

Métodos Numéricos

12.1 Introdução

12.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

12.3 Aproximações por Diferenças Finitas da Equação de Advecção

12.3.1 Esquemas de dois níveis de tempo

12.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

12.4 Esquemas implícitos

12.5 Métodos Semi-Lagrangianos

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

3.1 Introdução

- **Soluções analíticas disponíveis de PDEs não lineares** (equações diferenciais parciais) **são raras**, como a:
 - Equação de Burger (ver Projeto 2)
 - Equação de Long para fluxo idealizado sobre uma montanha em forma de sino (ver Lin e Wang (1996) ou cap. 5 de Lin (2007))
 - Equação KdV para ondas solitárias ou sólitons
 - Equação de Schrodinger para propagação de luz em fibras ópticas não lineares e guias de onda planares e para condensados de Bose-Einstein,
 - Sistema dinâmico não linear para atrator estranho (Lorenz) etc.,

são normalmente limitados por terem que assumir pequenas perturbações (lineares) e aplicar métodos analíticos.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

3.1 Introdução

- Para **fluxo de grande escala**, a **aproximação quase-geostrófica** ou a **aproximação do momento geostrófico** são freqüentemente adotadas para **simplificar as equações governantes**. No entanto, isso **não funciona para o fluxo de mesoescala**, pois o número de Rossby não é pequeno o suficiente.
- Para fluxo de **pequena escala**, a **força de Coriolis** pode ser ignorada, **mas a não hidrostática** e a **compressibilidade** geralmente precisam ser incluídas para adicionar complexidade às equações governantes.
- Uma opção para **resolver essas equações não lineares** ou um conjunto de equações não lineares é **aplicando aproximações numéricas** em determinados pontos da grade no espaço e no tempo.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Vantagens de simulações numéricas ou experimentos:

- (a) O conjunto completo de EDPs não lineares pode ser resolvido aproximadamente.
- (b) Fornece uma maneira poderosa de configurar os ambientes para testar diferentes forçantes ou processos físicos, como desativar a não linearidade, orografia, PBL, aquecimento latente, radiação, etc. Isso é chamado de “teste de sensibilidade” ou “experimento de sensibilidade”.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Questões importantes a serem feitas na modelagem numérica:

- A **equação aproximada converge** para a equação diferencial real quando os intervalos de tempo e grade se aproximam de zero?
- A **solução numérica é bem comportada** no tempo, ou mais precisamente falando, é **numericamente estável**?
- Quão bem a **amplitude** e as **fases das ondas** ou **perturbações aproximadas representam aquelas da solução exata**?

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Principais métodos numéricos usados na modelagem NWP:

- (1) Métodos de diferenças finitas
- (2) Métodos de Galerkin
- (3) Métodos Lagrangianos

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos de diferenças finitas (mais populares em modelos NWP)

As **variáveis dependentes** são definidas em determinados **pontos da grade** no espaço e no tempo, e as **derivadas** nas equações são **aproximadas** usando a **expansão da série de Taylor**.

Como a **área finita** é usada, os modelos de mesoescala e NWP são frequentemente chamados de **modelos numéricos de área limitada**.

Condições iniciais e **condições de contorno** são necessárias para integrar os PDEs.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos Galerkin

- **Variáveis dependentes** são representadas por uma **soma de funções** que possuem uma **estrutura espacial prescrita**.
- O **coeficiente associado** a cada função é **normalmente uma função do tempo**.
- Uma equação diferencial parcial é transformada em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (no tempo) para os coeficientes. Essas equações são geralmente resolvidas com aproximações de diferenças finitas no tempo.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos Galerkin

Os métodos de Galerkin podem ser divididos em duas categorias principais:

(a) método espectral

(b) método de elementos finitos.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos Galerkin

Nos **métodos espectrais**, as variáveis dependentes são representadas por **funções ortogonais de base global**, como **funções senoidais usadas na transformada de Fourier**. 4

- (a) **Menos popular em modelos de mesoescala ou NWP porque é mais difícil lidar com a condição de contorno lateral não periódica.**
- (b) **Mais popular em modelos globais e de larga escala devido à natureza periódica das condições de contorno.**

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos Galerkin

Os **métodos de elementos finitos** são semelhantes ao método espectral, exceto que **usam funções de base locais**, em vez de funções de base globais (em termos do domínio de integração), como a função chapéu ou tenda.

- **Vantagens:** **a precisão e a flexibilidade** de tratar a **geometria irregular** dos contornos internos e externos.
- **Desvantagens:** **requer uma quantidade significativa de tempo de computação** para inverter uma grande matriz a cada intervalo de tempo..

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Métodos Lagrangianos

- **As EDPs são resolvidas seguindo um conjunto fixo de partículas ao longo do período de integração.**
- **Vantagens: tratar a derivada total de uma só vez**, ao invés de ter que tratar os termos individuais, como taxa de variação local e termos de advecção.
- Na prática, **é muito difícil rastrear as parcelas de ar na próxima etapa de tempo**, pois elas normalmente são distribuídas aleatoriamente no domínio computacional, em vez de localizadas diretamente em pontos de grade regularmente distribuídos.
- Para evitar esse problema, **as variáveis de fluido na etapa de tempo prevista são definidas nas grades regulares** e rastreadas de volta para onde nas etapas de tempo anteriores. Isso é chamado de método semi-Lagrangeano.
- **O método semi-lagrangeano está se tornando mais popular, pois um intervalo de tempo relativamente grande para integração pode ser usado devido à sua estabilidade incondicional.**

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Existem alguns outros métodos numéricos, como métodos de interpolação upstream e métodos de volumes finitos, etc.

□ Em um método de interpolação, variáveis dependentes nos pontos da grade são usadas para derivar fórmulas de interpolação para os espaços entre os pontos da grade.

□ Em um método de volumes finitos, o valor do ponto de grade f_i representa a média da função $f(x)$ sobre a célula da grade $\left[\left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x, \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x\right]$.

a) Os métodos de volumes finitos são muito úteis para aproximar soluções que contêm descontinuidades.

b) Métodos de volumes finitos geram aproximações para o intervalo da grade ou média da célula da grade.

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

□ Esquema de diferença (**Forward**)

Considere a **série de Taylor** para aproximar $f(x)$ em $x + \Delta x$,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

onde $\Delta x (> 0)$: incremento espacial ou intervalo de grade.

Assim, a derivada de $f'(x)$ pode ser resolvida,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + R(x, \Delta x),$$

onde

$$R(x, \Delta x) \equiv \Delta x \left\{ -\frac{f''(x)}{2!} - \frac{f'''(x)\Delta x}{3!} - \dots \right\}$$

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + F_{rx}$$

Na expressão acima, $R(x, \Delta x)$ é chamado de **termo resíduo**, que tem uma **magnitude de $O(\Delta x)$** .

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- Esquema de diferença (**Forward**)

Se o termo resíduo $R(x, \Delta x)$ for **muito menor** que o primeiro termo do lado direito $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, então a equação acima **pode ser aproximado** por

$$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- A equação acima é chamada de **equação de diferenças finitas** ou equação de diferenças.
- O esquema é chamado de **esquema de diferença Forward** na ordem de Δx (**esquema de primeira ordem**).
- O termo resíduo $R(x, \Delta x)$ é o **erro de truncamento** (da ordem de Δx ou **primeira ordem de precisão**).

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Revisão do conceito de modelagem numérica

Considere a segunda lei do movimento de Newton:

$$F = ma \qquad a = \frac{du}{dt} = \frac{F}{m}$$

Para um objeto com massa constante empurrado por uma força constante, $\frac{F}{m} = c$, a equação de movimento acima se reduz a

$$\frac{du}{dt} = c$$

P: Como você calcula ou “prevê” a velocidade do objeto (ou seja, u) em um determinado momento t depois?

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{du}{dt} = c \qquad \int_{u_{t_0}}^{u_{t_1}} \frac{du}{dt} dt = c \int_{t_0}^{t_1} dt \qquad u_{t_1} = u_{t_0} + c(t_1 - t_0)$$

P: Como você calcula ou “prevê” a velocidade do objeto (ou seja, u) em um determinado momento t depois?

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{du}{dt} = c \qquad \Delta u = c \Delta t$$

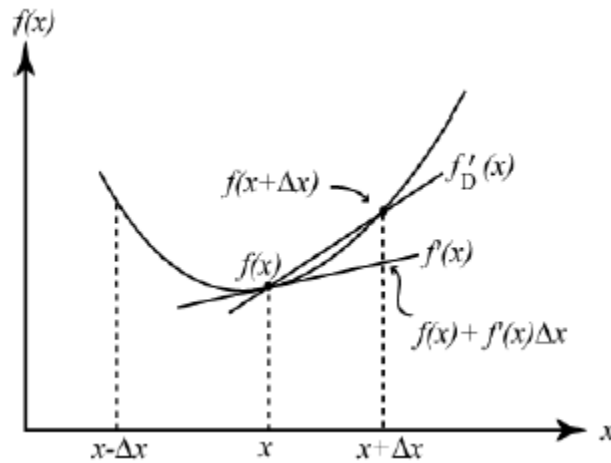
Com base em (12.2.2), existem **duas maneiras de reduzir o erro de truncamento**:

(a) **reduzir** o intervalo de espaço (Δt) ou

(b) usar um método de **aproximação de ordem superior**.

Isso também pode ser visto no esboço da Fig. 12.1.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas



$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dt} = c$$

- A distância entre $f(x + \Delta x)$ e $f(x) + f'(x)(\Delta x)$ em $x + \Delta x$ é $-R\Delta x$.
- **Quando Δx é reduzido**, a derivada aproximada $f'_D(x)$ (ou seja, o R.H.S. de (12.2.3) está mais próxima da derivada real).

Fig. 12.1: Um esboço do esquema de diferenças finitas direto, conforme mostrado na Eq. (12.2.3). A derivada real, $f'(x)$, é aproximada pela inclinação $f'_D(x)$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Eq. (12.2.5) pode ser aproximado pelo esquema de diferença atrasada (**backward**)

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

que também pode ser reorganizado da seguinte forma,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \Delta x \left\{ +f''(x) \frac{1}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x}{3!} + \dots \right\},$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + R(x, \Delta x),$$

$$R(x, \Delta x) \equiv \Delta x \left\{ \frac{f''(x)}{2!} - \frac{f'''(x)\Delta x}{3!} + \dots \right\}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Eq. (12.2.5) pode ser aproximado pelo esquema de diferença atrasada (**backward**)

$$f'(x) \equiv \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x},$$

O significado da Eq. (12.2.6) pode ser facilmente compreendida substituindo $(x + \Delta x)$ por (x) por $(x - \Delta x)$, respectivamente, na Fig. 12.1.

Semelhante ao esquema de diferença forward, o esquema backward tem **precisão da ordem de (Δx)** ou é referido como a primeira ordem de precisão.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquema de diferenças centradas

Considere a série de Taylor para **aproximar** $f(x)$ **em** $x + \Delta x$,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (12.2.1)$$

Considere a série de Taylor para **aproximar** $f(x)$ **em** $x - \Delta x$,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (12.2.4)$$

Uma forma alternativa de aproximar a derivada pode ser obtida **subtraindo (12.2.4) de (12.2.1)**,

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = +2f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + 2f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquema de diferenças centradas

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = +2f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + 2f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

A derivada, $f'(x)$, pode então ser resolvida,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \frac{2\Delta x^3}{2\Delta x} \left\{ -\frac{f'''(x)}{3!} - \frac{f^{5'}(x)}{5!} \Delta x - \dots \right\}$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \Delta x^2 \left\{ -\frac{f'''(x)}{3!} - \frac{f^{5'}(x)}{5!} \Delta x - \dots \right\}$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + R(x, \Delta x)$$

$$R(x, \Delta x) = \Delta x^2 \left\{ -\frac{f'''(x)}{3!} - \frac{f^{5'}(x)}{5!} \Delta x - \dots \right\}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquema de diferenças centradas

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + R(x, \Delta x)$$

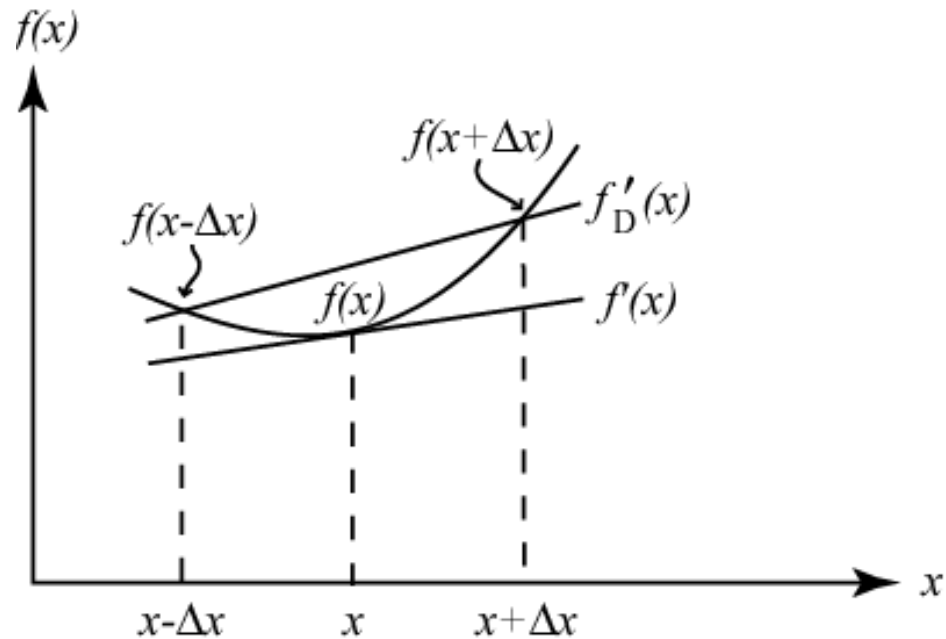
Desprezar o termo resíduo $R(x, \Delta x)$ leva à diferença centrada esquema,

$$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (12.2.9)$$

Com base em (12.2.9), o esquema de diferença centrada tem precisão da ordem de Δx^2 ou segunda ordem de precisão e o método numérico é chamado de **esquema de segunda ordem**.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

O significado matemático do esquema é mostrado na Fig. 12.2.



$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Fig. 12.2: Uma ilustração da relação de $f'(x)$ e sua aproximação de diferença centrada, $f'_D(x)$.

Comparando com a Fig. 12.1, o **esquema de diferença centrada** é **mais preciso** do que o **esquema de diferença finita forward ou backward**.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Aproximação da derivada de segunda ordem, $f''(x)$:

Considere a série de Taylor para **aproximar** $f(x)$ em $x + \Delta x$,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (12.2.1)$$

Considere a série de Taylor para **aproximar** $f(x)$ em $x - \Delta x$,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (12.2.4)$$

Adicionando a Eq. (12.2.4) para a Eq. (12.2.1),

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + 2f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f''''(x) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + 2f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f''''(x) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) = 2f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f''''(x) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

$$2f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} = f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) - f''''(x) \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^4}{\Delta x^2} f''''(x) \frac{1}{4!} - \frac{\Delta x^6}{\Delta x^2} f''''''(x) \frac{1}{6!} - \dots$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \Delta x^2 \left\{ -f''''(x) \frac{1}{4!} - \Delta x f''''''(x) \frac{1}{6!} - \dots \right\}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \Delta x^2 \left\{ -f''''(x) \frac{1}{4!} - \Delta x f'''''(x) \frac{1}{6!} - \dots \right\}$$

$$R(\Delta x, x) = \Delta x^2 \left\{ -f''''(x) \frac{1}{4!} - \Delta x f'''''(x) \frac{1}{6!} - \dots \right\}$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + R(\Delta x, x)$$

Desprezando $R(\Delta x, x)$

$$f''(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$f''(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Novamente, $f''(x)$ pode ser **aproximado pelo primeiro termo no lado direito da equação acima**.

- Duas questões podem ser levantadas para Esquemas de diferença de 1ª e 2ª ordem :
 1. Quão **precisos** eles são?
 2. Essas soluções numéricas são **bem comportadas**, ou digamos, **são estáveis**?

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Precisão de um esquema de diferenças finitas

Para **encontrar a precisão** dos métodos de diferenças finitas, podemos **considerar** a aproximação de diferença centrada para a primeira derivada da função seno,

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

A **derivada de primeira ordem** pode ser facilmente obtida analiticamente

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \frac{2\pi A}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \frac{2\pi A}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad . \quad (12.2.10)$$

Agora, podemos aplicar o **esquema de diferenças centradas**, Eq. (12.2.10), para $f'(x)$, na função

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$fD'(x) \equiv \frac{\left(A \sin\left(\frac{2\pi(x + \Delta x)}{L}\right)\right) - \left(A \sin\left(\frac{2\pi(x - \Delta x)}{L}\right)\right)}{2\Delta x}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$fD'(x) \equiv \frac{\left(A \sin \left(\frac{2\pi(x + \Delta x)}{L} \right) \right) - \left(A \sin \left(\frac{2\pi(x - \Delta x)}{L} \right) \right)}{2\Delta x}$$

que pode ser rearranjado para ser

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$fD'(x) \equiv \frac{A \left(\sin \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) + \sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right) - A \left(\sin \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) - \sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right)}{2\Delta x}$$

$$fD'(x) \equiv \frac{A \left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right) - A \left(-\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right)}{2\Delta x}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$fD'(x) \equiv \frac{A \left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right)}{\Delta x}$$

Dividindo a aproximação acima pela derivada analítica de $f'(x)$ resulta

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} = \frac{\frac{A \left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi(x)}{L} \right) \right)}{\Delta x}}{\frac{2\pi A}{L} \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right)} = \frac{\left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \right)}{\frac{\Delta x}{2\pi}} = \frac{\left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \right)}{\Delta x} \frac{L}{2\pi}$$

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} = \frac{\left(\sin \left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L} \right) \right)}{2\pi\Delta x/L}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} = \frac{\left(\sin\left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L}\right) \right)}{2\pi\Delta x/L}$$

A relação entre $fD'(x)$ e $f'(x)$ também é esboçada na Fig. 12.2.

Da expressão acima, obtemos

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} \Rightarrow 1, \quad \text{com } \frac{2\pi(\Delta x)}{L} \Rightarrow 0$$

porque quando $\sin \theta = \theta$ ocorre quando θ se aproxima de 0, com base na série de Taylor de expansão do $\sin \theta$

$$f(x) = \sin(x_0) + \cos(x_0) \frac{x - x_0}{1!} - \dots$$

$$x_0 = 0$$

$$f(x) = \sin x \cong x$$

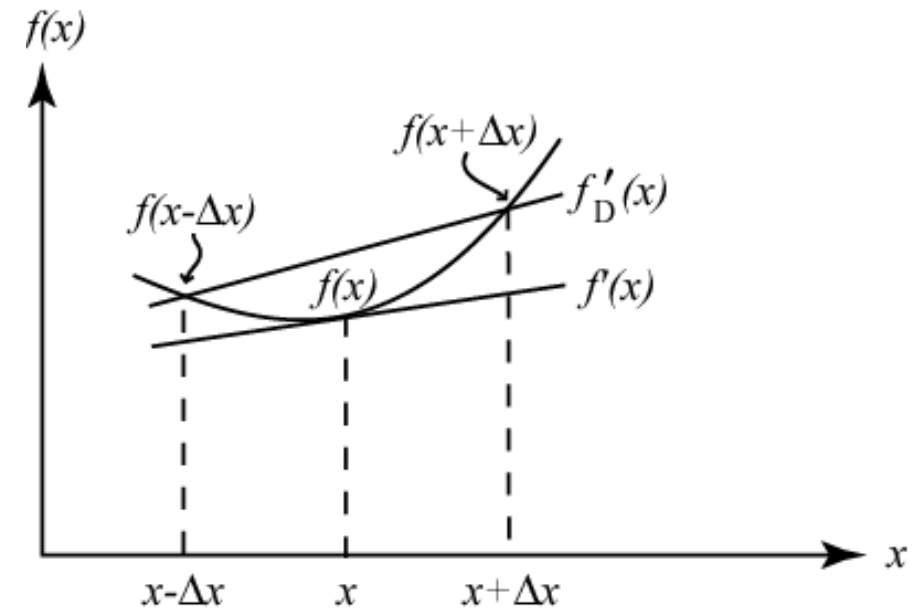


Fig. 12.2: Um esboço da relação de $f'(x)$ e sua aproximação de diferença centrada, $fD'(x)$.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

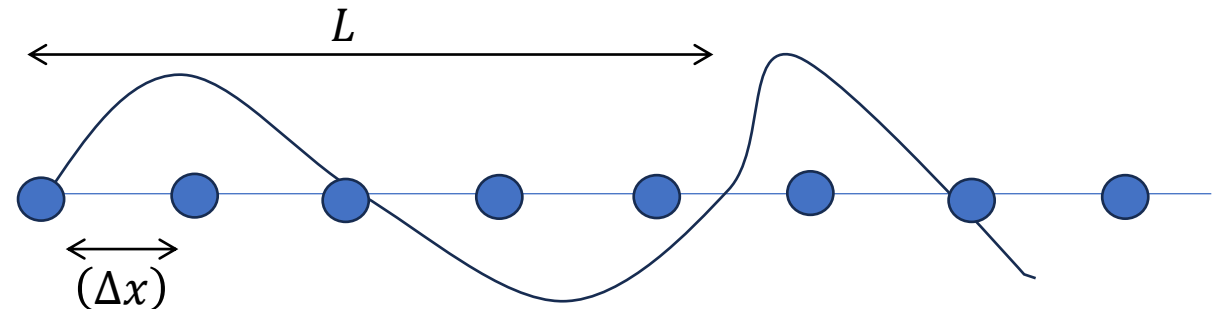
3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} \Rightarrow 1, \quad \text{com} \quad \frac{2\pi(\Delta x)}{L} \Rightarrow 0$$

Em outras palavras, o **erro de truncamento do esquema de diferença de centrada** se **aproxima de 0 quando $\Delta x \ll L$** .

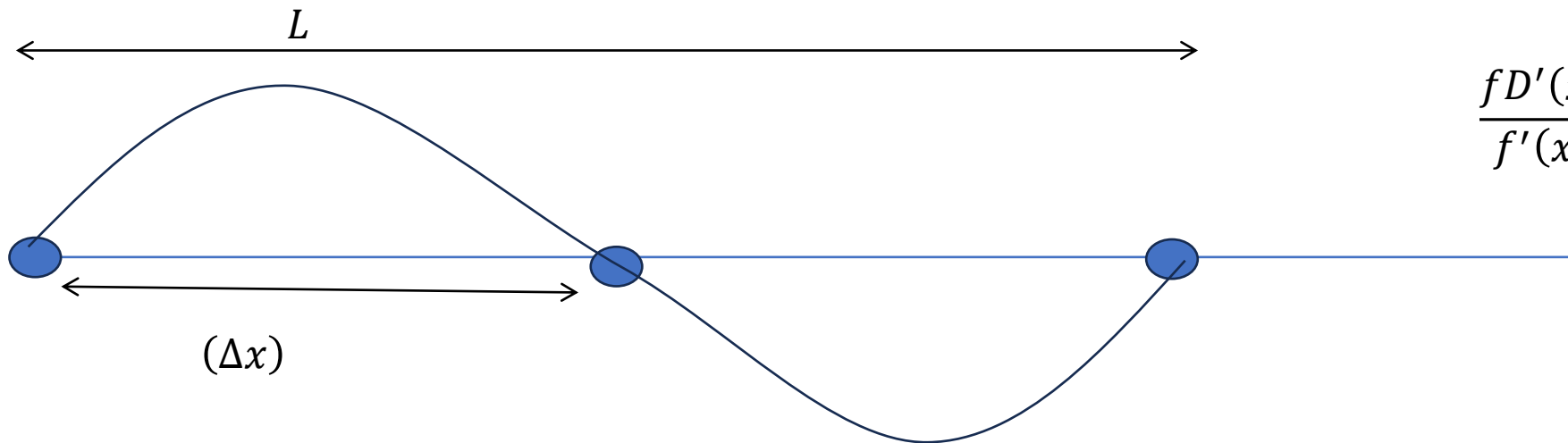
Assim, para se ter uma boa aproximação, o intervalo de grade escolhido deve ser bem menor que o comprimento de onda que se deseje simular.

$$2\pi(\Delta x) \ll L$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

□ Para uma onda com $L = 2\Delta x$ (também chamada de onda de $2\Delta x$).



$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} = \frac{\left(\sin\left(\frac{2\pi(\Delta x)}{L}\right) \right)}{2\pi\Delta x/L}$$

Substituindo $L = 2\Delta x$ no lado direito da Eq. (12.2.16) leva a

$$\frac{fD'(x)}{f'(x)} = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0, \quad \text{com } \sin(\pi) = 0$$

A equação acima implica que o esquema de diferenças centradas *não resolve uma onda de $2\Delta x$* .

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$f'(x) \equiv \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x},$$

$$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$f'(x) \equiv \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x},$$

Também pode ser mostrado que, **para um intervalo de grade fixo**, as ondas mais curtas são mal resolvidas pelo esquema de diferenças centradas, enquanto as ondas mais longas são razoavelmente bem resolvidas.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Fórmulas para aproximações por diferenças finitas de derivadas
(Adaptado de Gerald e Wheatley 2003; ver Lin 2007)

Formulas for the first derivatives:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (\text{forward difference})$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (2^{\text{nd}}\text{-order centered difference})$$

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 4f(x + \Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (\text{one-sided } 2^{\text{nd}}\text{-order centered difference})$$

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 8f(x + \Delta x) - 8f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (4^{\text{th}}\text{-order centered difference})$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the second derivatives:

$$f''(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \quad (\text{forward difference})$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2^{\text{nd}}\text{-order centered difference})$$

$$f''(x) = \frac{-f(x + 3\Delta x) + 4f(x + 2\Delta x) - 5f(x + \Delta x) + 2f(x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (\text{one-sided})$$

$$f''(x) = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 16f(x + \Delta x) - 30f(x) + 16f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4).$$

(4^{th} -order centered difference)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the third derivatives:

$$f'''(x) = \frac{f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x^3} + O(\Delta x),$$

$$f'''(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + 2f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2).$$

(averaged differences)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Formulas for the fourth derivatives:

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x + 4\Delta x) - 4f(x + 3\Delta x) + 6f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x),$$

$$f^{iv}(x) = \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2).$$

(centered difference)

3.3 Aproximações por Diferenças Finitas da Equação de Advecção

3.3 Aproximações por Diferenças Finitas da Equação de Advecção

Um dos modelos de diferenças finitas mais simples é a equação de advecção unidimensional com uma velocidade de advecção constante (c), que compõe apenas uma variável dependente $u(x, t)$, uma derivada temporal e uma derivada espacial,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (12.3.1)$$

onde $u(x, t)$ é a velocidade horizontal.

Se c for substituído por $u(x, t)$ na Eq. (12.3.1), então é chamada de equação de Burgers **invíscida**. A equação de Burger **invíscida** também foi adotada como modelo para sistemas fluidodinâmicos.

O fluxo de um fluido que se presume **não ter viscosidade** é chamado de fluxo invíscido, escoamento invíscido ou ainda superfluido

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Uma **solução analítica** da Eq. (12.3.1)

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (12.3.2)$$

onde $f(x - ct)$ é **uma função arbitrária**, que determina u em $t = 0$, ou digamos, a condição inicial, $f_i(x, t = 0)$.

Por exemplo, se

$$f_i(x - ct) = \frac{u_0 a^2}{x^2 + a^2} \quad (12.3.3)$$

então

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u(x, t) = f(x - ct) = \frac{u_0 a^2}{x^2 + a^2} = \frac{u_0 a^2}{(x - ct)^2 + a^2} \quad (12.3.4)$$

Se a velocidade de advecção (c) for positiva (negativa), então a onda se propaga para a direita (esquerda).

Note que a Eq. (12.3.3) é chamada de função em forma de sino que tem amplitude u_0 e meia largura a .
Também é chamada de Bruxa de Agnesi.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Significado físico da Eq. (12.3.4)

$$u(x, t) = f(x - ct) = \frac{u_0 a^2}{x^2 + a^2} = \frac{u_0 a^2}{(x - ct)^2 + a^2} \quad (12.3.4)$$

A **solução** $u(x, t)$ **sempre mantém sua forma inicial** ao **longo da linha** de fase $(x - ct) = \text{constante}$

Ou seja, a **onda** ou **perturbação** se **propaga ao longo de uma linha de fase constante** $x - ct$ as características da equação de advecção ou a **onda se propaga na velocidade c**.

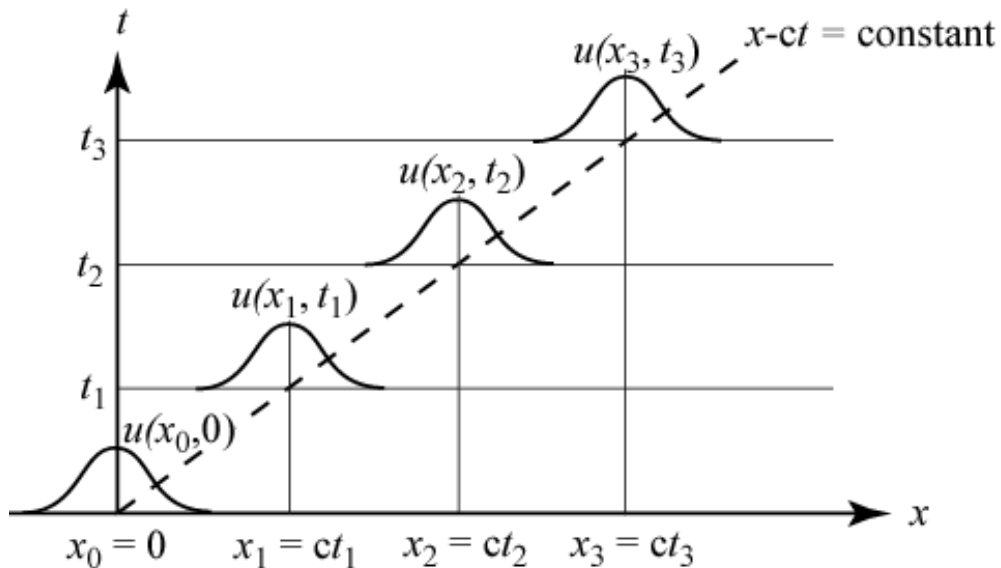


Fig. 12.3: Um esboço da propagação de $u(x, t)$ ao longo de uma linha de fase constante, $x - ct = \text{constante} = 0$.
[De Lin 2007 – Mesoscale Dynamics, Cambridge Univ. Imprensa]

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- A seguir, discutiremos algumas das **principais aproximações numéricas da equação de advecção**, que têm sido adotadas em modelos numéricos de mesoescala, e suas características.
- Com base nos **níveis de integração de tempo**, os principais métodos que foram adotados no NWP podem ser categorizados como **esquemas de dois níveis de tempo** e **esquemas de três níveis de tempo**.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.1 Esquemas de dois níveis de tempo

- Os **esquemas de diferenças finitas para aproximar $f'(x) \equiv$** , conforme discutido na subseção anterior, **também podem ser aplicados à derivada no tempo.**
- Da mesma forma, pode-se optar por **adotar as aproximações de diferença para frente, para trás ou centrada no tempo.**
- Se alguém optar por **usar diferenças finitas no tempo para frente ou para trás**, então o **método pertence aos chamados esquemas de dois níveis de tempo**, pois há apenas duas etapas de tempo envolvidas em cada tempo de integração.
- Por outro lado, se optar por **usar a diferença centrada no tempo de segunda ordem** (ou conhecido como leapfrog), então o método pertence aos chamados **esquemas de três níveis de tempo**, pois há três tempos envolvidos em cada passo de tempo de integração.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(a) Esquema avançado no tempo e centrado no espaço e sua instabilidade computacional

As derivadas na equação de advecção, pode ser aproximado por uma combinação de **diferença direta** para derivada de tempo e **diferença central** da **derivada espacial** em um sistema de grade espacial-tempo

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} = 0 \quad 12.3.5$$

Onde

τ : nível no tempo que caracteriza o passo de tempo Δt ,

i : ponto de grade no espaço.

O que **realmente nos interessa na previsão** é $u(x, t)$ no ponto de grade i : e o intervalo de tempo $\tau + 1$, ou seja, $u_i^{\tau+1}$, que pode ser obtido a partir da equação acima,

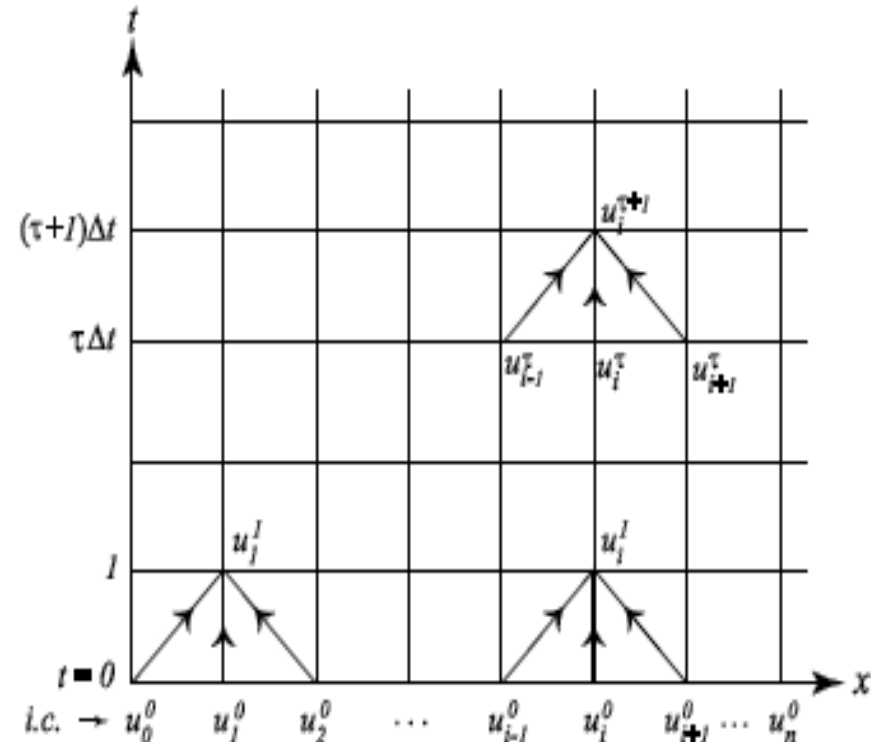
3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \left(\frac{c\Delta t}{2\Delta x} \right) (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.6$$

Eq. (12.3.5) ou Eq. (12.3.6) é chamada de equação de diferenças para a equação de advecção sob o esquema de avanço no tempo e centrado no espaço (FTCS).

O algoritmo do esquema é esboçado na figura a seguir.

Fig. 12.4: O sistema de grade e o algoritmo para o esquema de diferenças finitas de avanço no tempo e centrado no espaço da equação de advecção. Os valores de u em $t=0$ são fornecidos pela condição inicial (i.c.) e os valores nos limites esquerdo e direito são determinados pelas condições de contorno (b.c.).



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- Os pontos internos $u_{i+1}^\tau, i = 1, 2, 3, 4, n - 1$, no intervalo de tempo $\tau + 1$ são previstos pela Eq. (12.3.6) usando os valores de $u_{i+1}^\tau, u_i^\tau, u_{i-1}^\tau$ no intervalo de tempo τ .

Observe que a **condição inicial** é necessária para obter valores no intervalo de **tempo $\tau=2$** .

As **condições de contorno** também **são necessárias nos pontos de contorno esquerdo e direito**.

Os **valores nos pontos de contorno**, ou seja, $u_{i=0}^\tau$ e $u_{i=n}^{\tau+1}$, são determinados pelas **condições de contorno**.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- Embora existam muitos esquemas para aproximar uma equação diferencial, **não há garantia** de que **toda solução numérica seja bem comportada**.
- Em outras palavras, **a solução numérica pode não necessariamente convergir para a solução real da equação diferencial** quando Δt e Δx se aproximam de 0.

Quando isso ocorre, o **esquema é denominado numericamente ou computacionalmente instável**. **Caso contrário**, o esquema é numericamente estável.

Agora, vamos verificar se essa escolha natural do método numérico, ou seja,

O esquema de avanço no tempo e centro no espaço (FTCS) é numericamente estável ou não?

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Estabilidade numérica do esquema de avanço no tempo e centrado no espaço

Considere a **seguinte onda senoidal nas direções t e x,**

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad 12.3.7$$

$\hat{u}(k, \omega) \Rightarrow$ amplitude da onda

$k \Rightarrow$ numero de onda

$\omega \Rightarrow$ Frequencia da onda

Todos os $\hat{u}(k, \omega)$, k e ω são números complexos.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Ambos x e t são representados pelo intervalo de grade e intervalo de tempo, respectivamente,

$$x = n\Delta x, \quad i = \tau\Delta t$$

$n \Rightarrow$ numero de intervalo de grade

$\tau \Rightarrow$ numero de intervalo de tempo

Assim, a Eq. (12.3.7) pode ser reescrita como

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}$$

12.3.8

Substituindo (12.3.8) na equação de diferenças finitas, (12.3.5), resulta

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} = 0$$

12.3.5

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} \quad 12.3.8$$

Substituindo (12.3.8) na equação de diferenças finitas, (12.3.5), resulta

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{\Delta t} + c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(k(n+1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(k(n-1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)\{e^{i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\}}{\Delta t} + c \frac{\hat{u}(k, \omega)\{e^{i(k(n+1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)} - e^{i(k(n-1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\}}{2\Delta x} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\hat{u}(k, \omega)\{e^{i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \hat{u}(k, \omega)\{e^{i(k(n+1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)} - e^{i(k(n-1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\} = 0 \quad 12.3.9$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\hat{u}(k, \omega) \{e^{i(kn\Delta x - \omega(\tau)\Delta t - \omega\Delta t)} - e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \hat{u}(k, \omega) \{e^{i(k(n)\Delta x + k\Delta x - \omega\tau\Delta t)} - e^{i(k(n)\Delta x - k\Delta x - \omega\tau\Delta t)}\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\hat{u}(k, \omega) \{e^{i(kn\Delta x)} e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)} e^{i(-\omega\Delta t)} - e^{i(kn\Delta x)} e^{i(-\omega\tau\Delta t)}\} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \hat{u}(k, \omega) \{e^{i(k(n)\Delta x)} e^{i(k\Delta x)} e^{i(-\omega\tau\Delta t)} - e^{i(k(n)\Delta x)} e^{i(-k\Delta x)} e^{i(-\omega\tau\Delta t)}\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)} \{e^{i(-\omega\Delta t)} - 1\} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \hat{u}(k, \omega) e^{i(k(n)\Delta x)} e^{i(-\omega\tau\Delta t)} \{e^{i(k\Delta x)} - e^{i(-k\Delta x)}\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\hat{u}(k, \omega) \{e^{i(-\omega\Delta t)} - 1\} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \hat{u}(k, \omega) \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{i(-k\Delta x)}}{2} \right\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\{e^{i(-\omega\Delta t)} - 1\} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} i \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{i(-k\Delta x)}}{2i} \right\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$\{e^{i(-\omega\Delta t)} - 1\} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} i \text{sen}\{k\Delta x\} = 0 \quad 12.3.9$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\{e^{i(-\omega\Delta t)} - 1\} + C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} = 0 \quad 12.3.9$$

$$e^{-i(\omega\Delta t)} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

onde

$$C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \quad 12.3.11$$

é chamado de número de Courant.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Substituindo $\omega = \omega_r + i\omega_i$ **no lado esquerdo de (12.3.10) resulta**

$$e^{-i(\omega\Delta t)} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

$$e^{-i(\omega_r + i\omega_i)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

$$e^{-i(\omega_r)\Delta t} e^{-i(i\omega_i)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

$$e^{-i(\omega_r)\Delta t} e^{(\omega_i)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

$$e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.10$$

1 2

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.12$$

1 2

Termo (1): **variação da amplitude da onda** em um intervalo de tempo Δt .

Termo (2): **mudança de fase.**

Como o primeiro termo é um número real e o segundo termo é um número imaginário. Se adotarmos $\lambda = e^{\omega_i \Delta t}$, então a Eq. (12.3.12) torna-se

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.13$$

Multiplicando pelo complexo conjugado e Igualando as partes real e imaginária resulta

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} \lambda e^{i(\omega_r)\Delta t} = (1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\})(1 + C \operatorname{isen}\{k\Delta x\}) \quad 12.3.13$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} \lambda e^{i(\omega_r)\Delta t} = (1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\})(1 + C \operatorname{isen}\{k\Delta x\}) \quad 12.3.13$$

$$\lambda^2 e^{i(\omega_r - \omega_r)\Delta t} = 1 + C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} - C^2 i^2 \sin^2\{k\Delta x\} \quad 12.3.13$$

$$\lambda^2 = 1 + C^2 \sin^2\{k\Delta x\} \quad 12.3.13$$

$$\lambda = \pm \sqrt{1 + C^2 \sin^2\{k\Delta x\}} \quad 12.3.15$$

Combining Eqs. (12.3.8), (12.3.12) and (12.3.13) lead to

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} \quad 12.3.8$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - (\omega_r + i\omega_i)\tau\Delta t)}$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t} e^{-i(i\omega_i)\tau\Delta t}$$

$$e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.12$$

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.13$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t} e^{(\omega_i)\tau\Delta t}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} \lambda e^{i(\omega_r)\Delta t} = (1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\})(1 + C \operatorname{isen}\{k\Delta x\}) \quad 12.3.13$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t} e^{(\omega_i)\tau\Delta t}$$

$$e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.12$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{(\omega_i)\tau\Delta t} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t}$$

$$e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} = \quad 12.3.12$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} \left(e^{(\omega_i)\Delta t} e^{-i(\omega_r)\Delta t} \right)^\tau$$

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = 1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\} \quad 12.3.13$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} (1 - C \operatorname{isen}\{k\Delta x\})^\tau$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} (\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t})^\tau$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t} (\lambda)^\tau \quad 12.3.16$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Termo $e^{i(kn\Delta x)}e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t}$: **só pode mudar a fase dessas ondas**

Termo $(\lambda)^\tau$: **pode mudar a amplitude** com o passar do tempo.

Para ter uma solução convergente, ou com estabilidade numérica, da Eq (12.3.16), ela requer $|\lambda| \ll 1$.

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t}(\lambda)^\tau$$

12.3.16

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

No entanto, a Eq. (12.3.15) **implica que o valor absoluto de λ é sempre maior que 1.**

Assim, surpreendentemente, **a amplitude crescerá com o tempo e o esquema de avançado no tempo e centrado no espaço é incondicionalmente instável**, pois qualquer pequena perturbações crescerão ficticiamente.

$$\lambda = \pm \sqrt{1 + C^2 \sin^2\{k\Delta x\}} \quad 12.3.15$$

□ **Este tipo de análise é chamada de análise de estabilidade**, que **determina se o esquema é estável ou não**, deve ser feita antes de se adotar um esquema numérico para aproximar uma equação diferencial.

Para termos uma solução numérica estável, ou seja, estabilidade numérica, precisamos de $|\lambda| \leq 1$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(b) Avançado no tempo e upstream (upwind) no esquema espacial

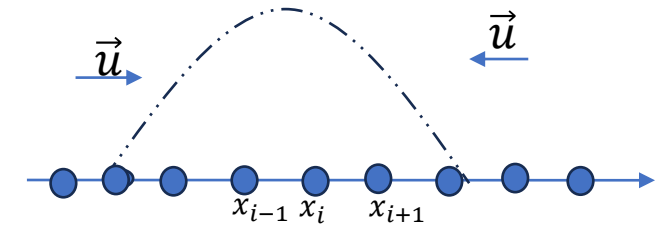
3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(b) Avançado no tempo e upstream (upwind) no esquema espacial

Sob este esquema, a **equação de advecção é aproximada** por

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.17a$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}}{2\Delta x} \quad \text{se } c \leq 0 \quad 12.3.17b$$



Verificação de estabilidade: Considere uma **velocidade** de advecção **constante** positiva, $c > 0$, e substitua a Eq. (12.3.8) na Eq. (12.3.17a)

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} \quad 12.3.8$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} \quad 12.3.8$$

□ **Certifique-se de que você pode executar este tipo de **verificação de estabilidade**, ou seja, substituir (12.3.8) em qualquer equação de diferenças finitas, como (12.3.17a) ou assim, para (12.3.20) e a conclusão!**

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{\Delta t} = -c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(k(n-1)\Delta x - \omega\tau\Delta t)}}{\Delta x}$$

$se\ c > 0$

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)}e^{i(-\omega\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)}}{\Delta t} = -c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{i(k(n)\Delta x)}e^{i(k(-1)\Delta x)}e^{i(-\omega\tau\Delta t)}}{\Delta x}$$

$se\ c > 0$

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{i(-\omega(\tau)\Delta t)}\{e^{-i(\omega\Delta t)} - 1\}}{\Delta t} = -c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{i(kn\Delta x)}e^{-i(\omega(\tau)\Delta t)}\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}}{\Delta x}$$

$se\ c > 0$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\{e^{-i(\omega\Delta t)} - 1\}}{\Delta t} = -c \frac{\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}}{\Delta x}$$

$se\ c > 0$

$$\{e^{-i(\omega\Delta t)} - 1\} = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}$$

$se\ c > 0$

$$C \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$e^{-i(\omega\Delta t)} = 1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \quad 12.3.18$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$e^{-i((\omega_r + i\omega_i)\Delta t)} = 1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \quad 12.3.18$$

$$e^{-i((\omega_r + i\omega_i)\Delta t)} = 1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \quad 12.3.18$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$e^{-i((\omega_r+i\omega_i)\Delta t)} = 1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \quad 12.3.18$$

Multiplique pelo complexo conjugado

$$e^{-i((\omega_r+i\omega_i)\Delta t)} e^{i((\omega_r+i\omega_i)\Delta t)} = \{1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\} \{1 - C\{1 - e^{+i(k\Delta x)}\}\}$$

$$e^{-i((\omega_r)\Delta t)} e^{-i((i\omega_i)\Delta t)} e^{i((\omega_r)\Delta t)} e^{i((+i\omega_i)\Delta t)} = \{1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\} \{1 - C\{1 - e^{+i(k\Delta x)}\}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = \{1 - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\} \{1 - C\{1 - e^{+i(k\Delta x)}\}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - (C\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}) - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2 \{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - (C\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}) - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2 \{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} \{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - (C\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}) - C\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - (\{C - Ce^{i(k\Delta x)}\}) - \{C - Ce^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 + (\{-C + Ce^{i(k\Delta x)}\}) + \{-C + Ce^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - C + Ce^{i(k\Delta x)} - C + Ce^{-i(k\Delta x)} + C^2\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C\{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{-i(k\Delta x)}\}\{1 - e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C\{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}e^{i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C\{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C\{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}\} + C^2\{1 - \{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}\}\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + 2C\left\{\frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2}\right\} + C^2\left\{1 - 2\left\{\frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2}\right\}\right\}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} + C^2 \left\{ 1 - 2 \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} \right\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} + C^2 - 2C^2 \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C^2 + 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} - 2C^2 \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\}$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C^2 + \left\{ 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} \right\} (1 - C)$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = 1 - 2C + C^2 + \left\{ 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} \right\} (1 - C)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = (1 - C)^2 + \left\{ 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} \right\} (1 - C)$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = \left\{ (1 - C) + 2C \left\{ \frac{e^{i(k\Delta x)} + e^{-i(k\Delta x)}}{2} \right\} \right\} (1 - C)$$

$$e^{((i\omega_i)\Delta t)^2} = \{ (1 - C) + 2C \{ \cos(k\Delta x) \} \} (1 - C)$$

$$\lambda = e^{((i\omega_i)\Delta t)}$$

$$\lambda^2 = \{ 1 + 2C \{ \cos(k\Delta x) \} - C \} (1 - C)$$

Somando os quadrados das equações acima, obtemos

$$\lambda = \pm \sqrt{\{ 1 + C(2\{ \cos(k\Delta x) \} - 1) \} (1 - C)}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda = \pm \sqrt{\{1 + C(2\{\cos(k\Delta x)\} - 1)\}(1 - C)} \quad 12.3.20$$

Estabilidade numérica ou computacional requer $|\lambda| \leq 1$ ou

$$\{1 + C(2\{\cos(k\Delta x)\} - 1)\}(1 - C) < 1$$

É válido se $C \leq 1$, pois $\{\cos(k\Delta x) - 1\} < 0$ é sempre negativo.

$$\lambda = \pm \sqrt{\{1 + C(2\{\cos(k\Delta x)\} - 1)\}(1 - C)}$$

Assim, requer $(\Delta t) \leq (\Delta x/c)$ para que o esquema forward in time e upstream in space seja estável.

Esta condição é chamada de critério de estabilidade CFL (Courant-Friedrichs-Lew)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Assim, o **esquema de avançado no tempo e upstream no espaço** é **condicionalmente estável** quando atende ao critério CFL.

- Observe que o **critério de estabilidade CFL** é apenas uma **condição necessária** para a **estabilidade numérica** deste esquema e a **condição suficiente para a estabilidade é muitas vezes mais restritiva e difícil de obter**.
- Além da **mudança potencial na amplitude da onda**, a **fase de uma onda pode ser alterada** após a aplicação de um método numérico na solução de uma equação diferencial.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para investigar as características de fase do esquema forward-in-time e upstream-in-space, podemos dividir (12.3.19b) por (12.3.19a)

$$e^{-i(\omega_r + i\omega_i)\Delta t} = 1 - C [1 - e^{-ik\Delta x}], \quad C \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (12.3.18)$$

or Definição de numero complexo $e^{-i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

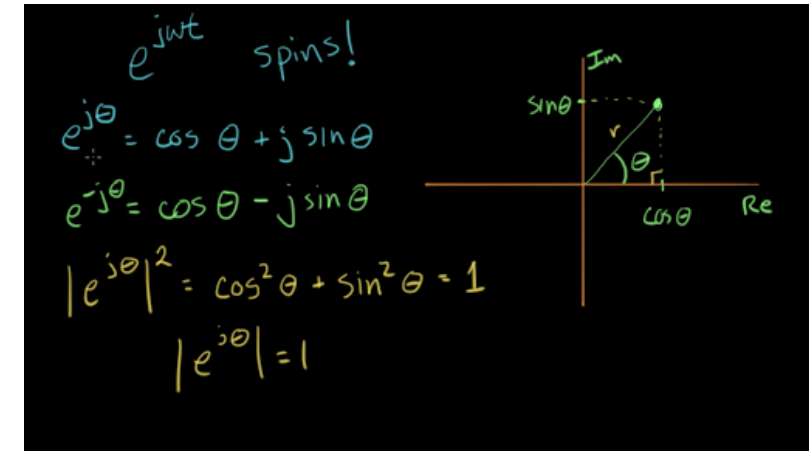
$$\lambda \cos \omega_r \Delta t = 1 - C [1 - \cos k\Delta x], \quad (12.3.19a) \quad \text{Parte real}$$

$$\lambda \sin \omega_r \Delta t = C \sin k\Delta x, \quad \lambda = e^{\omega_i \Delta t}. \quad (12.3.19b) \quad \text{Parte imaginaria}$$

obter

$$\tan(\omega_r \Delta t) = \frac{C \sin(k\Delta x)}{1 + C [\cos(k\Delta x) - 1]}$$

$$\omega_r \Delta t = \arctan(\tan(\omega_r \Delta t)) = \tan^{-1}(\tan) = \tan^{-1} \left[\frac{C \sin(k\Delta x)}{1 + C [\cos(k\Delta x) - 1]} \right]$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Com base na equação acima e (12.3.16), a **velocidade de fase computacional** \tilde{c}_p pode ser obtida

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x)} e^{-i(\omega_r)\tau\Delta t} (\lambda)^\tau \quad 12.3.16$$

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - \omega_r\tau\Delta t)} (\lambda)^\tau$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$\lambda = e^{((i\omega_i)\Delta t)}$$

$$\omega_r\Delta t = \arctan(\tan(\omega_r\Delta t)) = \tan^{-1}(\tan) = \tan^{-1} \left[\frac{C \sin(k\Delta x)}{1 + C[\cos(k\Delta x) - 1]} \right]$$

$$\tilde{c}_p = \frac{\omega_r}{k} = \frac{1}{k\Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{C \sin(k\Delta x)}{1 + C[\cos(k\Delta x) - 1]} \right)$$

Isso indica que o **esquema de diferenças finitas de avançado no tempo e upstream no espaço é dispersivo**, pois a velocidade de fase computacional \tilde{c}_p é uma função do número de onda (k).

$$\theta = kx - \omega t = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$v = + \frac{\omega}{k}$$

propagação: +Ox

ou

$$\theta = kx + \omega t = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = - \frac{\omega}{k}$$

propagação: -Ox

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Baseado na equação de advecção, (12.3.1), e na Eq. (12.3.7), a **velocidade de fase física para a equação de advecção** pode ser obtida,

$$c_p = \frac{\omega}{k} = c \quad 12.3.24$$

Assim, a **onda é fisicamente não dispersiva**, pois a **velocidade da fase física é independente do número da onda**.

No entanto, **o método numérico aplicado aqui introduz um modo de onda computacional, que é dispersivo**. Em outras palavras, semelhante à dispersão física, **ondas com comprimentos de onda diferentes se propagam em velocidades diferentes**. Desta forma, **a onda não consegue preservar seu padrão de onda original e é chamada de onda dispersiva**.

É interessante observar que a **dispersão da onda** pode ser **induzida** por um **esquema numérico**, além da dispersão física da onda.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A razão entre a velocidade de fase computacional (\tilde{c}_p) e a velocidade de fase física (c_p) é

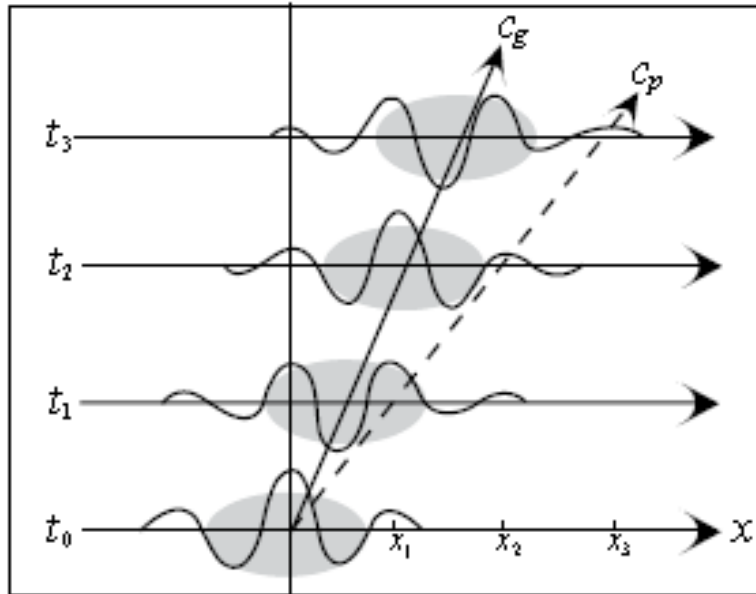
$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{1}{kc\Delta t} \tan^{-1} \left[\frac{C \sin k\Delta x}{1 + C(\cos k\Delta x - 1)} \right], \quad (12.3.25)$$

o que indica que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_p &> c_p \text{ when } 0.5 < C < 1.0 \text{ and} \\ \tilde{c}_p &< c_p \text{ when } 0 < C < 0.5. \end{aligned} \quad (12.3.26)$$

Exemplo de dispersão de onda:

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas



Atrasa a simulação dos sistemas frontais

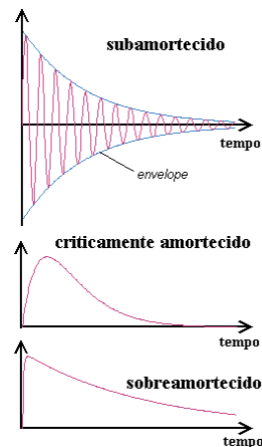
$$\tilde{c}_p = \frac{\omega_r}{k} = \frac{1}{k\Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{C \sin(k\Delta x)}{1 + C[\cos(k\Delta x) - 1]} \right)$$

é dispersivo

Fig 3.1 A propagação de um grupo de ondas e uma onda individual. As linha solida e pontilhada definem a velocidade de grupo (\tilde{c}_p) e a velocidade de fase c_p respectivamente. A área oval sombreada definem a concentração da energia das ondas que propagam com velocidade de grupo. A velocidade de fase c_p é igual a x/t

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- Além da instabilidade numérica e dispersão numérica, um método numérico também pode introduzir **amortecimento numérico**.



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

- Além da **instabilidade numérica** e **dispersão numérica**, um método numérico também pode introduzir **amortecimento numérico**.

Por exemplo, com base na Eq. (12.3.20),

$$\lambda = \pm \sqrt{1 + 2C(\cos k\Delta x - 1)(1 - C)} \quad (12.3.20)$$

quando $C=0.1$ ou $k \approx 0$ (**ondas muito longas**), temos $\lambda = 1$. Isso significa que a **amplitude será mantida** a mesma, ou digamos, **não existe amortecimento nessas condições especiais ($C=0.1$ ou $k \approx 0$)**.

No entanto, isso não se aplica em geral.

Assim, o esquema de avançado no tempo e upstream no espaço **tende em geral a amortecer as ondas**, principalmente em $C=0.5$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Para **demonstrar as características de amortecimento**, podemos usar uma aproximação de série de Taylor truncada para a equação de advecção

$$u_i^{\tau+1} \cong u_i^{\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 \quad 12.3.27$$

Note:

$$u(t + \Delta t, x) = u(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 \quad \text{onde } u(t + \Delta t, x) = u_i^{\tau+1} \text{ e } u(t, x) = u_i^{\tau}$$

$$u_{i-1}^{\tau} \cong u_i^{\tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad 12.3.28$$

Substituindo as aproximações acima no esquema de avanço no tempo e upstream no espaço, ou seja, (12.3.17a),

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x} \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.17a$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x} \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.17a$$

Pode-se aproximar usando a 12.3.27 e 12.3.28

$$\frac{\left(u_i^{\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2\right) - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_i^{\tau} - \left(u_i^{\tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2\right)}{\Delta x} \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.17a$$

que pode ser rearranjado para ser

$$u_i^{\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 - u_i^{\tau} = -\frac{c \Delta t}{\Delta x} u_i^{\tau} + \frac{c \Delta t}{\Delta x} \left(u_i^{\tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2\right) \quad \text{se } c > 0$$

$$u_i^{\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 - u_i^{\tau} = -\frac{c \Delta t}{\Delta x} \left(u_i^{\tau} - u_i^{\tau} + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2\right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 = -\frac{c \Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2\right) \quad \text{se } c > 0$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 = -\frac{c \Delta t}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t = -\frac{c}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t = \left(-\frac{c}{\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{c}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 \right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t = \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t = \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right) \quad \text{se } c > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c \Delta x \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.29$$

Na derivação acima, assumimos $c > 0$ sem perda de generalidade.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c \Delta x \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.29$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left[\frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left[\frac{\partial c}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left[c \frac{\partial}{\partial x} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c \Delta x \quad \text{se } c > 0 \quad 12.3.29$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.30$$

Substituindo a equação acima na Eq. (12.3.29)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} c \Delta x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{c \Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{c^2 \Delta t}{2} - \frac{c \Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{c^2 \Delta t}{2} - \frac{c \Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = - \left(\frac{c \Delta x}{2} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = + \left(\frac{c \Delta x}{2} - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{c \Delta x}{2} \left(1 - \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{c \Delta x}{2} (1 - C) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$C = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{c \Delta x}{2} (1 - C) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$v_c = \frac{c \Delta x}{2} (1 - C)$$

$$C = \frac{c \Delta t}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = + v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$

Portanto, o modo computacional tende a amortecer a onda física e v_c é chamado de **coeficiente de difusão numérico** ou **computacional**.

As características de amortecimento do termo v_c podem ser mostradas resolvendo a Eq. (12.3.31) sem o termo de advecção, assumindo uma perturbação do tipo onda, ou seja,

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = +v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$

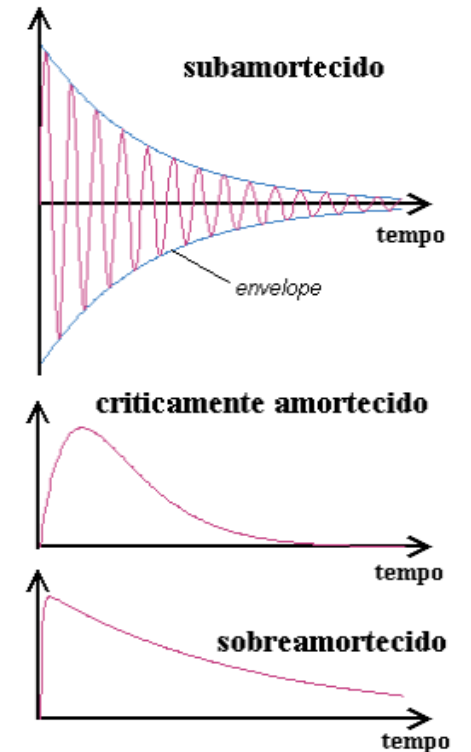
As características de amortecimento do termo v_c podem ser mostradas resolvendo a Eq. (12.3.31) sem o termo de advecção, assumindo uma perturbação do tipo onda, ou seja,

$$u(x, t) = \tilde{u}(k, t) \exp\{ikx\}$$

$$u(x, t) = \tilde{u}(k, t) \{A \sin(kx) + B \cos(kx)\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$

Oscilador amortecido



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = +v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$

As características de amortecimento do termo v_c podem ser mostradas resolvendo a Eq. (12.3.31) sem o termo de advecção, assumindo uma perturbação do tipo onda, ou seja,

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(knx - \omega\tau t)} \Rightarrow u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

Oscilador amortecido

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}(k, \omega)}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)} + \tilde{u}(k, \omega) \frac{\partial}{\partial t} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \tilde{u}(k, \omega) (-i\omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

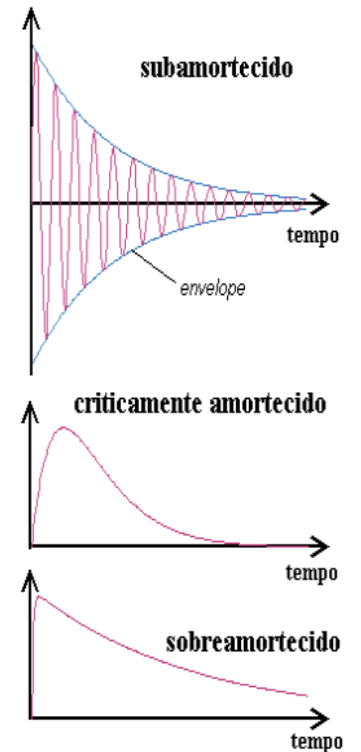
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -i\omega \tilde{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}(k, \omega)}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)} + \tilde{u}(k, \omega) \frac{\partial}{\partial x} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = ik \tilde{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\tilde{u}(k, \omega) k^2 e^{i(kx - \omega t)}$$

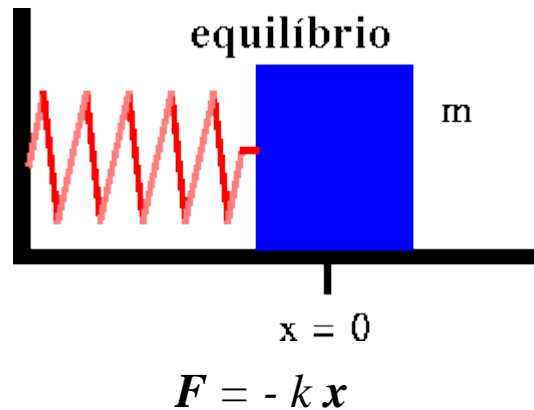
$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Oscilador amortecido

O que acontece quando o oscilador é amortecido, ou seja quando há atrito entre o corpo preso à mola e o plano, ou quando se considera a força de atrito com o pêndulo e o ar ? Forças de atrito são geralmente proporcionais à velocidade.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{K}{m}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{K}{m}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} \quad 9.20$$

onde $b = m\gamma$ é a constante de atrito (daqui em diante simplesmente chamaremos γ de constante de atrito) .

Se não houvesse a força de restauração da mola, a equação acima ficaria,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} \quad 9.21$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Oscilador amortecido

cujas soluções são da forma $x(t) = C e^{-\gamma t}$, onde C é uma constante que depende da posição e velocidade inicial. Ou seja, a massa pára com uma taxa de desaceleração exponencial. Sem a força de atrito o movimento é oscilatório, com frequência ω , como vimos anteriormente. É fácil ver que no caso do movimento oscilatório amortecido, ele deve ter uma solução intermediária, onde a velocidade angular deve ser um pouco modificada pela oscilação.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{K}{m}\right)x \quad 9.3$$

A melhor maneira de resolver a equação diferencial [9.3] é utilizando o conceito de números complexos, em particular da **exponencial complexa**. A fórmula abaixo para a exponencial complexa é conhecida como uma **pérola da matemática**.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} \quad 9.20$$

Para resolver a equação [9.20] supomos que a solução seja na forma

$$x(t) = A e^{-i(\lambda t + \phi)} \quad 9.23$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} \quad 9.20$$

A razão para isso é que a derivada de uma exponencial é proporcional à própria exponencial, o que faz com que equações do tipo [9.20] fiquem muito simples de resolver, como veremos.

Mas, note que a solução tem que ser real, já que as distâncias medidas são reais. O truque está exatamente nesta questão. Usamos [9.23] para achar os valores de λ que satisfazem a equação [9.20]

$$x(t) = Ae^{-i(\lambda t + \phi)} \quad 9.23$$

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x - \gamma dx/dt \quad [9.20]$$

substituímos as soluções possíveis de λ em [9.23] e no final, tomamos a parte real de [9.23], que é o que nos interessa.

Esse truque funciona, e é muito poderoso no cálculo diferencial. Vamos constatar isso agora.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$x(t) = A e^{i(\lambda t + \phi)} \quad [9.23]$$

A derivada de [9.23] é $dx/dt = i\lambda A e^{i(\lambda t + \phi)}$.

A segunda derivada é $d^2x/dt^2 = -\lambda^2 A e^{i(\lambda t + \phi)}$ (já que $i^2 = -1$).]

Substituindo estes resultados em [9.20] obtemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \gamma \frac{dx}{dt} = 0 \quad 9.20$$

$$(-\lambda^2 + i\lambda\gamma + \omega^2) A e^{i(\lambda t + \phi)} = 0 \quad [9.24]$$

Como esta relação é válida para todo t , temos que o valor em **parênteses** tem que se anular identicamente:

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$-\lambda^2 + i\lambda\gamma + \omega^2 = 0 \quad [9.25]$$

Cujas soluções são

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2(-1)} \pm \frac{1}{2(-1)} \sqrt{(i\lambda)^2 - 4(-1)(\omega^2)}$$

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2} \pm \frac{1}{-2} \sqrt{-\lambda^2 + 4\omega^2}$$

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2} \pm \frac{1}{-2} \sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2} \pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda = i\gamma/2 \pm (\omega^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2} \pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right)$$

Substituindo esse resultado na solução, e tomando a sua parte real, temos que a solução final da equação [9.23] é (não importa qual das soluções tomemos: a de sinal +, ou a de sinal -)

$$x(t) = A e^{i(\lambda t + \phi)} \quad [9.23]$$

$$x(t) = A e^{i \left\{ \left(\frac{i\gamma}{2} \pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right) \right) t + \Phi \right\}}$$

$$x(t) = A e^{i \left\{ \left(\frac{i\gamma}{2} \right) t \right\}} e^{i \left\{ \left(\pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right) \right) t \right\}} e^{i \{ \Phi \}}$$

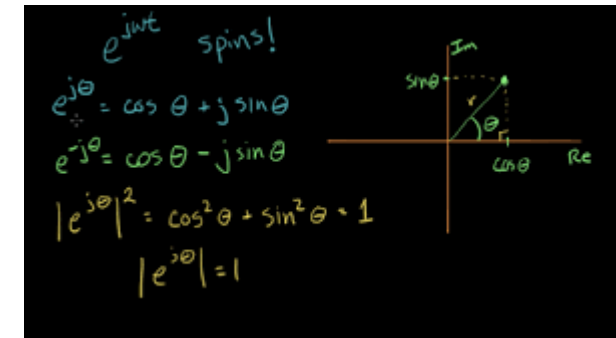
$$x(t) = A e^{-\left(\frac{\gamma}{2} \right) t} e^{i \left\{ \left(\pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right) \right) t + \Phi \right\}}$$

Uma das soluções

$$x(t) = A e^{-\left(\frac{\gamma}{2} \right) t} e^{i \left\{ \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} \right) t + \Phi \right\}}$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos (\omega' t + \phi) \quad [9.27]$$

$$\text{onde } \omega' = (\omega^2 - \gamma^2/4)^{1/2}.$$



Somente a parte real

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

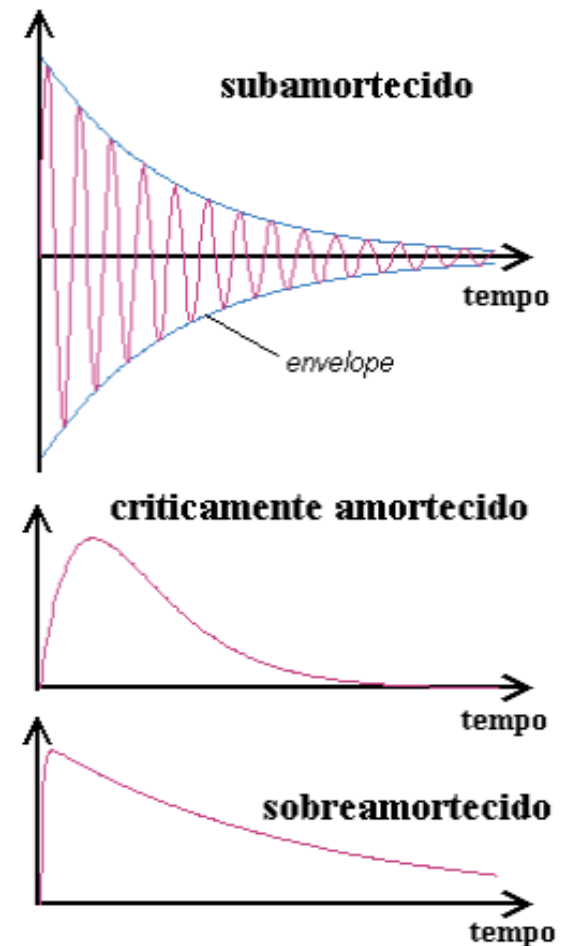
Dependendo se $\gamma^2/4$ for **menor**, **igual**, ou **maior** do que ω^2 , podemos distinguir 3 casos:

O caso **subamortecido**: $\gamma^2/4 < \omega^2$. Neste caso, a oscilação se repete durante vários ciclos e a amplitude das oscilações diminui com o tempo. A amplitude decrescente da oscilação é chamada de *envelope*.

O caso de **amortecimento crítico**: $\gamma^2/4 = \omega^2$. Neste caso, não há oscilação completa, antes de a oscilação se completar a massa pára. Vemos isto na figura acima, onde a massa começa da posição de equilíbrio, alcança uma distância máxima, e volta, parando na posição de equilíbrio depois de um certo tempo.

O caso de **amortecimento subcrítico ou sobreamortecido**: $\gamma^2/4 > \omega^2$. Neste caso, a massa nem alcança a posição de equilíbrio em um tempo finito. A distância diminui exponencialmente no tempo.

$$\lambda = \frac{i\gamma}{2} \pm \left(-\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \right)$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 12.3.31$$

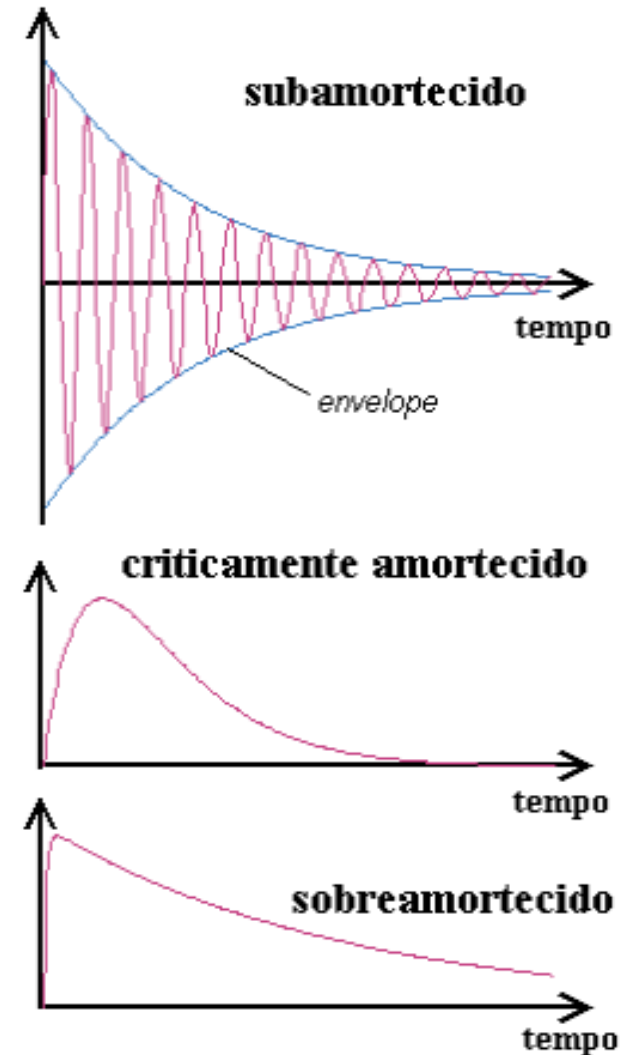
$$\frac{d u}{d t} = v_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{d x}{d t} \quad 9.20$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -i\omega \tilde{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\tilde{u}(k, \omega) k^2 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-i\omega \tilde{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} = -\tilde{u}(k, \omega) k^2 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$-i\omega = -k^2$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$-i\omega = -k^2$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

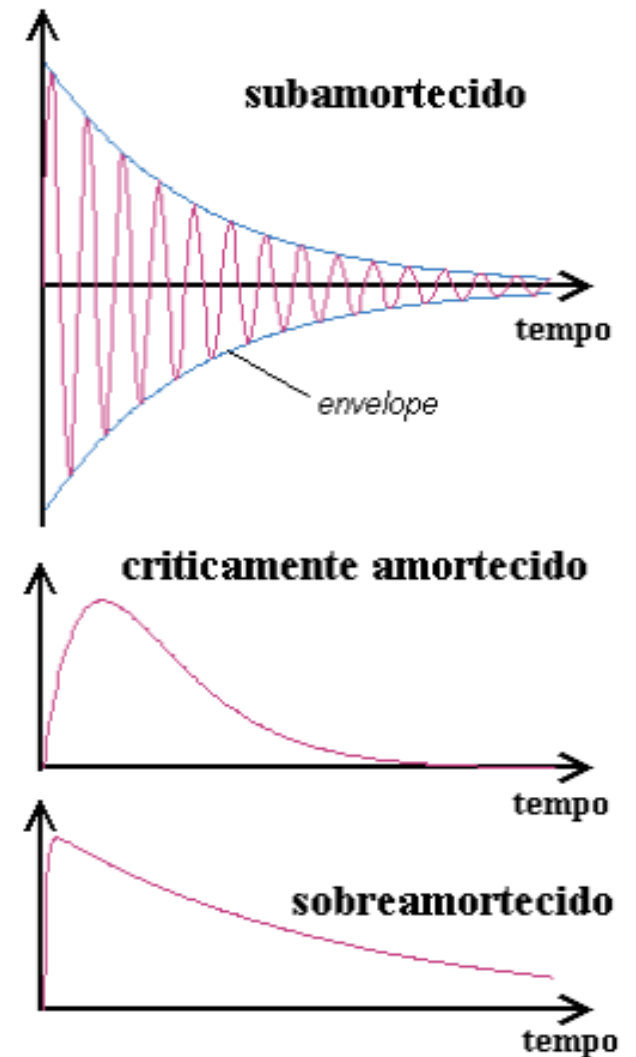
$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx)} e^{-i(\omega t)}$$

$$u(x, t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx)} e^{-k^2 t}$$

$$e^{-k^2 t}$$



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquema UPSTREAn

□ Esta **técnica é aceitável** se a **advecção** e a **propagação de ondas** **não forem dominantes nas relações de conservação** para um determinado fenômeno de mesoescala.

Além disso, **se a mistura da sub-grade for importante**, v_c **deve ser menor que o correspondente coeficiente de troca turbulenta** fisicamente relevante para evitar o excesso de amortecimento.

Devido ao **desenvolvimento de esquemas de três níveis de tempo** mais precisos e ao avanço da facilidade de computação, **esse esquema se torna menos atraente** para modeladores de mesoescala.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(c) Esquema Lax-Wendroff

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(c) Esquema Lax-Wendroff

Este esquema foi originalmente proposto por Lax e Wendroff (1960). O procedimento de cálculo é baseado no estêncil de grade mostrado na Fig. 12.5 e no procedimento a seguir.

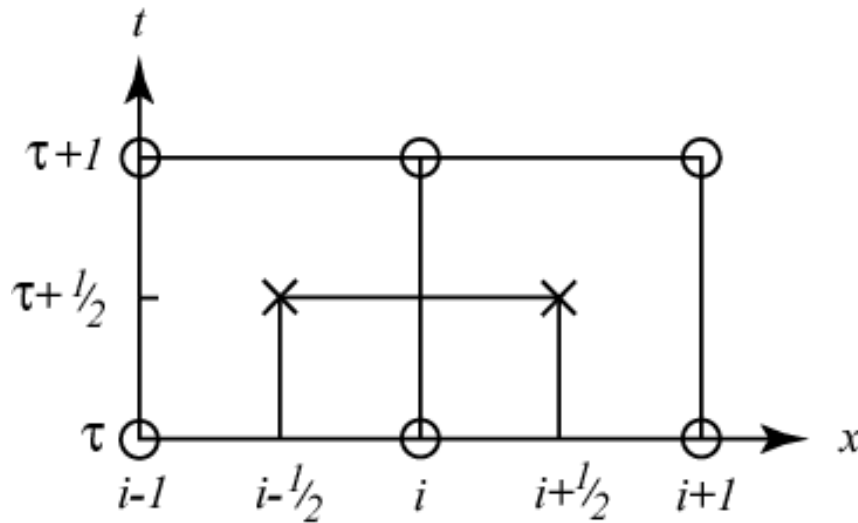


Fig. 12.5: Estêncil de grade para o esquema Lax Wendroff.

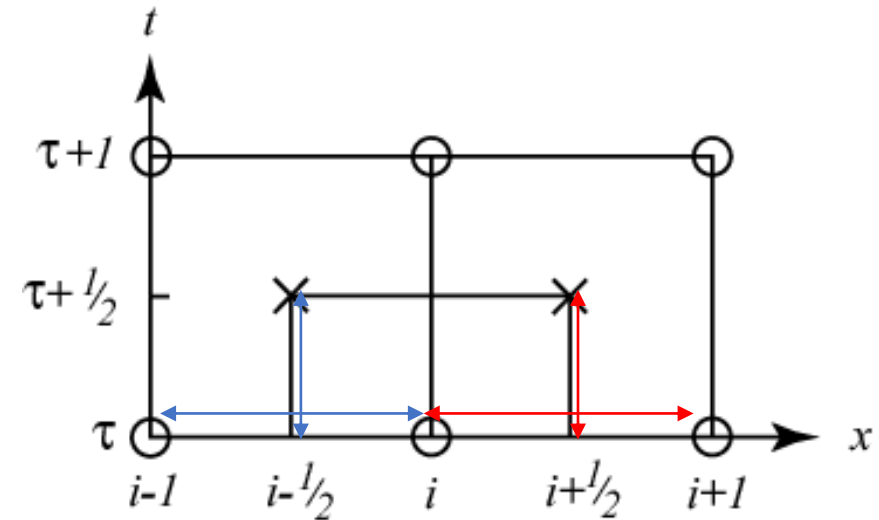
3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Primeiro, os valores provisórios de u no intervalo de tempo provisório $\tau + \frac{1}{2}$ e os pontos de grade $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{1}{2}$ são calculados nos pontos indicados pelo símbolo de cruz aplicando o esquema de avanço no tempo e centrado no espaço.

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = -c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}}{\Delta x}$$

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x}$$

12.3.32

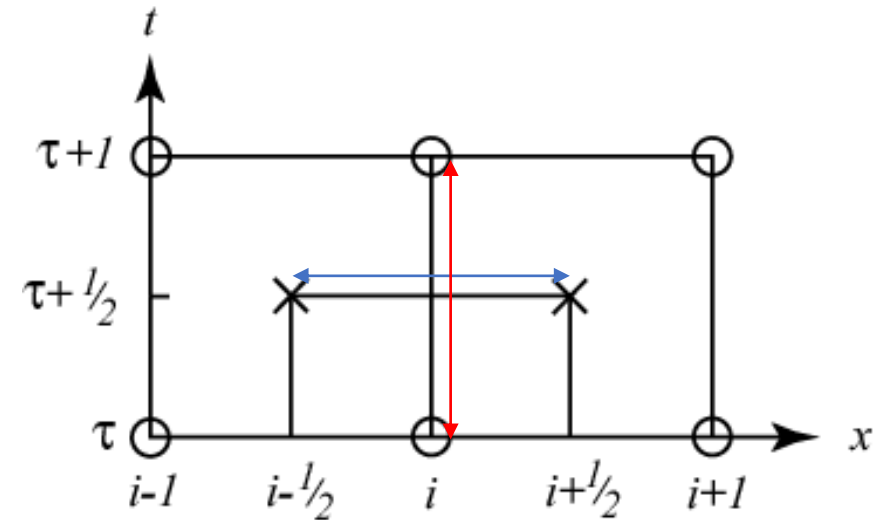


3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Então, aplicando o **esquema de diferença centrada** de segunda ordem no tempo e no espaço para valores nos pontos da grade $u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$, $u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$ e u_i^τ dá,

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} = -C \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad 12.3.33$$

Finalmente, substituindo os valores provisórios $u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$, $u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$ acima de (12.3.32) na (12.3.33) leva a



3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = -c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}}{\Delta x} \quad 12.3.32a$$

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} = -c \frac{u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{\Delta x} \quad 12.3.32$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2} = -c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}) \quad 12.3.32a$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x} c (u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.32$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}) \quad 12.3.32a$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} c (u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.32$$

Subtraia 12.3.32^a - 12.3.32

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2} - \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} c (u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau})$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau}}{2} - \frac{u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} c (u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_i^{\tau}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} c (u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2} + c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (-u_{i+1}^{\tau} + u_i^{\tau} + u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2} + c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (-u_{i+1}^{\tau} + 2u_i^{\tau} - u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2} - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

$$c \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{c}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) - c^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

Substituindo na 12.3.33

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad 12.3.33$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + c^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau}}{\Delta t} = -\frac{c}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + c^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau} = -\frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau})$$

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}) \quad C = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{2} (u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + \frac{C^2}{2} (+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.34$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{2}(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + \frac{C^2}{2}(+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.34$$

Do ponto de vista computacional, $u_{i+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$, $u_{i-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$ são provisórios, pois não aparecem em (12.3.34), portanto não há necessidade de armazená-los permanentemente. Isso economiza a memória do computador, assim como os esquemas de dois níveis de tempo discutidos anteriormente.

O esquema Lax-Wendroff tem um erro de truncamento de $O[\Delta x^2]$ e $O[\Delta t^2]$. Em outras palavras, tem precisão de segunda ordem no espaço e no tempo. Esta é uma melhoria da precisão em esquemas de dois nível de tempo.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Estabilidade do Esquema Lax-Wendroff

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{2}(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + \frac{C^2}{2}(+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}) \quad 12.3.34$$

Pode-se derivar que

$$|\lambda| = \sqrt{\left[1 - 4C^2(1 - C^2)\sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]} \quad 12.3.35$$

Assim, o esquema de Lax-Wendroff é estável se $C^2 \leq 1$ ou $\frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 12.3.36

Ou seja, o critério de estabilidade CFL. **Pode-se provar que o último termo de (12.3.34) serve como termo de amortecimento. De fato, o esquema de Lax-Wendroff pode ser visto como a modificação do esquema de avanço no tempo e centrado no espaço com amortecimento.**

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Características de amortecimento do Esquema Lax-Wendroff.

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Para o menor comprimento de onda resolvível $L = 2\Delta x$, temos $k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow k = \frac{\pi}{\Delta x}$. Substituindo k em (12.3.35) resulta

$$|\lambda| = \sqrt{\left[1 - 4C^2(1 - C^2)\sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]} \quad 12.3.35$$

$$|\lambda| = \sqrt{\left[1 - 4C^2(1 - C^2)\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1 - 4C^2(1 - C^2)]}$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1 - 4C^2 + 4C^4]}$$

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - 2C^2)^2}$$

$$|\lambda| = |1 - 2C^2|$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Características de amortecimento do Esquema Lax-Wendroff.

Para o menor comprimento de onda resolvível $L = 4\Delta x$, temos $k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow k = \frac{\pi}{2\Delta x}$. Substituindo k em (12.3.35) resulta

$$|\lambda| = \sqrt{\left[1 - 4C^2(1 - C^2)\sin^4\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]} \quad 12.3.35 \quad \sin^4(45) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\left[1 - 4C^2(1 - C^2)\sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1 - C^2(1 - C^2)]}$$

$$|\lambda| = \sqrt{[1 - C^2 + C^4]}$$

Portanto, a quantidade de amortecimento é bastante grande para ondas mais curtas.

$$L = 2\Delta x \Rightarrow |\lambda| = |1 - 2C^2|$$

$$L = 4\Delta x \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{[1 - C^2 + C^4]}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Características de fase do Esquema Lax Wendroff:

O erro de fase também pode ser calculado,

$$\frac{\tilde{c}_p}{c} = \frac{\tan^{-1} \left\{ \frac{-C \sin(k\Delta x)}{1 - C^2(1 - \cos(k\Delta x))} \right\}}{-Ck\Delta x}$$

Assim, o **esquema de Lax-Wendroff é dispersivo**, pois \tilde{c}_p é **função do número de onda (k)**.

Tem **um erro de fase predominantemente atrasado**, **exceto para grandes números de onda** com $\sqrt{0.5} \leq C < 1$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Modificações do Esquema Lax-Wendroff

(d) O esquema Crowley

O esquema de Lax-Wendroff foi modificado por Crowley (1968) para a seguinte fórmula

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{2}(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) + \frac{C^2}{2}(+u_{i+1}^{\tau} - 2u_i^{\tau} + u_{i-1}^{\tau}) + \frac{C}{12}(1 - C^2)(+u_{i+2}^{\tau} - 2u_{i+1}^{\tau} + 2u_{i-1}^{\tau} - u_{i-2}^{\tau}) \quad 12.3.40$$

O esquema acima também é conhecido como **esquema de Crowley**. O último termo na equação acima é o termo de correção espacial de terceira ordem.

Para manter a quantidade de amortecimento pequena, Kasahara (1969) combinou o esquema Lax-Wendroff com o esquema Leapfrog (que é neutro). O esquema Lax-Wendroff é aplicado apenas uma vez a cada passo de cem timestep.

O esquema Lax-Wendroff foi amplamente utilizado em modelos atmosféricos devido à sua vantagem de dois níveis de tempo, precisão de segunda ordem e características explícitas (Richmyer, 1963).

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Warming-Kutler-Lomax (WKL) scheme

Warming, Kutler e Lomax (1973) propuseram um esquema modificado de 2 níveis de tempo com três etapas de 3 etapas representadas por

Step 1:

$$u_i^* = u_i^\tau - \frac{2C}{3}(u_{i+1}^\tau - u_i^\tau)$$

$$u_{i-1}^* = u_{i-1}^\tau - \frac{2C}{3}(u_i^\tau - u_{i-1}^\tau)$$

$$u_{i+1}^* = u_{i+1}^\tau - \frac{2C}{3}(u_{i+1}^\tau - u_i^\tau)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Warming-Kutler-Lomax (WKL) scheme

Warming, Kutler e Lomax (1973) propuseram um esquema modificado de 2 níveis de tempo com três etapas de 3 etapas representadas por

Step 2:

$$u_i^{**} = \frac{1}{2} \left[u_i^\tau + u_i^* - \frac{2C}{3} (u_i^* - u_{i-1}^*) \right]$$

$$u_{i+1}^{**} = \frac{1}{2} \left[u_{i+1}^\tau + u_{i+1}^* - \frac{2C}{3} (u_{i+1}^* - u_i^*) \right]$$

$$u_{i-1}^{**} = \frac{1}{2} \left[u_{i-1}^\tau + u_{i-1}^* - \frac{2C}{3} (u_{i-1}^* - u_{i-2}^*) \right]$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Warming-Kutler-Lomax (WKL) scheme

Warming, Kutler e Lomax (1973) propuseram um esquema modificado de 2 níveis de tempo com três etapas de 3 etapas representadas por

Step 3:

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{24}(-2u_{i+2}^{\tau} + 7u_{i+1}^{\tau} - 7u_{i-1}^{\tau} + 2u_{i-2}^{\tau}) - \frac{3C}{8}(u_{i+1}^{**} - u_{i-1}^{**}) - \frac{\alpha}{24}(u_{i+2}^{\tau} - 4u_{i+1}^{\tau} + 6u_i^{\tau} - 4u_{i-1}^{\tau} + u_{i-2}^{\tau}) \quad 12.3.41$$

onde α é um parâmetro livre adicionado para garantir a estabilidade computacional. Observe que u_i^{} os valores são provisórios, não necessitando de armazenamento permanente na memória do computador.**

A vantagem do esquema WKL é que ele pode economizar memória enquanto aumenta a precisão como um método de 2 níveis de tempo.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) *Warming-Kutler-Lomax (WKL) scheme*

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} - \frac{C}{24}(-2u_{i+2}^{\tau} + 7u_{i+1}^{\tau} - 7u_{i-1}^{\tau} + 2u_{i-2}^{\tau}) - \frac{3C}{8}(u_{i+1}^{**} - u_{i-1}^{**}) - \frac{\alpha}{24}(u_{i+2}^{\tau} - 4u_{i+1}^{\tau} + 6u_i^{\tau} - 4u_{i-1}^{\tau} + u_{i-2}^{\tau}) \quad 12.3.41$$

O último termo de (12.3.41) (ou seja, o termo com α) é **análogo à suavização** ou **difusão numérica de cinco pontos**. Pode-se mostrar que este esquema é estável quando

$$|C| \leq 1 \text{ and } 4C^2 - C^4 \leq \alpha \leq 3. \quad (12.3.42)$$

O esquema tem uma **dissipação mínima** quando

$$\alpha = \alpha_1 = 4C^2 - C^4, \quad (12.3.43)$$

e uma **dispersão mínima** quando

$$\alpha = \alpha_2 = \frac{(4C^2 + 1)(4 - C^2)}{5}. \quad (12.3.44)$$

Os leitores devem consultar Andersen e Fattahi (1974) para uma revisão mais detalhada desse esquema.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Esquemas de vários estágios

A equação de advecção pode ser vista como um caso especial da seguinte equação,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) \quad 12.3.45$$

O termo advectivo é considerado o termo forçante.

Para melhorar a precisão dos esquemas de dois níveis de tempo, como a diferença direta(forward) no tempo, a Eq. (12.3.45) pode ser aproximado pelo esquema de múltiplos estágios,

$$\tilde{u}_i^{\tau+\alpha} = u_i^\tau + \alpha \Delta t F(u_i^\tau)$$

$$\tilde{u}_i^{\tau+1} = u_i^\tau + \Delta t [\beta F(\tilde{u}_i^{\tau+\alpha}) + (1 - \beta) F(u_i^\tau)] \quad 12.3.46$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Esquemas de vários estágios

$$\tilde{u}_i^{\tau+\alpha} = u_i^\tau + \alpha \Delta t F(u_i^\tau)$$

$$\tilde{u}_i^{\tau+1} = u_i^\tau + \Delta t [\beta F(\tilde{u}_i^{\tau+\alpha}) + (1 - \beta) F(u_i^\tau)] \quad 12.3.46$$

O método acima reduz ao

- (1) Esquemas Runge-Kutta de segunda ordem quando $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ (por exemplo, o esquema de diferença de tempo do modelo WRF)**
- (2) Esquema de Heun quando $\alpha = 1$ e $\beta = \frac{1}{2}$**
- (3) Esquema forward-backward ou Matsuno quando $\alpha = \beta = 1$ (Matsuno 1966).**

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

(a) **Leapfrog no tempo** e esquemas centrados no espaço **A equação de advecção também pode ser aproximada pelo esquema de segunda ordem centrada (leapfrog) no tempo e diferença centrada em segunda ordem no espaço,**

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \quad 12.3.48$$

Substituindo a solução de onda Eq. (12.3.8)

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}$$

$$u(n\Delta x, (\tau + 1)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)}$$

$$u(n\Delta x, (\tau - 1)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau-1)\Delta t)}$$

$$u((n + 1)\Delta x, (\tau)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}$$

$$u((n - 1)\Delta x, (\tau)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$u(n\Delta x, (\tau + 1)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)}$$

$$u(n\Delta x, (\tau - 1)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau-1)\Delta t)}$$

$$u((n + 1)\Delta x, (\tau)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}$$

$$u((n - 1)\Delta x, (\tau)\Delta t) = \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}}{2\Delta x} \quad 12.3.48$$

Substituindo a solução de onda Eq. (12.3.8)

$$\frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau-1)\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{\hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)} - \hat{u}(k, \omega)e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}}{2\Delta x}$$

$$\frac{e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau-1)\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)} - e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}}{2\Delta x}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\frac{e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau+1)\Delta t)} - e^{-i(kn\Delta x - \omega(\tau-1)\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k(n+1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)} - e^{-i(k(n-1)\Delta x - \omega(\tau)\Delta t)}}{2\Delta x}$$

$$\frac{e^{-i(kn\Delta x)} e^{+i(\omega(\tau)\Delta t)} e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(kn\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)} e^{-i(\omega\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k(n)\Delta x)} e^{-i(k\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)} - e^{-i(k(n)\Delta x)} e^{i(k\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)}}{2\Delta x}$$

$$\frac{e^{-i(kn\Delta x)} e^{+i(\omega(\tau)\Delta t)} e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(kn\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)} e^{-i(\omega\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k(n)\Delta x)} e^{-i(k\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)} - e^{-i(k(n)\Delta x)} e^{i(k\Delta x)} e^{i(\omega(\tau)\Delta t)}}{2\Delta x}$$

$$e^{-i(kn\Delta x)} e^{+i(\omega(\tau)\Delta t)} \frac{e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)}}{2\Delta t} = -c e^{-i(kn\Delta x)} e^{+i(\omega(\tau)\Delta t)} \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2\Delta x}$$

$$\frac{e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2\Delta x}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\frac{e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)}}{2\Delta t} = -c \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2\Delta x}$$

$$e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)} = -c \frac{2\Delta t}{\Delta x} \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2}$$

$$e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)} = -c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{-i(k\Delta x)} - e^{i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$e^{+i(\omega\Delta t)} - e^{-i(\omega\Delta t)} = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$e^{+i(\omega_r+i\omega_i)\Delta t} - e^{-i(\omega_r+i\omega_i)\Delta t} = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$e^{+i(\omega_r)\Delta t} e^{+i(i\omega_i)\Delta t} - e^{-i(\omega_r)\Delta t} e^{-i(i\omega_i)\Delta t} = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$e^{+i(\omega_r)\Delta t} e^{-\omega_i\Delta t} - e^{-i(\omega_r)\Delta t} e^{\omega_i\Delta t} = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$\lambda = e^{\omega_i\Delta t} \quad e \quad C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$e^{+i(\omega_r)\Delta t} \frac{1}{\lambda} - e^{-i(\omega_r)\Delta t} \lambda = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$e^{+i(\omega_r)\Delta t} \frac{1}{\lambda} - e^{-i(\omega_r)\Delta t} \lambda = c \frac{2\Delta t}{\Delta x} i \frac{e^{i(k\Delta x)} - e^{-i(k\Delta x)}}{2i}$$

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - \frac{1}{\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t}} = -2C i \sin(k\Delta x)$$

$$-\frac{1}{\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t}} = -\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - 2C i \sin(k\Delta x)$$

$$\frac{1}{\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t}} = \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} + 2C i \sin(k\Delta x)$$

$$1 = \lambda^2 e^{-2i(\omega_r)\Delta t} + 2C i \sin(k\Delta x) \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t}$$

$$\lambda^2 e^{-2i(\omega_r)\Delta t} + 2C \sin(k\Delta x) i \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - 1 = 0$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\lambda^2 e^{-2i(\omega_r)\Delta t} + 2C \sin(k\Delta x) i \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - 1 = 0$$

$$\lambda^2 e^{-2i(\omega_r)\Delta t} + i\alpha \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - 1 = 0 \quad 12.3.50$$

$$(\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t})^2 + i\alpha \lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} - 1 = 0$$

$$(x)^2 + i\alpha x - 1 = 0$$

$$ax^2 + b x - c = 0$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{i\alpha \pm \sqrt{(i\alpha)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$x = \frac{i\alpha \pm \sqrt{(i\alpha)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + 4}}{2}$$

$$x = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2}}{2}$$

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \quad 12.3.51$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4-\alpha^2}}{2} \quad 12.3.51$$

Existem dois casos possíveis, a saber, (1) $\alpha^2 \leq 4$ e (2) $\alpha^2 > 4$.

Case 1: $\alpha^2 \leq 4$

Separando as partes real e imaginária $e^{-i(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ de (12.3.51) dá

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) + i\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4-\alpha^2}}{2} \quad 12.3.51$$

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) = \frac{\pm \sqrt{4-\alpha^2}}{2} \quad 12.3.52a$$

$$\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = \frac{\alpha}{2} \quad 12.3.52b$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) = \frac{\pm\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \quad 12.3.52a$$

$$\lambda^2 \cos^2((\omega_r)\Delta t) = \frac{\pm 4 - \alpha^2}{4} \quad 12.3.52a$$

$$\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = \frac{\alpha}{2} \quad 12.3.52b$$

$$\lambda^2 \sin^2((\omega_r)\Delta t) = \frac{\alpha^2}{4} \quad 12.3.52b$$

A soma dos quadrados das duas equações acima produz

$$\lambda^2 \cos^2((\omega_r)\Delta t) + \lambda^2 \sin^2((\omega_r)\Delta t) = \frac{\pm 4 - \alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\lambda^2 [\cos^2((\omega_r)\Delta t) + \sin^2((\omega_r)\Delta t)] = \frac{\pm 4 - \alpha^2 + \alpha^2}{4}$$

$$\lambda^2 = \pm \frac{4}{4}$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

3.3.2 Esquemas de três níveis de tempo

$$\lambda^2 = \pm \frac{4}{4}$$

$$\lambda = \sqrt{1}$$

$$|\lambda| = 1$$

Portanto, a **amplitude da onda** ou **perturbação** é **preservada para todos os comprimentos de onda quando $\alpha^2 \leq 4$** . Em outras palavras, o esquema é neutro quando $\alpha^2 \leq 4$. ($\alpha = 2C \sin(k\Delta x)$)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Case 2: $\alpha^2 > 4$

$$\lambda e^{-i(\omega_r)\Delta t} = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \quad 12.3.51$$

Separando as partes real e imaginária $e^{-i(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ **de (12.3.51) dá**

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) + i\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = \frac{i\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \quad 12.3.51$$

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) = \frac{i\alpha \pm i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} = 0 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) = 0 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = i \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \quad 12.3.53b$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda \cos((\omega_r)\Delta t) = 0 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda \sin((\omega_r)\Delta t) = i \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \quad 12.3.53b$$

$$\lambda^2 \cos^2((\omega_r)\Delta t) = 0 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda^2 \sin^2((\omega_r)\Delta t) = - \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2 \quad 12.3.52b$$

A soma dos quadrados das duas equações acima produz

$$\lambda^2 \cos^2((\omega_r)\Delta t) + \lambda^2 \sin^2((\omega_r)\Delta t) = - \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda^2 = - \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda^2 = i^2 \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2 \quad 12.3.53a$$

$$\lambda = \sqrt{i^2 \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2} \quad 12.3.53a$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\lambda = i \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \quad 12.3.53a$$

$$\lambda \lambda^* = i \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \left[-i \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right) \right] \quad 12.3.53a$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \right)^2 \quad 12.3.53a$$

$$|\lambda| = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \quad 12.3.54a$$

Afirmção: Este esquema é instável quando $\alpha^2 > 4$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

To prove this, we only need to find a counter example of $|\lambda| >$

For example, we may assume $\alpha = 2 + \varepsilon$, where ε is a small positive number. Substituting α into the positive root of Eq. (12.3.54) gives

$$|\lambda| = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon + \varepsilon^2}. \quad (12.3.55)$$

Since either root is possible, we may look at the solution with positive root,

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$|\lambda| = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon + \varepsilon^2} . \quad (12.3.56)$$

This gives $|\lambda| > 1$. Therefore, *the scheme of leapfrog in time and centered in space is linearly unstable when $\alpha^2 > 4$.*

Note that $\alpha = 2C \sin k\Delta x$.

Thus, the stability is retained only when $\alpha^2 \leq 4$. Based on the definition of α for Eq. (12.3.50), it requires

$$C^2 \sin^2 k\Delta x \leq 1 . \quad (12.3.57)$$

Since the maximum value of the sine square function is 1, the above equation is satisfied when

$$|C| \leq 1 . \quad (12.3.58)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

De fato, **o critério CFL não é apenas uma condição necessária, mas também uma condição suficiente, para a estabilidade linear** para o esquema de leapfrog no tempo e segunda ordem centrada no espaço.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

➤ *Phase characteristics of the leapfrog in time and second-order centered in space scheme*

Divide (12.3.52b) by (12.3.52a),

$$\left\{ \lambda \cos \omega_r \Delta t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - \alpha^2} \quad (12.3.52a) \right\} \quad \left\{ \lambda \sin \omega_r \Delta t = \frac{\alpha}{2} \quad (12.3.52b) \right\}$$

$$\omega_r \Delta t = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \right). \quad (12.3.59)$$

This gives the computational phase speeds,

$$\tilde{c}_p = \frac{\omega_r}{k} = \frac{\pm 1}{k \Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \right). \quad (12.3.60)$$

The *phase error* can then be obtained,

$$\frac{\tilde{c}_p}{c} = \frac{\pm 1}{kc \Delta t} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \right). \quad (12.3.61)$$

For $c > 0$, Eq. (12.3.60) has two solutions, one propagating to the right ($\tilde{c}_p > 0$) and the other propagating to the left ($\tilde{c}_p < 0$).

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

A **primeira solução representa o modo físico**, enquanto a **segunda solução representa o modo computacional**, que é **puramente gerado pelo esquema numérico**. Isso causa o chamado ***time-splitting problem***. problema de divisão de tempo.

Este **esquema também induz a dispersão computacional**, desde que a velocidade de fase computacional é uma função do número de onda (k).

Em resumo, o **esquema de leapfrog** no tempo e segunda ordem centrada no **espaço é capaz de preservar a amplitude** quando $\alpha^2 \leq 4$, **mas pode gerar erros devido à dispersão computacional da onda**.

A Figura 12.6 mostra exemplos dos erros de amplitude e fase produzidos pela aplicação dos esquemas na equação de advecção :

Esquema leapfrog

Esquema de avanço no tempo e a upstream no espaço

e comparando as soluções numéricas com a solução analítica

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

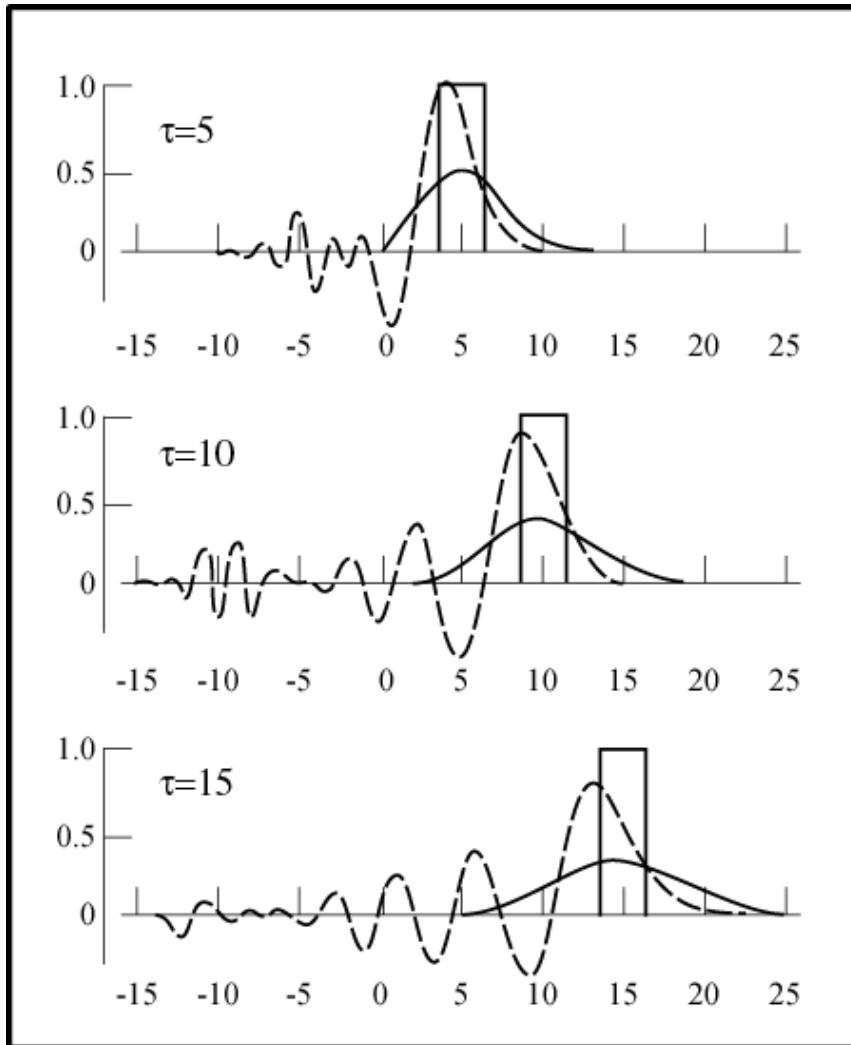


Fig. 12.6: Um exemplo de amortecimento e dispersão computacional.

A equação de advecção para uma onda retangular inicial.

Comparação da solução analítica (curva fina quadrado)

soluções numéricas da aplicação do esquema leapfrog no tempo e segunda ordem centrado no espaço (curva tracejada)

soluções numéricas da aplicação do esquema avanço no tempo e upstream no espaço (curva sólida forte)

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

O esquema leapfrog no tempo e segunda ordem centrada no espaço é capaz de preservar a amplitude da onda retangular inicial muito melhor do que o esquema de avanço no tempo e upstream no espaço. (**leapfrog menos dissipativo em relação ao esquema de avanço no tempo e upstream no espaço**).

No entanto, **produz uma dispersão computacional severa** em relação ao esquema de avanço no tempo e upstream no espaço.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Além da segunda ordem centrada no espaço, um esquema de precisão de ordem superior na diferença espacial pode ser derivado.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Por exemplo, considere as seguintes expansões da série de Taylor para $f(x + \Delta x)$ e $f(x - \Delta x)$,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.62$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.63$$

Subtrair (12.3.63) de (12.3.62) leva a

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + f'''(x) \frac{2\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.64$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Agora, considere as seguintes expansões em série de Taylor para $f(x + 2\Delta x)$ e $f(x - 2\Delta x)$,

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + f'(x) \frac{2\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{4\Delta x^2}{2!} + f'''(x) \frac{8\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.65$$

$$f(x - 2\Delta x) = f(x) - f'(x) \frac{2\Delta x^1}{1!} + f''(x) \frac{4\Delta x^2}{2!} - f'''(x) \frac{8\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.66$$

Subtrair (12.3.66) de (12.3.65) leva a

$$f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x) = 4f'(x) \frac{\Delta x^1}{1!} + 16f'''(x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

$$f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x) = 4f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.67$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Eliminando os termos $f'''(x)$ das Eqs. (12.3.64) a (12.3.67) rende

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'(x)\Delta x + \frac{2}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.64$$

$$f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x) = 4f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.67$$

Multiplica a 12.3.64 por 8

$$8(f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) = 16f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.64a$$

$$8(f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) = 16f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.64b$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Eliminando os termos $f'''(x)$ das Eqs. (12.3.64) a (12.3.67) rende

$$8(f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) = 16f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.64b$$

$$f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x) = 4f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.67$$

Subtrair a 12.3.67 da 12.3.64b

$$8(f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) - (f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x)) = 12f'(x)\Delta x + \dots O(\Delta x^4)$$

$$f'(x) = \frac{8(f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x))-(f(x+2\Delta x)-f(x-2\Delta x))}{12\Delta x} + \dots O(\Delta x^4) \quad 12.3.68$$

Este esquema tem uma diferença centrada de quarta ordem para o aproximação de $f'(x)$.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Observe que os pontos de contorno podem ser aproximados por pontos interiores adjacentes.

Por exemplo, $f'(x)$ no limite esquerdo pode ser aproximado por $f(x + \Delta x)$, $f(x + 2\Delta x)$, $f(x + 3\Delta x)$, $f(x + 4\Delta x)$.

Pode-se mostrar que a Eq. (12.3.68) pode ser obtido por extrapolação para o valor $\left(\frac{8}{12}\Delta x\right)$ ou $\left(\frac{2}{3}\Delta x\right)$ dos quocientes de $f'(x)$ de (12.3.66) e (12.3.67).

$$f(x - 2\Delta x) = f(x) - f'(x)\frac{2\Delta x^1}{1!} + f''(x)\frac{4\Delta x^2}{2!} - f'''(x)\frac{8\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 12.3.66$$

$$f(x + 2\Delta x) - f(x - 2\Delta x) = 4f'(x)\Delta x + \frac{16}{3!}f'''(x)\Delta x^3 + \dots \quad 12.3.67$$

$$f'(x) = \frac{8(f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x))-(f(x+2\Delta x)-f(x-2\Delta x))}{12\Delta x} + \dots O(\Delta x^4) \quad 12.3.68$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Agora aplique a diferença centrada na quarta ordem à equação advectiva com o leapfrog no tempo,

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1}}{2\Delta t} + c \left[\frac{8(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) - (u_{i+2}^{\tau} - u_{i-2}^{\tau})}{12\Delta x} \right] = 0 \quad 12.3.69$$

A equação acima pode ser rearranjada para ser

$$u_i^{\tau+1} - u_i^{\tau-1} = -c \frac{2\Delta t}{12\Delta x} [8(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) - (u_{i+2}^{\tau} - u_{i-2}^{\tau})]$$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau-1} - \frac{C}{6} [8(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) - (u_{i+2}^{\tau} - u_{i-2}^{\tau})] \quad 12.3.70$$

onde C é o número de Courant, conforme definido anteriormente.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Agora aplique a diferença centrada na quarta ordem à equação advectiva com o leapfrog no tempo,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau-1} - \frac{c}{6} [8(u_{i+1}^{\tau} - u_{i-1}^{\tau}) - (u_{i+2}^{\tau} - u_{i-2}^{\tau})] \quad 12.3.70$$

A solução

$$u(x, t) = u(n\Delta x, \tau\Delta t) = \hat{u}(k, \omega) e^{i(kn\Delta x - \omega\tau\Delta t)}$$

Pode ser mostrado que

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{4}{3} \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin(2k\Delta x)}{2k\Delta x}$$

$\theta = kx - \omega t = \text{constante}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$

$v = + \frac{\omega}{k}$ propagação: +Ox

ou

$\theta = kx + \omega t = \text{constante}$

$\frac{dx}{dt} = v = - \frac{\omega}{k}$ propagação: -Ox

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{4}{3} \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin(2k\Delta x)}{2k\Delta x}$$

$$\tilde{c}_p = c \left[1 - \frac{4}{5!} (k\Delta x)^2 + \dots \right] \text{ for 4th-order scheme, (12.3.73)}$$

para a diferença centrada de quarta ordem. Comparado com o esquema de segunda ordem centrado no espaço

$$\frac{\tilde{c}_p}{c_p} = \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}$$

$$\tilde{c}_p = c \left[1 - \frac{1}{3!} (k\Delta x)^2 + \dots \right] \text{ for 2nd-order scheme. (12.3.74)}$$

Assim, **ambos os esquemas são dispersivos**.

No entanto, **o erro de velocidade de fase foi muito reduzido para ondas mais longas** (menor k) usando o **esquema de 4ª ordem**.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

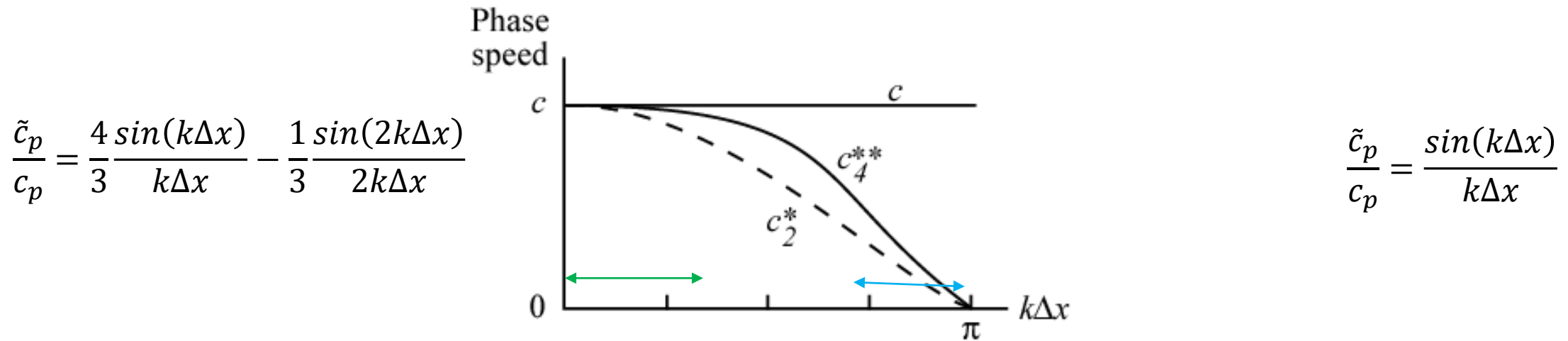


Fig. 12.7: As velocidades de fase computacionais associadas aos esquemas de diferença centrada de 2ª ordem e 4ª ordem. (Adaptado após Mesinger e Arakawa, 1976)

Esta figura indica que :

- (a) Aumento significativo na precisão da velocidade de fase para ondas de grande e mesoescala,
- (b) Mais dispersão computacional para ondas mais curtas está associada ao esquema de 4ª ordem, pois a inclinação de c_4 é maior que c_2 .

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Devido à diminuição do erro de velocidade de fase das ondas mais longas, o uso da diferença centrada de 4ª ordem no esquema espacial para a equação de advecção trouxe melhorias significativas na previsão numérica operacional em modelos barotrópicos e baroclínicos.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Esquema Adams-Bashforth

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Esquemas de vários estágios

A equação de advecção pode ser vista como um caso especial da seguinte equação,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u) \quad (12.3.45)$$

$$\tilde{u}_i^{\tau+\alpha} = u_i^\tau + \alpha \Delta t F(u_i^\tau)$$

$$\tilde{u}_i^{\tau+1} = u_i^\tau + \Delta t [\beta F(\tilde{u}_i^{\tau+\alpha}) + [1 - \beta] F(u_i^\tau)] \quad 12.3.46$$

Eq. (12.3.45) é aproximado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{3}{2} F(u_i^\tau) - \frac{1}{2} F(u_i^{\tau-1}) \right] \quad (12.3.47)$$

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

(e) Esquemas de vários estágios

A equação de advecção pode ser vista como um caso especial da seguinte equação,

$$u_i^{\tau+1} = u_i^{\tau} + \Delta t \left[\frac{3}{2} F(u_i^{\tau}) - \frac{1}{2} F(u_i^{\tau-1}) \right] \quad (12.3.47)$$

$$F(u_i^{\tau}) = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vantagens: Não gera **divisão de tempo** como a produzida pelo esquema de leapfrog, ou **a difusão numérica** produzida pela diferença upstream.

3.2 Aproximações de Diferenças Finitas de Derivadas

Lilly (1965) revisou oito esquemas adotados em modelos atmosféricos na época e descobriu que o esquema de Adams-Bashforth é o melhor considerando a simplicidade, eficiência e precisão juntas.

Baer e Simons (1970) descobriram que os termos de advecção não linear e componentes de energia podem ter grandes erros.