

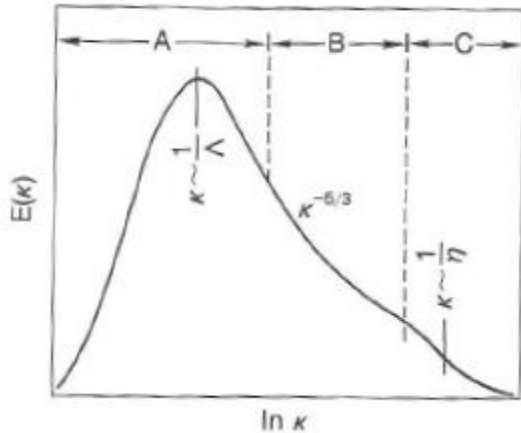
13.4 Aliasing e Instabilidade Não Lineares e Suavização Numérica

Previsão Numérica de Tempo e Clima

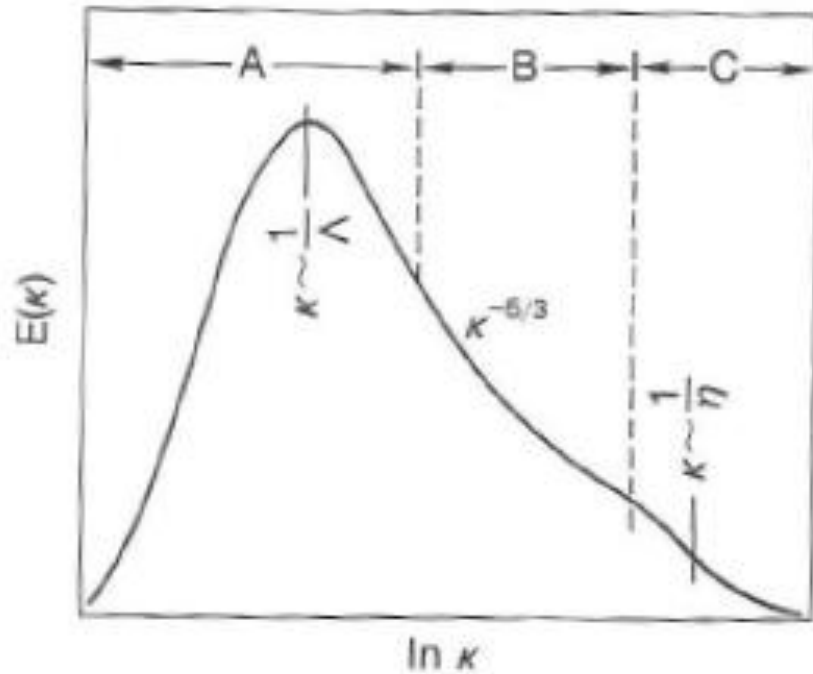
Ao discutir instabilidades numéricas no capítulo anterior, negligenciamos os efeitos não lineares.

No entanto, na atmosfera real, a energia cinética gerada em grande escala ou mesoescala tende a se transferir para escalas menores.

Quando é transferida para o chamado **subrange inercial**, a energia cinética não é produzida nem dissipada, mas transmitida para escalas cada vez menores.

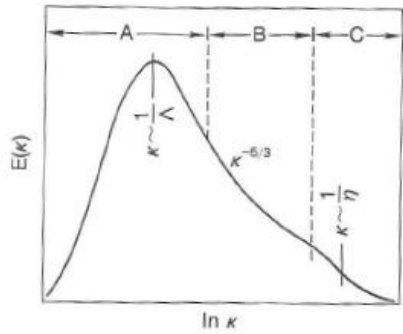


Previsão Numérica de Tempo e Clima



Esquema do espectro de energia na camada limite atmosférica mostrando diferentes regiões de produção de energia(A) em dissipação (C) and o subrange inercial (B) onde a produção e dissipação de energia são desprezadas. Λ é a escala integral da turbulência e η é a microescala de Kolmogorov, k : wavenumber, $E(k)$: energy. ((From Tennekes and Lumley 1972)).

Previsão Numérica de Tempo e Clima

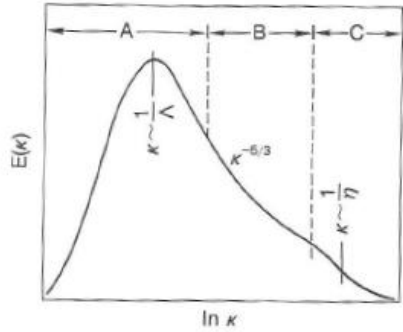


(2) Na **faixa contendo energia (Faixa A)**, que contém a **maior parte da energia turbulenta** e **onde a energia é produzida por flutuabilidade e cisalhamento**.

(3) Na **subfaixa inercial (Faixa B)**, a energia cinética é independente do forçamento original do movimento e da dissipação molecular, de acordo com $E(k) = a\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$, onde a é uma constante, ϵ é a taxa de dissipação parasita e k é o número de onda.

Nesta faixa, **a energia não é produzida nem dissipada**, mas **transmitida (transferida)** para escalas cada vez menores ($k < \text{pequeno}$).

Previsão Numérica de Tempo e Clima



(4) Na faixa de dissipação (Faixa C), onde KE é convertida em energia interna por interação molecular.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Em um modelo numérico de mesoescala, essa cascata de energia para escalas menores não pode ocorrer porque a menor onda que pode ser resolvido tem um comprimento de onda de $2\Delta x$.

Por exemplo, vamos considerar 2 ondas com a mesma amplitude ϕ_0 e diferentes números de onda, k_1 e k_2 ,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0 \cos k_1 \Delta x, \\ \phi_2 &= \phi_0 \cos k_2 \Delta x.\end{aligned}\tag{13.4.1}$$
$$\cos(k_1 \Delta x) = \frac{e^{ik_1 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x}}{2}$$
$$\cos(k_2 \Delta x) = \frac{e^{ik_2 \Delta x} + e^{-ik_2 \Delta x}}{2}$$

Uma interação não linear entre essas duas ondas produz

$$\left(\frac{e^{ik_1 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x}}{2}\right) \left(\frac{e^{ik_2 \Delta x} + e^{-ik_2 \Delta x}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{ik_1 \Delta x} e^{ik_2 \Delta x} + e^{ik_1 \Delta x} e^{-ik_2 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x} e^{ik_2 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x} e^{-ik_2 \Delta x}}{2} \right)$$
$$\left(\frac{e^{ik_1 \Delta x} + e^{-ik_1 \Delta x}}{2}\right) \left(\frac{e^{ik_2 \Delta x} + e^{-ik_2 \Delta x}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(k_1+k_2)\Delta x} + e^{-i(k_1+k_2)\Delta x} + e^{i(k_1-k_2)\Delta x} + e^{-i(k_1-k_2)\Delta x}}{2} \right)$$

$$\phi_1 \phi_2 = (\phi_0^2 / 2) [\cos(k_1 + k_2) \Delta x + \cos(k_1 - k_2) \Delta x].\tag{13.4.2}$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Em um modelo numérico de mesoescala, essa cascata de energia para escalas menores não pode ocorrer porque a menor onda que pode ser resolvido tem um comprimento de onda de $2\Delta x$.

$$\phi_1\phi_2 = (\phi_o^2 / 2) [\cos(k_1 + k_2)\Delta x + \cos(k_1 - k_2)\Delta x]. \quad (13.4.2)$$

Por exemplo, isso pode acontecer na equação do momento,

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} = U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u'^2).$$

Pode ser visto claramente na equação acima, duas ondas com números de onda, $k_1 + k_2$ e $k_1 - k_2$ são resultantes dessa interação onda-onda.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Pode ser visto claramente na equação acima, duas ondas com números de onda, $k_1 + k_2$ e $k_1 - k_2$ são resultantes dessa interação onda-onda.

Assuma que k_1 e k_2 representam as seguintes ondas $2\Delta x$ e $4\Delta x$,

$$k_1 = 2\pi/2\Delta x$$

$$k_2 = 2\pi/4\Delta x$$

então nós temos

$$\phi_1\phi_2 = \left(\frac{\phi_o^2}{2}\right) \left\{ \cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{3}{4\Delta x}\right)\right] + \cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{1}{4\Delta x}\right)\right] \right\}. \quad (13.4.4)$$

O segundo termo dentro das chaves do lado direito da equação acima é uma onda de $4\Delta x$, que pode ser representada apropriadamente pela malha da grade.

No entanto, o primeiro termo é uma onda de $1.33\Delta x$, que não pode ser resolvida pela malha da grade. Esta onda será ficticiamente representada por uma onda $4\Delta x$ porque o primeiro múltiplo inteiro de $4/3\Delta x$ é $4\Delta x$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

No entanto, o primeiro termo é uma onda de $1.33\Delta x$, que não pode ser resolvida pela malha da grade. Esta onda será ficticiamente representada por uma onda $4\Delta x$ porque o primeiro múltiplo inteiro de $4/3\Delta x$ é $4\Delta x$

Esse fenômeno é chamado de aliasing não linear.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

A Fig. 13.16 mostra um esquema que ilustra como uma solução física com um comprimento de onda de $4/3\Delta x$, causada pela interação não linear de ondas $2\Delta x$ e $4\Delta x$, é vista como uma onda computacional $4\Delta x$ na malha da grade numérica.

$$\phi_1\phi_2 = \left(\frac{\phi_o^2}{2}\right) \left\{ \cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{3}{4\Delta x}\right)\right] + \cos\left[2\pi\Delta x\left(\frac{1}{4\Delta x}\right)\right] \right\}. \quad (13.4.4)$$

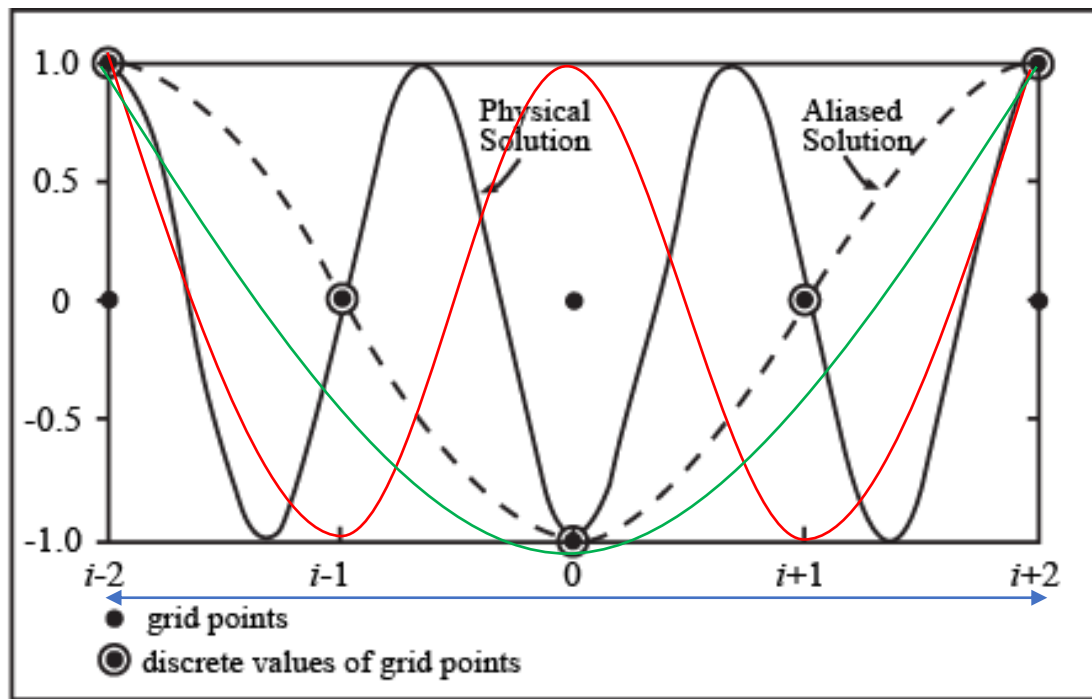


Fig. 13.16: Ilustração esquemática de **aliasing não linear**. Uma **solução física com um comprimento de onda de $4/3\Delta x$** , causada pela interação não linear de ondas de $2\Delta x$ e $4\Delta x$, é vista como uma onda $4\Delta x$ em uma malha de grade numérica. (Depois de Pielke 2002, reproduzido com permissão de Elsevier.) (De Lin 2007)

Previsão Numérica de Tempo e Clima

No mundo real, **temos a perturbação de grande escala gerada pelo forçamento, que então se transforma em uma perturbação de mesoescala, perturbação de pequena escala e então se dissipa em uma escala ainda menor.**

Porém, não parece acontecer da mesma forma no modelo numérico, em que ondas com comprimento de onda menor que $< 2\Delta x$ serão representadas como ondas de maior escala $\cong 4\Delta x$.

Portanto, mesmo que um método numérico seja linearmente estável, os resultados podem ser degradado pelo ruído computacional.

Esse acúmulo errôneo de energia pode fazer com que as variáveis dependentes do modelo aumentem em magnitude abruptamente sem limites. Esse fenômeno é chamado de instabilidade computacional não linear.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

- (a) Correção adequada das parametrizações dos termos de forçamento de sub-grade, como $u'w'$, $v'w'$, $\theta'w'$, etc., de modo que a energia seja extraída das equações médias,
- (b) uso de um filtro ou suavizador espacial para remover as ondas mais curtas, porem que deixe as ondas mais longas relativamente inalteradas.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

A primeira abordagem é melhor que a segunda porque é baseada em princípios físicos. No entanto, requer um bom conhecimento sobre **os termos de correlação subgrid-escala**.

A segunda abordagem pode ser realizada de maneira **relativamente mais fácil**, como as propostas por Shapiro (1970; 1975).

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

Para entender a **suavização numérica**, podemos considerar um **operador unidimensional** simples de três pontos,

$$\bar{\phi}_j = (1 - s)\phi_j + \left(\frac{s}{2}\right)(\phi_{j+1} + \phi_{j-1})$$

onde $x = j\Delta x$ e s é uma constante que pode ser negativa.,

Se este operador for aplicado à forma harmônica de uma onda

$$\phi = Ae^{-ikx}$$

onde o número de onda $k = \frac{2\pi}{L}$ e A é uma constante que pode ser complexa, então o resultado pode ser escrito como

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

$$\bar{\phi}_j = (1 - s)\phi_j + \left(\frac{s}{2}\right)(\phi_{j+1} + \phi_{j-1}) \quad x = j\Delta x \quad \phi = Ae^{-ikx} \quad \phi = Ae^{-ik(j\Delta x)}$$

$$\bar{\phi}_j = (1 - s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{s}{2}\right)(Ae^{-ik(j+1)\Delta x} + Ae^{-ik(j-1)\Delta x})$$

$$\bar{\phi}_j = (1 - s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{s}{2}\right)(Ae^{-ik(j\Delta x)}e^{-ik\Delta x} + Ae^{-ik(j\Delta x)}e^{ik\Delta x})$$

$$\bar{\phi}_j = (1 - s)Ae^{-ik(j\Delta x)} + \left(\frac{s}{2}\right)Ae^{-ik(j\Delta x)}([e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}])$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)} - sAe^{-ik(j\Delta x)} + sAe^{-ik(j\Delta x)}\left(\left[\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2}\right]\right)$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)} - sAe^{-ik(j\Delta x)} + sAe^{-ik(j\Delta x)}\cos(k\Delta x)$$

$$\bar{\phi}_j = Ae^{-ik(j\Delta x)}(1 - s + s\cos(k\Delta x))$$

$$\bar{\phi}_j = \phi[1 - s(1 - \cos(k\Delta x))]$$

$$\bar{\phi}_j = 1 - 2s\left(\sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right)$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Existem dois métodos propostos para evitar a instabilidade não linear:

$$\bar{\phi}_j = \phi [1 - s(1 - \cos(k\Delta x))]$$

$$x = j\Delta x$$

$$\phi = Ae^{-ikx}$$

$$\phi = Ae^{-ik(j\Delta x)}$$

$$\bar{\phi}_j = \phi R$$

$$R = [1 - s(1 - \cos(k\Delta x))]$$

$$R = 1 - 2s \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{L} \right) \right)$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

$$R = 1 - 2s \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{L} \right) \right)$$

Na equação acima, R é referido como a função de resposta.

- (5) Se $R \geq 0$, então o número e a fase da onda não são afetados, mas apenas a amplitude da onda.
- (6) Se $R \geq 1$, então a onda é amplificada pelo operador.
- (7) Se $R < 1$, então a onda é amortecida pelo operador.
- (8) Se $R < 0$, então a fase da onda é deslocada em 180^0 , o que é indesejável.
- (9) Com $s = 1/2$, obtemos o suavizador de segunda ordem,

Previsão Numérica de Tempo e Clima

$$R = 1 - 2s \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{L} \right) \right)$$

(9) Com $s = 1/2$, obtemos o suavizador de segunda ordem,

$$\bar{\phi}_j = \frac{1}{4} (\phi_{j-1} + 2\phi_j + \phi_{j+1})$$

$$R(s) = [1 - s(1 - \cos(k\Delta x))]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(k\Delta x))\right]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(k\Delta x))\right]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos(k\Delta x)}{2}\right]$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta$$

Replace θ by $\frac{x}{2}$

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

Replace θ by $\frac{x}{2}$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [1 + \cos(k\Delta x)]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} [2 \cos^2(k\Delta x)]$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^2(k\Delta x)$$

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta x}{L} \right)$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

$$R\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)$$

De cima, se $L = 2\Delta x$, então $R = 0$. Assim, para uma onda $2\Delta x$, o amortecimento irá eliminá-la imediatamente.

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta$$

Replace θ by $\frac{x}{2}$

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

Replace θ by $\frac{x}{2}$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Como um amortecedor de três pontos amortece as ondas mais curtas com muita força, é menos desejável.

Um amortecedor de cinco pontos pode ser obtido aplicando 2 amortecimento sucessivos de três pontos com $s = 1/2$ e $-1/2$,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\phi}}_j &= \frac{1}{16} \left[10\phi_j + 4(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) - (\phi_{j-2} + \phi_{j+2}) \right] \\ &= \phi_j - \frac{1}{16} \left[6\phi_j - 4(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) + (\phi_{j-2} + \phi_{j+2}) \right] \quad (13.4.10)\end{aligned}$$

O suavizador acima também removerá a onda $2\Delta x$ imediatamente, mas preservará mais as ondas mais longas.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

$$\begin{aligned}\overline{\phi_j} &= \frac{1}{16} \left[10\phi_j + 4(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) - (\phi_{j-2} + \phi_{j+2}) \right] \\ &= \phi_j - \frac{1}{16} \left[6\phi_j - 4(\phi_{j-1} + \phi_{j+1}) + (\phi_{j-2} + \phi_{j+2}) \right]\end{aligned}\quad (13.4.10)$$

De fato, o amortecedor de 5 pontos acima é análogo à forma de diferenças finitas da equação de difusão de 4ª ordem,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - c \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0, \quad (13.4.11)$$

$$\phi_j^{\tau+1} = \phi_j^{\tau} - \gamma \left[6\phi_j^{\tau} - 4(\phi_{j-1}^{\tau} + \phi_{j+1}^{\tau}) + (\phi_{j-2}^{\tau} + \phi_{j+2}^{\tau}) \right], \quad (13.4.12)$$

where $\gamma = c\Delta t / \Delta x^4$.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Se escolhermos $\gamma = \frac{1}{16}$, então a equação acima é análoga a (13.4.10).

Assim, ao aplicar o amortecedor de 5 pontos, tem um efeito semelhante à difusão de 4ª ordem. É por isso que a suavização numérica também é chamada de difusão numérica.

Para manter a amplitude de ondas mais longas, o coeficiente $\frac{1}{16}$, in (13.4.10) ou γ é frequentemente reduzido. O teste é necessário para descobrir o coeficiente mais apropriado da suavização numérica ou difusão.

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Na prática, a suavização não é aplicada aos pontos de contorno.

Para os pontos de grade adjacentes aos contornos, pode ser necessário aplicar o suavizador de três pontos ou difusão de segunda ordem, que tem uma forma de

$$\overline{\phi_j} = \phi_j - \gamma_2 [2\phi_j - (\phi_{j-1} + \phi_{j+1})]. \quad (13.4.13)$$

Para tornar (13.4.13) consistente com (13.4.12), exigimos

$$\gamma_2 = 4\gamma_1. \quad (13.4.14)$$

Previsão Numérica de Tempo e Clima

Observe que o esquema Leapfrog produz um modo computacional com onda $2\Delta t$.

Para suprimir isso, podemos aplicar o tempo mais suave (Robert, 1966; Asselin, 1972)

$$\phi^{r+1} = \bar{\phi}^{r-1} + 2\Delta t (\partial\phi / \partial t)^r, \quad (13.4.15)$$

where

$$\bar{\phi}^{r-1} = \phi^{r-1} + \gamma (\phi^r - 2\phi^{r-1} + \bar{\phi}^{r-2}). \quad (13.4.16)$$

Com base em testes numéricos, é preferível uma escolha de $\gamma < 0.25$.