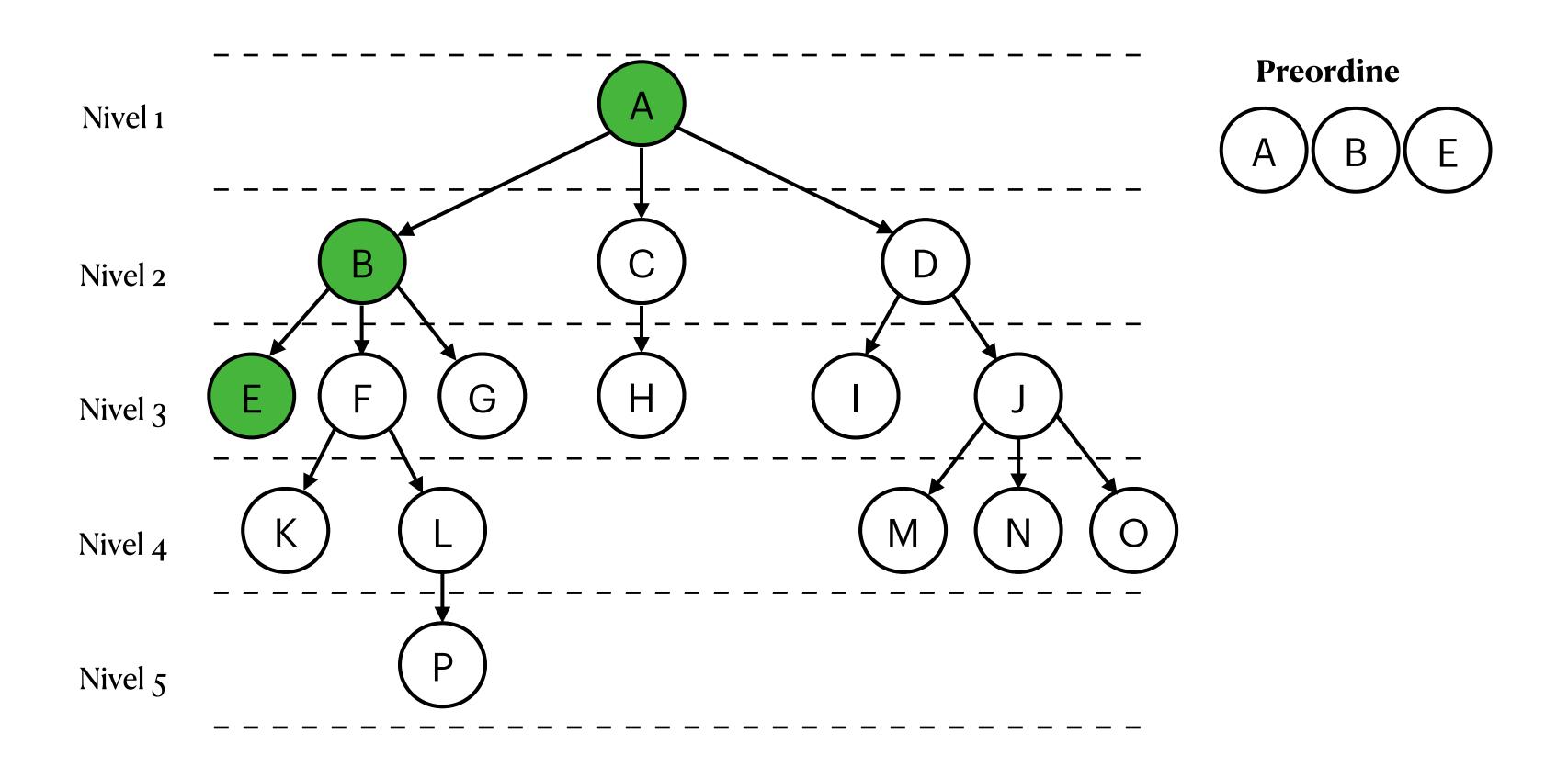


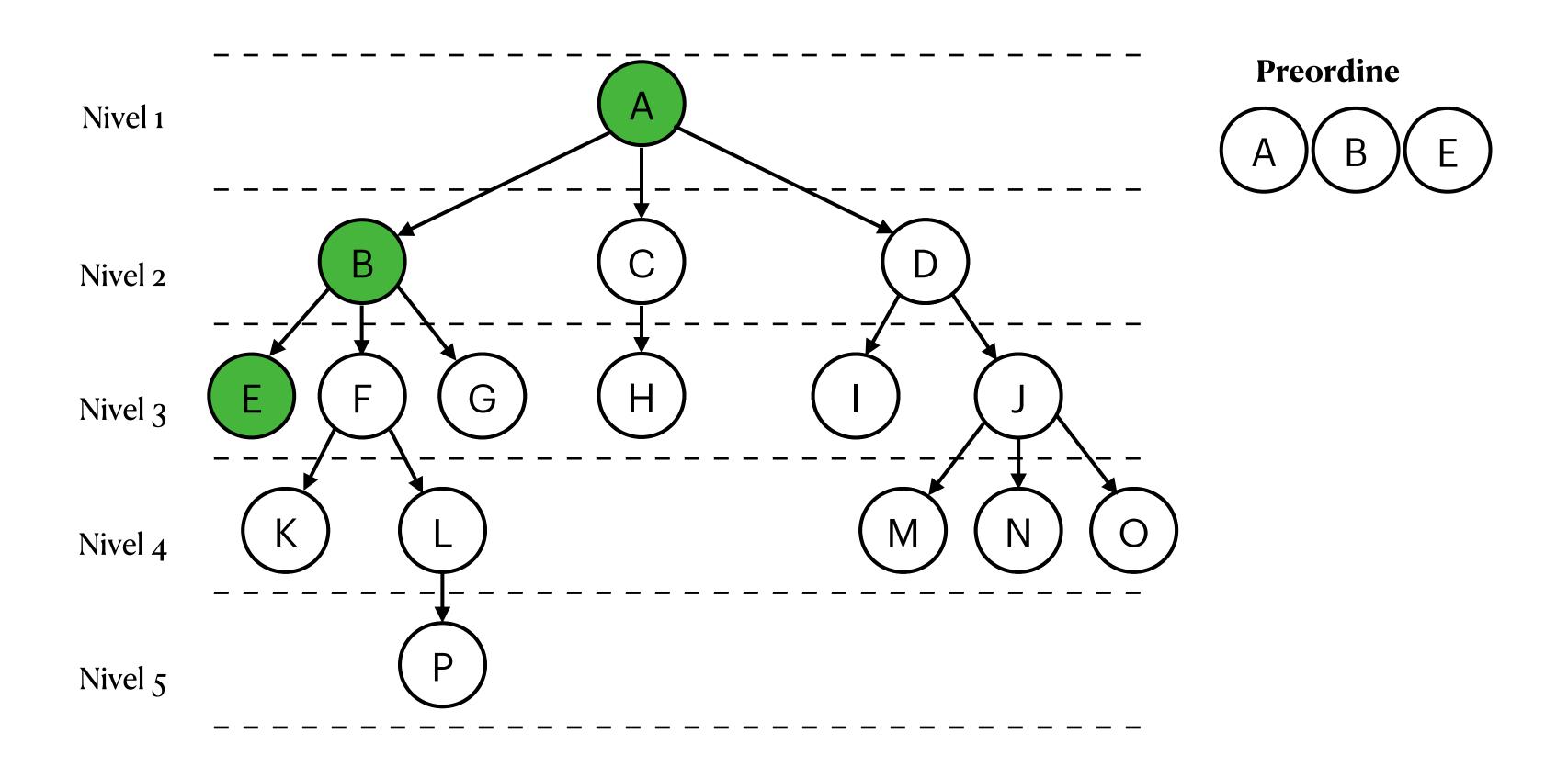


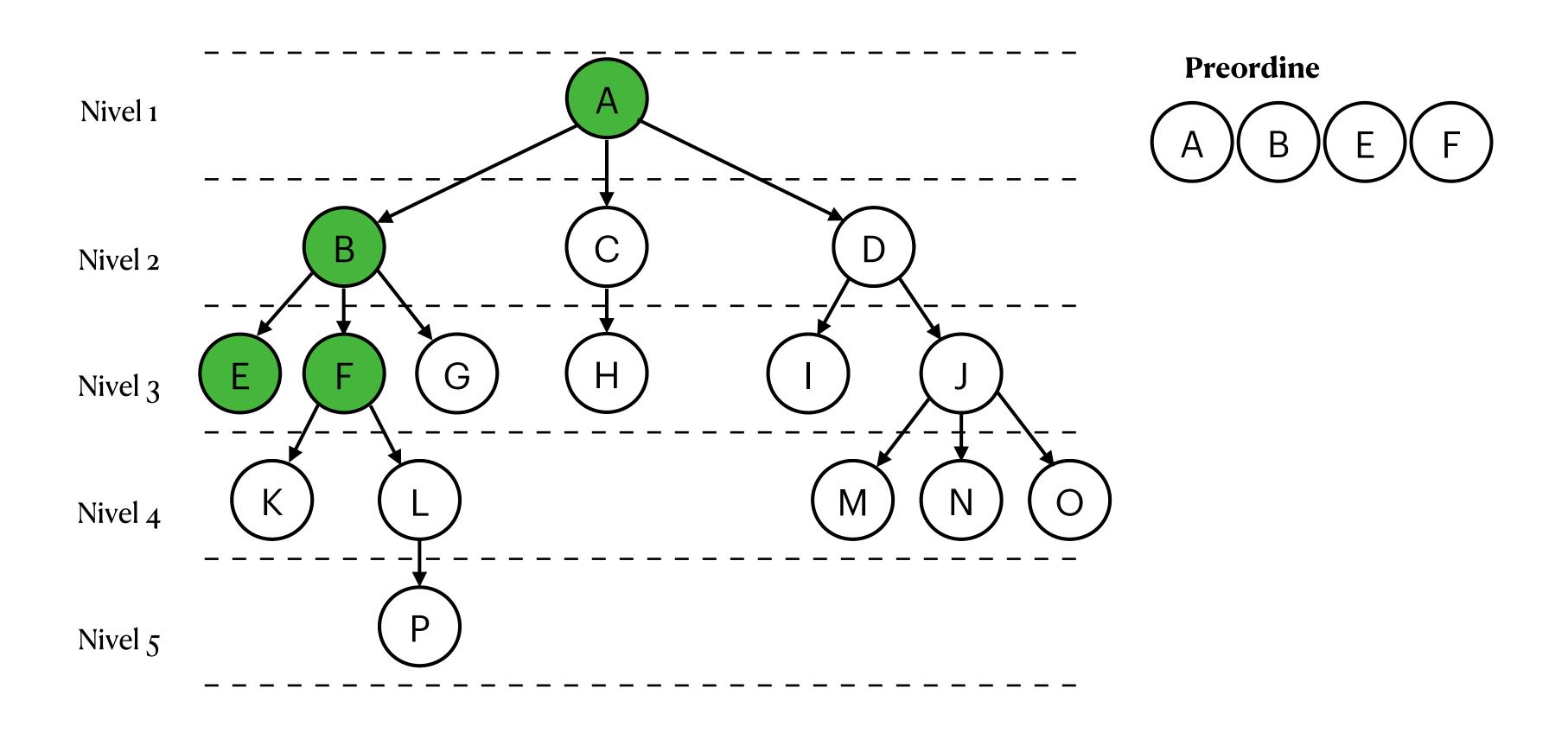


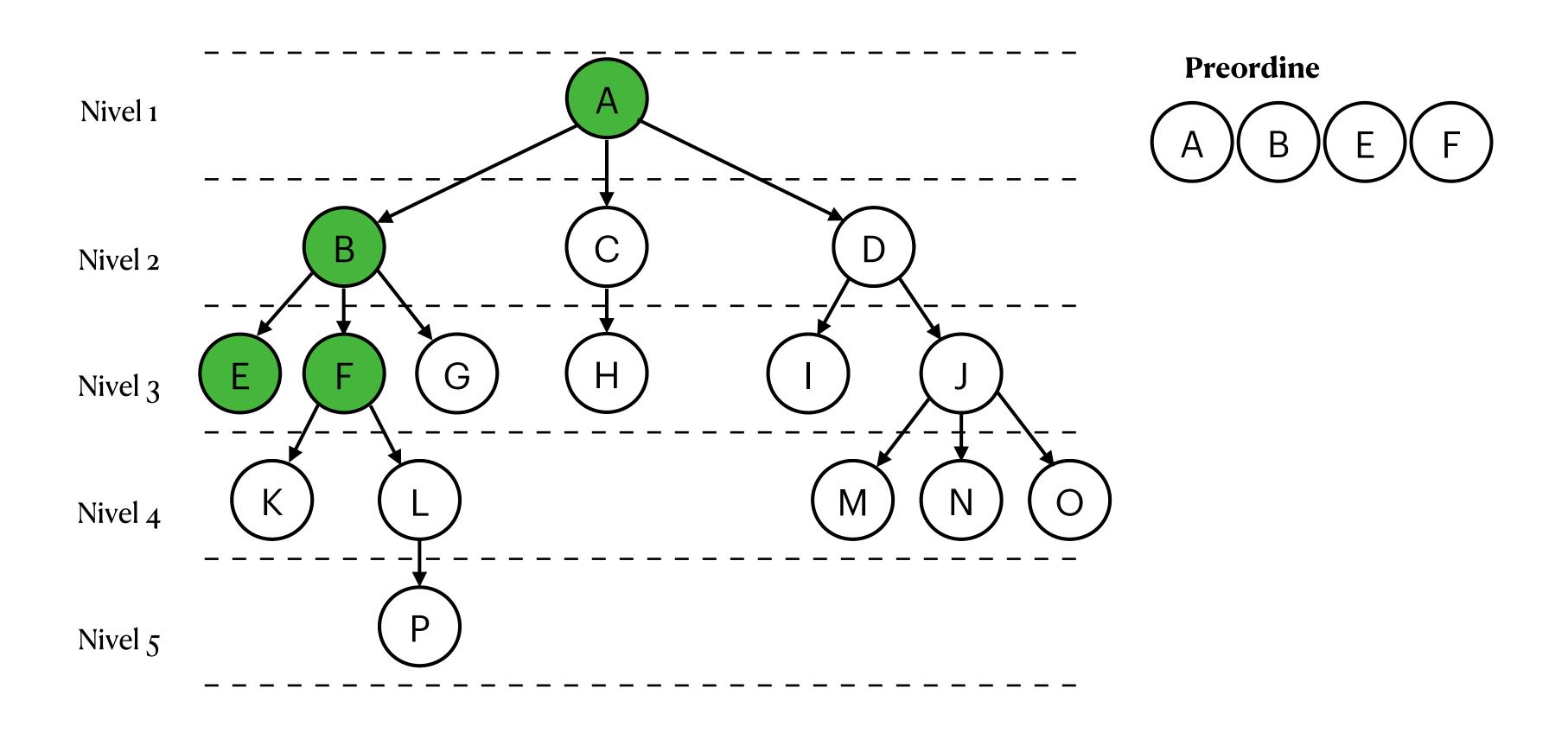


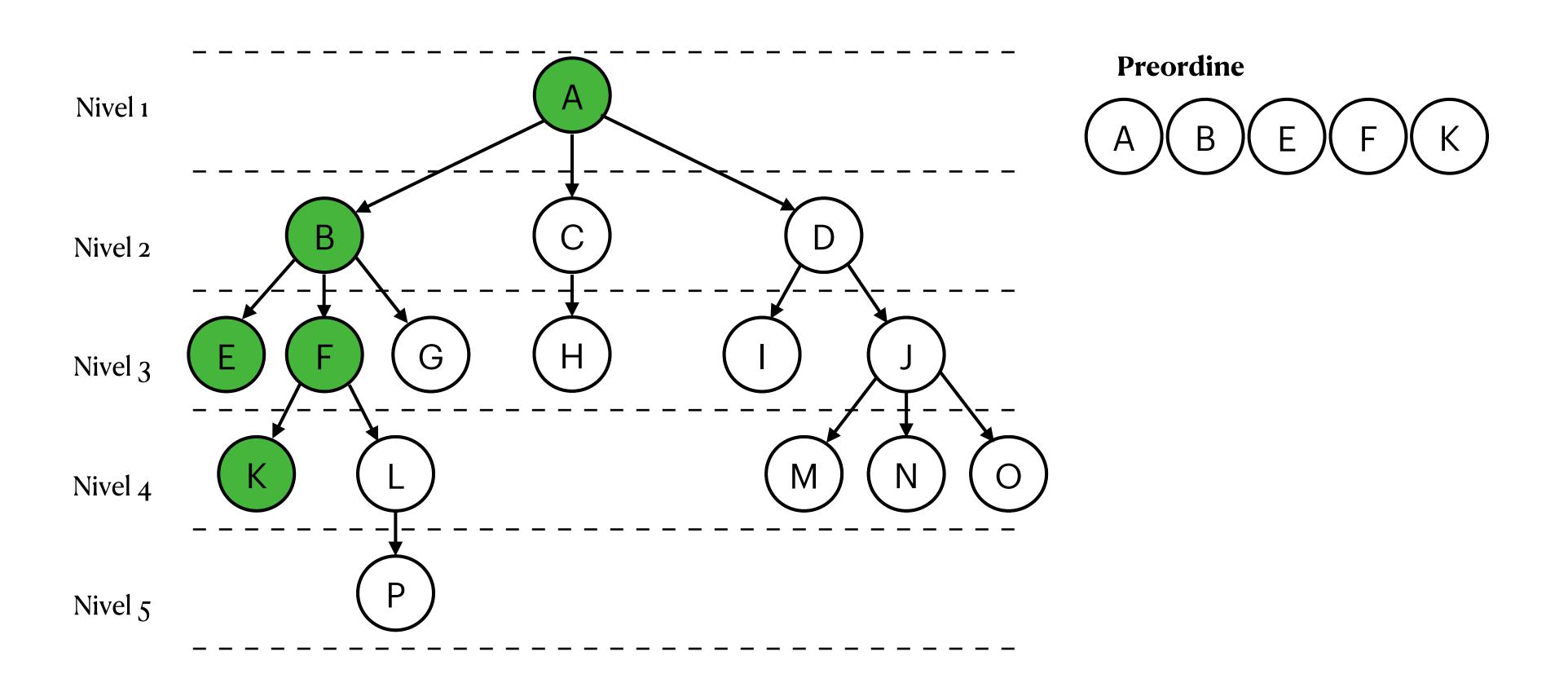


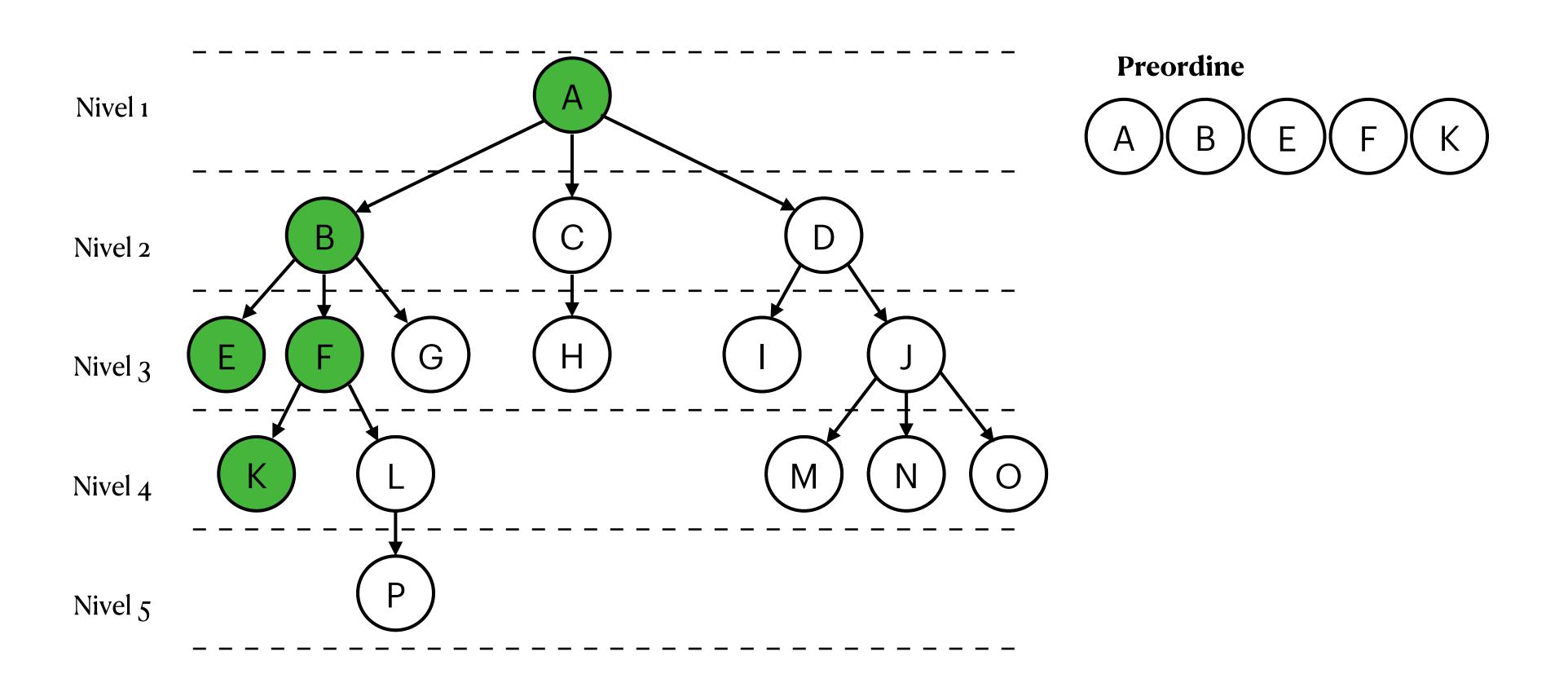


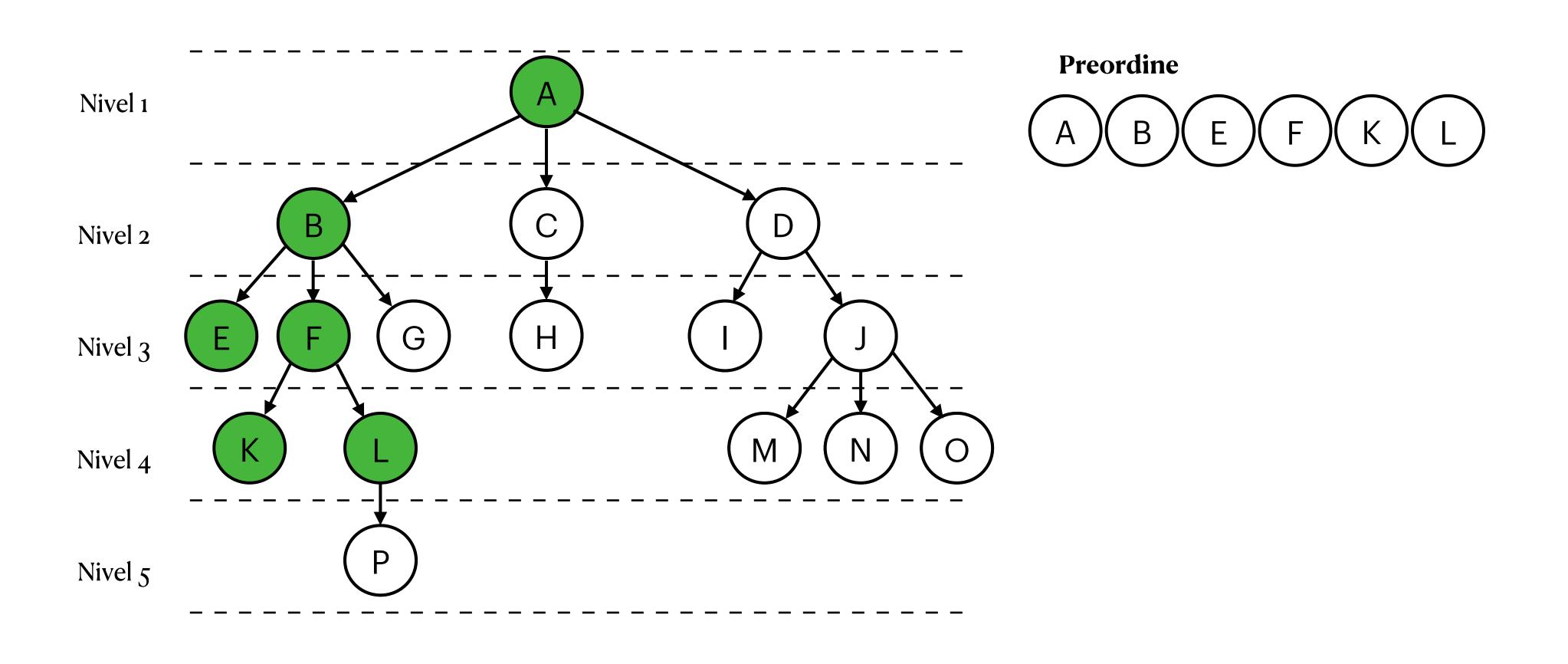


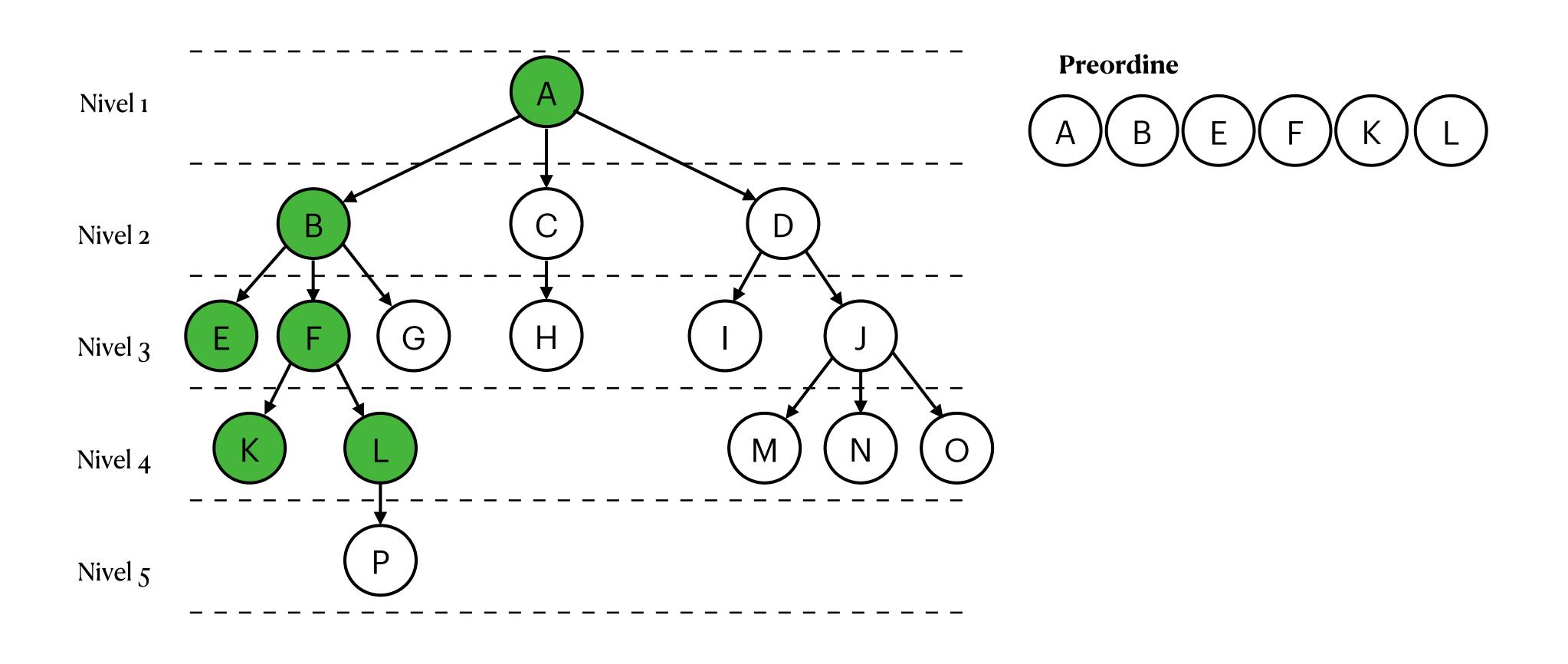


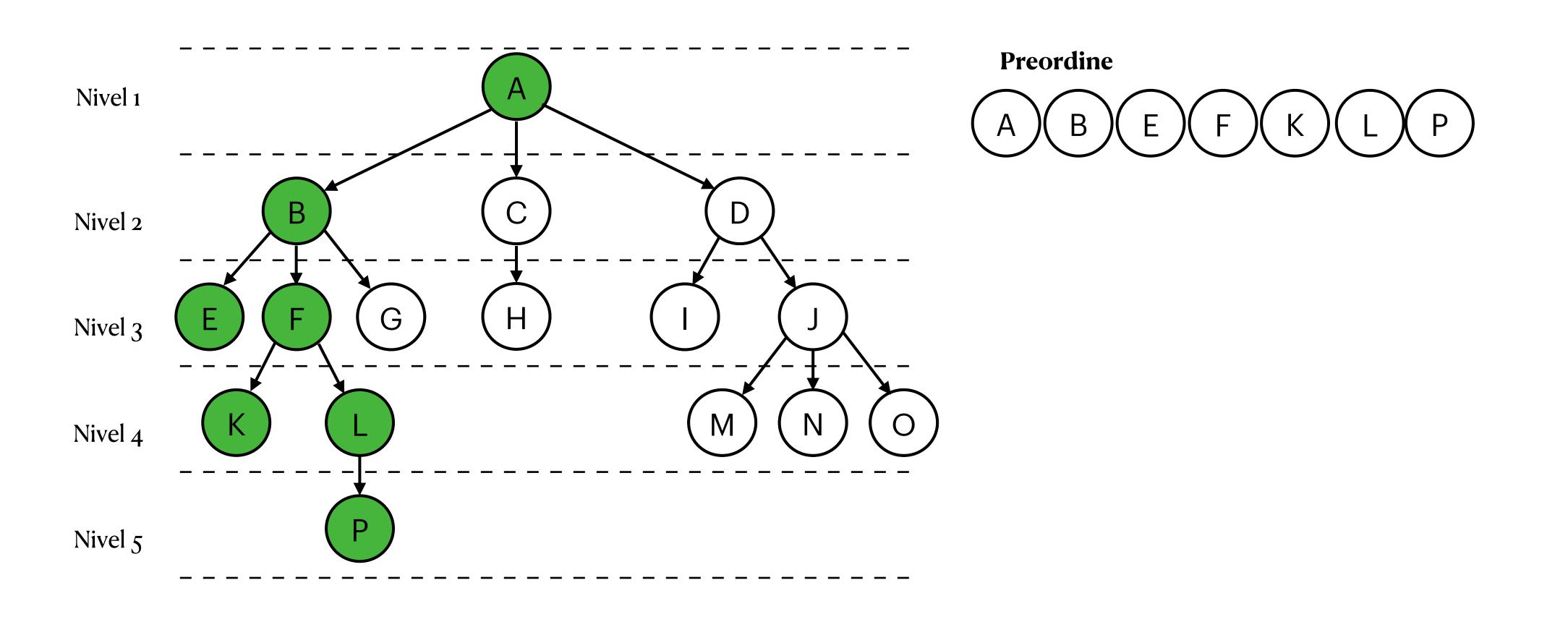


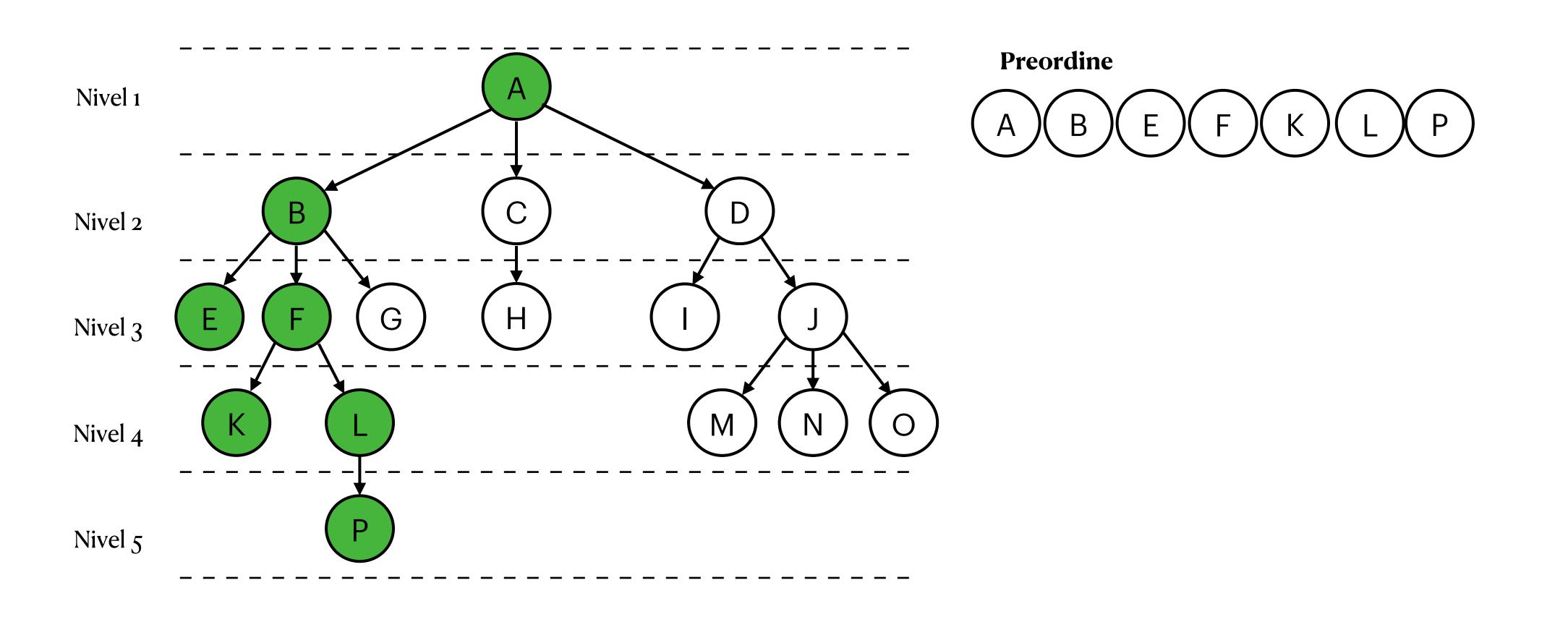


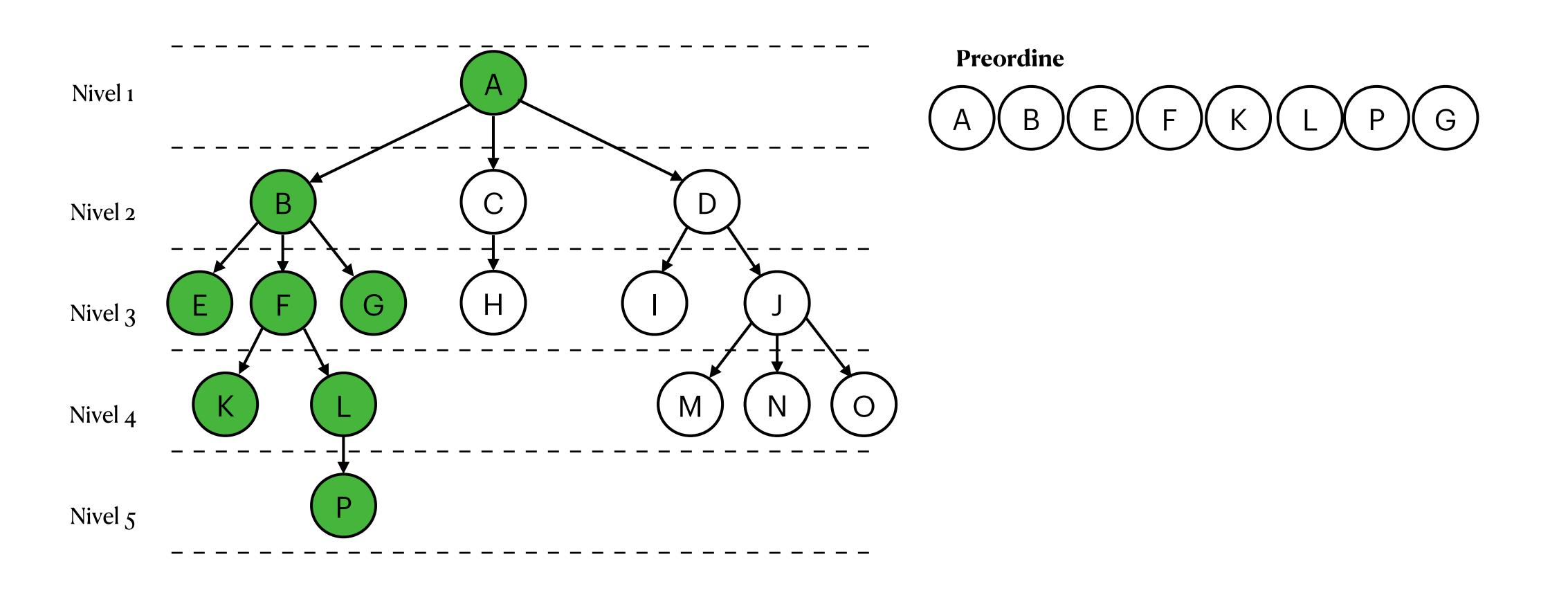


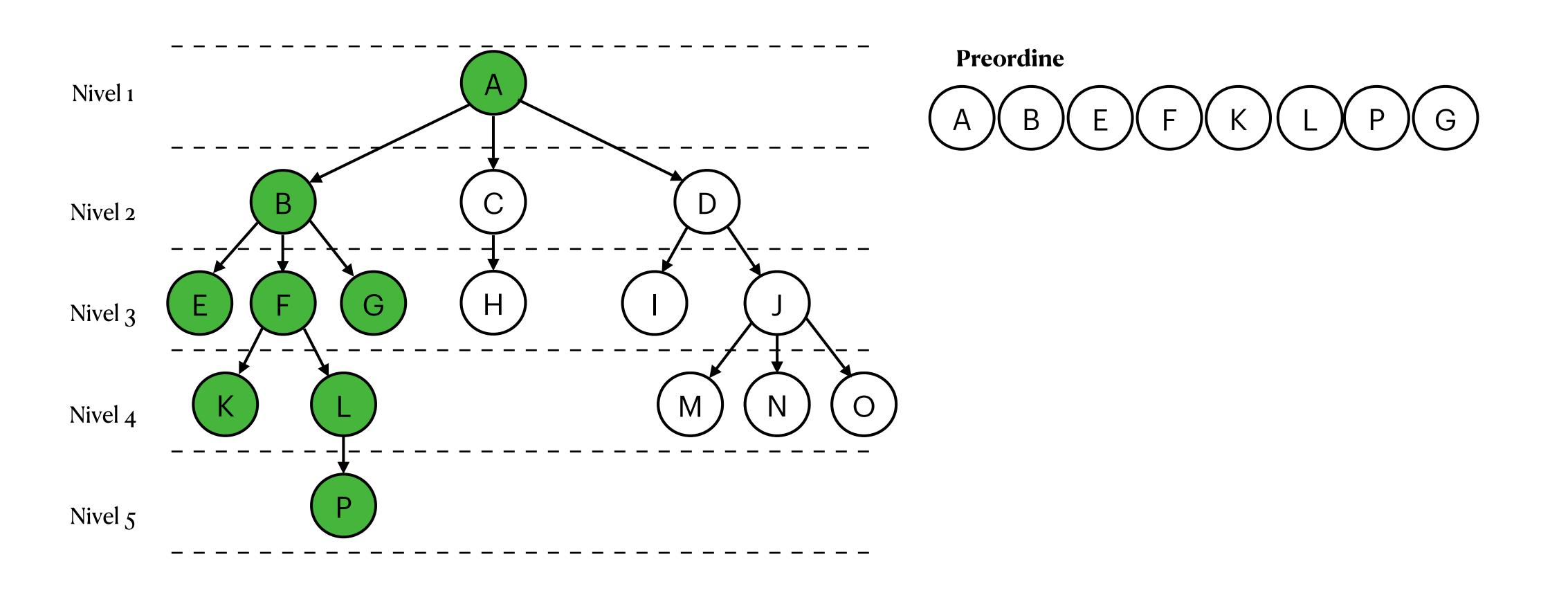


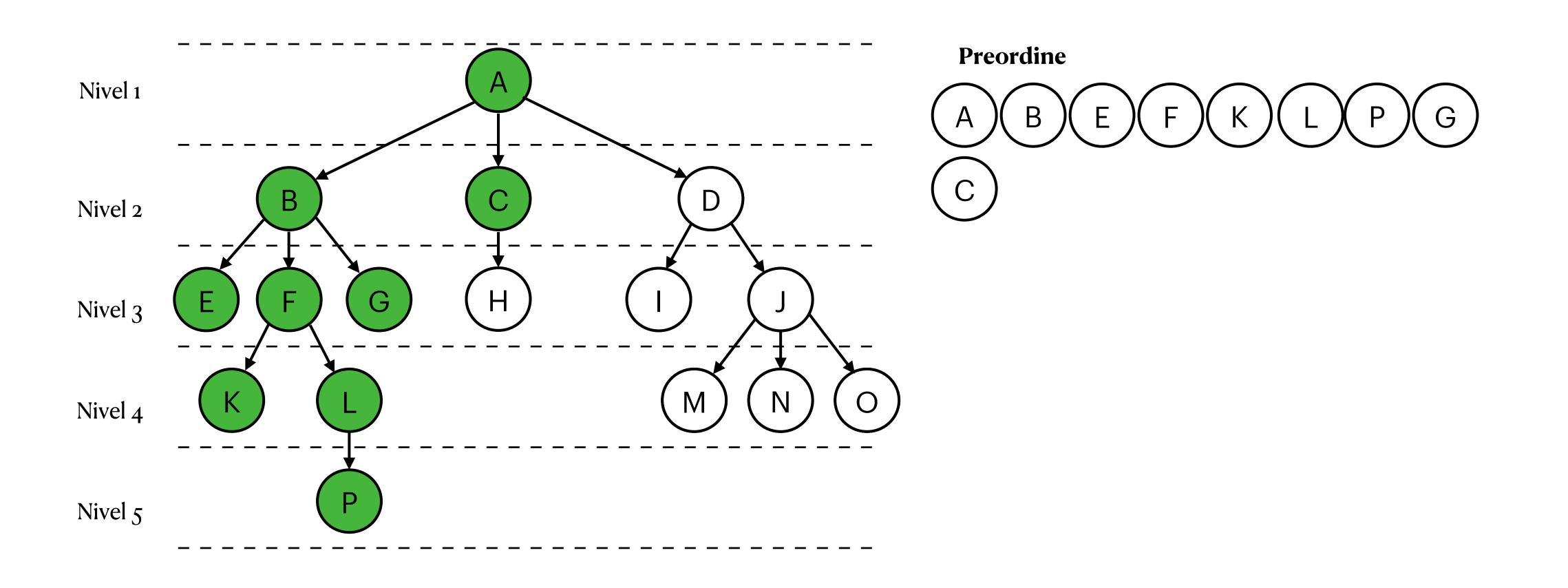


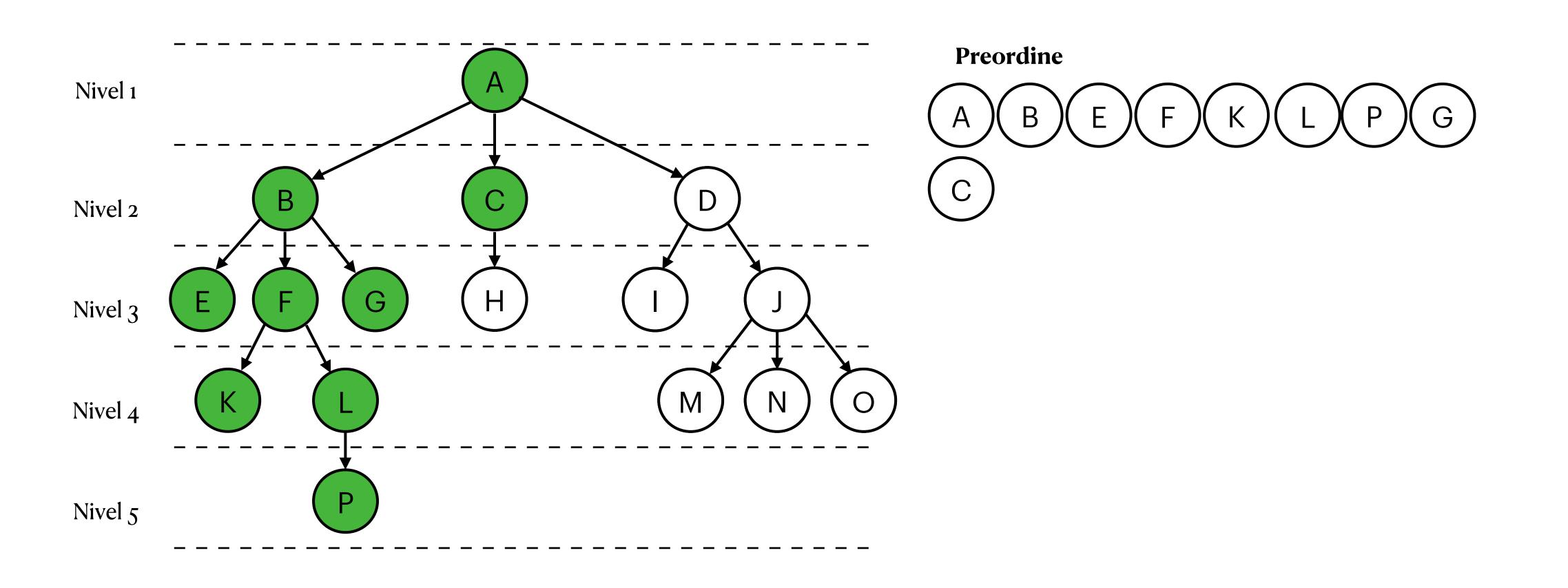


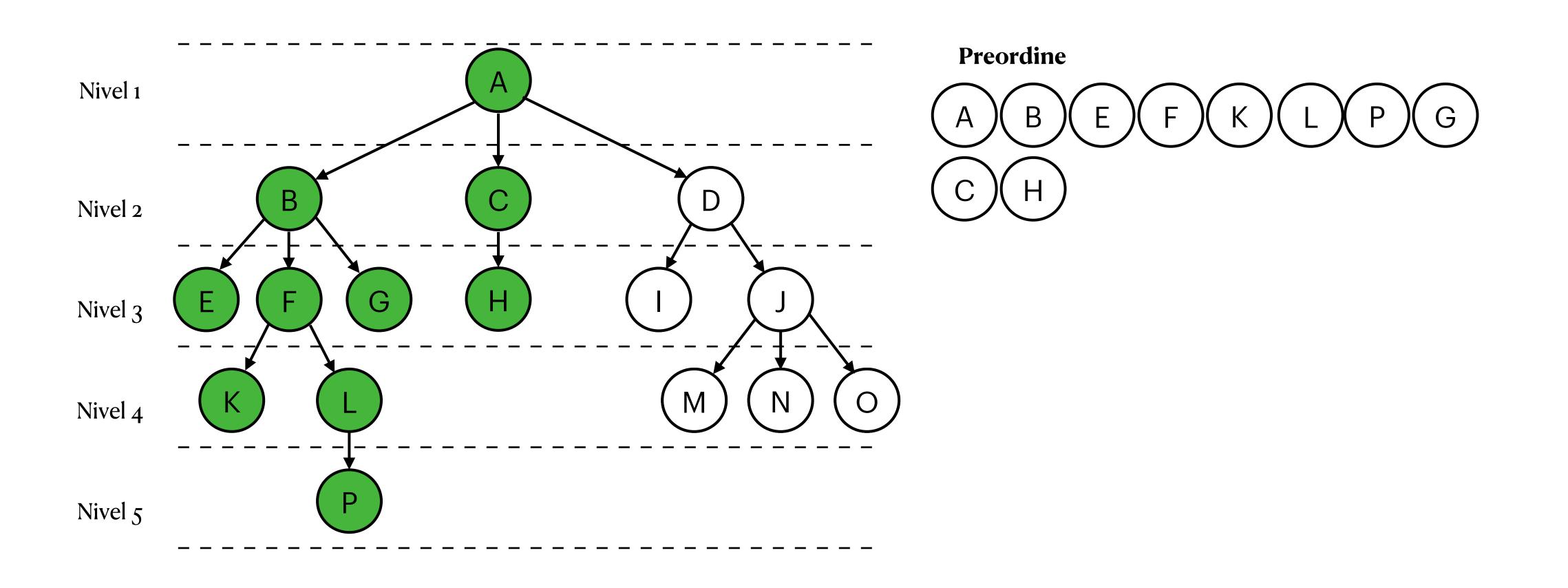


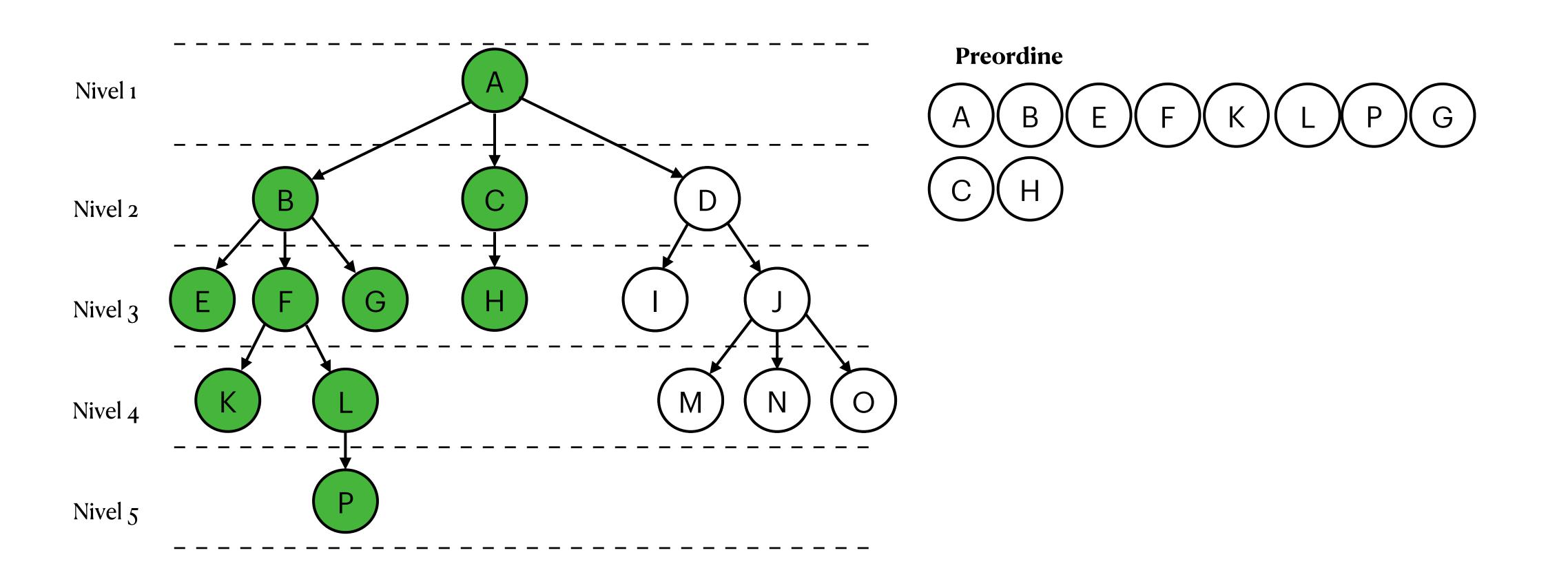


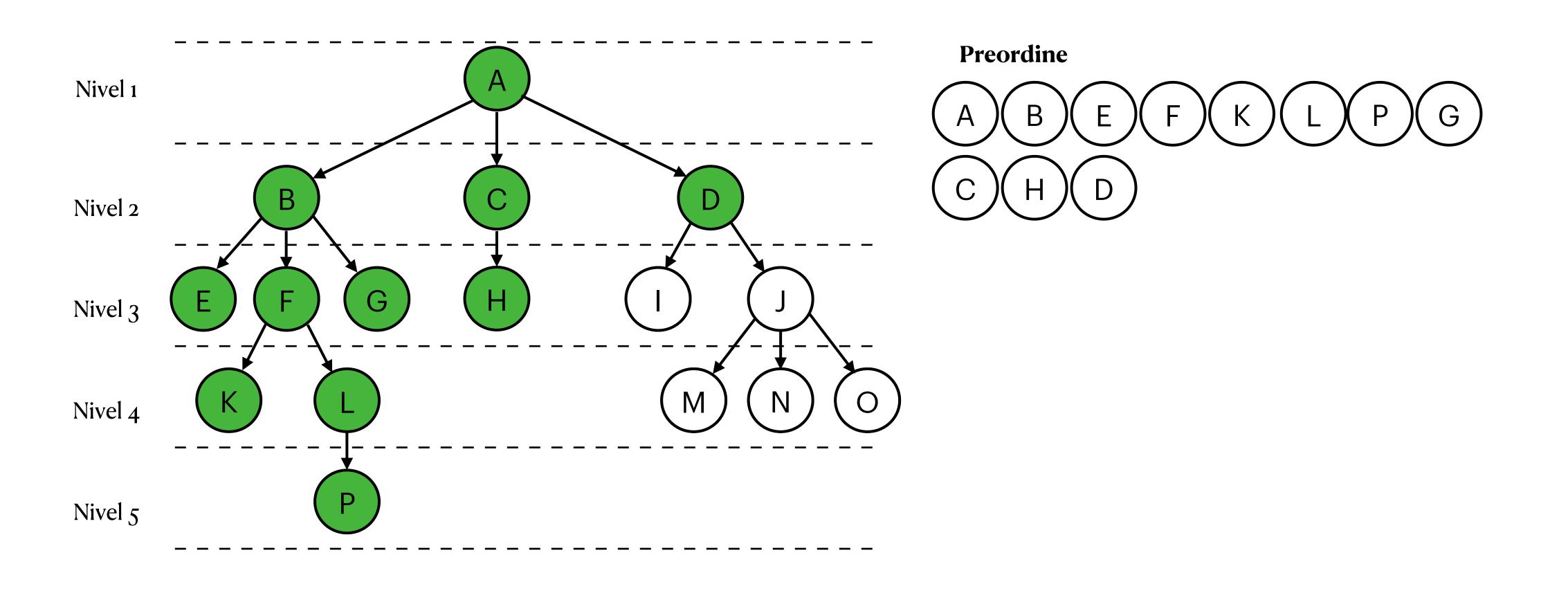


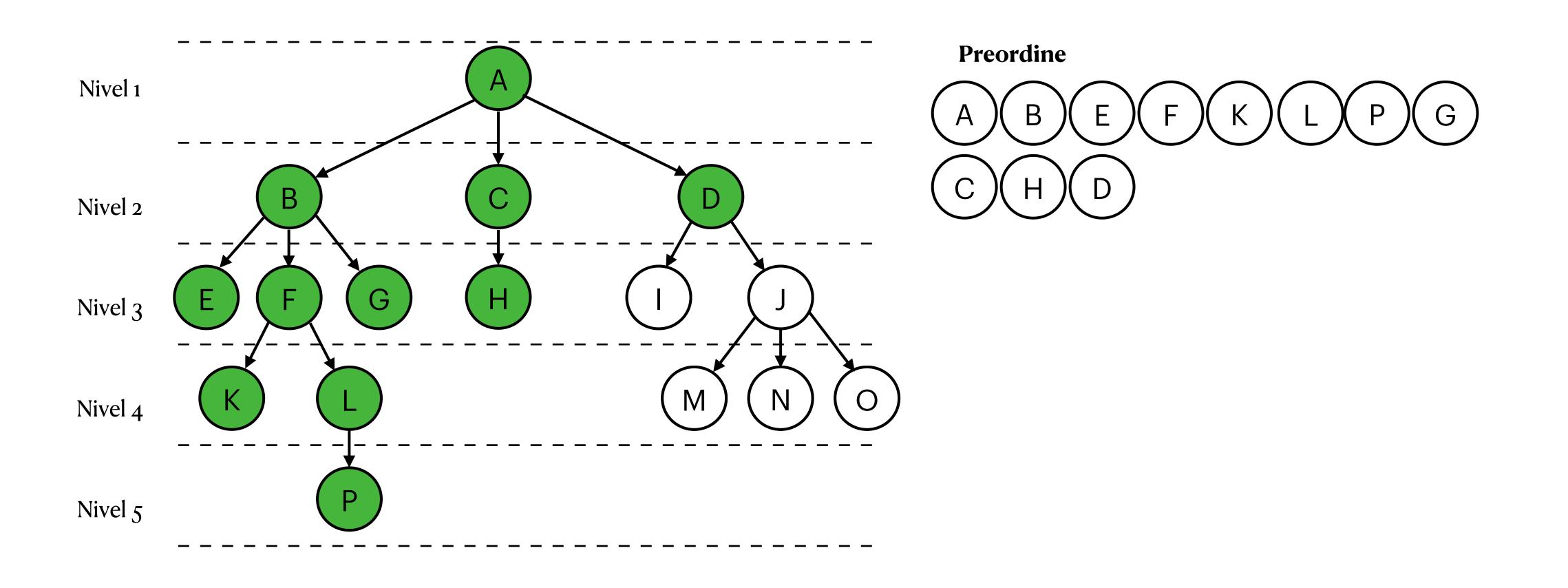


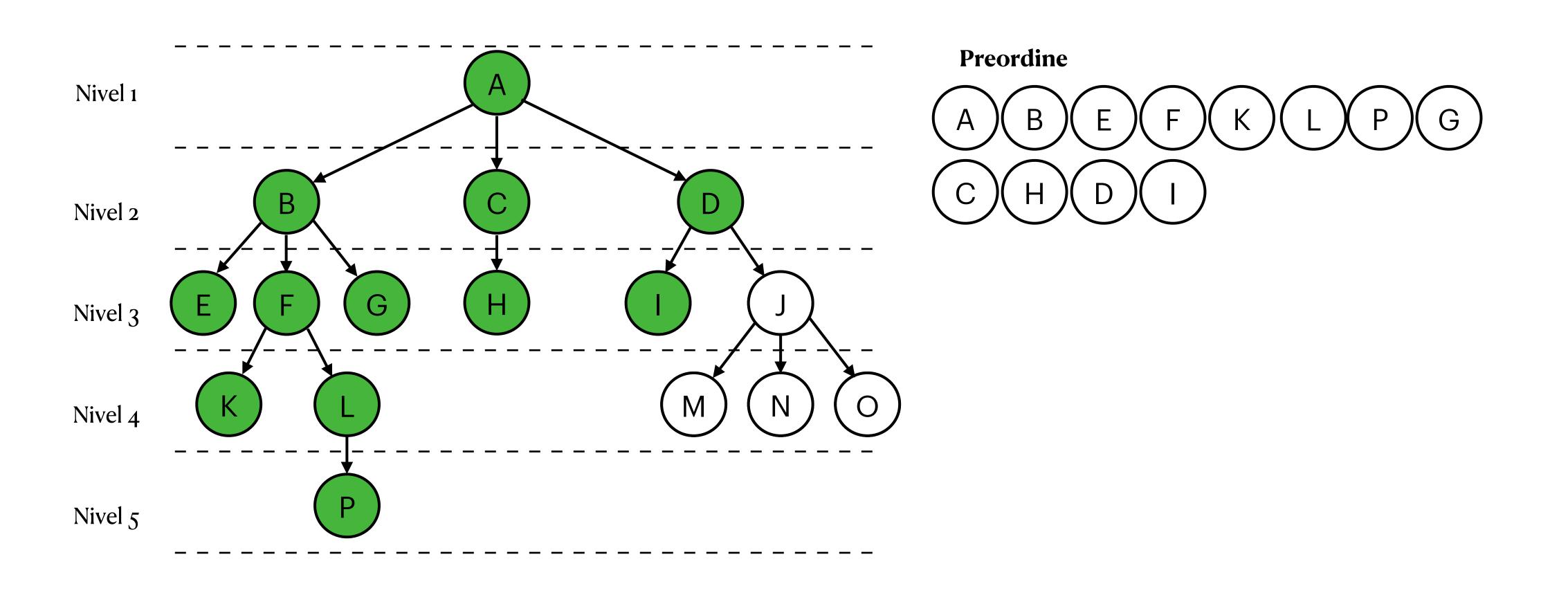


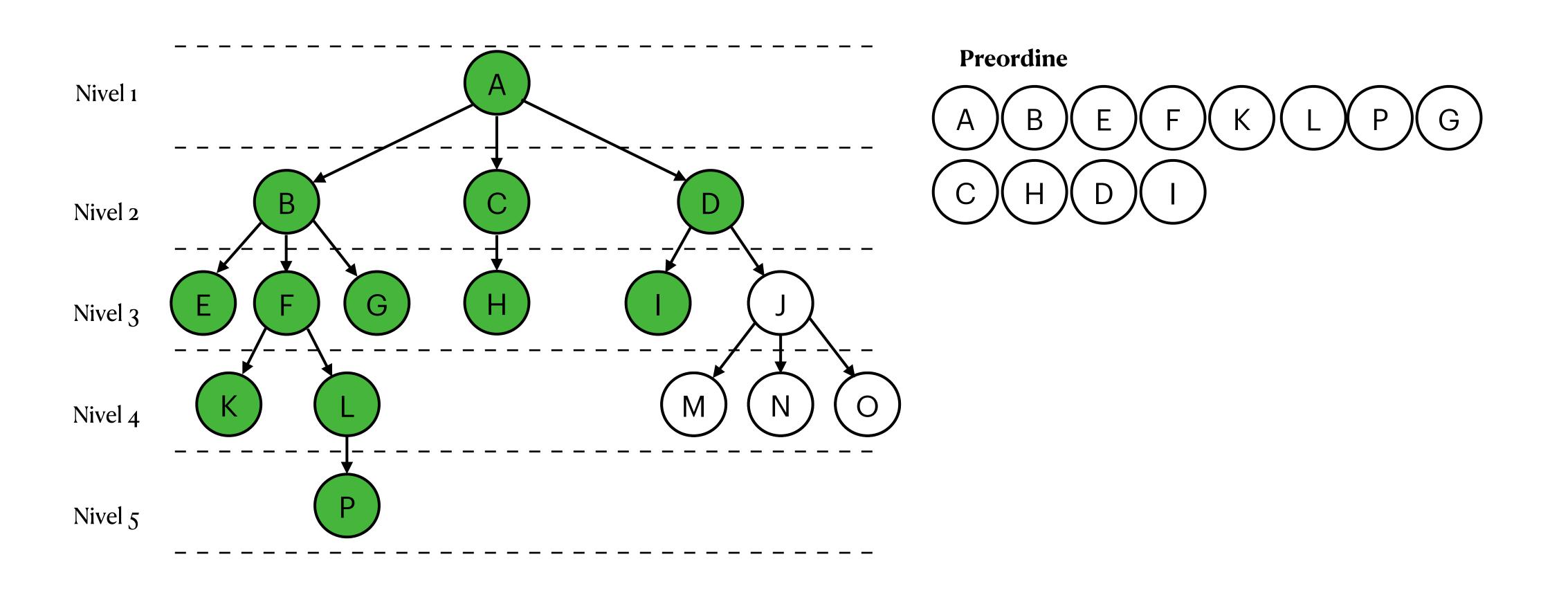


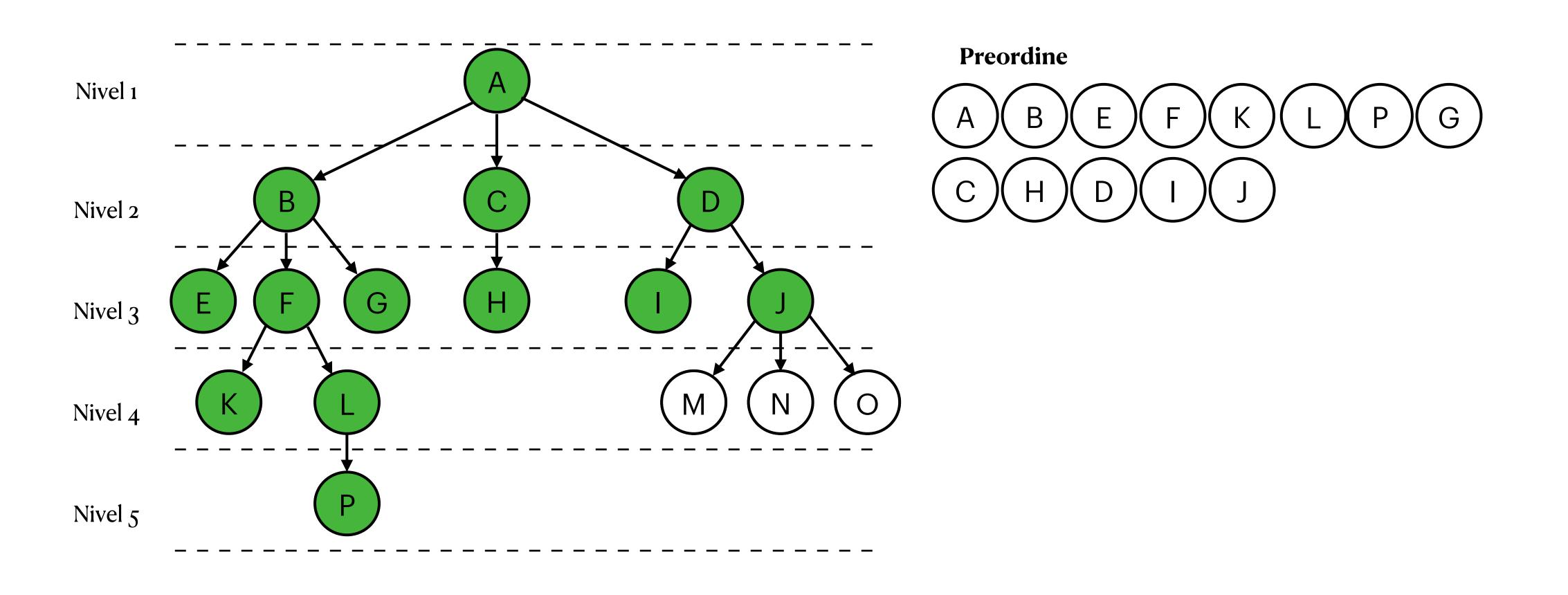


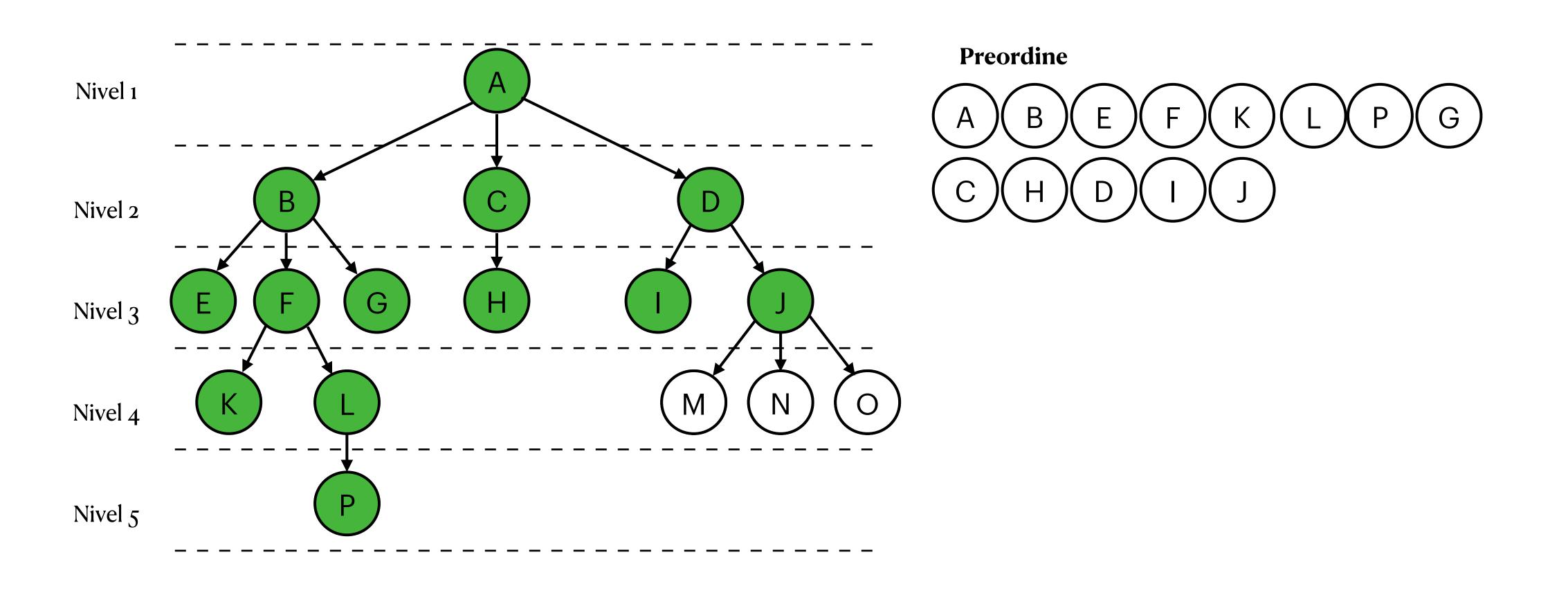


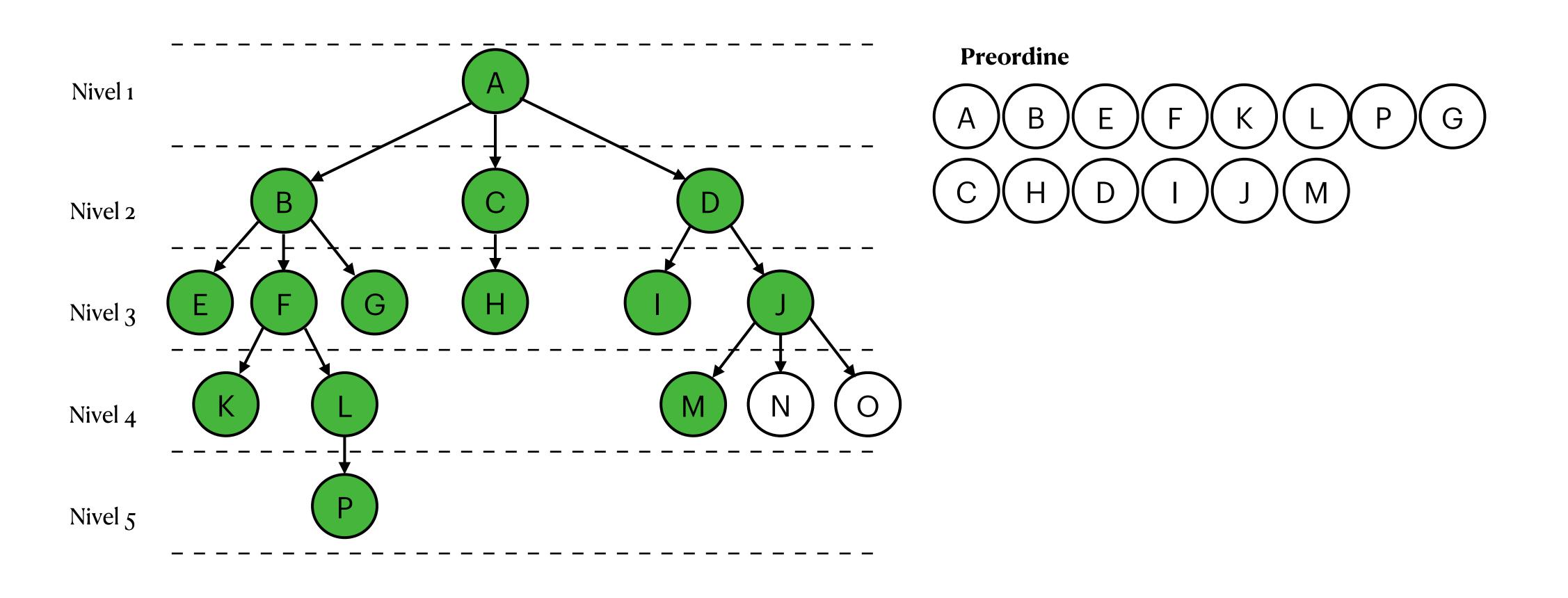


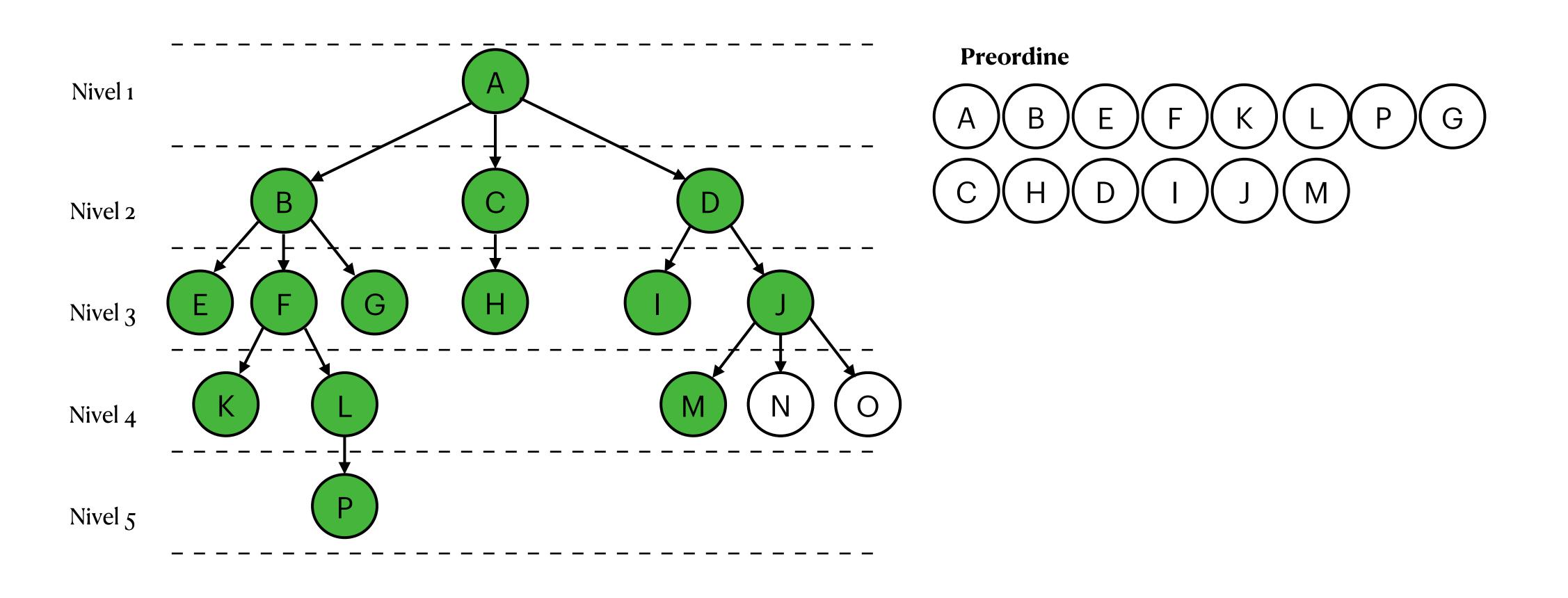


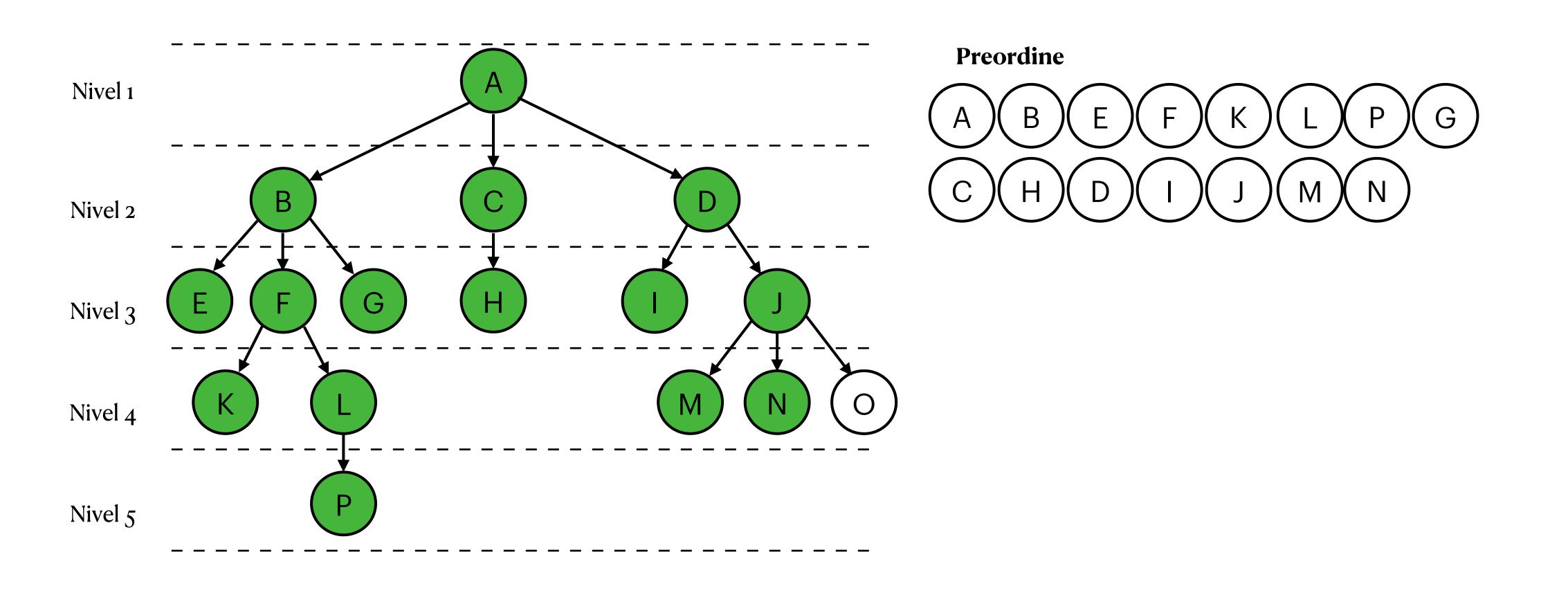


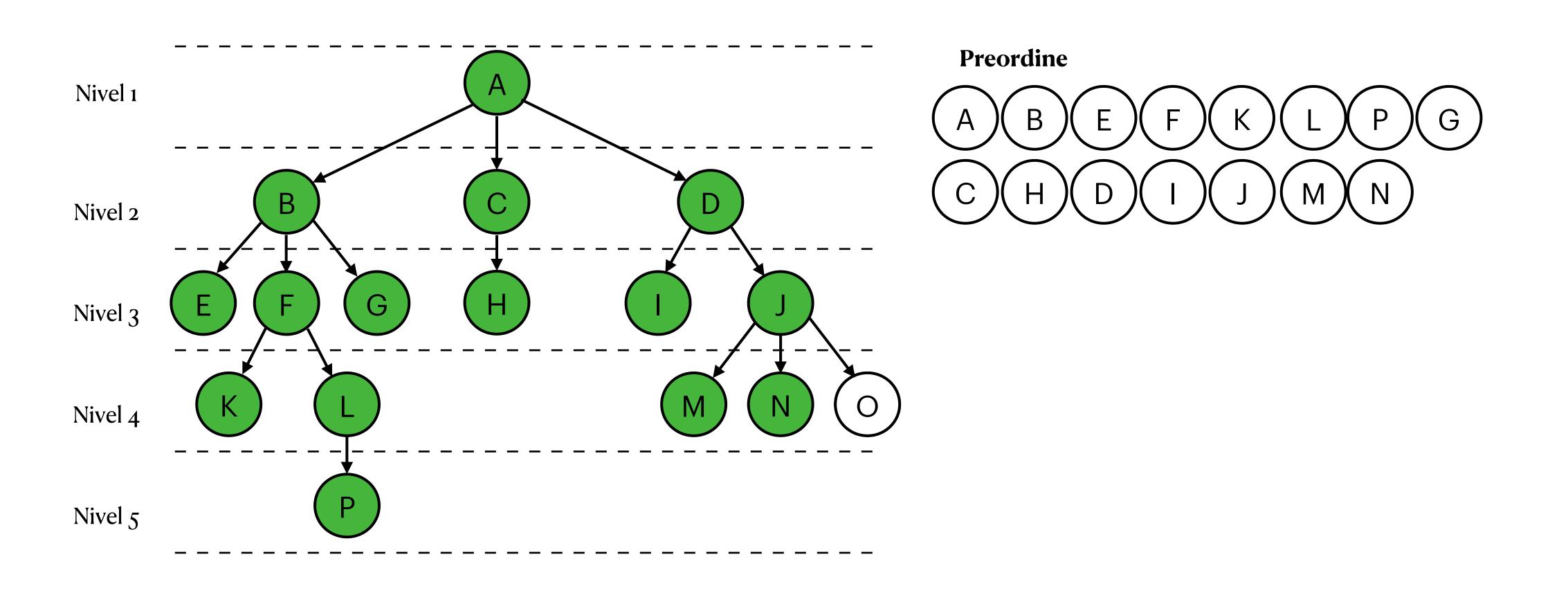


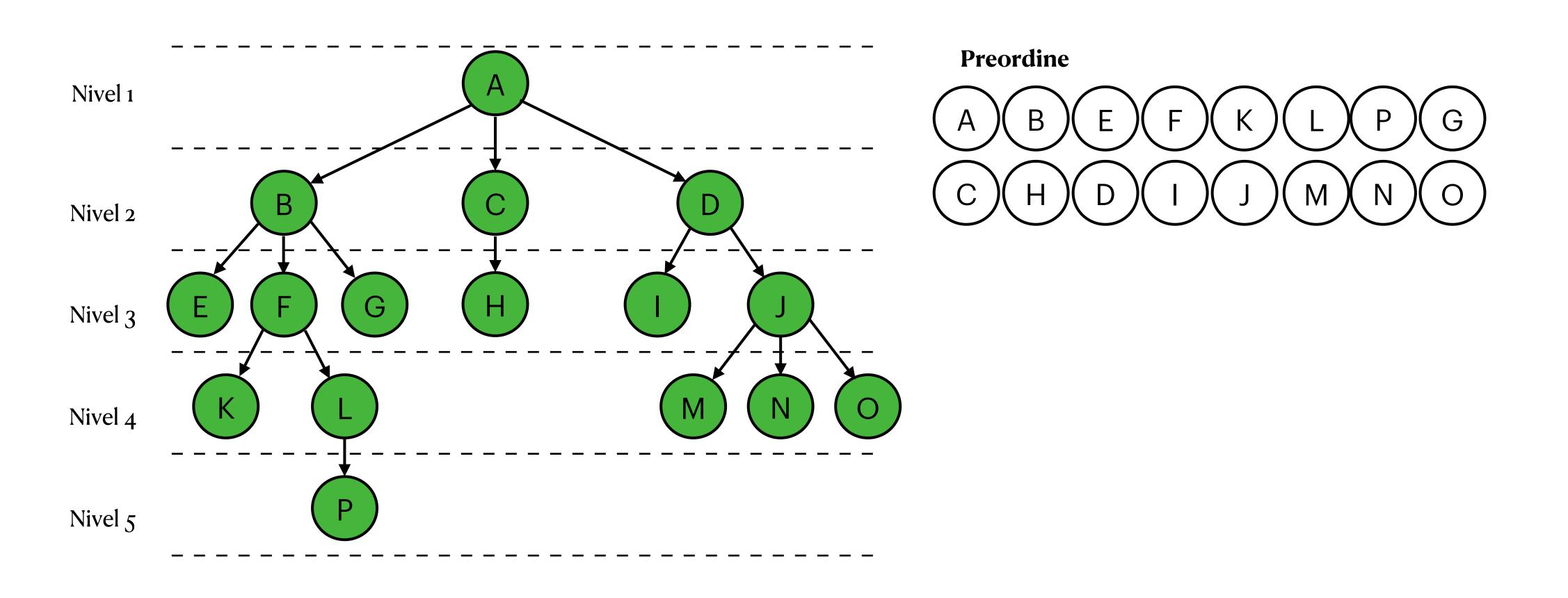


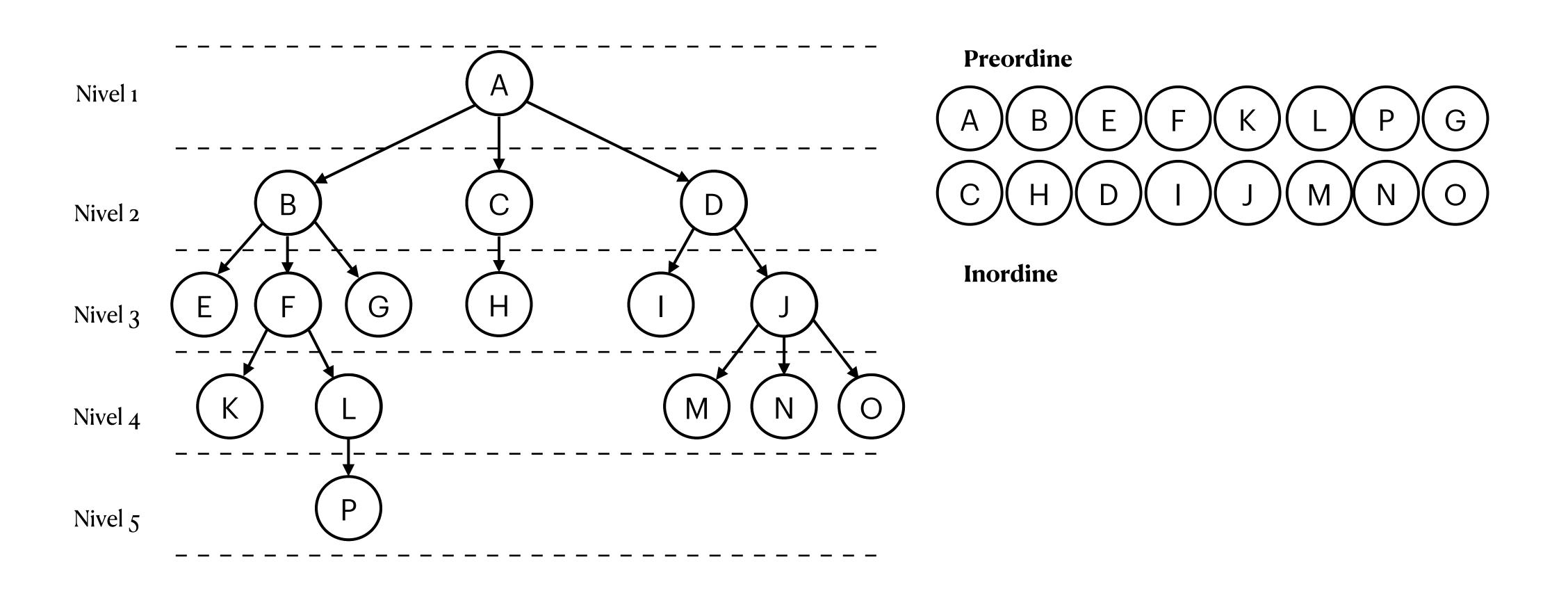


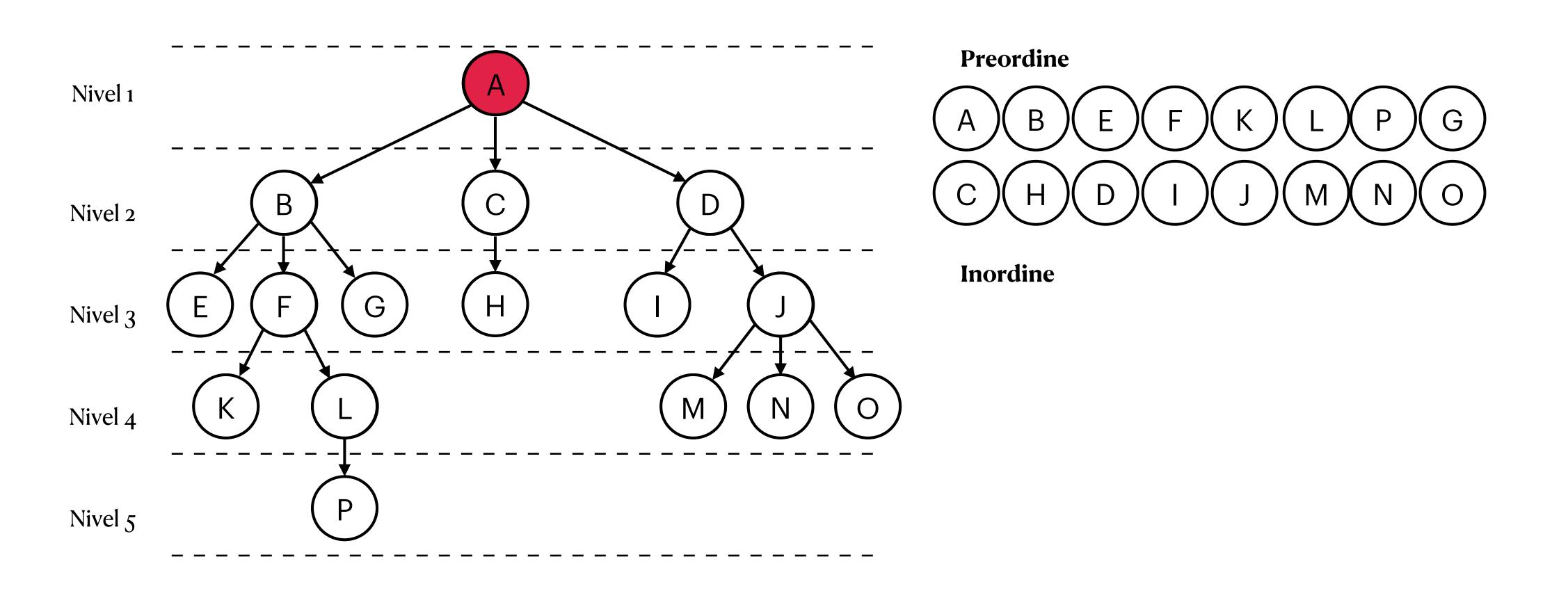


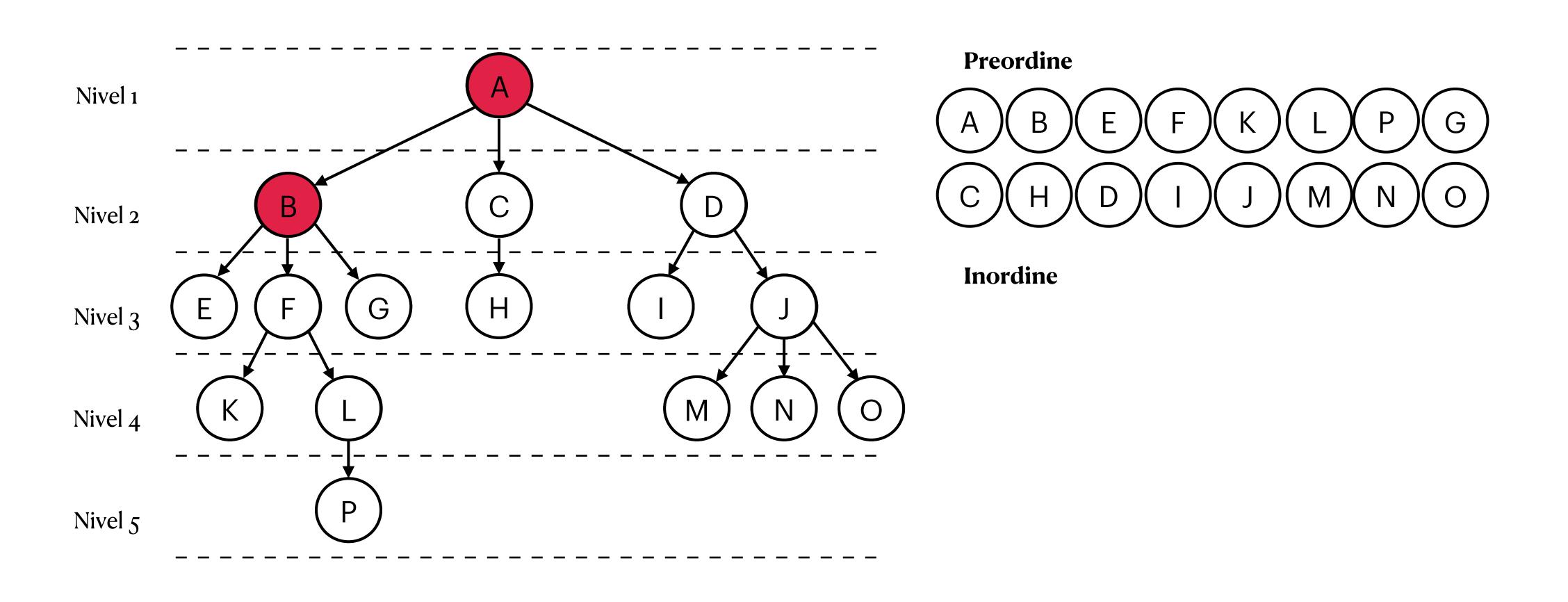


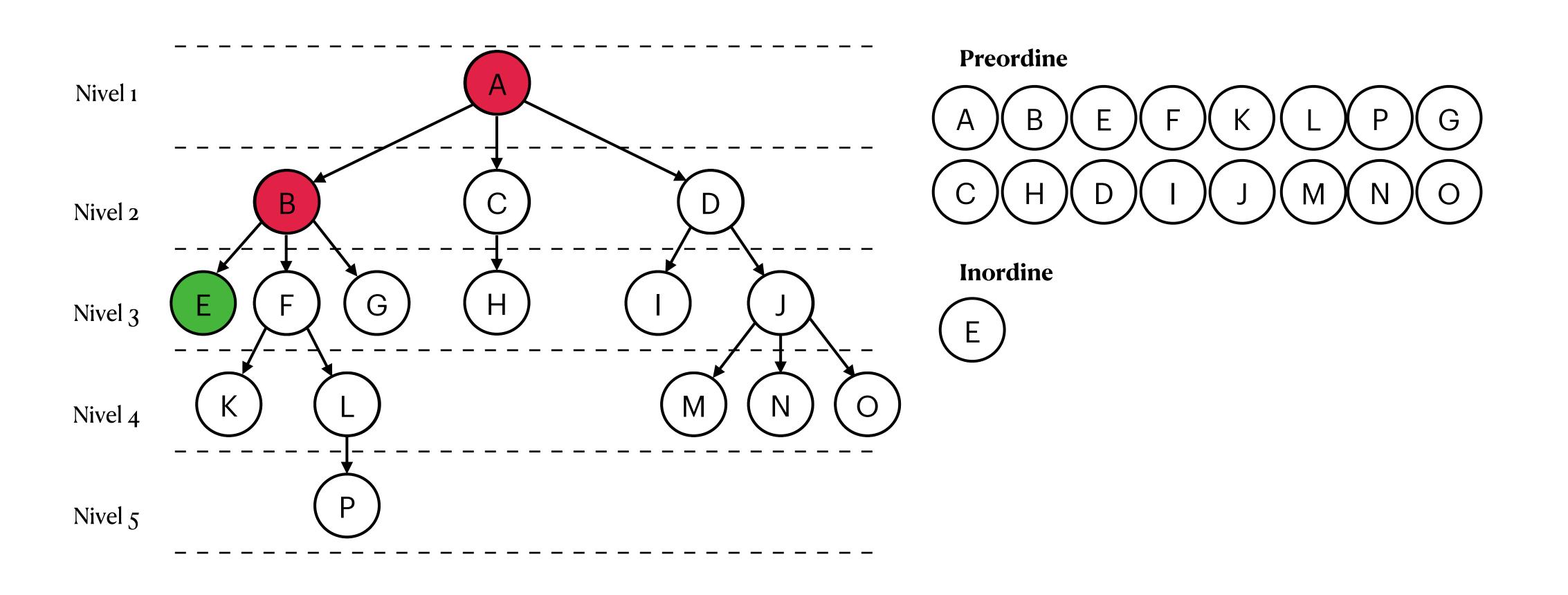


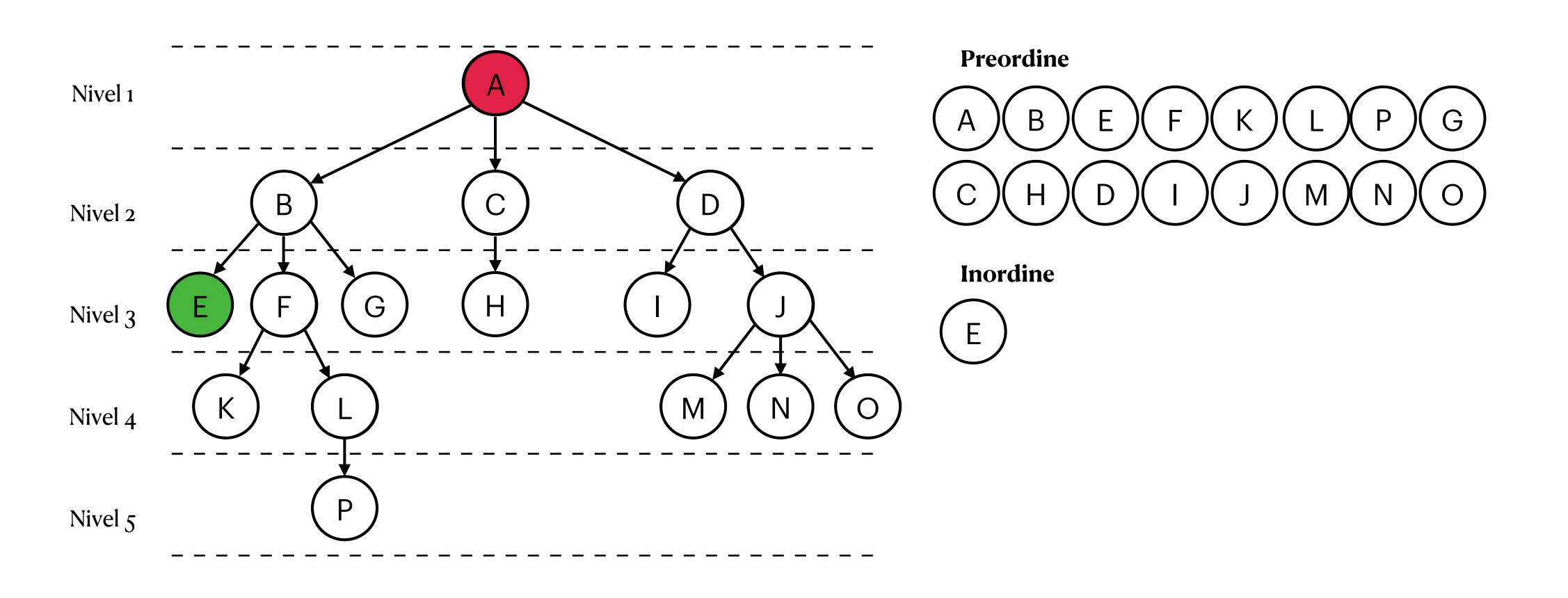


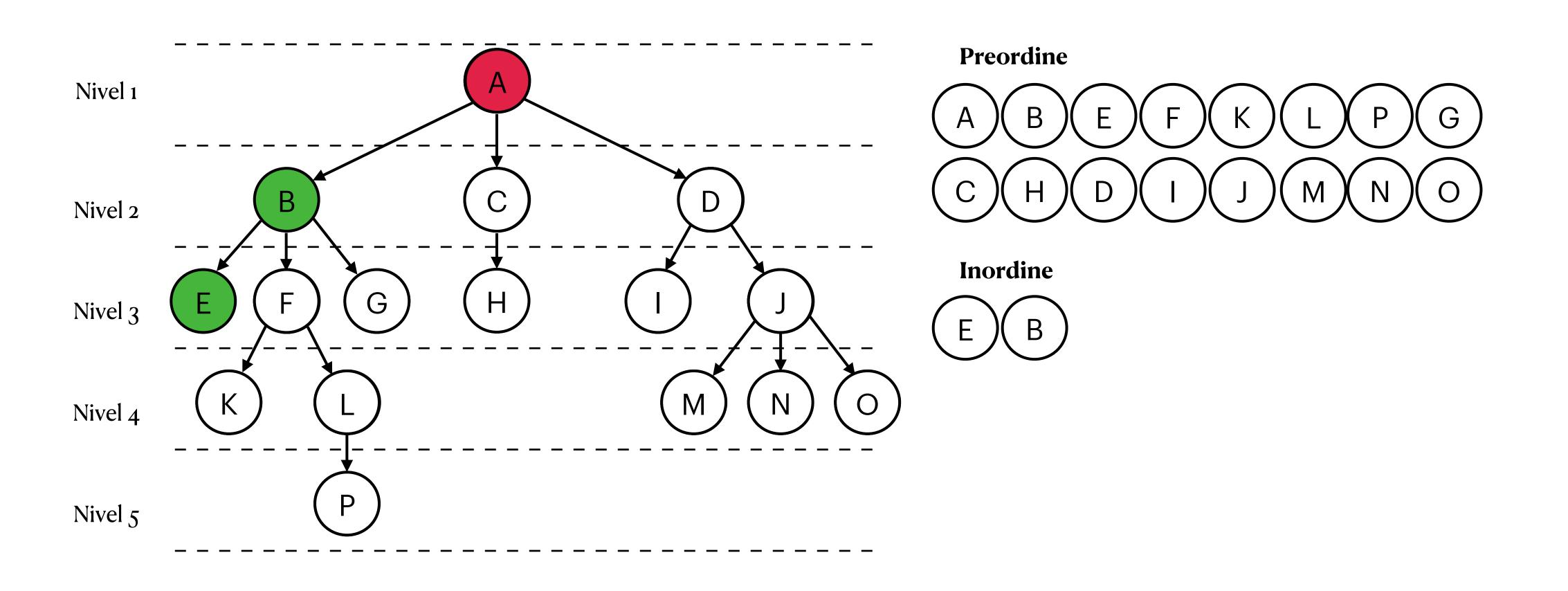


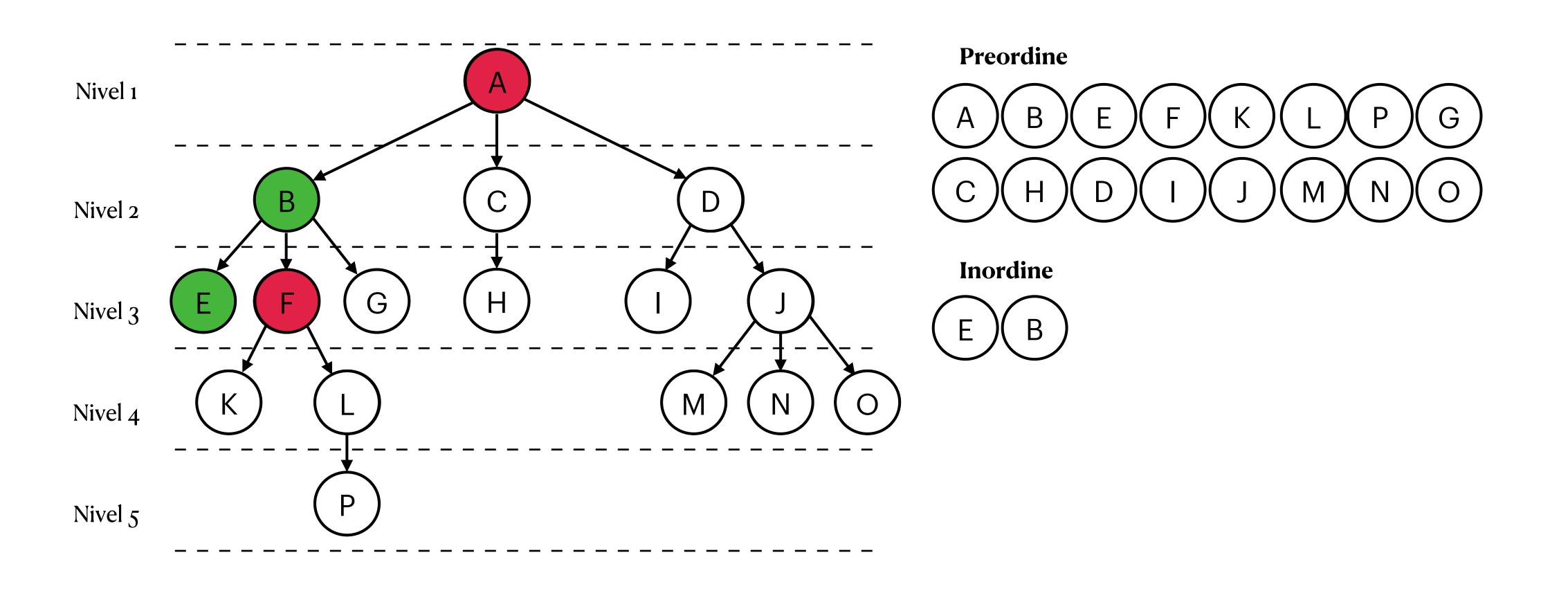


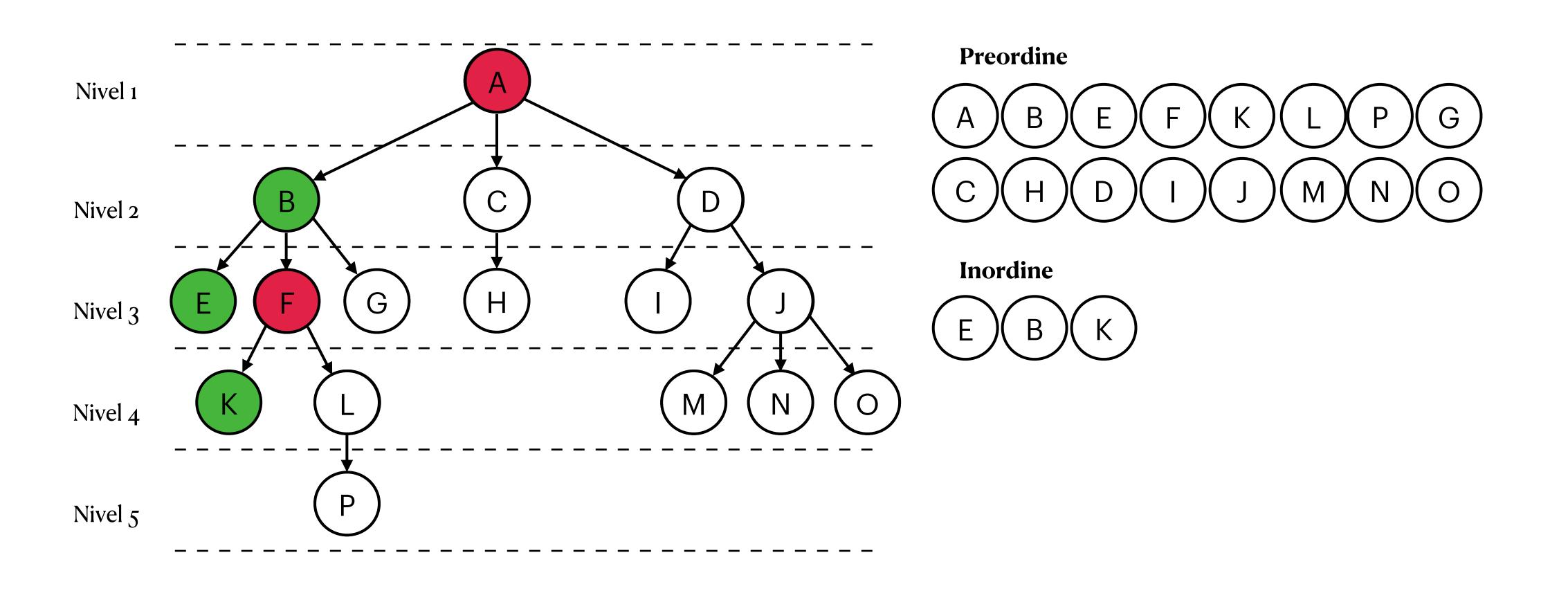


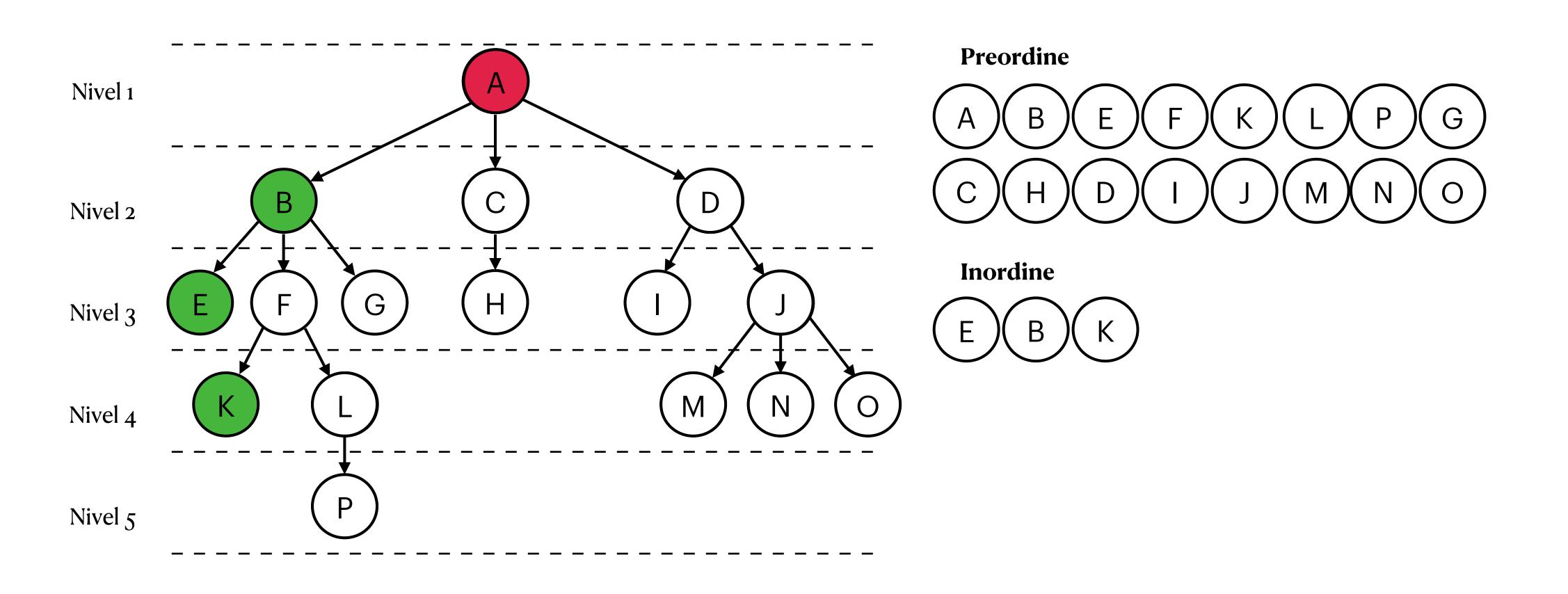


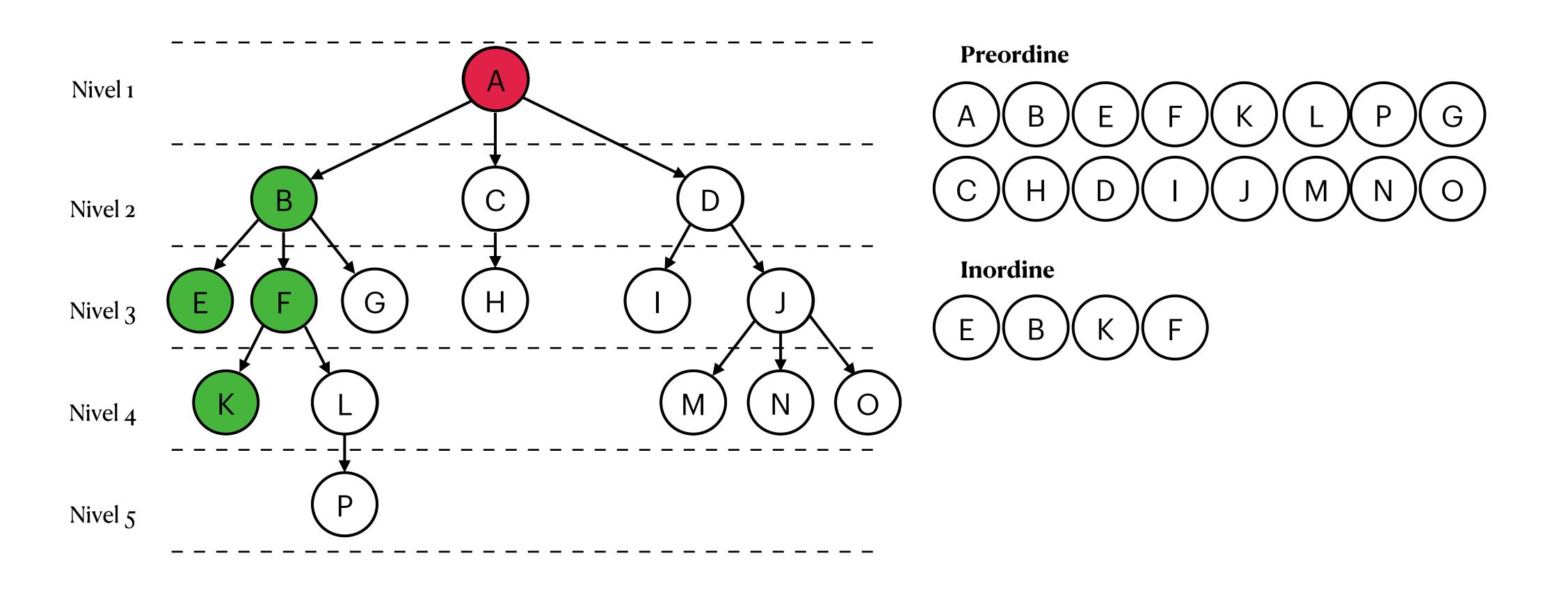


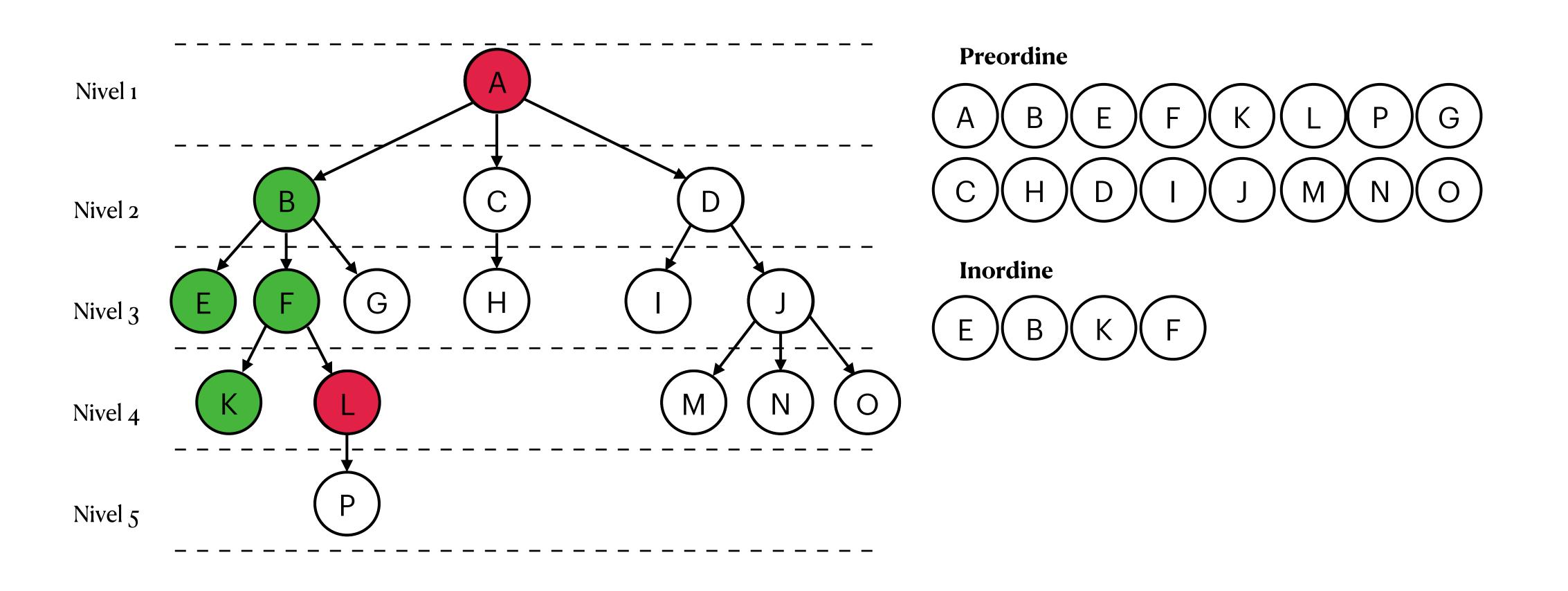


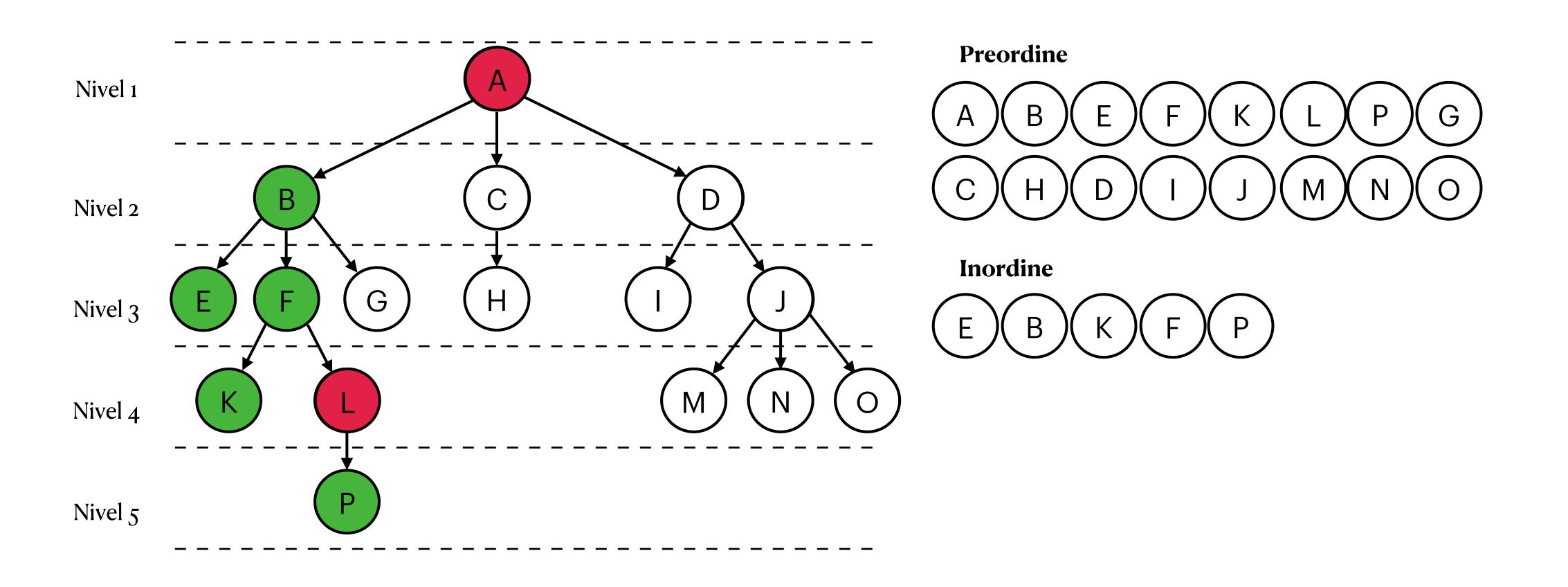


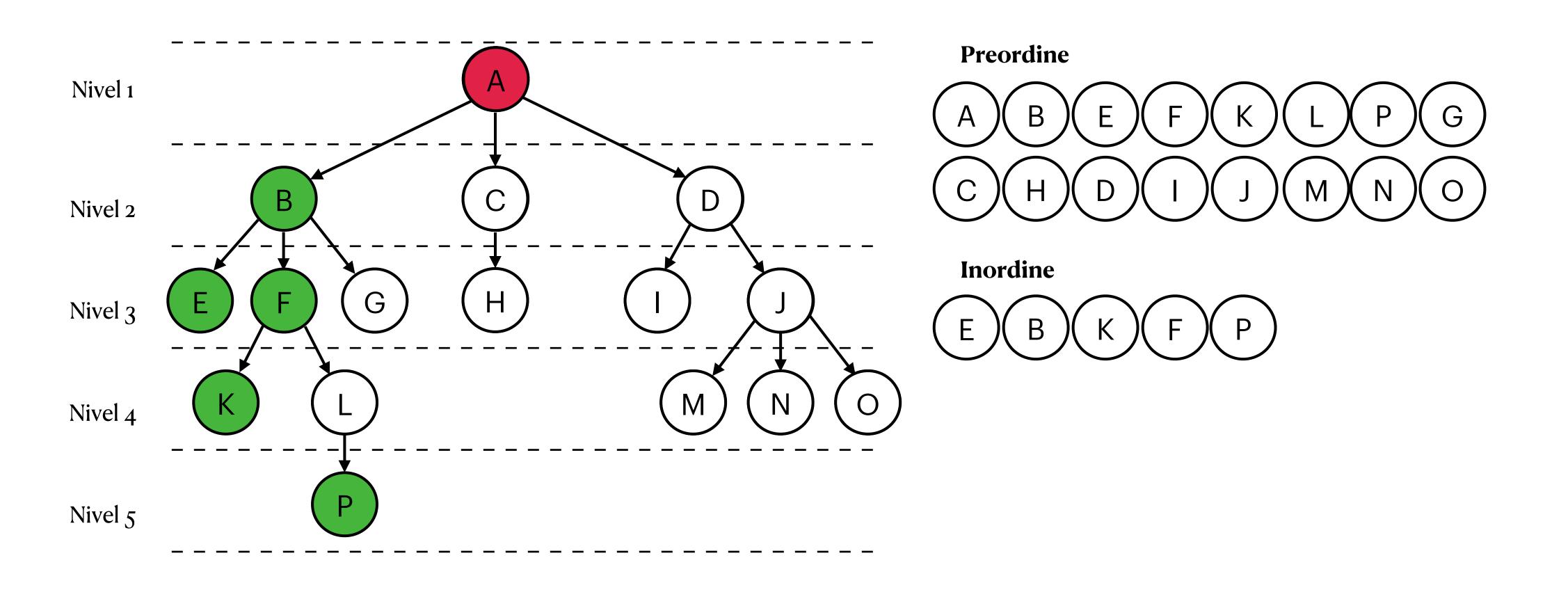


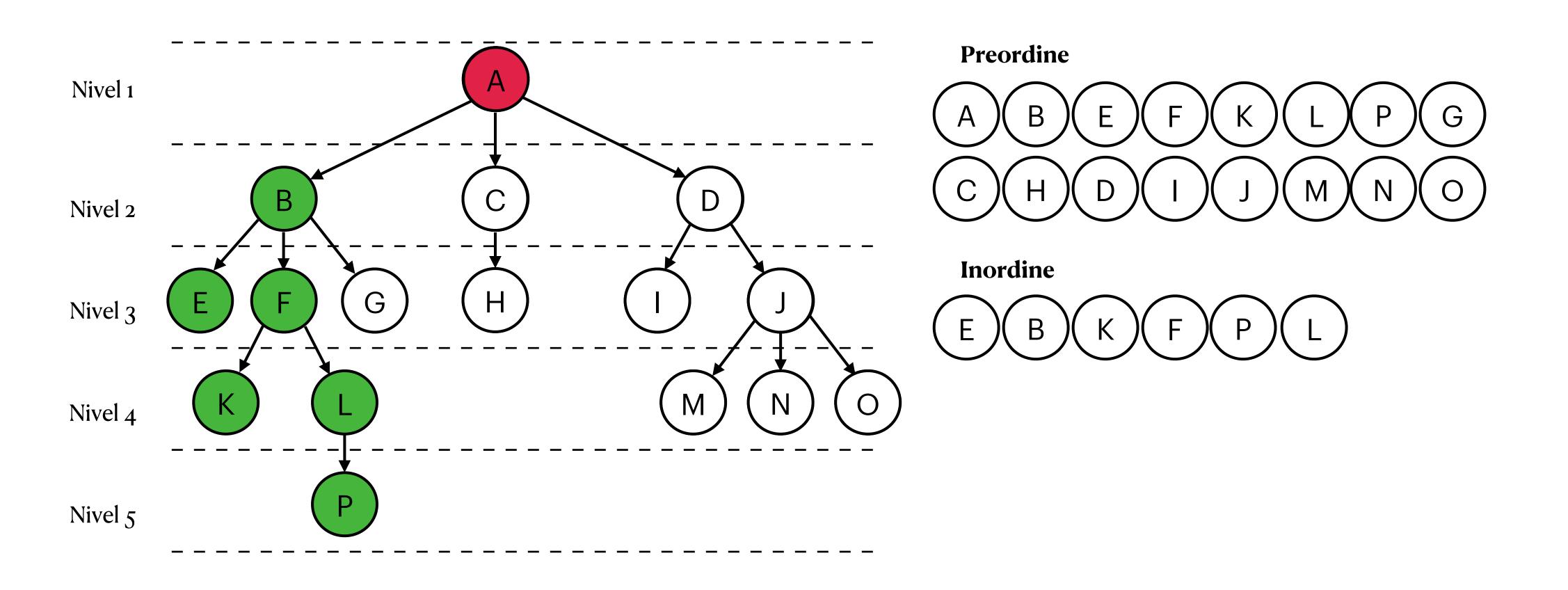


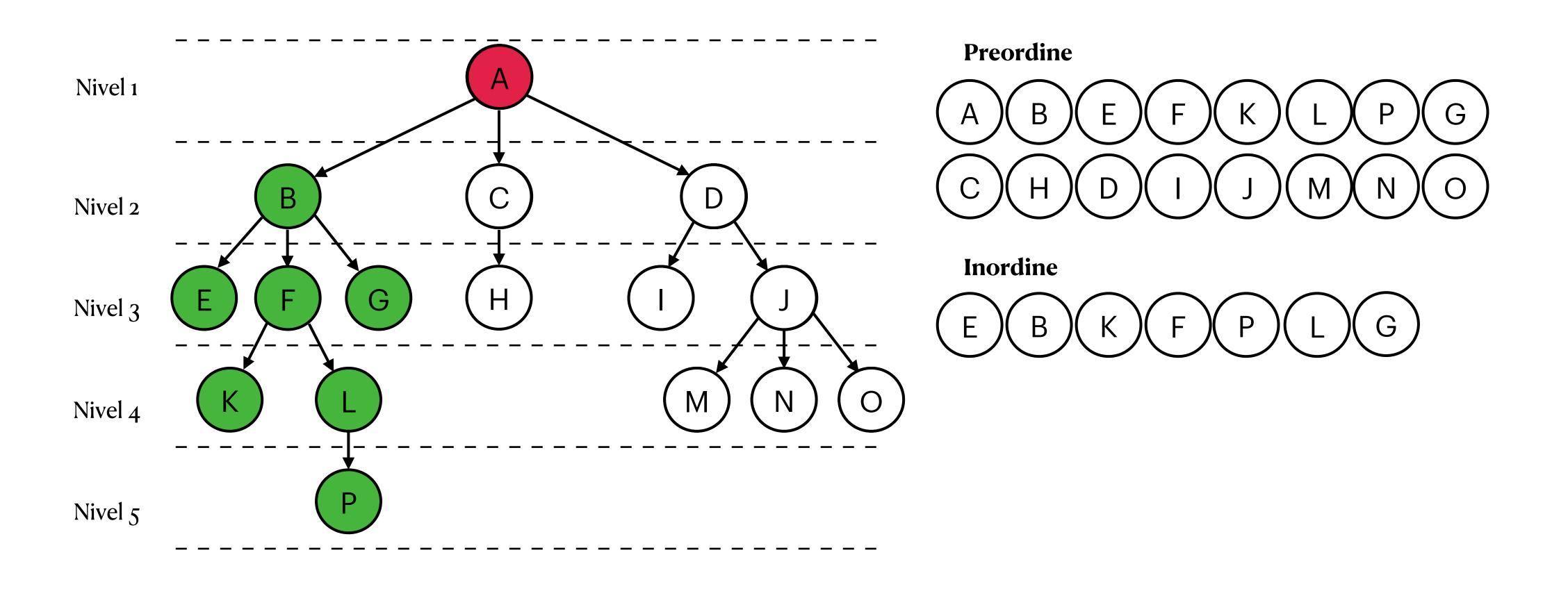


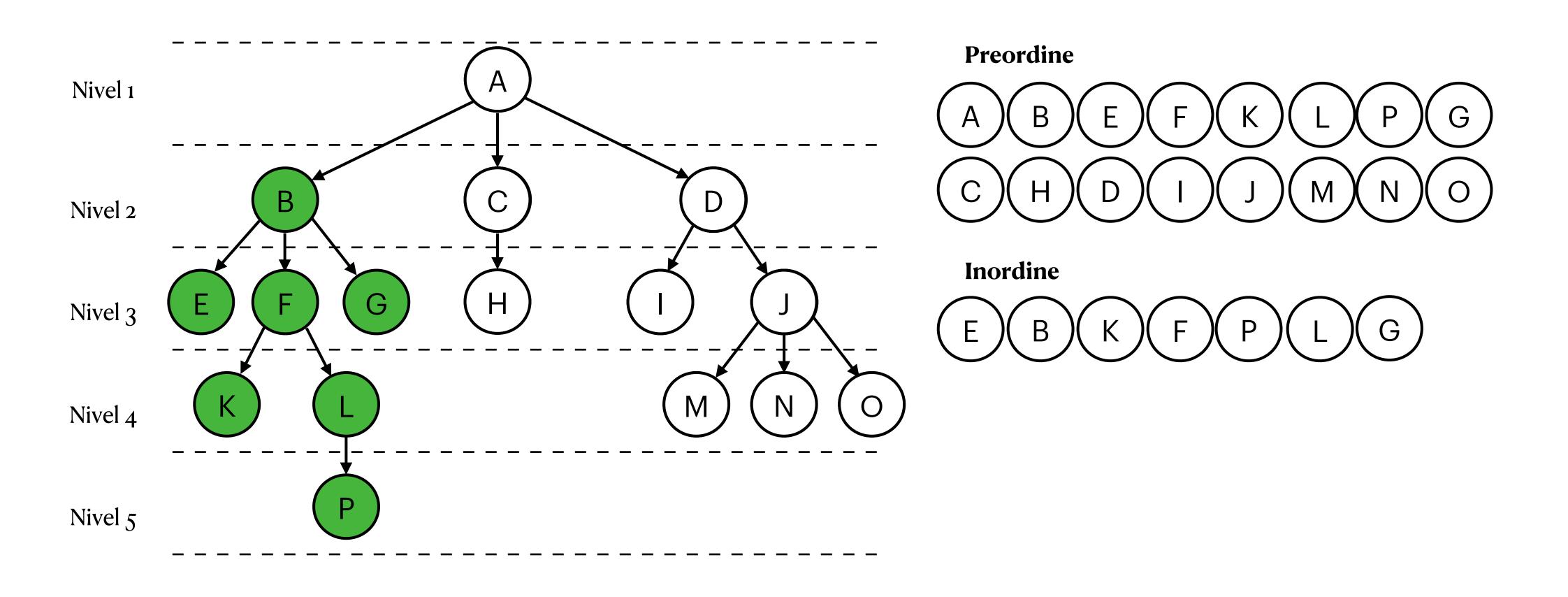


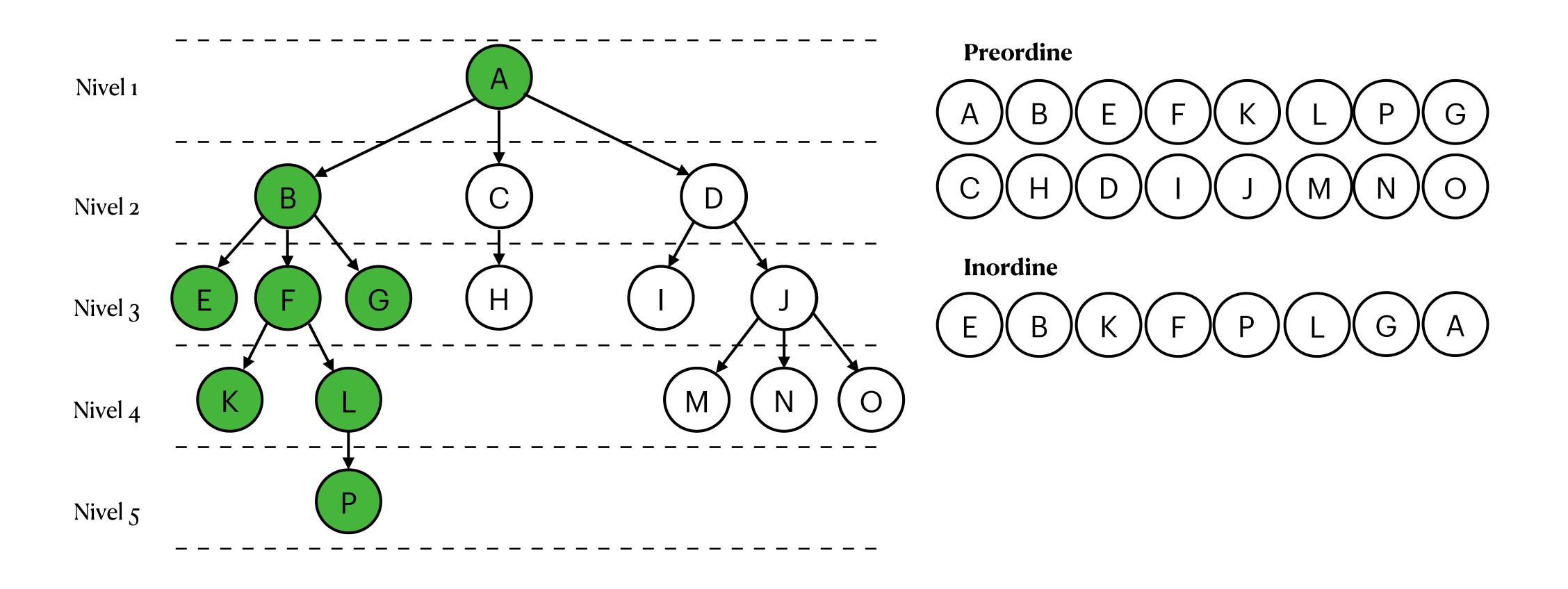


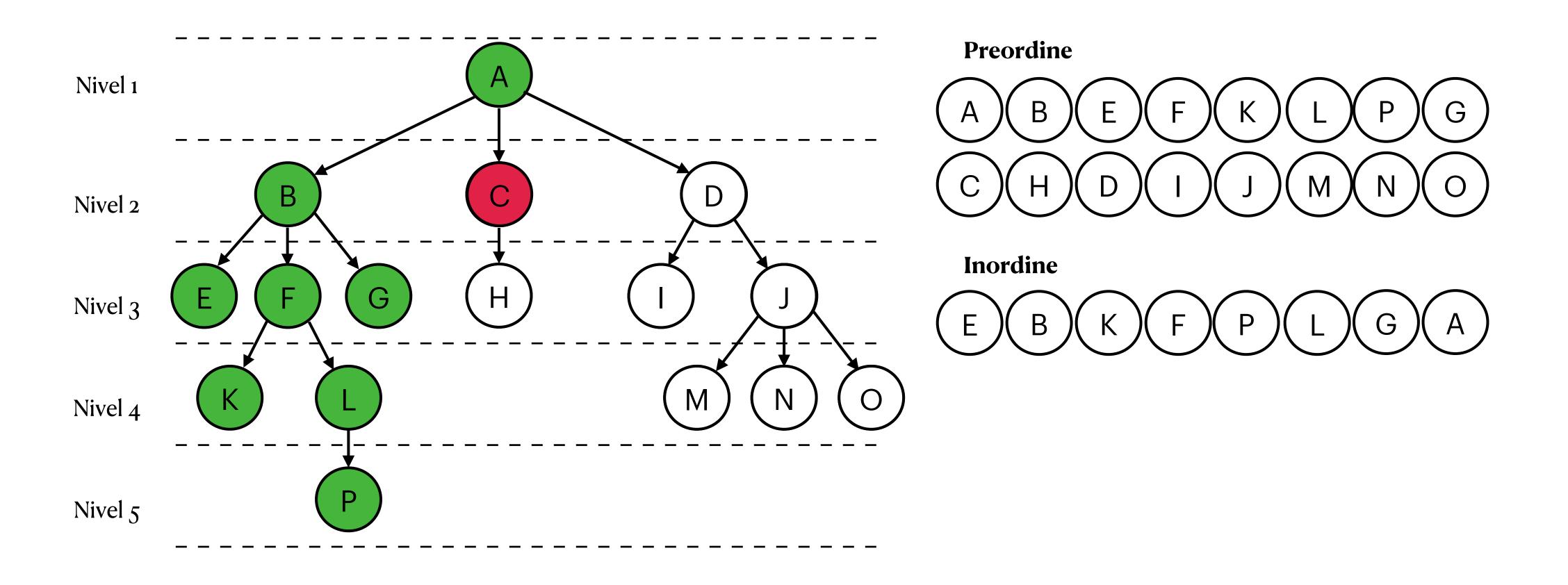


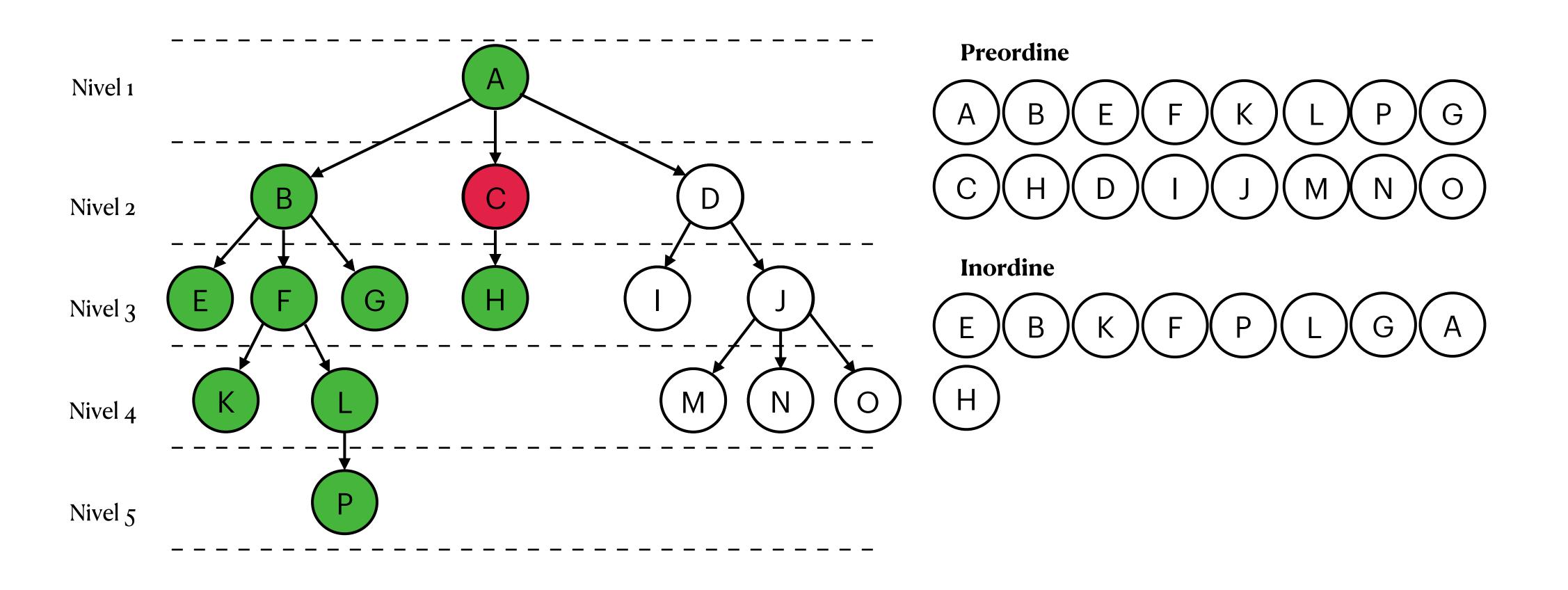


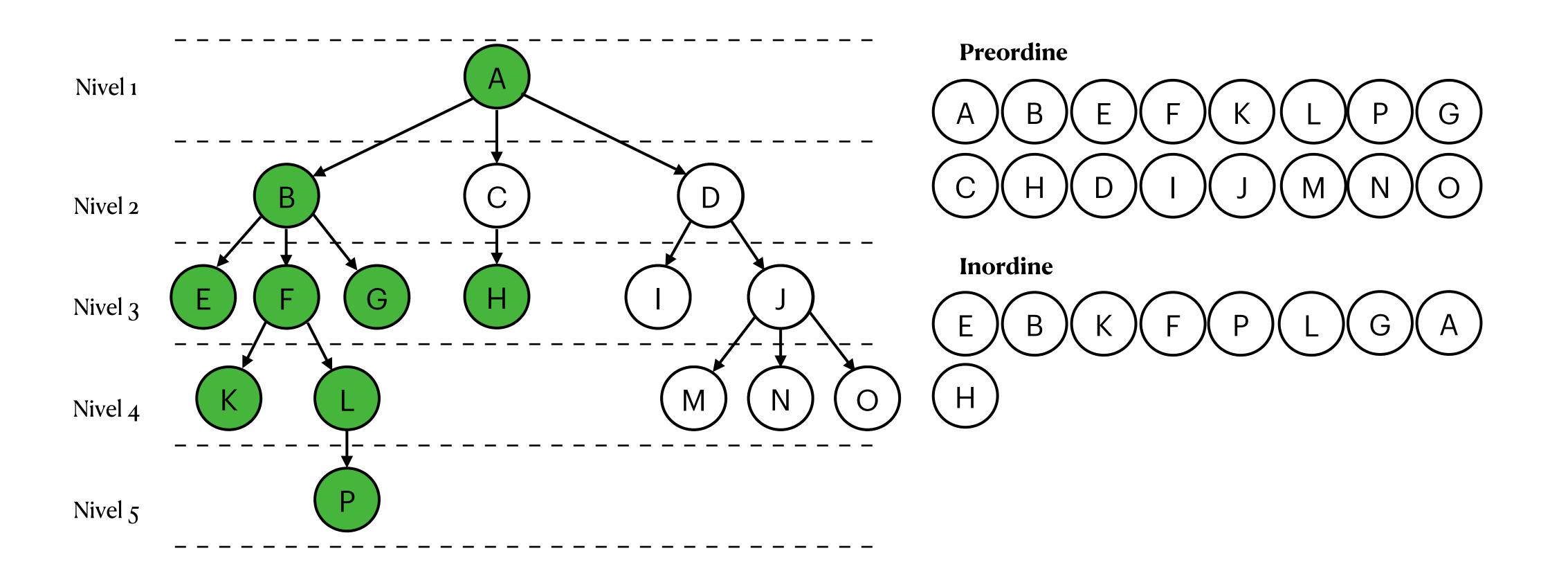


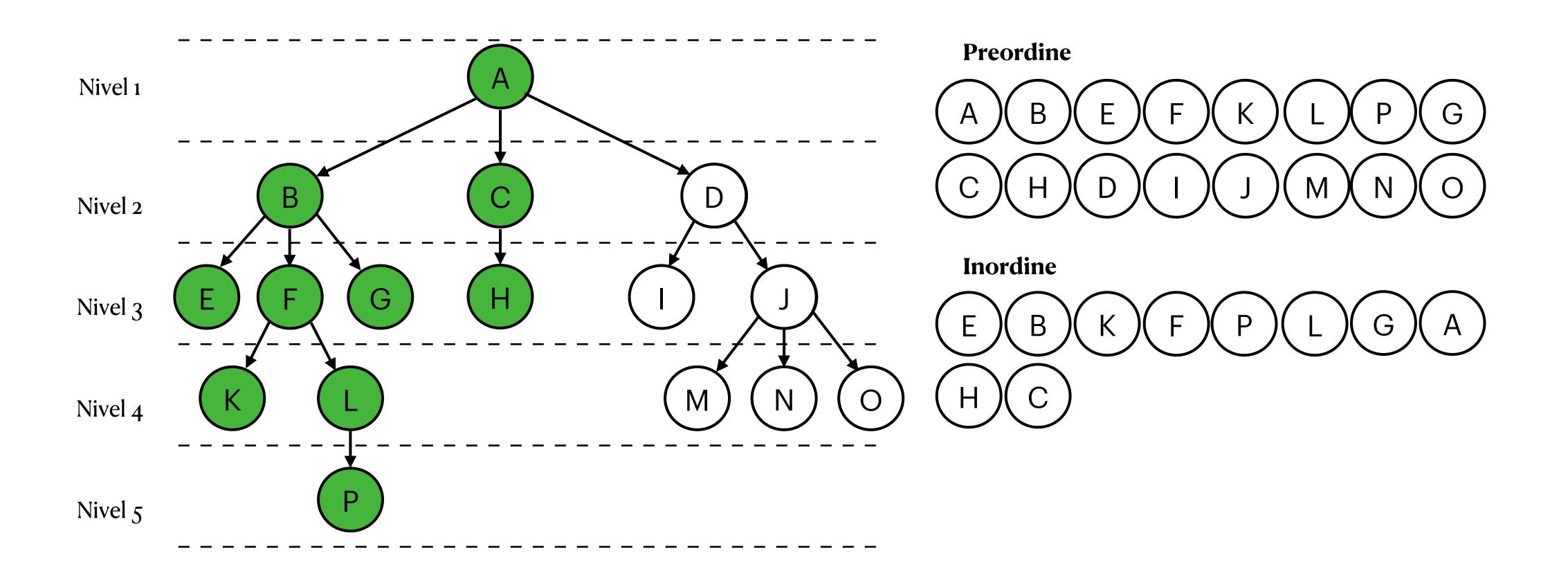


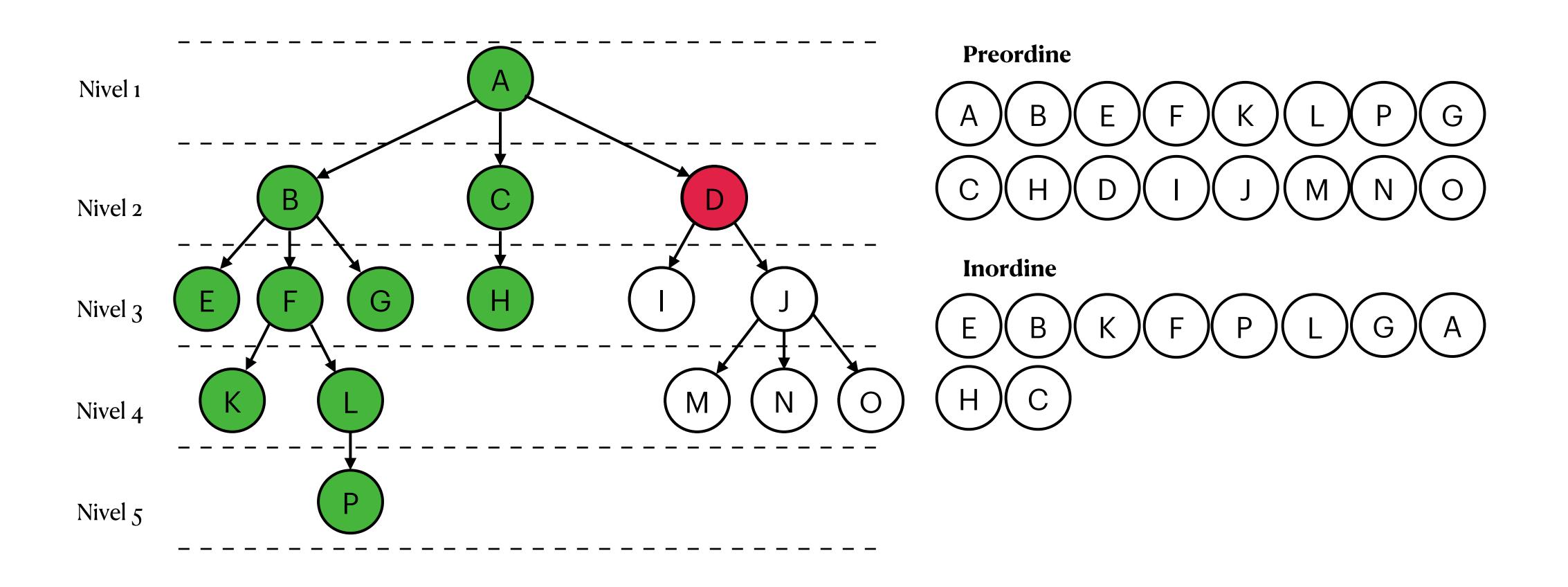


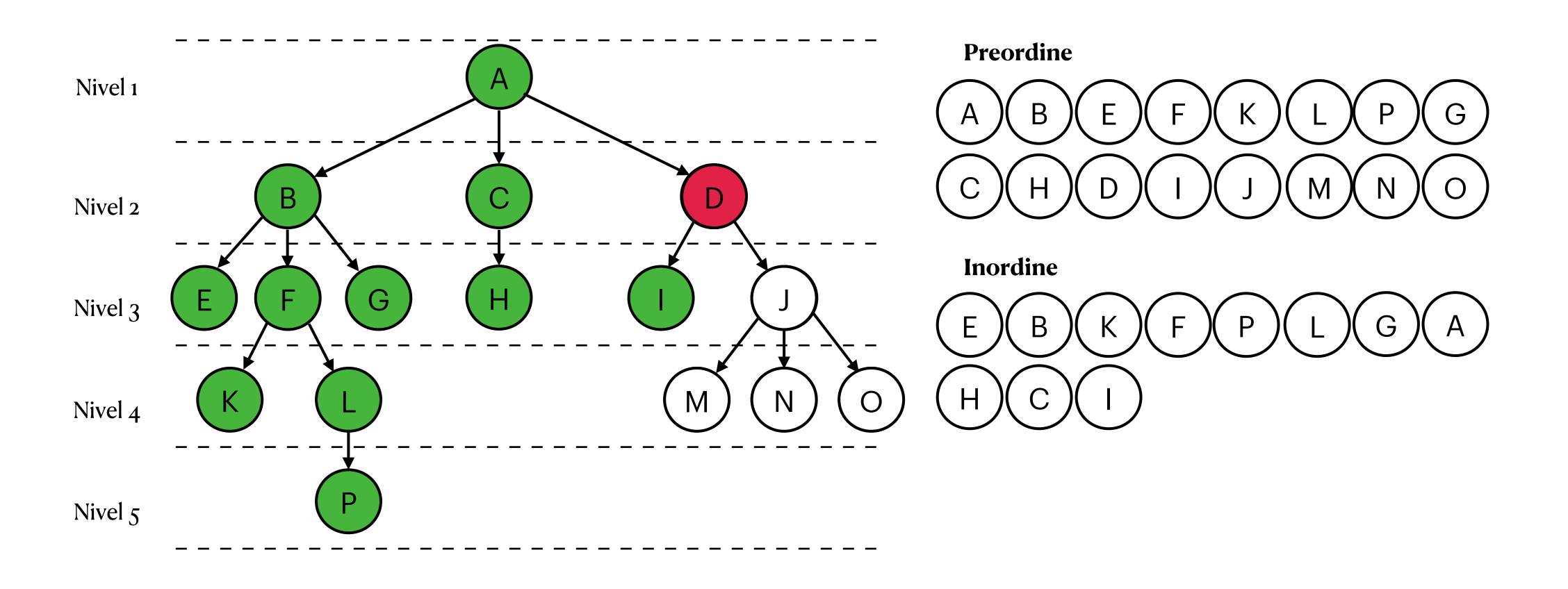


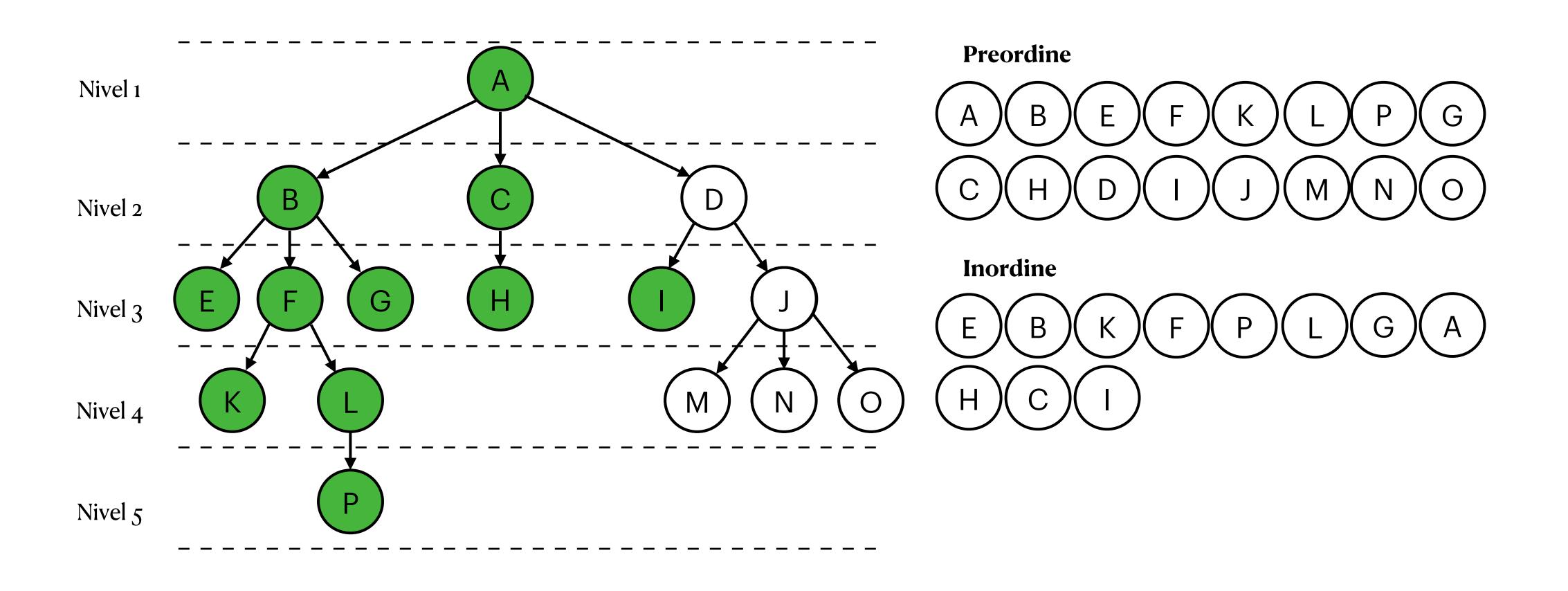


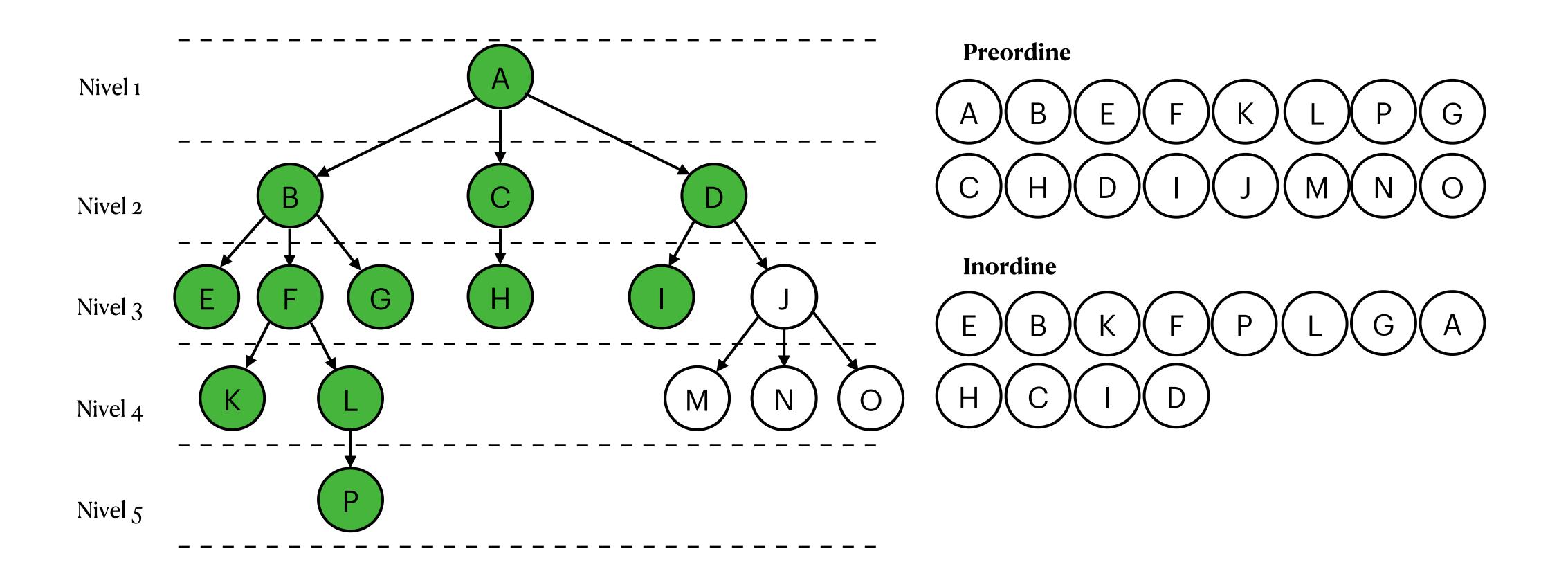


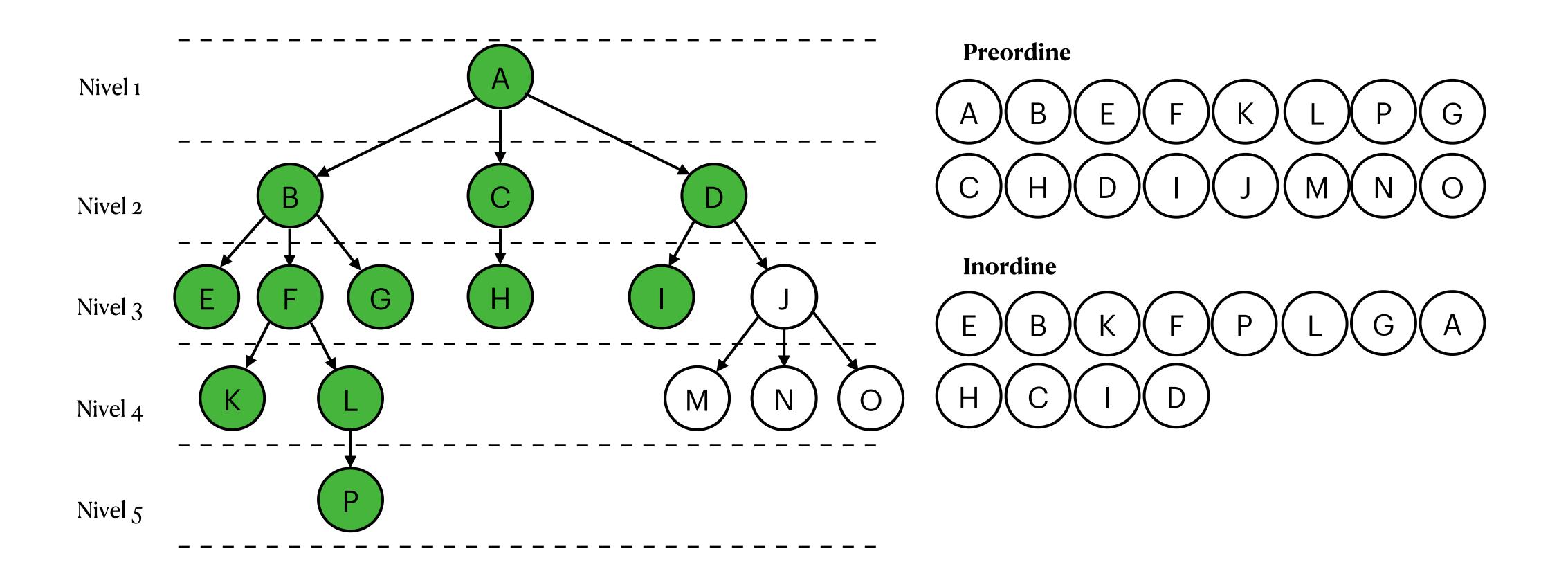


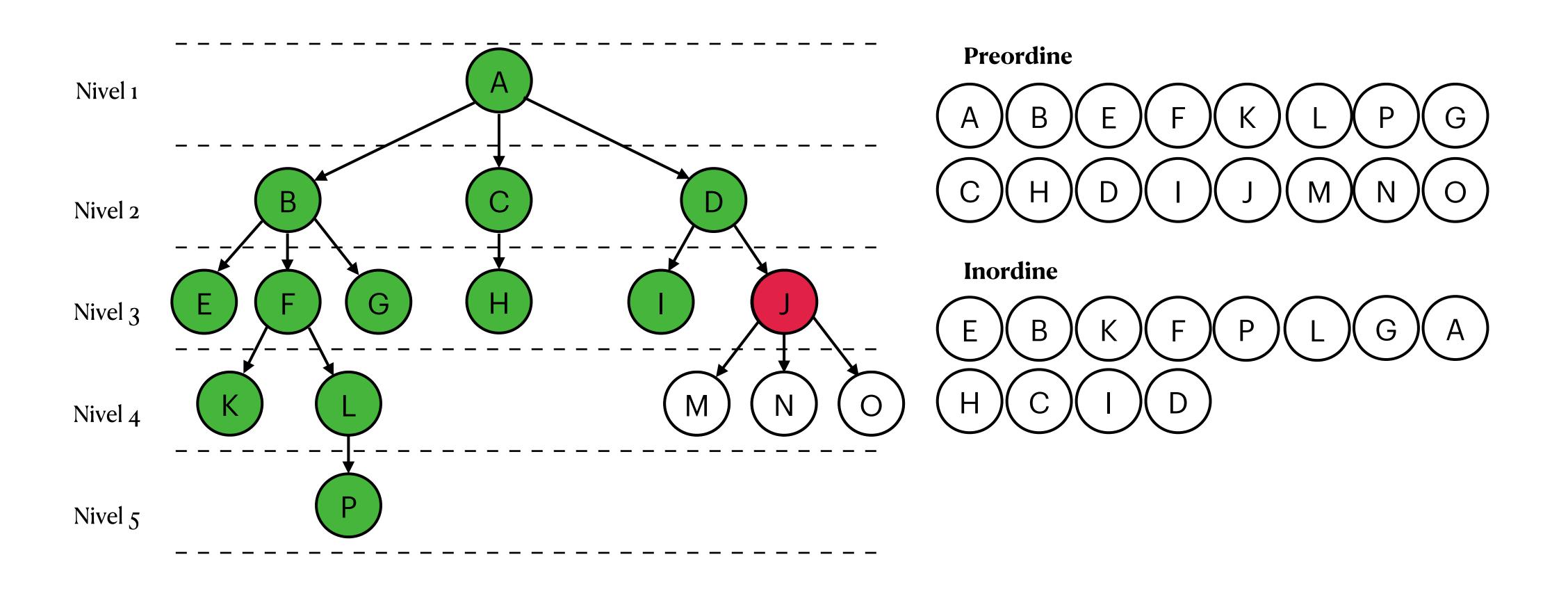


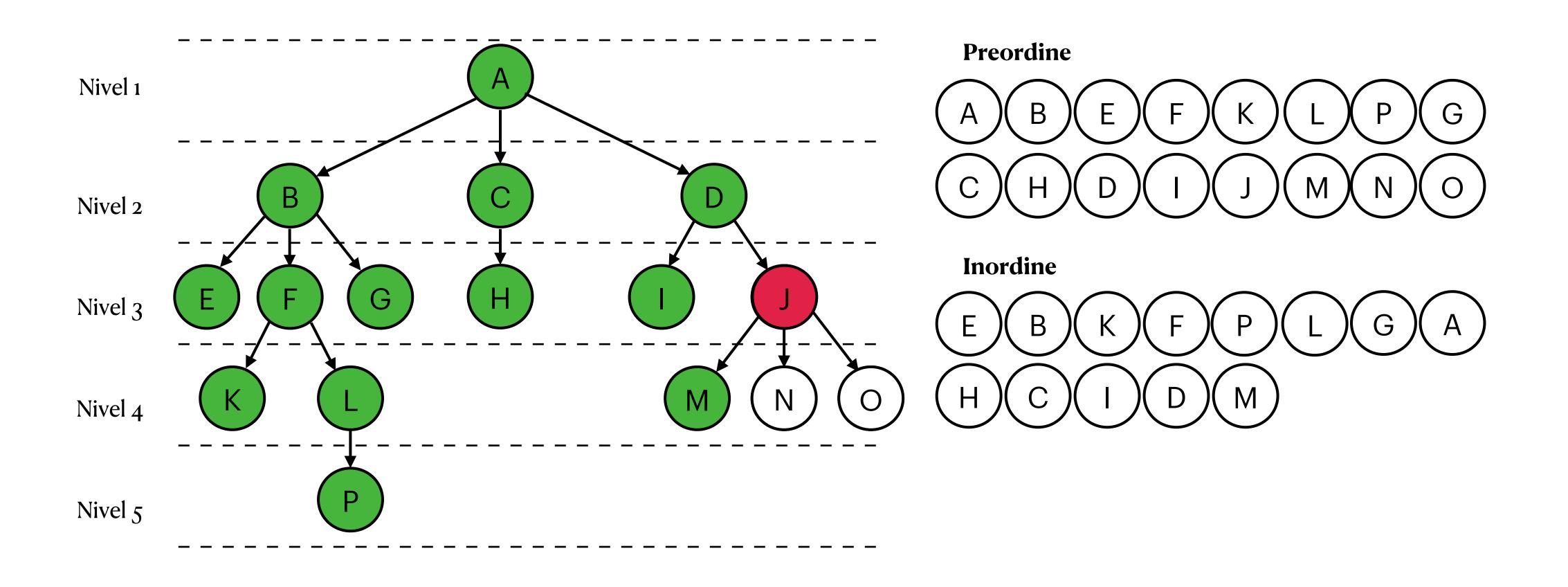


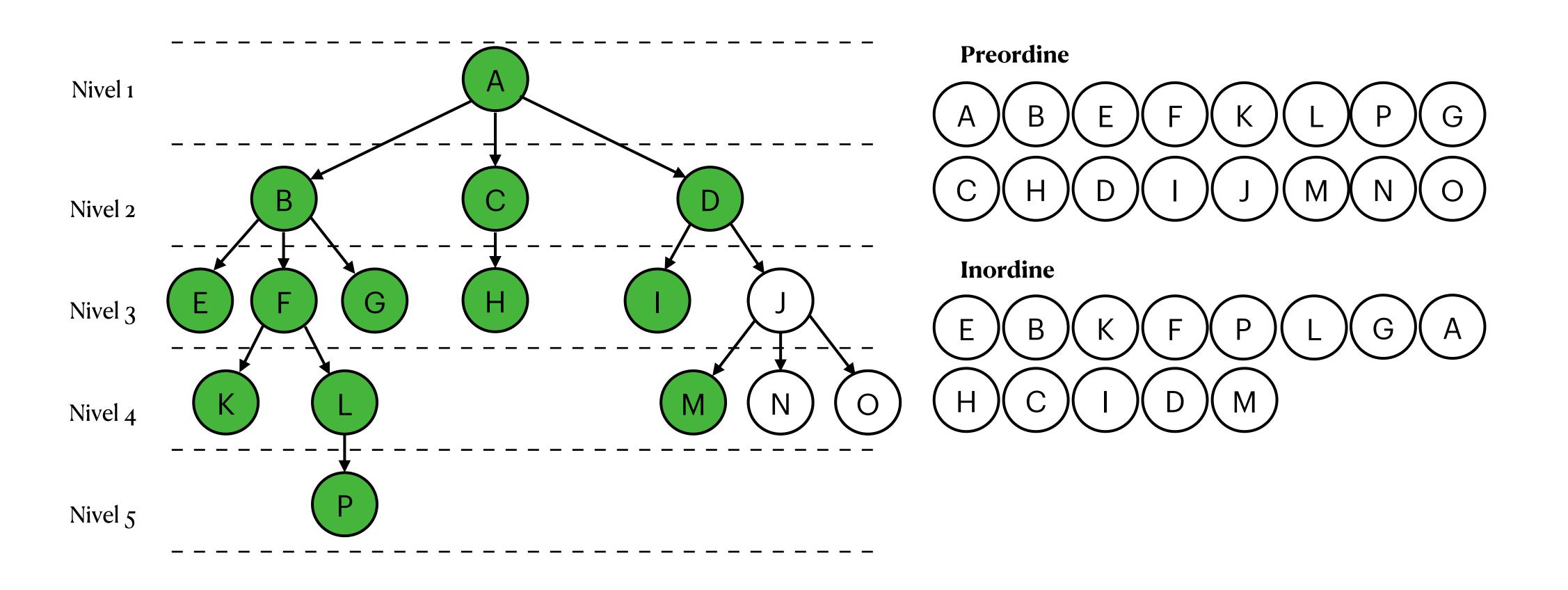


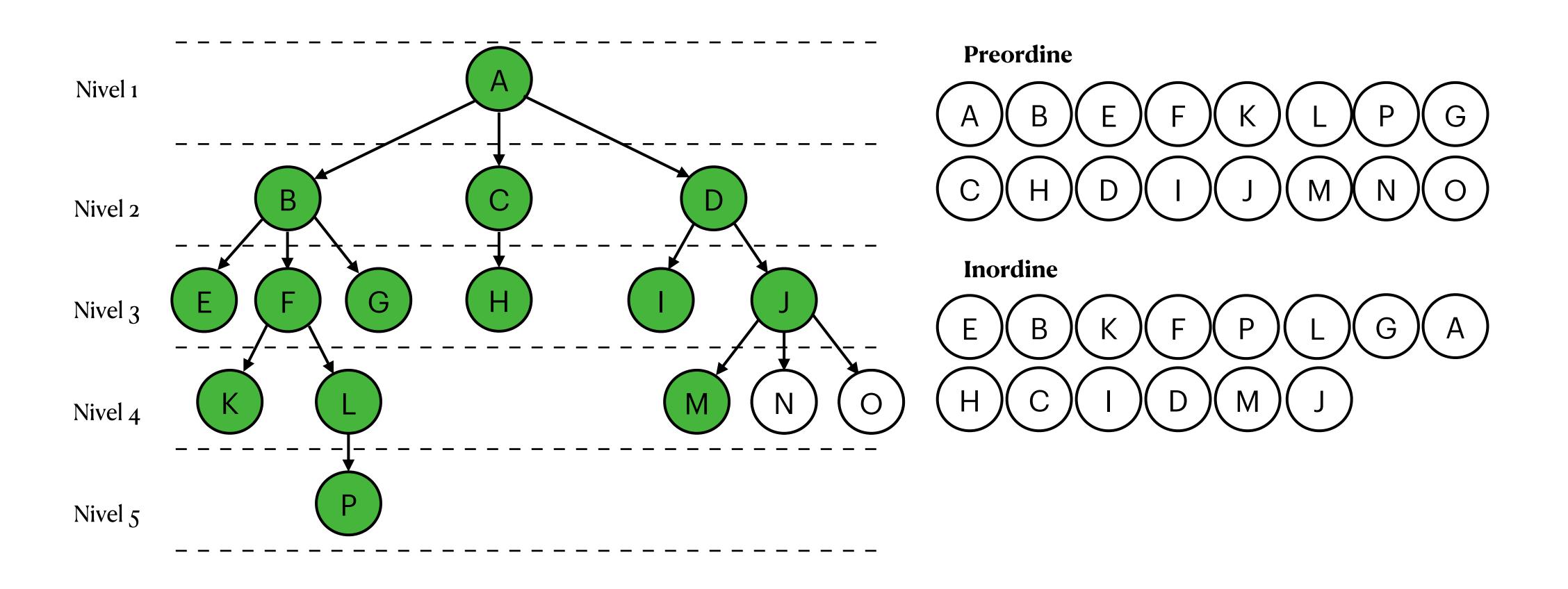


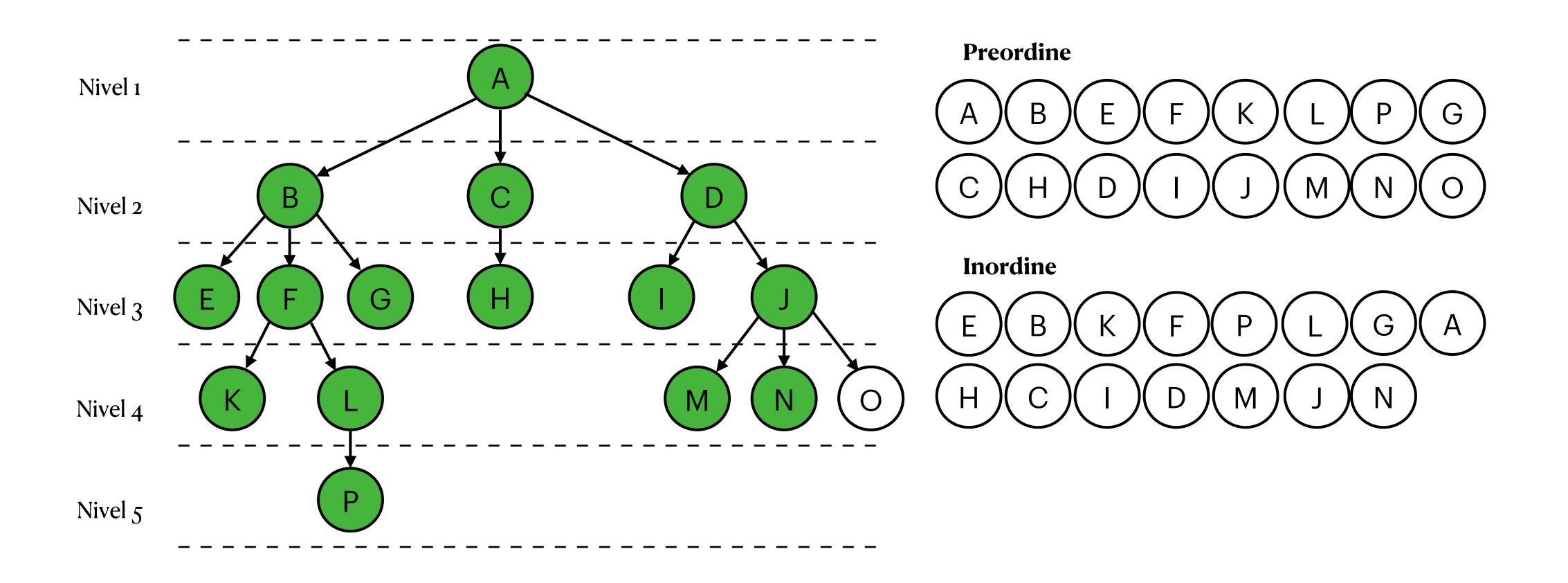


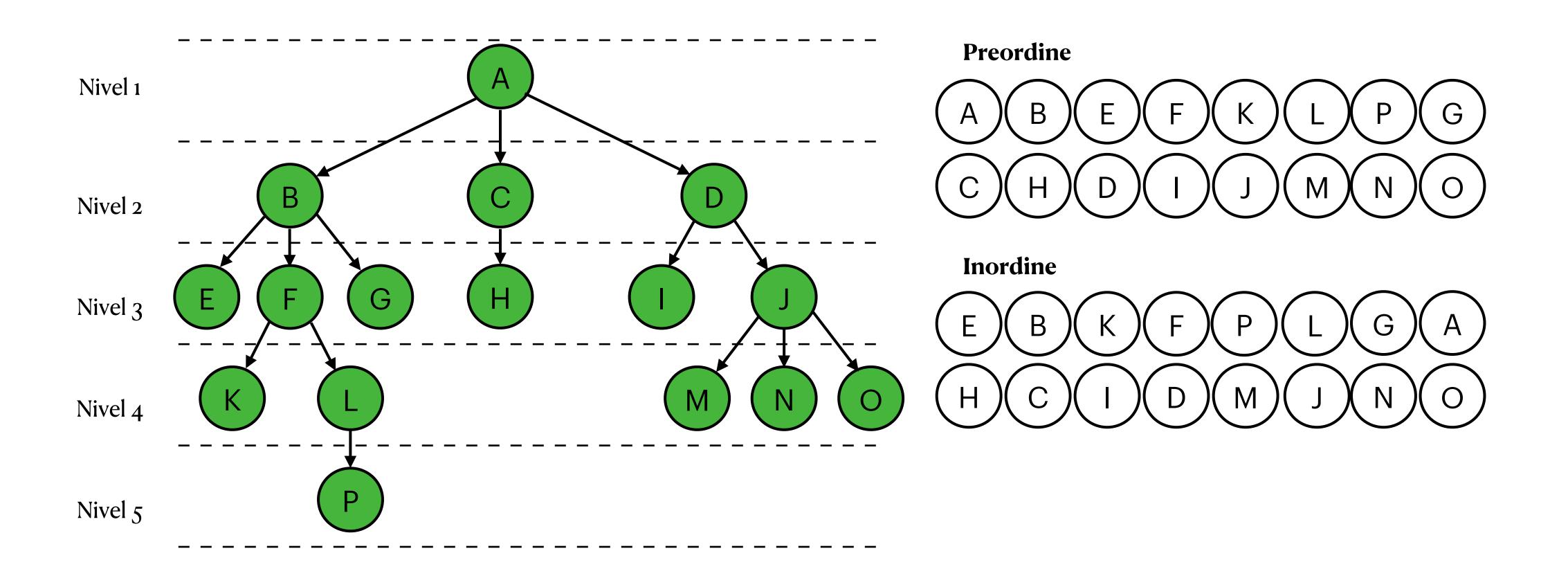


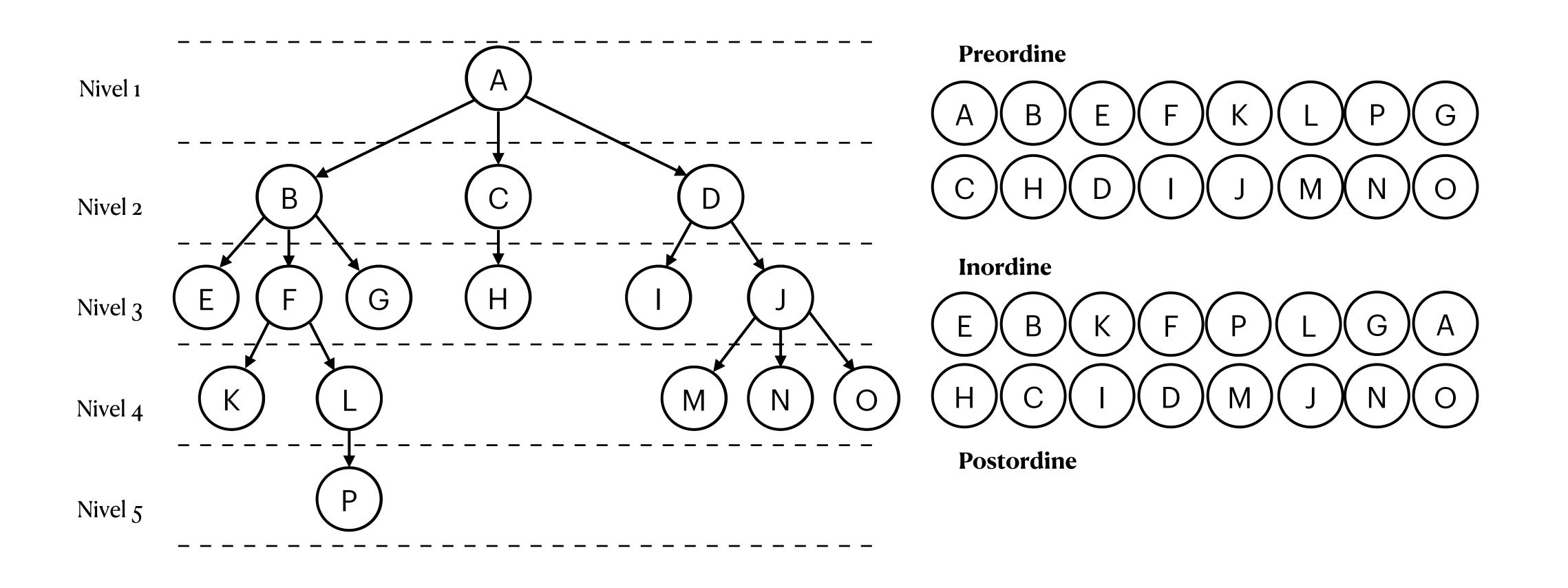


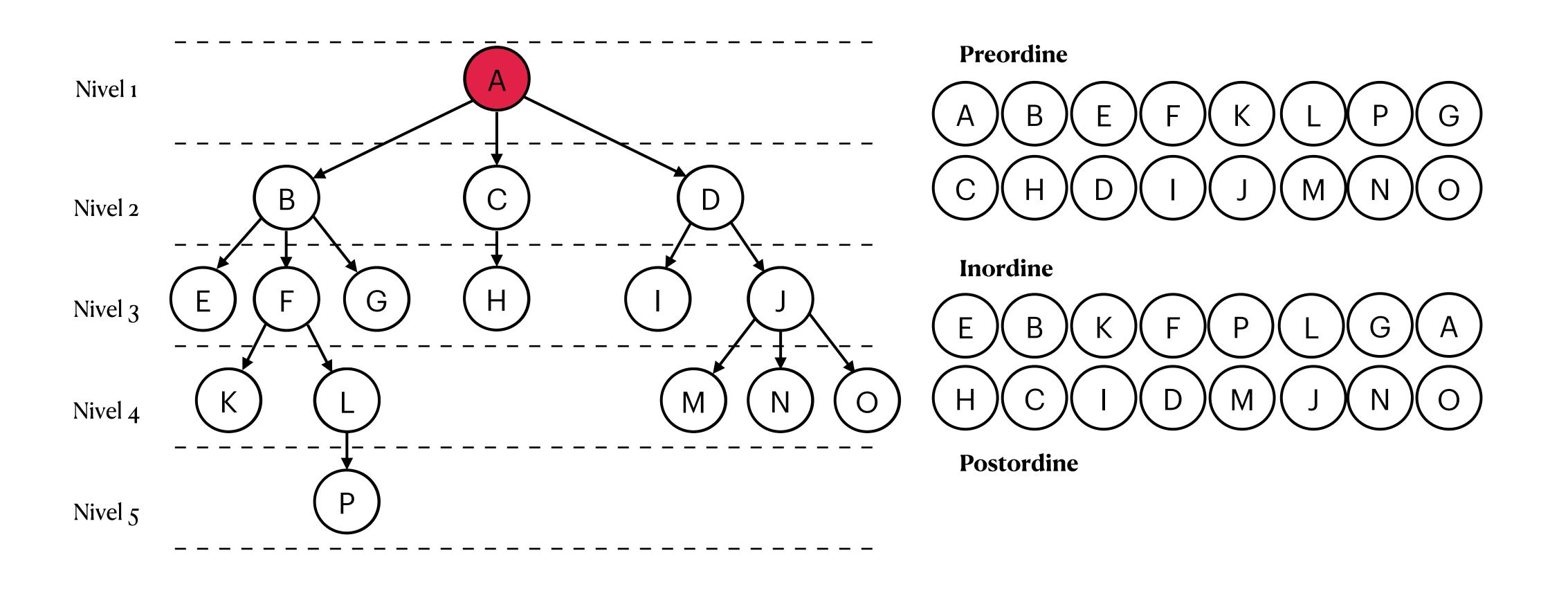


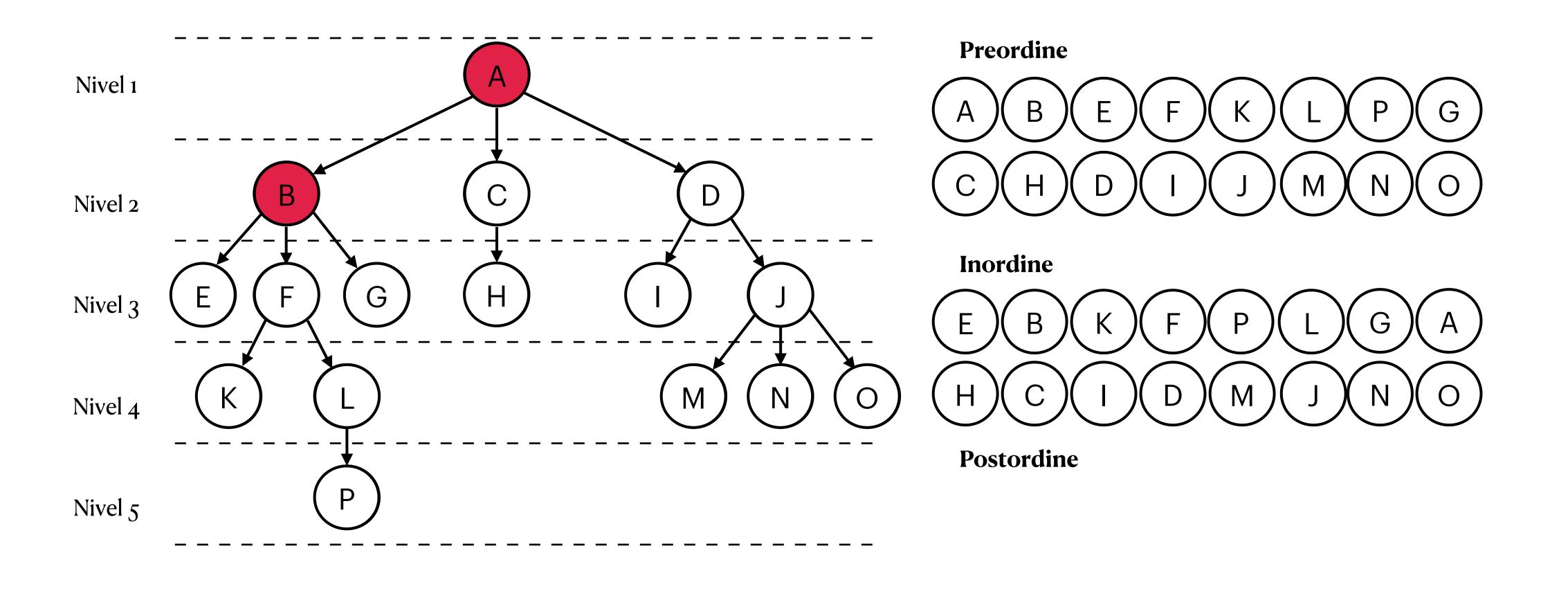


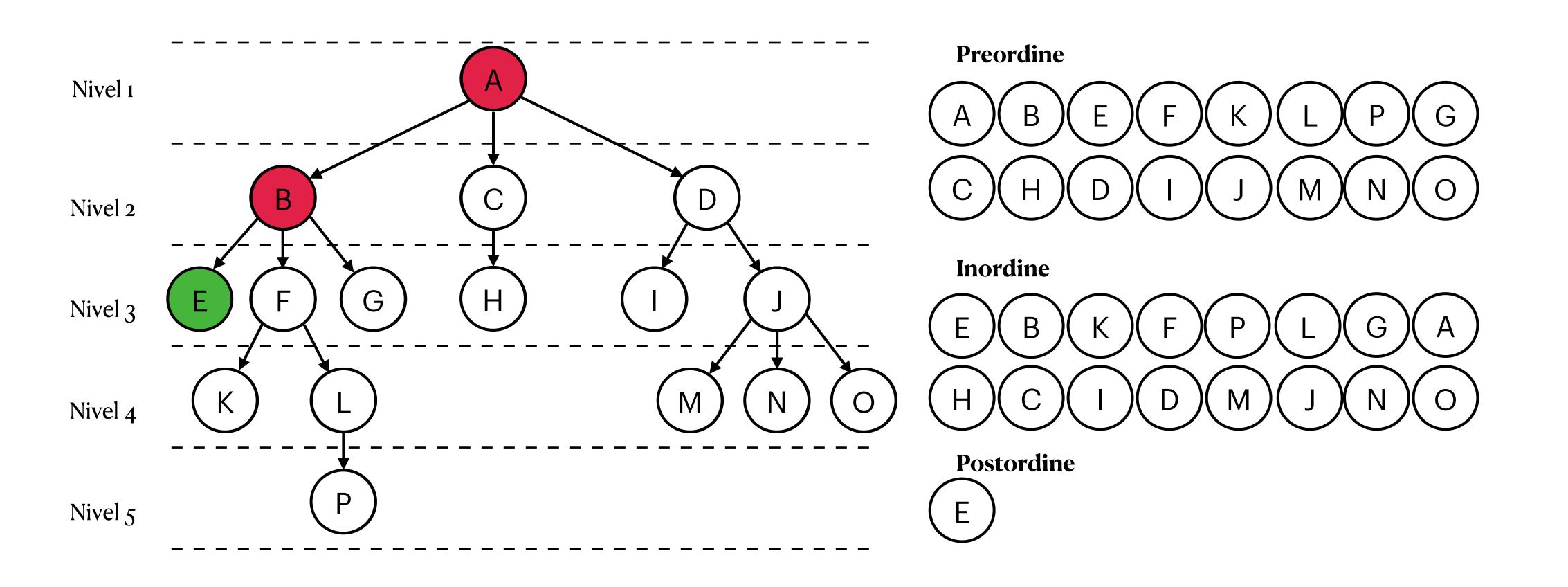


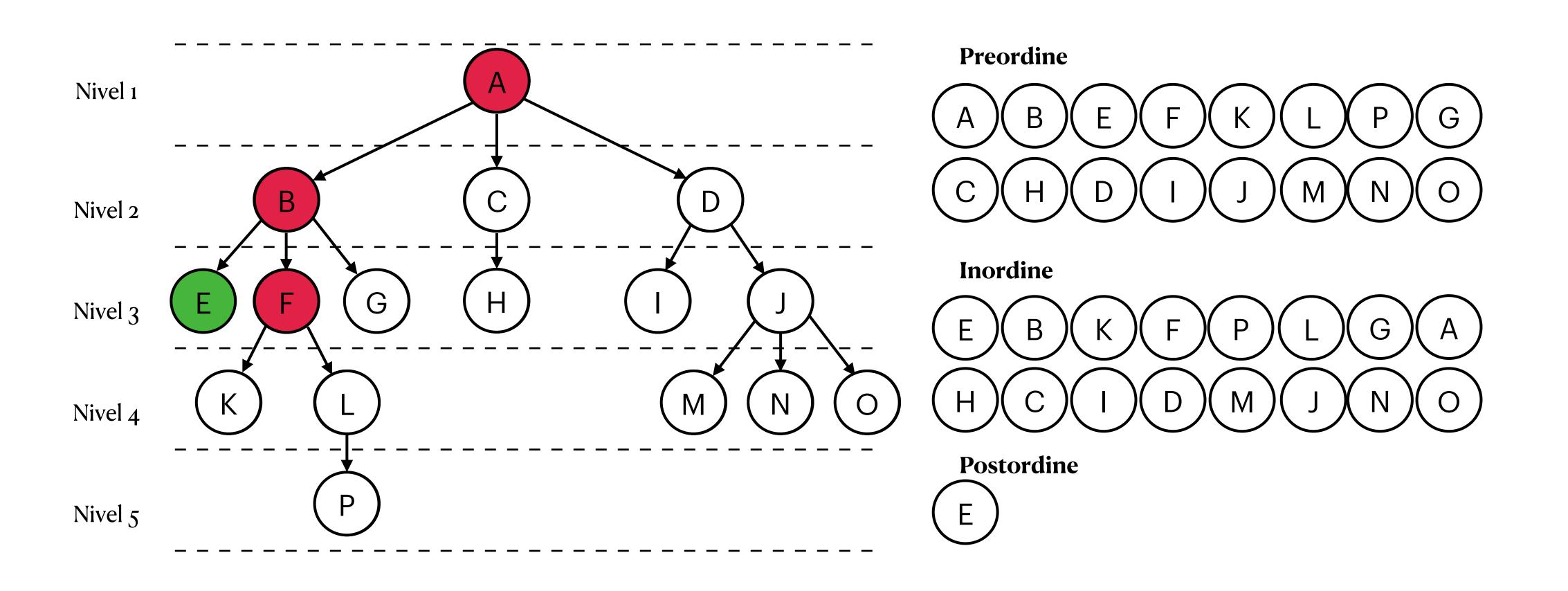


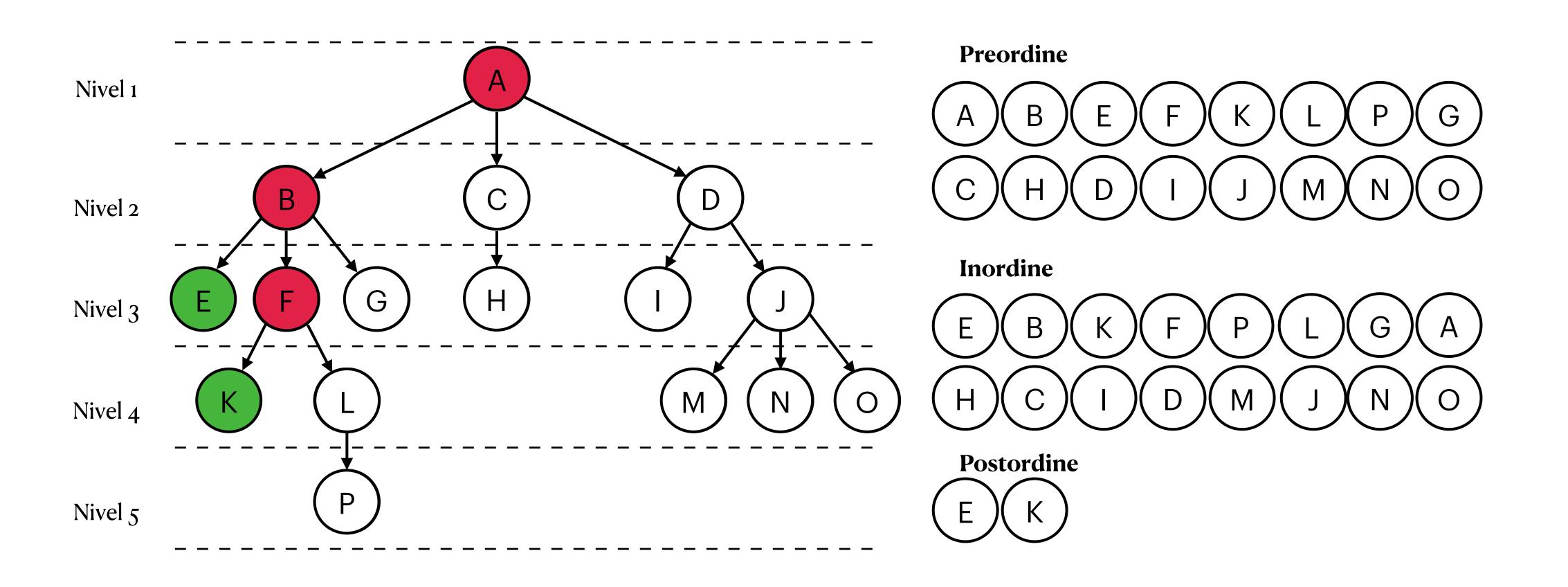


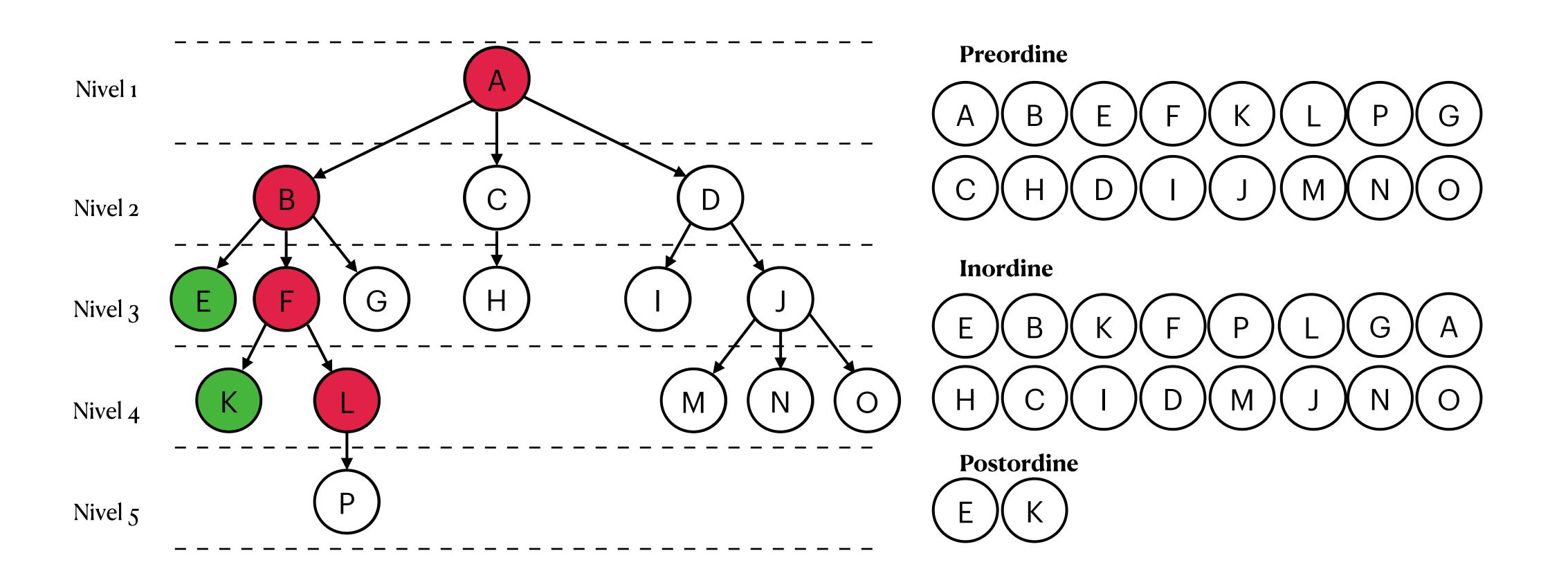


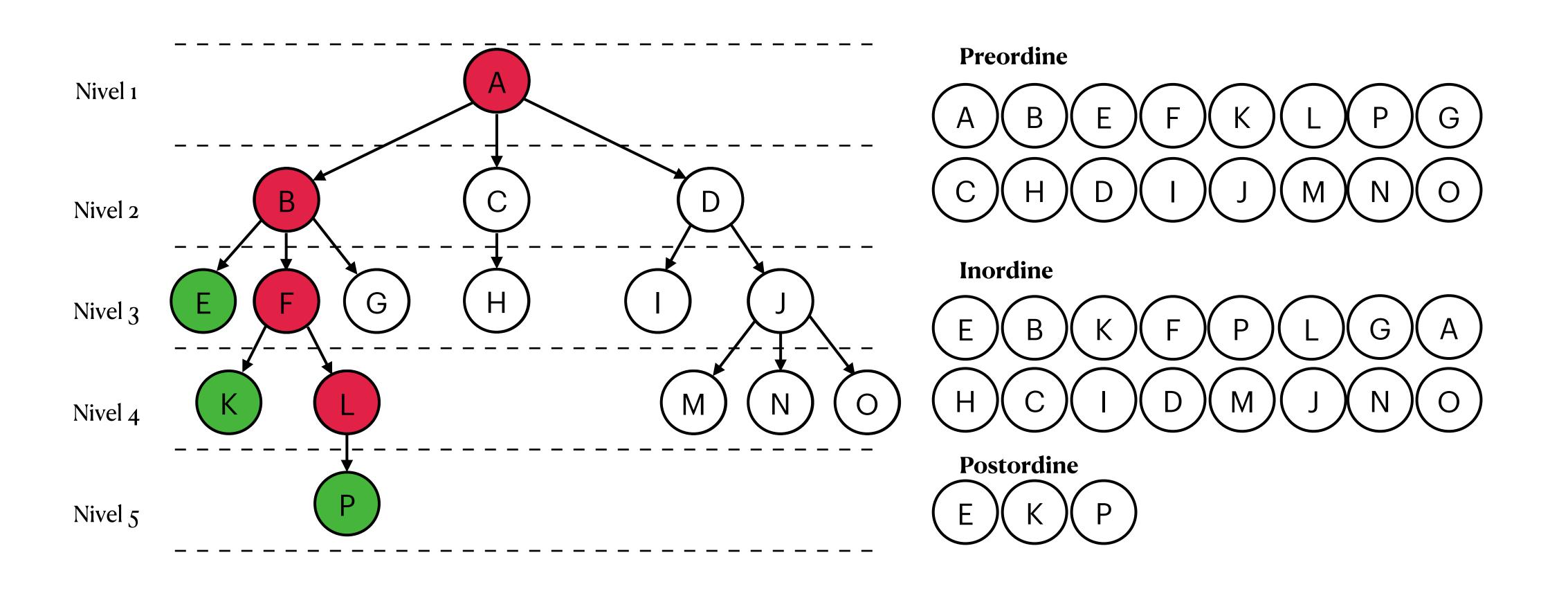


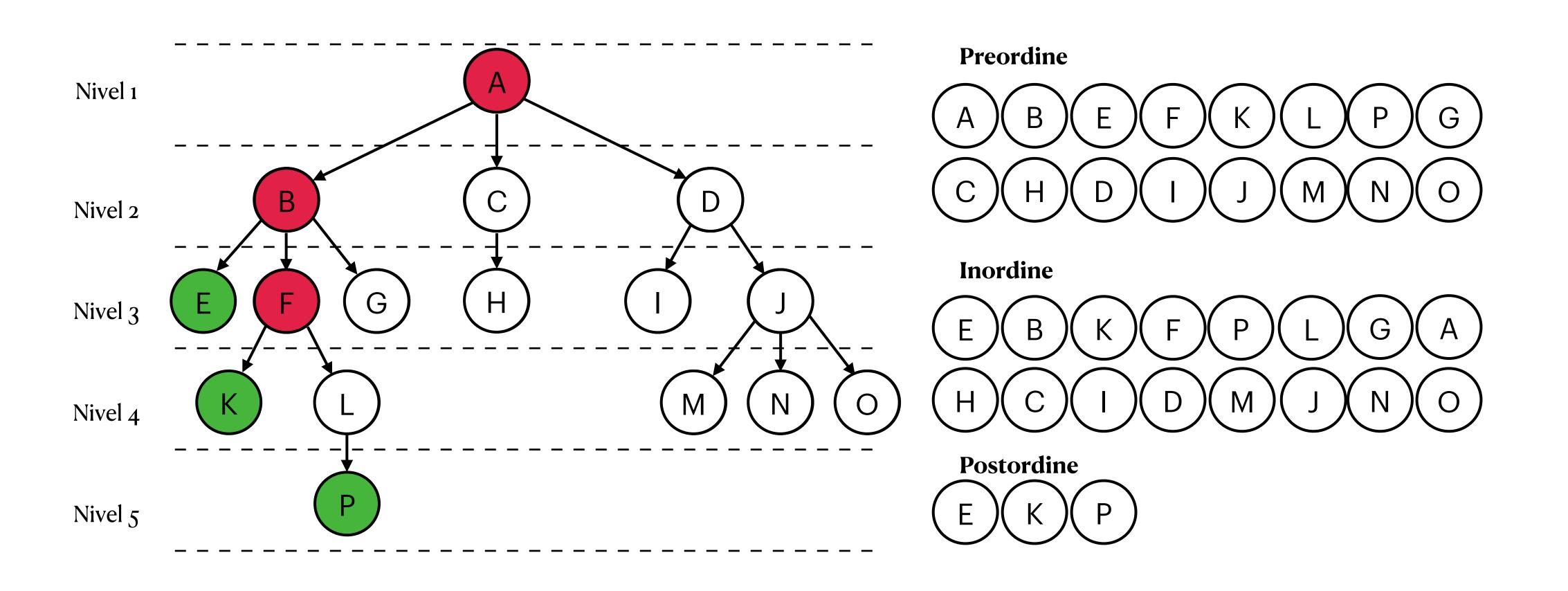


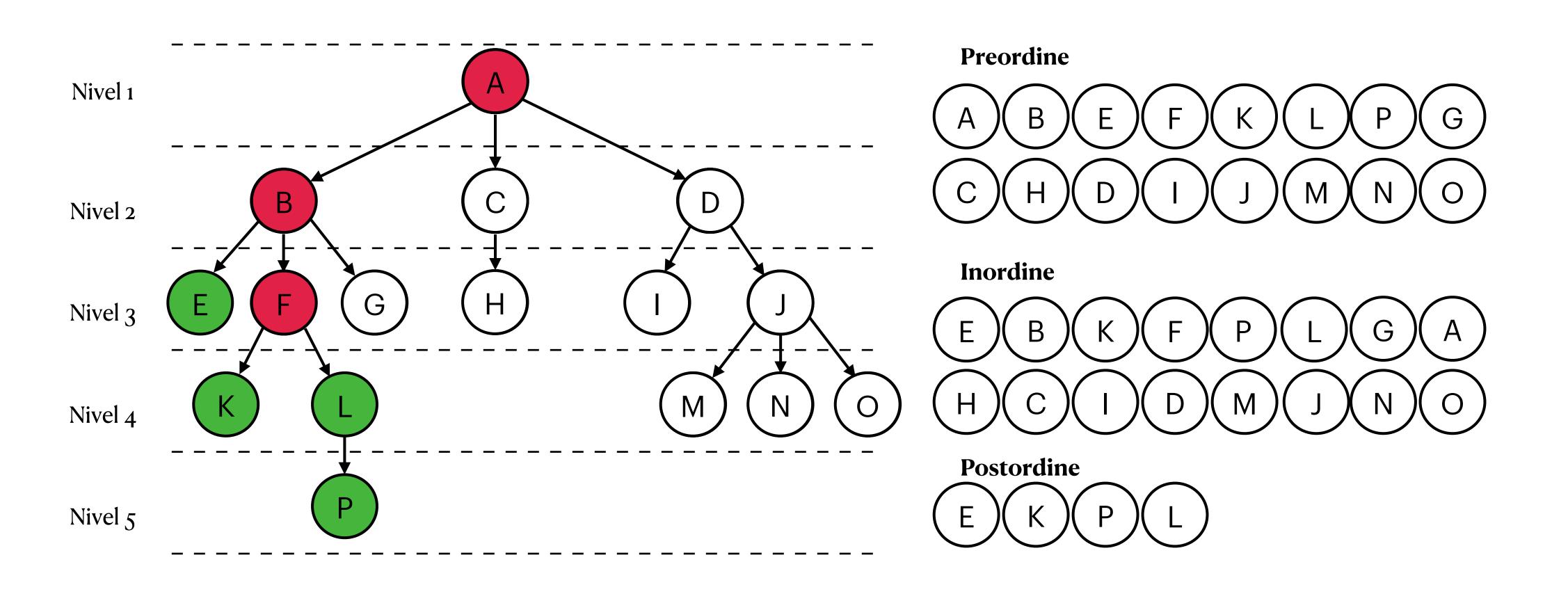


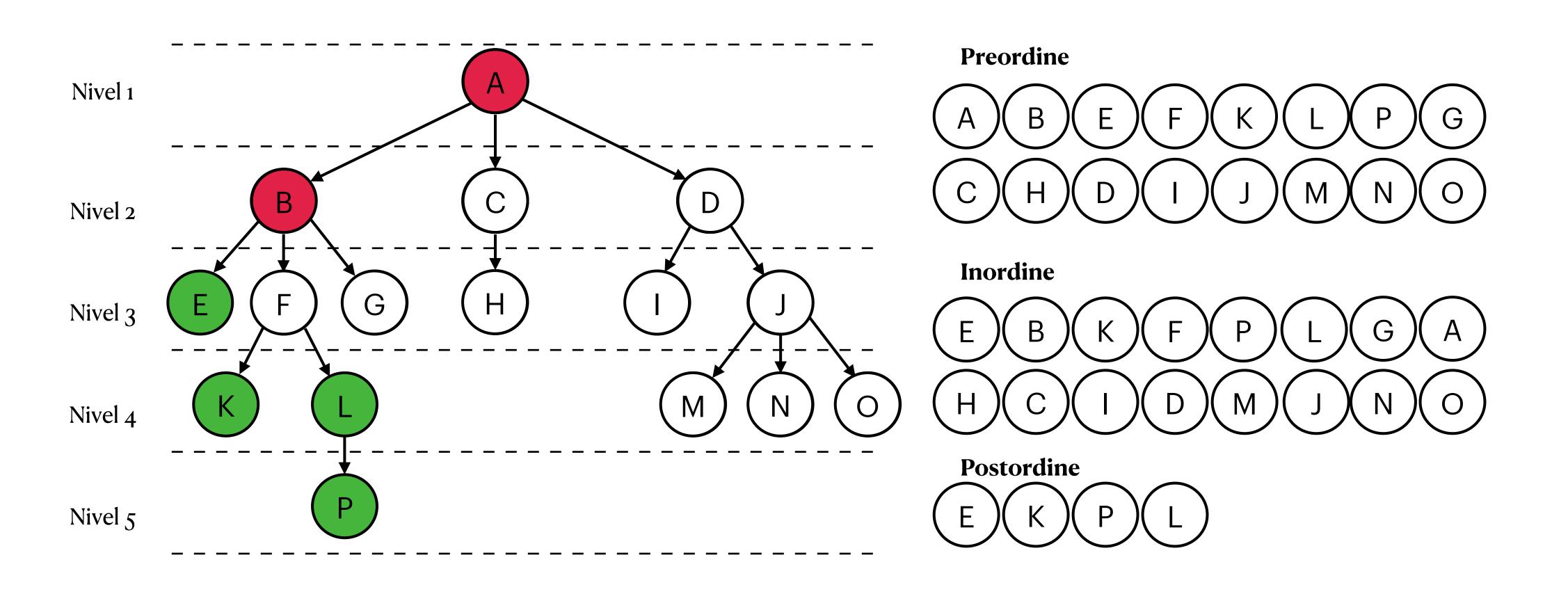


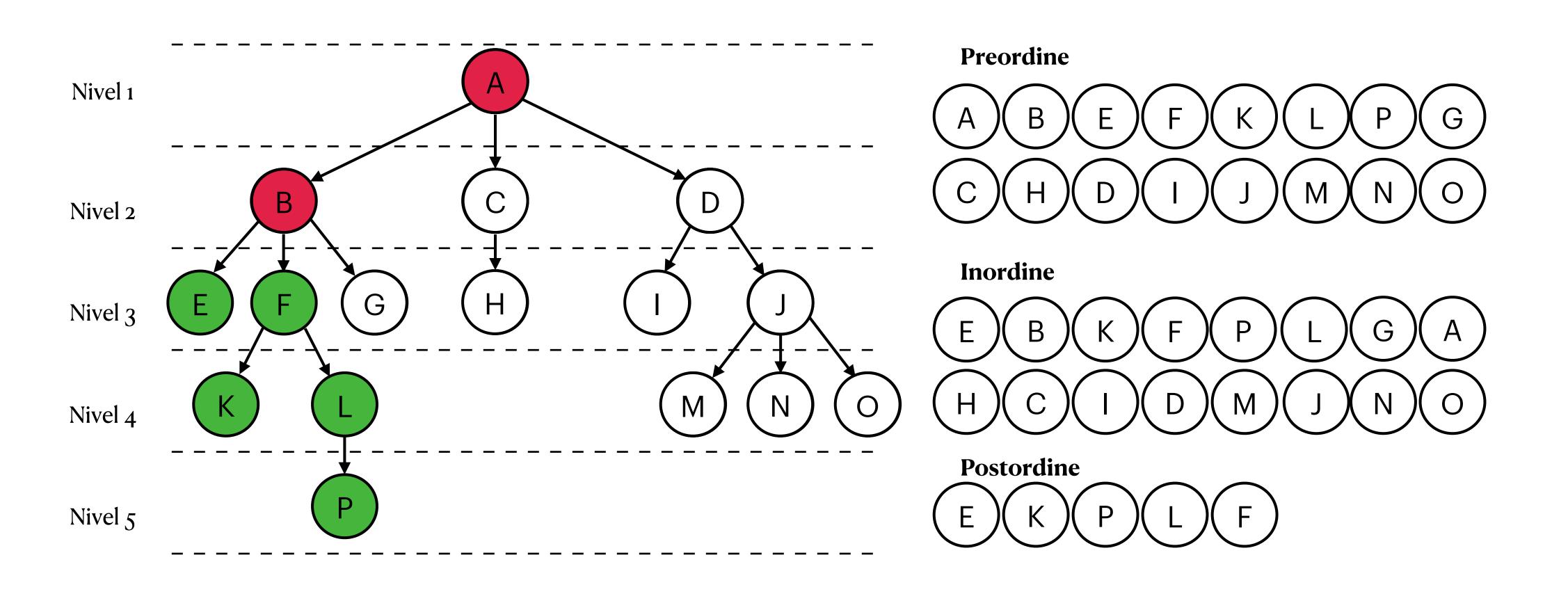


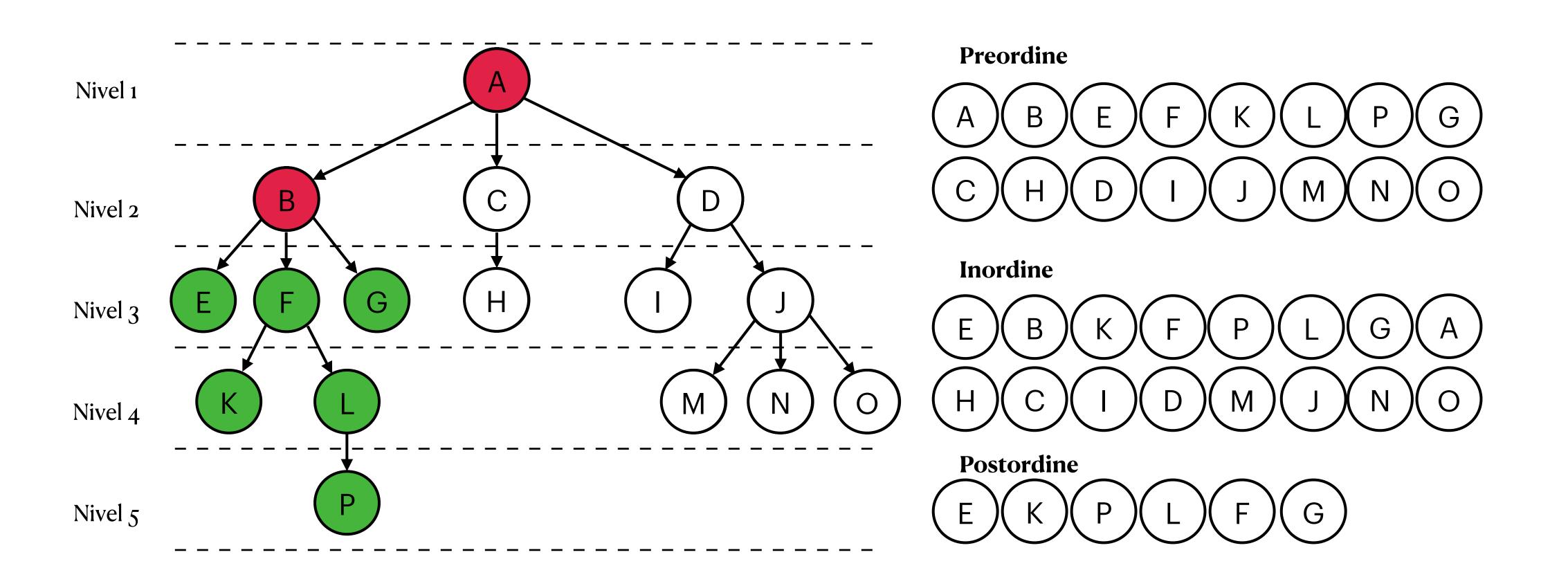


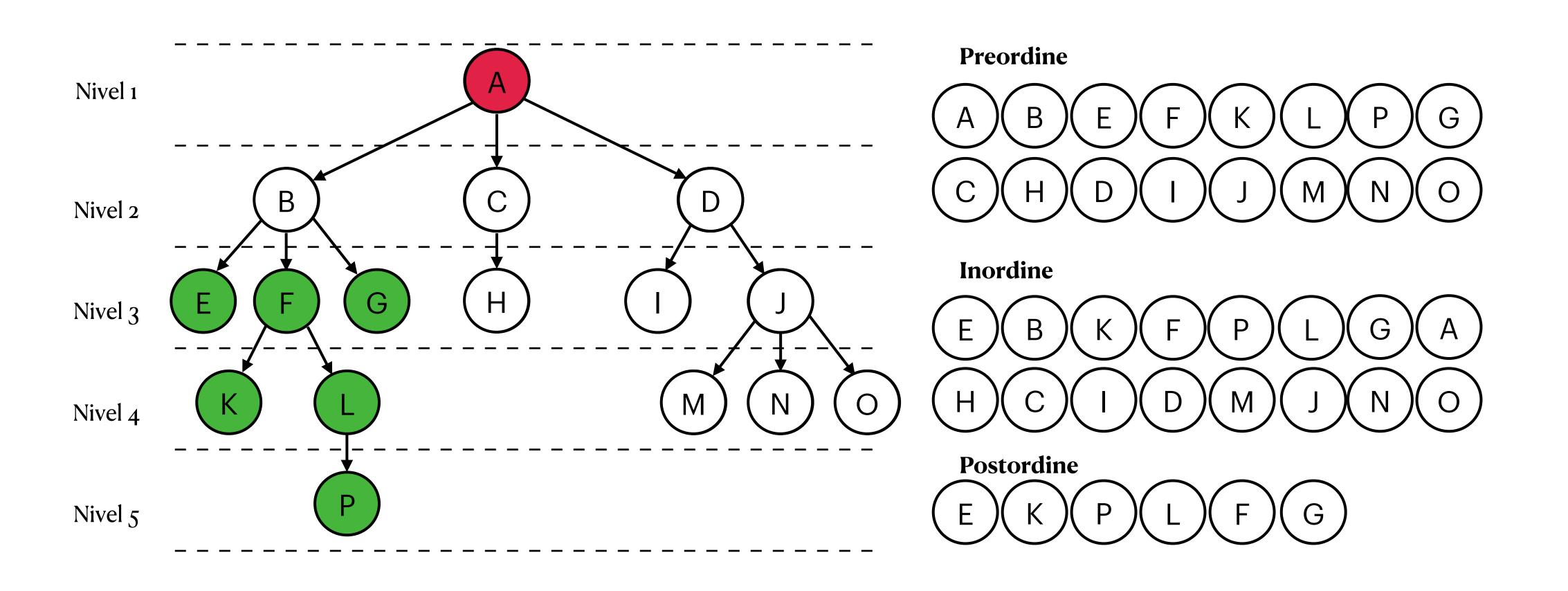


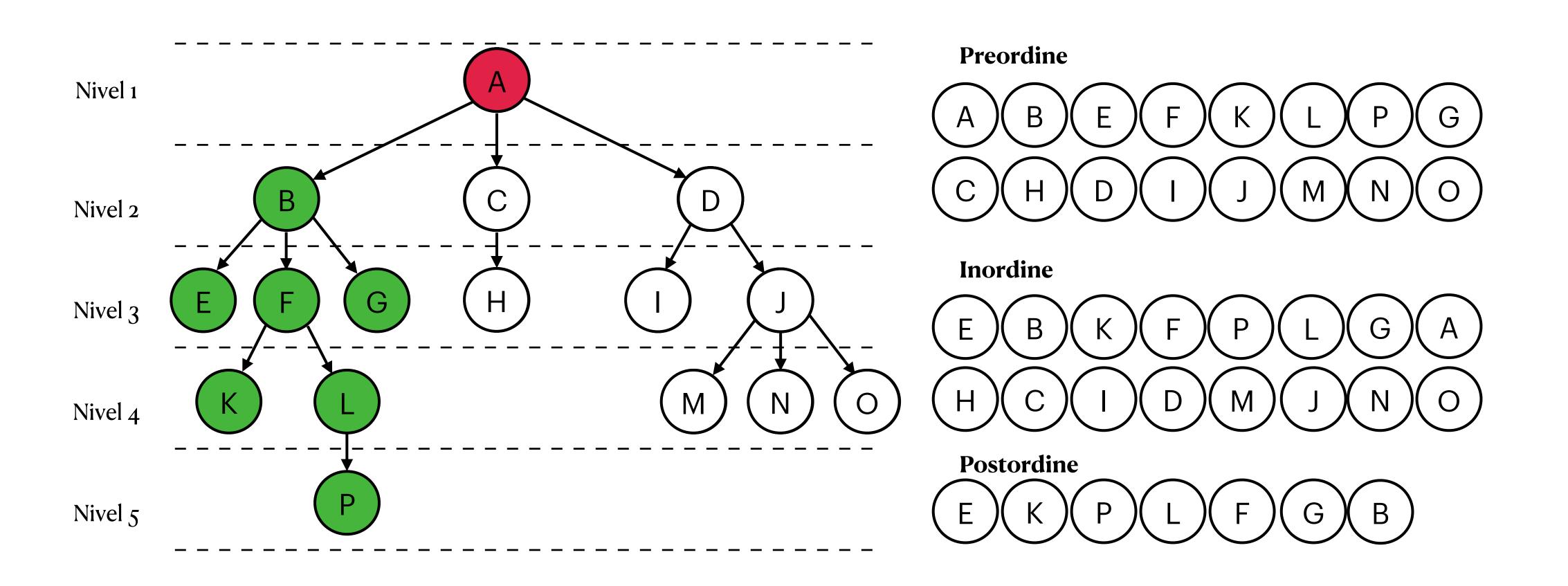


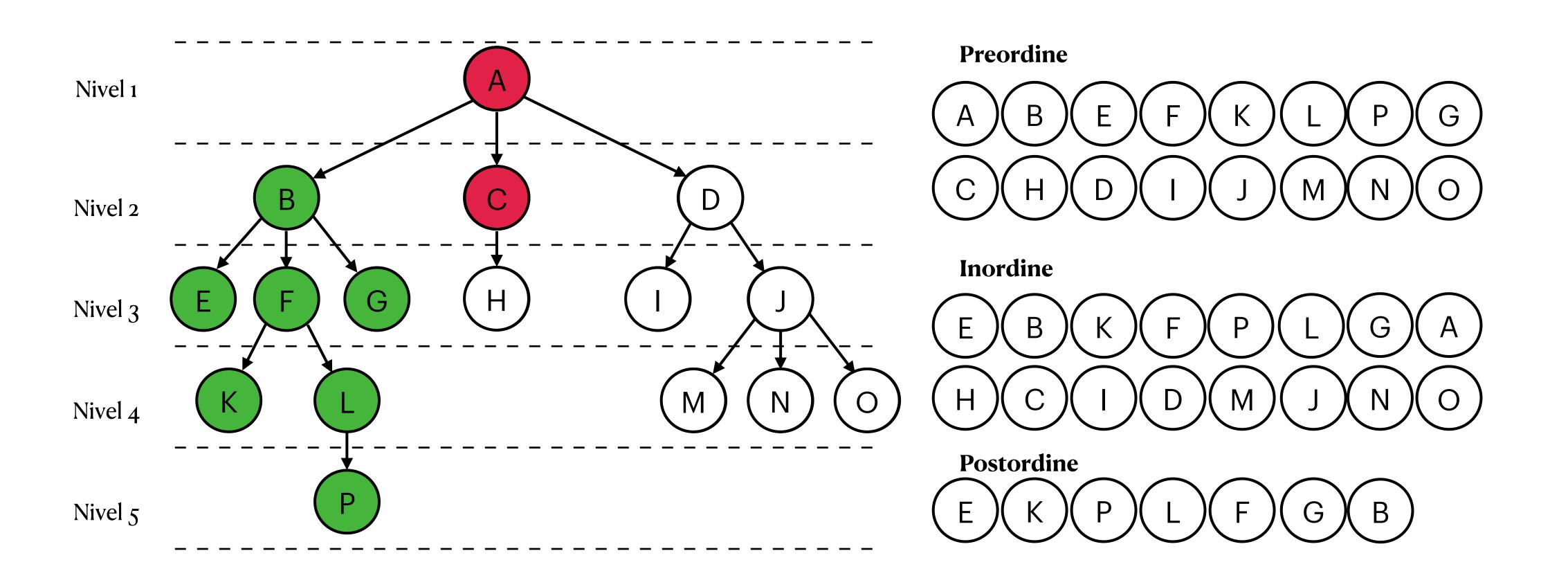


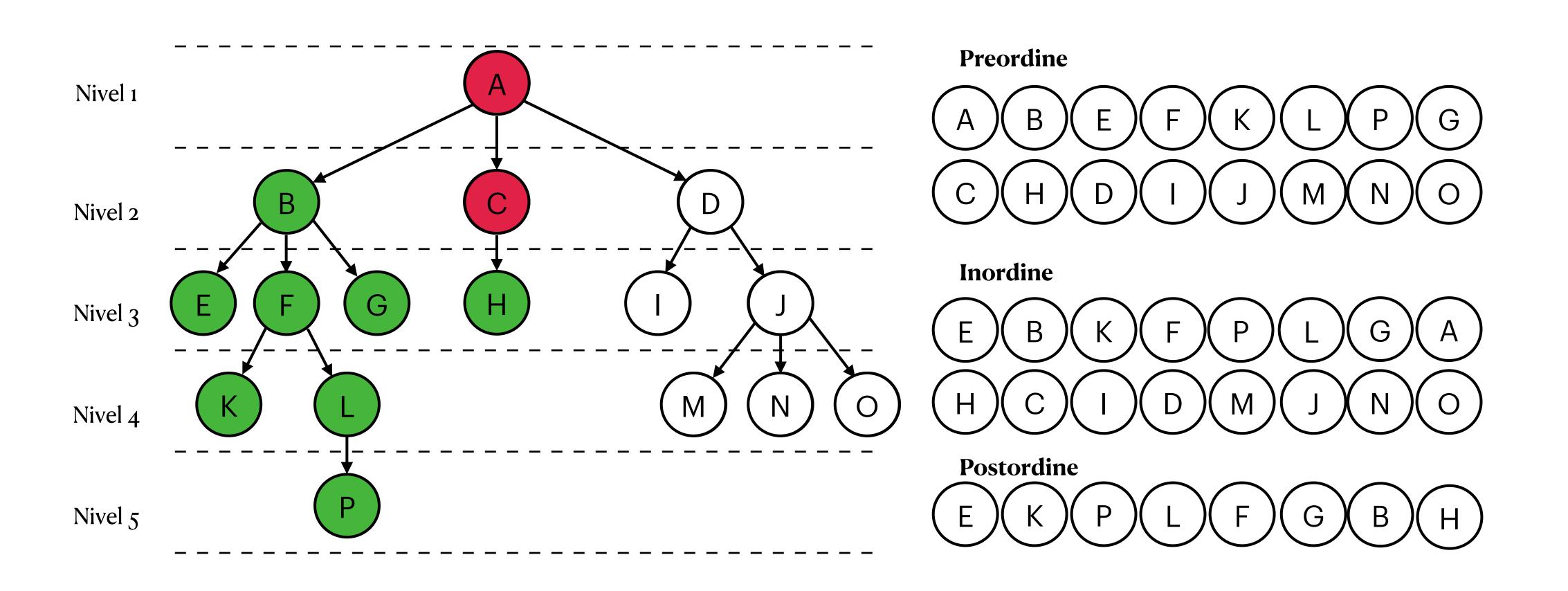


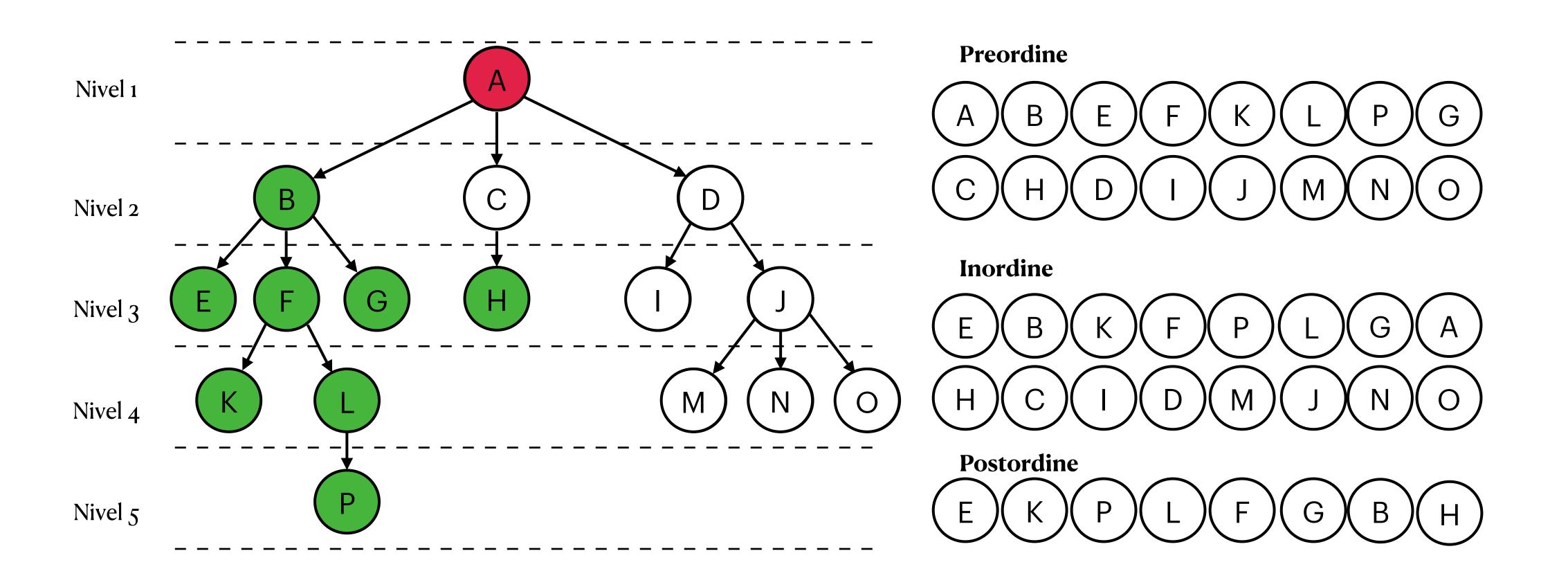


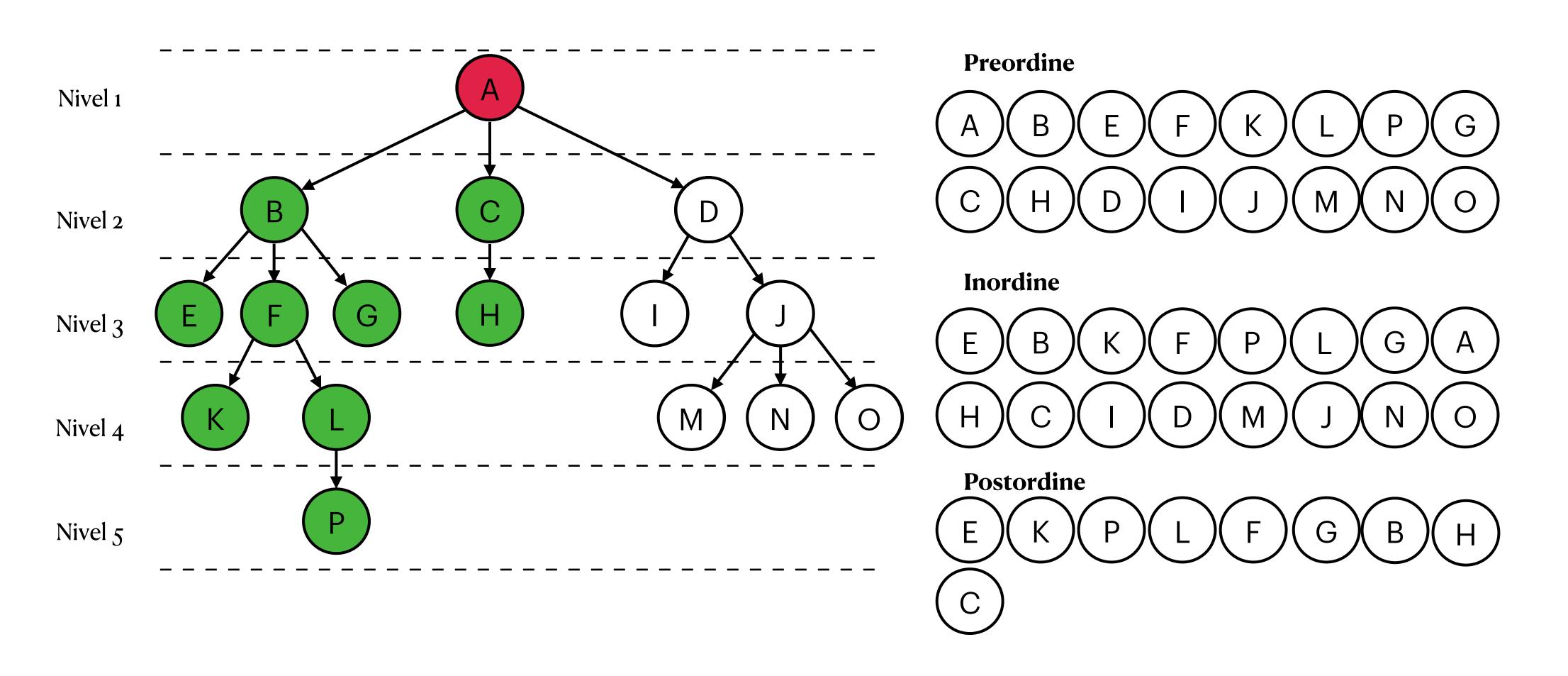


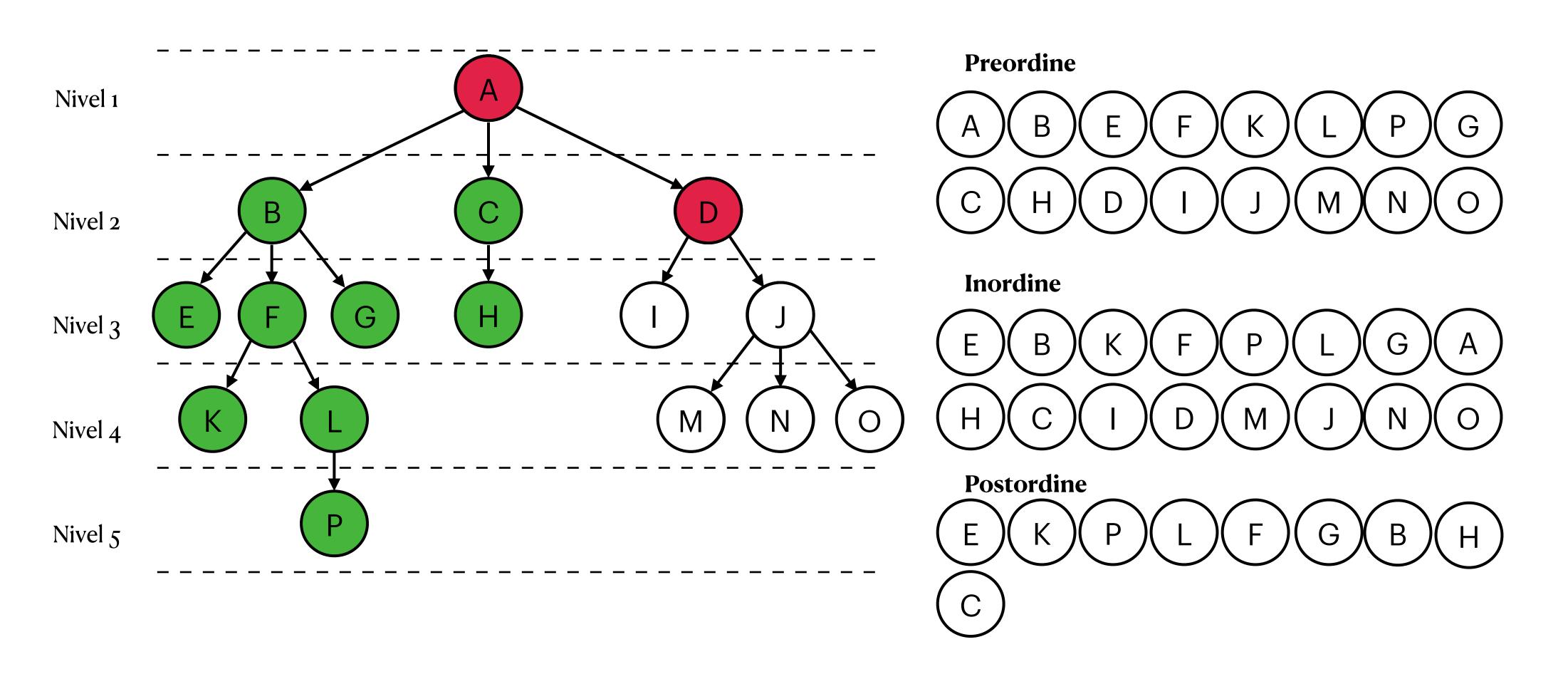


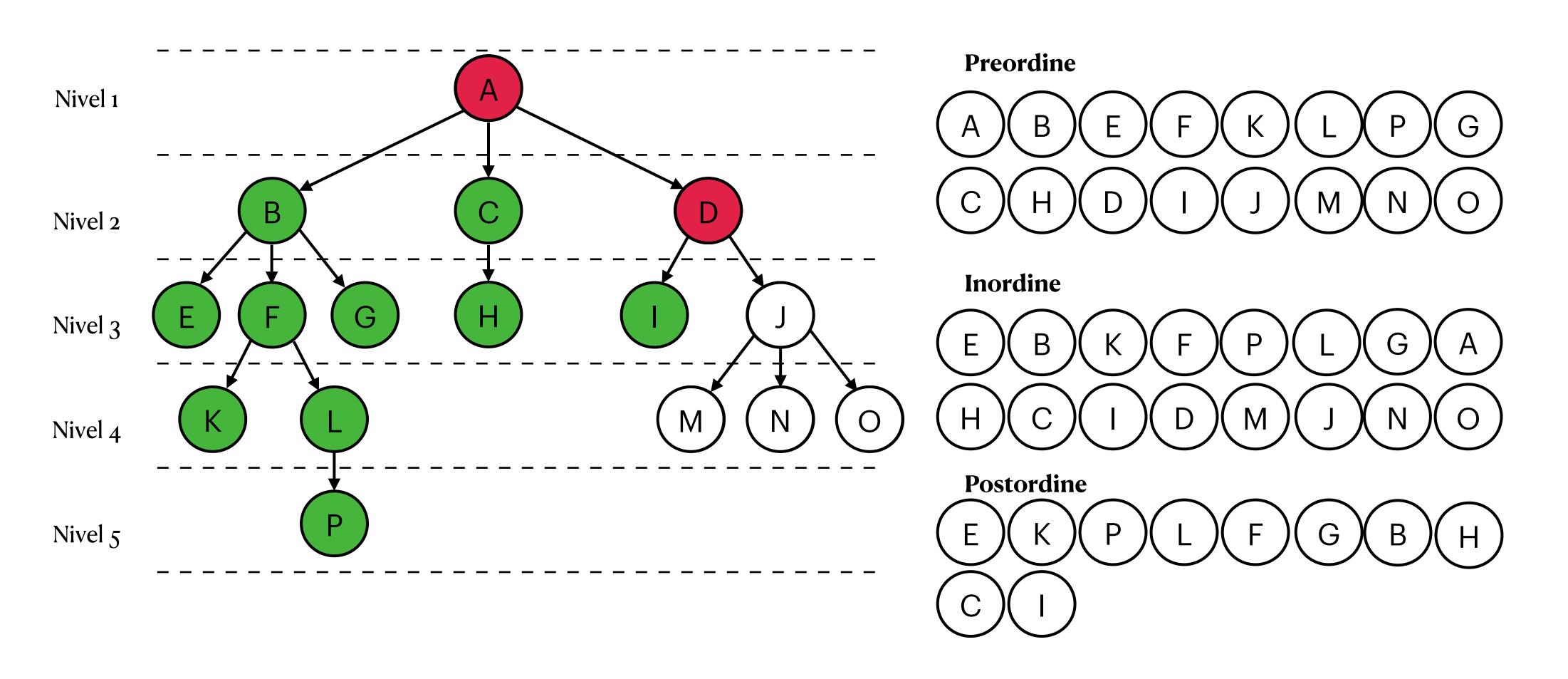


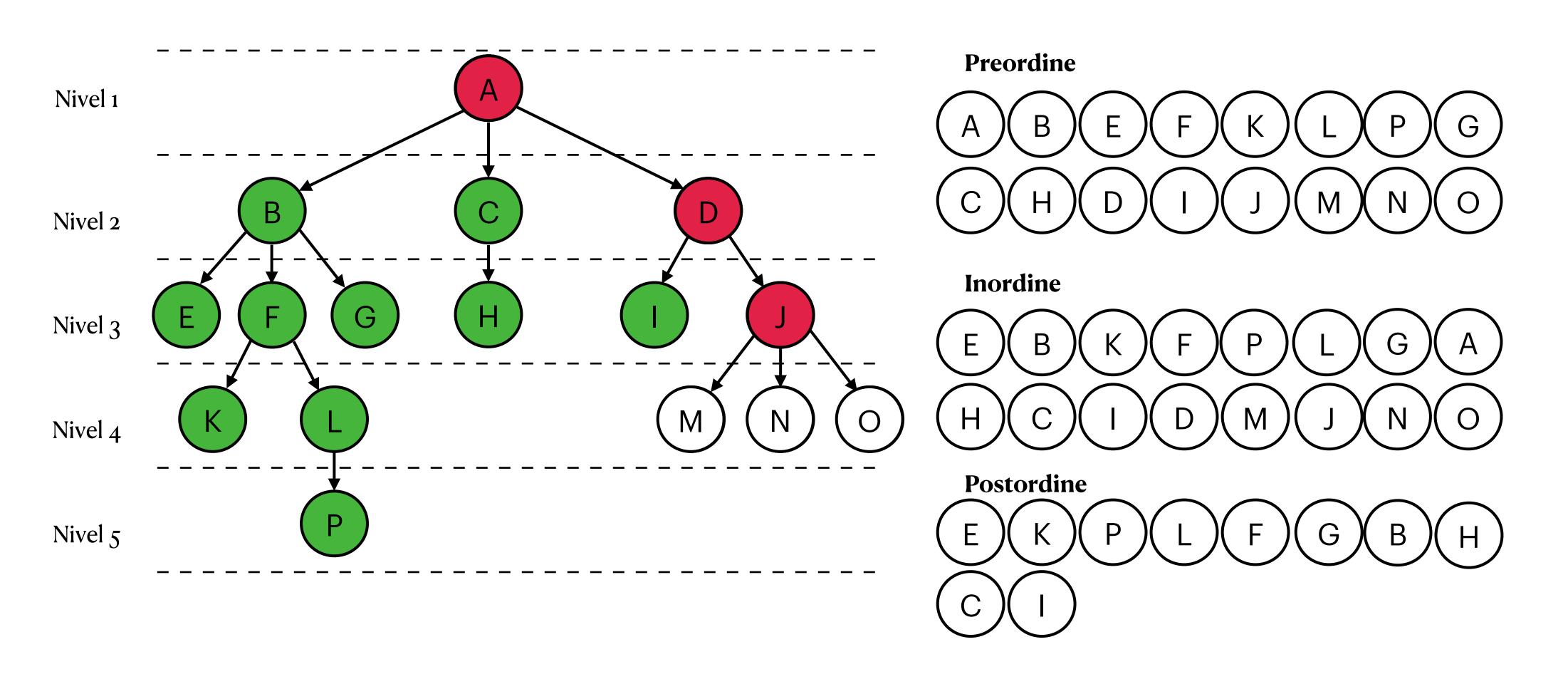


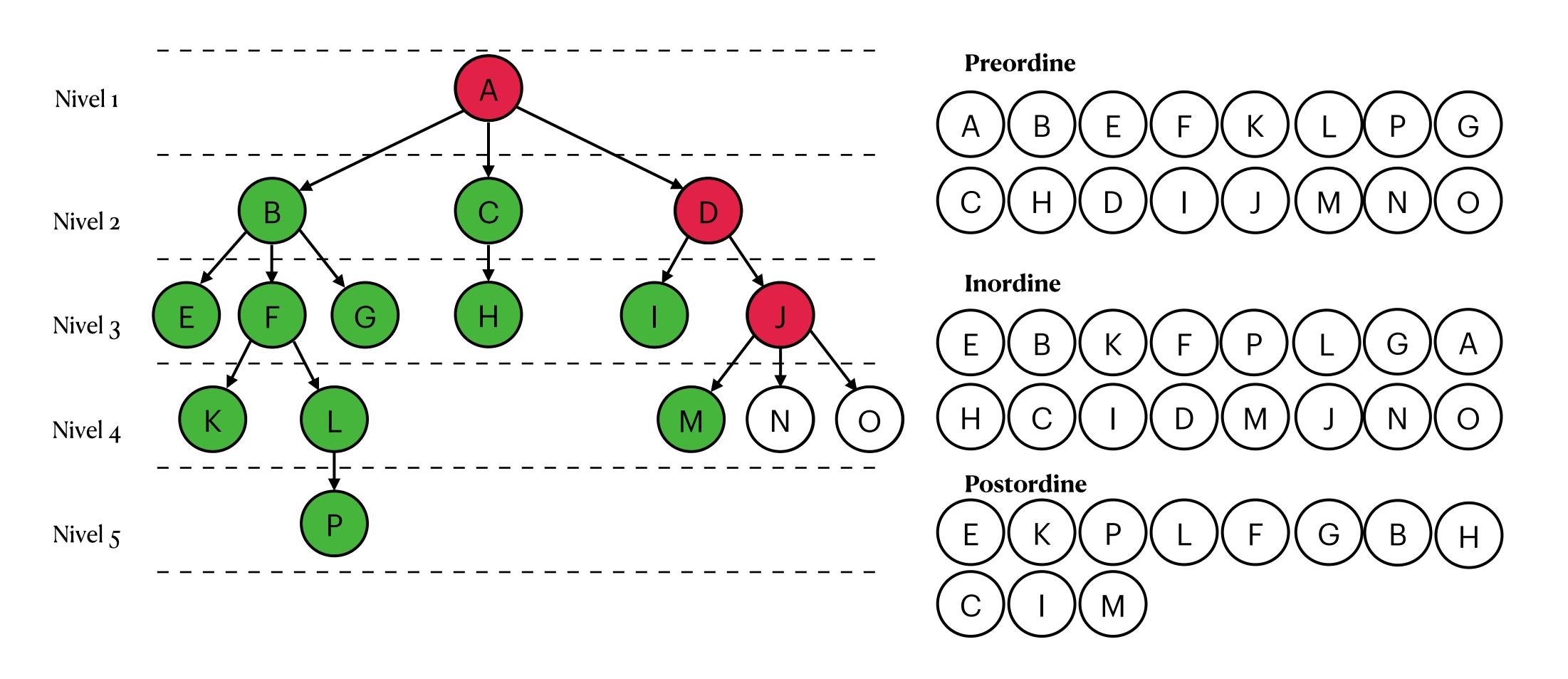


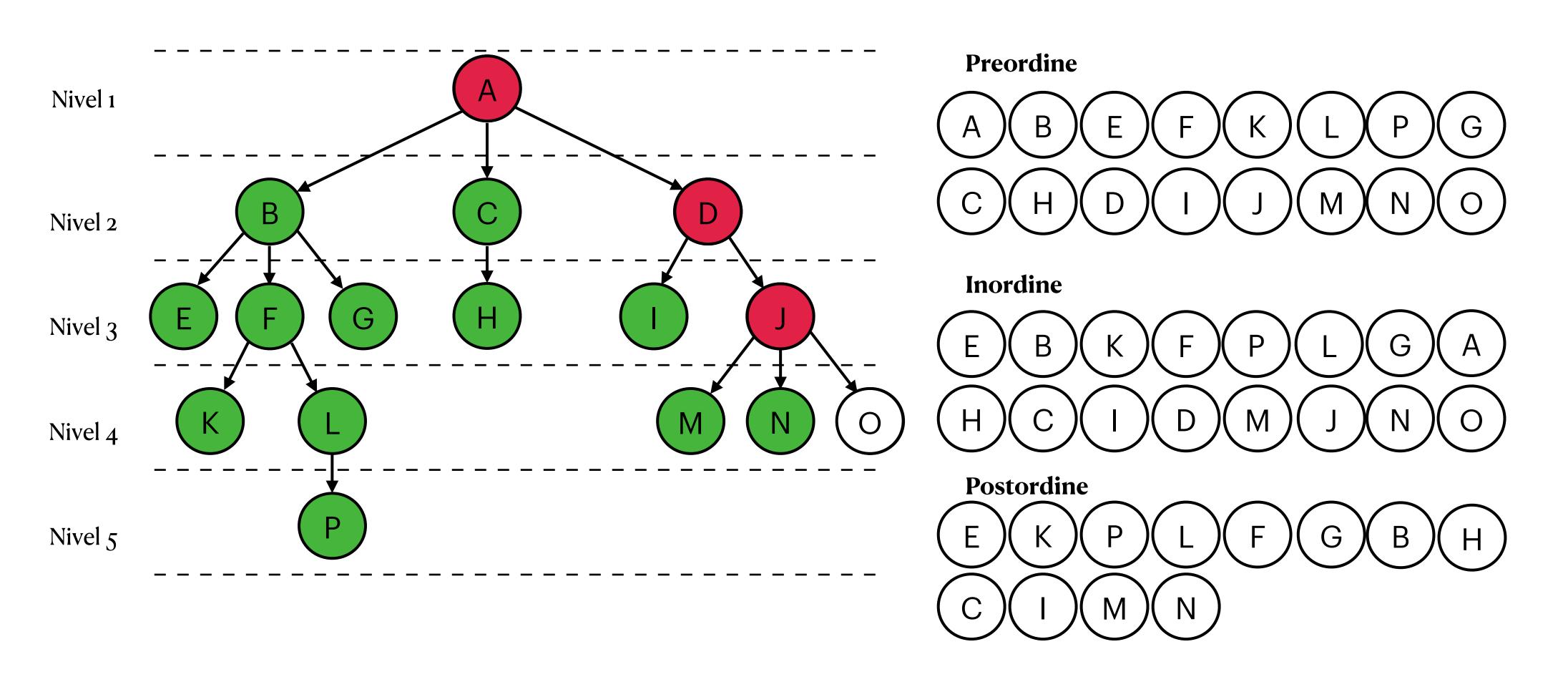


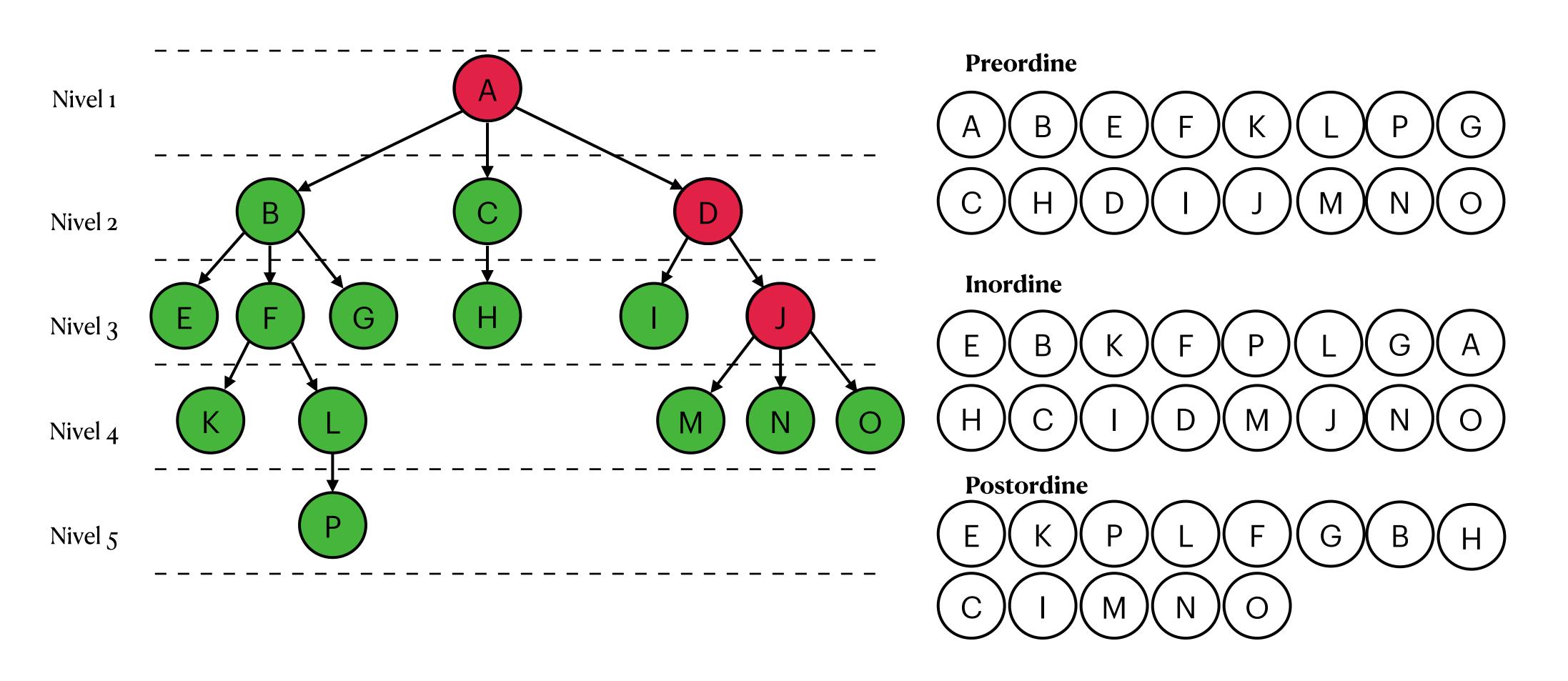


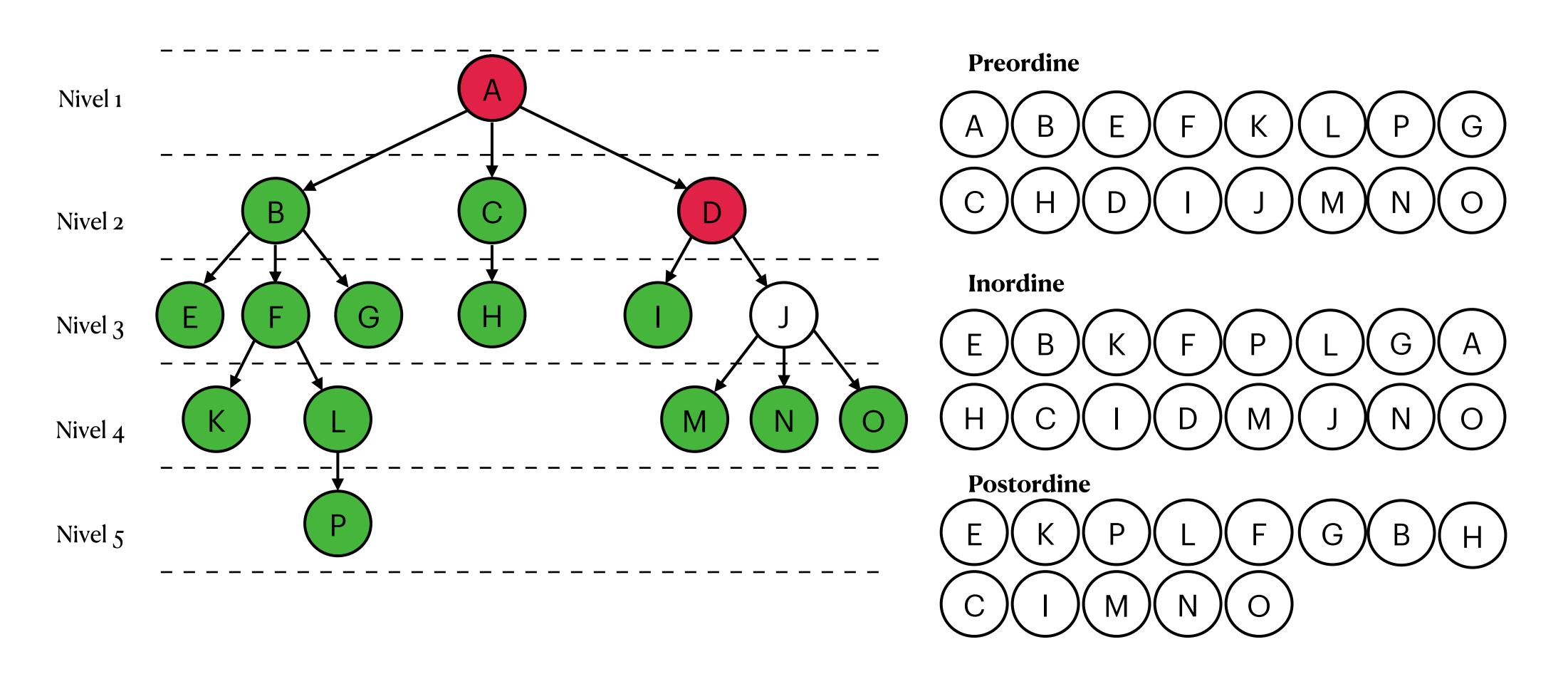


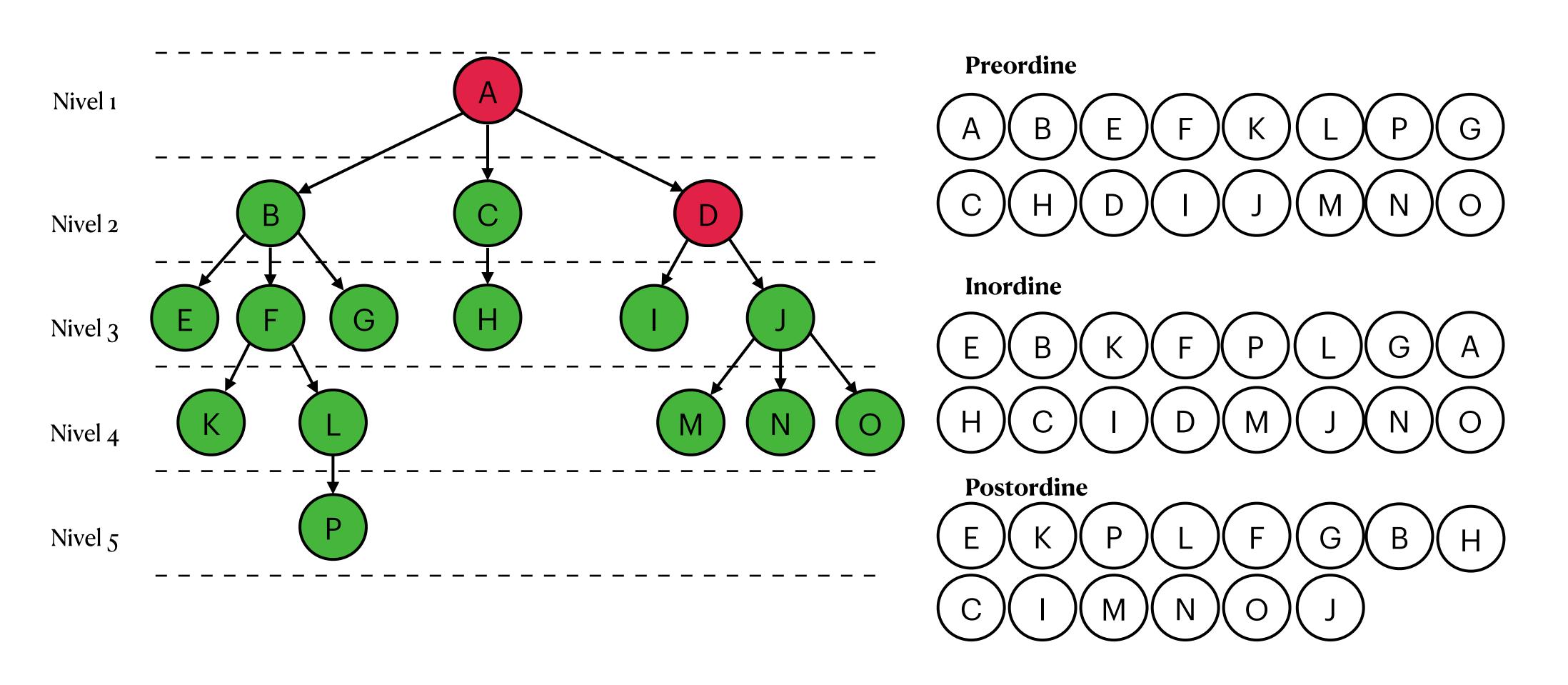


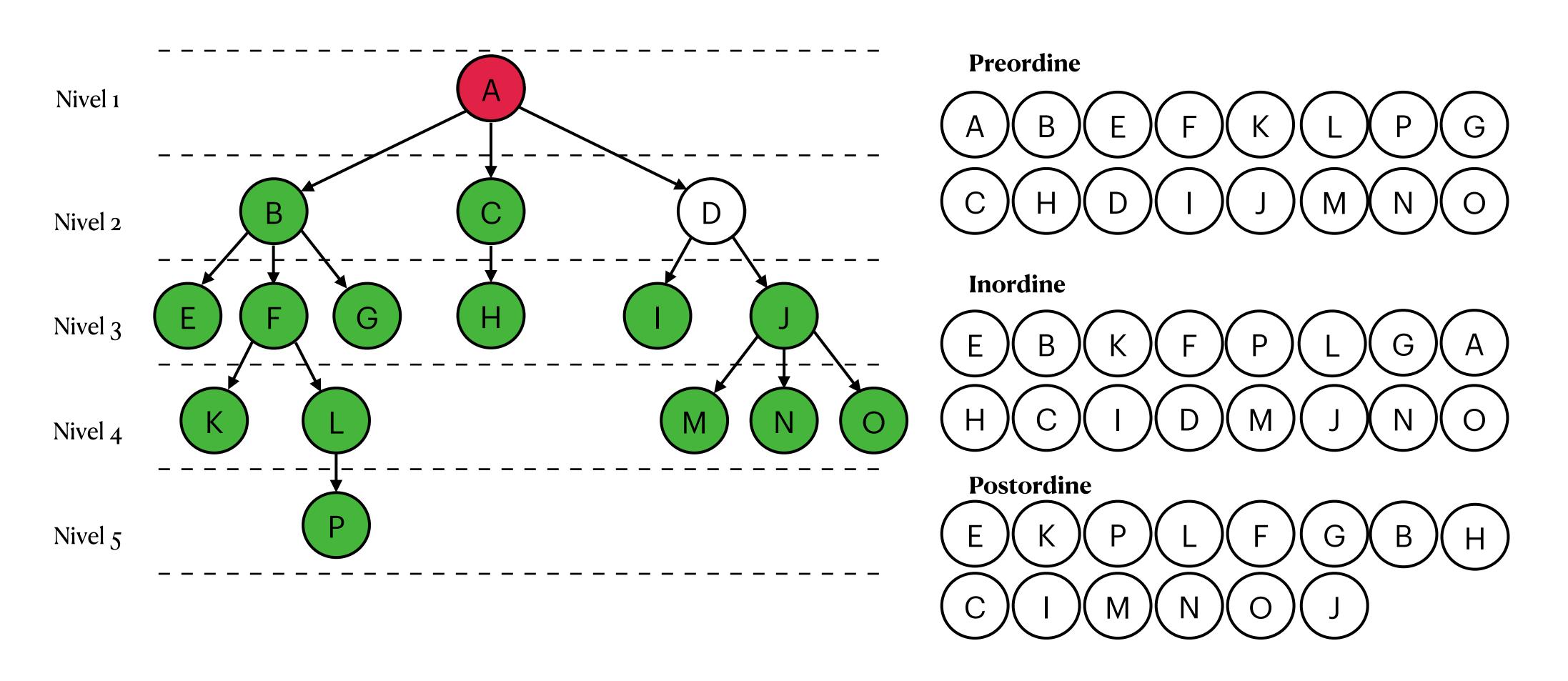


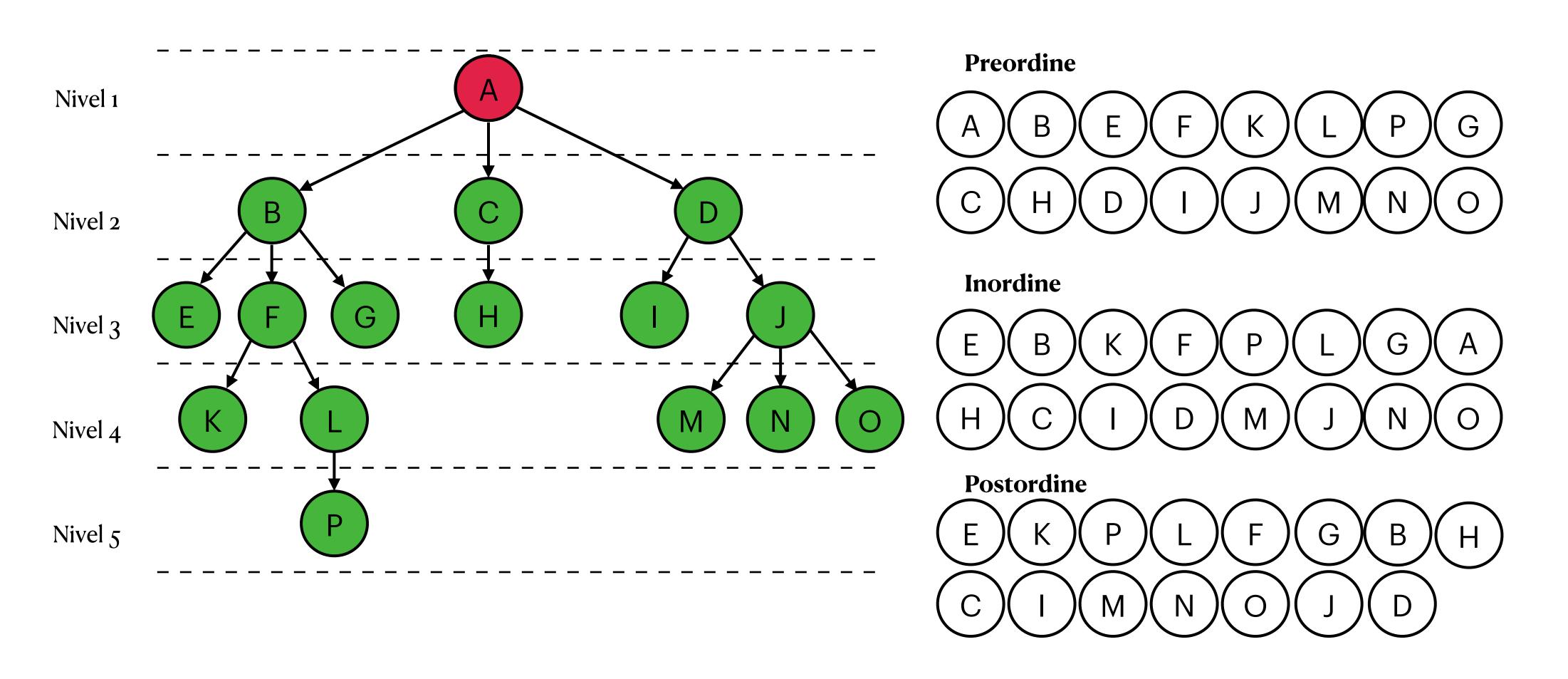


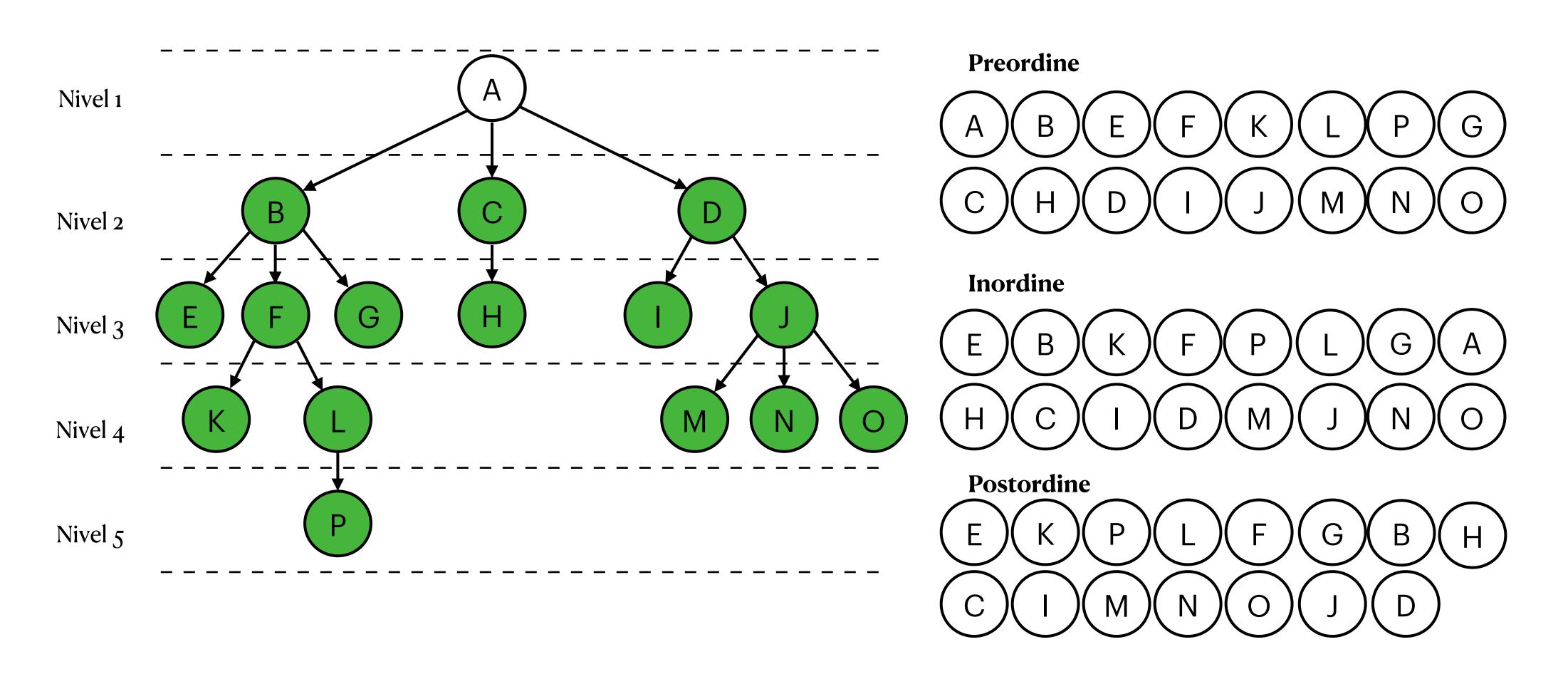


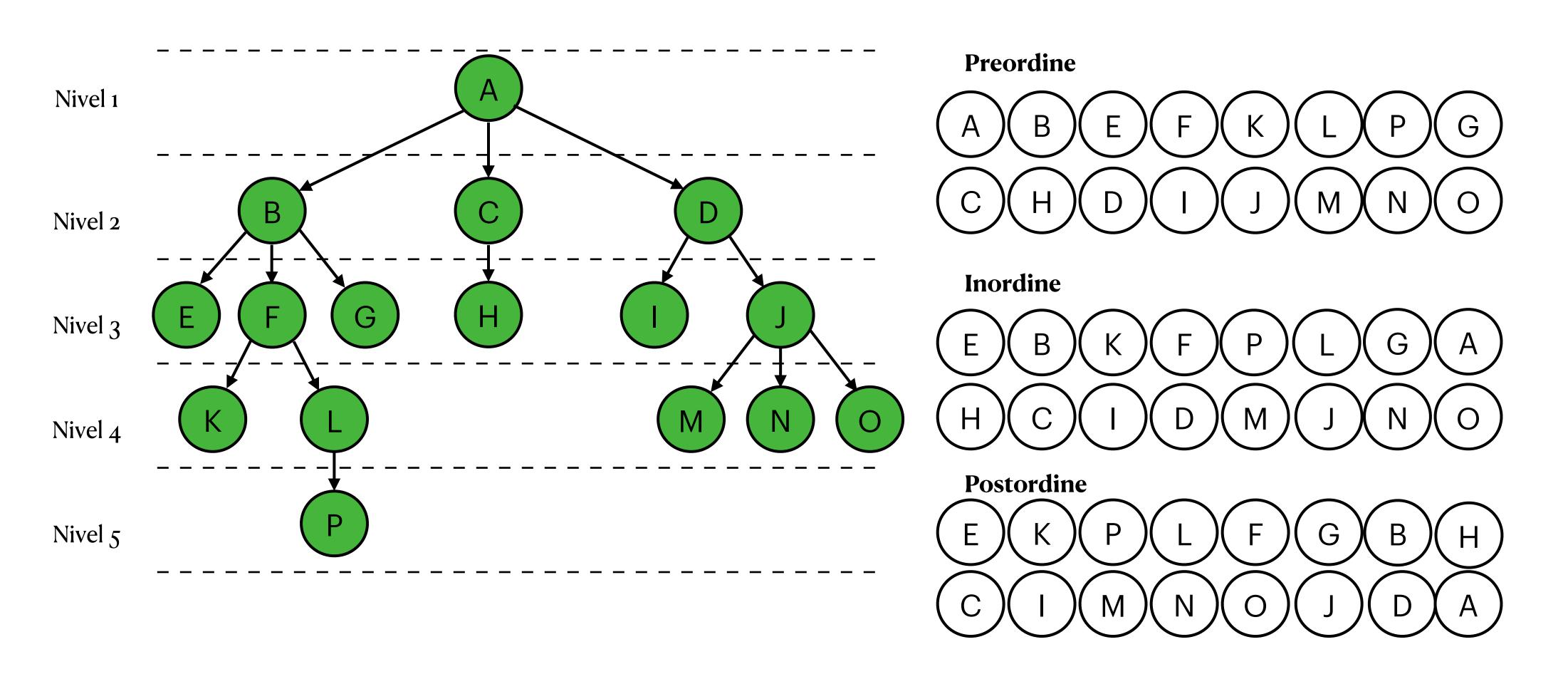


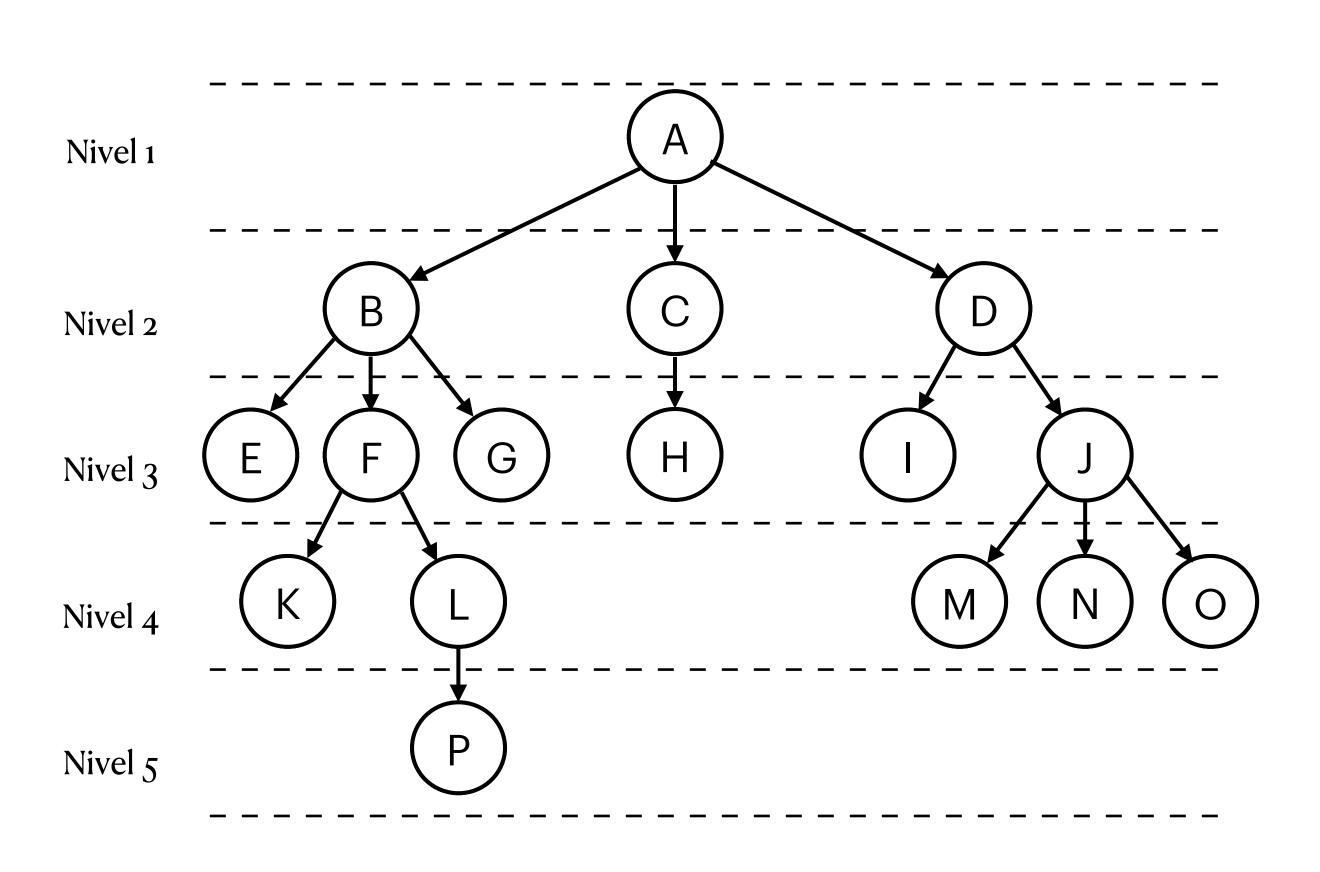








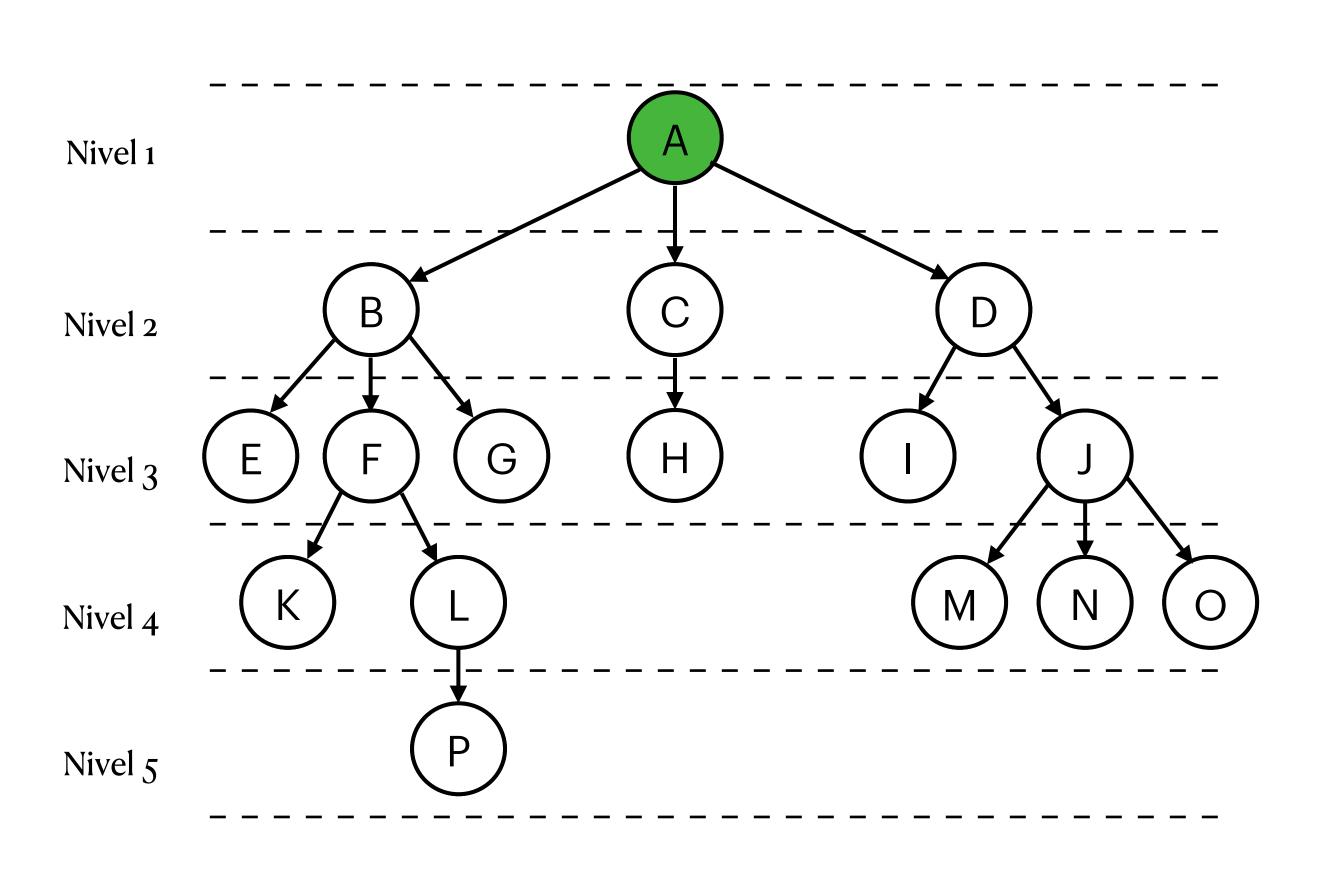




Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

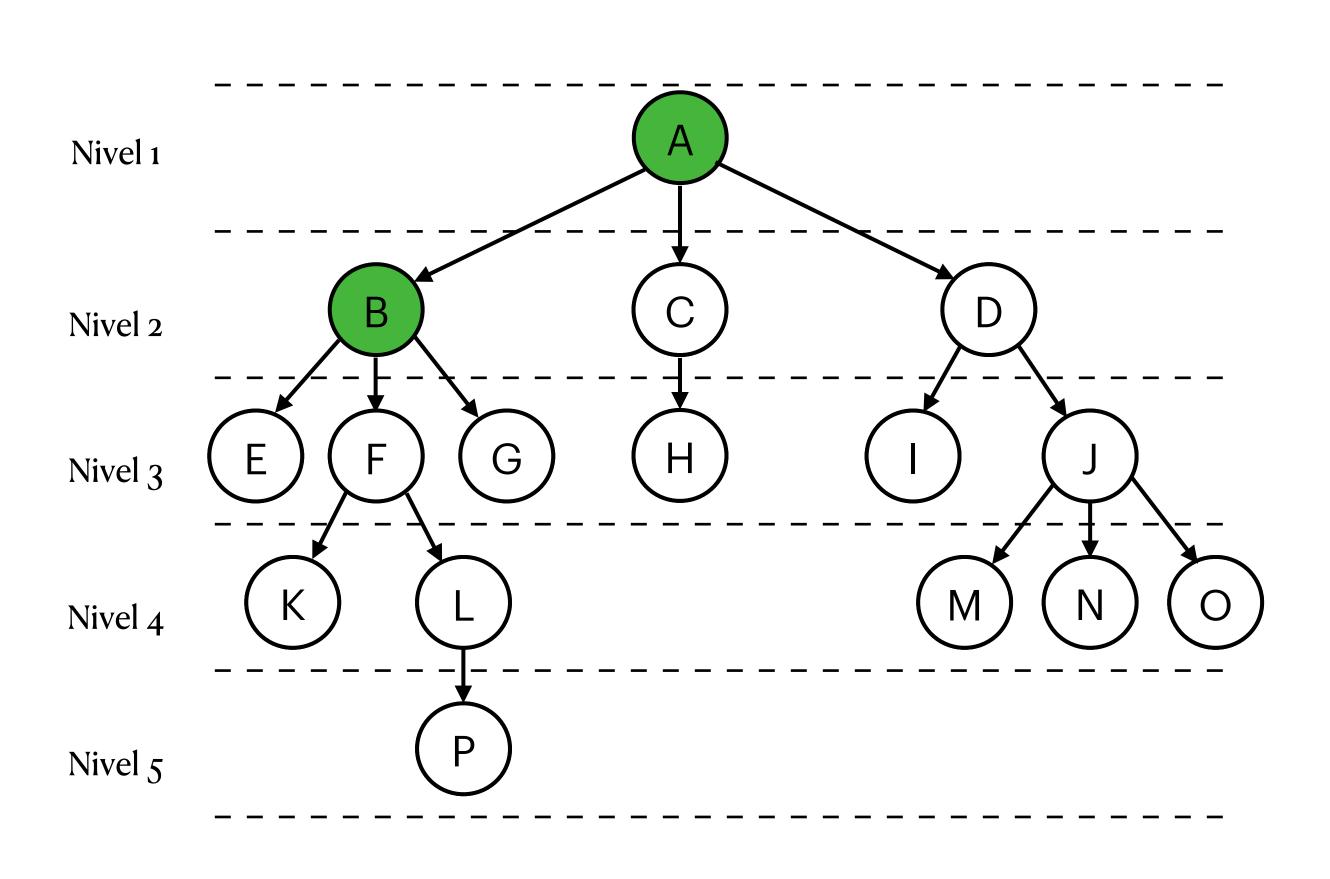


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

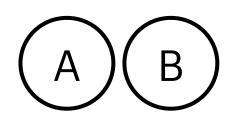


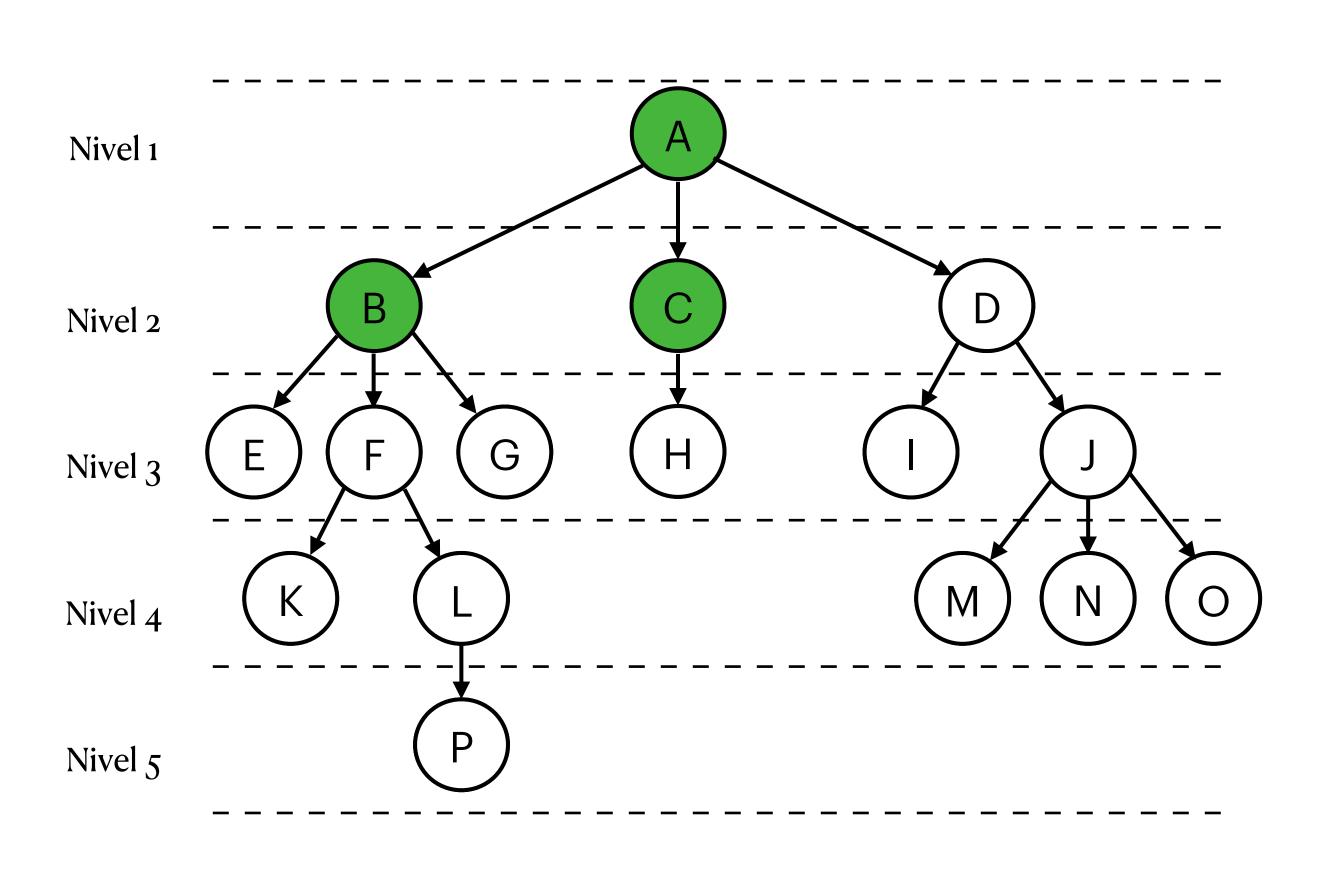


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

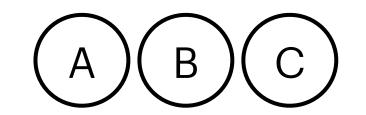


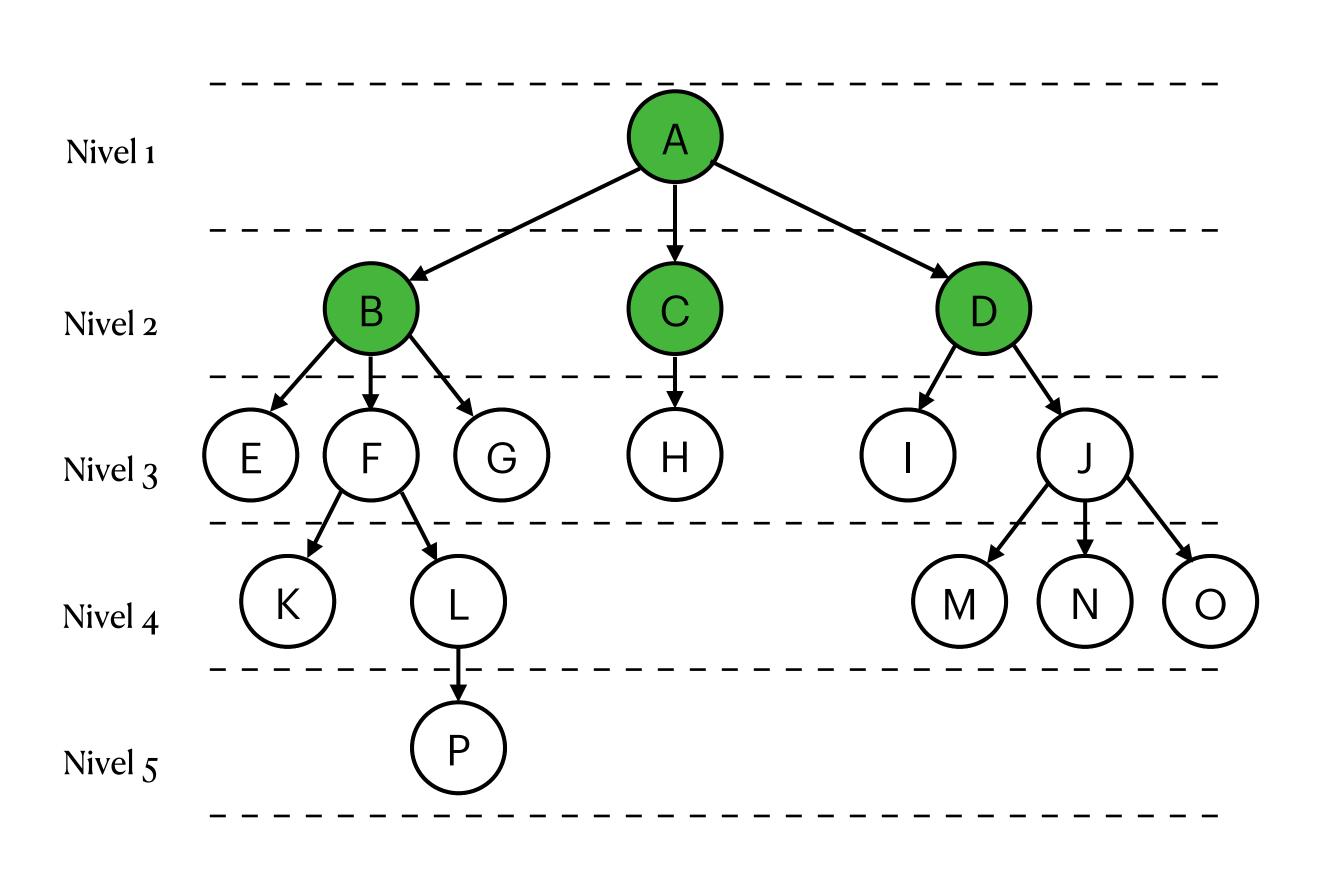


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

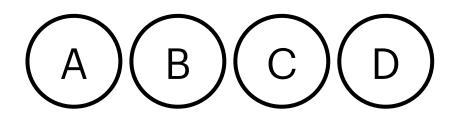


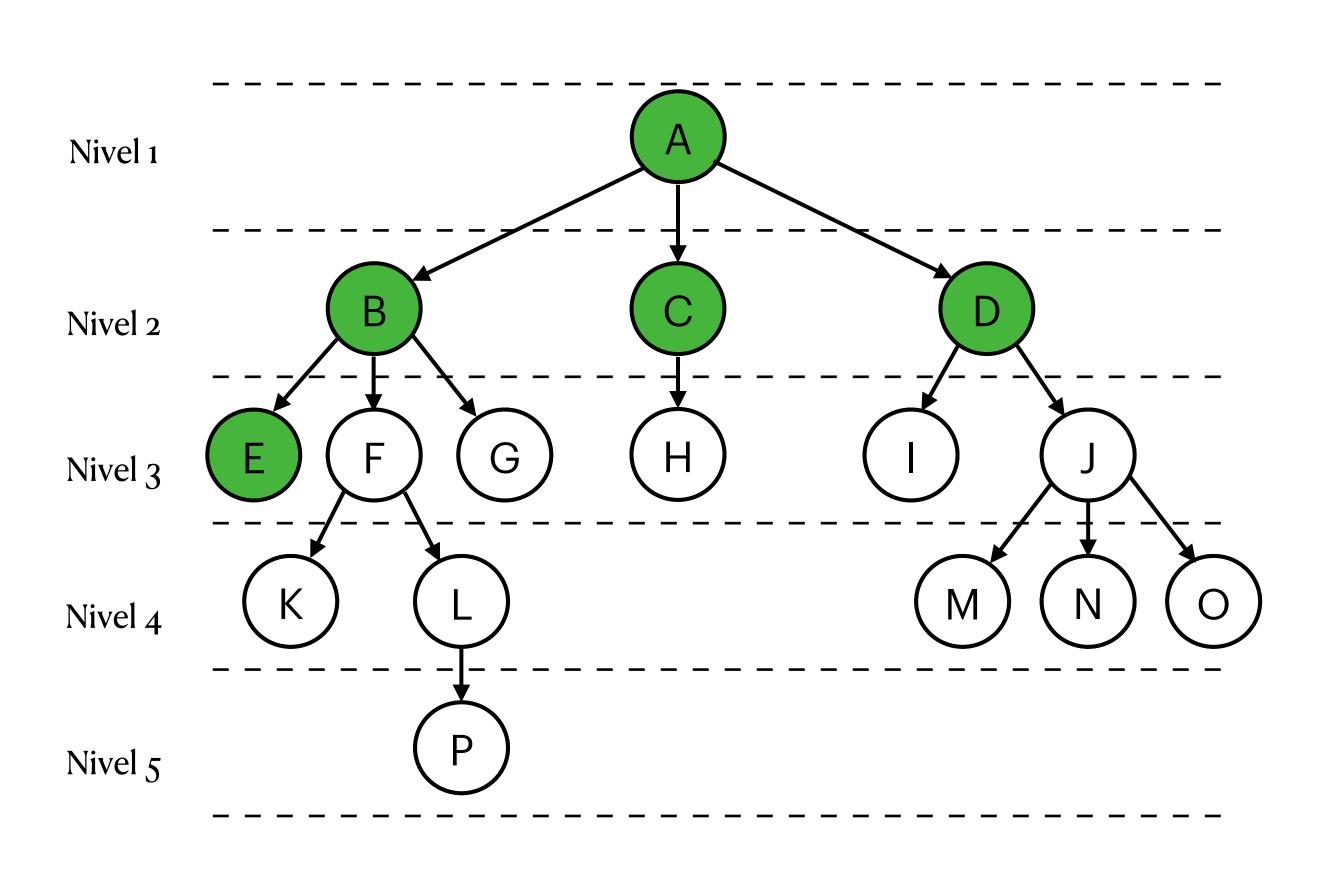


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

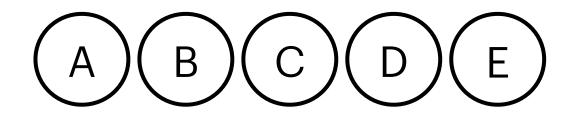


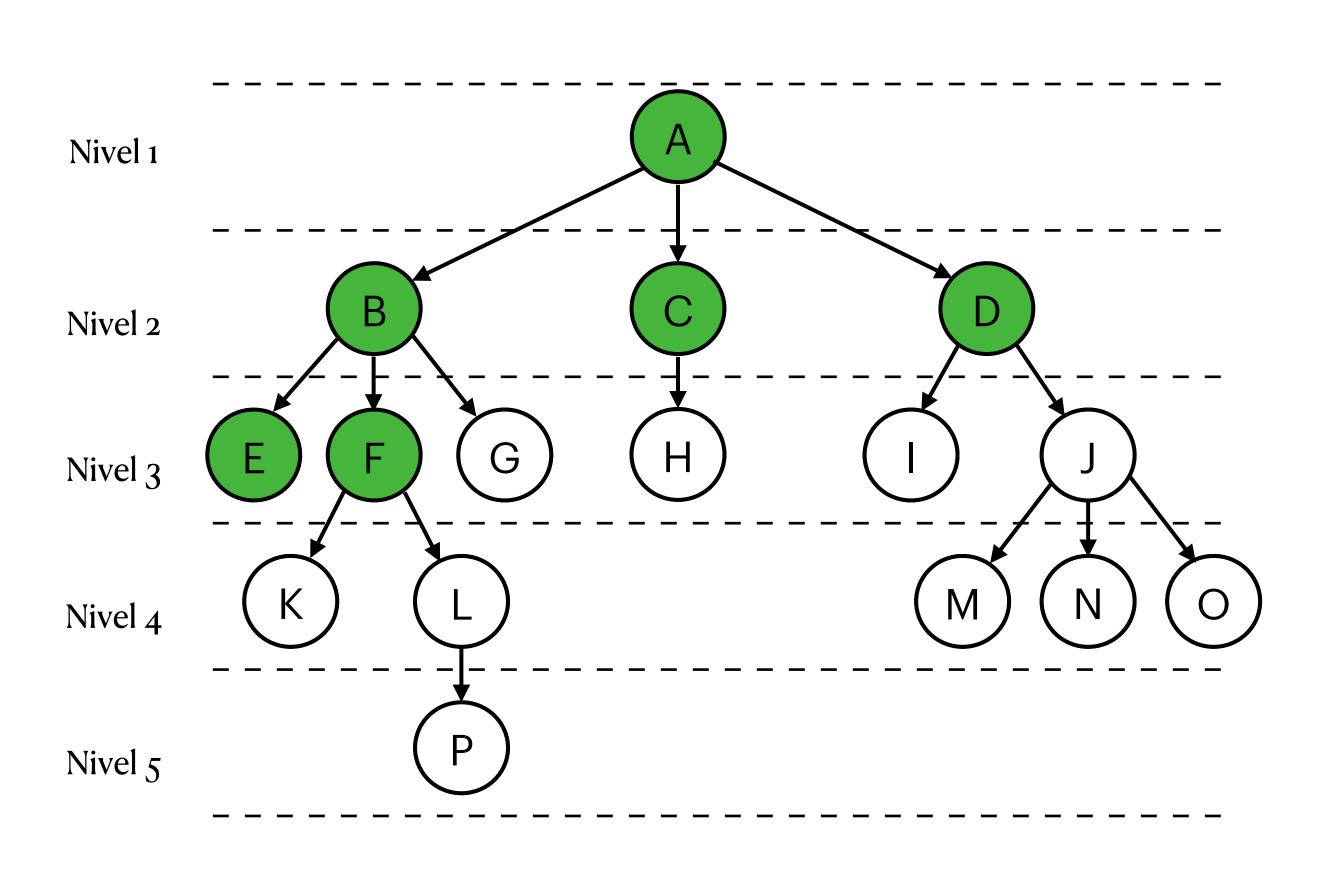


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

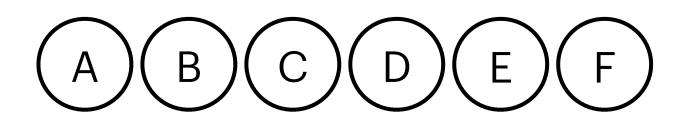


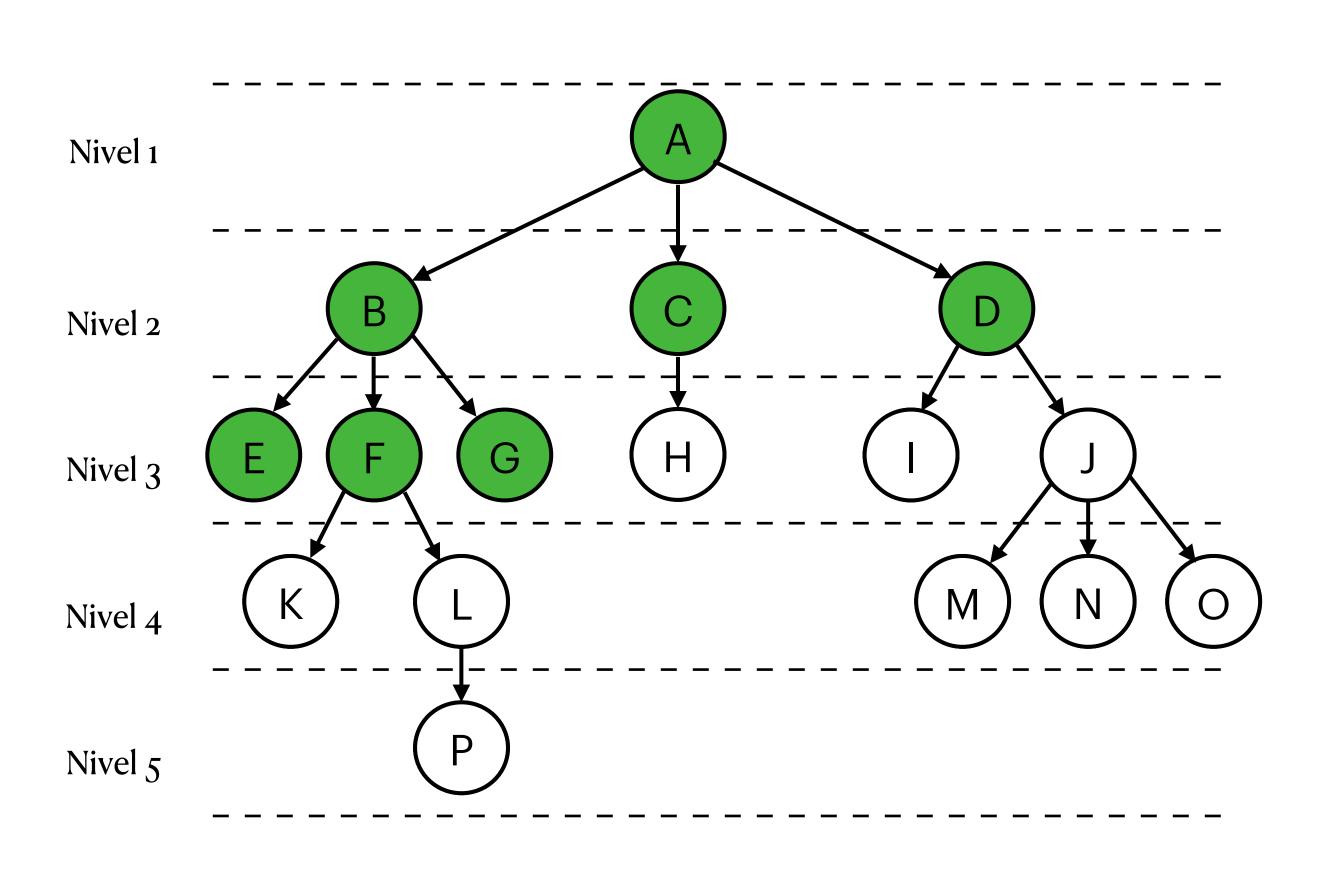


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

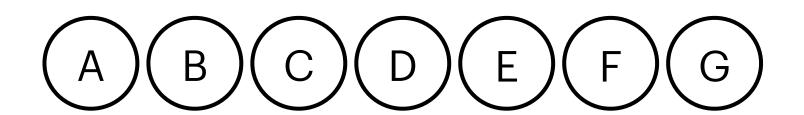


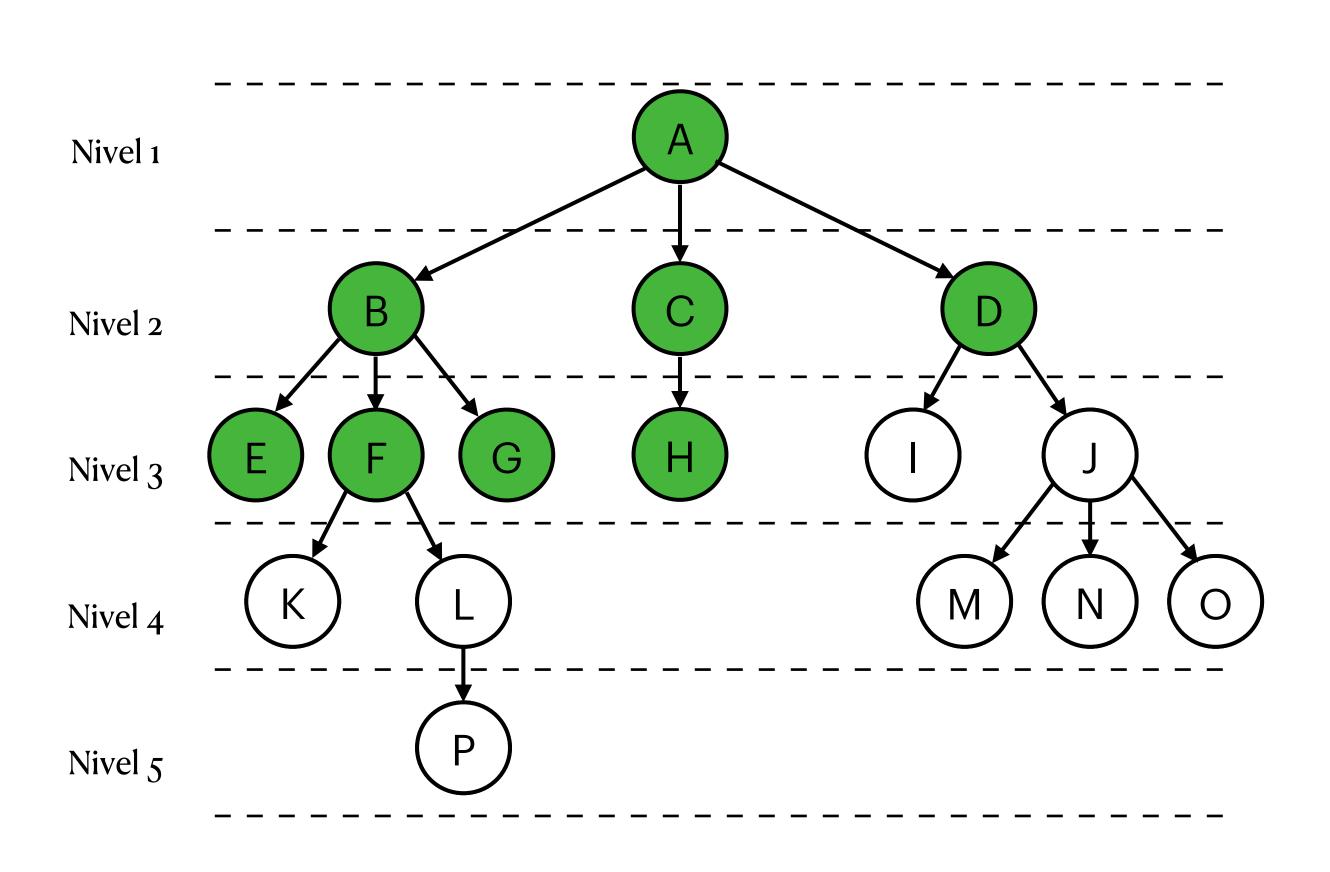


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

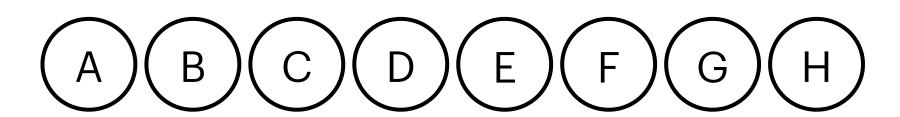


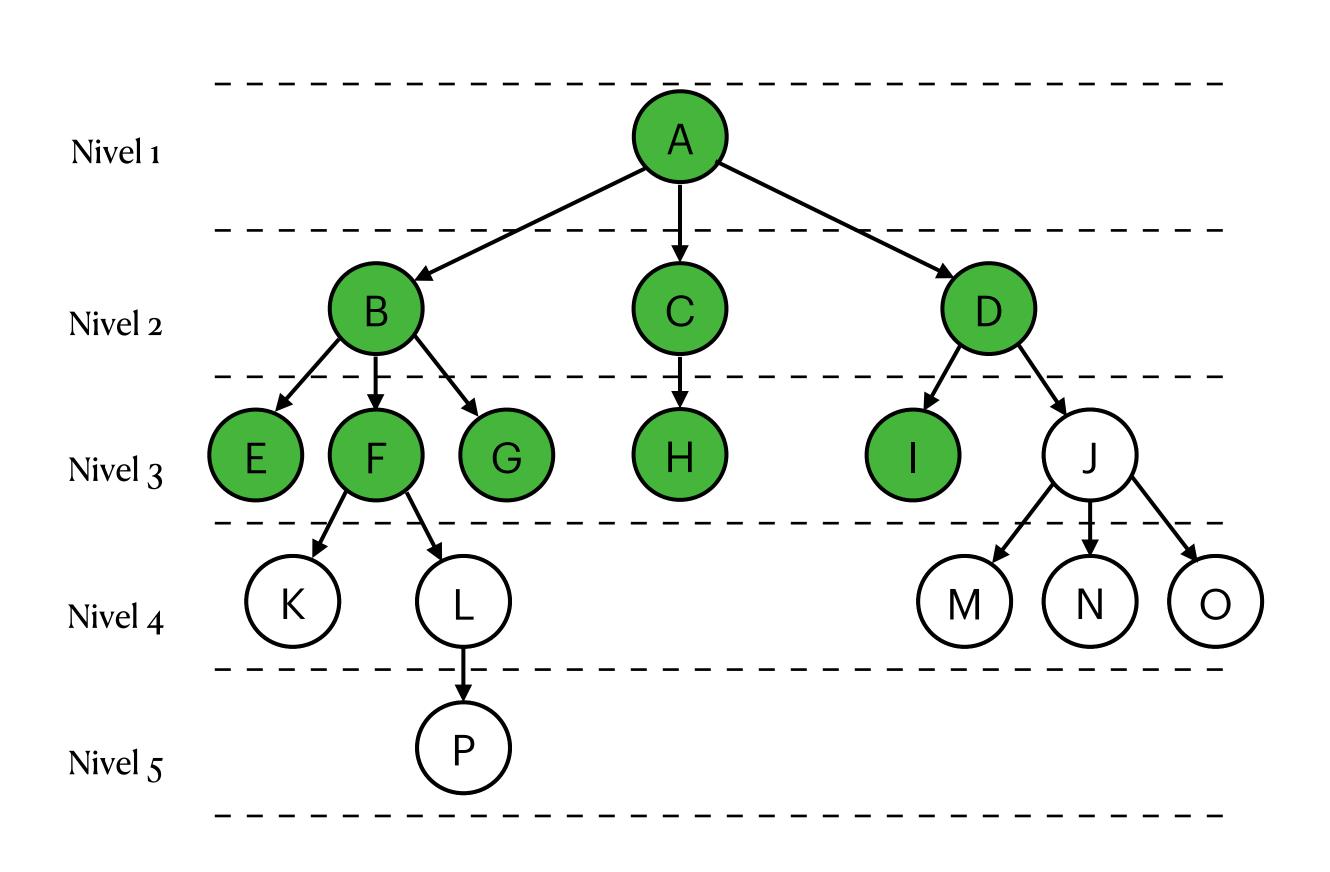


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

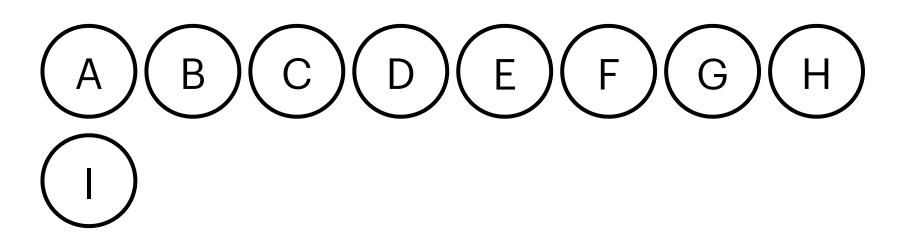


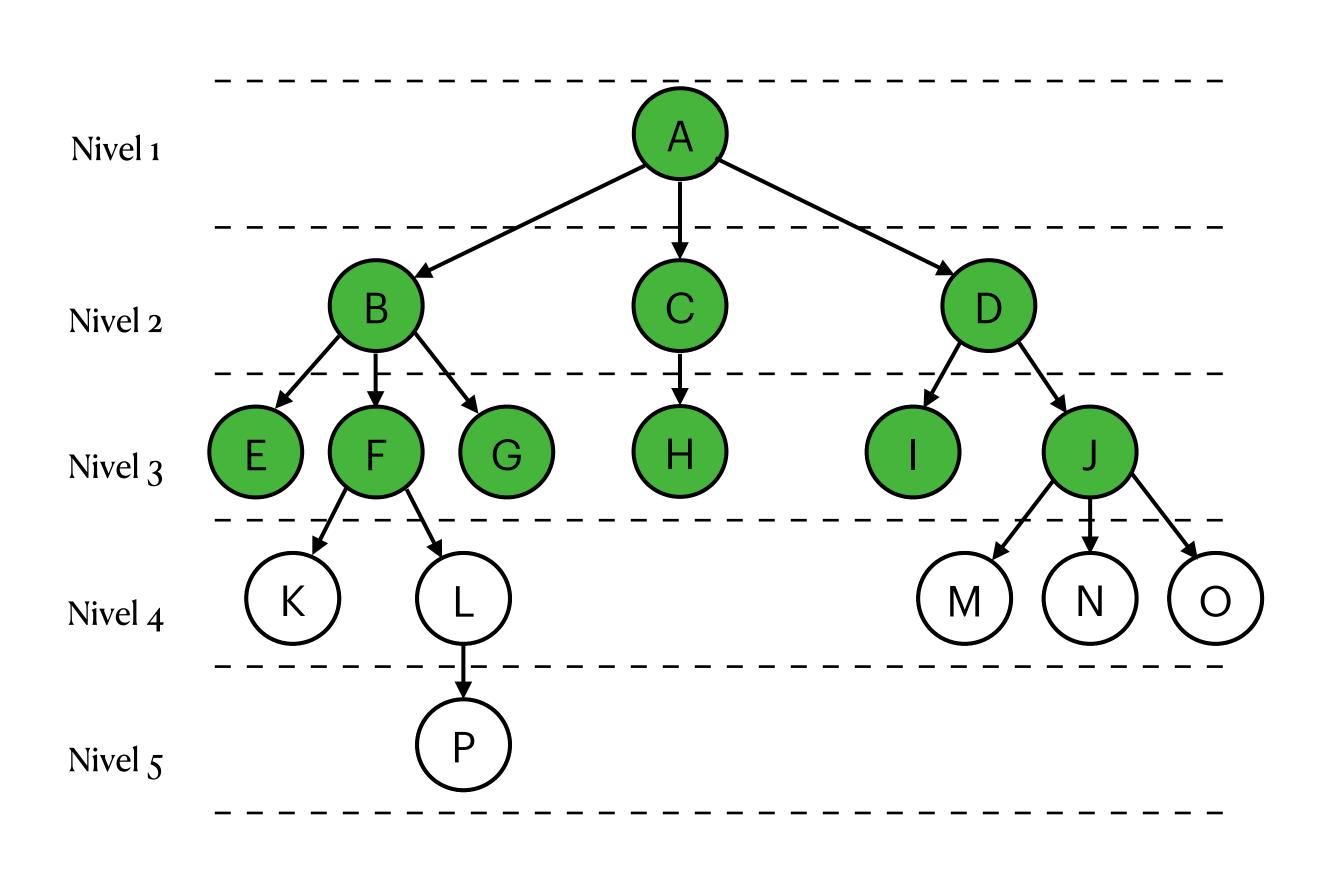


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

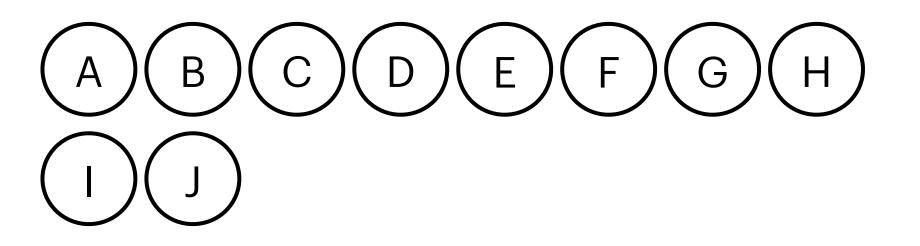


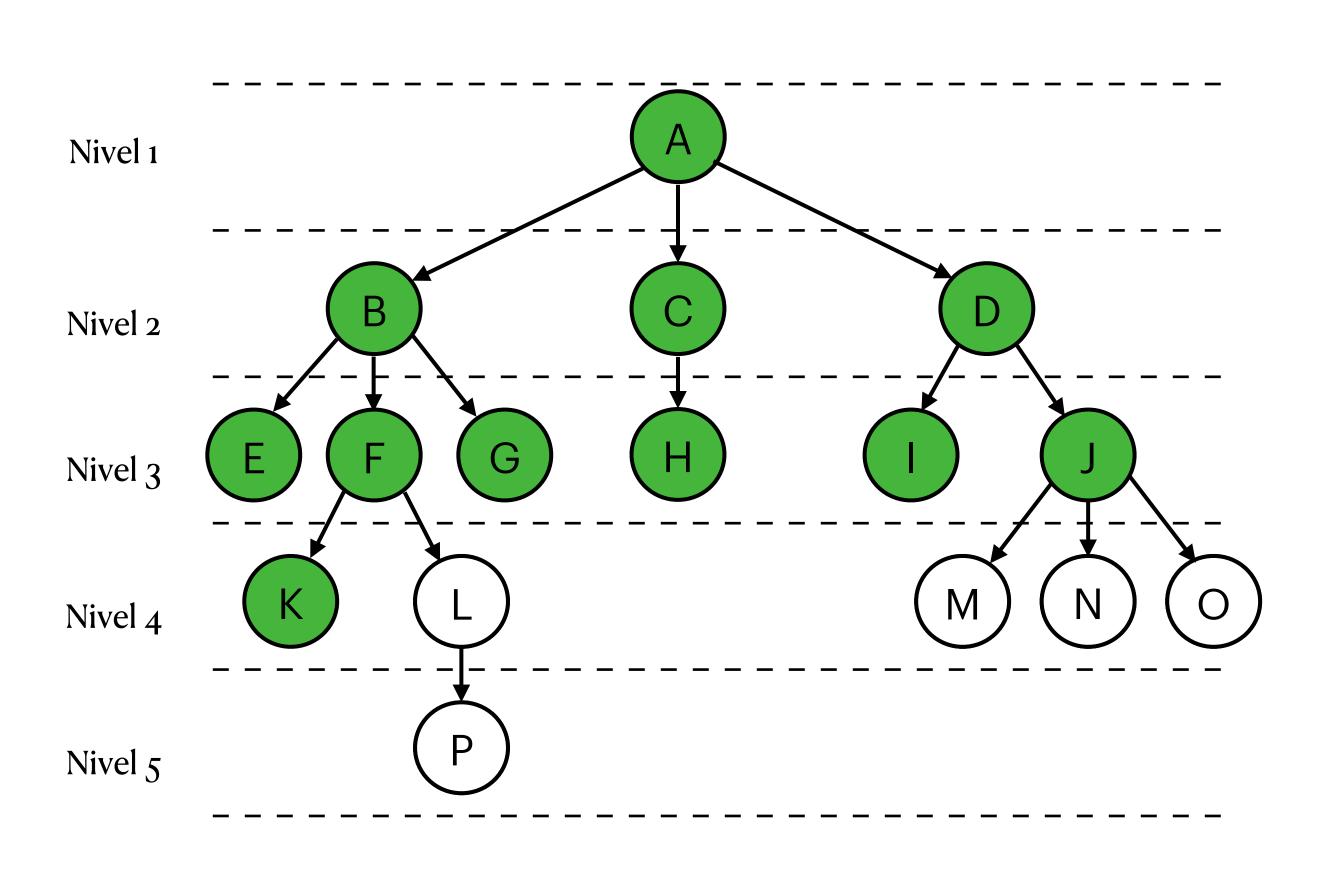


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

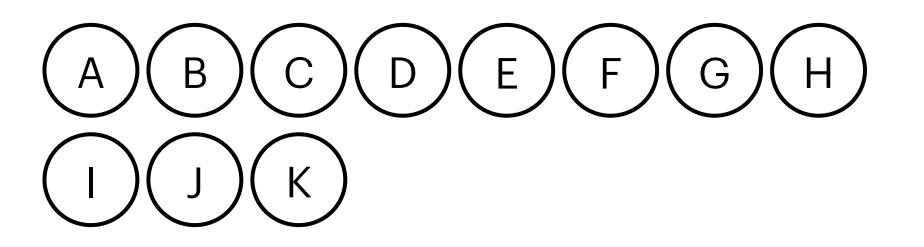


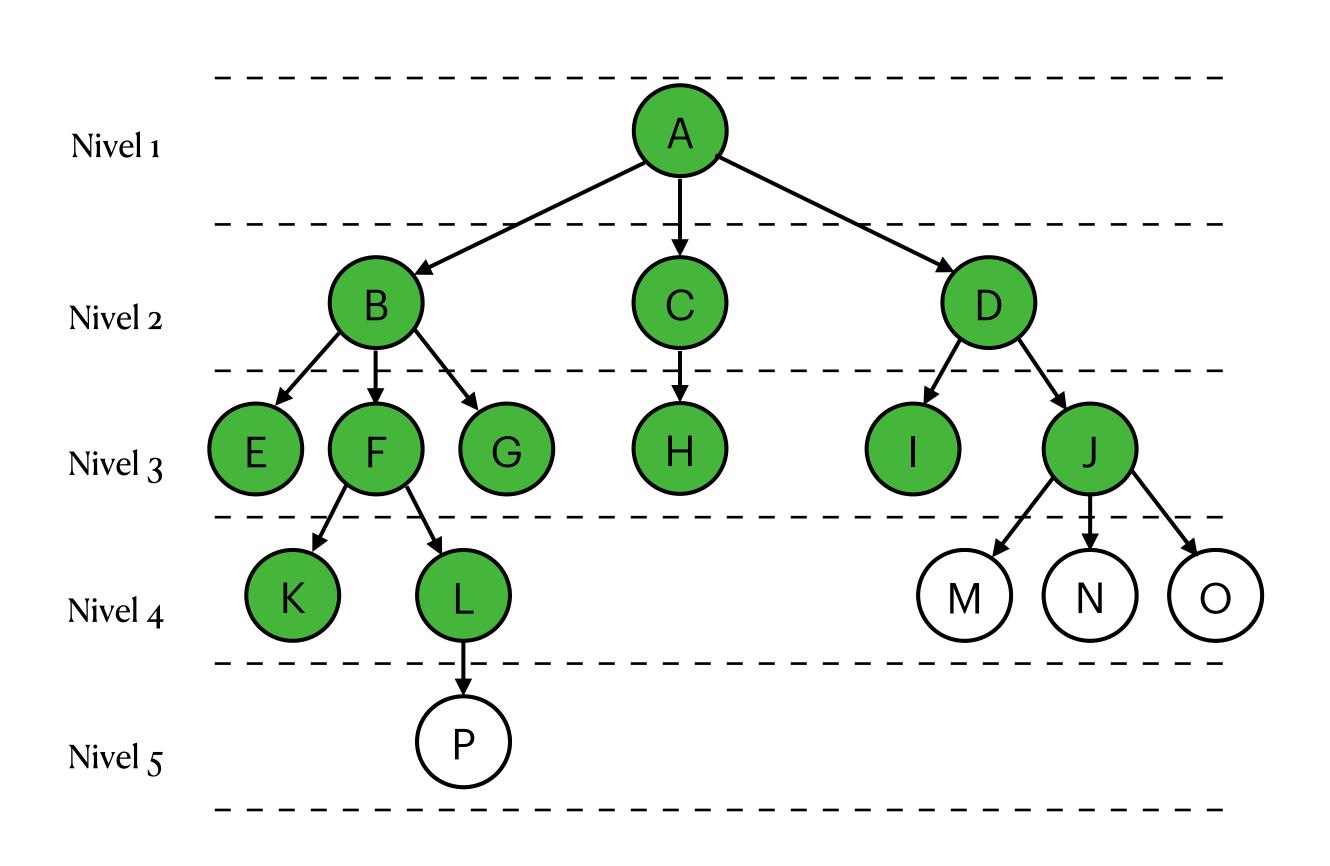


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

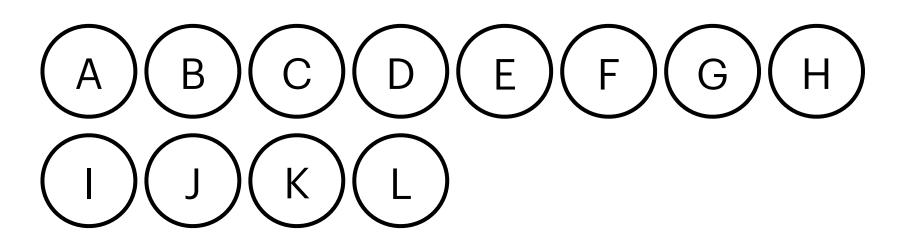


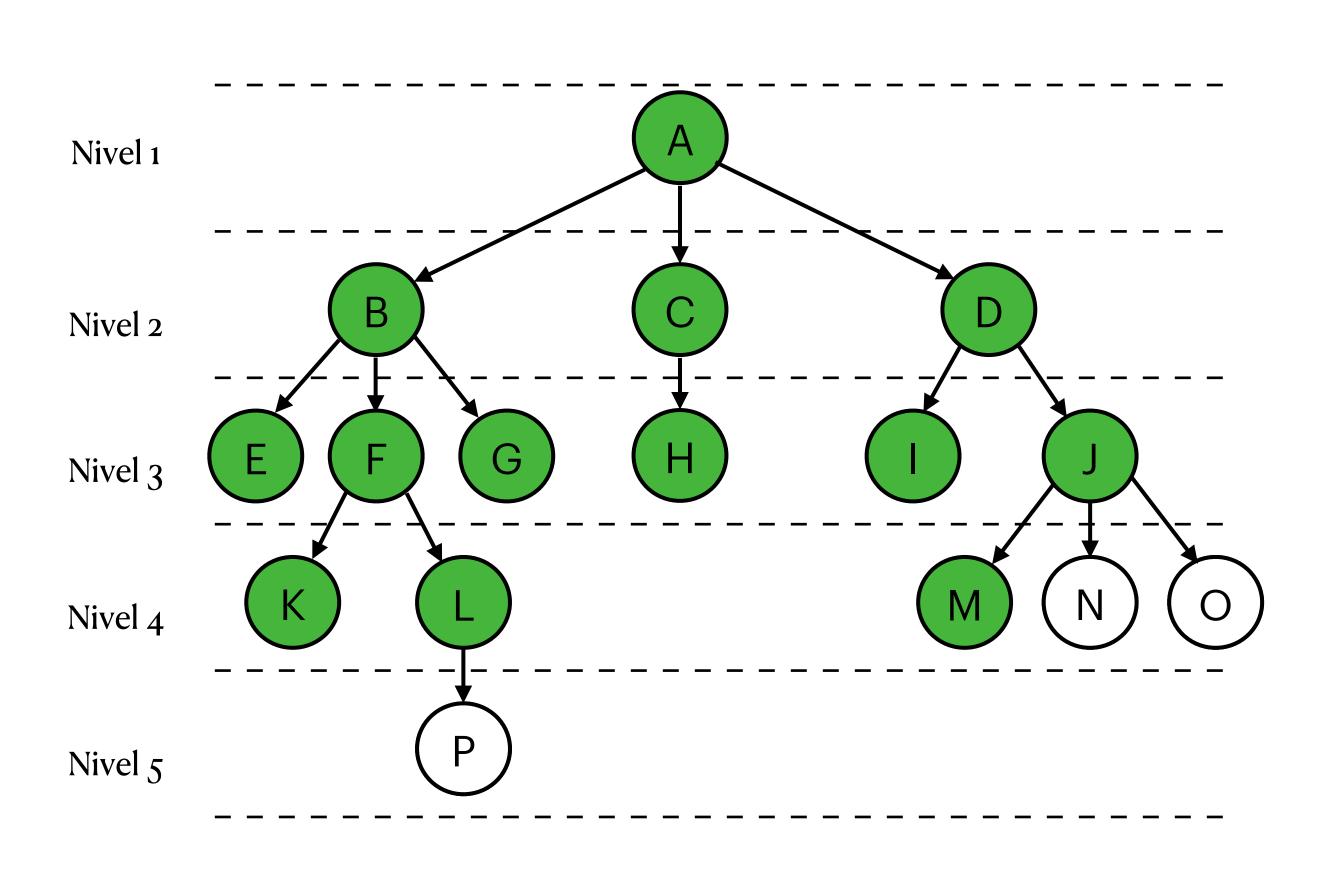


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

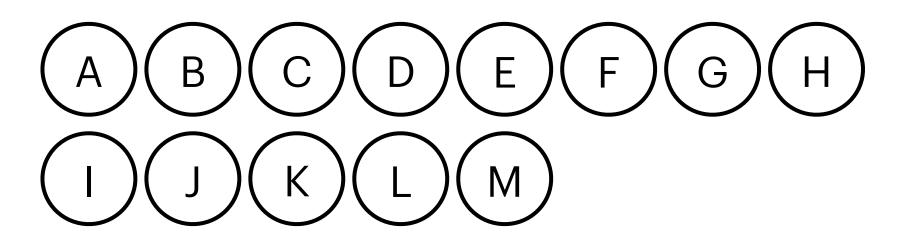


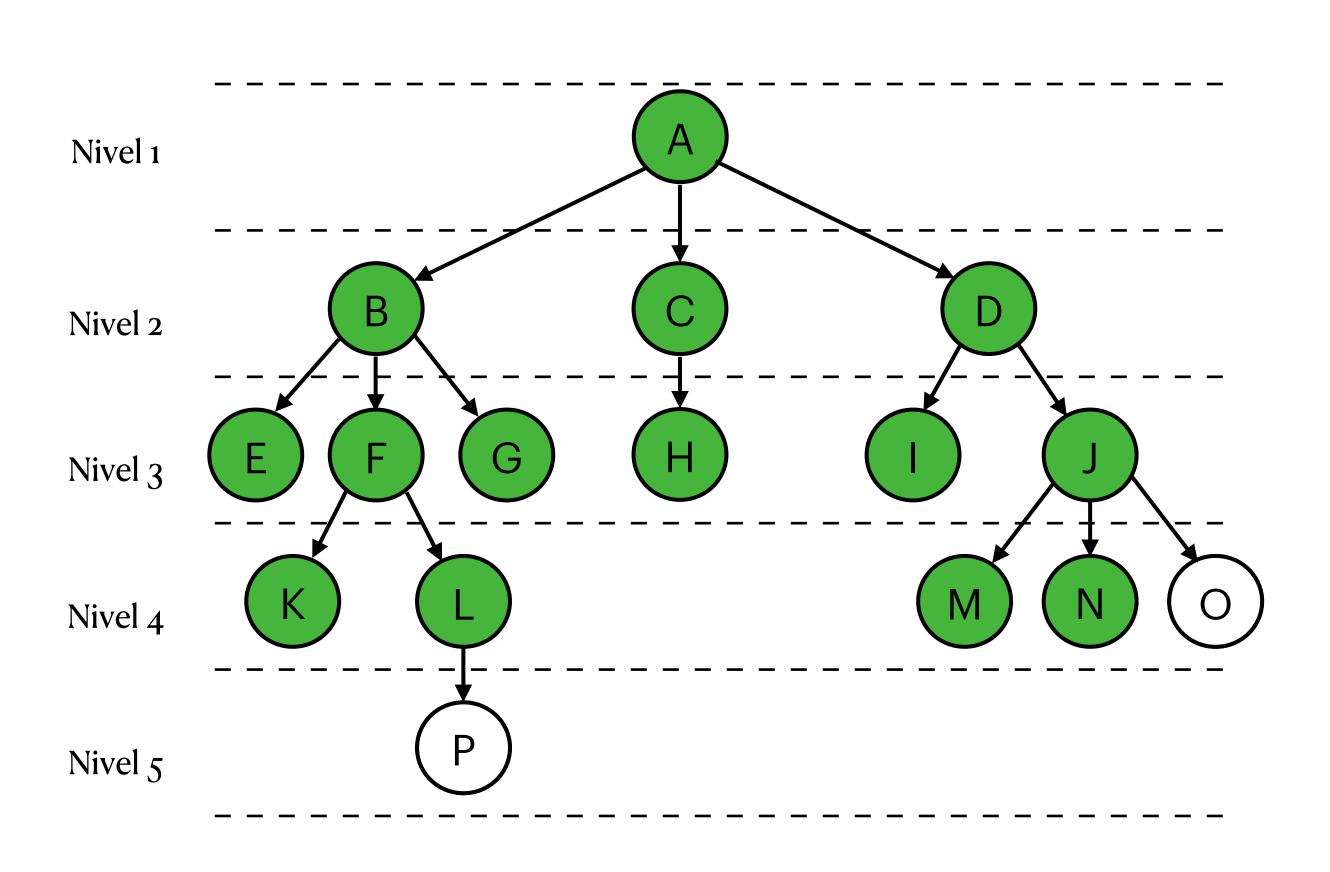


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

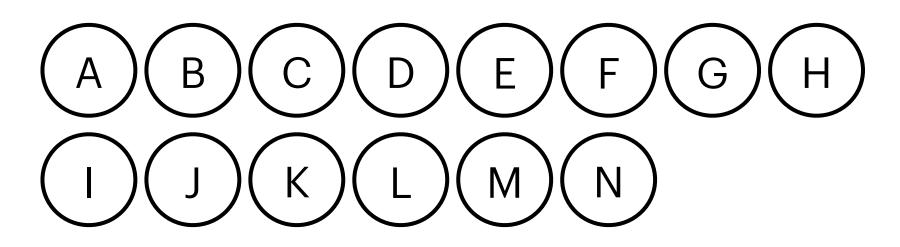


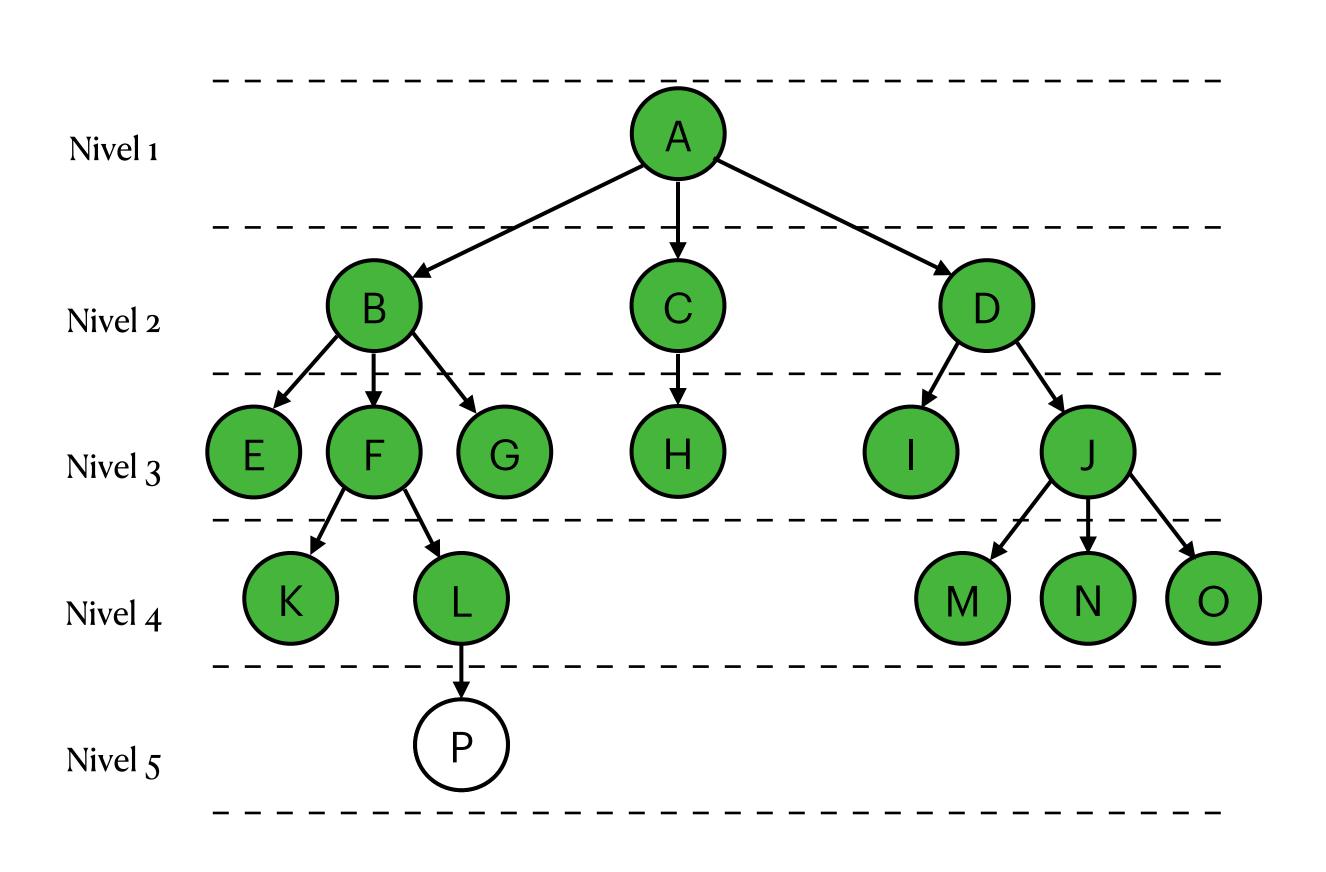


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

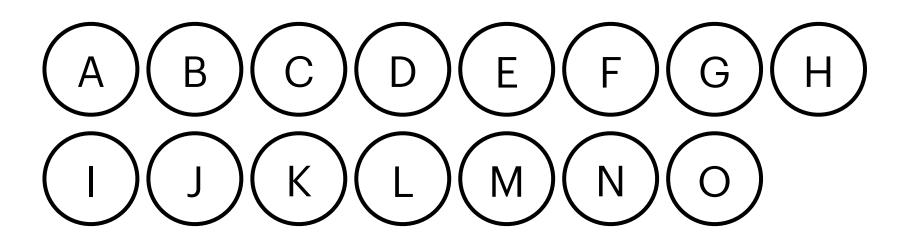


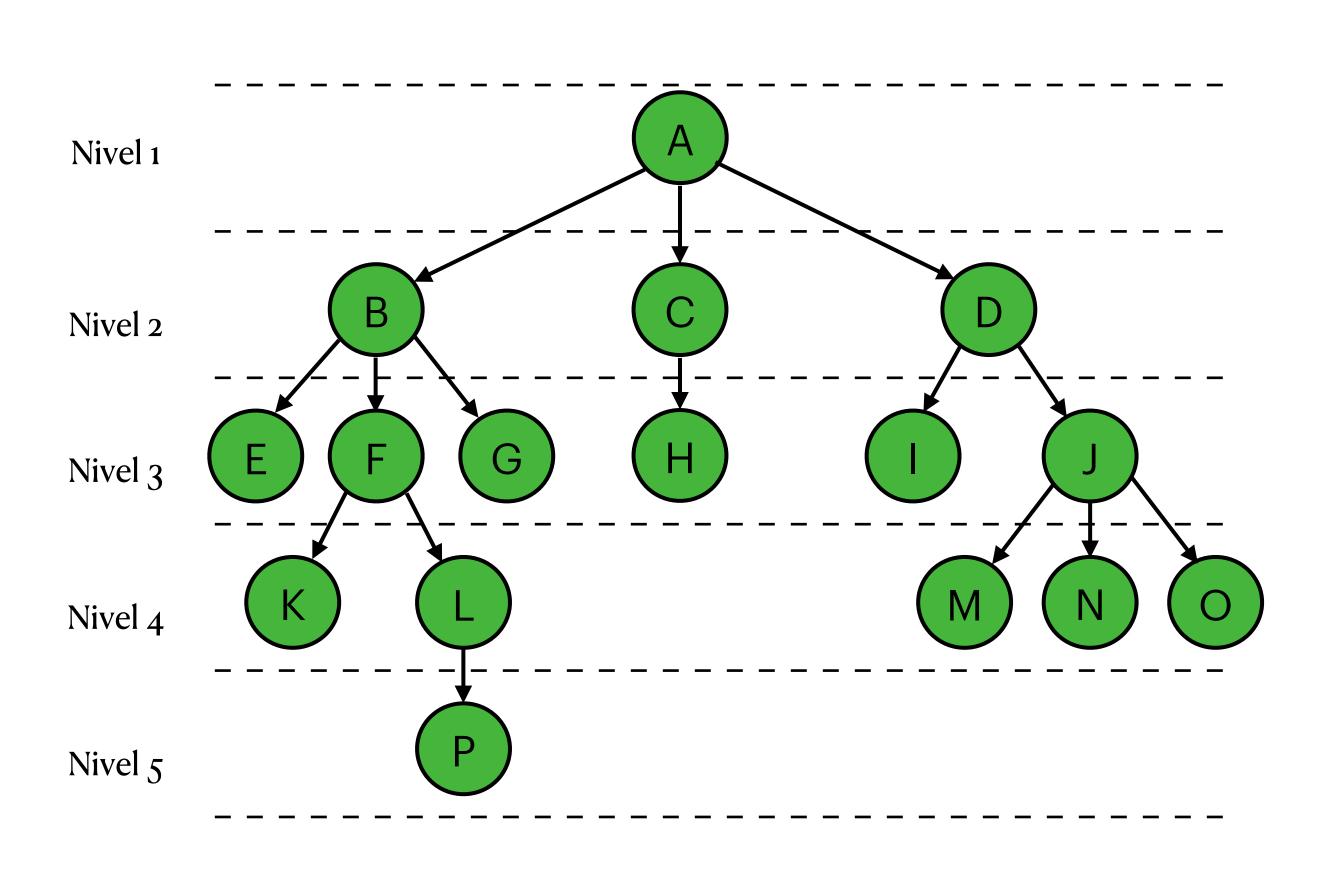


Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)

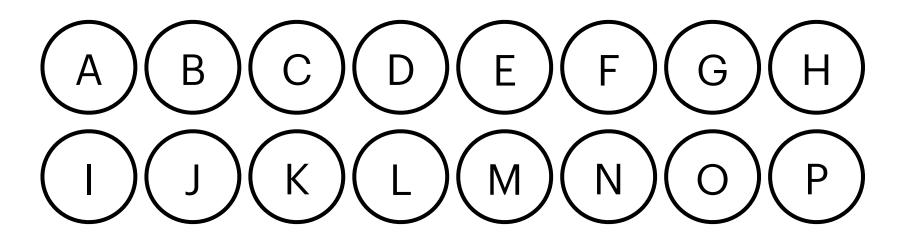




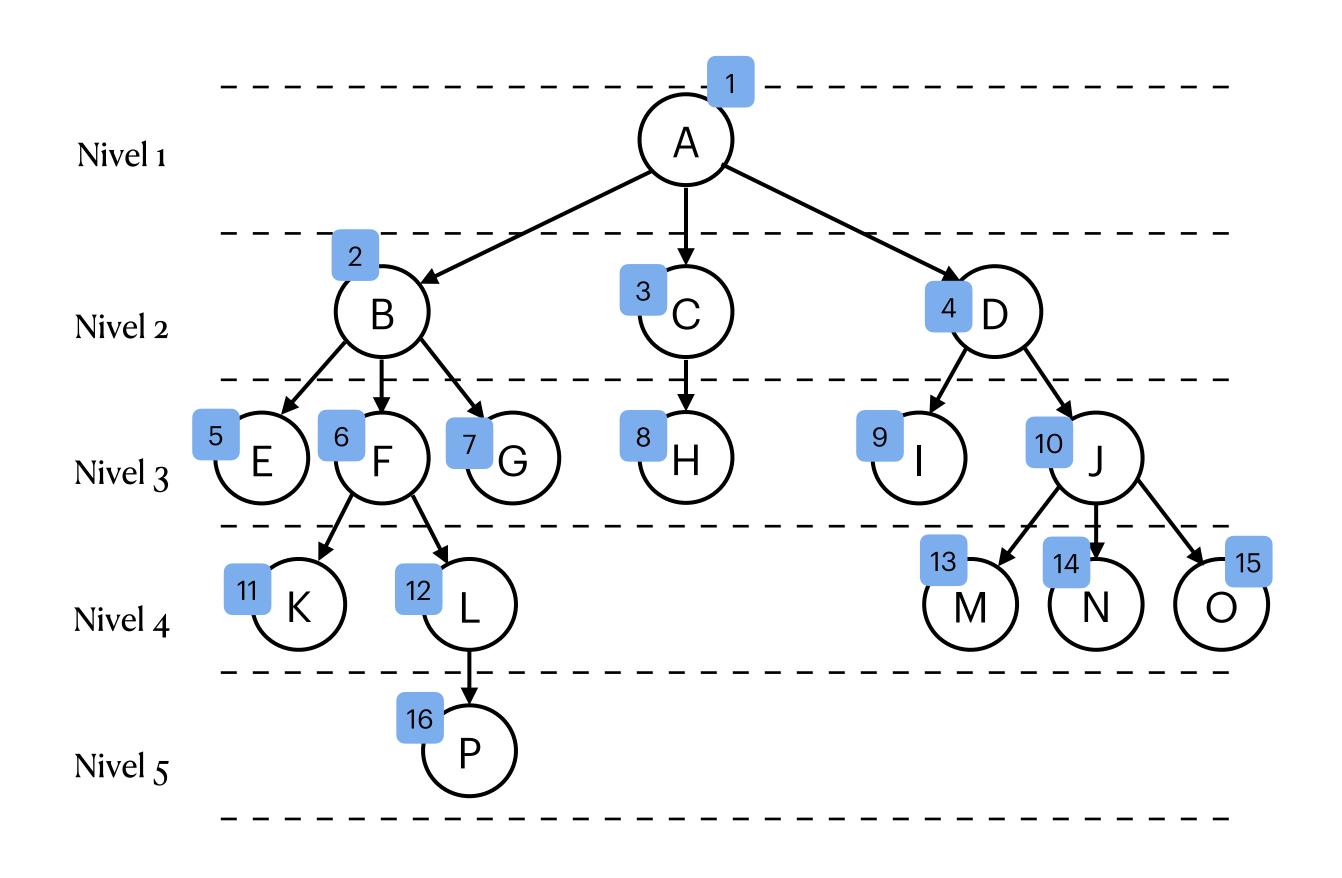
Tehnica căutării prin cuprindere se folosește mai rar

Este utilă pentru tipărirea pe ecran a arborilor.

Se mai numește și traversare pe nivel (level traversal)



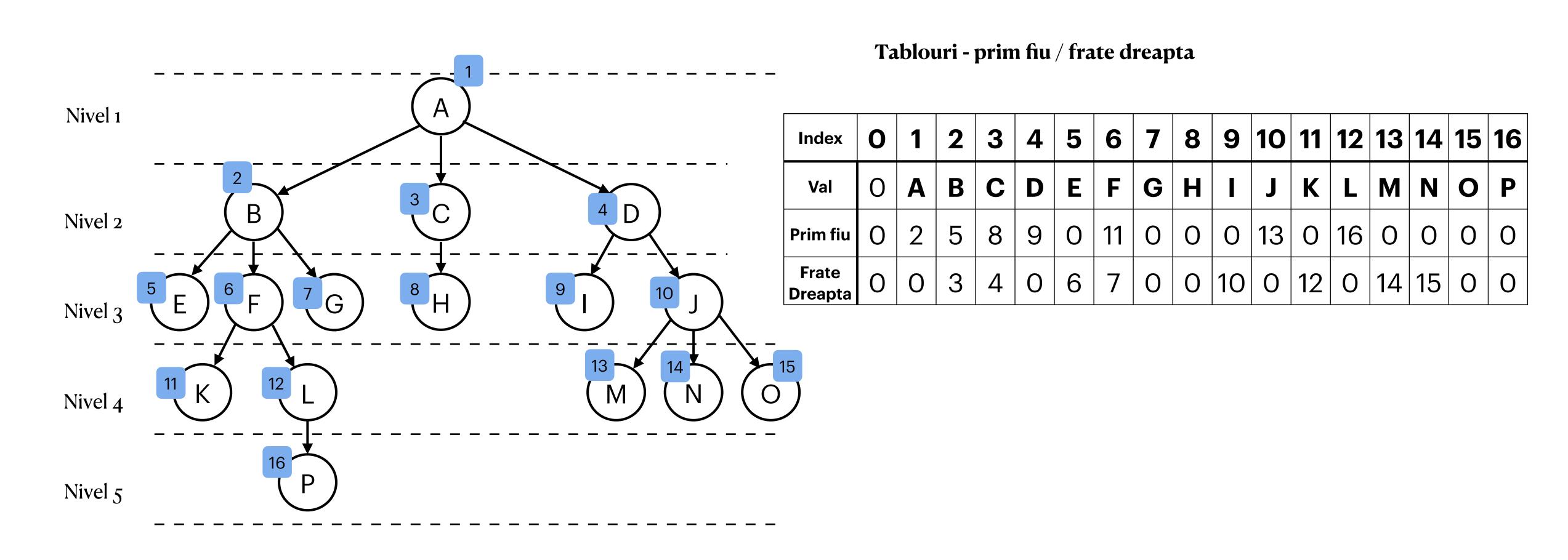
# Implementare



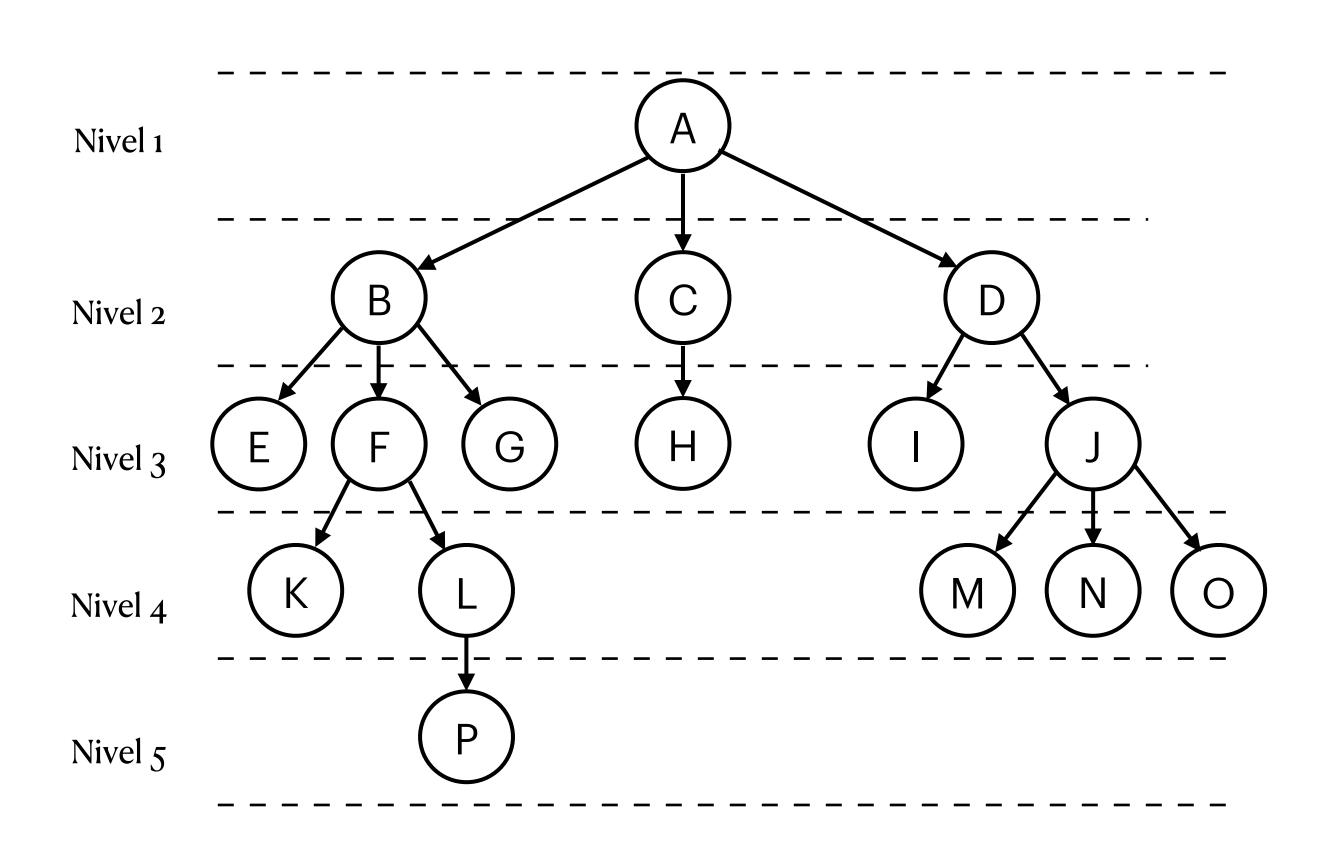
#### Tablouri - indicator către părinte

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Val	0	A	В	С	D	Е	F	G	H		J	K	L	M	Z	0	P
Parinte	0	O	1	1	1	2	2	2	3	4	4	6	6	10	10	10	12

## Implementare



## Implementare



#### Liste

Mai multe metode de reprezentare, in functie de nevoi

Ex1: Fiecare nod are o listă care arată (pointer) către fii săi

Ex2: O listă statică (array) cu câte o intrare pentru fiecare not, fiecare intrare arată (pointer) către o listă dinamică cu referință la fii acelui nod