



Numerical Methods

Interpolation



## Interpolação

**Problema Básico de Interpolação:** Para dados dados

$(t_1, y_1); (t_2, y_2); \dots (t_m, y_m)$  com  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ,

determine uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(t_i) = y_i, i = 1; \dots; m$$

- $f$  é uma **função interpolante**, ou **interpoladora**, para os dados dados.
- Dados adicionais podem ser prescritos, como a inclinação da interpoladora em pontos específicos.
- Restrições adicionais podem ser impostas, como a suavidade, monotonicidade ou convexidade da interpoladora.
- $f$  pode ser uma função de mais de uma variável, mas consideraremos apenas o caso unidimensional.



## Propósitos para Interpolação:

"A interpolação é útil para:

1. Traçar uma curva suave através de pontos de dados discretos.
2. Ler entre as linhas de uma tabela.
3. Diferenciar ou integrar dados tabulares.
4. Avaliar rapidamente e facilmente funções matemáticas.
5. Substituir funções complicadas por funções simples."



## Interpolação vs. Aproximação:

“

Por definição, a função de interpolação é dada exatamente aos pontos de dados

A interpolação é inadequada se os pontos de dados estiverem sujeitos a erros significativos

Geralmente é preferível suavizar dados ruidosos, por exemplo, por aproximação de mínimos quadrados

A aproximação também é mais apropriada para bibliotecas de funções especiais”



## Desafios na Interpolação:

Muitas funções interpolam arbitrariamente um determinado conjunto de pontos de dados

I Que forma deve ter a função de interpolação?

I Como o interpolante deve se comportar entre os pontos de dados?

I O interpolante deve herdar propriedades dos dados, como monotonicidade, convexidade ou periodicidade?

Os parâmetros que definem a função de interpolação são significativos?

I Se a função e os dados forem plotados, os resultados deverão ser visualmente agradáveis?



## Escolha do Interpolante:

Escolha da função para interpolação com base em

Quão fácil é trabalhar com a função de interpolação

1. determinando seus parâmetros
2. avaliando interpolante
3. diferenciando ou integrando interpolante

Quão bem as propriedades do interpolante correspondem às propriedades dos dados a serem ajustados (suavidade, monotonicidade, convexidade, periodicidade, etc.)



## Funções para Interpolação

Famílias de funções comumente usadas para interpolação incluem:

- Polinômios
- Polinômios por partes
- Funções trigonométricas
- Funções exponenciais
- Funções racionais

Por enquanto vamos nos concentrar na interpolação por polinômios e polinômios por partes

Consideraremos a interpolação trigonométrica (DFT) mais tarde



## Funções básicas

A família de funções para interpolar pontos de dados específicos é definida por um conjunto de **funções de base**, denotadas como  $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$

A função interpolante  $f(t)$  é escolhida como uma combinação linear das funções de base.

$$f(t) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j$$

Exigir que a função interpolante  $f(t)$  interpole os dados  $(t_i, y_i)$  significa que a função  $f(t)$  deve satisfazer a seguinte condição para cada ponto de dados  $(t_i, y_i)$

$$f(t_i) = y_i$$

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_j(t_i) = y_i \quad i = 1, \dots, m$$

Este é um sistema de equações lineares  $Ax = y$  para  $n$ -vetor  $x$  de parâmetros  $x_j$ , onde as entradas da matrix  $m \times n$  pode ser expresso da seguinte forma:

$$a_{ij} = \phi_j(t_i)$$





## Existência, Singularidade e Condicionamento

A existência e a singularidade do interpolante depende do número de pontos de dados  $m$  e do número de funções base  $n$

Se  $m > n$ , o interpolante geralmente não exist

Se  $m < n$ , o interpolante não é único

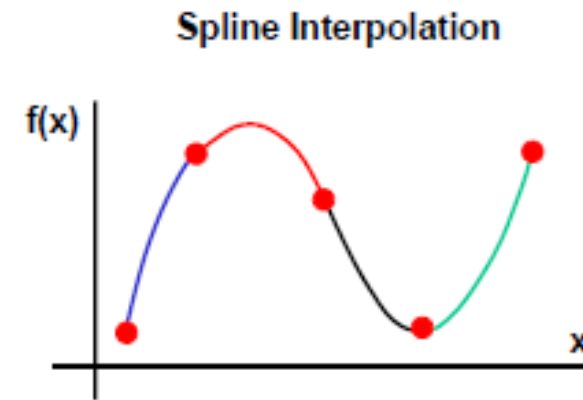
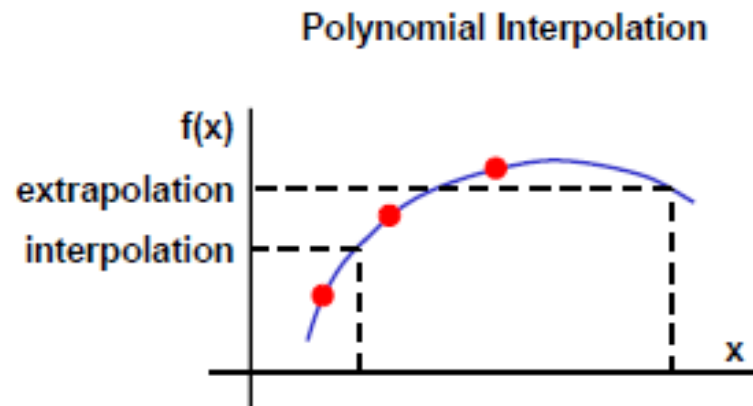
Se  $m = n$ , então a matriz base  $A$  não é singular, desde que os pontos de dados  $t_i$  sejam distintos, então os dados podem ser ajustados exatamente

A sensibilidade dos parâmetros  $x$  às perturbações nos dados depende de  $\text{cond}(A)$ , que por sua vez depende da escolha das funções de base



## Interpolação

- Estimando valores intermediários entre pontos de dados precisos.
- Primeiro, ajustamos uma função que passa exatamente pelos pontos de dados fornecidos e depois avaliamos os valores intermediários usando essa função.



- Interpolação Polinomial: Um polinômio único de ordem  $n^{th}$  passa por  $n$  pontos.
  - Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton
  - Polinômios Interpoladores de Lagrange
- Interpolação de Spline: Passa diferentes curvas (na maioria das vezes de 3ª ordem) por diferentes subconjuntos dos pontos de dados.



## Interpolação Polinomial

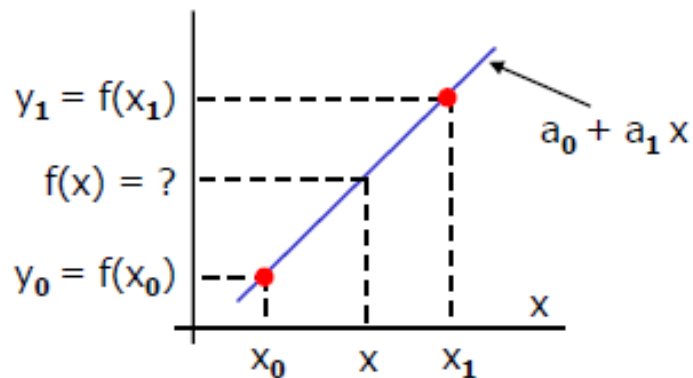
- Dados os seguintes  $n + 1$  pontos de dados

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$$

existe um único polinômio de ordem  $n^{th}$  que passa por eles

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- A pergunta é encontrar os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$
- Interpolação Linear:



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

or

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

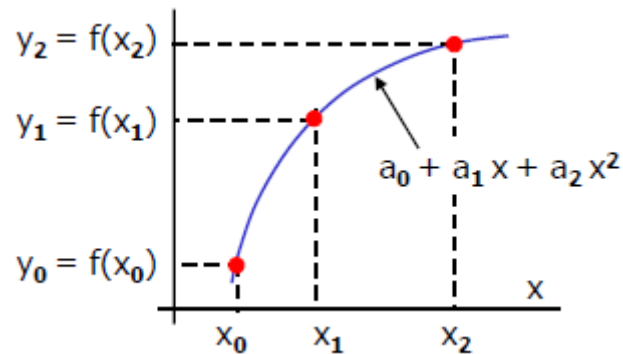
- Dado:  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$
- Uma reta passa por esses dois pontos.
- Usando triângulos semelhantes

Formula de interpolação linear



## Interpolação Polinomial

- Interpolação Quadrática:



- Dado:  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$
- Uma parábola passa por esses três pontos.
- Assim como no caso linear, a equação dessa parábola pode ser escrita como

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Fórmula de interpolação quadrática

- Como encontrar  $b_0$ ,  $b_1$  e  $b_2$  em termos das quantidades fornecidas?

- at  $x=x_0$   $f_2(x) = f(x_0) = b_0 \quad \rightarrow \quad b_0 = f(x_0)$

- at  $x=x_1$   $f_2(x) = f(x_1) = b_0 + b_1x_1 \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

- at  $x=x_2$   $f_2(x) = f(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$



# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

- Podemos generalizar as fórmulas de interpolação linear e quadrática para um polinômio de ordem  $n$  que passa por  $n + 1$  pontos

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

onde as constantes são

$$b_0 = f(x_0) \quad b_1 = f[x_1, x_0] \quad b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad \dots \quad b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

onde as funções entre colchetes são diferenças divididas finitas avaliadas de forma recursiva.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad \text{1st finite divided difference}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad \text{2nd finite divided difference}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0} \quad \text{nth finite divided difference}$$



Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

- O polinômio interpolador de Newton de ordem  $n$  é:

$$\begin{aligned} f_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \end{aligned}$$



## Interpolação Polinomial

### Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29:

A seguinte tabela logarítmica é fornecida.

x	f(x)=log(x)
4.0	0.60206
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(a) Interpole  $\log(5)$  usando os pontos  $x=4$  e  $x=6$ .

(b) Interpole  $\log(5)$  usando os pontos  $x=4.5$  e  $x=5.5$ .

(c) Observe que o valor exato é  $\log(5) = 0,69897$ .

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad 1^{\text{st}} \text{ finite divided difference}$$

(a) Interpolação linear.  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]$

$$x_0 = 4, \quad x_1 = 6 \quad \rightarrow \quad f[x_1, x_0] = [f(6) - f(4)] / (6 - 4) = 0.0880046$$

$$f(5) \approx f(4) + (5 - 4) 0.0880046 = 0.690106 \quad \varepsilon_t = 1.27 \%$$



# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29:

A seguinte tabela logarítmica é fornecida.

x	f(x)=log(x)
4.0	0.60206
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(a) Interpole  $\log(5)$  usando os pontos  $x=4$  e  $x=6$ .

(b) Interpole  $\log(5)$  usando os pontos  $x=4.5$  e  $x=5.5$ .

(c) Observe que o valor exato é  $\log(5) = 0,69897$ .

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad \text{1st finite divided difference}$$

(b) Novamente interpolação linear. Mas desta vez

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0]$$

$$x_0 = 4.5, \quad x_1 = 5.5 \quad \rightarrow \quad f[x_1, x_0] = [f(5.5) - f(4.5)] / (5.5 - 4.5) = 0.0871502$$

$$f(5) \approx f(4.5) + (5 - 4.5) 0.0871502 = 0.696788 \quad \varepsilon_t = 0.3 \%$$





## Interpolação Polinomial

### Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Exemplo 29 (continuação):

x	f(x)=log(x)
4.0	0.6020600
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(c) Interpole  $\log(5)$  usando os pontos  $x=4.5$ ,  $x=5.5$  e  $x=6$ .

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \quad 2^{\text{nd}} \text{ finite divided difference}$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \quad 1^{\text{st}} \text{ finite divided difference}$$

(c) Interpolação quadrática.

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$

$$x_0 = 4.5, x_1 = 5.5, x_2 = 6 \rightarrow f[x_1, x_0] = 0.0871502$$

$$f[x_2, x_1] = [f(6) - f(5.5)] / (6 - 5.5) = 0.0755772$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]\} / (6 - 4.5) = -0.0077153$$

$$f(5) \approx 0.696788 + (5 - 4.5)(5 - 5.5) (-0.0077153) = 0.698717 \quad \epsilon_t = 0.04 \%$$



Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

- Observe que 0,696788 foi calculado com a interpolação linear (b)
- Os erros diminuem quando os pontos usados estão mais próximos do ponto interpolado.
- Os erros diminuem à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta.



# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

As diferenças divididas finitas utilizadas nos Polinômios Interpoladores de Newton podem ser apresentadas em forma de tabela. Isso facilita muito os cálculos.

$x$	$f( )$	$f [ , ]$	$f [ , , ]$	$f [ , , , ]$
$x_0$	$f(x_0)$	$f [x_1, x_0]$	$f [x_2, x_1, x_0]$	$f [x_3, x_2, x_1, x_0]$
$x_1$	$f(x_1)$	$f [x_2, x_1]$	$f [x_3, x_2, x_1]$	
$x_2$	$f(x_2)$	$f [x_3, x_2]$		
$x_3$	$f(x_3)$			



# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

Exercício 27: As duas primeiras colunas da tabela a seguir são fornecidas. Calcule as diferenças divididas finitas ausentes..

x	$f()$	$f[ , ]$	$f[ , , ]$	$f[ , , , ]$
4	0.6020600	?	?	?
4.5	0.6532125	?	?	
5.5	0.7403627	?		
6	0.7781513			

- Os números diminuem à medida que avançamos na tabela para a direita. Isso significa que a contribuição dos termos de ordem superior é menor do que a dos termos de ordem inferior.
- Isso é esperado. O comportamento oposto é um indicativo de uma interpolação inadequada.



# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

Tabela de Diferenças Divididas Finitas (FDD)

exemplo

x	f( )	f[ , ]	f[ , , ]	f[ , , , ]
4	0.6020600	0.1023050	-0.0101032	0.001194
4.5	0.6532125	0.0871502	-0.0077153	
5.5	0.7403627	0.0755772		
6	0.7781513			

(a) Usando os pontos  $x=4$  e  $x=4.5$ .

$\log(5) \approx 0,60206 + (5 - 4) * 0,102305 = 0,704365$ ;  $\varepsilon_t = 0,8 \%$  (isso é extrapolação)

(b) Usando os pontos  $x=4,5$  e  $x=5,5$ .

$\log(5) \approx 0,6532125 + (5 - 4,5) * 0,0871502 = 0,696788$ ;  $\varepsilon_t = 0,3 \%$

(c) Usando os pontos  $x=4$  e  $x=6$ .

As entradas da tabela acima não podem ser usadas para essa interpolação.

(d) Usando os pontos  $x=4,5$ ,  $x=5,5$  e  $x=6$ .

$\log(5) \approx 0,6532125 + (5-4,5) * 0,0871502 + (5-4,5)(5-5,5)(-0,0077153) = 0,698717$ ;  $\varepsilon_t = 0,04 \%$

(e) Usando todos os quatro pontos.

$\log(5) \approx 0,60206 + (5 - 4) * 0,102305 + (5 - 4)(5 - 4,5)(-0,0101032)(5 - 4)(5 - 4,5)(5 - 5,5)(0,001194) = 0,6990149$ ;  $\varepsilon_t = 0,006 \%$



## Interpolação Polinomial

### Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

#### Exercício:

x	f( )
-2	-0.909297
-1	-0.841471
0	0.000000
1	0.841471
3	0.141120
4	-0.756802
6	-0.279415

Para criar a tabela de Diferenças Finitas Divididas (FDD) para o conjunto de dados fornecido e interpolar para  $f(2)$ , primeiro construiremos a tabela FDD usando os pontos de dados fornecidos. Em seguida, realizaremos interpolações lineares, quadráticas e cúbicas para  $f(2)$  usando os pontos especificados.

**Importante:** Sempre tente colocar o ponto interpolado no centro dos pontos usados para a interpolação.

- Para uma interpolação linear, utilize os pontos  $x=1$  e  $x=3$ .
- Para uma interpolação quadrática, você pode usar os pontos  $x=0$ ,  $x=1$  e  $x=3$  ou os pontos  $x=1$ ,  $x=3$  e  $x=4$ .
- Para uma interpolação cúbica de terceira ordem, utilize os pontos  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=3$  e  $x=4$ .



# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

Polinômios Interpoladores de Diferenças Divididas de Newton

## Exercício:

Complete a seguinte tabela dada para a função log. Você observa algo estranho? Comente.

x	$f()$	$f[, ]$	$f[, , ]$	$f[, , , ]$	$f[, , , , ]$	$f[, , , , , ]$
0.5						
1						
3						
5						
8						
10						



## Interpolação Polinomial

### Erros da Interpolação de Newton com Diferenças Divididas

$$\begin{aligned} f_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \dots \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \end{aligned}$$

A estrutura dos Polinômios Interpoladores de Newton é semelhante à série de Taylor.

O termo "remainder" (ou erro de truncamento) para a série de Taylor  $R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x_{i+1} - x_i)^{n+1}$

- Da mesma forma, o resto do polinômio de interpolação de enésima ordem é

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

onde  $\xi$  está em algum lugar no intervalo que contém o ponto interpolado  $x$  e outros pontos de dados





# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

- É uma reformulação dos Polinômios Interpoladores de Newton.

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{where} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Para  $n=1$  (linear): 
$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

- Para  $n=2$  (quadrático): 
$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$



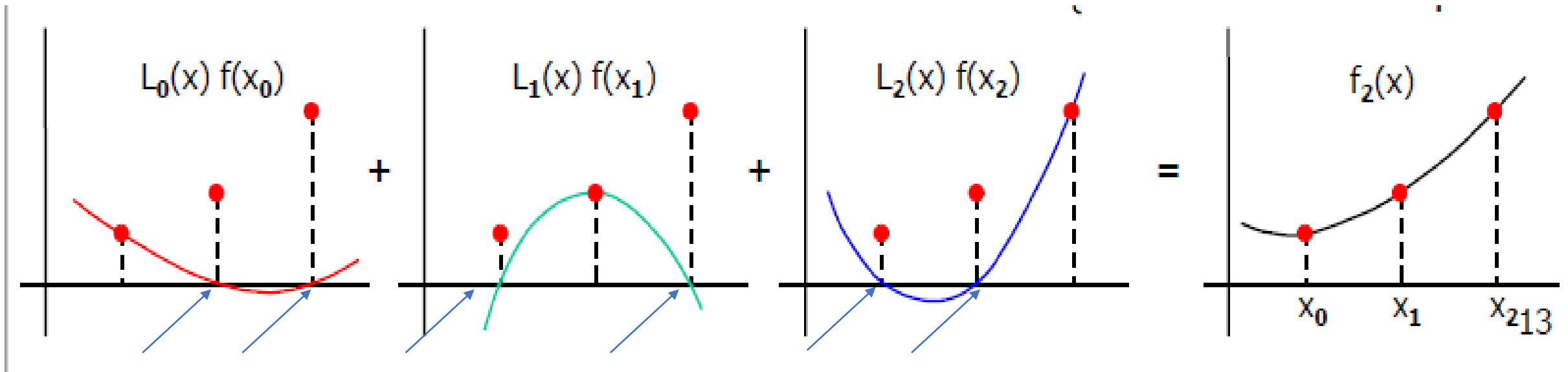
# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

- Para generalizar, um polinômio de ordem  $n$  é a soma de  $(n+1)$  polinômios de ordem  $n$ .
- Cada um desses polinômios de ordem  $n$  tem um valor de 1 em um dos pontos de fornecidos e valores de 0 em todos os outros pontos de fornecidos.
- Isso ocorre devido à seguinte propriedade das funções de Lagrange.

$$L_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \\ 0 & \text{at all other data points} \end{cases}$$





## Interpolação Polinomial

### Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

"Exemplo

$x$	$f(x)$
1	4.75
2	4.00
3	5.25
5	19.75
6	36.00

"Calcule  $f(4)$  usando Polinômios Interpoladores de Lagrange

(a) de ordem 1

(b) de ordem 2

(c) de ordem 3"

(a) Interpolação linear. Selecione  $x_0 = 3$ ,  $x_1 = 5$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$f_1(x) = (x-5)/(3-5) 5.25 + (x-3)/(5-3) 19.75$$

$$f(4) \approx 12.5$$



# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Os Polinômios Interpoladores de Lagrange

"Exemplo

x	f(x)
1	4.75
2	4.00
3	5.25
5	19.75
6	36.00

"Calcule  $f(4)$  usando Polinômios Interpoladores de Lagrange

(a) de ordem 1

(b) de ordem 2

(c) de ordem 3"

(b) Interpolação quadrática. Selecione  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

$$f_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$f_2(x) = (x-3)(x-5)/(2-3)(2-5) 4.00 + (x-2)(x-5)/(3-2)(3-5) 5.25 + (x-2)(x-3)/(5-2)(5-3) 19.75$$

$$f(4) \approx 10.5$$

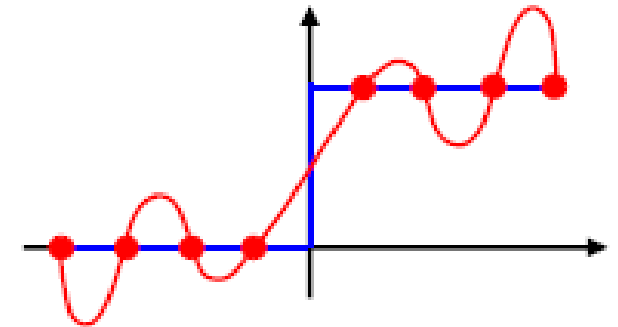
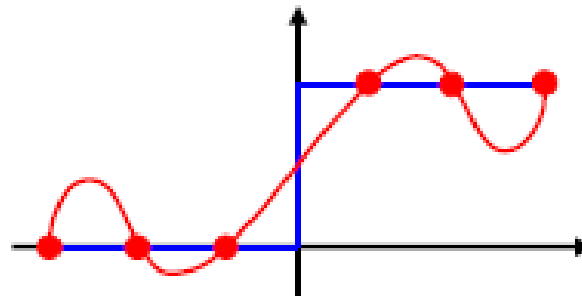
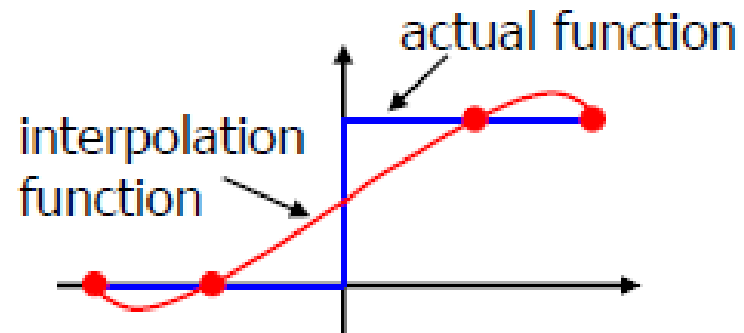


# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### "Interpolação por Spline"

- Aprendemos como interpolar entre  $n+1$  pontos de dados usando polinômios de ordem  $n$  (Newton e Legendre).
- Para um grande número de pontos de dados (tipicamente  $n > 6$  ou  $7$ ), polinômios (Newton e Legendre) de alta ordem são necessários, mas às vezes eles sofrem de comportamento oscilatório.



- Em vez de usar um único polinômio de alta ordem que passa por todos os pontos de dados, podemos usar diferentes polinômios de ordem mais baixa entre cada par de dados.
- Esses polinômios de ordem mais baixa, que passam apenas por dois pontos, são chamados de splines.
- Os splines de terceira ordem (cúbicos) são os mais preferidos.

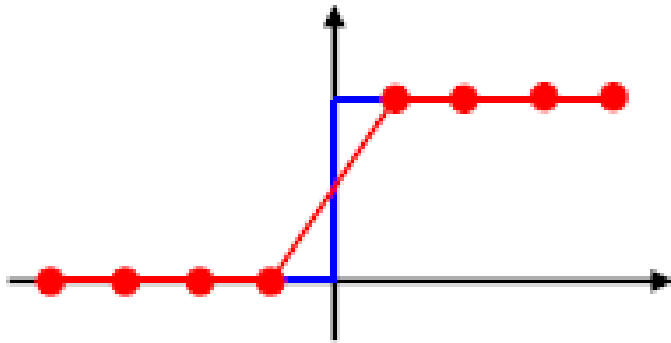


# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines de primeira ordem:"





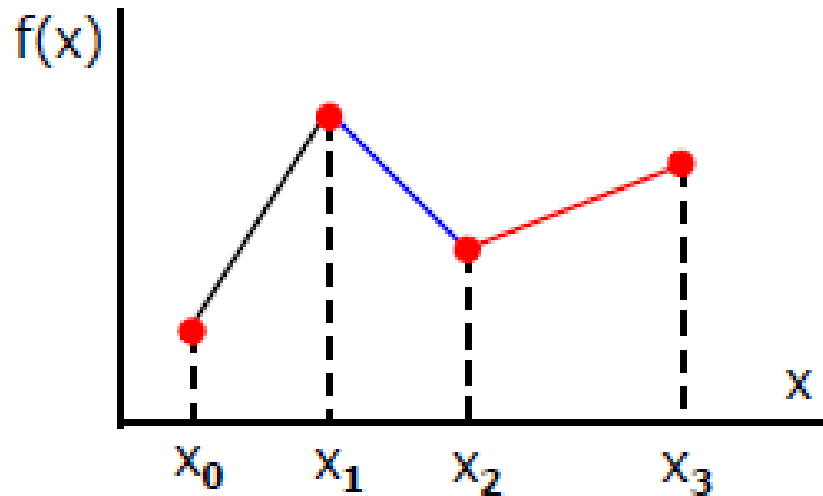
# Atmosphere Numerical Modeling Group

Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines Lineares:"

- Dado um conjunto de pontos de dados ordenados, cada par de pontos pode ser conectado usando uma linha reta.



$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad \text{for } x_0 \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad \text{for } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$f(x) = f(x_2) + m_2(x - x_2) \quad \text{for } x_2 \leq x \leq x_3$$

"onde as inclinações são  $m_i = [f(x_{i+1}) - f(x_i)] / (x_{i+1} - x_i)$

- As funções não são contínuas nos pontos interiores."

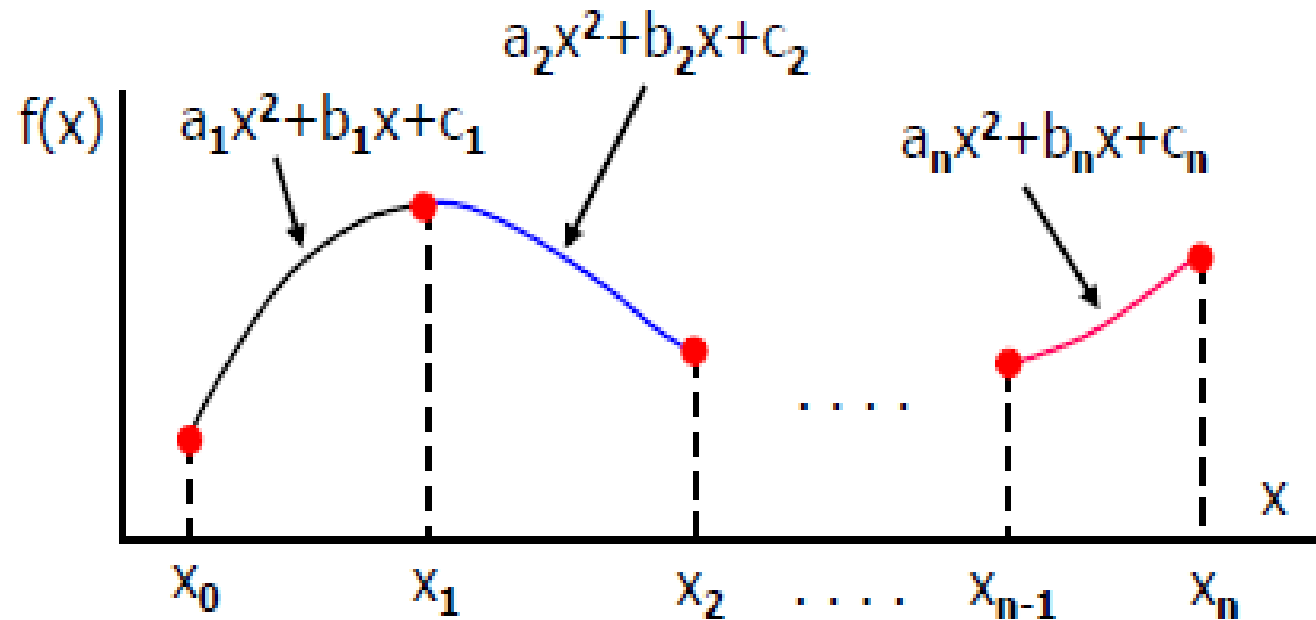


Interpolação Polinomial

"Interpolação por Spline"

"Splines Quadráticos:"

- Cada par de pontos de dados é conectado usando funções quadráticas.



- Para  $n+1$  pontos de dados, existem  $n$  splines e  $3n$  constantes desconhecidas.
- Precisamos de  $3n$  equações para resolvê-las.





# Atmosphere Numerical Modeling Group

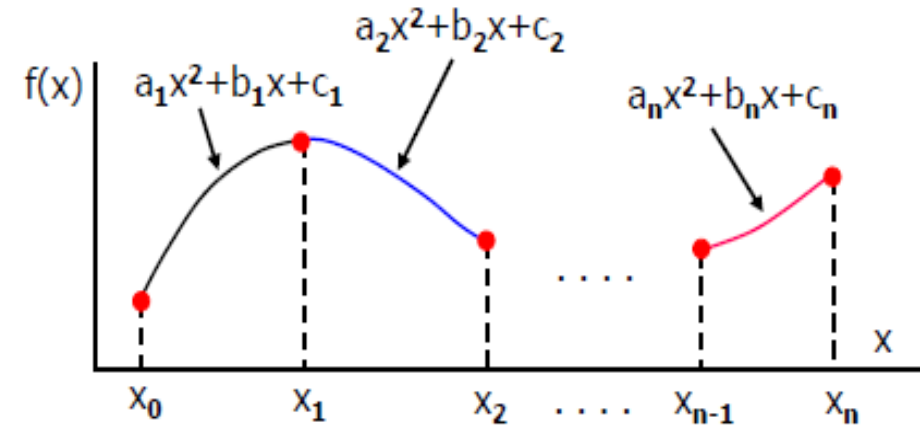
## Interpolação Polinomial

### "Splines Quadráticos:"

- Essas  $3n$  equações são
- As primeiras e últimas funções devem passar pelos pontos inicial e final (2 equações).

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$



- Os valores das funções devem ser iguais nos pontos interiores ( $2n-2$  equações).

$$a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

For  $i=2$  to  $n$

- As primeiras derivadas devem ser iguais nos pontos interiores ( $n-1$  equações).

$$2 a_{i-1} x_{i-1} + b_{i-1} = 2 a_i x_{i-1} + b_i$$

for  $i = 1$  to  $n$

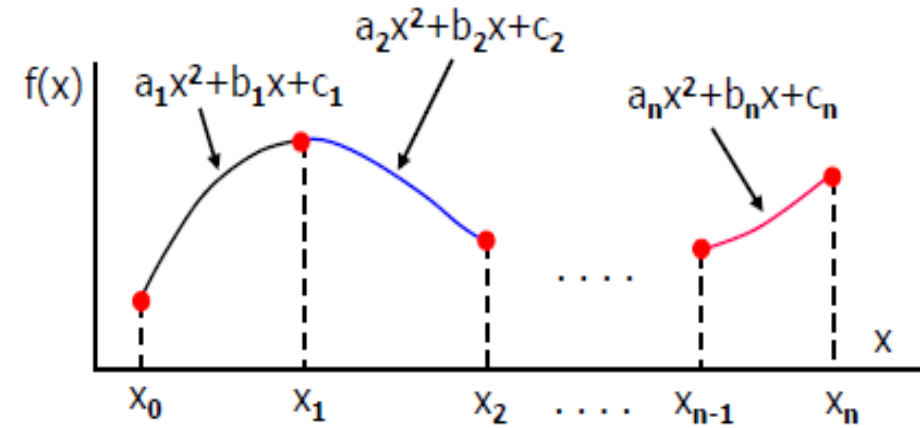


# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### "Splines Quadráticos:"

- Isso resulta em um total de  $3n-1$  equações. Uma equação adicional é necessária, e precisamos fazer uma escolha arbitrária. Entre muitas possibilidades, usaremos a seguinte:



- Tome a segunda derivada no primeiro ponto como zero (1 equação).

$$a_1 = 0$$

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$2a_1 x_0 + b_1 = f'(x_0)$$

$$2a_1 = f''(x_0) = 0$$

$$a_1 = 0$$

ou seja, os dois primeiros pontos são conectados por uma linha reta.

$$b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

- Resolva esse conjunto de  $3n$  equações lineares.



## Interpolação Polinomial

### "Splines Cúbicos:"

- Para  $n+1$  pontos, haverá  $n$  intervalos e para cada intervalo haverá um polinômio de 3ª ordem.

$$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x + d_i \quad \text{for } i = 1 \text{ to } n$$

- No total, há  $4n$  incógnitas. Elas podem ser resolvidas usando as seguintes equações:
- As primeiras e últimas funções devem passar pelos pontos finais (2 equações).
- Os valores das funções devem ser iguais nos pontos interiores ( $2n-2$  equações).
- As primeiras derivadas devem ser iguais nos pontos interiores ( $n-1$  equações).
- As segundas derivadas devem ser iguais nos pontos interiores ( $n-1$  equações).
- Isso resulta em um total de  $4n-2$  equações. Duas equações extras são (outras escolhas são possíveis):
- As segundas derivadas nos pontos finais são iguais a zero (2 equações).

- Montar e resolver  $4n$  equações é custoso. Há outra maneira de construir splines cúbicos que resulta em apenas  $n-1$  equações com  $n-1$  incógnitas. Consulte as páginas 502-503 do livro



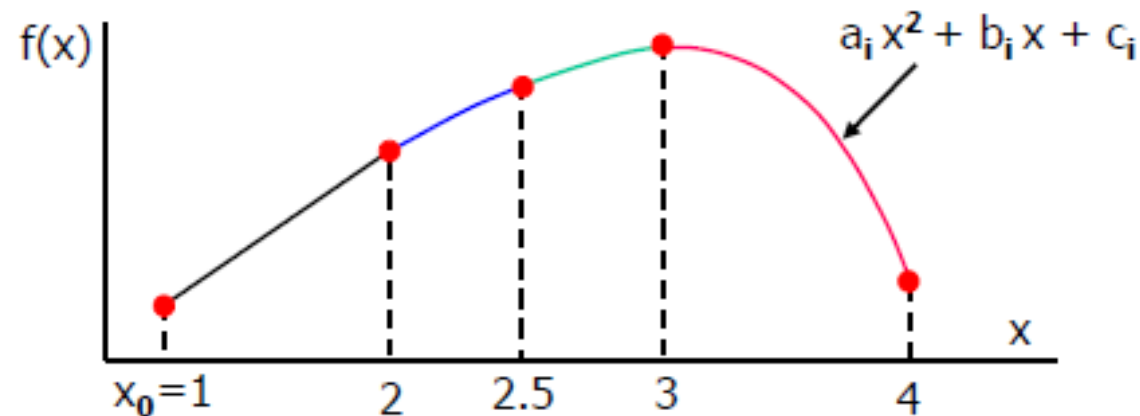
# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Exemplo "Splines Cúbicos:"

Desenvolva splines quadráticos para esses pontos de dados e preveja  $f(3,4)$  e  $f(2,2)$ .

x	f(x)
1	1
2	5
2.5	7
3	8
4	2



- Existem 5 pontos e  $n=4$  splines. No total, há  $3n=12$  incógnitas. As equações são:

- Pontos finais:

$$a_1 1^2 + b_1 1 + c_1 = 1 \quad , \quad a_4 4^2 + b_4 4 + c_4 = 2$$

- Pontos interiores:

$$a_1 2^2 + b_1 2 + c_1 = 5 \quad , \quad a_2 2^2 + b_2 2 + c_2 = 5$$

$$a_2 2.5^2 + b_2 2.5 + c_2 = 7, \quad a_3 2.5^2 + b_3 2.5 + c_3 = 7$$

$$a_3 3^2 + b_3 3 + c_3 = 8 \quad , \quad a_4 3^2 + b_4 3 + c_4 = 8$$



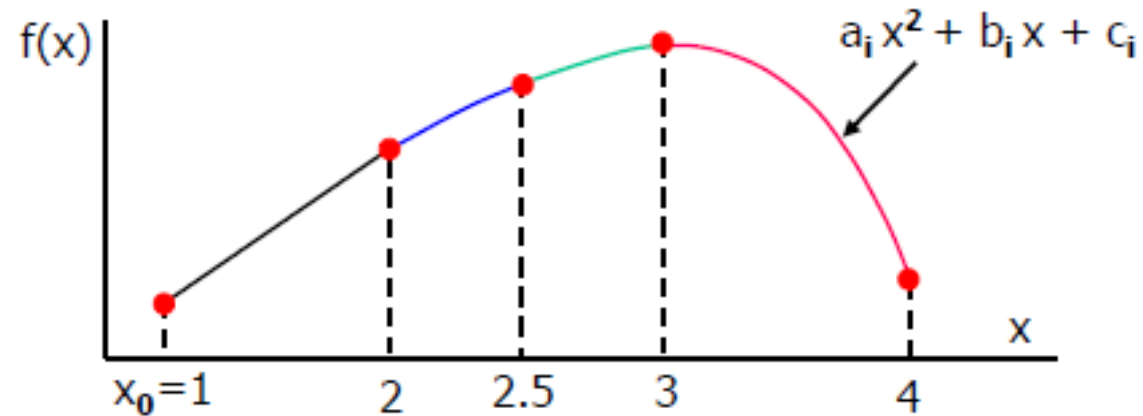
# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Exemplo "Splines Cúbicos:"

Desenvolva splines quadráticos para esses pontos de dados e preveja  $f(3,4)$  e  $f(2,2)$ .

x	f(x)
1	1
2	5
2.5	7
3	8
4	2



- Existem 5 pontos e  $n=4$  splines. No total, há  $3n=12$  incógnitas. As equações são:

- Derivadas nos pontos interiores:

$$2a_1 2 + b_1 = 2a_2 2 + b_2$$

$$2a_2 2.5 + b_2 = 2a_3 2.5 + b_3$$

$$2a_3 3 + b_3 = 2a_4 3 + b_4$$

- Escolha arbitrária para a equação ausente:  $a_1 = 0$



# Atmosphere Numerical Modeling Group

## Interpolação Polinomial

### Exemplo "Splines Cúbicos:"

- $a_1=0$  já é conhecido. Resolva para as outras 11 incógnitas restantes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \\ 24 \\ -28 \\ -6 \\ 36 \\ 46 \end{Bmatrix}$$



## Interpolação Polinomial

### **Exemplo** "Splines Cúbicos:"

- $a_1=0$  já é conhecido. Resolva para as outras 11 incógnitas restantes
- As equações para os splines são:

1º spline:  $f(x) = 4x - 3$  (Linha reta.)

2º spline:  $f(x) = 4x - 3$  (A mesma que a 1ª. Coincidência)

3º spline:  $f(x) = -4x^2 + 24x - 28$

4º spline:  $f(x) = -6x^2 + 36x - 46$

Agora que você tem as equações para os splines, você pode usar essas fórmulas para calcular os valores de  $f(3.4)$  e  $f(2.2)$  substituindo os valores de  $x$  correspondentes nas equações dos splines.

- Para prever  $f(3.4)$ , use o 4º spline.  $f(3.4) = -6 (3.4)^2 + 36 (3.4) - 46 = 7.04$
- Para prever  $f(2.2)$ , use o 2º spline.  $f(2.2) = 4 (2.2) - 3 = 5.8$