ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE BUCUREȘTI
FACULTATEA DE CIBERNETICĂ, STATISTICĂ ȘI INFORMATICĂ ECONOMICĂ

Sesiunea Științifică Studențească 2022

# Modelarea și evaluarea riscurilor competitive, cu aplicații

Student
Bolboașă Maria-Bianca

Profesor coordonator
Lect. dr. Florentin Șerban

## Cuprins

**Rezumat:** Riscul reprezintă efectul incertitudinii asupra obiectivelor, efectul fiind considerat drept o deviere de la ceea ce se anticipa. O situație de riscuri competitive apare atunci când un individ se poate confrunta cu mai mult de o sursă de risc. În cele mai multe situații din viața reală nu ne confruntăm doar cu o singură sursă de risc sau cu un singur risc, ci cu mai multe surse de risc sau combinații de riscuri. O întrebare importantă care se ridică este dacă riscurile se influențează reciproc sau nu. Pentru a modela aceste evenimente în lucrarea de față folosim distribuția Weibull, mai întâi pentru modelul cu riscuri independente, apoi pentru modelul cu riscuri dependente. De asemenea, studiem metode de estimare a parametrilor distributiei Weibull pentru a modela densitățile celor două riscuri.

**Cuvinte cheie:** Riscuri competitive, Repartiție Weibull, Riscuri independente, Riscuri dependente, Metoda verosimilității maxime, model CRM

**Abstract:** In general, a competing risks situation arises when an individual can experience more than one type of event and the occurrence of one type of event hinders the occurrence of other types of events. An important question that arises is whether the risks influence each other or not. To model these events in this paperwork, we use the Weibull distribution, first for the independent risks model, then for the dependent risks model. We also study methods of estimating Weibull distribution parameters to model the densities of the two risks.

**Keywords:** Competitive Risks, Weibull Distribution, Independent Risks, Maximum Likelihood Estimation, Bivariate Weibull Distribution

# Introducere

În cele mai multe situații există riscuri generate de evenimente incerte care, în cazul în care se produc, influențează în mod pozitiv sau negativ obiectivele unei activitați sau ale unui grup de activități. Acest fapt se produce fie deoarece în derularea unei activități a intervenit o situație neprevăzută, fie pentru că un eveniment care a fost planificat nu s-a realizat așa cum a fost prevăzut. Deseori există diverse surse de risc care, în final, determină riscul global al unui sistem mai mult sau mai puțin complex.

Managementul riscului este proiectat pentru a identifica evenimentele ce pot afecta societatea, spre a gestiona riscul în funcție de apetitul la risc și pentru a conferi un nivel de siguranță corespunzător privind atingerea obiectivelor sociale, economice, financiare sau de altă natură.

## 1. Modele cu riscuri competitive

Durata de viață a sistemelor expuse mai multor riscuri poate fi modelată cu ajutorul unui sistem în serie. Fiecare risc este asociat unei componente a unui sistem cu mai multe componente dispuse în serie.

Considerăm un sistem expus unui număr de $k = 2$ riscuri. Sistemul are o durată de viață potențială asociată fiecărui risc. Notăm cu $T_i,\ i = \overline{1,2}$, variabilele aleatoare care modelează durata de viață corespunzătoare cazurilor în care se produc riscurile 1, respectiv 2. observate pentru acest sistem.

Pentru un CRM cu două riscuri, variabila de interes este modelată de variabila aleatoare care reprezintă minimul dintre duratele de viață individuale:

$$T_m = \min\,(T_1, T_2).$$

Determinăm funcția de repartiție a variabilei aleatoare $T_m$:

$$F_{T_m}(t) = \mathrm{P}(T_m < t) = 1 - \mathrm{P}(T_m \geq t) = 1 - \mathrm{P}(T_1 \geq t, T_2 \geq t) \qquad (1)$$

În cazul în care variabilele aleatoare $T_1, T_2$ care modelează riscurile sunt independente, avem:

$$\mathrm{P}(T_1 \geq t, T_2 \geq t) = \mathrm{P}(T_1 \geq t) \cdot \mathrm{P}(T_2 \geq t) = [1 - \mathrm{P}(T_1 < t)][1 - \mathrm{P}(T_2 < t)],$$

prin urmare

$$F_{T_m}(t) = 1 - \left[1 - F_{T_1}(t)\right]\left[1 - F_{T_2}(t)\right] \tag{2}$$

unde $F_{T_1}$ şi $F_{T_2}$ reprezintă funcțiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $T_1$, respectiv $T_2$.

În cazul general, pentru un număr de $k$ riscuri modelate de variabile aleatoare independente, atunci relațiile (1) și (2) devin:

$$F_{T_m}(x) = 1 - \mathrm{P}(T_1 \geq x, T_2 \geq x, \dots , T_k \geq x)$$

și respectiv

$$F_{T_m}(x) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{P}(T_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^{k} \left[1 - F_{T_1}(x)\right]$$

## 2. Model cu riscuri competitive independente

Pentru un model CRM cu număr de $k = 2$ riscuri descrise de variabilele aleatoare independente $T_1, T_2$ avem:

$$F_{T_m}(t) = 1 - \left[1 - F_{T_1}(t)\right]\left[1 - F_{T_2}(t)\right]$$

Prin derivare se obține:

$$\frac{dF_{T_m}(t)}{dt} = f_{T_1}(t)\left[1 - F_{T_2}(t)\right] + f_{T_2}(t)\,[1 - F_{T_1}(t)\,],$$

unde $f_{T_i}$ reprezintă densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $T_i$, $i = \overline{1,2}$.

Notăm cu $S_{T_m}(t) = 1 - F_{T_m}(xt)$ functia de supravietuire a variabilei aleatoare $T_m$, iar cu $S_{T_i}(t) = 1 - F_{T_i}(t)$ functia de supravietuire a variabilei aleatoare $T_i$, $i = \overline{1,2}$.

Prin derivare obținem:

$$\frac{dS_{T_m}(t)}{dt} = f_{T_1}(t)\,S_{T_2}(t) + f_{T_2}(t)\,S_{T_1}(t) \tag{3}$$

## 3. Model cu riscuri competitive dependente

Considerăm cazul în care riscurile competitive sunt descrise de variabile aleatoare dependente, ceea ce poate complica în mare măsură modelarea statistică și analiza datelor.

Funcția de supraviețuire a variabilei aleatoare bidimensionale $(T_1, T_2)$ este:

$S(t_1, t_2) = \mathrm{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$.

**Propoziție.** Funcția de repartiție a variabilei aleatoare bidimensionale $(T_1, T_2)$ este:

$$F(t_1, t_2) = F_{T_1}(t_1) + F_{T_2}(t_2) + S(t_1, t_2) - 1 \qquad (4)$$

unde $F_1(t_1)$, $F_2(t_2)$ sunt funcțiile de repartiție marginale.

**Demonstrație:**

$F\ (t_1, t_2) = P(T_m < t) = P(T_1 < t_1, T_2 < t_2) = P((T_1 < t_1) \cap (T_2 < t_2)) =$

$= 1 - P((T_1 \geq t_1) \cup (T_2 \geq t_2)) = 1 - [P(T_1 \geq t_1) + P\ (T_2 \geq t_2) - P(T_1 \geq t_1, T_2 \geq t_2)] =$

$= 1 - [1 - F_1(t_1)] - [1 - F_2(t_2)] + S(t_1, t_2) = F_1(t_1) + F_2(t_2) + S\ (t_1, t_2) - 1$

## 4. Modelarea riscurilor folosind repartiția Weibull

Spunem că variabila aleatoare $T$ urmează o repartiție Weibull de parametri $\eta$ și $\beta$, notată W(η, β), dacă densitatea sa de probabilitate are următoarea formă:

$$f\,(t, \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta - 1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right],\ \text{cu } \eta, \beta > 0 \qquad (5)$$

Funcția de repartiție este dată de:

$$F\,(t, \eta, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \qquad (6)$$

Distribuția Weibull este utilizată pentru modelarea fenomenelor strâns legate de înregistrarea unui eșec, dar este aplicabilă pentru modelarea a numeroase alte fenomene, inclusiv în cazul datelor care modelează durata de viață a unui produs sau durata de supraviețuire a oamenilor.

Un motiv pentru care distribuția Weibull este utilizată pe scară largă în studierea nivelului de încredere și analiza datelor de viață se datorează flexibilității sale. Poate imita diferite distribuții precum cea Normală, sau pentru cazul special când β=1, aceasta se transformă în distribuție Exponențială, iar când β=2, distribuția se transformă într-una Rayleigh.

Datorită utilizărilor sale în analiza de viață, un indicator relevant este probabilitatea ca durata de viață să depășească o anumită valoare dată (adică P (T> t)). Aceasta se numește funcția de supraviețuire sau, în cazul unui produs, fiabilitatea sa. Funcţia de supravieţuire a repartiţiei Weibull este dată de:

$$S(t)=1-P(T\leq t)=1-F(t|\eta,\beta)=\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \tag{7}$$

O altă funcție de interes este cea de hazard sau Rata instantanee de eșec sau rata de hazard. Aceasta se obține utilizând atât funcția de supraviețuire, cât și funcția de densitate.

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=\frac{\frac{\beta}{\eta}\cdot\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\cdot\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]}{\exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]}=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}\cdot t^{(\beta-1)} \tag{8}$$

O proprietate importantă ce rezultă din această relație este aceea că în cazul distribuției Weibull rata de hazard nu este o funcție constantă, spre deosebire de cazul distribuției Exponențiale, în care aceasta este o constantă. Acest lucru denotă o proprietate importantă a distribuției Weibull și anume aceea că în cazul în care parametrul β>1, funcția de hazard, numită rata instantanee de eșec, crește în timp, când β=1, funcția rămâne constantă, pe când, dacă β<1, funcția de hazard descrește în timp. (Collett, 2009).

## 4.1. Proprietăți ale variabilelor aleatoare unidimensioanle având repartiție Weibull

Densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $T$ având repartiție Weibull de parametri $\eta$ și $\beta$ este:

$$f(t;\eta,\beta) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right]$$

**Momentele repartiției Weibull**

- **Determinarea momentului inițial de ordin r**

$m_r$=M($T^r$)=$\int_0^\infty t^r \cdot \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} dt =$

$= \frac{\beta}{\eta^\beta} \int_0^\infty t^r \cdot (t)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} dt = \frac{\beta}{\eta^\beta} \int_0^\infty t^r\ (t)^{\beta+r-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} dt$

$\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \overset{\text{def}}{\equiv} y$ => t= $y^{\frac{1}{\beta}} \cdot \eta$ => dt=η$\cdot\frac{1}{\beta}\cdot y^{\frac{1-\beta}{\beta}}$

M($T^r$) $= \frac{\beta}{\eta^\beta} \cdot \int_0^\infty \eta^{\beta+r-1} \cdot y^{\frac{\beta+r-1}{\beta}} \cdot e^{-y} \cdot \eta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot y^{\frac{1-\beta}{\beta}} dy = \frac{\beta}{\eta^\beta} \cdot \eta^{\beta+r-1} \cdot \eta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \int_0^\infty y^{\frac{r}{\beta}} \cdot e^{-y}\, dy$

M($T^r$)=$\eta^r \cdot \int_0^\infty y^{\frac{r}{\beta}} \cdot e^{-y}\, dy$ (a$-$ 1= $\frac{r}{\beta}$ => a= $\frac{r+\beta}{\beta}$)

$$M(T^r)=\eta^r \cdot \Gamma(1+\frac{r}{\beta}) \qquad (9)$$

- **Media si dispersia repartitiei Weibull** se pot calcula cu ajutorul momentului de ordin r.

**Media=$m_1$**

M(T)= $\eta \cdot \Gamma(1+\frac{1}{\beta})$

**Dispersia**

D(T)=M($T^2$) $- M^2(T)$= $\eta^2 \cdot \Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \eta^2 \cdot \Gamma^2(1+\frac{r}{\beta})$= $\eta^2 \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]$

***Proprietate a modelului cu riscuri competitive independente***

**Propoziție.** Dacă $T_1$ ~ WEI($\eta_1$ , β) , $T_2$ ~ WEI($\eta_2$ , β) sunt variabile independente, atunci funcția de repartiție $F_m(t)$ coincide cu funcția de repartiție a unei distribuții WEI(η, β), unde

$$\eta = \frac{\eta_1\ \eta_2}{(\eta_1{}^{\beta} + \eta_2{}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}} \tag{10}$$

**Demonstrație:**

Deoarece $T_1$ ~ W($\eta_1$, β) și $T_2$ ~ W($\eta_2$, β) sunt variabile aleatoare independente, rezultă că

$$F_m(t) = P(T_m \le t) = 1 - P(T_m > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) = 1 - P(T_1 > t)\, P(T_2 > t) =$$

$$= 1 - [1 - F_1(t)]\,[1 - F_2(t)] = 1 - \left(exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta}\right]\right)\left(exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta}\right]\right) =$$

$$= 1 - exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\beta} - \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\beta}\right] = 1 - exp\left\{-\left[t^{\beta}\,\frac{(\eta_1{}^{\beta} + \eta_2{}^{\beta})}{\eta_1\ \eta_2{}^{\beta}}\right]\right\}$$

$$\left(\frac{1}{\eta}\right)^{\beta} = \frac{\eta_1{}^{\beta} + \eta_2{}^{\beta}}{\eta_1\ \eta_2{}^{\beta}} \Rightarrow \eta = \frac{\eta_1\ \eta_2}{(\eta_1{}^{\beta} + \eta_2{}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}$$

## 4.2. Metode de estimare

### 4.2.1. Metoda momentelor

Estimatorii paramatrilor $\eta$ și $\beta$, notaţi $\hat{\eta}$ și $\hat{\beta}$ se obțin prin egalarea momentului de ordin k, notat $m_k$, al distribuției Weibull, cu momentul de selecţie corespunzătoare, $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{k}$

$$\begin{cases} \eta \cdot \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) = \bar{x} \\ \eta^2 \cdot \Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \end{cases}$$

### 4.2.2. Metoda verosimilității maxime

Fie $t_1, t_2, \dots, t_n$ valorile observate ale unei selecții $T_1, T_2, \dots, T_n$ de volum n dintr-o populație *T*, unde $T_1, T_2, \dots, T_n$ sunt variabile aleatoare independente distribuite identic prin repartiția Weibull, fiecare având densitatea de probabilitate $f\,(t_i, \eta, \beta)$ exprimată în relația (5), în care parametrii sunt presupuși necunoscuți. Pentru a estima parametrii $\eta$ și $\beta$ folosim metoda verosimilității maxime.

$$f\,(t, \eta, \beta) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\}$$

Funcția de verosimilitate a variabilelor $T_i$ ~ WEI($\eta$) poate fi construită utilizând relația *(8)* ca

$$L(t_i, \eta, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f\,(t_i, \eta, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\} = (\frac{\beta}{\eta^{\beta}})^n \prod_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta-1} \cdot \exp\{-\left(\frac{\Sigma t_i}{\eta}\right)^{\beta}\} \quad (14)$$

$$ln\, L(t_i, \eta, \beta) = ln\, [\, (\frac{\beta}{\eta^{\beta}})^n \prod_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta-1} \cdot \exp\{-\left(\frac{\Sigma t_i}{\eta}\right)^{\beta}\}\, ]$$

$$= ln\, (\frac{\beta}{\eta^{\beta}})^n + ln\, \prod_{i=1}^{n} t_i{}^{\beta-1} + ln \exp\{-\left(\frac{\Sigma t_i}{\eta}\right)^{\beta}\}$$

$$= n\, ln\left(\frac{\beta}{\eta^{\beta}}\right) + (\beta - 1)\, ln\, [\prod_{i=1}^{n} t_i] - \Sigma\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$= n\, ln\, \beta - n\, ln\, \eta^{\beta} + (\beta - 1) \sum_{i=0}^{n} \ln(t_i) - \Sigma\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}$$

$$= n\, ln\, \beta - \beta\, n\, ln\, \eta + (\beta - 1) \sum_{i=0}^{n} \ln(t_i) - \Sigma\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta}$$

Notăm cu $\alpha = \frac{1}{\eta^{\beta}}$ =>

Diferențiem $ln\, L(t_i, \alpha, \beta)$ în raport cu α și $\beta$ si obținem

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\, ln\, L(t_i, \alpha, \beta) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=0}^{n} t_i{}^{\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} ln\, L(t_i, \alpha, \beta) = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=0}^{n} \ln(t_i) - \alpha \sum_{i=0}^{n} t_i^{\beta} \ln t_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} ln\, L(t_i, \alpha, \beta) = 0 \;\; \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n} t_i^{\beta}} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} ln\, L(t_i, \alpha, \beta) = 0 \quad \rightarrow n + \hat{\beta} \sum_{i=0}^{n} \ln t_i = \alpha \sum_{i=0}^{n} t_i^{\hat{\beta}} \ln t_i \qquad (12)$$

Ecuațiile (11) si (12) pot fi apoi rezolvate numeric pentru aflarea parametrului β, din care va determina ulterior parametrul α.

## 5. Studiu de caz: Evaluarea riscurilor care influențează bunăstarea economică

Aplicația propusă este utilizată în evaluarea riscurilor economico-sociale. Pe baza rezultatelor obținute în secțiunile precedente vom evalua riscurile care influențează bunăstarea economică, în vederea elaborării unor proiecte de management al riscului.

Evenimentul de interes este modelat prin intermediul a două riscuri: numărul șomerilor înregistrați și dinamica populației (sporul natural).

Se definește un risc social astfel:

- dacă numărul șomerilor înregistrați este mai mare de 5000 de persoane/județ;
- dacă sporul natural înregistrează mai mult de 1000 de persoane decedate decât născute vii într-un județ.

Apariția unuia dintre cele două riscuri duce la semnalarea stării de pericol, ce se definește prin afectarea produsului intern brut.

Analiza cuprinde cele 41 de județe și municipiul București în anul 2020.

Datele au fost furnizate de către *Institutul Național de Statistică* din baza de date *Tempo Online*.

***Definiții ale conceptelor oferite de INS:***

- Sporul natural reprezintă diferența dintre numărul născuților-vii și numărul persoanelor decedate, în anul de referință.
- Începând cu 1 martie 2002 a intrat în vigoare Legea nr. 76/2002 privind sistemul asigurărilor pentru șomaj și stimularea ocupării forței de muncă. În sensul prevederilor noii legi, șomer înregistrat este persoana care îndeplinește cumulativ următoarele condiții:

a) este în căutarea unui loc de muncă de la vârsta de minimum 16 ani și până la îndeplinirea condițiilor de pensionare;

b) starea de sănătate și capacitățile fizice și psihice o fac aptă pentru prestarea unei munci;

c) nu are loc de muncă, nu realizează venituri sau realizează din activități autorizate potrivit legii, venituri mai mici decât valoarea indicatorului social de referință al asigurărilor pentru șomaj și stimulării ocupării forței de muncă, în vigoare;

d) este disponibilă să înceapă lucrul în perioada imediat următoare dacă s-ar găsi un loc de muncă;

e) este înregistrată la Agenția Națională pentru Ocuparea Forței de Muncă.

***Cazul I:*** **Variabilele aleatoare $T_1, T_2$ care modelează cele două riscuri sunt independente**

Modelarea riscului 1: Diminuarea populației

Analiza descriptivă:

Analiza variabilei diminuarea populației se bazează tot pe un eșantion de 42 de observații. Județul în care a fost înregistrat cel mai scăzut spor natural este Prahova (minimul este de 6506 peroane). Chiar dacă în majoritatea județelor sporul natural este negativ, există un județ în care s-au înregistrat cu 669 de nașteri mai multe decât decese- Iași.

În medie, populația se diminuează cu 2337 persoane.

Analog se procedează și pentru estimatorii privind diminuarea populației, obținându-se următoarele valori ale acestora:

$$\beta=1.9,\ \eta=2637.5$$

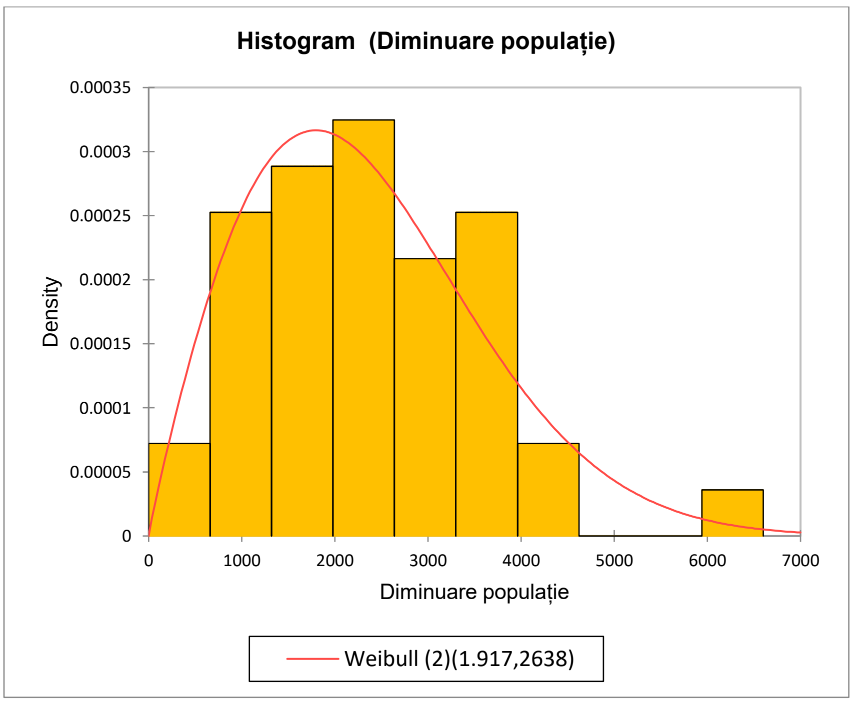
$$f_1\ (t;\eta,\beta) = \frac{1.9}{2637.5} \cdot \left(\frac{t}{2637.5}\right)^{1.9-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{2637{,}5}\right)^{1.9}\right]$$

$$F_1\ (t|\eta,\beta)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{2637.5}\right)^{1.9}\right]$$

Probabilitatea ca diminuarea populației să depășească pragul de risc este:

$S_1$ (1000) = $P(T_1 > 1000) = 1 - F_1$ (1000) = 0.8535,

prin urmare se semnalează starea de pericol.




***Figură 1- Compararea histogramei diminuării populației cu densitatea de probabilitate***

*Sursă: Prelucrare proprie*

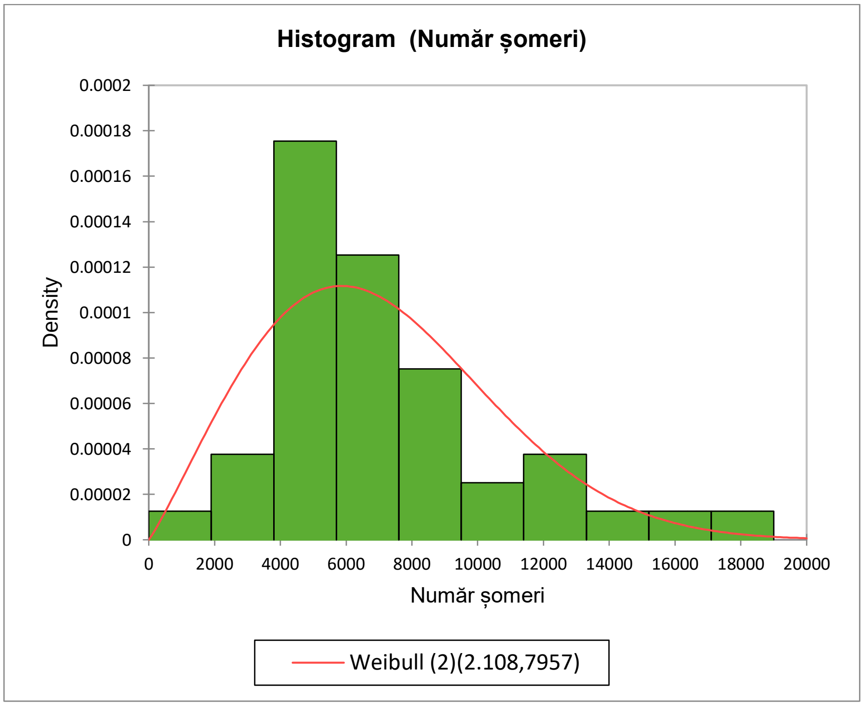
Modelarea riscului 2: Numărul șomerilor

<u>Analiza descriptivă:</u>

Seria analizată include 42 de observații, neexistând date lipsă. Numărul minim de șomeri din anul 2020 a fost de 1441 de șomeri în județul Ilfov, județul Dolj înregistrând cel mai mare nivel, și anume 18872 de șomeri. În medie, în anul 2020, s-au înregistrat aproximativ 7049 de șomeri la nivelul tuturor județor, astfel că un județ se abate, în medie cu 3587 de șomeri de la valoarea medie a seriei de date.

Pentru datele privind migrația, obținem estimatorii folosind relațiile (11) și (12):

*Soluție numerică:* $\beta = 2.1$ și $\eta = 7957$




***Figură 2- Compararea histogramei numărului de șomeri cu densitatea de probabilitate***

*Sursă: Prelucrare proprie*

În urma rezultatelor obținute pentru cei doi estimatori determinăm densitatea de probabilitate și funcția de repartiție:

$$f(t, \eta, \beta) = \frac{2.1}{7957} \cdot \left(\frac{t}{7957}\right)^{2.1-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{7957}\right)^{2.1}\right]$$

$$F_1\,(t, \eta, \beta)=1- \exp\left[-\left(\frac{t}{7957}\right)^{2.1}\right]$$

Probabilitatea ca numărul de șomeri să depășească pragul de risc este

$$S_2\,(6)=P(T_2 > 5000) = 1 - F_2\,(5000) = 0.6859,$$

prin urmare se semnalează starea de pericol.

$F_m(t, \eta, \beta)= P(T_m \leq t_m) = 1 - [1 - F_1(6)]\,[1 - F_2(14)]$

$=1 - \exp\left[-\left(\frac{1000}{2637.5}\right)^{1.9} - \left(\frac{5000}{7957}\right)^{2.1}\right] = 0.4145$, care reprezintă ponderea județelor în care nu este atins niciunul dintre gradele de risc, adică în 58.55% din numărul total de județe este atins cel puțin unul dintre cele două grade de risc, prin urmare se semnalează starea de pericol.

***Cazul II*: Variabilele aleatoare $T_1, T_2$ sunt dependente**

În analiza duratei de viață se utilizează de obicei modele cu riscuri pozitiv corelate, deoarece în aceste cazuri riscurile conduc împreună la o durată a vieții mai scurtă. Vom considera un model cu riscuri competitive pozitiv corelate.

În cazul în care riscul este modelat de o repartiţie Weibull de tip bidimensional, funcția de supraviețuire se poate exprima astfel:

$$S\,(t_1, t_2) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{t_1}{\eta_1}\right)^{\theta\beta_1} + \left(\frac{t_2}{\eta_2}\right)^{\theta\beta_2}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}, \qquad (13)$$

unde $t_i \geq 0$, $\beta_i > 0$, $\eta_i > 0$, $i = 1,2$ si $\theta > 1$, $\theta$ caracterizează dependența între cele doua riscuri. Coeficientul de corelație Kendall al variabilelor aleatoare $T_1$ *și* $T_2$ se exprimă ca fiind egal cu $1 - 1/\theta$.

Utilizând $T_m = \min\,(T_1, T_2)$, resultă că funcția de supraviețuire $S_m(t)$ a variabilei aleatoare $T_m$ este

$$S_m\,(t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = S(t,t)$$

Pentru $t_1 = 0$ , respectiv $t_2 = 0$ rezultă urmatoarele repartiții marginale

$$F_1\,(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{2637.5}\right)^{1.9}\right] \text{ și}$$

$$F_2\,(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{7957}\right)^{2.1}\right]$$

Coeficientul de corelație al lui Kendall al variabilelor aleatoare $T_1$ *și* $T_2$ este $1 - 1/\theta$ => $\theta = 1.1$, prin urmare functia de supravietuire $S_m\,(t)$ *este*

$$S_m\,(t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = S(t,t)$$

$$= \exp\left\{-\left[\left(\frac{t}{\eta_1}\right)^{\theta\beta_1} + \left(\frac{t}{\eta_2}\right)^{\theta\beta_2}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\} = 0.5932,$$

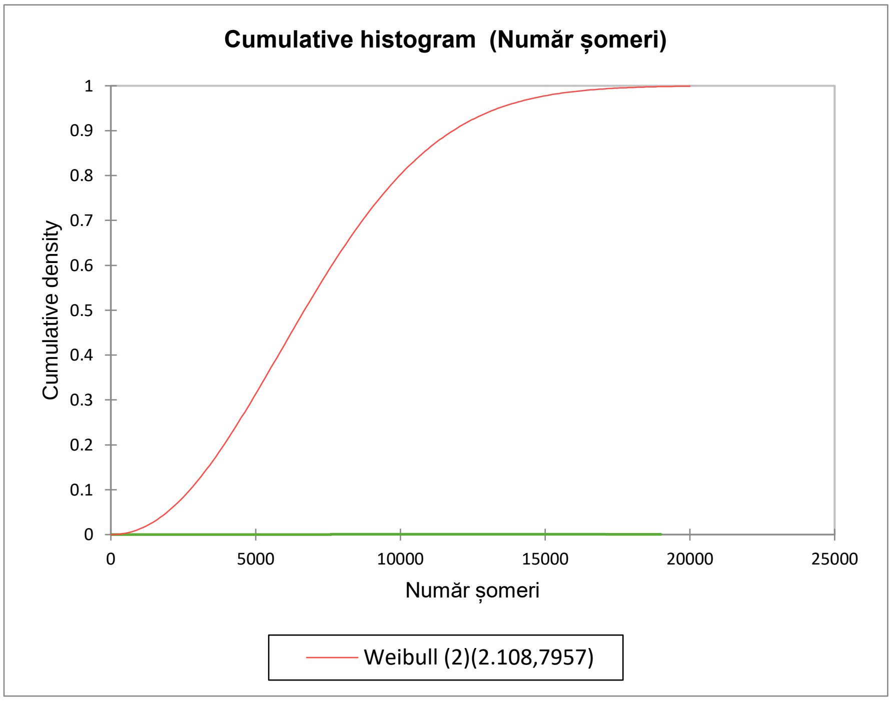
care, în cazul riscurilor dependente reprezintă probabilitatea de a se depăși pragul de risc.

# Bibliografie


1. Bhattacharya, Paritosh, *A study on Weibull distribution for estimating the parameters*, Journal of Applied Quantitative Methods, 5, 2, 2010.
2. Iskandar, Ismed, Gondokaryono, Yudi Satria, *Competing risk models in reliability systems, a Weibull distribution model with bayesian analysis approach*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016.
3. Pintilie, Melania, *Competing Risks. A Practical Perspective*, New York: John Wiley & Sons, 2006.
4. Yáñez, Sergio, Escobar, Luis. A., González, Nelfi, *Characteristics of two Competing Risks Models with Weibull Distributed Risks*, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, 38(148), 298-311, 2014.
5. Alexandra Lavinia Horobet, Roxana Voicu-Dorobanţu, Laura-Gabriela Constantin, International Economic Relations - Theories, strategies, policies, tools and case studies, https://www.ceeol.com/search/chapter-detail?id=938726.


## LISTA FIGURILOR

# Anexe



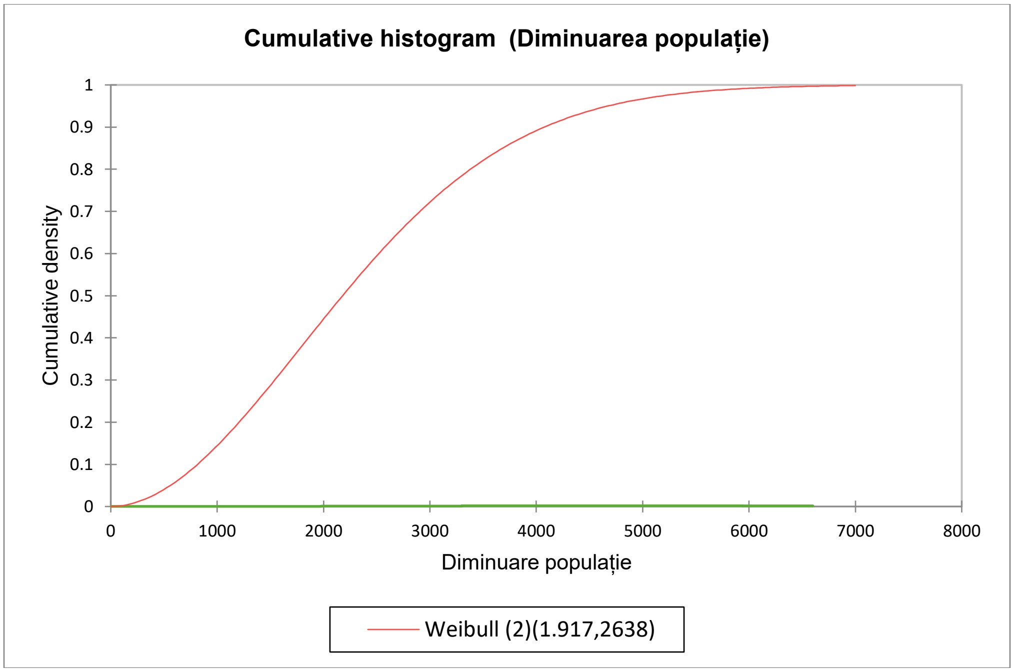

***Figură 3- Frecvețа cumulată a numărului de șomeri pe județe în anul 2020***

*Sursă: prelucrare proprie*

***Tabel 1- Statistici descriptive pe intervale pentru numărul de șomeri***

| Lower bound | Upper bound | Frequency | Relative frequency | Density (Data) | Density (Distribution) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1900 | 1 | 0.024 | 0.000 | 0.048 |
| 1900 | 3800 | 3 | 0.071 | 0.000 | 0.142 |
| 3800 | 5700 | 14 | 0.333 | 0.000 | 0.201 |
| 5700 | 7600 | 10 | 0.238 | 0.000 | 0.206 |
| 7600 | 9500 | 6 | 0.143 | 0.000 | 0.170 |
| 9500 | 11400 | 2 | 0.048 | 0.000 | 0.115 |
| 11400 | 13300 | 3 | 0.071 | 0.000 | 0.066 |
| 13300 | 15200 | 1 | 0.024 | 0.000 | 0.032 |
| 15200 | 17100 | 1 | 0.024 | 0.000 | 0.013 |
| 17100 | 19000 | 1 | 0.024 | 0.000 | 0.005 |

*Sursă: prelucrare proprie*




***Figură 4- Frecvența cumulată a diminuării populației pe județe în anul 2020***

*Sursă: prelucrare proprie*

***Tabel 2- Statistici descriptive pe intervale pentru diminuarea populației***

| Lower bound | Upper bound | Frequency | Relative frequency | Density (Data) | Density (Distribution) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 660 | 2 | 0.048 | 0.000 | 0.068 |
| 660 | 1320 | 7 | 0.167 | 0.000 | 0.165 |
| 1320 | 1980 | 8 | 0.190 | 0.000 | 0.205 |
| 1980 | 2640 | 9 | 0.214 | 0.000 | 0.194 |
| 2640 | 3300 | 6 | 0.143 | 0.000 | 0.152 |
| 3300 | 3960 | 7 | 0.167 | 0.000 | 0.102 |
| 3960 | 4620 | 2 | 0.048 | 0.000 | 0.060 |
| 4620 | 5280 | 0 | 0.000 | 0.000 | 0.031 |
| 5280 | 5940 | 0 | 0.000 | 0.000 | 0.014 |
| 5940 | 6600 | 1 | 0.024 | 0.000 | 0.006 |

*Sursă: prelucrare proprie*