GambleR - Simulări Monte Carlo la Jocul de Ruletă

Cocu Matei-Iulian matei-iulian.cocu@s.unibuc.ro

Lăutaru Bianca-Maria bianca-maria.lautaru@s.unibuc.ro

Cuprins

1 Introducere

1.1 Tema Proiectului

De obicei, autorii realiști ai secolului XIX își inspirau poveștile din propria realitate, având ca sursă de inspirație concretul și prezentul. Unul dintre cei mai influenți autori ai perioadei respective, cunoscut pentru sobrietatea scrierilor sale și simțul exagerat pentru detalii, este **Feodor Dostoievski**, autorul cărții **Jucătorul**, o nuvelă ce descrie aventurile, atât cele din planul social, cât și cele disputate în cazinou, ale unui dependent de jocuri de noroc, totul petrecându-se în contextul aristocrației rusești contemporane perioadei autorului. Bineînțeles, așa cum se cunoaște, **Alexei**, personajul principal, este o interpretare *absurdistă* a lui Dostoievski, totul din jurul acestuia fiind, deci, adânc înrădăcinat în țesătura realității. Jocul vizat în principal în nuvelă este **ruleta**, fiind și mijlocul prin care protagonistul își exprima sentimentele.

Dar totuși, cât de apropiată de realitate a fost această roată din opera lui Dostoievski? Pe parcursul operei, sunt surprinse diverse episoade care par exagerate; acest proiect se concentrează pe aplicarea simulărilor Monte Carlo în cadrul jocului de ruletă, analizând comportamentul capitalului jucătorului în funcție de numărul de runde și probabilitatea de a câștiga. Proiectul are ca scop înțelegerea efectelor aleatoare într-un mediu de joc și evaluarea riscurilor asociate cu o strategie specifică. Pentru a asigura rigoarea matematică a simulării, vom defini formal parametrii jocului în secțiunea următoare.

1.2 Descrierea Jocului de Ruletă

Pentru acest studiu, ne vom concentra exclusiv asupra **Ruletei Europene**, varianta cea mai răspândită și relevantă din punct de vedere statistic pentru jucător (având o margine a casei mai mică decât varianta americană).

Mecanismul jocului poate fi modelat matematic astfel:

- **Spațiul stărilor:** Ruleta este compusă dintr-un disc divizat în 37 de sectoare numerotate de la 0 la 36.
- **Distribuția numerelor:**
  - **18 numere Roșii (Red):** $\{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$;
  - **18 numere Negre (Black):** $\{2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35\}$;
  - **Un singur număr Verde (Zero):** $\{0\}$.
- **Tipul de pariu analizat:** Simulările din acest proiect se vor axa preponderent pe pariurile de tip *"Even Money"* (cotă 1:1), cum ar fi Roșu/Negru sau Par/Impar.

Din punct de vedere probabilistic, pentru orice tip de pariu, definim evenimentele:

Tabela 1: Tipurile de pariuri la Ruleta Europeană, probabilitățile asociate și Valoarea Așteptată (EV) pentru o miză de 1 unitate.

Tip Pariu	**Nr. acoperite**	**Payout**	**Probabilitate (p)**	**EV (unități)**
Pariuri Interioare (Inside Bets)				
Straight Up (Un singur număr)	1	35:1	2.70%	-0.027
Split (Două numere)	2	17:1	5.40%	-0.027
Street (Trei numere)	3	11:1	8.11%	-0.027
Corner (Colț / Patru numere)	4	8:1	10.81%	-0.027
First Four (0, 1, 2, 3)	4	8:1	10.81%	-0.027
Double Street (Șase numere)	6	5:1	16.21%	-0.027
Pariuri Exterioare (Outside Bets)				
Column (Coloană)	12	2:1	32.43%	-0.027
Dozen (Duzină)	12	2:1	32.43%	-0.027
Even/Odd (Par/Impar)	18	1:1	48.65%	-0.027
Red/Black (Roșu/Negru)	18	1:1	48.65%	-0.027
Low/High (1-18 / 19-36)	18	1:1	48.65%	-0.027

Este esențial de observat că existența numărului 0 (care nu este nici roșu, nici negru) determină inegalitatea $p < q$. Această diferență, deși mică ($\approx 2.7\%$), reprezintă avantajul matematic al casei (House Edge), care asigură ruina jucătorului pe termen lung, indiferent de strategia de pariere, conform legii numerelor mari.

Regula de *payout* (plată) pentru simulare este standard:

- **Câștig:** Jucătorul primește înapoi miza plus un profit egal cu miza (+1 unitate pentru 1 unitate pariată).
- **Pierdere:** Jucătorul pierde întreaga miză pariată.

2 Definirea Problemei - Fenomenele Cărții

Pe parcursul cărții, sunt narate câteva scenarii relevante de menționat în contextul proiectului:

- **Probabilitatea de Ruină a Începătorului**: **Baboulinka**, un personaj comic datorită vârstei și caracterului autoritar, nu înțelege regulile, dar devine obsedată de numărul **zero**. Surprinzător *(datorită probabilității de $\frac{1}{37} \approx 2.7\%$)*, aceasta ajunge să câștige; așadar, se decide să mai încerce încă o dată numărul **zero**, contestând probabilitatea evenimentului *($\frac{1}{1369} \approx 0.07\%$)*, dar câștigând. După asemenea eveniment, alege să parieze sume maxime pe **roșu**. Câștigă pentru puțin timp, dar apoi începe seria de pierderi, neavând nici o strategie de oprire *(stop-loss)* și continuând să parieze pentru a recupera pierderile, pierzând astfel întreaga avere *(un exemplu veritabil de ruină rapidă cauzată de varianță)*.
- **Gambler's Fallacy**: Alexei reușește să transforme 20 de monede în 200.000 printr-o serie improbabilă de pariuri pe Roșu și Zero. Scopul acestui proiect este să contrastăm această viziune romantică cu realitatea matematică, folosind simularea Monte Carlo pentru a arăta că, pe termen lung, 'Banca câștigă întotdeauna' (House Edge), iar seriile lui Alexei sunt doar anomalii statistice rare.

3 Modelul Matematic

Ruleta europeană poate fi modelată matematic ca un spațiu de probabilitate finit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, unde:

- $\Omega = \{0, 1, \ldots, 36\}$ reprezintă spațiul eșantion (toate numerele posibile).
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ este mulțimea tuturor submulțimilor lui Ω (sigma-algebra evenimentelor).
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{37}$ este măsura de probabilitate pentru orice eveniment $A \in \mathcal{F}$, având în vedere că toate cele 37 de numere au șanse egale de apariție.

Definim un pariu S ca un triplet (A, r, ξ), unde:

- A este mulțimea numerelor pe care se pariază;
- $r \in \mathbb{R}_+$ este miza (suma pariată);
- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ este variabila aleatoare care determină câștigul net (profitul) al pariului.

3.1 Analiza Pariului "Straight Up"

Considerăm un pariu pe un singur număr, $S = (\{\omega_0\}, r, \xi)$, unde $\omega_0 \in \Omega$. Funcția de câștig ξ este definită astfel:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} -r, & \text{dacă } \omega \neq \omega_0 \quad \text{(pierdere)} \\ 35 \cdot r, & \text{dacă } \omega = \omega_0 \quad \text{(câștig)} \end{cases}$$

Valoarea așteptată (speranța matematică) a câștigului, notată $E[\xi]$, se calculează însumând câștigurile ponderate cu probabilitățile lor:

$$E[\xi] = \frac{1}{37} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) = \frac{1}{37} \left(\xi(\omega_0) + \sum_{\omega \neq \omega_0} \xi(\omega) \right)$$

$$E[\xi] = \frac{1}{37}(35 \cdot r - 36 \cdot r) = -\frac{r}{37} \approx -0.027r$$

Acest rezultat confirmă avantajul casei de aproximativ 2.7%.

3.2 Analiza Pariului pe Culoare (Roșu/Negru)

Similar, pentru un pariu pe Negru, funcția de câștig este:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} -r, & \text{dacă } \omega \text{ este Roșu} \\ -r, & \text{dacă } \omega = 0 \\ r, & \text{dacă } \omega \text{ este Negru} \end{cases}$$

Există 18 numere câștigătoare (Negru) și 19 pierzătoare (18 Roșii + cifra 0). Calculul speranței matematice devine:

$$E[\xi] = \frac{1}{37}(18 \cdot r - 19 \cdot r) = -\frac{r}{37} \approx -0.027r$$

3.3 Concluzie asupra Modelului

Se observă că pentru orice tip de pariu standard la ruleta europeană, speranța matematică rămâne constantă:

$$E[\xi_n] = -\frac{r}{37}$$

Aceasta implică faptul că, pe termen lung, cu cât un jucător efectuează mai multe pariuri (indiferent de strategia de combinare a acestora), pierderea cumulată tinde să crească:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[\xi_n] \to -\infty$$

Spre deosebire de ruleta europeană, cea americană (cu 0 și 00) oferă o speranță matematică și mai scăzută pentru jucător, de aproximativ $-\frac{r}{19} \approx -0.0526r$ (5.26%).

4 Strategii de Pariere

Având în vedere contextul jocului de ruletă, vom presupune că pariurile sunt plasate exclusiv pe evenimente cu cotă 1:1 (Roșu/Negru sau Par/Impar). Deși valoarea așteptată rămâne constantă și negativă indiferent de strategie, modul în care evoluează capitalul (volatilitatea) diferă semnificativ în funcție de sistemul de pariere ales.

În cadrul acestui proiect, am analizat trei strategii distincte:

4.1 Pariu Constant (Flat Betting)

Aceasta este strategia de control ("baseline"). Jucătorul pariază aceeași sumă fixă B la fiecare rundă, indiferent de rezultatul rundei anterioare.

- **Regulă:** $S_k = S_0$, pentru orice $k \geq 1$, unde S_k este miza la pasul k.
- **Caracteristici:** Această metodă minimizează varianța. Deoarece nu există o creștere a mizei pentru recuperarea pierderilor, riscul de a atinge rapid falimentul este redus, dar și șansa de a recupera un deficit major este mică. Pe termen lung, graficul capitalului va urma o pantă descendentă liniară dictată de avantajul casei.

4.2 Martingale (Dublarea Mizei)

Strategia **Martingale** este un sistem de progresie negativă, bazat pe premisa că o victorie eventuală va recupera toate pierderile anterioare plus un profit mic.

- **Algoritm:**
  1. Se începe cu o miză de bază u (1 unitate).
  2. După fiecare **pierdere**, miza se dublează ($S_{k+1} = 2 \cdot S_k$).
  3. După fiecare **câștig**, miza se resetează la valoarea inițială ($S_{k+1} = u$).
- **Analiză Matematică:** Dacă jucătorul pierde de n ori la rând și câștigă a $(n+1)$-a oară, profitul net este:

$$\text{Profit} = 2^n u - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i u = 2^n u - (2^n - 1)u = u$$

- **Riscuri:** Deși teoretic infailibilă cu un capital infinit, în practică strategia este extrem de riscantă. Creșterea exponențială a mizei (2^n) duce rapid la atingerea limitei de capital a jucătorului sau a limitei maxime a mesei, rezultând într-o "ruină catastrofală".

4.3 Fibonacci (Sistemul de Anulare)

Această strategie utilizează faimosul șir al lui Fibonacci pentru a determina miza, fiind un compromis între siguranța pariului constant și agresivitatea Martingale.

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Secvența de pariere este: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

- **Algoritm:**
  1. Se începe cu prima valoare din șir.
  2. După o **pierdere**, se avansează un pas în șirul Fibonacci (miza crește).
  3. După un **câștig**, se coboară doi pași înapoi în șir (miza scade). Dacă se ajunge la începutul șirului, se reia de la 1.

- **Caracteristici:** Matematica din spatele sistemului se bazează pe faptul că o victorie recuperează pierderile ultimelor două runde anterioare. Spre deosebire de Martingale, care necesită o singură victorie pentru a reveni pe profit, Fibonacci necesită doar ca numărul victoriilor să fie aproximativ o treime din numărul jocurilor pentru a rămâne pe linia de plutire, având o creștere a mizei mult mai lentă.

5 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo este o tehnică numerică ce utilizează eșantionarea statistică pentru a aproxima soluții cantitative. În contextul acestui proiect, metoda este utilizată pentru a estima probabilitatea de ruină și evoluția capitalului, mărimi care sunt dificil de calculat analitic pentru strategii complexe (precum Fibonacci sau Martingale cu limite de masă).

5.1 Formalizarea Modelului de Simulare

Fie N numărul total de simulări independente (sesiuni de joc). O singură simulare i ($1 \leq i \leq N$) generează o traiectorie a capitalului $(C_t^{(i)})_{t \geq 0}$, unde $C_0^{(i)} = C_{start}$. Jocul se oprește la momentul τ_i, definit ca:

$$\tau_i = \min\{t \mid C_t^{(i)} \leq 0 \text{ sau } t = T_{max}\}$$

unde T_{max} este limita maximă de runde (constrângere de timp).

Pentru fiecare simulare i, definim următoarele variabile aleatoare:

- **Variabila Indicator de Ruină (I_i):** O variabilă Bernoulli care indică dacă jucătorul a pierdut întregul capital.

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{dacă } C_{\tau_i}^{(i)} \leq 0 \quad \text{(Ruină)} \\ 0, & \text{altfel} \quad \text{(Supraviețuire)} \end{cases}$$

- **Capitalul Final (C_i):** Valoarea capitalului la momentul opririi: $C_i = C_{\tau_i}^{(i)}$.

5.2 Estimatori Statistici

Conform Legii Numerelor Mari (LLN), media de selecție converge în probabilitate către media teoretică atunci când $N \to \infty$. Definim estimatorii Monte Carlo pentru parametrii de interes:

5.2.1 Estimarea Probabilității de Ruină

Probabilitatea teoretică de ruină $p_{ruin} = \mathbb{E}[I]$ este aproximată prin frecvența relativă a ruinelor în cele N simulări:

$$\hat{p}_{ruin} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Acesta este un estimator nedeplasat și consistent.

5.2.2 Estimarea Valorilor Medii

Similar, timpul mediu de joc și capitalul final mediu sunt estimați prin:

$$\widehat{E[\tau]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tau_i, \qquad \widehat{E[C]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$$

5.3 Analiza Erorii și Inegalitatea Hoeffding

Pentru a valida precizia simulării, trebuie să marginim eroarea dintre estimatorul $\hat{p}$ și probabilitatea reală p. Deoarece I_i sunt variabile aleatoare mărginite ($I_i \in [0,1]$) și independente, putem aplica **Inegalitatea lui Hoeffding**.

Aceasta oferă o margine superioară a probabilității ca estimatorul să se abată de la valoarea reală cu mai mult de o valoare ϵ:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \geq \epsilon) \leq 2e^{-2N\epsilon^2}$$

Unde:

- N este numărul de simulări;
- ϵ este marja de eroare dorită;
- $1 - \alpha$ este nivelul de încredere (unde $\alpha = 2e^{-2N\epsilon^2}$).

5.4 Determinarea Numărului Minim de Simulări

Folosind inegalitatea Hoeffding, putem determina numărul minim de simulări N necesar pentru a garanta o eroare mai mică de ϵ cu o probabilitate de cel puțin $1 - \alpha$.

Din relația $\alpha = 2e^{-2N\epsilon^2}$, logaritmând obținem:

$$\ln(\frac{\alpha}{2}) = -2N\epsilon^2 \implies N \geq \frac{-\ln(\alpha/2)}{2\epsilon^2}$$

Exemplu de calcul: Pentru o precizie de $\epsilon = 0.01$ (1%) și un nivel de încredere de 95% ($\alpha = 0.05$):

$$N \geq \frac{-\ln(0.025)}{2 \cdot (0.01)^2} = \frac{3.688}{0.0002} \approx 18.444$$

Astfel, pentru a obține rezultate statistic semnificative cu o eroare de maxim 1%, sunt necesare aproximativ 18.500 de simulări. În cadrul acestui proiect, am ales $N = 50.000$ pentru a asigura o convergență robustă.