



Dinâmica 27/09/2023 a 27/09/2023

Modelo Numérico da Atmosfera

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)



Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferenciais parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.



- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**



Métodos de diferenças finitas.

Resumo

Em um domínio qualquer uma função periódica pode ser decomposta em componentes de Fourier. Se a evolução da função é governada por uma equação linear com coeficientes constantes. Então, seu comportamento pode ser determinado, através da observação do comportamento de cada componente Fourier.

Da mesma forma, a estabilidade de um método numérico linear pode ser encontrado considerando um único componente de Fourier e vendo se esta componente cresce com o tempo.

Análise de estabilidade de Von Neumann para equações diferenciais parciais nos dá uma equação para o Fator de ampliação. $\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = A^n e^{ikj\Delta x}$.

Método de Von Neumann requer normalmente que o Fator de amplificação seja delimitada, de tal forma que $|A| \leq 1$

Análise de estabilidade de Von Neumann é uma Condição necessária e suficiente para a estabilidade de uma equação linear de diferença finita com Coeficiente constante.

Para equações não-lineares, porém, ela é um Condição necessária, mas não é suficiente



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

Substituindo $\phi_j^n = \phi(x_j, t_n) = A^n e^{ikj\Delta x}$, na equação de advecção (12)

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} = 0 \quad ()$$

$$\frac{A^{n+1} e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} = -u \frac{A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta x} \quad ()$$

$$A^{n+1} e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}) \quad ()$$

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ik(j)\Delta x} e^{ik(1)\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}) \quad ()$$

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x} (e^{ik(1)\Delta x} - 1) \quad ()$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

$$A^n A^1 e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x} (e^{ik(1)\Delta x} - 1) \quad ()$$

Defina $C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$, é chamado de numero de Courant. Cancele os termos $A^n e^{ikj\Delta x}$

$$\cancel{A A^n e^{ikj\Delta x}} = \cancel{A^n e^{ikj\Delta x}} - C \cancel{A^n e^{ikj\Delta x}} (e^{ik(1)\Delta x} - 1) \quad ()$$

$$A = 1 - C(e^{ik(1)\Delta x} - 1) \quad ()$$

A solução numérica será estável se $|A| \leq 1$. $|A|^2$ É dado por A vezes o complexo conjugado A^* ou seja

$$A A^* = (1 - C(e^{ik(1)\Delta x} - 1)) (1 - C(e^{-ik(1)\Delta x} - 1)) \quad ()$$

$$A A^* = (1 - C e^{ik(1)\Delta x} + C) (1 - C e^{-ik(1)\Delta x} + C) \quad ()$$

$$A A^* = 1 - C e^{-ik(1)\Delta x} + C - C e^{ik(1)\Delta x} + C C e^{ik(1)\Delta x} e^{-ik(1)\Delta x} - C C e^{ik(1)\Delta x} + (C - C C e^{-ik(1)\Delta x} + C C)$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

$$AA^* = 1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} + 2C - Ce^{ik(1)\Delta x} + 2CC - CCe^{ik(1)\Delta x} + (-CCe^{-ik(1)\Delta x})$$

$$AA^* = 1 - Ce^{-ik(1)\Delta x} - Ce^{ik(1)\Delta x} + 2CC + 2C - CCe^{ik(1)\Delta x} - CCe^{-ik(1)\Delta x}$$

$$AA^* = 1 - C \left((e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x}) \right) + 2CC + 2C - CC(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x})$$

$$AA^* = 1 - 2C \left(\frac{(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x})}{2} \right) + 2CC + 2C - 2CC \left(\frac{(e^{ik(1)\Delta x} + e^{-ik(1)\Delta x})}{2} \right)$$

$$AA^* = 1 - 2C(\cos(k(1)\Delta x)) + 2CC + 2C - 2CC(\cos(k(1)\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + 2C - 2C(\cos(k(1)\Delta x)) + 2CC - 2CC(\cos(k(1)\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + 2C(1 - \cos(k(1)\Delta x)) + 2CC(1 - \cos(k(1)\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k(1)\Delta x))$$

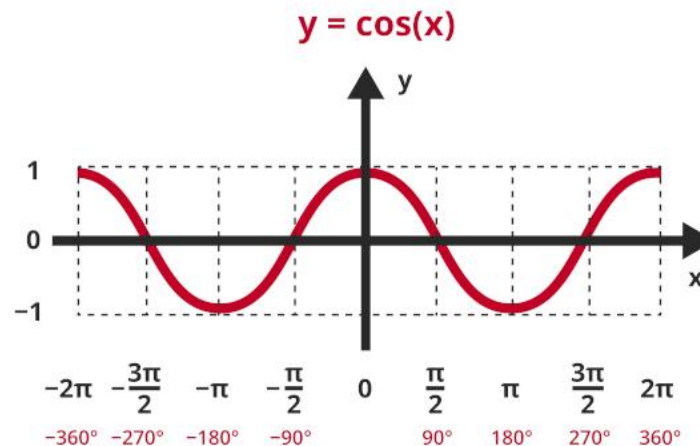


Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

$$AA^* = 1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k(1)\Delta x))$$

$$|A|^2 = 1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k(1)\Delta x)) \leq 1$$



Para todos $(1 - \cos(k(1)\Delta x)) > 0$ todos os numero de ondas, exceto o trivial, o caso onde $k=0$, a equação acima se reduz a

$$|A|^2 = 1 + 2C(1 + C)(1 - \cos(k(1)\Delta x)) \leq 1$$

$$2C(1 + C) \leq 0$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade da FTFS

$$2C(1 + C) \leq 0$$

A condição nunca pode ser satisfeita. Uma vez que $C > 0$ pois $u > 0$

Isto implica FTFS (com $u+$) é incondicionalmente Instável!



Métodos de diferenças finitas.

Exercício

implica FTFS (com u^+) é incondicionalmente Instável!



Métodos de diferenças finitas.

Regime UpStream

O Esquema Upstream (Avançado no tempo, Atrasado no espaço) aproxima a derivada espacial com Diferença Atrasada e a derivada temporal com diferença Avançada . Fórmula. p. ex.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

Podemos seguir o mesmo procedimento como no FTFS para fazer o Análise de estabilidade ou seja deixar a solução ter a forma de

$$\phi(x_j, t_n) = \phi_j^n = A^n e^{ikj\Delta x}$$

O método de Von Neumann normalmente requer que o Fator de amplificação seja delimitada . Tal que:

$$|A| \leq 1$$

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u \frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0 \quad (15)$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u \frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{A^{n+1}e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x}}{\Delta t} + u \frac{A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j)\Delta x} e^{-ik\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} = -\frac{u\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ik(j)\Delta x} e^{-ik\Delta x})$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ikj\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} e^{-ik\Delta x})$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x})$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - \frac{u\Delta t}{\Delta x} A^n e^{ikj\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x})$$

Define-se $C = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, onde C é chamado de numero de Courant.

$$A A^n e^{ikj\Delta x} = A^n e^{ikj\Delta x} - C A^n e^{ikj\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x})$$

Cancele o termo $A^n e^{ikj\Delta x}$

$$A = 1 - C(1 - e^{-ik\Delta x})$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$A = 1 - C(1 - e^{-ik\Delta x})$$

A solução numérica será estável se $|A| \leq 1$. Onde $|A|^2$ é dado pela multiplicação de A pelo seu complexo conjugado A^*

$$AA^* = \left(1 - C(1 - e^{-ik\Delta x})\right) \left(1 - C(1 - e^{ik\Delta x})\right)$$

$$AA^* = (1 - C + Ce^{-ik\Delta x})(1 - C + Ce^{ik\Delta x})$$

$$AA^* = (1 - C + Ce^{ik\Delta x}) - (C - CC + CCe^{ik\Delta x}) + (Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x} + Ce^{ik\Delta x}Ce^{-ik\Delta x})$$

$$AA^* = 1 - C + Ce^{ik\Delta x} - C + CC - CCe^{ik\Delta x} + Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x} + CC$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + Ce^{ik\Delta x} + Ce^{-ik\Delta x} - CCe^{ik\Delta x} - CCe^{-ik\Delta x}$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C \left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2} \right) - 2CC \left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2} \right)$$



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C \left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2} \right) - 2CC \left(\frac{e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}}{2} \right)$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + 2C(\cos(k\Delta x)) - 2CC(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC + (2C - 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 - 2C + 2CC - (-2C + 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + (-2C + 2CC) - (-2C + 2CC)(\cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$AA^* = |A|^2 = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$



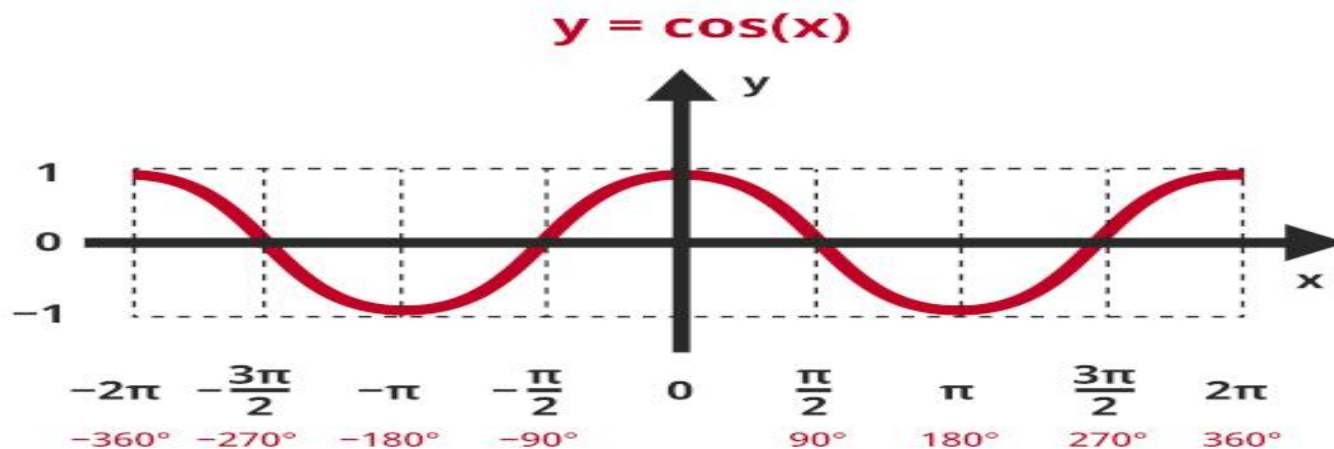
Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$|A|^2 = 1 + (-2C + 2CC)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$|A|^2 = 1 + 2C(-1 + C)(1 - \cos(k\Delta x))$$

$$|A|^2 = 1 - 2C(1 - C)(1 - \cos(k\Delta x))$$



Se $(1 - \cos(k\Delta x)) \geq 0$. Para todos os numero de ondas, com exceção do caso trivial, ou seja, $k = 0$, a desigualdade acima se reduz a:



Métodos de diferenças finitas.

Análise de Estabilidade (Von Neumann) Regime UpStream

$$|A|^2 = 1 - 2C(1 - C)(1 - \cos(k\Delta x))$$

Se $(1 - \cos(k\Delta x)) > 0$. Para todos os numero de ondas, com exceção do caso trivial, ou seja, $k = 0$, a desigualdade acima se reduz a:

$$2C(1 - C) \geq 0$$

$$C(1 - C) \geq 0$$

$$(1 - C) \geq 0$$

$$|A| \leq 1.$$



$$C \geq 0 \text{ e } C \leq 1;$$

$$0 \leq C \leq 1;$$

O Esquema UpStream é estável para $0 \leq C \leq 1$;



Métodos de diferenças finitas.

Exercício UpStream

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

O Esquema CTCS (Leapfrog)

Um método de 2 ordem para resolver o problema de advecção linear (i.e. $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$). É usar o esquema centrada no tempo, Centrado no espaço (CTCS). i.e.

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (17)$$

Trata-se de uma fórmula de três-nível, uma vez que ela envolve valores de ϕ em três tempos t_{n+1} , t_n , t_{n-1} .

O esquema CTCS é de precisão de segunda ordem no espaço e no tempo. análise de estabilidade Von Neumann

Define-se $\phi = A^n e^{ikj\Delta x}$ para a análise de **estabilidade de Von Neumann**, que veremos em seguida

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \phi_j^{n-1} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) \\ A^{n+1} e^{ikj\Delta x} &= A^{n-1} e^{ikj\Delta x} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x}) \end{aligned}$$

O Esquema CTCS (Leapfrog)

$$A^{n+1}e^{ikj\Delta x} = A^{n-1}e^{ikj\Delta x} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ik(j+1)\Delta x} - A^n e^{ik(j-1)\Delta x})$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A} e^{ikj\Delta x} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^n e^{ikj\Delta x} e^{ik\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} e^{-ik\Delta x})$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A} e^{ikj\Delta x} - C (A^n e^{ikj\Delta x} e^{ik\Delta x} - A^n e^{ikj\Delta x} e^{-ik\Delta x})$$

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$A^n A e^{ikj\Delta x} = \frac{A^n}{A} e^{ikj\Delta x} - C A^n e^{ikj\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$A = \frac{1}{A} - C (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$A^2 = 1 - C 2i \left(\frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2i} \right) A$$

$$A^2 = 1 - C 2i (\sin(k\Delta x)) A$$

$$A^2 = 1 - C2i(\sin(k\Delta x))A$$

$$A^2 + C2i(\sin(k\Delta x))A - 1 = 0$$

$$A^2 - C2i(\sin(k\Delta x))A - 1 = 0$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{(-C2i(\sin(k\Delta x)))^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{((-1)^2 C^2 4(\sqrt{-1}^2)(\sin^2(k\Delta x)))^2 + 4}}{2}$$

$$A = \frac{C2i(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{-4C^2 \sin^2(k\Delta x) + 4}}{2}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{-C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

$$A = iC(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{1 - (C\sin(k\Delta x))^2}$$

Há dois casos a considerar: o primeiro $C > 1$, e $(C\sin(k\Delta x))^2 > 1$

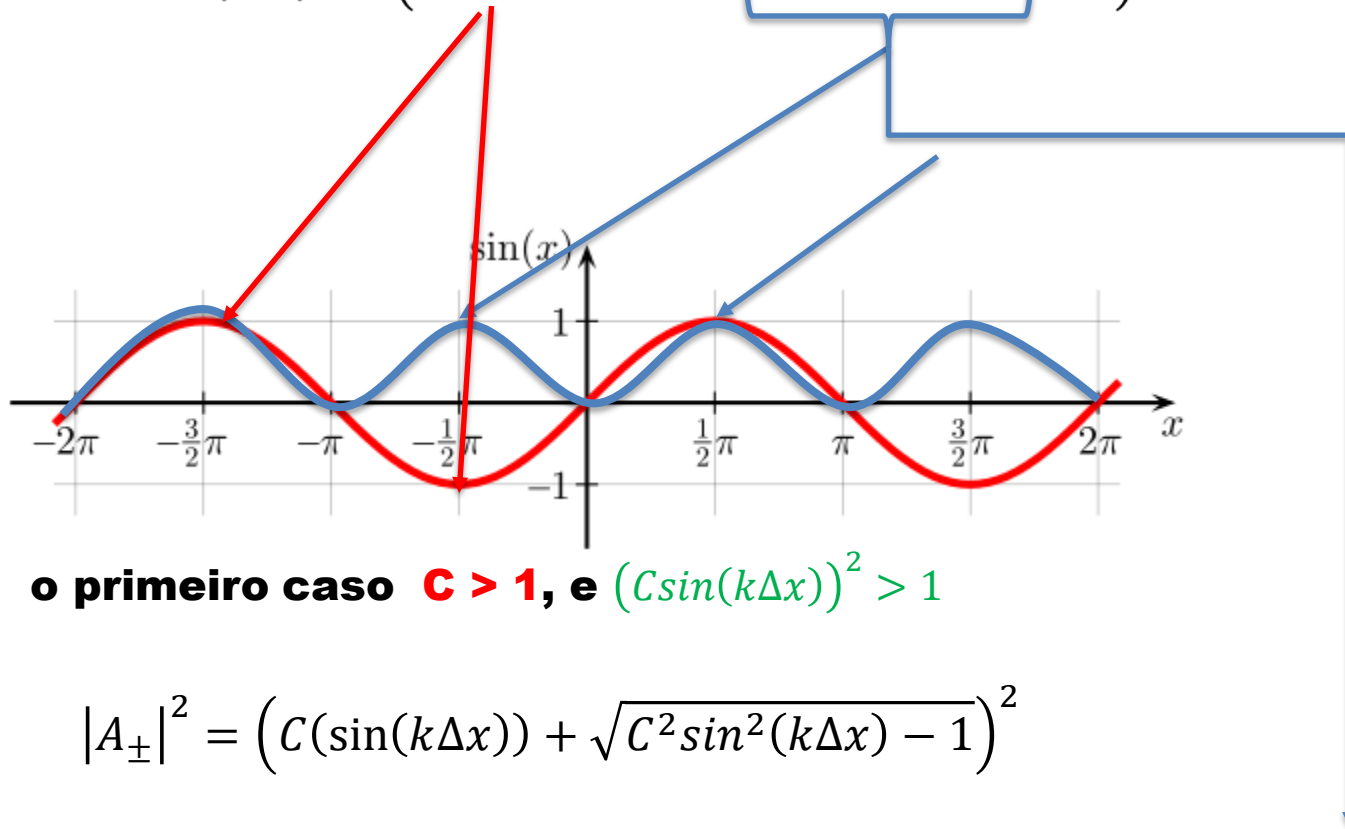
$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}$$

$$|A|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right) \left(-Ci(\sin(k\Delta x)) \right. \\ \left. \pm -i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right)$$

$$|A|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right) \left(-Ci(\sin(k\Delta x)) \right. \\ \left. \pm -i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right)$$

$$|A|^2 = i \left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right) \left(-i \left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right) \right)$$

$$|A_{\pm}|^2 = \left(C(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right)^2$$



o primeiro caso $C > 1$, e $(C \sin(k\Delta x))^2 > 1$

$$|A_{\pm}|^2 = \left(C(\sin(k\Delta x)) + \sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1} \right)^2$$

Existe pelo menos uma raiz em que $|A_{\pm}| > 1$, portanto, a solução é instável $C > 1$

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1$$

2. $C \leq 1$ e $C(\sin(k\Delta x)) \leq 1$. As duas raízes são:

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm i\sqrt{C^2 \sin^2(k\Delta x) - 1}$$

$$A = Ci(\sin(k\Delta x)) \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

$$|A_+|^2 = \left(Ci(\sin(k\Delta x)) + \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)} \right) \left(-Ci(\sin(k\Delta x)) + \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)} \right)$$

$$|A_+|^2 = \left(-i^2 C^2 \sin^2(k\Delta x) + Ci(\sin(k\Delta x)) * \left(\sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)} \right) - Ci(\sin(k\Delta x)) * \left(\sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)} \right) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x) \right)$$

$$|A_+|^2 = (C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

$$|A_+|^2 = 1$$

Da mesma forma para $|A_-|^2$

$$|A_+|^2 = (C^2 \sin^2(k\Delta x) + 1 - C^2 \sin^2(k\Delta x))$$

$$|A_+|^2 = 1$$

\therefore A condição de estabilidade é $\left| C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$.

Para o caso $C \leq 1$ e $C(\sin(k\Delta x)) \leq 1$ O Método CTCS é estável.

Mas será que é : consistente ? e convergente($\Delta t \rightarrow 0$)?



Métodos de diferenças finitas.

Exercício CTCS (Leapfrog)

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} + u \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$