Stabilitatea sistemelor dinamice

În matematică, teoria stabilității se referă la stabilitatea soluțiilor ecuațiilor diferențiale și a traiectoriilor sistemelor dinamice în cazul unor mici perturbații ale condițiilor inițiale. Condiția necesară pentru ca un sistem tehnic să poată fi utilizabil este ca acesta să fie stabil. Conceptul de stabilitate subliniază proprietatea unui sistem de a-și menține starea de echilibru sau de a evolua dintr-o stare de echilibru în alta. Dacă un sistem liniar este stabil sau instabil este o proprietate a sistemului în sine și nu depinde de intrarea sau funcția de comandă a sistemului. Intrarea contribuie numai la termenii de răspuns la starea de echilibru din soluție.

Un sistem stabil este definit ca fiind un sistem dinamic cu un răspuns limitat la o intrare limitată (mărginită). Există multe definiții diferite ale stabilității ⇒ 1. Teorema fundamentală a stabilității a sistemelor liniare continue și invariante în timp
2. Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz

① Teorema fundamentală a stabilității

Fie sistemul dinamic SISO în timp continuu descris de MM-ISI sau de MM-II:

$$\text{MM-ISI}: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

$$\text{MM-II}: \quad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)}(t) = \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu u^{(\mu)}(t), \quad m < n$$

Ambele modele pot fi reprezentate prin f.d.t $H(s)$:

$$H(s) = \begin{cases} c^T (sI - A)^{-1} b = c^T \dfrac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} b \\[2ex] \dfrac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \end{cases}$$

cu aceeași ecuație caracteristică $\Delta(s)=0$ exprimată astfel:

$$\Delta(s)=\begin{cases} \det(sI-A)=0 & \text{sau} \\ \sum_{v=0}^{n} a_v s^v = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{TFS}}$ $\boxed{\text{(t)}}$: Sistemul descris prin MM-isi sau prin MM-ii este stabil dacă și numai dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice au părțile reale negative, adică:

$$\mathrm{Re}(s_v)<0,\ v=1\dots n$$

Exemplul 1 (pag 2) Efectuarea simplificărilor va conduce la un rezultat greșit în ceea ce privește stabilitatea sistemului în buclă închisă și din acest motiv este interzisă.

② Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz

: Pentru ca rădăcinile unei ecuații algebrice de forma:

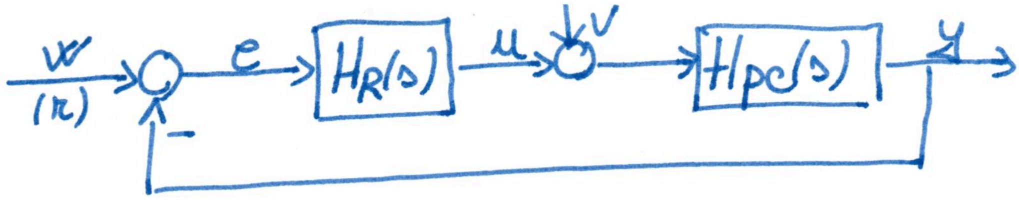
$$\Delta(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

să aibe părțile reale negative, este necesar (dar nu și suficient) ca toți coeficienții ecuației să fie strict pozitivi $\Rightarrow$ dacă cel puțin unul din coeficienți nu este strict pozitiv, atunci sistemul este instabil.

Condițiile suficiente astfel încât sistemul caracterizat de $\Delta(s)$ să fie stabil sunt ca determinantul Hurwitz și toți minorii principali să fie strict pozitivi.

$$H=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2 (pag 4)



$$H_R(s)=\frac{k_R(1+8s)}{1+20s}\ ;\ H_{pc}(s)=\frac{1-4s}{(1+2s)(1+7s)}\ ,\ k_R>0$$

$$\Delta(s)=1+H_0(s)=1+H_R(s)H_{pc}(s)=1+\frac{k_R(1+8s)(1-4s)}{(1+20s)(1+2s)(1+7s)}$$

$$\Delta(s)=(1+20s)(1+2s)(1+7s)+k_R(1+8s)(1-4s)$$
$$\Delta(s)=(1+20s)(14s^2+9s+1)+k_R(1+4s-32s^2)$$
$$\Delta(s)=14s^2+9s+1+280s^3+180s^2+20s+k_R+4k_Rs-32k_Rs^2$$
$$\Delta(s)=280s^3+(194-32k_R)s^2+(29+4k_R)s+k_R+1=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

Sunt impuse condițiile necesare specificate în teorema 2 (T_2):

$$\left.\begin{array}{l} a_3=280>0 \\ a_2=194-32k_R>0 \Rightarrow 32k_R<194 \Rightarrow k_R<6{,}0625 \Rightarrow k_R\in(-\infty;6{,}0625) \\ a_1=29+4k_R>0 \Rightarrow 4k_R>-29 \Rightarrow k_R>-7{,}25 \Rightarrow k_R\in(-7{,}25;+\infty) \\ a_0=k_R+1>0 \Rightarrow k_R>-1 \Rightarrow k_R\in(-1;+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$k_R\in(-\infty;6{,}0625)\cap(-7{,}25;+\infty)\cap(-1;+\infty)\cap(0;+\infty)\Rightarrow \boxed{k_R\in(0;6{,}0625)}\ (*)$$

$$n=3\Rightarrow\quad H=\begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0\\ a_3 & a_1 & 0\\ 0 & a_2 & a_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 194-32k_R & k_R+1 & 0\\ 280 & 29+4k_R & 0\\ 0 & 194-32k_R & k_R+1\end{bmatrix}$$

Sunt impuse condițiile de stabilitate (condițiile suficiente):

$$\det(H_1)=a_2=194-32k_R>0\Rightarrow k_R\in(-\infty;6{,}0625)$$
$$\det(H_2)=a_2a_1-a_3a_0>0\Rightarrow(194-32k_R)(29+4k_R)-280(k_R+1)>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5626+776k_R-928k_R-128k_R^2-280k_R-280>0$$
$$-128k_R^2-432k_R+5346>0\Rightarrow 128k_R^2+432k_R-5346<0\Rightarrow$$
$$k_R^2+3{,}375k_R-41{,}7656<0\ ,\ \Delta=b^2-4ac=(3{,}375)^2+4\cdot41{,}7656=178{,}453$$

$$k_{R_{1,2}} = \frac{-3,375 \pm 13,3586}{2} \rightarrow k_{R_1} \cong 4,9919 ;\quad k_{R_2} = -8,3668 \Rightarrow k_R \in (-8,3668;\ 4,9919)$$

k_R	$-\infty$		$-8,3668$		$4,9919$		$+\infty$
$k_R - 4,9919$	− − −	− − −	− − −	− − −	0	+ + +	+ + +
$k_R + 8,3668$	− − −	− − −	0	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +
$(\ )(\ )$	+ + +	+ + +	0	− − −	0	+ + +	+ + +

$$\det(H_3) = a_0 \cdot \det(H_2) = (k_R+1)\det(H_2) > 0 \Rightarrow k_R(-1;+\infty) \cap (-8,3668;\ 4,9919)$$

$$\Rightarrow k_R \in (-1;\ 4,9919)$$

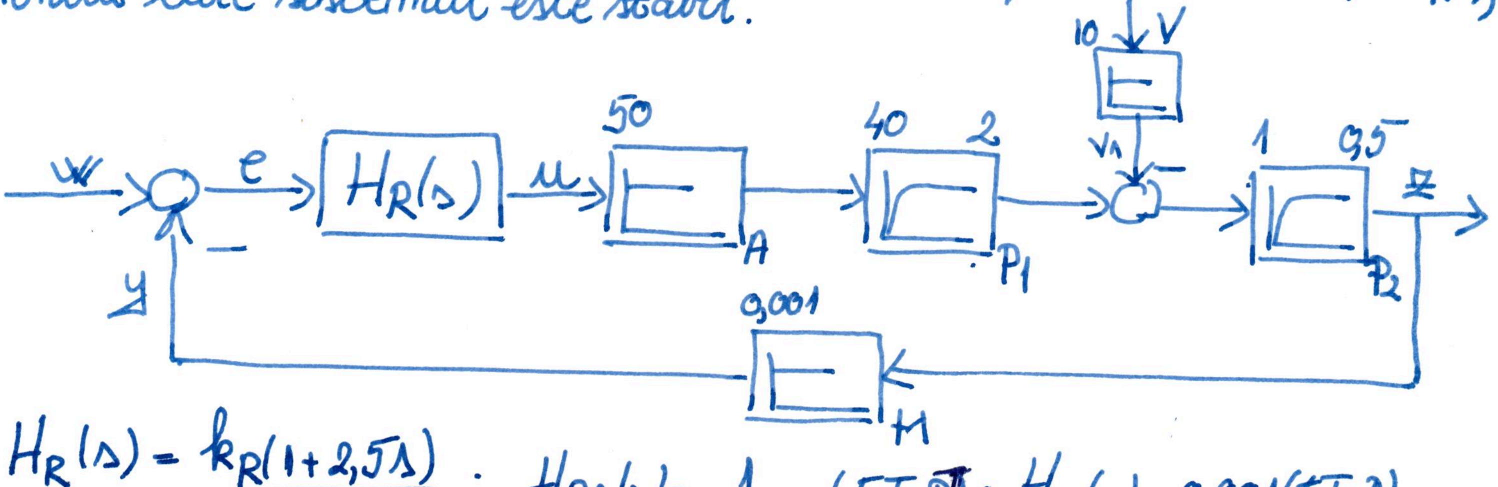
$$k_R \in (-\infty;\ 6,0625) \cap (-8,3668;\ 4,9919) \cap (-1;\ 4,9919) \cap (0;+\infty) \Rightarrow \boxed{k_R \in (0;\ 4,9919)}\ (**)$$

$$\text{din } (*) \text{ și } (**) \Rightarrow k_R \in (0;\ 6,0625) \cap (0;\ 4,9919) \Rightarrow \boxed{k_R \in (0;\ 4,9919)}$$

Exemplul 3: Se consideră SRA din figura de mai jos. Regulatorul este de tip PI cu f.d.t. $H_R(s) = \frac{k_R(1+2,5s)}{2,5s}$. Se cere:

① Să se determine caracteristicile de transfer: $H_{zw}(s)$ și $H_{zv}(s)$ (f.d.t în raport cu referința w și în raport cu perturbația v)

② Să se determine domeniul de valori al parametrului k_R ($k_R > 0$), pentru care sistemul este stabil.



$$H_R(s) = \frac{k_R(1+2,5s)}{2,5s} ;\quad H_{P2}(s) = \frac{1}{1+9,5s} (ET\text{-}PT_1);\quad H_M(s) = 0,001 (ET\text{-}P)$$

$$H_A(s) = 50 (ET\text{-}P) ;\quad H_{P1}(s) = \frac{40}{1+2s} (ET\text{-}PT_1);\quad H_v(s) = 10 (ET\text{-}P);$$

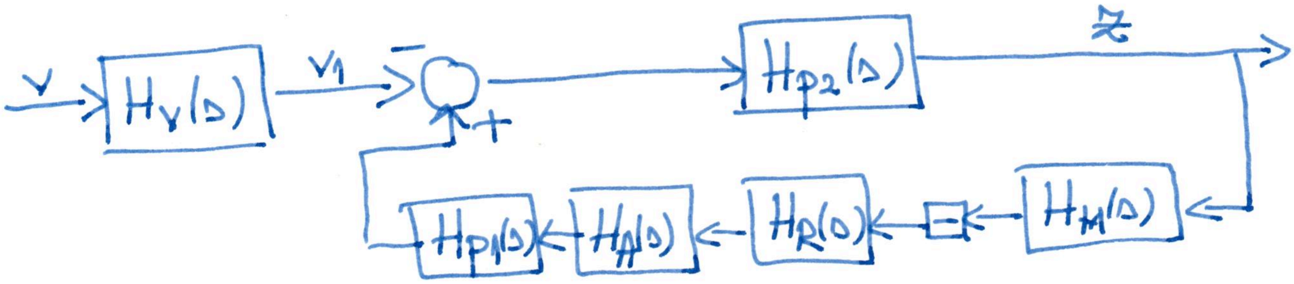
1) $$H_{zw}(s)=\frac{Z(s)}{W(s)}\Big|_{v=0}=\frac{H_R(s)\cdot H_A(s)\cdot H_{p1}(s)\cdot H_{p2}(s)}{1+H_R(s)H_A(s)H_{p1}(s)H_{p2}(s)\cdot H_M(s)}=$$

$$=\frac{\dfrac{k_R(1+2{,}5s)}{2{,}5s}\cdot 50\cdot\dfrac{40}{1+2s}\cdot\dfrac{1}{1+0{,}5s}}{1+\dfrac{2000\,k_R(1+2{,}5s)}{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)}\cdot 0{,}001}=\frac{\dfrac{2000\,k_R(1+2{,}5s)}{\cancel{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)}}}{\dfrac{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)+2k_R(1+2{,}5s)}{\cancel{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)}}}$$

$$=\frac{2000k_R(1+2{,}5s)}{2{,}5\left[s(1+2s)(1+0{,}5s)+0{,}8k_R(1+2{,}5s)\right]}=\frac{800\,k_R(1+2{,}5s)}{s(s^2+2{,}5s+1)+0{,}8k_R+2k_Rs}=$$

$$=\frac{800\,k_R(1+2{,}5s)}{s^3+2{,}5s^2+(1+2k_R)s+0{,}8k_R}\Rightarrow\boxed{H_{zw}(s)=\frac{800k_R(1+2{,}5s)}{s^3+2{,}5s^2+(1+2k_R)s+0{,}8k_R}}$$

$$H_{zv}(s)=\frac{Z(s)}{V(s)}\Big|_{w=0}=-H_V(s)\cdot\frac{H_{p2}(s)}{1-H_{p2}(s)\left[(-)H_M(s)H_R(s)H_A(s)H_{p1}(s)\right]}$$



$$\Rightarrow H_{zv}(s)=-H_V(s)\cdot\frac{H_{p2}(s)}{1+H_R(s)H_A(s)H_{p1}(s)H_{p2}(s)H_M(s)}=-10\cdot\frac{\dfrac{1}{1+0{,}5s}}{1+\dfrac{2k_R(1+2{,}5s)}{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)}}$$

$$=\frac{\dfrac{-10}{\cancel{1+0{,}5s}}}{\dfrac{2{,}5s(1+2s)(1+0{,}5s)+2k_R(1+2{,}5s)}{2{,}5s(1+2s)\cancel{(1+0{,}5s)}}}=-\frac{25s(1+2s)}{2{,}5\left[s^3+2{,}5s^2+(1+2k_R)s+0{,}8k_R\right]}$$

$$\Rightarrow\boxed{H_{zv}(s)=-\frac{10s(1+2s)}{s^3+2{,}5s^2+(1+2k_R)s+0{,}8k_R}}$$

2) $\Delta(s)=s^3+2{,}5s^2+(1+2k_R)s+0{,}8k_R=a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$

Sunt impuse <u>condițiile necesare</u> specificate în T_2:

$a_3 = 1 > 0$

$a_2 = 2,5 > 0$

$a_1 = (1+2k_R) > 0 \Rightarrow 2k_R > -1 \Rightarrow k_R > -0,5 \Rightarrow k_R \in (-0,5; +\infty)$

$a_0 = 0,8k_R > 0 \Rightarrow k_R \in (0; +\infty)$

$k_R \in (-0,5; +\infty) \cap (0; +\infty) \Rightarrow \boxed{k_R \in (0; +\infty)}$ (*)

$$n = 3 \Rightarrow H = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,8k_R & 0 \\ 1 & 1+2k_R & 0 \\ 0 & 2,5 & 0,8k_R \end{bmatrix}$$

Sunt impuse <u>condițiile de stabilitate (condițiile suficiente)</u>:

$\det(H_1) = 2,5 > 0$

$\det(H_2) = 2,5(1+2k_R) - 0,8k_R = 2,5 + 5k_R - 0,8k_R = 4,2k_R + 2,5 > 0 \Rightarrow k_R > -0,5952$

$\Rightarrow k_R \in (-0,5952; +\infty)$

$\det(H_3) = a_0 \cdot \det(H_2) = 0,8k_R \cdot (4,2k_R + 2,5) \Rightarrow k_R \in (0; +\infty) \cap (-0,5952; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow k_R \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow k_R \in (-0;5952; +\infty) \cap (0; +\infty) \Rightarrow \boxed{k_R \in (0; +\infty)}$ (**)

Din (*) și (**) $\Rightarrow \boxed{k_R \in (0; +\infty)}$