

## **3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas**

# **Esquemas implícitos**

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

□ Com os **esquemas de diferenças finitas propostos** acima, o termo de advecção é **avaliado no passo de tempo  $\Delta\tau$**  .

Desta forma, **a variável no intervalo de tempo  $\tau + 1$  pode ser prevista explicitamente** por aqueles no intervalo de tempo  $\Delta\tau$ . Assim, esses esquemas são **chamados de esquemas explícitos**.

No entanto, **o critério de estabilidade CFL impõe uma restrição severa no intervalo de tempo  $\Delta\tau$  com um aumento no tempo computacional**.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

□ Essa **restrição pode ser relaxada** avaliando o **termo de advecção no intervalo de tempo  $\tau + 1$** .

**Por exemplo, vamos considerar o método implícito de Euler (por exemplo, ver Tannehill et al., 1997).**

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} = 0 \quad 12.4.1$$

**Na aproximação acima, a diferença direta (forward) é aplicada à derivada no tempo, enquanto a diferença centrada de 2ª ordem é aplicada à derivada espacial no intervalo de tempo  $\tau + 1$ . Para resolver  $u$  no passo de tempo  $\tau + 1$ , movemos todos eles para o lado esquerdo**

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau} = c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1})$$

$$u_i^{\tau+1} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}) = u_i^{\tau}$$

$$u_i^{\tau+1} + \left( -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{\tau+1} + c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{\tau+1} \right) = u_i^{\tau}$$

$$c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau}$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\frac{C}{2} u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2} u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

Assim, não se pode resolver a equação para um ponto geral  $u_i^{\tau+1}$ , sozinho. Em vez disso, temos que resolver o sistema de equações algébricas, conforme mostrado na Fig. 12.8, simultaneamente.

$$\frac{C}{2}u_N^{\tau+1} + u_1^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_2^{\tau+1} = u_1^{\tau} \quad \text{onde } i = 1$$

$$\frac{C}{2}u_1^{\tau+1} + u_2^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_3^{\tau+1} = u_2^{\tau} \quad \text{onde } i = 2$$

$$\frac{C}{2}u_2^{\tau+1} + u_3^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_4^{\tau+1} = u_3^{\tau} \quad \text{onde } i = 3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{C}{2}u_{N-1}^{\tau+1} + u_N^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_1^{\tau+1} = u_N^{\tau} \quad \text{onde } i = N$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{C}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{C}{2} & 1 & -\frac{C}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{C}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\tau+1} \\ u_2^{\tau+1} \\ u_3^{\tau+1} \\ u_4^{\tau+1} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{\tau+1} \\ u_{N-2}^{\tau+1} \\ u_{N-1}^{\tau+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{\tau} \\ u_2^{\tau} \\ u_3^{\tau} \\ u_4^{\tau} \\ \vdots \\ u_{N-3}^{\tau} \\ u_{N-2}^{\tau} \\ u_{N-1}^{\tau} \end{pmatrix}$$

Fig. 12.8: O sistema de equações algébricas de (12.4.2) para o método implícito de Euler com condições de contorno,

$$u(0, t) = u_1^{\tau+1} = 0$$

$$u((N-1), \Delta x, t) = u_N^{\tau+1} = 0.$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

Multiplique por  $\alpha$

$$\frac{\alpha C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + \alpha u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = \alpha u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

Usando o método de Discretização explícito

$$u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1} = -\frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau} - \frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau}$$

Multiplique por  $(1 - \alpha)$

$$(1 - \alpha)u_i^{\tau+1} = -\frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i+1}^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i-1}^{\tau} + (1 - \alpha)u_i^{\tau}$$

Some a equação de Discretização implícita e a explícita

$$\frac{\alpha C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + \alpha u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} + (1 - \alpha)u_i^{\tau+1} = \alpha u_i^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i+1}^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i-1}^{\tau} + (1 - \alpha)u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

$$\frac{\alpha C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1}(\alpha + 1 - \alpha) - \frac{\alpha C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = (\alpha + 1 - \alpha)u_i^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i-1}^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2}u_{i+1}^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\alpha C}{2} u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1}(\alpha + 1 - \alpha) - \frac{\alpha C}{2} u_{i+1}^{\tau+1} = (\alpha + 1 - \alpha) u_i^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i-1}^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i+1}^{\tau} \text{ onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

$$\frac{\alpha C}{2} u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2} u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i-1}^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i+1}^{\tau} \text{ onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

Em geral, pode-se introduzir um fator de ponderação  $\alpha$  e substituir (12.4.2) por

$$\frac{\alpha C}{2} u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2} u_{i+1}^{\tau+1} = \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i-1}^{\tau} + u_i^{\tau} - \frac{(1 - \alpha)C}{2} u_{i+1}^{\tau} \text{ onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.3$$

Se  $\alpha = 0$ , a fórmula acima se reduz ao esquema explícito completo, ou seja, o esquema avançado no tempo e centrado no espaço, Eq. (12.3.6).

Se  $\alpha = 1$ , o esquema implícito de Euler, (12.4.2) é recuperado.



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

Em geral, pode-se introduzir um fator de ponderação  $\alpha$  e substituir (12.4.2) por

$$u_i^{\tau+1} + u_i^{\tau} = -\frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau} - \frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau} \quad 12.4.2$$

$$\frac{\alpha C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{\alpha C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = \frac{(1-\alpha)C}{2}u_{i-1}^{\tau} + u_i^{\tau} - \frac{(1-\alpha)C}{2}u_{i+1}^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.3$$

Se  $\alpha = 0$ , a fórmula acima se reduz ao esquema explícito completo, ou seja, o esquema avançado no tempo e centrado no espaço, Eq. (12.3.6).

Se  $\alpha = 1$ , o esquema implícito de Euler, (12.4.2) é recuperado.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{C}{2}u_{i-1}^{\tau+1} + u_i^{\tau+1} - \frac{C}{2}u_{i+1}^{\tau+1} = u_i^{\tau} \quad \text{onde } i = 1, 2, 3, 4, \dots, N \quad 12.4.2$$

Para descobrir a estabilidade computacional, substituímos a Eq. (12.3.8) na Eq. (12.4.2) para obter

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} \quad \mathbf{12.3.8}$$

**Substituindo (12.3.8) na equação de diferenças finitas, (12.4.1), resulta**

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} - c \frac{u_{i+1}^{\tau+1} - u_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} = 0 \quad 12.4.1$$

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{\Delta t} - c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{\Delta t} - c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega)\Delta t} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}}{\Delta t} - c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x)}e^{i(\omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x)}e^{i(\omega(\tau+1)\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)} \frac{e^{i(\omega)\Delta t} - 1}{\Delta t} - c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)} \frac{e^{i(\omega)\Delta t} - 1}{\Delta t} - c \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n)\Delta x)}e^{i(\omega\tau\Delta t)} \frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)} - e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{e^{i(\omega)\Delta t} - 1}{\Delta t} - c \frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)} - e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$(e^{i(\omega)\Delta t} - 1) = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{e^{-i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)} - e^{i(k\Delta x)}e^{i(\omega\Delta t)}}{2}$$

## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$(e^{i(\omega)\Delta t} - 1) = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{e^{-i(k\Delta x)} e^{i(\omega\Delta t)} - e^{i(k\Delta x)} e^{i(\omega\Delta t)}}{2}$$

$$(e^{i(\omega)\Delta t} - 1) = c \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{i(\omega\Delta t)} \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2}$$

$$(e^{i(\omega)\Delta t} - 1) = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} i e^{i(\omega\Delta t)} \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$(e^{i(\omega)\Delta t} - 1) = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} i e^{i(\omega\Delta t)} \sin(k\Delta x)$$

$$\frac{(e^{i(\omega)\Delta t} - 1)}{e^{i(\omega\Delta t)}} = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x)$$

Multiplica pelo complexo conjugado

$$(1 - e^{-i(\omega\Delta t)}) = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x)$$

$$(1 - e^{-i(\omega\Delta t)})(1 - e^{i(\omega\Delta t)}) = \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x)\right) \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x)\right)$$

## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$(1 - e^{-i(\omega\Delta t)})(1 - e^{i(\omega\Delta t)}) = (-iC\sin(k\Delta x))(iC\sin(k\Delta x))$$

$$(1 - e^{i(\omega)\Delta t} - e^{-i(\omega)\Delta t} + e^{i^2(\omega\Delta t)^2}) = -i^2C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$(1 - e^{i(\omega)\Delta t} - e^{-i(\omega)\Delta t} + e^{-(\omega\Delta t)^2}) = C^2\sin^2(k\Delta x)$$

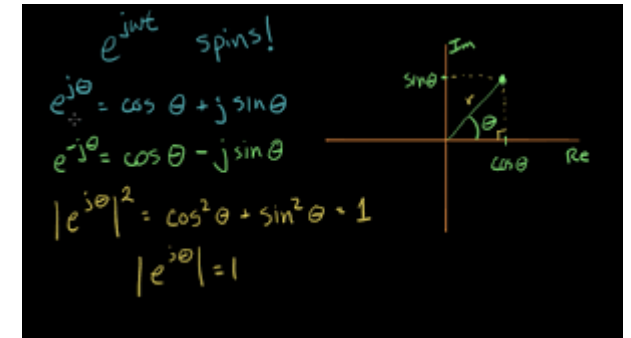
$$(-e^{i(\omega)\Delta t} - e^{-i(\omega)\Delta t} + e^{-(\omega\Delta t)^2}) = -1 + C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$-(e^{i(\omega)\Delta t} + e^{-i(\omega)\Delta t} - e^{-(\omega\Delta t)^2}) = -1 + C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$(e^{i(\omega)\Delta t} + e^{-i(\omega)\Delta t} - e^{-(\omega\Delta t)^2}) = 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(2\frac{e^{i(\omega)\Delta t} + e^{-i(\omega)\Delta t}}{2} - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$(2\cos(\omega\Delta t) - e^{-(\omega\Delta t)^2}) = 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$



## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left(2\cos(\omega\Delta t) - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\cos(\omega\Delta t) = 1$$

$$\left(2 - e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(-e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = -2 + 1 - C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\left(e^{-(\omega\Delta t)^2}\right) = 1 + C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\lambda^{-2} = 1 + C^2\sin^2(k\Delta x)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + C^2\sin^2(k\Delta x)}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{1 + C^2\sin^2(k\Delta x)}}$$

A equação acima indica que o esquema implícito de Euler **é incondicionalmente estável**, pois o lado direito é sempre menor que 1.

Em geral, o uso de um esquema implícito permite **intervalos de tempo maiores do que o esquema explícito** sem causar instabilidade linear.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para inverter a matriz, podem ser aplicados métodos diretos ou iterativos. Os **métodos diretos** incluem o método de **eliminação Gaussiana, decomposição LU**, etc. Os **métodos iterativos** incluem o **método de Jacobi, método de Gauss-Seidel, método de relaxamento**, etc.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Às vezes, um **esquema semi-implícito é adotado**, nos termos das equações de movimento que **são os principais responsáveis pela propagação das ondas gravitacionais** são **tratados de forma totalmente implícita**, enquanto outros termos são tratados explicitamente (por exemplo, Kwizak e Robert, 1971) .



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Um **esquema semi-implícito simples** adotado na modelagem do fluxo de fluido geofísico é o esquema semi-implícito trapezoidal.

Por exemplo, a equação do momento linear horizontal em águas rasas na direção  $x$ , ou seja, a Eq. (4.4.21),

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x}$$

pode ser discretizado pelo esquema semi-implícito trapezoidal como

$$\left( \frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} \right) + U \left( \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \frac{g}{2} \left[ \left( \frac{h_{i+1}^{\tau} - h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{h_{i+1}^{\tau+1} - h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} \right) \right] = 0. \quad (12.4.5)$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left( \frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} \right) + U \left( \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \frac{g}{2} \left[ \left( \frac{h_{i+1}^{\tau} - h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{h_{i+1}^{\tau+1} - h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} \right) \right] = 0. \quad (12.4.5)$$

Os primos (') foram ignorados na equação acima.

Observe que o termo de **advecção é tratado de maneira explícita** e a **derivada espacial é centrada** no passo de tempo  $\tau + \frac{1}{2}$  calculando a média dos valores nos passos de tempo  $\tau$  e  $\tau + \frac{1}{2}$ .

Também pode ser mostrado que o **esquema implícito trapezoidal é incondicionalmente estável** (Mesinger e Arakawa, 1976).

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\left( \frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} \right) + U \left( \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \frac{g}{2} \left[ \left( \frac{h_{i+1}^{\tau} - h_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{h_{i+1}^{\tau+1} - h_{i-1}^{\tau+1}}{2\Delta x} \right) \right] = 0. \quad (12.4.5)$$

Os primos (') foram ignorados na equação acima.

**A desvantagem deste esquema é que ele tem um sério erro de fase não apenas para ondas curtas como no esquema de diferença no tempo leapfrog, mas também para número de Courant relativamente grande (Haltiner e Williams, 1980).**

## **3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas**

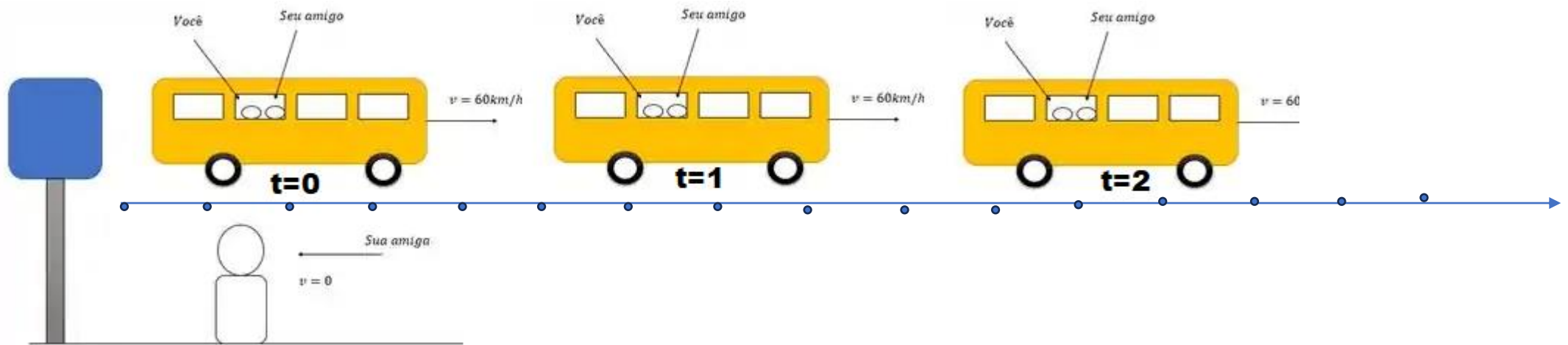
## **3.5 Semi-Lagrangian Methods**

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A **equação de advecção** no **sistema euleriano** é **integrada**, de modo que seja necessário discretizar a taxa de variação local ( $\frac{\partial u}{\partial t}$ ) e os termos de advecção (por exemplo,  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ) separadamente.

$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow$  *aceleração local aplicada ao corpo*

$u \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$  *cisalhamento com o solo; a aceleração devido a inercia aplicada ao corpo*



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Idealmente, a **equação de advecção** pode ser **integrada** seguindo as partículas do fluido de **maneira lagrangiana** ( $\frac{du}{dt}$ ), de modo que não seja necessário discretizar a taxa de variação local ( $\frac{\partial u}{\partial t}$ ) e os termos de advecção (por exemplo,  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ) separadamente.

$$\frac{du}{dt} \Rightarrow \text{aceleração total aplicada ao corpo}$$



## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

De fato, **Fjortoft (1952)** propôs um método gráfico para **resolver a equação de vorticidade barotrópica usando um único passo de tempo de 24h, seguindo um conjunto de partículas de fluido**, ou digamos, adotando uma abordagem lagrangiana.

**Welander (1955)** apontou que, em geral, **um conjunto de partículas de fluido**, que são **inicialmente distribuídas regularmente no tempo inicial**, **logo se tornará muito deformado** e, portanto, inadequado para a integração numérica.

Para evitar a **dificuldade acima**, **Wiin-Nielson (1959)** introduziu uma **abordagem semi-Lagrangiana** (ocasionalmente referida como quase-Lagrangiana).

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Em uma abordagem semi-Lagrangiana, um **conjunto de partículas que chegam a um conjunto regular de pontos da grade é rastreado** para trás em um **único intervalo de tempo até seus pontos de partida**.

Os **valores das grandezas dinâmicas nos pontos de partida** são obtidos **por interpolação dos pontos vizinhos da grade** onde seus valores são conhecidos.

Observe que neste método semi-Lagrangiano, **o conjunto de partículas do fluido em questão muda a cada passo de tempo**, o que é **diferente do método Lagrangiano**, como o utilizado por Fjortoft (1952).

Robert (1981) mostrou que o uso do **esquema semi-implícito semi-Lagrangiano oferece vantagens significativas** sobre a abordagem puramente Euleriana para NWP.



## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para **demonstrar o método semi-Lagrangeano**, podemos considerar a equação de advecção não linear unidimensional na forma de derivada total,

$$\psi(t = t_1) - \psi(t = t_0) = u(\psi(x = x_0) - \psi(x = x_1))$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

onde  $\psi$  é qualquer variável considerada.

$$\frac{d\psi}{dt} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\int_{\psi(t=t_0)}^{\psi(t=t_1)} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int_{\psi(x=x_0)}^{\psi(x=x_1)} u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\psi_i^{t+1} - \psi_i^t}{\Delta t} = 0$$

$$\psi_i^{t+1} = \psi_i^t$$

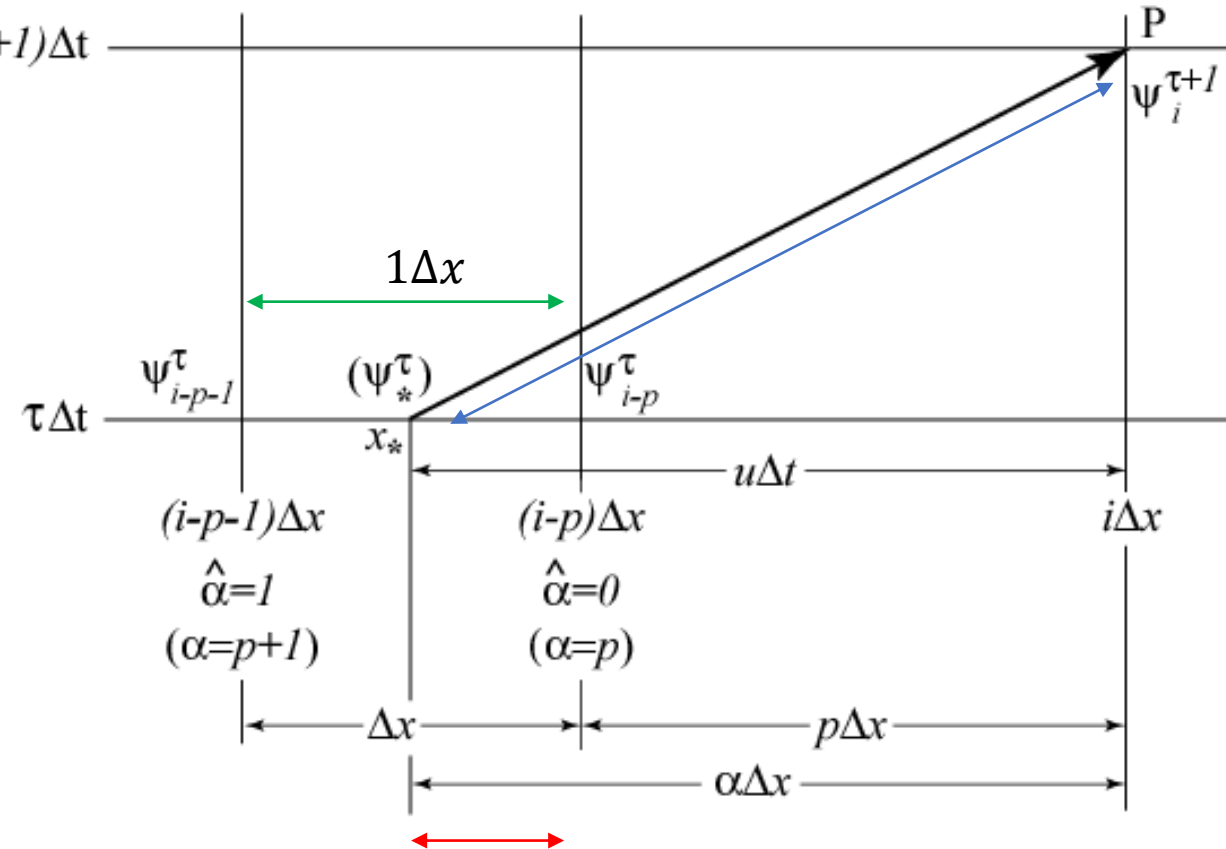


Fig. 12.9: Um esquema do método semi-Lagrangeano.

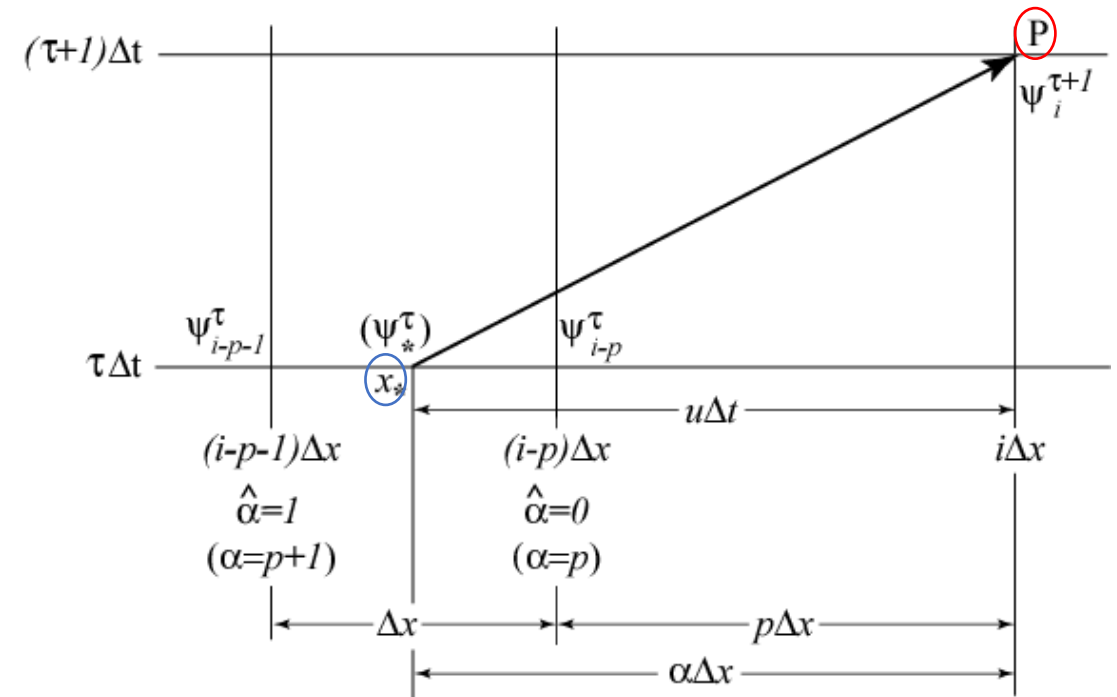
### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

**Integrando** a trajetória de uma partícula de fluido que **chega a um ponto de grade**  $i\Delta x$  e no **tempo**  $((\tau + 1)\Delta t)$ , **definido como  $P$**  na Fig. 12.9, temos

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_*^{\tau} \quad 12.5.2$$

onde  $\psi_*^\tau$  é o valor de  $\psi$  no ponto de partida da partícula no tempo  $(\tau)\Delta t$  .e

**Observe que  $\psi_*^\tau$  é obtido por interpolação polinomial dos pontos vizinhos de grade.**



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

**A estabilidade e a precisão do esquema dependem do método de interpolação usado.**

**Por exemplo, podemos considerar a interpolação linear dos pontos de grade circundantes  $(i - p)$  e  $(i - p - 1)$  para  $\psi_*^\tau$ ,**

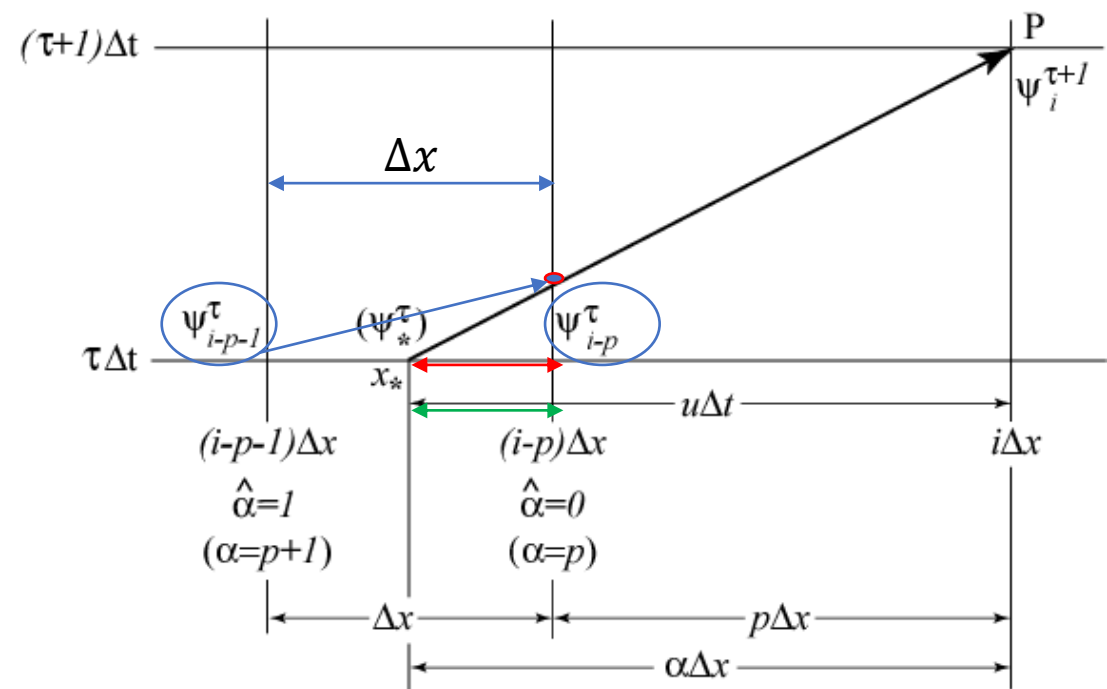
$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \psi_i^{\tau+1} = \psi_*^\tau \quad 12.5.2$$

$$\frac{\psi_{i-p}^\tau - \psi_*^\tau}{u\Delta t - p\Delta x} = \frac{\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau}{\Delta x} \quad 12.5.3$$

$$\psi_{i-p}^\tau - \psi_*^\tau = \frac{u\Delta t - p\Delta x}{\Delta x} (\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau) \quad 12.5.3$$

**onde  $u$  é a velocidade de advecção representada na Eq. (12.5.1). A equação acima pode ser rearranjada para ser**

$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \left( \frac{u\Delta t}{\Delta x} - p \right) (\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau)$$



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A **estabilidade** e a **precisão** do **esquema** dependem do **método de interpolação** usado.

Por exemplo, podemos considerar a **interpolação linear dos pontos** de grade circundantes  $(i - p)$  e  $(i - p - 1)$  para  $\psi_*^\tau$ ,

$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \left( \frac{u\Delta t}{\Delta x} - p \right) (\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau)$$

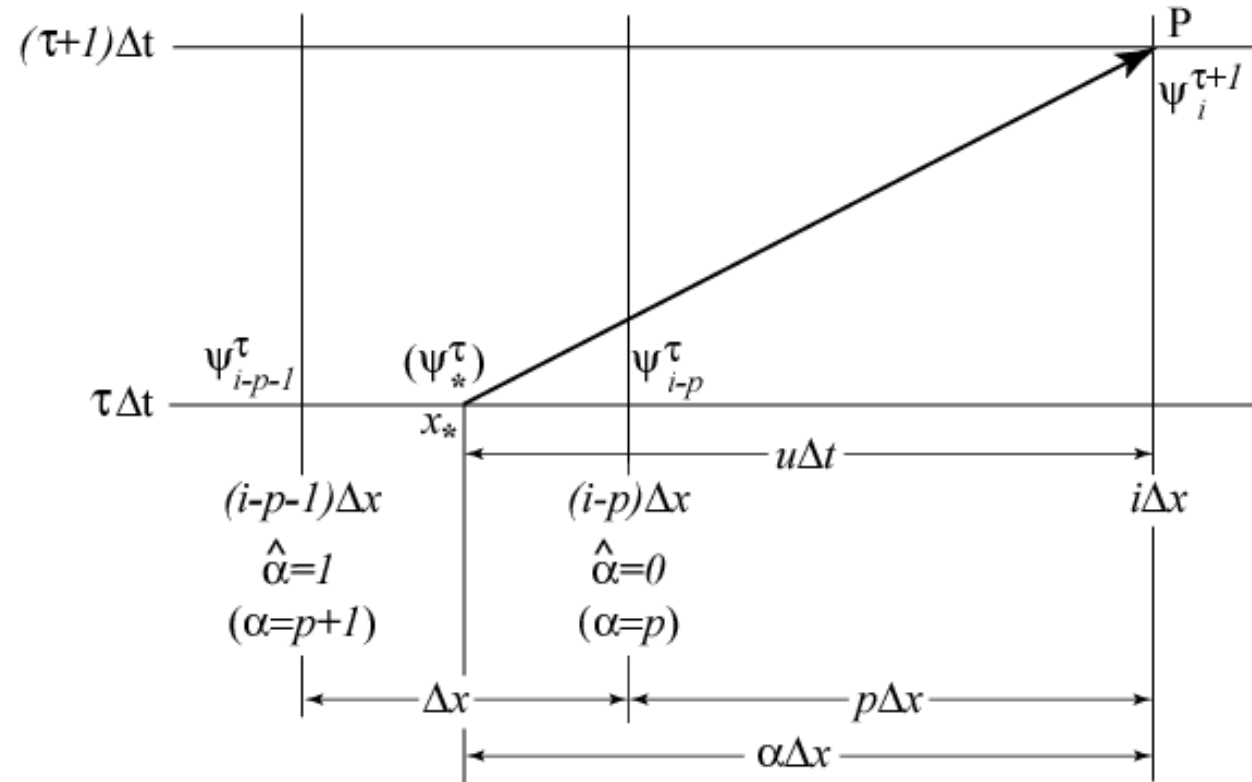
$$\psi_*^\tau = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau) \quad 12.5.5$$

onde

$$\hat{\alpha} = \alpha - p \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad 12.5.6$$

Portanto, de (12.5.2) temos

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau)$$



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

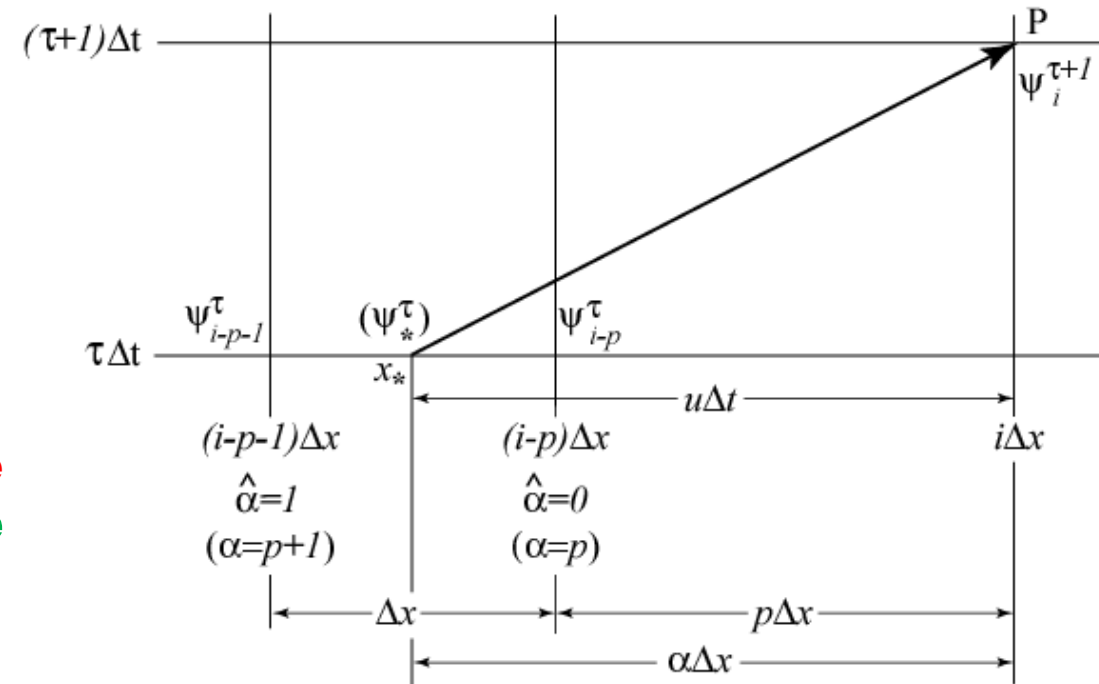
A **estabilidade** e a **precisão** do **esquema** dependem do **método de interpolação** usado.

Por exemplo, podemos **considerar a interpolação linear** dos pontos de grade circundantes  $(i - p)$  e  $(i - p - 1)$  para  $\psi_*^\tau$ ,

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau) \quad 12.5.7$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - p \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad 12.5.6$$

De acordo com a Eq. (12.5.6) e Fig. (12.9),  **$\hat{\alpha}$  é a parte fracionária** e  **$p$  é a parte inteira após a advecção de uma distância adimensional  $\alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ .**



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A **estabilidade** e a **precisão** do **esquema** dependem do **método de interpolação** usado.

Para examinar se o método semi-Lagrangiano é **computacionalmente estável ou não**, podemos assumir novamente uma solução semelhante a uma onda,

$$\psi_i^\tau = \hat{\psi} e^{-i\omega_r \tau \Delta t} e^{-ikn\Delta x} \lambda^\tau \quad 12.5.8$$

**Substituindo na Eq. (12.5.7)**

$$\psi_i^{\tau+1} = \psi_{i-p}^\tau - \hat{\alpha}(\psi_{i-p}^\tau - \psi_{i-p-1}^\tau) \quad 12.5.7$$

$$\lambda^2 = 1 - 2\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})(1 - \cos(k\Delta x)) \quad \lambda \equiv e^{i\omega_i \Delta t} \quad 12.5.9$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A **estabilidade** e a **precisão** do **esquema** dependem do **método de interpolação** usado.

Assim, para **termos uma solução computacionalmente estável** ( $|\lambda| \leq 1$ ), precisamos

$$0 \leq \hat{\alpha} \leq 1. \quad (12.5.10)$$

{Note that  $\hat{\alpha} = \alpha - p$ ,  $\alpha = u\Delta t / \Delta x$ . (12.5.6) and Fig. 12.9.}

Ou seja, **os pontos de partida devem estar dentro do intervalo de interpolação**  $(i - p - 1), (i - p)$ .

A escolha do ponto de partida é baseada apenas nesta condição. **Portanto, o esquema semi-Lagrangiano é incondicionalmente estável.**

## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

### método semi-implícito Semi-Lagrangiano

O método semi-implícito pode ser incorporado na integração considerando os outros termos (Robert 1982), como o termo da força do gradiente de pressão na equação do momento, como médias de tempo ao longo da trajetória, enquanto a derivada do tempo total é avaliada por leapfrog, ou outros esquemas de diferença de tempo.



### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para elucidar isso, vamos considerar o seguinte Boussinesq, equação do momento horizontal,

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad 12.5.11$$

A derivada total da equação acima pode ser aproximada pelo esquema de avanço no tempo,

$$\frac{du}{dt} = \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x-a, t)}{\Delta t} \quad 12.5.12$$

$$a = u(x-a, t)\Delta t \quad 12.5.13$$

A equação acima pode ser resolvida usando um método iterativo para obter o deslocamento a montante ou o ponto de partida, a.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Podemos aplicar a aproximação semi-implícita aos outros termos do lado esquerdo da Eq. (12.5.11)

$$\psi_{av}^t = \frac{\psi(x, t + \Delta t) + \psi(x - a, t)}{2} \quad 12.5.12$$

onde o subscrito  $av$  define a média de tempo.

Então, a equação do momento horizontal pode ser **aproximada** pelo esquema semi-implícito semi-Lagrangeano,

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x - a, t)}{\Delta t} - f v_{av}^t + \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{av}^t = 0 \quad 12.5.15$$

## 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A equação acima também pode ser reescrita como

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x-a,t)}{\Delta t} - f v_{av}^t + \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{av}^t = 0 \quad 12.5.15$$

$$([u]_x^{t+\Delta t} - [u]_{x-a}^t) - \frac{f\Delta t}{2} ([v]_x^{t+\Delta t} + [v]_{x-a}^t) + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left( \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_x^{t+\Delta t} + \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{x-a}^t \right) = 0 \quad 12.5.16$$

**Mover todos os termos no tempo  $t + \Delta t$  para o lado esquerdo fornece a seguinte forma do método semi-lagrangiano semi-implícito**

$$([u]_x^{t+\Delta t}) - \frac{f\Delta t}{2} ([v]_x^{t+\Delta t}) + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left( \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_x^{t+\Delta t} \right) = [u]_{x-a}^t + \frac{f\Delta t}{2} ([v]_{x-a}^t) - + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left( \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{x-a}^t \right) \quad 12.5.17$$

$$[u]_x^{t+\Delta t} - \frac{f\Delta t}{2} [v]_x^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_x^{t+\Delta t} = [u]_{x-a}^t + \frac{f\Delta t}{2} [v]_{x-a}^t - + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{x-a}^t \quad 12.5.17$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$[u]_x^{t+\Delta t} - \frac{f\Delta t}{2} [v]_x^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_x^{t+\Delta t} = [u]_{x-a}^t + \frac{f\Delta t}{2} [v]_{x-a}^t - + \frac{\Delta t}{2\rho_0} \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{x-a}^t \quad 12.5.17$$

Isso formará um **conjunto de equações algébricas lineares**, que podem ser escritas em forma de matriz.

Assim, um método para inverter a matriz, como o método de eliminação gaussiana ou o método Gauss-Seidel, é necessário para obter a solução para o intervalo de tempo  $t + \Delta t$ .

Observe que a vantagem do **esquema semi-implícito semi-Lagrangiano** é que ele é **incondicionalmente estável**, de modo que um **passo de tempo** relativamente **grande** pode ser usado.

A **desvantagem deste esquema** é que o método iterativo para encontrar os pontos de partida e o método para inverter a matriz são demorados.

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the first derivatives:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (\text{forward difference})$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (2^{\text{nd}}\text{-order centered difference})$$

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 4f(x + \Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2),$$

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 8f(x + \Delta x) - 8f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (4^{\text{th}}\text{-order centered difference})$$

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the second derivatives:

$$f''(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \quad (\text{forward difference})$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2^{\text{nd}}\text{-order centered difference})$$

$$f''(x) = \frac{-f(x + 3\Delta x) + 4f(x + 2\Delta x) - 5f(x + \Delta x) + 2f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$f''(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 16f(x + \Delta x) - 30f(x) + 16f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4).$$

(4<sup>th</sup>-order centered difference)

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the third derivatives:

$$f'''(x) = \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3} + O(\Delta x),$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2).$$

(averaged differences)

### 3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the fourth derivatives:

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x + 4\Delta x) - 4f(x + 3\Delta x) + 6f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x),$$

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2).$$

(centered difference)