Dinâmica 09/10/2023 a 09/10/2023
Métodos de diferenças finitas.

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Métodos de diferenças finitas.

Dinâmica:

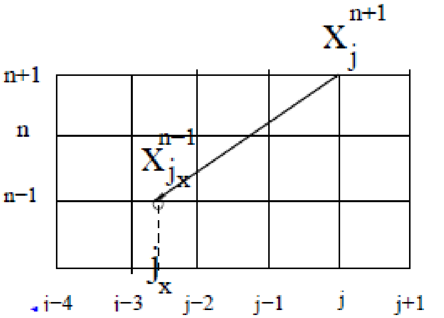
Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

Métodos de diferenças finitas.

- ✓ Métodos de diferenças finitas.
- ✓ Acurácia.
- ✓ Consistência.
- ✓ Estabilidade.
- ✓ Convergência.
- ✓ Grades de Arakawa A, B, C e E.
- ✓ Domínio de influência e domínio de dependência.
- ✓ Dispersão numérica e dissipação.
- ✓ Definição de filtros monótono e positivo.
- ✓ Métodos espectrais.
- ✓ Métodos de volume finito.
- ✓ Métodos Semi-Lagrangeanos.
- ✓ Conservação de massa local.
- ✓ Esquemas explícitos versus semi-implícitos.
- ✓ Métodos semi-implícitos.

Semi-Lagrangian

A equação de Advecção pode ser escrita na forma Euleriano ou Lagrangiana. i.e.



$$\frac{\partial\emptyset}{\partial t} = -u\frac{\partial\emptyset}{\partial x} \qquad Euleriano$$

$$\frac{D\emptyset}{Dt} = 0 \qquad Lagrangiano$$

Para um esquema semi-Lagrangiana de três vezes nível no tempo

$$\frac{D\emptyset}{Dt} \approx \frac{\emptyset_j^{n+1} - \emptyset_{jx}^{n-1}}{2\Delta t} = 0$$

$$\Longrightarrow \emptyset\left(x_j^{n+1}\right) = \emptyset\left(x_{jx}^{n-1}\right)$$

⇒ O valor futuro de $\emptyset$ no ponto de chegada é igual ao valor anterior de $\emptyset$ no ponto de partida.

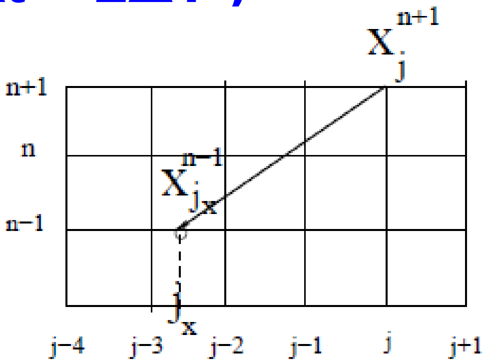
O método Semi-Lagrangian requer dois cálculo importantes

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campos advectado do ponto de partida

O cálculo do ponto de partida

Para uma velocidade constante caso (deixe Δt = 2ΔT)



$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u\Delta t$$

No caso da variável velocidade:
Ponto repete a velocidade média

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - u_m\Delta t$$

Série de Taylor aproximação (McGregor, 1993).

$$x_{jx}^{n-1} = x_j^{n+1} - \hat{u}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\Delta t^3}{6}\left(\hat{u}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)\right)$$

Para obter a função da ponderação para a interpolação

$$x_{jx}^{n-1} = x_{j-m} - \alpha$$

Onde,

$$\alpha = \frac{x_{j-m} - x_{jx}}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

2.1 Esquema ENO

Para um esquema de interpolação de segunda ordem, **um estêncil de 3 pontos** é usado para construir um interpolador quadrático 1D.

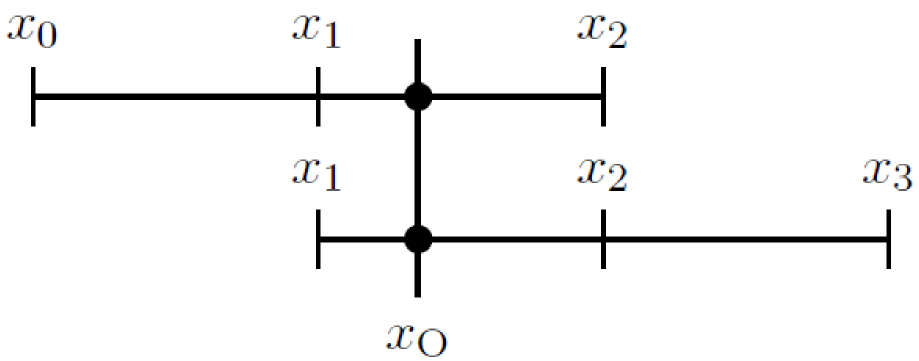
Tendo quatro nós e o ponto de interpolação no intervalo central, podemos escolher o estêncil de 3 pontos esquerdo ou direito para obter o valor interpolado.

Se essa escolha for feita com base na suavidade da solução, falamos da técnica ENO.

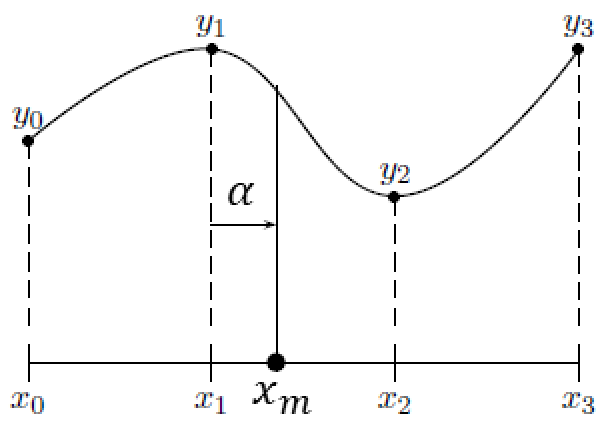
Em particular, a escolha entre os estênceis é feita calculando a aproximação da diferença finita para a segunda derivada para cada um dos dois estênceis e usando aquele com menor valor absoluto dessa quantidade

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida



Aqui, x_i são coordenadas de pontos de grade com valores da função correspondentes y_i . Por exemplo: if $| y_2 - 2y_1 + y_0 | < | y_3 - 2y_2 + y_1 |$ (veja a figura abaixo),



Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador linear no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

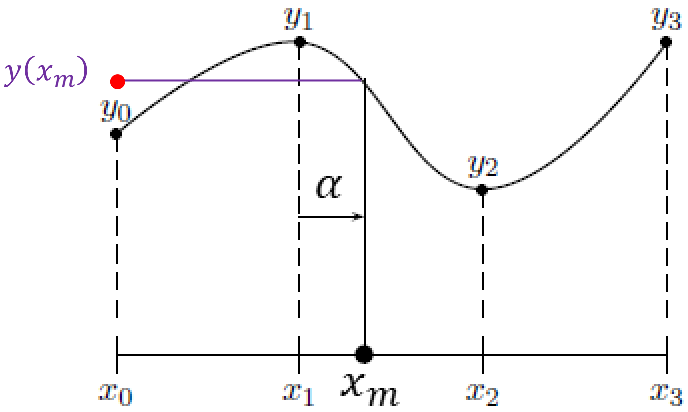
$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1) + (x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1 \frac{(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + y_1$$

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} - y_1 \frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1$$



$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

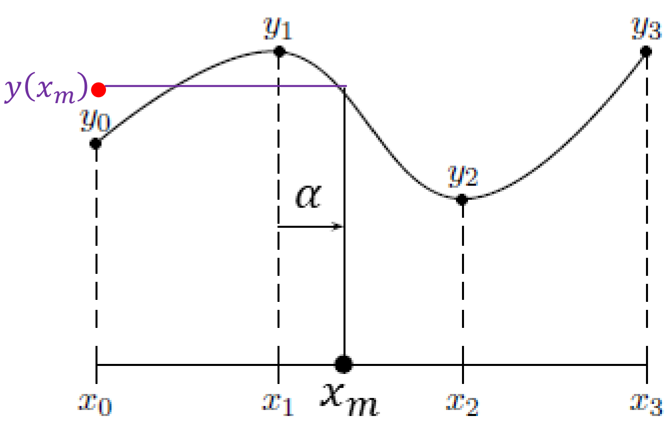
$$y(x_m) = y_0\alpha - y_1\alpha + y_1$$

$$y(x_m) = y_0\alpha + (1 - \alpha)y_1$$

O cálculo do ponto de partida

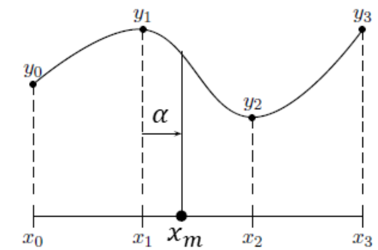
Usa-se o interpolador quadratico no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:



O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida



Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_0 - x_2)} - \frac{(x_2 - x_1)}{(x_0 - x_2)} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta x} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \right) + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1\frac{(x_m - x_1 + x_1 - x_0)(x_m - x_1 + x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1\frac{((x_m - x_1) + (x_1 - x_0))((x_m - x_1) + (x_1 - x_2))}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1\frac{(x_1 - x_0)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1\right)(x_1 - x_2)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1\right)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1\frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1\right)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1\right)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_0)} + 1\right)\left(\frac{(x_m - x_1)}{(x_1 - x_2)} + 1\right) + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1(-\alpha + 1)(\alpha + 1) + y_2\frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) + y_1(-\alpha+1)(\alpha+1) + y_2\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{(x_m-x_0)}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{(x_m-x_1+x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\frac{((x_m-x_1)+(x_1-x_0))}{(x_2-x_0)}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(\frac{(x_m-x_1)}{(x_2-x_0)} + \frac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}\right)$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta x}\right)$$

$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) + y_2\alpha\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{x_m-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x_m-x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) - y_1(\alpha - 1)(\alpha + 1) + y_2 \alpha \left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador quadrático no estêncil 0 - 1 - 2 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Para uma malha regular de tamanho Δx tem-se:

$$y(x_m) = y_0 \alpha \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right) - y_1(\alpha - 1)(\alpha + 1) - y_2 \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

O cálculo do ponto de partida

Usa-se o interpolador cubico no estêncil 0 - 1 - 2

polinômio de interpolação terá a forma:

O cálculo do ponto de partida

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Usa-se o interpolador cubico no estêncil 0 - 1 - 2 - 3 e o polinômio de interpolação terá a forma:

$$y(x_m) = y_0 \frac{(x_m - x_1)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_2)(x_m - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$\alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = -y(x_0)\frac{(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{6} + y(x_1)\frac{(2-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{2} + y(x_2)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{2} - y(x_3)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}{6}$$

Interpolação do campo advectado no ponto de partida

Linear (2pts)

$$x_m = X_j - u * Dt \qquad \alpha = \frac{x_m - x_1}{\Delta x}$$

$$y(x_m) = y_0\alpha + (1-\alpha)y_1$$

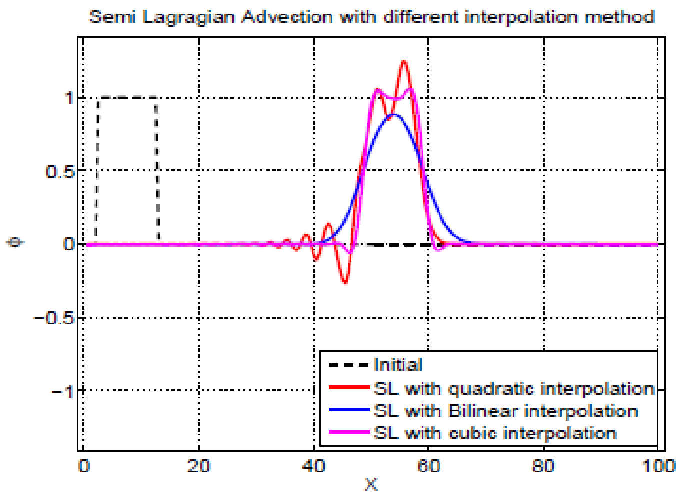
Quadrático (3pts)

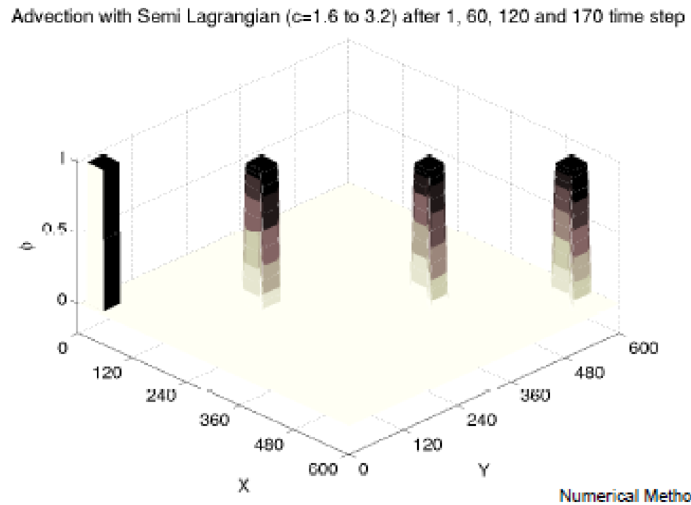
$$y(x_m) = y_0\alpha\left(\frac{\alpha-1}{2}\right) - y_1(\alpha-1)(\alpha+1) - y_2\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

Cúbicos (4pts))

$$y(x_m) = -y(x_0)\frac{(1-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{6} + y(x_1)\frac{(2-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{2} + y(x_2)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{2} - y(x_3)\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}{6}$$

Precisão e monotonicity





Análise de Estabilidade

Assumir um esquema de dois níveis no tempo e um de interpolação linear $\emptyset$ no ponto de partida ou seja .

$$\emptyset_j^{n+1} = \emptyset_*^n = (1-\alpha)\emptyset_{j-m}^n + \alpha\emptyset_{j-m-1}^n \qquad \textbf{(23)}$$

(Note-se que quando m= 0, $\alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$, e 23 se torna Idêntico ao esquema diferencial upstream). assim como para outros esquemas de advecção vamos supor que uma solução na forma:$\emptyset_j^n = A^n e^{ikj\Delta x}$

A substituição de 23 nós, obter

$$|A| = [1 - 2\alpha(1-\alpha)[1 - cos(k\Delta x)]]^{0.5} . \qquad \textbf{(24)}$$

Portanto $|A| \leq 1$ Enquanto $\alpha(1 - \alpha) \geq 0$ Ou seja, $0 \leq \alpha \leq 1$

O esquema é, portanto, estável se os pontos da interpolação são os dois são mais próximos do ponto de partida, mas é neutro somente

Se $\alpha = 0$ Ou $\alpha = 1$, Ou seja, quando a interpolação não é necessária

Execicio

Implemantar os esquemas de interpolação no método Lagrangiano

$$y(x_m) = y_0\alpha + (1-\alpha)y_1$$

$$y(x_m) = y_0\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - y_1\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{1} + y_2\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}$$

$$y(x_m) = -y(x_0)\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{6} + y(x_1)\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{2} + y(x_2)\frac{\alpha(1-\alpha^2)(2-\alpha)}{2} - y(x_3)\frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{6}$$