3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquemas implícitos

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- **Com os esquemas de diferenças finitas propostos acima, o termo de advecção é avaliado no passo de tempo $\Delta\tau$.**

Desta forma, a variável no intervalo de tempo $\tau + 1$ pode ser prevista explicitamente por aqueles no intervalo de tempo $\Delta\tau$. Assim, esses esquemas são chamados de esquemas explícitos.

No entanto, o critério de estabilidade CFL impõe uma restrição severa no intervalo de tempo $\Delta\tau$ com um aumento no tempo computacional.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- **Essa restrição pode ser relaxada avaliando o termo de advecção no intervalo de tempo $\tau + 1$.**

Por exemplo, vamos considerar o método implícito de Euler (por exemplo, ver Tannehill et al., 1997).

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} = 0 \qquad 12.4.1$$

Na aproximação acima, a diferença direta (forward) é aplicada à derivada no tempo, enquanto a diferença centrada de 2ª ordem é aplicada à derivada espacial no intervalo de tempo $\tau + 1$. Para resolver u no passo de tempo $\tau + 1$, movemos todos eles para o lado esquerdo

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau} = c\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}\right)$$

$$u_i^{\tau+1} - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}\right) = u_i^{\tau}$$

$$u_i^{\tau+1} + \left(-c\frac{\Delta t}{2\Delta x}u_{i+1}^{\tau+1} + c\frac{\Delta t}{2\Delta x}u_{i-1}^{\tau+1}\right) = u_i^{\tau}$$

$$c\frac{\Delta t}{2\Delta x}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - c\frac{\Delta t}{2\Delta x}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau}$$

$$C = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad onde\ i = 1,2,3,4, \dots, N \qquad 12.4.2$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad onde\ i = 1,2,3,4,\dots,N \qquad 12.4.2$$

Assim, não se pode resolver a equação para um ponto geral $u_i^{\tau+1}$, sozinho. Em vez disso, temos que resolver o sistema de equações algébricas, conforme mostrado na Fig. 12.8, simultaneamente.

$$\frac{C}{2}u_N^{\tau+1} + u_1^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_2^{\tau+1} = u_1^{\tau} \quad onde\ i = 1$$

$$\frac{C}{2}u_1^{\tau+1} + u_2^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_3^{\tau+1} = u_2^{\tau} \quad onde\ i = 2$$

$$\frac{C}{2}u_2^{\tau+1} + u_3^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_4^{\tau+1} = u_3^{\tau} \quad onde\ i = 3$$

$$\frac{C}{2}u_{N-1}^{\tau+1} + u_N^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_1^{\tau+1} = u_N^{\tau} \quad onde\ i = N$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad onde\ i = 1,2,3,4,\dots,N \qquad 12.4.2$$

$$\begin{pmatrix}
1 & -\frac{C}{2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{C}{2} & 1\ -\frac{C}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{C}{2} & 1\ -\frac{C}{2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \frac{C}{2} & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1^{\tau+1} \\ u_2^{\tau+1} \\ u_3^{\tau+1} \\ u_4^{\tau+1} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{\tau+1} \\ u_{N-2}^{\tau+1} \\ u_{N-1}^{\tau+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
u_1^{\tau} \\ u_2^{\tau} \\ u_3^{\tau} \\ u_4^{\tau} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{\tau} \\ u_{N-2}^{\tau} \\ u_{N-1}^{\tau}
\end{pmatrix}$$

Fig. 12.8: O sistema de equações algébricas de (12.4.2) para o método implícito de Euler com condições de contorno,

$$\mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = u_1^{\tau+1} = 0$$

$$u\big((N-1),\Delta x,t\big) = u_N^{\tau+1} = 0.$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad onde\ i = 1,2,3,4, \dots, N \qquad 12.4.2$$

Em geral, pode-se introduzir um fator de ponderação α e substituir (12.4.2) por

$$\frac{\alpha C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = \frac{(1-\alpha)C}{2}u_{i-1}^{\tau} + u_i^{\tau} - \frac{(1-\alpha)C}{2}u_{i+1}^{\tau}\ onde\ i = 1,2,3,4, \dots, N \qquad 12.4.3$$

Se $\alpha = 0$, a fórmula acima se reduz ao esquema explícito completo, ou seja, o esquema avançado no tempo e centrado no espaço, Eq. (12.3.6).

Se $\alpha = 1$, o esquema implícito de Euler, (12.4.2) é recuperado.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1}+u_i^{\tau+1}-\frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1}=u_i^{\tau} \quad onde\ i=1,2,3,4,\dots,N \qquad 12.4.2$$

Para descobrir a estabilidade computacional, substituímos a Eq. (12.3.8) na Eq. (12.4.2) para obter

$$u(x,t)=u(n\Delta x,\tau\Delta t)=\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x-\omega\tau\Delta t)} \qquad \textbf{12.3.8}$$

Substituindo (12.3.8) na equação de diferenças finitas, (12.4.1), resulta

$$\frac{u_i^{\tau+1}-u_i^{\tau}}{\Delta t}-c\frac{u_{i+1}^{\tau+1}-u_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x}=0 \qquad 12.4.1$$

$$\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x-\omega\tau\Delta t)}}{\Delta t}-c\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x-\omega\tau\Delta t)}}{\Delta t}-c\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x-\omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

$$\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}}{\Delta t}-c\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x)}e^{i(\omega(\tau+1)\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x)}e^{i(\omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

$$\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}\frac{e^{i(\omega)\Delta t)}-1}{\Delta t}-c\frac{\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega\Delta t)}-\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

$$\hat{u}(k,\omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}\frac{e^{i(\omega)\Delta t)}-1}{\Delta t}-c\hat{u}(k,\omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}\frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}-e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

$$\frac{e^{i(\omega)\Delta t)}-1}{\Delta t}-c\frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}-e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x}=0$$

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t)}-1\right)=c\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}-e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t}-1\right)=c\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}-e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2}$$

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t}-1\right)=c\frac{\Delta t}{\Delta x}e^{i(\omega\Delta t)}\frac{e^{-i(k\Delta x)}-e^{i(k\Delta x)}}{2}$$

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t}-1\right)=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}ie^{i(\omega\Delta t)}\frac{e^{i(k\Delta x)}-e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t}-1\right)=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}ie^{i(\omega\Delta t)}sin(k\Delta x)$$

$$\frac{\left(e^{i(\omega)\Delta t}-1\right)}{e^{i(\omega\Delta t)}}=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}isin(k\Delta x)$$

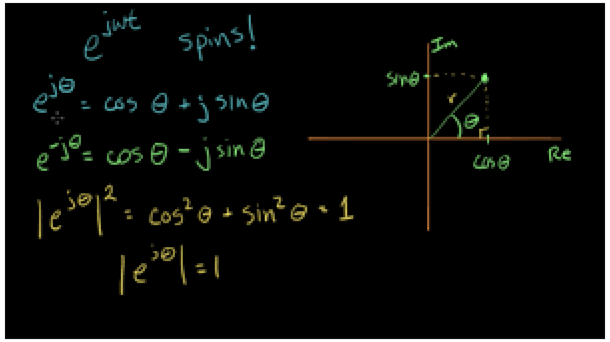
Multiplica pelo complexo conjugado

$$\left(1-e^{-i(\omega\Delta t)}\right)=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}isin(k\Delta x)$$

$$\left(1-e^{-i(\omega\Delta t)}\right)\left(1-e^{i(\omega\Delta t)}\right)=\left(-c\frac{\Delta t}{\Delta x}isin(k\Delta x)\right)\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}isin(k\Delta x)\right)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(1 - e^{-i(\omega\Delta t)}\right)\left(1 - e^{i(\omega\Delta t)}\right) = \left(-iCsin(k\Delta x)\right)\left(iCsin(k\Delta x)\right)$$



$$\left(1 - e^{i(\omega)\Delta t)} - e^{-i(\omega)\Delta t)} + e^{i^2(\omega\Delta t)^2}\right) = -i^2C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(1 - e^{i(\omega)\Delta t)} - e^{-i(\omega)\Delta t)} + e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(-e^{i(\omega)\Delta t)} - e^{-i(\omega)\Delta t)} + e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = -1 + C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$-\left(e^{i(\omega)\Delta t)} + e^{-i(\omega)\Delta t)} - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = -1 + C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(e^{i(\omega)\Delta t)} + e^{-i(\omega)\Delta t)} - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(2\frac{e^{i(\omega)\Delta t)} + e^{-i(\omega)\Delta t)}}{2} - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(2cos(\omega\Delta t) - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2sin^2(k\Delta x)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(2cos(\omega\Delta t) - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2 sin^2(k\Delta x)$$

$$cos(\omega\Delta t) = 1$$

$$\left(2 - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2 sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(-e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = -2 + 1 - C^2 sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 + C^2 sin^2(k\Delta x)$$

$$\lambda^{-2} = 1 + C^2 sin^2(k\Delta x)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + C^2 sin^2(k\Delta x)}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{1 + C^2 sin^2(k\Delta x)}}$$

A equação acima indica que o esquema implícito de Euler é incondicionalmente estável, pois o lado direito é sempre menor que 1.

Em geral, o uso de um esquema implícito permite intervalos de tempo maiores do que o esquema explícito sem causar instabilidade linear.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para inverter a matriz, podem ser aplicados métodos diretos ou iterativos. Os métodos diretos incluem o método de eliminação Gaussiana, decomposição LU, etc. Os métodos iterativos incluem o método de Jacobi, método de Gauss-Seidel, método de relaxamento, etc.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Às vezes, um esquema semi-implícito é adotado, nos termos das equações de movimento que são os principais responsáveis pela propagação das ondas gravitacionais são tratados de forma totalmente implícita, enquanto outros termos são tratados explicitamente (por exemplo, Kwizak e Robert, 1971) .

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Um esquema semi-implícito simples adotado na modelagem do fluxo de fluido geofísico é o esquema semi-implícito trapezoidal.

Por exemplo, a equação do momento linear horizontal em águas rasas na direção x, ou seja, a Eq. (4.4.21),

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + g\frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

pode ser discretizado pelo esquema semi-implícito trapezoidal como

$$\left(\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t}\right) + U\left(\frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right) + \frac{g}{2}\left[\left(\frac{h_{i+1}^{\tau} - h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right) + \left(\frac{h_{i+1}^{\tau+1} - h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x}\right)\right] = 0. \quad (12.4.5)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(\frac{u_i^{\tau+1}-u_i^{\tau}}{\Delta t}\right)+U\left(\frac{u_{i+1}^{\tau}-u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right)+\frac{g}{2}\left[\left(\frac{h_{i+1}^{\tau}-h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right)+\left(\frac{h_{i+1}^{\tau+1}-h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x}\right)\right]=0\,. \quad (12.4.5)$$

Os primos (‘) foram ignorados na equação acima.

Observe que o termo de advecção é tratado de maneira explícita e a derivada espacial é centrada no passo de tempo $\tau+\frac{1}{2}$ calculando a média dos valores nos passos de tempo τ e $\tau+\frac{1}{2}$.

Também pode ser mostrado que o esquema implícito trapezoidal é incondicionalmente estável (Mesinger e Arakawa, 1976).

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(\frac{u_i^{\tau+1}-u_i^{\tau}}{\Delta t}\right)+U\left(\frac{u_{i+1}^{\tau}-u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right)+\frac{g}{2}\left[\left(\frac{h_{i+1}^{\tau}-h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x}\right)+\left(\frac{h_{i+1}^{\tau+1}-h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x}\right)\right]=0. \quad (12.4.5)$$

Os primos (‘) foram ignorados na equação acima.

A desvantagem deste esquema é que ele tem um sério erro de fase não apenas para ondas curtas como no esquema de diferença no tempo leapfrog, mas também para número de Courant relativamente grande (Haltiner e Williams, 1980).

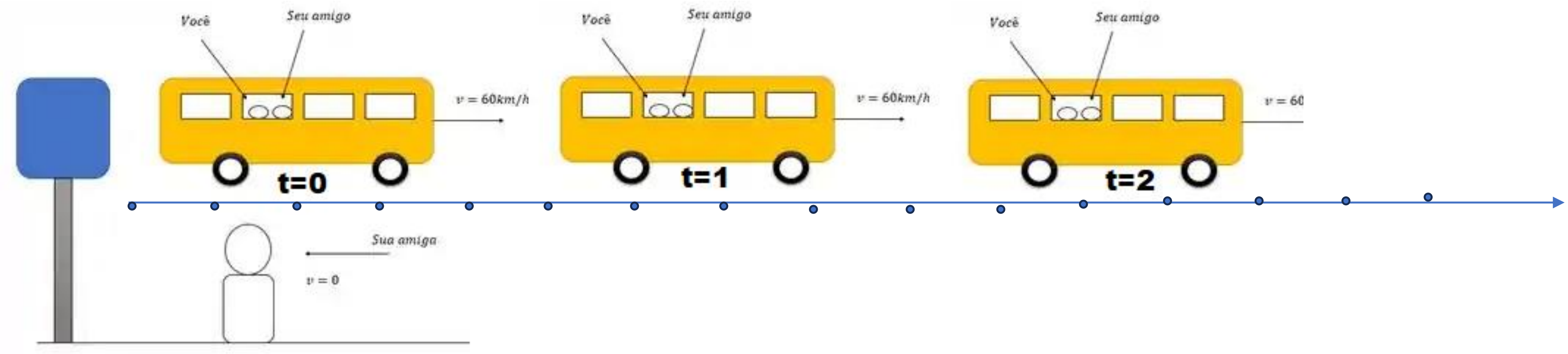
3.5 Semi-Lagrangian Methods

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A equação de advecção no ***sistema euleriano*** é integrada, de modo que seja necessário discretizar a taxa de variação local ($\frac{\partial u}{\partial t}$) e os termos de advecção (por exemplo, $u\frac{\partial u}{\partial x}$) separadamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow aceleração\ local\ aplicada\ ao\ corpo$$

$u\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow cisalhamento\ com\ o\ solo$; a aceleração devido a inercia aplicada ao corpo



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Idealmente, a equação de advecção pode ser integrada seguindo as partículas do fluido de ***maneira lagrangiana*** ($\frac{du}{dt}$) , de modo que não seja necessário discretizar a taxa de variação local ($\frac{\partial u}{\partial t}$) e os termos de advecção (por exemplo, $u\frac{\partial u}{\partial x}$) separadamente.

$$\frac{du}{dt} \Rightarrow aceleração\ total\ aplicada\ ao\ corpo$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

De fato, Fjortoft (1952) propôs um método gráfico para resolver a equação de vorticidade barotrópica usando um único passo de tempo de 24h, seguindo um conjunto de partículas de fluido, ou digamos, adotando uma abordagem lagrangiana.

Welander (1955) apontou que, em geral, um conjunto de partículas de fluido, que são inicialmente distribuídas regularmente no tempo inicial, logo se tornará muito deformado e, portanto, inadequado para a integração numérica.

Para evitar a dificuldade acima, Wiin-Nielson (1959) introduziu uma abordagem semi-Lagrangiana (ocasionalmente referida como quase-Lagrangiana).

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Em uma abordagem semi-Lagrangiana, um conjunto de partículas que chegam a um conjunto regular de pontos da grade é rastreado para trás em um único intervalo de tempo até seus pontos de partida.

Os valores das grandezas dinâmicas nos pontos de partida são obtidos por interpolação dos pontos vizinhos da grade onde seus valores são conhecidos.

Observe que neste método semi-Lagrangiano, o conjunto de partículas do fluido em questão muda a cada passo de tempo, o que é diferente do método Lagrangiano, como o utilizado por Fjortoft (1952).

Robert (1981) mostrou que o uso do esquema semi-implícito semi-Lagrangiano oferece vantagens significativas sobre a abordagem puramente Euleriana para NWP.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para demonstrar o método semi-Lagrangeano, podemos considerar a equação de advecção não linear unidimensional na forma de derivada total,

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}$$

onde ψ é qualquer variável considerada.

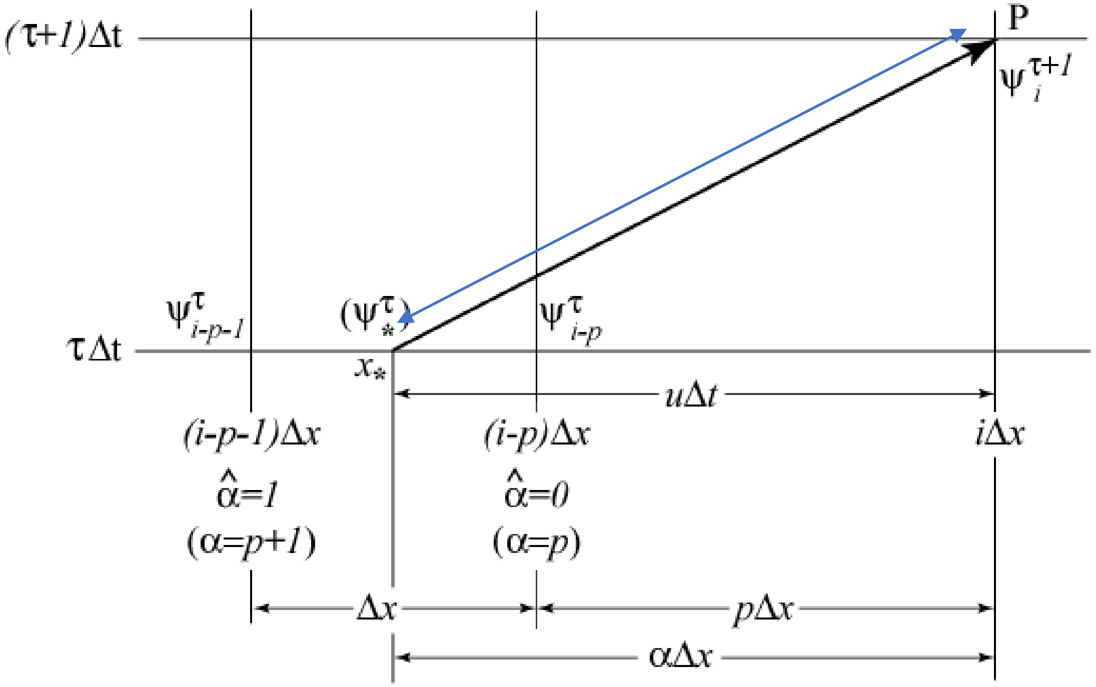


Fig. 12.9: Um esquema do método semi-Lagrangeano.

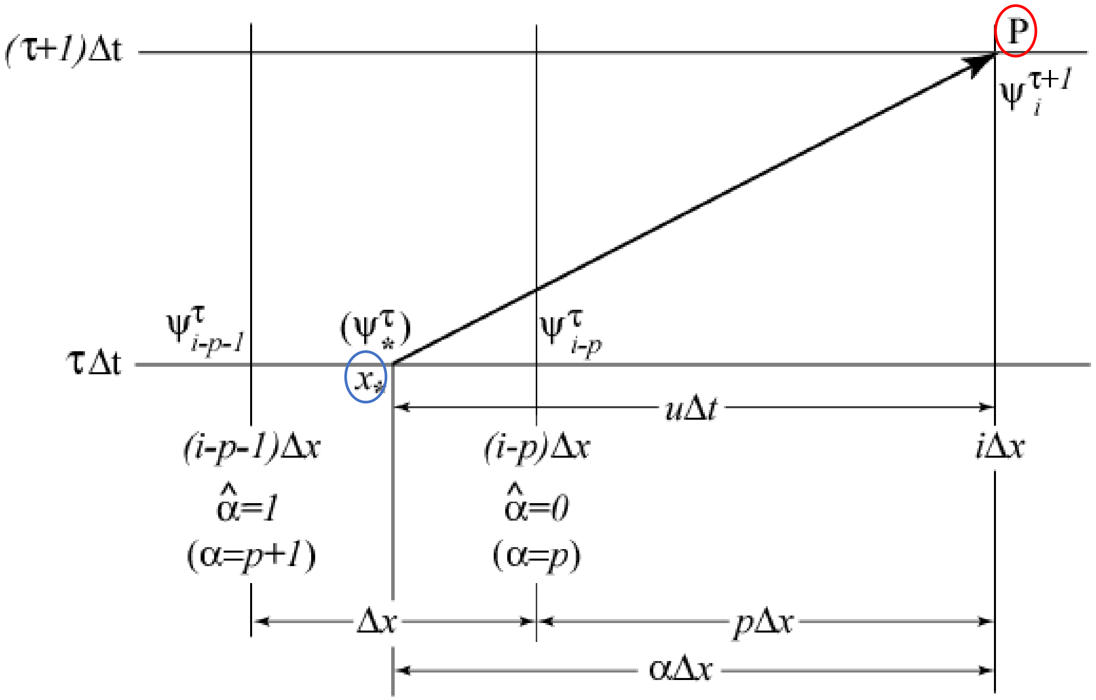
3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Integrando a trajetória de uma partícula de fluido que chega a um ponto de grade $i\Delta x$ e no tempo $((\tau+1)\Delta t)$, *definido como P* na Fig. 12.9, temos

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_*^{\tau} \quad 12.5.2$$

onde ψ_*^{τ} é o valor de ψ no ponto de partida da partícula no tempo $(\tau)\Delta t$ .e

Observe que ψ_*^{τ} é obtido por interpolação polinomial dos pontos vizinhos de grade.



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

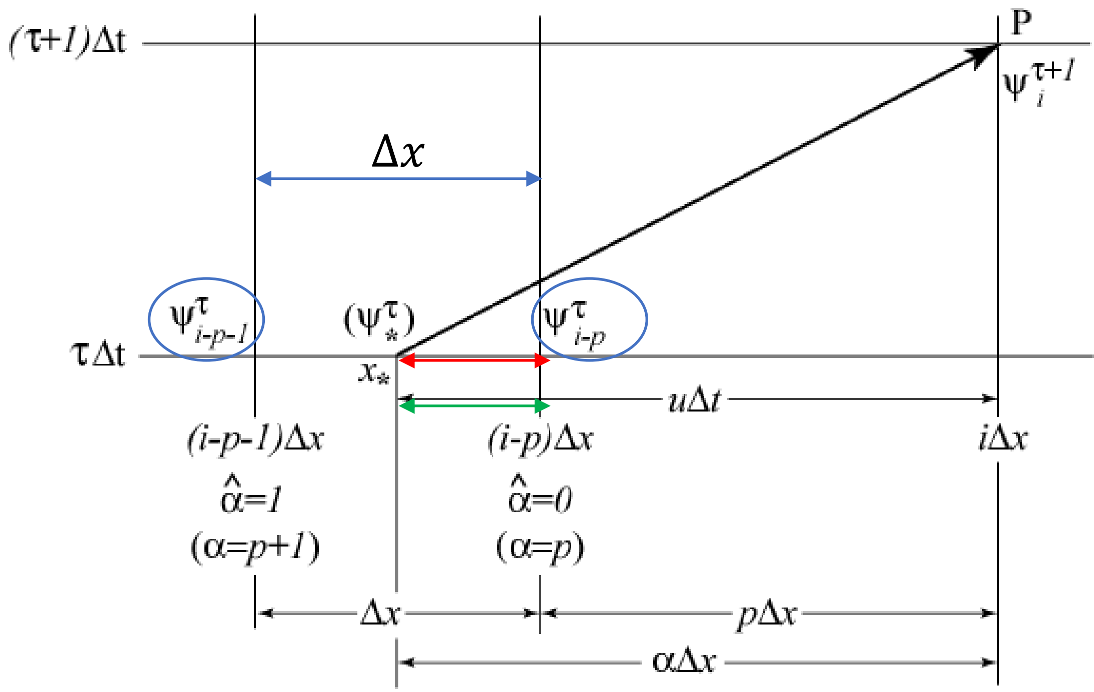
A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.

Por exemplo, podemos considerar a interpolação linear dos pontos de grade circundantes $(i-p)$ e $(i-p-1)$ para ψ_*^τ,

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \qquad \psi_i^{\tau+1} = \psi_*^\tau \qquad 12.5.2$$

$$\frac{\psi_{i-p}^\tau - \psi_*^\tau}{u\Delta t - p\Delta x} = \frac{\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau}{\Delta x} \qquad 12.5.3$$

$$\psi_{i-p}^\tau - \psi_*^\tau = \frac{u\Delta t - p\Delta x}{\Delta x}\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right) \qquad 12.5.3$$



onde u é a velocidade de advecção representada na Eq. (12.5.1). A equação acima pode ser rearranjada para ser

$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} - p\right)\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.

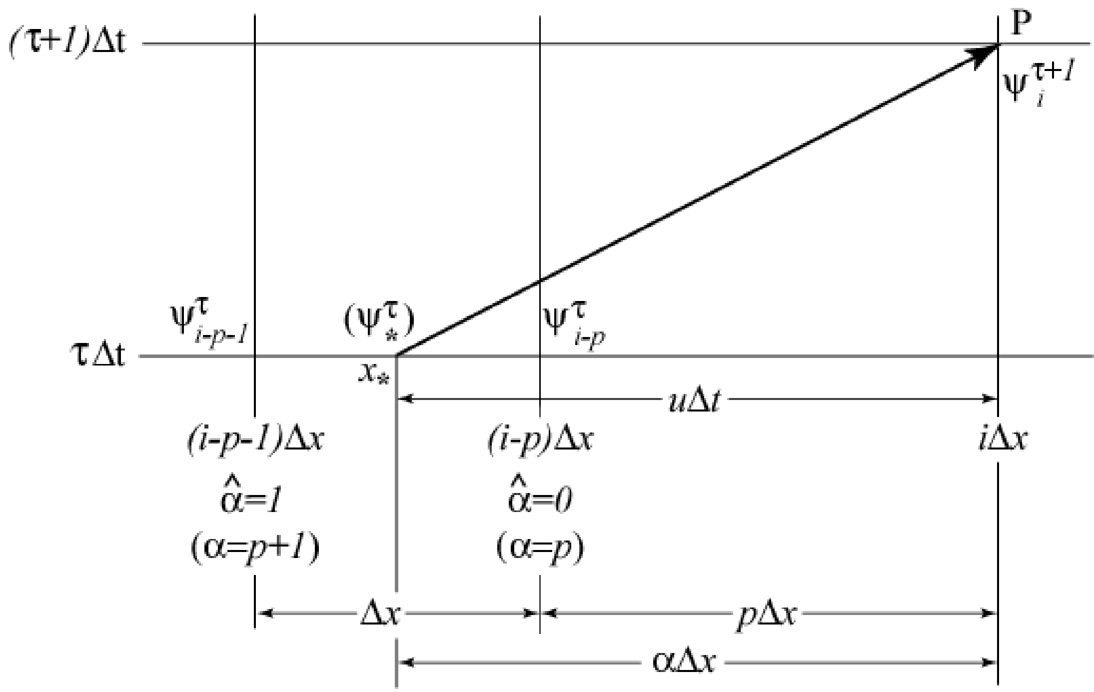
Por exemplo, podemos considerar a interpolação linear dos pontos de grade circundantes $(i-p)$ e $(i-p-1)$ para ψ_*^τ,

$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} - p\right)\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right)$$

$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right) \qquad 12.5.5$$

onde

$$\hat{\alpha} = \alpha - p \qquad \text{onde} \quad \alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \qquad 12.5.6$$



Portanto, de (12.5.2) temos

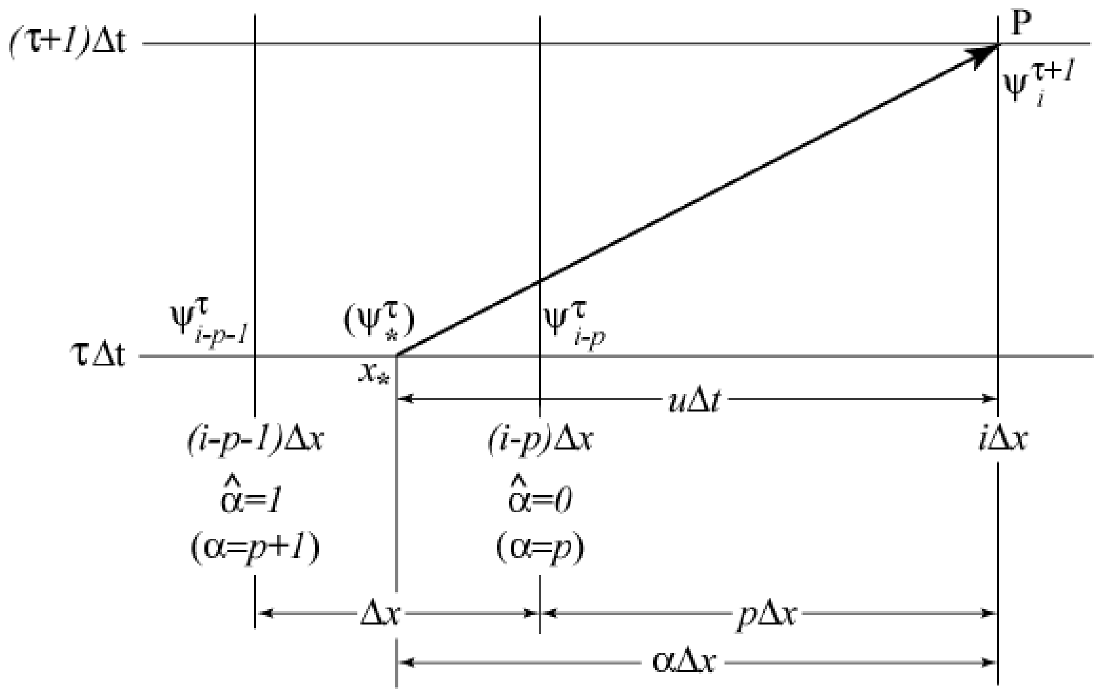
$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.

Por exemplo, podemos considerar a interpolação linear dos pontos de grade circundantes $(i-p)$ e $(i-p-1)$ para ψ_*^τ,

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right) \qquad 12.5.7$$



De acordo com a Eq. (12.5.6) e Fig. (12.9), $\hat{\alpha}$ é a parte fracionária e p **é a parte inteira após a advecção de uma distância adimensional** $\alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.

Para examinar se o método semi-Lagrangiano é **computacionalmente estável ou não**, podemos assumir novamente uma solução semelhante a uma onda,

$$\psi_i^\tau = \hat{\psi} e^{-i\omega_r \tau \Delta t} e^{-ikn\Delta x} \lambda^\tau \qquad 12.5.8$$

Substituindo na Eq. (12.5.7)

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}\left(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau\right) \qquad 12.5.7$$

$$\lambda^2 = 1 - 2\hat{\alpha}(1-\hat{\alpha})(1-\cos(k\Delta x)) \qquad \lambda \equiv e^{\omega_i \Delta t} \; 12.5.9$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.

Assim, para termos uma solução computacionalmente estável ($|\lambda| \leq 1$), precisamos

$$0 \leq \hat{\alpha} \leq 1. \qquad (12.5.10)$$

{Note that $\hat{\alpha} = \alpha - p$, $\alpha = u\Delta t / \Delta x$. (12.5.6) and Fig. 12.9.}

Ou seja, os pontos de partida devem estar dentro do intervalo de interpolação $(i-p-1)$, $(i-p)$.

A escolha da partida é baseada apenas nesta condição. Portanto, o esquema semi-Lagrangiano é incondicionalmente estável.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

método semi-implícito Semi-Lagrangiano

O método semi-implícito pode ser incorporado na integração considerando os outros termos (Robert 1982), como o termo da força do gradiente de pressão na equação do momento, como médias de tempo ao longo da trajetória, enquanto a derivada do tempo total é avaliada por leapfrog, ou outros esquemas de diferença de tempo.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para elucidar isso, vamos considerar o seguindo Boussinesq, equação do momento horizontal,

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad 12.5.11$$

A derivada total da equação acima pode ser aproximada pelo esquema de avanço no tempo,

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x-a,t)}{\Delta t}0 \qquad 12.5.12$$

$$a = u(x-a,t)\Delta t \qquad 12.5.13$$

A equação acima pode ser resolvida usando um método iterativo para obter o deslocamento a montante ou o ponto de partida, a.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Podemos aplicar a aproximação semi-implícita aos outros termos do lado esquerdo da Eq. (12.5.11)

$$\psi_{av}^{t} = \frac{\psi(x,t+\Delta t)+\psi(x-a,t)}{2} \qquad 12.5.12$$

onde o subscrito av denota a média de tempo.

Então, a equação do momento horizontal pode ser aproximada pelo esquema semi-implícito semi-Lagrangeano,

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x-a,t)}{\Delta t} - f v_{av}^{t} + \left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{av}^{t} = 0 \qquad 12.5.15$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A equação acima também pode ser reescrita como

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x-a,t)}{\Delta t} - f v_{av}^{t} + \left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{av}^{t} = 0 \qquad 12.5.15$$

$$\left([u]_x^{t+\Delta t} - [u]_{x-a}^{t}\right) - \frac{f\Delta t}{2}\left([v]_x^{t+\Delta t} + [v]_{x-a}^{t}\right) + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left(\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_x^{t+\Delta t} + \left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{x-a}^{t}\right) = 0 \qquad 12.5.16$$

Mover todos os termos no tempo $t + \Delta t$ para o lado esquerdo fornece a seguinte forma do método semi-lagrangeano semi-implícito

$$\left([u]_x^{t+\Delta t}\right) - \frac{f\Delta t}{2}\left([v]_x^{t+\Delta t}\right) + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left(\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_x^{t+\Delta t}\right) = [u]_{x-a}^{t} + \frac{f\Delta t}{2}\left([v]_{x-a}^{t}\right) - + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left(\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{x-a}^{t}\right) \qquad 12.5.17$$

$$[u]_x^{t+\Delta t} - \frac{f\Delta t}{2}[v]_x^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_x^{t+\Delta t} = [u]_{x-a}^{t} + \frac{f\Delta t}{2}[v]_{x-a}^{t} - + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{x-a}^{t} \qquad 12.5.17$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$[u]_x^{t+\Delta t} - \frac{f\Delta t}{2}[v]_x^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_x^{t+\Delta t} = [u]_{x-a}^{t} + \frac{f\Delta t}{2}[v]_{x-a}^{t} - + \frac{\Delta t}{2\rho_0}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{x-a}^{t} \qquad 12.5.17$$

Isso formará um conjunto de equações algébricas lineares, que podem ser escritas em forma de matriz.

Assim, um método para inverter a matriz, como o método de eliminação gaussiana ou o método Gauss-Seidel, é necessário para obter a solução para o intervalo de tempo $t + \Delta t$.

Observe que a vantagem do **esquema semi-implícito semi-Lagrangiano** é que ele é **incondicionalmente estável**, de modo que um **passo de tempo** relativamente **grande** pode ser usado.

A desvantagem deste esquema é que o método iterativo para encontrar os pontos de partida e o método para inverter a matriz são demorados.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the first derivatives:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \qquad \text{(forward difference)}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \qquad \text{(2}^{\text{nd}}\text{-order centered difference)}$$

$$f'(x) = \frac{-f(x+2\Delta x) + 4f(x+\Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$f'(x) = \frac{-f(x+2\Delta x) + 8f(x+\Delta x) - 8f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4).$$

(4th-order centered difference)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the second derivatives:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \qquad \text{(forward difference)}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \qquad \text{(2}^{\text{nd}}\text{-order centered difference)}$$

$$f''(x) = \frac{-f(x+3\Delta x) + 4f(x+2\Delta x) - 5f(x+\Delta x) + 2f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$f''(x) = \frac{-f(x+2\Delta x) + 16f(x+\Delta x) - 30f(x) + 16f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4).$$

(4$^{\text{th}}$-order centered difference)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the third derivatives:

$$f'''(x) = \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3} + O(\Delta x),$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2).$$

(averaged differences)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the fourth derivatives:

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x+4\Delta x) - 4f(x+3\Delta x) + 6f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x),$$

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 4f(x+\Delta x) + 6f(x) - 4f(x-\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2).$$

(centered difference)