Spectral methods

Idea Principal

O método começou de ser utilizado em 1960-1970.
As derivadas são calculada no espaço espectral
Transformada de Fourier

$$q(x) = \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi ikx}$$

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$): $= 2\pi ik \sum_k \hat{q}_k e^{2\pi ikx}$

- ❑ **Dado um vetor de valores** $\boldsymbol{q} = [q_i]$
- ❑ **Calcula a Fast Fourier Transform FFT p**ara obter $\hat{\boldsymbol{q}} = [\hat{\boldsymbol{q}}_k]$
- ❑ **Calcula as derivadas (no espaço espectral, simplesmente multiplicando por** $2\pi ik$**)**
- ❑ **Retorna ao espaço físico com a FFT Inversa**

1970s: Viabilidade para uso na Atmosfera mostrado por Eliasen et al (1970) & Orszag (1970)

1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) e contorno periódico:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Substituindo a Serie de Fourier $q(t,x) = \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}$ **na equação de transporte tem-se:**

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial t} + u\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial x} = 0$$

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$**):** $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}}{\partial x} = 2\pi ik \sum_k \hat{q}_k(t)e^{2\pi ikx}$

Spectral methods

1D Transporte

Derivatives ($\frac{\partial q}{\partial x}$): $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$

($\frac{\partial q}{\partial t}$): $\frac{\partial \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x}$

$$\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial t} + u \sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}}{\partial x} = 0$$

$$\left(\sum_k \frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} e^{2\pi i k x} + u 2\pi i k \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} \right) = 0$$

$$\sum_k \left(\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + u 2\pi i k \hat{q}_k(t) \right) e^{2\pi i k x} = 0$$

1D Transporte

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

No espaço espectral é resolvido para todo os k (numero de onda) como:

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi iku\hat{q}_k(t)$$

Não há mais derivadas espaciais na EDO:

Algoritmo para Transporte 1D Espectral

Equação 1D para transporte com velocidade constante (u) :

FFT $q(x,t)$ **no tempo inicial para ober** $\hat{q}_k(t_0)$**:**

Resolve $\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t) = 0$**para todos os k com o seu esquema de time-steping favorito para obter** $\hat{q}_k(t)$ **para o tempo futuro:**

Transformada Inversa IFFT $\hat{q}_k(t)$ **para obter** $q(x,t)$

Derivadas no espaço muito acuradas

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

Exemplo Não Linear

Equação 1D para transporte com velocidade variavel (u(x)) :

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} + u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0$$

Como calcular a transformada de $u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x}$ **e fazer o uso da derivada no espaço espectral? Transforma cada variável separadamente e depois combina.**

$$q(x,t) = \sum_k \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x}$$

$$\frac{\partial \hat{q}_k(t)}{\partial t} + 2\pi i k u \hat{q}_k(t)$$

$$\mathrm{u}(x) = \sum_l \hat{u}_l(t) e^{2\pi i l x}$$

$$u(x)\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = \sum_k \sum_l 2\pi i k \hat{u}_l \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} e^{2\pi i l x}$$

Using this makes the method computationally intense ...

Exemplo Não Linear

Equação 1D para transporte com velocidade variavel (u(x)) :

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \sum_k \sum_l 2\pi i k \hat{u}_l \hat{q}_k(t) e^{2\pi i k x} e^{2\pi i l x} = 0$$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \sum_k \sum_l 2\pi i k \hat{u}_l \hat{q}_k(t) e^{2\pi i (k+l) x} = 0$$

$$\frac{\hat{q}_k(t^{n+1}) - \hat{q}_k(t^n)}{t^{n+1} - t^n} = \hat{u}_l \hat{q}_k Exp(k,l)\Big|^{t^n}$$