Dinâmica 27/09/2023 a 27/09/2023
Métodos de diferenças finitas.

MET-576-4

Modelagem Numérica da Atmosfera

Dr. Paulo Yoshio Kubota

Os métodos numéricos, formulação e parametrizações utilizados nos modelos atmosféricos serão descritos em detalhe.

3 Meses
24 Aulas (2 horas cada)

Dinâmica:

Métodos numéricos amplamente utilizados na solução numérica das equações diferencias parciais que governam os movimentos na atmosfera serão o foco, mas também serão analisados os novos conceitos e novos métodos.

- ✓ **Métodos de diferenças finitas.**
- ✓ **Acurácia.**
- ✓ **Consistência.**
- ✓ **Estabilidade.**
- ✓ **Convergência.**
- ✓ **Grades de Arakawa A, B, C e E.**
- ✓ **Domínio de influência e domínio de dependência.**
- ✓ **Dispersão numérica e dissipação.**
- ✓ **Definição de filtros monótono e positivo.**
- ✓ **Métodos espectrais.**
- ✓ **Métodos de volume finito.**
- ✓ **Métodos Semi-Lagrangeanos.**
- ✓ **Conservação de massa local.**
- ✓ **Esquemas explícitos versus semi-implícitos.**
- ✓ **Métodos semi-implícitos.**

Métodos de diferenças finitas.

Notas: esquema upstream (upwind- FTBS)

Time Discretization

Métodos de diferenças finitas.

"ESTÁGIOS" E "NÍVEIS" MAIOR PRECISÃO DE ORDEM

Terminologia:
n, n+1 … níveis de tempo
$\alpha, \beta, \ldots$ coeficientes de derivadas espaciais
F aproximações para derivadas espaciais

Métodos de diferenças finitas.

Diferenciação de tempo: estágios vs. níveis

Revisão: a diferenciação de tempo inclui
1) como expressamos a derivada do tempo
2) em que níveis de tempo avaliamos as derivadas espaciais

Níveis
1) refere-se a quantos níveis de tempo estão em nosso esquema
2) Lax-Wendroff: 2 níveis. Leapfrog: 3 níveis

Estágios
1) refere-se a quantas vezes avaliamos as derivadas espaciais
2) Lax-Wendroff: estágio único. Runge-Kutta: 2 ou mais estágios

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas de estágio único e 2 níveis

Estágio único: avalia derivadas espaciais uma vez

2 níveis: existem dois níveis de tempo, n e n+1

Métodos de diferenças finitas.

Notas: esquema upstream (upwind- FTBS)

- *Centered explicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- *Centered implicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- *Upwind scheme*

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x} \;=\; 0\text{ , if } a>0, \\[2ex] \dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\dfrac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x} \;=\; 0\text{ , if } a<0. \end{cases}$$

- *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1}-u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- *Beam-Warming* if $a>0$,

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\frac{3u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n}{2\Delta x}-\frac{a^2\Delta t}{2}\,\frac{u_j^n-2u_{j-1}^n+u_{j-2}^n}{\Delta x^2} \;=\; 0.$$

Lax–Friedrich method

O esquema Lax-Friedrichs é um esquema explícito de primeira ordem, usando diferença avançada no tempo e diferença centrada no espaço. No entanto, o esquema é estabilizado calculando a média de u_i^n sobre as células vizinhas na aproximação temporal:

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{\Delta t} = -\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

O esquema Lax-Friedrich é obtido pelo isolamento u_i^{n+1} no lado direito:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n)$$

Assumindo um fluxo linear $F = a_0 u$ pode ser mostrado que o esquema Lax-Friedrich assume a forma:

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{C}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

Lax–Wendroff method

O método Lax–Wendroff, nomeado após Peter Lax e Burton Wendroff, é um método numérico para a solução de equações diferenciais parciais hiperbólicas, com base em diferenças finitas.

É de precisão de segunda ordem no espaço e no tempo.

Este método é um exemplo de integração de tempo explícita em que a função que define a equação governante é avaliada no momento atual.

Lax–Wendroff method

Séries de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'}{1!}(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 + + \frac{f'''}{3!}(x-a)^3 + \cdots..$$

A série na Equação acima é chamada série de Taylor da função f em a (ou em torno de a ou centrada em a

Obtenha a expansão em série de Taylor para u_j^{n+1}

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t)^3 + \cdots..$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t \partial t} - \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t} + \cdots.$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$f = a_0 u$(x,t)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t}$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t} + \cdots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$F = a_0 u(\mathrm{x,t})$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - a_0 \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \cdots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$F = a_0 u(\text{x,t})$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 f\big(u(x,t)\big)}{\partial x \partial t}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\left(u(x,t)\right)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\left(u(x,t)\right)}{\partial x}$$

$$F = a_0 u(\mathrm{x,t})$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f\left(u(x,t)\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 f\left(u(x,t)\right)}{\partial x \partial t}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

Suponha que se tenha uma equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

Onde x**e** t **são variáveis independentes, e o estado inicial** $u(x,t=0)$ **é especificado.**

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots.$$

Exercicio

Discretizar as derivadas $\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x \partial x \partial x} = ?$ e $\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x \partial x \partial x \partial x} = ?$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots.$$

Lax–Wendroff method

Caso Linear:

Onde $f(u(x,t)) = Au(x,t)$ **e** $A = Cte$

O método Lax-Wendroff pertence à classe dos esquemas conservadores e pode ser derivado de várias maneiras. Para simplificar, derivaremos o método usando uma equação modelo simples adv., ou seja, a equação de advecção linear com $F = a_0 u$, onde a_0 é uma velocidade de propagação constante. O início de Lax-Wendroff é uma aproximação de Taylor de u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + \frac{(\Delta t)}{2} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n + \cdots$$

From the differential equation of Adv. we get by differentiation

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n = -a_0 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n = a_0^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n$$

Lax–Wendroff method

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$f = a_0 u$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0 \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + a_0^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x} + \cdots.$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$C = a_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{C^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

Lax–Wendroff method

Antes da substituição na expansão de Taylor aproximamos as derivadas espaciais por diferenças centrais:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{(2\Delta x)} \quad \text{and} \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

e então o esquema de Lax-Wendroff segue por substituição:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{C}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{C^2}{2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$

com o erro de truncamento local

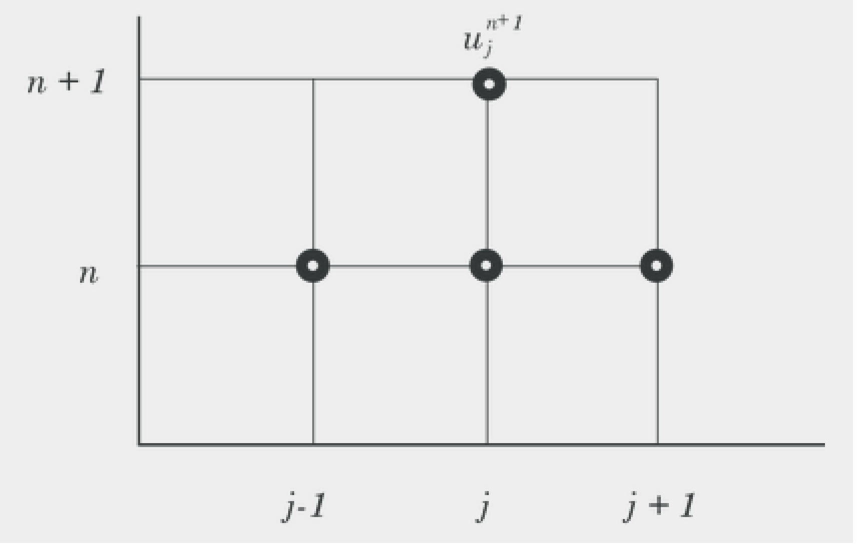
$$T_j^n = \frac{1}{6}\cdot\left[(\Delta t)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + a_0(\Delta x)^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right]_j^n = O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$$

Lax–Wendroff method

A equação de diferença resultante também pode ser formulada como:

$$u_j^{n+1} = \frac{C}{2}(1+C)u_{j-1}^n + (1-C^2)u_j^n - \frac{C}{2}(1-C)u_{j+1}^n$$

O estêntico explícito de Lax Wendroff é ilustrado na Fig.



Exercicios Lax–Wendroff method

- *Centered explicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- *Centered implicit scheme*

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- *Upwind scheme*

$$\begin{cases}\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\dfrac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x} \;=\; 0\text{ , if } a>0,\\[2ex]\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\,\dfrac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x} \;=\; 0\text{ , if } a<0.\end{cases}$$

- *Lax-Friedrichs*

$$\frac{2u_j^{n+1}-u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta t}+a\,\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x} \;=\; 0.$$

- Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{C}{2}\left(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n\right)+\frac{C^2}{2}\left(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n\right)$$

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots.$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots.$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$f(u(x,t)) = a_0 u(\mathrm{x,t})$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial a_0 u(\mathrm{x,t})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -a_0\frac{\partial u(\mathrm{x,t})}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots .$$

Métodos de diferenças finitas.

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -a_0\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -a_0\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$f\big(u(x,t)\big) = a_0 u(x,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -a_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_o^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_o^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -a_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_o^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = a_o^2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = a_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = a_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\right)}$$

$$f\big(u(x,t)\big) = a_0 u(x,t)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = -a_o^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = -a_o^3 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots .$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = -a_o^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = -a_o^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$f\big(u(x,t)\big) = a_0 u(x,t)$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = -a_o^3 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = a_o^4 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = -a_o^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = a_o^4 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots .$$

Lax–Wendroff method

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \dots.$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f\big(u(x,t)\big)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial u(\text{x,t})}{\partial x}$$

$$f(u(x,t)) = a_0 u(\text{x,t})$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a_o^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = -a_o^3 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = a_o^4 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} + \cdots.$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t\left(a_0 \frac{\partial u(\text{x,t})}{\partial x}\right) + \frac{\Delta t^2}{2}\left(a_o^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) - \frac{\Delta t^3}{6}\left(a_o^3 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right) + \frac{\Delta t^4}{24}\left(a_o^4 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}\right) + \cdots.$$

Métodos de diferenças finitas.

Resumo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j}^{n}}{\Delta x} - O[(\Delta x)^{1}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2}^{n} + 12u_{j}^{n} - 16u_{j-1}^{n} + 3u_{j-2}}{12\Delta x} + O[(\Delta x)^{2}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+2} - 2u_{j} + u_{j-2}}{4\Delta x} + \frac{-4u_{j-1} + 4u_{j} - u_{j+2} + u_{j}}{3\Delta x} - O[\Delta x^{3}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x}\right) - O[(\Delta x)^{4}]$$

Métodos de diferenças finitas.

Diferencial de n ordem

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4] \qquad (4B)$$

$$\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4] \qquad (4C)$$

Subtaria a 4B - 4C

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}-\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=\left(\frac{1}{6}-\frac{4}{6}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}-\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=-\frac{3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4]$$

$$\frac{6}{3}\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}-\frac{6}{3}\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4\Delta x}=-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\Delta x)^2 \qquad (2D)$$

$$-\frac{6}{3}\left(\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2(\Delta x)^3}-\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{4(\Delta x)^3}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (3D)$$

$$-\frac{6}{3}\left(\frac{2u_{j+1}-2u_{j-1}-u_{j+2}+u_{j-2}}{4(\Delta x)^3}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (4D)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{+u_{j+2}-2u_{j+1}+2u_{j-1}-u_{j-2}}{(\Delta x)^3}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (5D)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = +\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^4] \qquad (6B)$$

$$\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = +\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad (6C)$$

Multiplique a 6B por 2

$$2\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = +2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^4 + O[(\Delta x)^4] \qquad (7B)$$

subtraia a 7B - 6C

$$2\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6B)$$

$$\frac{2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})}{\Delta x^2} - \frac{(u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \frac{4-1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6B)$$

$$\frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{8\Delta x^2} = \frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6B)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{-u_{j-2}+16u_{j+1}-30u_{j}+16u_{j-1}-u_{j+2}}{8\Delta x^{2}}=\frac{3}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \qquad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{-u_{j-2}+16u_{j+1}-30u_{j}+16u_{j-1}-u_{j+2}}{4\Delta x^{2}}=\frac{3}{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \qquad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{-u_{j-2}+16u_{j+1}-30u_{j}+16u_{j-1}-u_{j+2}}{4\Delta x^{2}}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \qquad (6B)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\frac{-u_{j-2}+16u_{j+1}-30u_{j}+16u_{j-1}-u_{j+2}}{4\Delta x^{2}}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \qquad (6B)$$

$$\frac{-u_{j-2}+16u_{j+1}-30u_{j}+16u_{j-1}-u_{j+2}}{12\Delta x^{2}}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \qquad (6B)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = +\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad (6B)$$

$$\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = +\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad (6C)$$

Multiplique a 6C por 2

$$2\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = +\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{8}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad (6C)$$

subtraia a 6B - 6C

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left(\frac{2}{4!} - \frac{8}{4!}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} - 2\frac{u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}}{8\Delta x^2} = \left(-\frac{6}{4!}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2}-2\frac{u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{8\Delta x^2}=\left(-\frac{6}{4!}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2}-\frac{u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{4\Delta x^2}=\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Delta x)^2+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\frac{4}{1}\left(-\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^4}+\frac{u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{4\Delta x^4}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$\frac{4}{1}\left(-\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^4}+\frac{u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{4\Delta x^4}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\frac{4}{1}\left(\frac{-4u_{j+1}+8u_j-4u_{j-1}+u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{4\Delta x^4}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\frac{4}{4}\left(\frac{-4u_{j+1}+8u_j-4u_{j-1}+u_{j+2}-2u_j+u_{j-2}}{\Delta x^4}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

$$\left(\frac{u_{j+2}-4u_{j+1}+6u_j-4u_{j-1}+u_{j-2}}{\Delta x^4}\right)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+O[(\Delta x)^4] \qquad 7B)$$

Métodos de diferenças finitas.

Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_0\Delta t\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + \frac{a_o^2\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) - \frac{a_o^3\Delta t^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}\right) + \frac{a_o^4\Delta t^4}{24}\left(\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}\right) + \cdots.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-u_{j-2} + 16u_{j+1} - 30u_j + 16u_{j-1} - u_{j+2}}{12\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \left(\frac{+u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2}}{2(\Delta x)^3}\right)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}}{\Delta x^4}\right)$$

Métodos de diferenças finitas.

Exercício:

Exercício: Implemente Numericamente o Esquemas com diferenças centradas no espaço de quarta ordem do método de Lax–Wendroff.

Runge-Kutta method

First Order Runge-Kutta method

Considere a situação em que a solução, $y(t)$, para uma equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t)$$

deve ser aproximado por computador a partir de alguma condição inicial conhecida, , $y(t_0) = y_0$ (observe que a marca $(')$ indica diferenciação). O texto a seguir desenvolve uma técnica intuitiva para fazer isso e apresenta vários exemplos. Esta técnica é conhecida como "Método de Euler" ou "Runge-Kutta de Primeira Ordem ".

First Order Runge-Kutta method

Uma equação diferencial linear de primeira ordem sem entrada

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

or

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$\frac{1}{y(t)}\frac{dy(t)}{dt} = -2$$

$$\int_{y(t=0)}^{y(t=h)} \frac{1}{y(t)} dy(t) = -2\int_0^h dt$$

$$\ln\big(y(t=h)\big) - \ln\big(y(t=0)\big) = -2h + 0$$

$$\ln\left(\frac{y(t=h)}{y(t=0)}\right) = -2h + 0$$

$$\frac{y(t=h)}{y(t=0)} = e^{-2h}$$

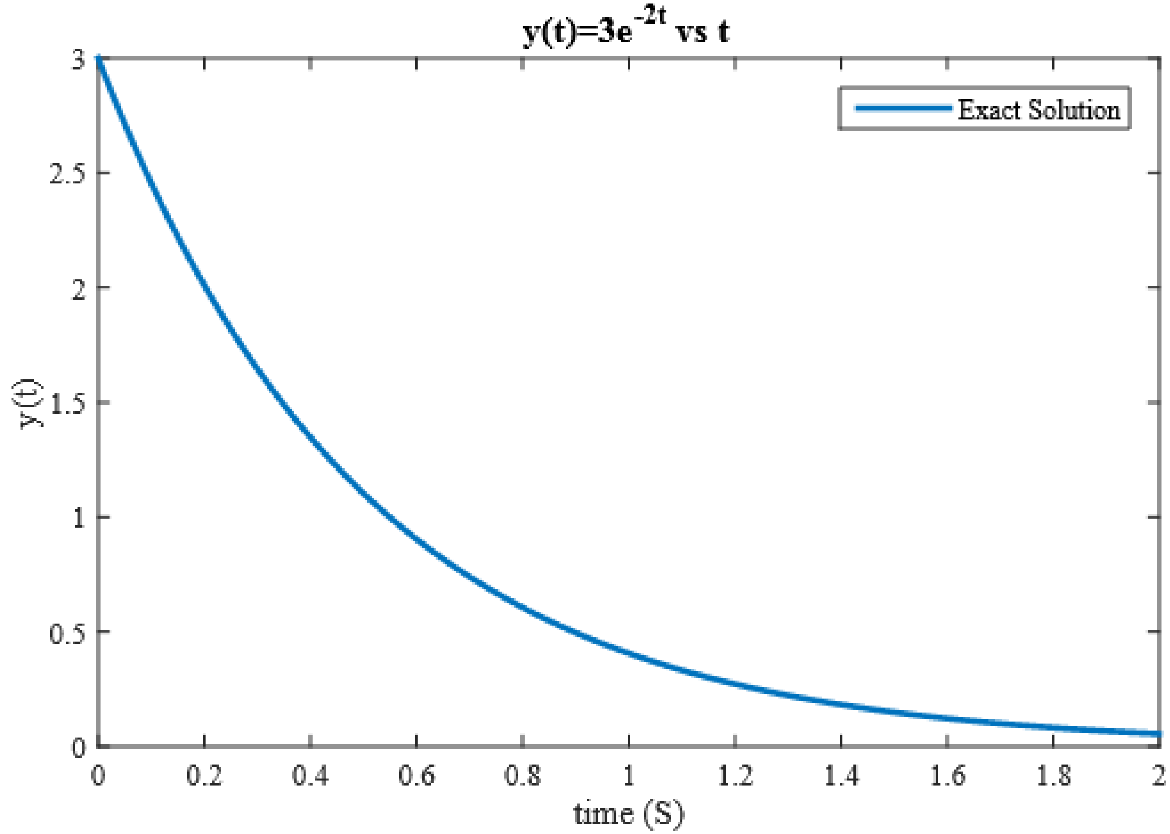
$$y(t=h) = y(t=0)e^{-2h}$$

$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

com a condição inicial definida como $y(0) = 3$. Para este caso, a solução exata pode ser determinada como $\left(y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0\right)$. Como sabemos a solução exata neste caso, poderemos utilizá-la para verificar a precisão da nossa solução aproximada.

First Order Runge-Kutta method

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$



First Order Runge-Kutta method

Existem várias maneiras de desenvolver uma solução aproximada, faremos isso usando a Série de Taylor para $y(t)$ expandido em torno de $\boldsymbol{t = 0}$ (em geral expandimos em torno de $t = t_0$).

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2} + \cdots$$

Agora restringimos a nossa solução a um curto intervalo de tempo, h, após $t = 0$ e truncamos a série de Taylor após a primeira derivada

$$y(h) = y(0) + y'(0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \cdots$$

$$y(t) = y(0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t^1 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta t^2 \ldots.$$

$$y(h) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$y(t) = y(0) + \frac{\partial y(0)}{\partial t}\Delta t + \cdots.$$

First Order Runge-Kutta method

Agora restringimos a nossa solução a um curto intervalo de tempo, h, após $t = 0$ e truncamos a série de Taylor após a primeira derivada

$$\frac{\partial y}{\partial t} = C * \frac{\partial y}{\partial x}$$

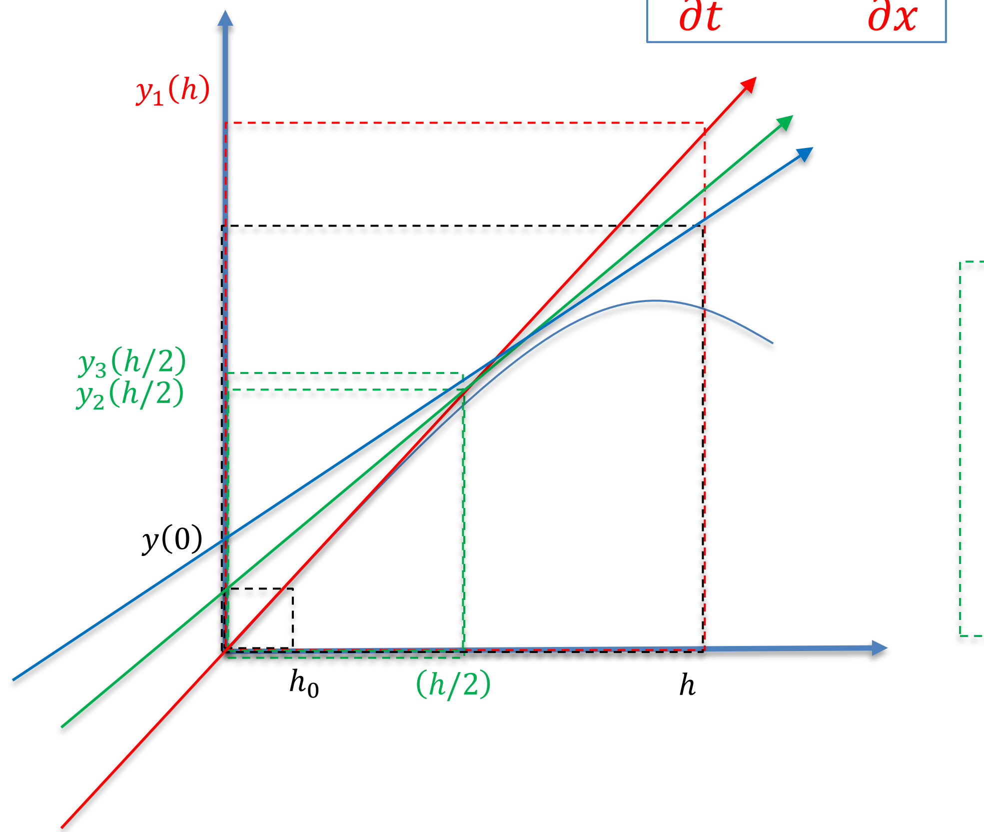
$$y(h) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$y_1(h) = y(0) + \frac{\sigma y(0)}{\partial t} h + \cdots.$$

$$y_2\left(\frac{h}{2}\right) = y_1(h) + \frac{\partial y_1(h)}{\partial t}\frac{h}{2} + \cdots.$$

$$y_3\left(\frac{h}{2}\right) = y_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\partial y_2(\frac{h}{2})}{\partial t}\frac{h}{2} + \cdots.$$

$$y_4(h) = y_3\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\partial y_3(\frac{h}{2})}{\partial t} h + \cdots.$$



First Order Runge-Kutta method

Chamamos o valor da aproximação $y^*(h)$e chamamos a derivada de $y'(0) = k\_1$.

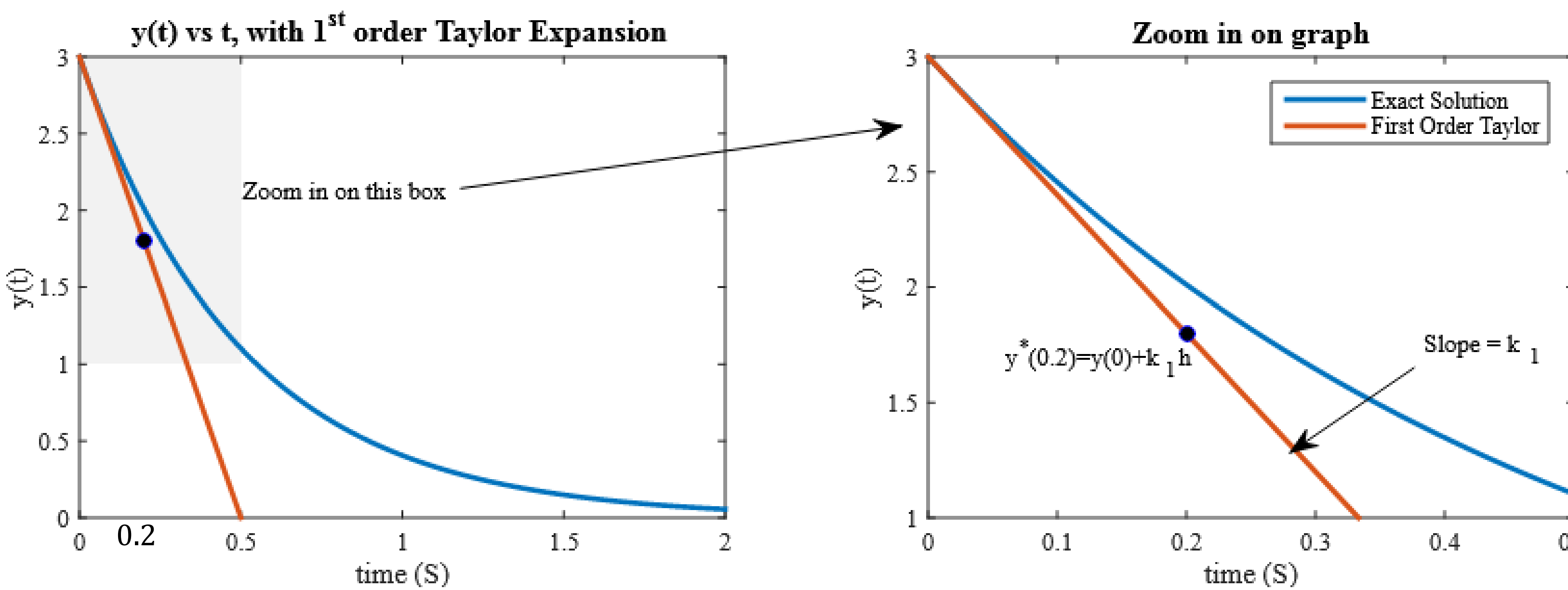
$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

$$y(h) \approx y(0) + y'(0)h$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

$$y^*(h) = y(0) + k_1 h$$

Isso é mostrado no gráfico abaixo para h = 0,2



First Order Runge-Kutta method

Para encontrar o valor da aproximação após o **próximo passo de tempo**, $y^*(2h)$, simplesmente repetimos o processo usando nossa aproximação, $y^*(h)$ para estimar a derivada no tempo h (não sabemos $y(\ h)$ exatamente, então só podemos estimar a derivada - chamamos essa estimativa de k_1).

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

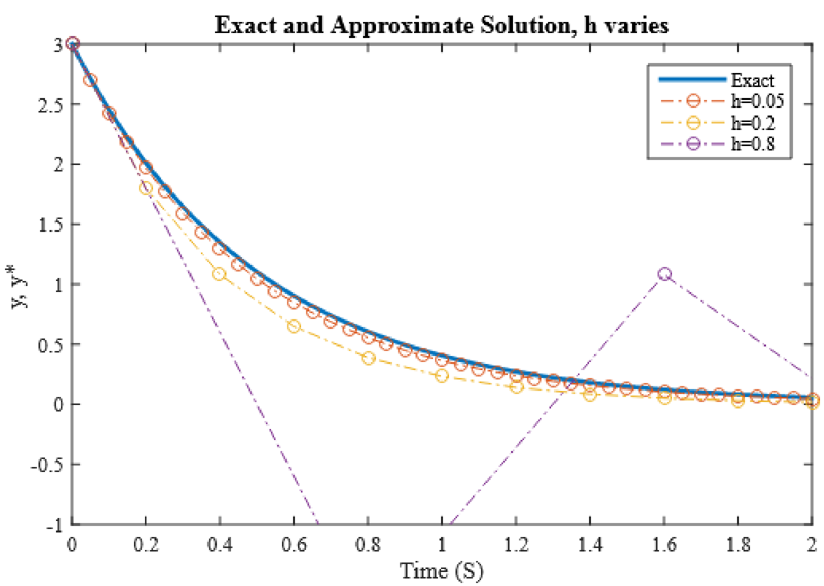
$y'(t) = -2y(t)$	exact expression for derivative
$k_1 = -2y^*(h)$	approximation for derivative
$y(2h) = y(h) + y'(h)h + y''(h)\frac{h^2}{2} + \cdots$	4aylor Series around t = h
$y(2h) \approx y(h) + y'(0)h$	Truncated 4aylor Series
$y^*(2h) = y^*(h) + k_1 h$	ApproximateSolution

Métodos de diferenças finitas.

First Order Runge-Kutta method

Em geral, avançamos um passo no tempo de t_0 para $t_0 + h$

$y'(t_0) = -2y(t_0)$	exact expression for derivative at $t = t_0$
$k_1 = -2y^*(t_0)$	Previous approx for y(t) gives approx for derivative
$y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0)h + y''(t_0)\dfrac{h^2}{2} + \cdots$	4aylor Series around $t = t_0$
$y(t_0+h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h$	Truncated 4aylor Series
$y^*(t_0+h) = y^*(t_0) + k_1 h$	Approximate Solution at next value of y



First Order Runge-Kutta method

Conceito-chave: Algoritmo Runge-Kutta de primeira ordem

Para uma equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t)$$

para progredir de um ponto em $t = t_0$, $y^*(t_0)$, em um intervalo de tempo, h siga estas etapas (repetitivamente).

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y^*(t_0), t_0) && \text{approximation for derivative} \\ y^*(t_0 + h) &= y^*(t_0) + k_1 h && \text{approximate solution at next time step} \end{aligned}$$

Notas: um valor inicial da função deve ser fornecido para iniciar o algoritmo.

Second Order Runge-Kutta method

Considere a situação em que a solução, $y(t)$, para uma equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \qquad \text{with } y(t_0) = y_0$$

deve ser aproximado por computador (a partir de alguma condição inicial conhecida, $y(t_0) = y_0$; observe também que a marca (´) indica diferenciação).

Esta técnica é conhecida como "Runge-Kutta de Segunda Ordem".

Second Order Runge-Kutta method

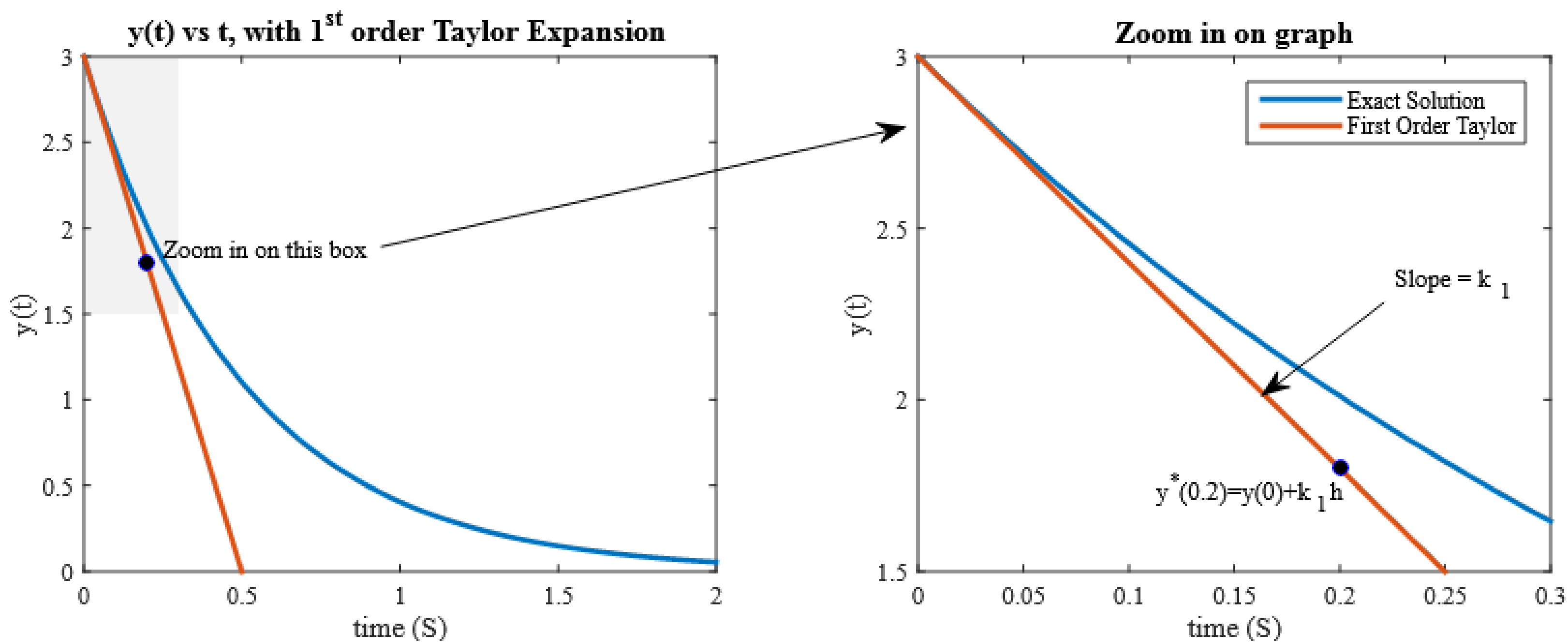
O método Runge-Kutta de primeira ordem usou a derivada no tempo t_0 ($t_0 = 0$ no gráfico abaixo) **para estimar o valor da função em um intervalo de tempo no futuro**. t. Repetimos o conceito central de gerar um avanço no tempo.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

com a condição inicial definida como $y(0) = 3$. A solução exata neste caso é $y(t) = 3e^{-2t}$, $t \geq 0$, embora em geral não saberemos isso e assim precisaremos de métodos de integração numérica para gerar uma aproximação.

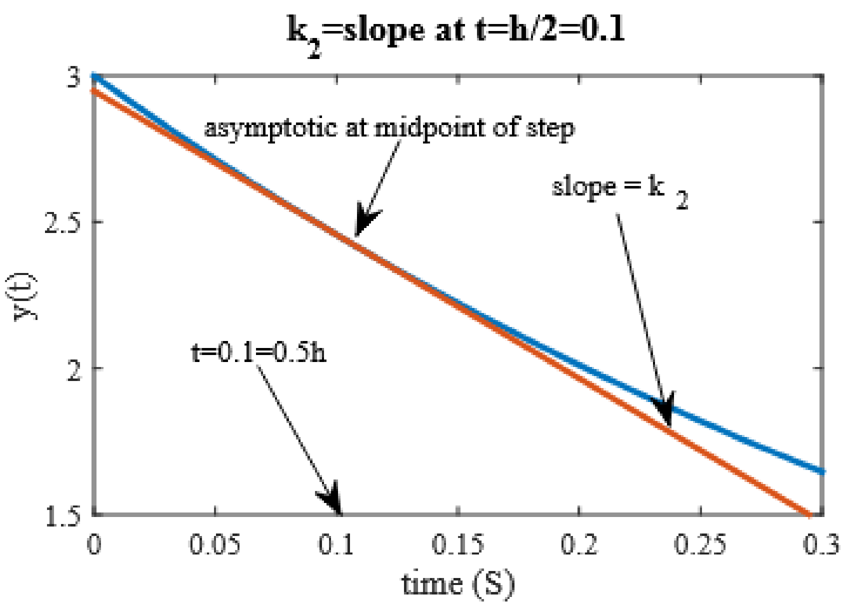
Second Order Runge-Kutta method

No gráfico abaixo, a inclinação em $t = 0$ é chamada de k_1 e a estimativa é chamada de $y^*(h)$;neste exemplo $h = 0.2$



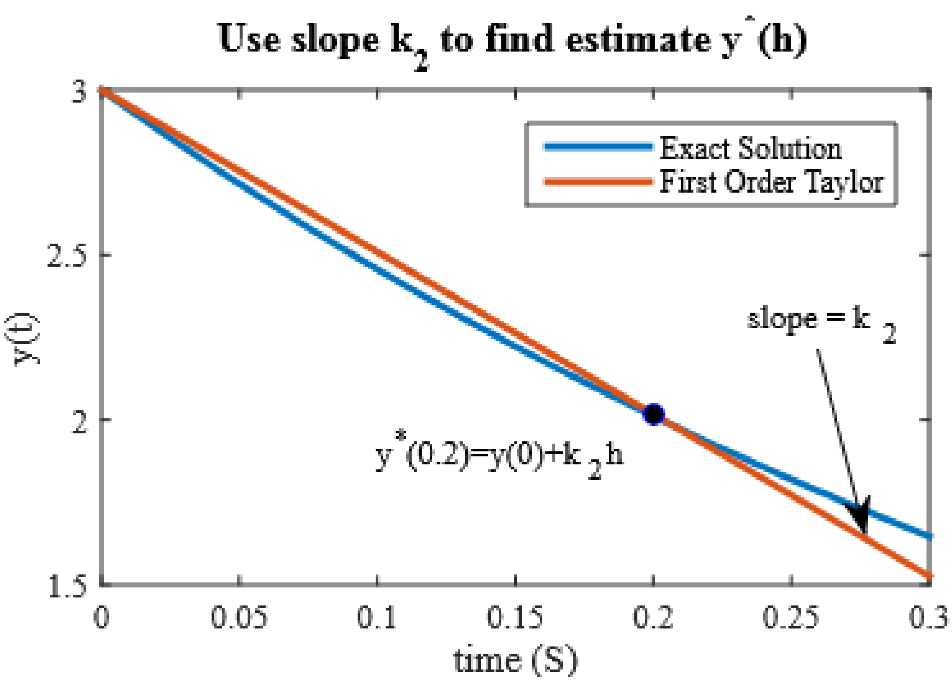
Second Order Runge-Kutta method

Isto obviamente leva a algum erro na estimativa e **gostaríamos de reduzir esse erro**. Uma maneira de fazer isso, conceitualmente, é usar a derivada no ponto intermediário entre $t = 0$ e $t = h = 0{,}2$. A inclinação neste ponto ($t = ½h = 0{,}1$) é mostrada abaixo (e é rotulada como k_2). Observe que a linha (laranja) é tangente à curva (azul) em $t = ½h$.



Second Order Runge-Kutta method

Agora, se utilizarmos este declive intermédio, k_2, à medida que avançamos no tempo, obteremos uma estimativa melhor, $y^*(h)$, do que fizemos antes. No diagrama abaixo, o valor exato da solução é $y(0.1) = 2.0110$ e a aproximação é $\boldsymbol{y^*(0.1) = 2.0175}$ para um erro de cerca de 0,3% (em comparação com cerca de 10% de erro para o Runge-Kutta de primeiro ordem).



Second Order Runge-Kutta method

Esta parece ser uma solução muito boa e obviamente gera uma aproximação significativamente mais precisa do que a técnica de primeira ordem que utiliza uma reta com inclinação, $\boldsymbol{k_1}$, calculada em $t = 0$ problema é que não sabemos o valor exato de $y(½h)$**,** então não podemos encontrar o valor exato de k_2 o coeficiente angular em $t = ½h$ (lembre-se de que o cálculo da derivada requer conhecimento do valor da função, $y'(t) = -2y(t)$)

Em vez disso, o que fazemos é usar o Runge Kutta de primeira ordem para gerar um valor aproximado para $y(t)$ em $t = ½h = 0.1$, chame-o de $y_{1(½h)}$. Em seguida, utilizamos esta estimativa para gerar k_2 (que será uma aproximação ao declive no ponto médio) e, em seguida, utilizamos k_2 para determinar $y^*(h)$. Para passar do ponto inicial em $t = 0$ para uma estimativa em $t = h$, siga o procedimento abaixo.

Second Order Runge-Kutta method

$y'(0) = -2y(0)$	expression for derivative at $t=0$
$k_1 = -2y(0)$	derivative at $t=0$
$\boxed{y_1\left(\frac{h}{2}\right) = y(0) + k_1\frac{h}{2}}$	intermediate estimate of function at $t = h/2$
$k_2 = -2y_1\left(\frac{h}{2}\right)$	estimate of slope at $t = h/2$
$y(h) = y(0) + y'(0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \cdots$	Taylor Series around $t=0$
$y(t) \approx y(0) + y'(0)h$	Truncate Taylor Series
$y^*(h) = y(0) + k_2 h$	estimate of $y(h)$

$$k_2 = -2\left(y(0) + k_1\frac{h}{2}\right)$$

Em geral, para ir da estimativa $t = t_0$ para uma estimativa em $t = t_0 + h$

Second Order Runge-Kutta method

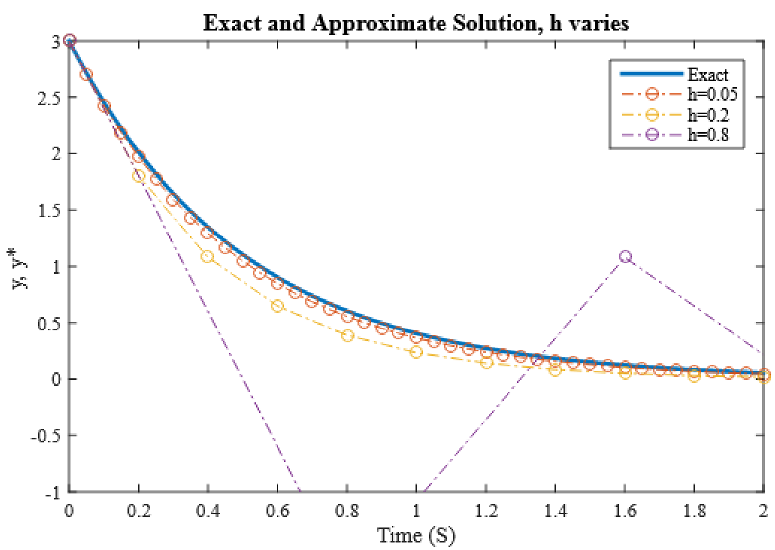
$y'(t_0) = -2y(t_0)$	expression for derivative at $t = t_0$
$k_1 = -2y^*(t_0)$	approximate derivative at $t = t_0$
$y_1\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) = y^*(t_0) + k_1\frac{h}{2}$	intermediate estimate of function at $t = t_0 + h/2$
$k_2 = -2y_1\left(t_0 + \frac{h}{2}\right)$	estimate of slope at $t = t_0 + h/2$
$y(t_0 + h) = y(t_0) + y'(t_0)h + y''(0)\frac{h^2}{2} + \cdots$	Taylor Series around $t = t_0$
$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + y'(t_0)h$	Truncated Taylor Series
$y^*(t_0 + h) = y(t_0) + k_2 h$	estimate of $y(t_0 + h)$

Métodos de diferenças finitas.

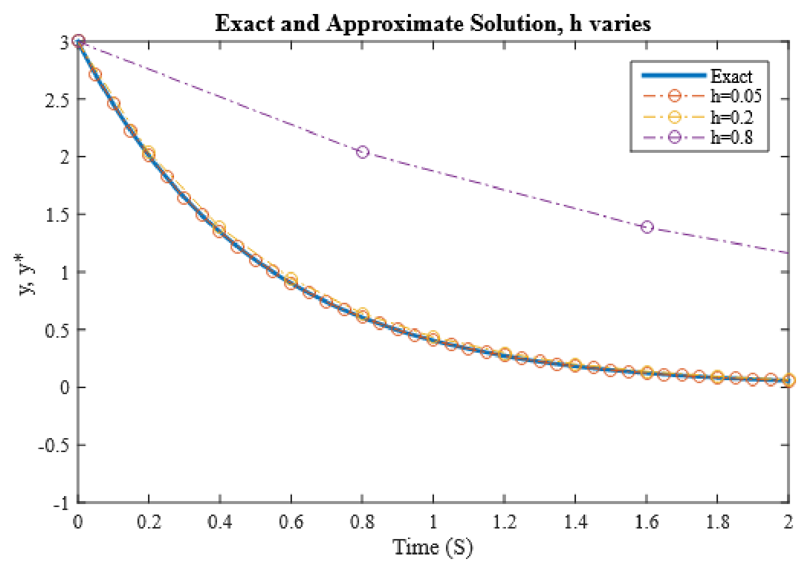
Second Order Runge-Kutta method

Observe que valores maiores de h resultam em aproximações piores, mas que as soluções são muito melhores do que aquelas obtidas com Runge-Kutta de Primeira Ordem para o mesmo valor de h.

RK1



RK2



Second Order Runge-Kutta method

Conceito-chave: Algoritmo Runge-Kutta de segunda ordem (ponto médio)

para progredir de um ponto em $t = t_0$, $y^*(t_0)$, em um intervalo de tempo, h, siga estas etapas (repetitivamente).

$$k_1 = f(y^*(t_0),\ t_0) \qquad \text{estimate of derivative at } t = t_0$$

$$y_1\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) = y^*(t_0) + k_1\frac{h}{2} \qquad \text{intermediate estimate of function at } t = t_0 + \frac{h}{2}$$

$$k_2 = f\left(y_1\left(t_0 + \frac{h}{2}\right),\ t_0 + \frac{h}{2}\right) \qquad \text{estimate of slope at } t = t_0 + \frac{h}{2}$$

$$y^*\left(t_0 + h\right) = y^*(t_0) + k_2 h \qquad \text{estimate of } y\left(t_0 + h\right)$$

Notas:
Um valor inicial da função deve ser fornecido para iniciar o algoritmo. isso é frequentemente chamado de algoritmo de "**ponto médio**" para **Runge-Kutta de segunda ordem** porque usa a inclinação no ponto médio, k_2.

Fourth Order Runge-Kutta method

desejamos aproximar a solução de uma equação diferencial de primeira ordem dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \qquad \text{with } y(t_0) = y_0$$

O desenvolvimento do método Runge-Kutta de Quarta Ordem **segue de perto o da Segunda Ordem,**

Tal como acontece com a técnica de segunda ordem, **existem muitas variações do método de quarta ordem**, e todas elas usam quatro aproximações para a inclinação

Fourth Order Runge-Kutta method

Usaremos as seguintes aproximações de inclinação para estimar a inclinação em algum momento t_0 (assumindo que temos apenas uma aproximação para $y(t_0)$ (que chamamos de $y^*(t_0)$).

$$\frac{y^*(h) - y(0)}{h} = ?$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x} = k_w = f(y,t)$$

$$k_1 = f(y^*(t_0), t_0)$$

$$k_2 = f\left(y^*(t_0) + k_1\frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y^*(t_0) + k_2\frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(y^*(t_0) + k_3 h, t_0 + h\right)$$

Fourth Order Runge-Kutta method

Cada uma dessas estimativas de inclinação pode ser descrita verbalmente.

k_1 é a inclinação no início do intervalo de tempo (é igual a k_1 nos métodos de primeira e segunda ordem).

Se utilizarmos o declive k_1 para percorrer metade do intervalo de tempo, então k_2 é uma estimativa do declive no ponto médio. É igual ao declive, k_2 , do método do ponto médio de segunda ordem. Esta inclinação provou ser mais precisa que k_1 para fazer novas aproximações para $\boldsymbol{y(t)}$.

Se utilizarmos o declive k_2 para percorrer metade do intervalo de tempo, então , $\boldsymbol{k_3}$ é outra estimativa do declive no ponto médio.

Finalmente, utilizamos o declive, $\boldsymbol{k_3}$, para percorrer todo o intervalo de tempo (até $t_0 + h$), e k_4 é uma estimativa do declive no ponto final.

Fourth Order Runge-Kutta method

Em seguida, usamos uma soma ponderada dessas inclinações para obter nossa estimativa final de $y^*(t_0 + h)$

$$y^*(t_0+h) = y^*(t_0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h = y^*(t_0) + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right) h$$

$$= y^*(t_0) + mh \qquad \text{where } m \text{ is a weighted average slope approximation}$$

Métodos de diferenças finitas.

Fourth Order Runge-Kutta method

condição inicial definida como $y(0) = 3$. Para ir do valor inicial em $t = 0$ até uma estimativa em $t = h$, siga o procedimento descrito abaixo

$$y'(0) = -2y(0)$$

$$k_1 = -2y(0)$$

$$y(t) = 3e^{-2t}, t \geq 0$$

$$y_1\left(\frac{h}{2}\right) = y^*(0) + k_1\frac{h}{2}$$

$$y^*(h) = y(0) + k_1 h$$

$$k_2 = -2y_1\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$y_2\left(\frac{h}{2}\right) = y^*(0) + k_2\frac{h}{2}$$

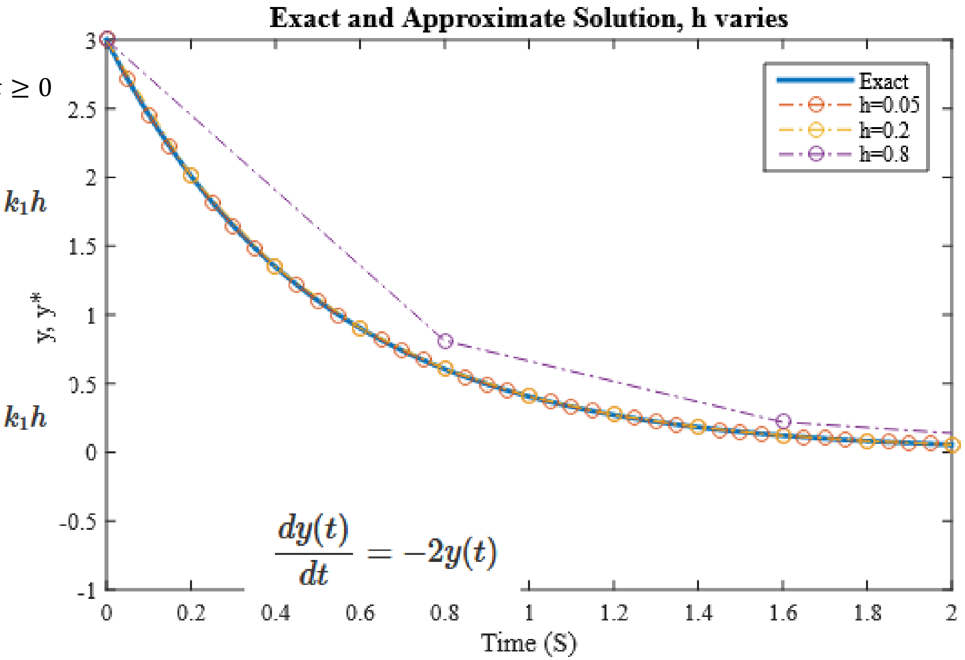
$$y^*(h) = y(0) + k_1 h$$

$$k_3 = -2y_2\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$y_3(h) = y^*(0) + k_3 h$$

$$k_4 = -2y_3(h)$$

$$y^*(h) = y(0) + k_1 h$$



$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t)$$

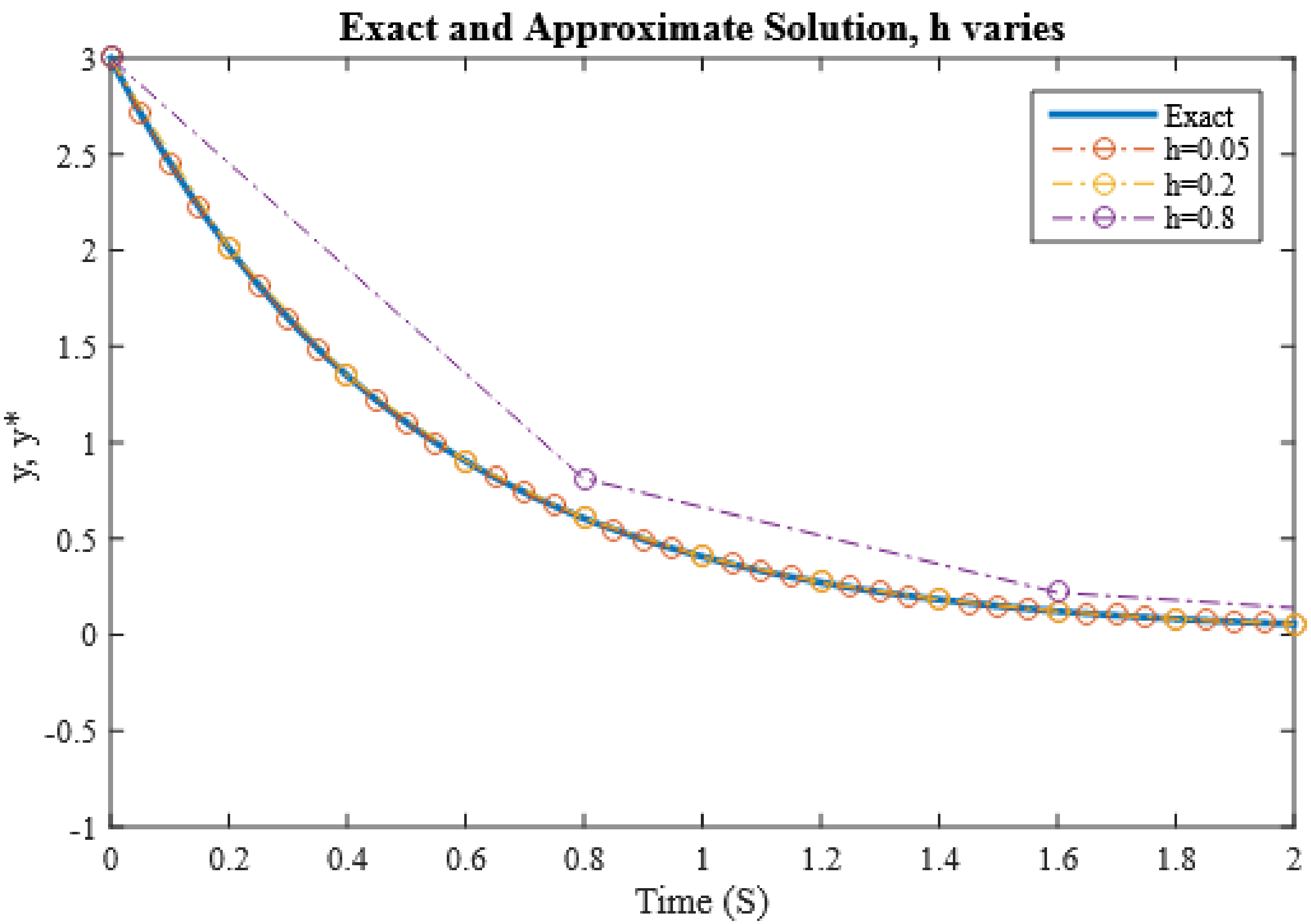
$$y^*(h) = y(0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}h \quad \text{estimate of } y(h)$$

$$\frac{y^*(h) - y(0)}{h} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C * \frac{\partial y}{\partial x} = k_w$$

Fourth Order Runge-Kutta method

condição inicial definida como $y(0) = 3$. Para ir do valor inicial em $t = 0$ até uma estimativa em $t = h$, siga o procedimento descrito abaixo



Exercicos:

Implemente o esquema

6th Order Runge-Kutta method

Comparar com o esquema de 2th 4 th ordem