

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

CURSO DE BACHARELADO EM FÍSICA

Oscilações de Estrelas Newtonianas,  
Relativísticas e de Buracos Negros

Bianca de Araujo Mendes da Silva

Niterói-RJ

2020

BIANCA DE ARAUJO MENDES DA SILVA

OSCILAÇÕES DE ESTRELAS NEWTONIANAS, RELATIVÍSTICAS E DE BURACOS NEGROS

Monografia apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal Fluminense, como  
requisito parcial para obtenção do Grau de  
Bacharel em Física. Área de Concentração:  
Gravitação e Cosmologia.

Orientadora: Profa. Dra. RAISSA FERNANDES PESSOA MENDES

Niterói-RJ

2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S586o Silva, Bianca de Araujo Mendes da  
Oscilações de Estrelas Newtonianas, Relativísticas e de  
Buracos Negros / Bianca de Araujo Mendes da Silva ; Raissa  
Fernandes Pessoa Mendes, orientadora. Niterói, 2020.  
63 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física)-  
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física,  
Niterói, 2020.

1. Perturbação (Astronomia). 2. Estrela de nêutrons. 3.  
Buraco negro (Astronomia). 4. Produção intelectual. I.  
Mendes, Raissa Fernandes Pessoa, orientadora. II. Universidade  
Federal Fluminense. Instituto de Física. III. Título.

CDD -

BIANCA DE ARAUJO MENDES DA SILVA

**OSCILAÇÕES DE ESTRELAS NEWTONIANAS, RELATIVÍSTICAS E DE BURACOS  
NEGROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Graduação em Física da Universidade  
Federal Fluminense como requisito parcial para  
obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovado em 17 de janeiro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Raissa Fernandes Pessoa Mendes  
Raissa Fernandes Pessoa Mendes (Orientadora – UFF)

Rodrigo Picanço Negreiros  
Rodrigo Picanço Negreiros (UFF)

Felipe Tóvar Falciano  
Felipe Tóvar Falciano (CBPF)

Niterói  
2020

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, por todo o apoio e incentivo que me deram e pelo carinho e compreensão que tiveram comigo durante todos esses anos da minha jornada acadêmica, desde pequena até hoje, e sei que futuramente também. Sem vocês nada disso seria possível.

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida e que me ajudaram a trilhar o meu caminho, em especial os professores Anderson Silva, Tiago Giannerini e Thiago Lobo que me acompanharam em meu ensino médio e os professores Ralph Costa e Raissa Mendes, pelos quais tive o grande prazer de ser orientada durante minha graduação, que me ensinaram com grande afinco e estavam sempre dispostos a me ajudar. Possuo grande respeito, carinho e admiração por todos vocês.

Agradeço também aos meus amigos Matheus Porto e Pedro Vitor, que me acompanham e me dão suporte desde o ensino médio, aos meus amigos André Santos e Yan Carlo com os quais tive o prazer de percorrer toda a minha trajetória na graduação, desde o início até as últimas disciplinas, e principalmente ao meu namorado Gabriel que, durante todos esses anos em que estivemos juntos, sempre esteve ao meu lado, me apoiando e me incentivando em todas as minhas escolhas. Vocês são muito importantes para mim e contribuíram imensamente em minha formação.

Agradeço, por fim, a Deus, por estar ao meu lado em toda minha trajetória e por ter colocado essas pessoas maravilhosas em minha vida.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	v
<b>Resumo</b>	viii
<b>Abstract</b>	ix
<b>1 Introdução</b>	1
<b>2 Estrelas Newtonianas</b>	4
2.1 Equações da Hidrodinâmica e da Gravitação . . . . .	4
2.1.1 Equação da continuidade . . . . .	5
2.1.2 Equação de movimento . . . . .	5
2.1.3 Equação de energia . . . . .	6
2.2 Configuração de Equilíbrio . . . . .	7
2.2.1 Solução com densidade constante . . . . .	8
2.3 Teoria de Perturbação . . . . .	8
2.3.1 Perturbações Eulerianas e Lagrangianas . . . . .	8
2.3.2 Equações da Hidrodinâmica e da Gravitação Perturbadas . . . . .	9
2.4 Equações de Oscilação Radiais . . . . .	10
2.4.1 Solução com densidade constante . . . . .	12
<b>3 Fundamentos da Relatividade Geral</b>	14
3.1 Relatividade Geral . . . . .	14
3.2 Métrica do Espaço-Tempo . . . . .	15
3.3 Tensor de Energia-Momento . . . . .	16
3.4 Equações de Einstein . . . . .	17
3.5 Métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico . . . . .	18
<b>4 Estrelas Relativísticas</b>	20
4.1 Configuração de Equilíbrio . . . . .	20
4.1.1 Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) . . . . .	20
4.1.2 Solução com densidade constante . . . . .	21
4.2 Estrelas de Nêutrons . . . . .	22

4.2.1	Equação de Estado Politrópica por Partes . . . . .	23
4.2.2	Perturbações Radiais . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Buracos Negros</b>	<b>36</b>
5.1	Buracos Negros de Schwarzschild . . . . .	36
5.2	Equações de Perturbação . . . . .	37
5.3	Método WKB . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice: Código do <i>Mathematica</i></b>	<b>47</b>
7.1	EOSs . . . . .	47
7.2	Parâmetros . . . . .	48
7.3	Equações de TOV . . . . .	49
7.4	Perturbação . . . . .	50
7.5	Frequências Características . . . . .	51
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>53</b>

# Resumo

Nesta monografia, estudaremos os modos de oscilação de estrelas Newtonianas (ou não-relativísticas), estrelas relativísticas, com ênfase em estrelas de nêutrons, e também de buracos negros, causando pequenas perturbações no sistema em equilíbrio. Essa perturbação pode ser feita tanto através da perturbação sobre as grandezas físicas quanto através da perturbação das equações de campo da gravitação. Com as equações que descrevem os modos de oscilação em mãos, apresentaremos um método numérico para calcular as frequências características de estrelas de nêutrons descritas por equações de estado politrópicas por partes e um método semianalítico de calcular as frequências quasinormais de buracos negros de Schwarzschild, conhecido como método WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin).

Palavras-chave: Modos de oscilação. Modos quasinormais. Perturbações. Estrelas Newtonianas. Estrelas de Nêutrons. Buraco Negro de Schwarzschild.

# Abstract

In this thesis, we study the oscillation modes of Newtonian (or nonrelativistic) stars, relativistic stars, with emphasis on neutron stars, as well as black holes, making small perturbations in the equilibrium system. This perturbation can be made either by perturbing physical quantities or by disturbing the gravity field equations. With the equations describing the oscillation modes in hand, we will present a numerical method to calculate the radial frequencies for neutron stars described by piecewise polytropes and a semi-analytical method to calculate the quasinormal mode frequencies of a Schwarzschild black hole, known as the WKB (Wentzel, Kramers and Brillouin) method.

Keywords: Oscillation modes. Quasinormal modes. Perturbations. Newtonian Stars. Neutron Stars. Schwarzschild Black Hole.

# Capítulo 1

## Introdução

Apenas nos últimos cem anos foi descoberto que a variação da luminosidade de certas estrelas pode ser causada por pulsações intrínsecas delas próprias [1]. Tais variações na luminosidade seriam dadas pelo seu movimento de expansão e contração, o que levaria a pulsações no modo radial fundamental sem comprometer sua simetria esférica. Foi observado, através das Cefeidas [2], que o período destas pulsações é determinado aproximadamente pela escala de tempo dinâmica da estrela, que pode ser escrita como

$$t_{din} \simeq \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \simeq (G\bar{\rho})^{-1/2}, \quad (1.1)$$

onde  $R$  é o raio da estrela,  $M$  é sua massa,  $\bar{\rho}$  é sua densidade média e  $G$  é a constante gravitacional. Assim, a observação do período imediatamente fornece uma estimativa de sua densidade média, que é uma propriedade intrínseca da estrela.

Além disso, percebeu-se que algumas estrelas pulsam de maneiras mais complicadas do que as Cefeidas. Em muitos casos, mais de um modo de oscilação é excitado simultaneamente em uma estrela, podendo incluir tanto excitações radiais, além do modo fundamental, quanto não-radiais, em que o movimento não preserva a simetria esférica. Quanto mais modos, mais informações sobre as propriedades da estrela podem ser obtidas, já que cada período observado é, a princípio, uma medida independente da estrutura da estrela.

Um caso extremo é o Sol, onde milhares de modos individuais já foram identificados [1]. Como acreditamos que o Sol seja uma estrela comum, espectros de oscilações igualmente ricos seriam esperados em outras estrelas semelhantes, mas, por conta da distância, além da baixa resolução espacial, a potência é muito baixa, o que resulta em amplitudes pequenas e difíceis de detectar. De fato, apesar de várias tentativas e alguns resultados preliminares, nenhuma detecção definitiva de oscilações em outra estrela solar foi feita.

No que diz respeito a objetos compactos, como buracos negros e estrelas de nêutrons, seus modos de oscilação têm sido de grande interesse da comunidade científica nos últimos anos tanto para os teóricos da gravitação quanto para os estudos das recém detectadas ondas gravitacionais.

No caso de estrelas de nêutrons, assim como nas estrelas Newtonianas, os modos de oscilação dão informação sobre a estrutura interna, que é descrita pela equação de estado (EOS). Como a física que rege

o interior dessas estrelas é essencialmente a cromodinâmica quântica (QCD), ou seja, são interações fortes entre os quarks e glúons que constituem os nêutrons dessas estrelas, obter informações sobre a estrutura interna é particularmente interessante nesse caso, pois essas interações ainda são pouco entendidas e não há experimentos na Terra que testem os regimes de densidade e pressão relevantes para a descrição do núcleo dessas estrelas.

Uma forma de obter informações sobre a EOS é medindo diretamente propriedades macroscópicas de equilíbrio dessas estrelas, como a massa e o raio, através da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [3]. Quando complementamos as equações de TOV com a EOS, conseguimos determinar completamente a estrutura da estrela. Inversamente, observações de pulsares e de sistemas binários emissores de raios-X possibilitam a medida de massas e raios de estrelas de nêutrons, o que pode fornecer informações sobre a EOS [7].

Outra forma é através de propriedades perturbativas, como os modos de oscilação. Esses modos são excitados na fusão de duas estrelas da seguinte forma: a emissão de ondas gravitacionais faz com que a órbita das estrelas perca energia e diminua, nisso a luminosidade das ondas aumenta, o que produz um sinal observável por detectores terrestres nos minutos finais antes de as estrelas colidirem. O objeto formado como resultado da fusão pode ser uma estrela de nêutrons altamente deformada, que relaxará para seu estado de equilíbrio emitindo ondas gravitacionais com a frequência típica dos seus modos de oscilação. A primeira detecção de um sinal de onda gravitacional proveniente da fusão de duas estrelas de nêutrons aconteceu em 17 de agosto de 2017 através da colaboração LIGO/Virgo [4].

No caso de buracos negros, para um determinado tipo de perturbação física (escalar, eletromagnética, gravitacional), as frequências características são determinadas unicamente pelos parâmetros físicos do objeto, ou seja, pela massa e momento angular, o índice harmônico angular ( $l, m$ ) da deformação e o grau harmônico do modo. Seus modos de oscilação são as deformações ressonantes e não radiais que deformam a simetria esférica do sistema, o que leva à emissão de ondas gravitacionais.

Ao contrário dos modos de oscilação de estrelas Newtonianas, cujo amortecimento vem apenas da viscosidade do fluido, os modos de oscilação de estrelas relativísticas e buracos negros são amortecidos devido ao acoplamento com a radiação gravitacional. Por isso, são chamados de modos *quasinormais*: a parte “quase” expressa principalmente o fato de que eles não são estacionários no tempo devido ao seu amortecimento exponencial  $e^{i\omega t}$ , onde  $\omega$  é a *frequência quasinormal*, também chamada de *frequência de oscilação* ou ainda *frequência característica*, dada por um número complexo [5, 6].

Um tema principal na análise teórica é a interação entre cálculos numéricos e considerações analíticas mais simples. É uma característica de muitos dos modos de oscilação observados que suas propriedades gerais podem ser entendidas simplesmente em termos das propriedades das quantidades físicas e das condições de contorno das equações que descrevem tais modos de oscilação, o que, portanto, fornece uma excelente visão da relação entre a estrutura de uma estrela, por exemplo, e suas frequências características.

Nesta monografia, encontraremos as equações que descrevem os modos de oscilação de estrelas Newtonianas (ou não-relativísticas), estrelas relativísticas, com ênfase em estrelas de nêutrons, e também de buracos negros, causando pequenas perturbações no sistema em equilíbrio. Essa perturbação pode ser

feita tanto através da perturbação sobre as grandezas físicas, como será o caso das estrelas, quanto através da perturbação das equações de campo da gravitação, no caso dos buracos negros. Com as equações que descrevem os modos de oscilação em mãos, apresentaremos um método numérico de calcular as frequências características dos modos radiais de estrelas de nêutrons descritas por EOSs politrópicas por partes e um método semianalítico de calcular as frequências características de buracos negros de Schwarzschild, conhecido como método WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin).

## Capítulo 2

# Estrelas Newtonianas

Neste capítulo, baseado nas Refs. [1, 10], apresentamos algumas propriedades básicas de equilíbrio e estabilidade de estrelas Newtonianas, como estrelas solares e Cefeidas, por exemplo, abordando a teoria de oscilações nas configurações de fluidos não-relativísticos. A seção 2.1 contém as equações fundamentais dos fluidos e da gravitação que serão utilizadas no decorrer do capítulo. As seções 2.2 - 2.4 desenvolvem a teoria Newtoniana de equilíbrio e estabilidade de estrelas não rotativas, envolvendo um estudo de perturbações nas configurações de fluidos.

### 2.1 Equações da Hidrodinâmica e da Gravitação

A hidrodinâmica é a área de estudo que analisa como diferentes forças afetam o movimento de um *fluido*, que é tudo aquilo que tem capacidade de fluir (ou escoar) graças a sua facilidade de se deformar, ou seja, praticamente tudo que não é sólido. Um pequeno pedaço de fluido (muito menor do que a escala macroscópica do fluido, mas muito maior que a distância intermolecular) é o que chamamos de *elemento de fluido*, sua principal característica é que as propriedades do fluido no entorno desse elemento são constantes.

Em hidrodinâmica, é comum não só nos referirmos à variação temporal das quantidades físicas em uma posição espacial fixa, mas também à sua variação à medida que acompanhamos o movimento de um elemento de fluido. Isso leva a duas noções de derivada temporal. A derivada total  $d/dt$  acompanha o elemento de fluido enquanto a derivada parcial  $\partial/\partial t$  mantém a posição espacial fixa. O fluido altera sua configuração em um intervalo de tempo  $dt$ , e um elemento de fluido selecionado se move de uma posição antiga  $\vec{r}$  para uma nova posição  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Uma grandeza  $f(t, \vec{r})$  que caracteriza o fluido, como a densidade de massa ou uma componente do campo de velocidade, muda em  $df = f(t + dt, \vec{r} + d\vec{r}) - f(t, \vec{r})$  quando seguimos o movimento do elemento fluido. Assim, em primeira ordem no deslocamento,

$$\frac{d}{dt}f(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t}f(t, \vec{r}) + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla}f(t, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t}f(t, \vec{r}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}f(t, \vec{r}). \quad (2.1)$$

A seguir, veremos uma série de equações que caracterizam a dinâmica de fluidos Newtonianos ou não-relativísticos.

### 2.1.1 Equação da continuidade

Uma das principais leis de conservação da hidrodinâmica é a conservação de massa, que equilibra a taxa de variação da quantidade de massa em um volume  $\mathcal{V}$  com o fluxo de massa através desse volume. A conservação do número de moléculas em cada elemento de fluido implica que a massa de cada elemento permanece constante à medida que ele se move dentro do fluido, o que pode ser expresso como

$$\frac{d(\rho\mathcal{V})}{dt} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa de repouso.

Para descobrirmos a relação entre a variação do volume  $\mathcal{V}$  e a velocidade  $\vec{v}$ , vamos considerar um elemento de fluido cúbico de lado  $L$ , volume  $\mathcal{V} = L^3$ , movendo-se com uma velocidade média  $\vec{v}$ . A face do cubo em  $x + L/2$  se move com velocidade  $\vec{v}(x + L/2, y, z)$  e a face em  $x - L/2$  se move com velocidade  $\vec{v}(x - L/2, y, z)$ . Em um tempo  $\Delta t$  o comprimento do cubo na direção  $x$  muda em  $[v_x(x + L/2, y, z) - v_x(x - L/2, y, z)]\Delta t \approx L(dv_x/dx)\Delta t$ . Repetindo esse argumento para as direções  $y$  e  $z$ , descobrimos que a alteração no volume do cubo é dada por

$$\Delta\mathcal{V} \approx L^3 \left(1 + \frac{dv_x}{dx}\Delta t\right) \left(1 + \frac{dv_y}{dy}\Delta t\right) \left(1 + \frac{dv_z}{dz}\Delta t\right) - L^3 \approx \mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \Delta t. \quad (2.3)$$

Tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , encontramos que  $\mathcal{V}^{-1}d\mathcal{V}/dt = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ , logo

$$\frac{d(\rho\mathcal{V})}{dt} = 0 \implies \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.4)$$

que pode ser expressa em sua forma parcial utilizando a relação 2.1 como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Esta é a forma mais conhecida da *equação de continuidade*.

### 2.1.2 Equação de movimento

Tratando de estrelas, no geral, é possível ignorar o atrito interno (ou viscosidade) do fluido por conta das condições extremas de seu interior. Assim, as forças sobre um elemento de fluido de volume  $\mathcal{V}$  consistem em forças superficiais, isto é, a pressão na superfície deste volume, e a força peso.

Aplicando a segunda Lei de Newton a esse elemento de fluido, temos:

$$\vec{F} = (\rho\mathcal{V}) \vec{a}, \quad (2.6)$$

onde  $\vec{F}$  é a força resultante que atua sobre o elemento de volume  $\mathcal{V}$  e  $\vec{a}$  é a sua aceleração, que também pode ser escrita como  $d\vec{v}/dt$ ; a força peso é dada por

$$\vec{F}_{\text{peso}} = (\rho\mathcal{V}) \vec{g} \quad (2.7)$$

e a pressão por

$$\vec{F}_{\text{pressão}} = -\mathcal{V} \vec{\nabla} p. \quad (2.8)$$

Assim, a equação 2.6 pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.9)$$

que é a *equação de movimento*, também conhecida como *equação de Euler*, onde  $p$  é a pressão e  $\Phi$  é o potencial gravitacional, que se relaciona com a aceleração gravitacional da seguinte forma:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (2.10)$$

e é determinado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.11)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal.

Em termos da derivada parcial, segundo a equação 2.1, a equação 2.9 também pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.12)$$

Caso seja necessário acrescentar termos dissipativos (a viscosidade, por exemplo) no lado direito da equação 2.9, ela se torna a equação de Navier-Stokes [10].

### 2.1.3 Equação de energia

Está faltando apenas relacionarmos a pressão com a densidade de massa. Para isso, podemos utilizar a primeira lei da termodinâmica,

$$\frac{dQ}{dt} = T \frac{dS}{dt} = \frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt}, \quad (2.13)$$

onde  $dQ/dt$  é a taxa de perda (ou ganho) de calor,  $T$  é a temperatura,  $S$  e  $U$  são a entropia e a energia interna por unidade de massa, respectivamente<sup>1</sup> e  $V = 1/\rho$  é o volume específico.

Utilizando identidades termodinâmicas, podemos reescrever a equação 2.13 em termos de variáveis mais convenientes:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= c_p \left( \frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right) = c_V \left[ \frac{dT}{dt} - (\Gamma_3 - 1) \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{\rho(\Gamma_3 - 1)} \left( \frac{dp}{dt} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{dp}{dt} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

---

<sup>1</sup>No caso não-relativístico, é convencional expressar quantidades termodinâmicas por unidade de massa em vez de unidades bariônicas. As duas definições diferem simplesmente pela massa de repouso bariônica  $m_B$ .

onde  $c_p$  e  $c_V$  são os calores específicos por unidade de massa a pressão e volume constante, respectivamente,

$$c_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p, \quad c_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (2.15)$$

e as componentes adiabáticas (*ad*) são definidas segundo [11] como

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_{ad}, \quad \Gamma_3 - 1 = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}. \quad (2.16)$$

O lado esquerdo da equação 2.13 representa a produção de entropia através de processos dissipativos, como condução de calor, cisalhamento, emissão e absorção de radiação e assim por diante. No caso, não vamos considerar processos dissipativos, ou seja, nos restringiremos a fluxos adiabáticos, onde

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

Com isso, encontramos facilmente nossa relação entre  $p$  e  $\rho$  através da equação 2.14:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Gamma_1 p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.18)$$

Esta equação, a equação da continuidade 2.5, a equação de movimento 2.9 e a equação de Poisson 2.11 formam o nosso conjunto de equações de movimento adiabático, que nos servirão como base daqui por diante.

## 2.2 Configuração de Equilíbrio

No caso de estrelas estáticas esfericamente simétricas compostas por um fluido perfeito, temos

$$\vec{v} = 0, \quad p = p(r), \quad \rho = \rho(r) \quad \text{e} \quad \Phi = \Phi(r) \quad (2.19)$$

Assim,  $\vec{\nabla}f = df/dr$  e  $\nabla^2 f = 1/r^2 d(r^2 df/dr)/dr$ , e as equações 2.9 e 2.11 podem ser escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2.20)$$

Definindo  $Gm(r) \equiv r^2 d\Phi/dr$ , podemos reescrever as equações 2.20 como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}, \quad (2.21)$$

onde  $m(r)$  é interpretado como a massa contida dentro de uma esfera de raio  $r$ . Desta forma, a massa total é dada por  $M = m(R)$ , onde  $R$  é o raio da estrela, definido pela relação  $p(R) = 0$ . Esta definição vem do fato de que a derivada da pressão está diretamente relacionada com a força, logo, uma descontinuidade na pressão geraria uma força infinita naquele elemento de fluido.

### 2.2.1 Solução com densidade constante

Como exemplo, vamos considerar uma estrela que possui densidade de massa constante  $\rho = \rho_{cte}$ . Integrando as equações 2.21, podemos chegar rapidamente na solução

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{cte} \quad , \quad p(r) = \frac{2}{3}\pi \rho_{cte}^2 G(R^2 - r^2), \quad (2.22)$$

lembrando que  $r \leq R$ .

Escrevendo a solução em função da massa total  $M = 4\pi R^3 \rho_{cte}/3$  e da pressão central  $p_c = 2\pi R^2 \rho_{cte}^2 G/3 = 3GM^2/(8\pi R^4)$ , temos

$$m(r) = M(r/R)^3 \quad , \quad p(r) = p_c[1 - (r/R)^2]. \quad (2.23)$$

Podemos observar o comportamento dessas funções através das Figuras 2.1 e 2.2 e ver que, de fato, as definições de  $M$  e  $R$  são consistentes.

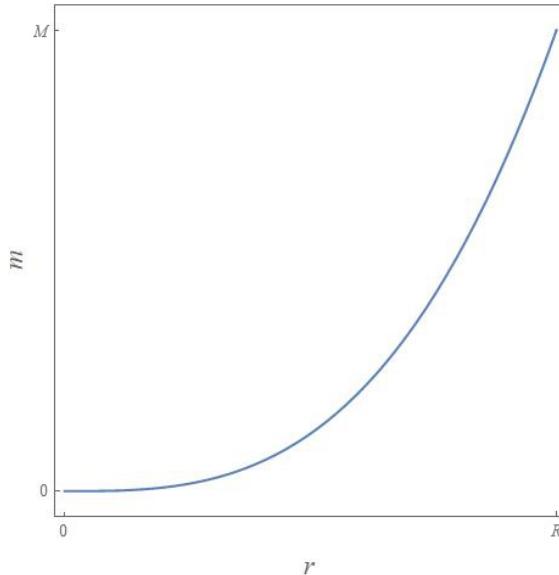


Figura 2.1: Variação de  $m$  em função de  $r$  para estrelas Newtonianas com densidade uniforme

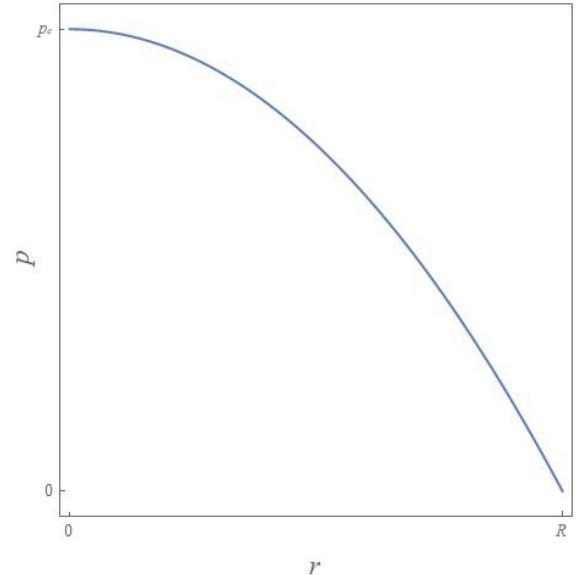


Figura 2.2: Variação de  $p$  em função de  $r$  para estrelas Newtonianas com densidade uniforme

Observe que a pressão central é finita para qualquer valor de  $M$  e  $R$ , ou seja, para qualquer massa e qualquer raio, sempre existe uma pressão que, a princípio, poderia ser aplicada de forma a sustentar aquela configuração em equilíbrio estático.

## 2.3 Teoria de Perturbação

### 2.3.1 Perturbações Eulerianas e Lagrangianas

As perturbações sobre uma grandeza física  $f$  qualquer podem ser representadas tanto da forma Euleriana quanto da Lagrangiana [16].

A perturbação Euleriana ( $\delta$ ) é uma perturbação da quantidade física numa dada posição fixa do espaço, ou seja,

$$\delta f(t, \vec{r}) \equiv f(t, \vec{r}) - f_0(t, \vec{r}), \quad (2.24)$$

onde  $f_0$  representa o valor da grandeza de interesse para a configuração não perturbada.

Já a perturbação Lagrangiana ( $\Delta$ ) é uma perturbação da quantidade física associada a um dado elemento de fluido:

$$\Delta f(t, \vec{r}) \equiv f(t, \vec{r} + \vec{\xi}(t, \vec{r})) - f_0(t, \vec{r}), \quad (2.25)$$

onde  $\vec{\xi} \equiv \vec{r} - \vec{r}_0$  é o vetor deslocamento de um elemento de fluido que encontrava-se em  $\vec{r}_0$  no equilíbrio e, com a perturbação, deslocou-se para  $\vec{r}$ .

As perturbações Euleriana e Lagrangiana relacionam-se entre si através da transformação

$$\begin{aligned} \Delta f(t, \vec{r}) &= f(t, \vec{r}) + \vec{\xi}(t, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} f_0(t, \vec{r}) - f_0(t, \vec{r}) \\ &= \delta f(t, \vec{r}) + \vec{\xi}(t, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} f_0(t, \vec{r}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Equações da Hidrodinâmica e da Gravitação Perturbadas

Vamos considerar pequenas perturbações sobre uma configuração de equilíbrio, como descrito na seção 2.2. Sabendo que a velocidade  $\vec{v}$  é dada pela derivada temporal do vetor deslocamento, ou seja,

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad (2.27)$$

as quantidades perturbadas passam a ser descritas como

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) + \delta\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 + \delta\rho \quad (2.28)$$

$$\Phi(t, \vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \delta\Phi(t, \vec{r}) = \Phi_0 + \delta\Phi \quad (2.29)$$

$$p(t, \vec{r}) = p_0(\vec{r}) + \delta p(t, \vec{r}) = p_0 + \delta p \quad (2.30)$$

onde  $\rho_0$ ,  $\Phi_0$  e  $p_0$  são grandezas que descrevem a configuração de equilíbrio (não dependem do tempo).

As equações perturbadas são obtidas inserindo as quantidades perturbadas nas equações da seção 2.1 completas, subtraindo as equações de equilíbrio e negligenciando quantidades de ordem superior a 1 (um) em  $\vec{v}$ ,  $\delta\rho$ ,  $\delta\Phi$  e  $\delta p$ .

Podemos escrever a equação de continuidade 2.5 como

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0 \quad (2.31)$$

ou, utilizando a equação 2.27 e integrando com respeito ao tempo,

$$\delta\rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0. \quad (2.32)$$

A equação de movimento 2.9 se torna

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \delta p + \rho_0 \delta \vec{g} + \delta \rho \vec{g}_0 \quad (2.33)$$

onde  $\vec{g}_0 = -\vec{\nabla}(\Phi_0)$  e  $\delta \vec{g} = -\vec{\nabla}(\delta \Phi)$ .

A equação de Poisson 2.11 pode ser escrita simplesmente como

$$\nabla^2(\delta \Phi) = 4\pi G \delta \rho \quad (2.34)$$

e a solução formal é dada por

$$\delta \Phi = -G \int_V \frac{\delta \rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.35)$$

Já a equação de energia 2.18 para movimentos adiabáticos deve ser calculada com mais cuidado, pois

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p_0 = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} p_0 \quad (2.36)$$

em primeira ordem. Com isso, obtemos

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} p_0 = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right) \quad (2.37)$$

Integrando com respeito ao tempo,

$$\delta p + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} p_0 = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \left( \delta \rho + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right). \quad (2.38)$$

## 2.4 Equações de Oscilação Radiais

Vamos, a partir daqui, nos restringir ao caso de perturbações *radiais*, a fim de comparar com o caso relativístico que estudaremos a seguir. Para detalhes sobre o caso não radial, ver, por exemplo, a Ref. [1]. No caso de perturbações esfericamente simétricas,

$$\vec{\xi}(t, \vec{r}) = \vec{\xi}(t, r) = \xi(t, r) \hat{r}. \quad (2.39)$$

Assim,  $\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 1/r^2 d(r^2 \rho_0 \xi)/dr$  e podemos escrever a equação 2.32 como

$$\delta \rho = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 \xi). \quad (2.40)$$

A equação 2.33 fica dada por

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{d(\delta p)}{dr} + \delta \rho \frac{d\Phi_0}{dr} - \rho_0 \frac{d(\delta \Phi)}{dr} \quad (2.41)$$

e a equação de Poisson 2.34 se torna

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d(\delta\Phi)}{dr} \right) = 4\pi G \delta\rho. \quad (2.42)$$

Já a equação 2.38 passa a ser escrita como

$$\delta p + \xi \frac{dp_0}{dr} = \frac{\Gamma_1 p_0}{\rho_0} \left( \delta\rho + \xi \frac{d\rho_0}{dr} \right). \quad (2.43)$$

Juntando as equações 2.40 e 2.42, obtemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d(\delta\Phi)}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 \xi) \quad (2.44)$$

e como a força gravitacional deve ser finita em  $r = 0$ , concluímos que

$$\frac{d(\delta\Phi)}{dr} = -4\pi G \rho_0 \xi. \quad (2.45)$$

Finalmente, se tomarmos a dependência temporal de  $\xi$  como  $\exp(i\omega t)$ , ou seja,

$$\xi(t, r) = e^{i\omega t} \xi(r), \quad (2.46)$$

utilizarmos as equações 2.40, 2.43 e 2.45 para encontrarmos  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  e  $\delta\Phi$  e substituirmos estes termos na equação 2.41, depois de alguma manipulação matemática, podemos encontrar a equação que governa as oscilações radiais em uma estrela esférica não-relativística:

$$\frac{d}{dr} \left( \Gamma_1 p_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi) \right) - \frac{4}{r} \frac{dp_0}{dr} \xi + \omega^2 \rho_0 \xi = 0 \quad (2.47)$$

onde  $\omega$  é a frequência característica de oscilação da estrela.

### Condições de Contorno

As condições de contorno relevantes para a solução da equação 2.47 são:

$$\xi = 0 \quad \text{em } r = 0, \quad (2.48)$$

$$\Delta p = 0 \quad \text{em } r = R, \quad (2.49)$$

$$\xi \text{ e } d\xi/dr \text{ são finitos} \quad \text{em } r = R. \quad (2.50)$$

A condição 2.48 resulta da simetria esférica do problema e é necessária para que o deslocamento Lagrangiano seja regular em  $r = 0$ . A equação 2.49 nos diz que um elemento fluido na superfície não perturbada é deslocado para a superfície perturbada. Pela equação 2.38, e usando a equação 2.40, obtemos

$$\Delta p = -\Gamma_1 p_0 \left( \frac{2}{r} \xi + \frac{d\xi}{dr} \right).$$

Uma vez que  $p_0(R) = 0$ , a condição 2.49 é automaticamente satisfeita desde que  $\xi$  e sua derivada sejam regulares em  $r = R$ ; daí a condição 2.50.

A equação 2.47 sujeita às condições 2.48 e 2.50 de contorno é uma *equação de autovalores* de Sturm-Liouville para  $\omega^2$  [15]. Os resultados abaixo seguem da teoria de tais equações:

1. Os autovalores  $\omega^2$  são sempre reais.
2. Os autovalores  $\omega^2$  formam uma sequência discreta infinita:

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 \dots . \quad (2.51)$$

3. As autofunções  $\xi_n$  correspondentes a  $\omega_n^2$  possuem  $n$  nós no intervalo  $0 < r < R$ .
4. As autofunções  $\xi_n$  são ortogonais entre si, com peso  $\rho_0 r^2$ , ou seja,

$$\int_0^R \xi_n \xi_m \rho_0 r^2 dr = 0, \quad m \neq n \quad (2.52)$$

5. As autofunções  $\xi_n$  formam um conjunto completo para a expansão de qualquer função que satisfaça as condições de contorno 2.48 e 2.50.

Uma consequência importante do item (2) é que, se o modo radial fundamental de uma estrela é estável ( $\omega_0^2 > 0$ ), então todos os modos radiais são estáveis. Por outro lado, se a estrela for radialmente instável, a instabilidade que mais cresce será através do modo fundamental, pois  $\omega_0^2$  é mais negativo que todos os outros  $\omega_n^2$ .

#### 2.4.1 Solução com densidade constante

Como um exemplo, vamos considerar perturbações de uma estrela homogênea, ou seja,  $\rho_0 = \rho_{cte}$  e  $\Gamma_1 = (\Gamma_1)_{cte}$ . Analogamente a equação 2.22,

$$p_0(r) = \frac{2}{3} \pi \rho_{cte}^2 G (R^2 - r^2). \quad (2.53)$$

Substituindo 2.53 em 2.41, após algumas simplificações, obtemos

$$(1 - x^2) \xi'' + \left( \frac{2}{x} - 4x \right) \xi' + \left( A - \frac{2}{x^2} \right) \xi = 0, \quad (2.54)$$

onde  $x = \frac{r}{R}$ ,  $f' = \frac{df}{dx}$  e  $A = \frac{3\omega^2}{2\pi G \rho_{cte} \Gamma_1} + \frac{8}{\Gamma_1} - 2$ .

Podemos resolver a equação 2.54 utilizando o método de Frobenius, portanto estamos procurando uma expansão em série da solução da forma

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \quad (2.55)$$

$$\xi' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1} \quad (2.56)$$

$$\xi'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n+s-1)(n+s)a_n x^{n+s-2}. \quad (2.57)$$

O coeficiente de  $x^{s-2}$  nos leva a

$$(s+2)(s-1) = 0, \quad (2.58)$$

logo, devemos escolher  $s = 1$  para satisfazer a condição de contorno 2.48. Com isso,  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$  e

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n^2 + 5n + 4 - A}{n^2 + 7n + 10}, \quad n = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (2.59)$$

Para satisfazer a condição de contorno 2.50, devemos truncar a série, de modo que

$$A = n^2 + 5n + 4, \quad n = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (2.60)$$

Desta forma, podemos substituir a equação 2.60 na definição de  $A$ , obtendo

$$\omega_n^2 = \frac{2}{3}\pi G \rho_{cte} [\Gamma_1(n^2 + 5n + 6) - 8], \quad n = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (2.61)$$

A escala de tempo para oscilações estáveis é  $(G\rho_{cte})^{-1/2}$ , como poderíamos esperar em bases dimensionais e conforme comentado já na Introdução. Observe que a estrela é instável se  $\Gamma_1 < 4/3$ . Com  $\Gamma_1 = 4/3$ , a solução para o modo fundamental (com  $n = 0$ ) corresponde a  $\omega^2 = 0$  e  $\xi \propto r$ .

A Figura 2.3 mostra as amplitudes de oscilação  $\xi_n(x)$  normalizadas para terem magnitudes iguais em  $r = R$  para os 5 primeiros modos não triviais.

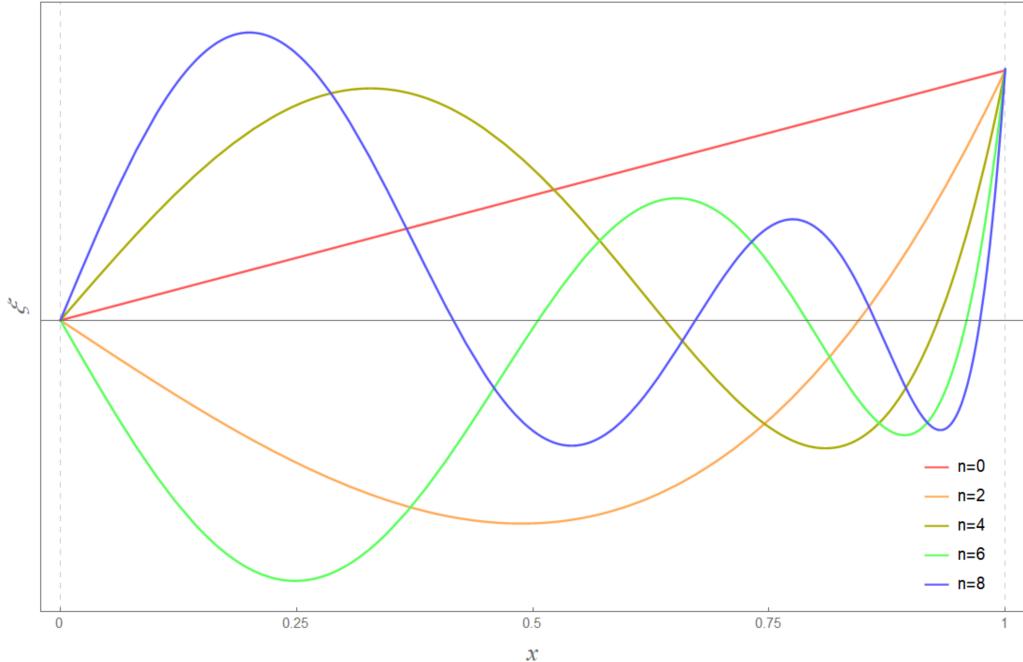


Figura 2.3: Amplitudes de oscilação radial para os cinco primeiros modos do modelo homogêneo.

## Capítulo 3

# Fundamentos da Relatividade Geral

As modificações na intensidade do campo gravitacional devido à relatividade geral passam a ser importantes quando consideramos as propriedades de equilíbrio e estabilidade de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. Neste capítulo, faremos uma breve introdução às ideias e equações da relatividade geral que serão necessárias para as aplicações dos próximos capítulos. Caso o leitor não tenha familiaridade com conceitos básicos de geometria diferencial, tenha dificuldade de entender os conceitos apresentados ou tenha interesse em um estudo mais rigoroso, sugerimos a referência [14] para uma abordagem mais completa.

### 3.1 Relatividade Geral

A Relatividade Geral é uma teoria relativística da gravitação. Foi publicada por Albert Einstein em 1915, dez anos depois de sua publicação sobre a teoria da Relatividade Especial, também conhecida como teoria da Relatividade Restrita. Para entendermos um pouco melhor o que seria uma teoria relativística da gravitação, podemos ver quais os problemas que surgem ao tentar tornar a teoria da gravitação Newtoniana relativística.

A gravitação Newtoniana pode ser descrita como uma teoria de campo para um campo escalar que satisfaz a equação de Poisson 2.11 e a aceleração gravitacional de qualquer objeto no campo é dada por  $-\vec{\nabla}\Phi$ .

A relatividade nos diz que qualquer forma de energia é equivalente à massa, de modo que podemos prever que uma teoria relativística da gravitação teria todas as formas de energia como fontes do campo gravitacional, não apenas  $\rho$ . Em particular, a densidade de energia do próprio campo gravitacional é proporcional a  $(\vec{\nabla}\Phi)^2$  no limite Newtoniano. Assim, se levarmos esse termo para o lado esquerdo da equação de Poisson, esperamos que uma teoria relativística envolva equações diferenciais não lineares para o campo gravitacional.

Einstein propôs então fazer da relatividade geral uma teoria geométrica da gravitação, onde, além das três dimensões habituais que temos do espaço, acrescentamos uma quarta dimensão: o *tempo*. O *espaço-tempo* consiste em *eventos*, que requerem quatro números (ou coordenadas) para sua especificação

completa: três números para fornecer a localização espacial em relação a determinada origem e um número para fornecer o tempo.

## 3.2 Métrica do Espaço-Tempo

Um observador no espaço-tempo faz medições, ou seja, atribui coordenadas aos eventos. Assim, um observador no espaço-tempo corresponde a alguma escolha de coordenadas.

Na Relatividade Especial, os observadores para os quais uma partícula livre se move com velocidade uniforme são chamados de *observadores inerciais* e são relacionados entre si por transformações de Lorentz.

Para simplificar, renomearemos as coordenadas de agora em diante da seguinte forma:

$$x^0 = ct \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad \text{e} \quad x^3 = z. \quad (3.1)$$

Assim, o *intervalo* (ou distância) entre dois eventos próximos no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.2)$$

$$= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.3)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (3.4)$$

é uma matriz diagonal  $4 \times 4$  chamada de *tensor métrico* e  $dx^\mu$  são as diferenças entre as coordenadas dos eventos avaliados em qualquer sistema de coordenadas inercial. Há uma somatória implícita de 0 a 3 para os índices repetidos<sup>1</sup>.

O intervalo  $ds$  não varia entre os sistemas de coordenadas, ou seja, é um *invariante de Lorentz*. Com isso, o espaço-tempo é um espaço métrico pseudo-euclidiano, isto é, euclidiano, exceto pelo sinal de menos na equação 3.2.

A equação 3.3 descreve o espaço-tempo da Relatividade Especial, ou *espaço-tempo de Minkowski*, e representa o intervalo entre dois eventos em coordenadas inerciais. Também podemos utilizar coordenadas não inerciais (ou não Lorentzianas) para descrevermos o espaço-tempo, como coordenadas polares para a parte espacial da métrica ou o sistema de coordenadas de um observador acelerado. Se a relação entre as coordenadas inerciais  $x^\mu$  e as coordenadas não inerciais  $y^\mu$  for

$$x^\mu = x^\mu(y^\gamma), \quad (3.5)$$

a equação 3.3 se torna

$$ds^2 = \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} \eta_{\gamma\sigma} dy^\mu dy^\nu = g_{\mu\nu}(y^\gamma) dy^\mu dy^\nu. \quad (3.6)$$

---

<sup>1</sup>Haverá uma somatória implícita sempre que o mesmo índice grego for repetido em um produto, uma vez como índice subscrito e outra como índice sobreescrito, ou seja,  $\sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu = a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$ . Esta notação é chamada de notação de Einstein.

Na Relatividade Geral, o intervalo entre eventos próximos, também chamado de *elemento de linha*, é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.7)$$

As funções  $g_{\mu\nu}$ , chamadas de *componentes da métrica*, são usadas para representar as variáveis do campo gravitacional, ou seja, o campo gravitacional determina a geometria. O intervalo  $ds$  ainda é invariante, de modo que  $g_{\mu\nu}$  se transformam das coordenadas  $x^{\bar{\mu}}$  para as coordenadas  $x^\mu$  como

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\bar{\gamma}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\bar{\sigma}}}{\partial x^\nu} g_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} = \Lambda_{\mu}^{\bar{\gamma}} \Lambda_{\nu}^{\bar{\sigma}} g_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} \quad (3.8)$$

onde  $\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \partial x^{\bar{\mu}} / \partial x^\nu$ .

Além disso, podemos encontrar a métrica inversa  $g^{-1}$ , onde suas componentes, escritas da forma  $g^{\mu\nu}$ , podem ser obtidas através da relação

$$g^{\mu\gamma} g_{\gamma\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (3.9)$$

### 3.3 Tensor de Energia-Momento

Tendo formulada a versão geométrica dos efeitos da gravidade, entender qual era a fonte da gravidade ainda era uma incógnita. Na formulação Newtoniana, a fonte da gravidade é a massa. Na Relatividade Especial, possuímos uma quantidade mais geral chamada de *tensor de energia-momento*, que inclui densidades de energia e de momento, além de pressão e cisalhamento.

Cada componente deste tensor está ligada a uma quantidade específica, como podemos ver a seguir:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Para  $i$  e  $j$  variando de 1 a 3, a componente  $T_{00}$  em vermelho é a densidade de energia; as componentes  $T_{i0}$  em laranja são as densidades de momento;  $T_{0i}$  em amarelo são os fluxos de energia;  $T_{ij}$  são os fluxos de momento, sendo que  $i = j$  (em azul) estão relacionadas com a pressão e  $i \neq j$  (em verde) com a tensão de cisalhamento.

Para o estudo de estrelas relativísticas, será suficiente supor que essas estrelas são formadas por um *fluido perfeito*, que não conduz calor nem suporta tensões de cisalhamento. Nesse caso, no referencial de repouso do fluido,  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\epsilon, p, p, p)$ , ou, num sistema de coordenadas arbitrário,

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p) u_\mu u_\nu / c^2 + p g_{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

onde  $\epsilon$  é a densidade de energia,  $p$  é a pressão,  $u^\mu$  são as componentes da quadrivelocidade, que obedecem a equação

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \quad (3.12)$$

e  $g_{\mu\nu}$  são as componentes da métrica que vimos anteriormente.

Esta é o que chamamos da forma *covariante* do tensor de energia-momento. Também há a forma *contravariante*  $T^{\mu\nu}$  e a *mista*  $T^\mu_\nu$ , que se relacionam com  $T_{\mu\nu}$  através das componentes da métrica (ou, nesse caso, da métrica inversa)

$$T^{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \quad (3.13)$$

$$T^\mu_\nu = T_{\alpha\nu} g^{\alpha\mu} \quad (3.14)$$

Na Relatividade Especial, a conservação de energia-momento nos diz que o tensor de energia-momento tem divergente nulo. Podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.15)$$

onde  $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x^\nu$ .

Essa fórmula também é prontamente generalizada para a Relatividade Geral, substituindo as derivadas parciais por derivadas covariantes estudadas na geometria diferencial:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\nu} T^{\mu\sigma} = 0, \quad (3.16)$$

onde  $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$  é o símbolo de Christoffel, dado por

$$\Gamma^\mu_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\sigma g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\nu}). \quad (3.17)$$

Com essa condição, o divergente covariante do tensor de energia-momento, e, portanto,  $\partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\nu} T^{\mu\sigma}$ , é zero.

### 3.4 Equações de Einstein

Com base na analogia com a gravidade Newtoniana, é natural supor que a equação de campo para a gravidade relaciona o tensor de energia-momento com o tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , que descreve parte da curvatura do espaço-tempo, determinando o grau em que uma geometria descrita por uma certa métrica pseudo-riemanniana diverge do espaço-tempo de Minkowski. As equações que relacionam a geometria do espaço-tempo com a distribuição da matéria dentro dele são chamadas de *equações de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

No lado esquerdo, está o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , uma combinação específica do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e das componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$ . Em particular,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

é a curvatura escalar. O próprio tensor de Ricci está relacionado ao *tensor de curvatura de Riemann* mais geral,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}. \quad (3.20)$$

No lado direito da equação 3.18, temos o tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Combinando a previsão da teoria com os resultados observacionais para órbitas planetárias ou assegurando que o limite de baixa velocidade e gravidade recaia na mecânica Newtoniana, a constante de proporcionalidade pode ser fixada como  $\kappa = 8\pi G/c^4$ , onde  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Quando não há matéria presente, de modo que  $T_{\mu\nu} = 0$ , os resultados são as equações de Einstein no vácuo,

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.21)$$

No limite Newtoniano, as equações de Einstein se reduzem à equação de Poisson 2.11. Também garantem a conservação do tensor de energia-momento, uma vez que  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ .

Para simplificar a notação, de agora em diante, definiremos a velocidade da luz  $c$  e a constante gravitacional  $G$  como 1 ( $c = G = 1$ ).

### 3.5 Métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico

Como vimos, o elemento de linha  $ds^2$  representa o módulo ao quadrado de um deslocamento infinitesimal numa direção não especificada e é definido por 3.7. Em um espaço-tempo esfericamente simétrico, podemos escolher coordenadas especiais,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \phi$ , de modo que o elemento de linha sobre superfícies com  $x^0 = \text{cte}$  e  $x^1 = \text{cte}$  se reduza àquele da 2-esfera:  $ds^2 = r^2(x^0, x^1)(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)$ . Além disso, escolhemos a coordenada  $x^1$  como a própria função  $r$  e denotamos  $x^0 = t$ . Como queremos que todo o espaço-tempo seja esfericamente simétrico, não apenas as superfícies com  $t = \text{cte}$ , devemos ter que a linha  $r = \text{cte}$ ,  $\theta = \text{cte}$ ,  $\phi = \text{cte}$  seja ortogonal à 2-esfera, caso contrário, haveria uma direção preferencial no espaço. Isso significa que  $g_{02} = g_{03} = 0$ . Com isso, temos que a métrica geral de um espaço-tempo esfericamente simétrico é dada por

$$ds^2 = g_{00}(r, t)dt^2 + 2g_{01}(r, t)drdt + g_{11}(r, t)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.22)$$

Para nós, será necessário considerar apenas sistemas estáticos, ou seja, sistemas em que todas as componentes métricas são independentes de  $t$  e a geometria é inalterada pela inversão do tempo,  $t \rightarrow -t$ . Esta segunda condição implica que  $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-t, r, \theta, \phi)$ ; nesse caso  $\Lambda^0_{\bar{0}} = -1$  e  $\Lambda^i_j = \delta^i_j$ , e com isso encontramos

$$\begin{cases} g_{\bar{0}\bar{0}} = (\Lambda^0_{\bar{0}})^2 g_{00} = g_{00} \\ g_{\bar{0}\bar{1}} = \Lambda^0_{\bar{0}} \Lambda^1_{\bar{1}} g_{01} = -g_{01} \\ g_{\bar{1}\bar{1}} = (\Lambda^1_{\bar{1}})^2 g_{11} = g_{11} \end{cases}$$

Como  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = g_{\mu\nu}$  pois a geometria não deve se alterar,  $g_{01} = 0$ . Logo, o elemento de linha de um espaço-tempo esfericamente simétrico e *estático* é da forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.23)$$

e a métrica pode ser expressa explicitamente como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

onde introduzimos as funções  $\Phi(r)$  e  $\lambda(r)$  no lugar de  $g_{00}(r)$  e  $g_{11}(r)$ , o que é aceitável desde que  $g_{00} < 0$  e  $g_{11} > 0$  em todo o espaço-tempo.

As componentes não nulas do tensor de Einstein para esta métrica são

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} [r(1 - e^{-2\lambda})]', \quad (3.25)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{r^2} e^{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda}) + \frac{2}{r} \Phi' \quad (3.26)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2\lambda} \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \lambda' - \frac{\lambda'}{r} \right] \quad (3.27)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22} \quad (3.28)$$

onde  $f' \equiv df/dr$  daqui em diante.

No vácuo, vimos que equações de Einstein se reduzem a  $R_{\mu\nu} = 0$  (ou  $G_{\mu\nu} = 0$ ). Definindo a função de massa  $m(r)$  como

$$m(r) \equiv \frac{1}{2} r (1 - e^{-2\lambda(r)}), \quad (3.29)$$

de  $G_{00} = 0$ , obtemos que  $m(r) = M = cte$  e de  $G_{11} = 0$ , temos que  $\Phi' = \frac{M}{r(r-2M)}$ , cuja solução é

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (3.30)$$

Assim, o elemento de linha 3.23 pode ser escrito como

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.31)$$

Esta é uma métrica importantíssima conhecida como *métrica de Schwarzschild*. Discutiremos mais sobre ela quando falarmos dos buracos negros de Schwarzschild no capítulo 5.

# Capítulo 4

## Estrelas Relativísticas

Neste capítulo, utilizaremos os conceitos do capítulo anterior para apresentar as propriedades básicas de equilíbrio e estabilidade de estrelas relativísticas, abordando a teoria de oscilações para o caso de estrelas de nêutrons e apresentando uma forma numérica de encontrar as frequências características dos modos radiais.

Na seção 4.1 são desenvolvidas as equações de TOV, que determinam as configurações de equilíbrio de estrelas esfericamente simétricas na Relatividade Geral. A seção 4.2 é totalmente voltada às estrelas de nêutrons. Nela, a seção 4.2.1 apresenta as equações de estado (EOS) de estrelas de nêutrons que usaremos neste trabalho, bem como um modo de implementá-las numericamente, juntamente com as equações de TOV, a fim de obter as grandezas físicas das estrelas, como a massa e o raio, e, na seção 4.2.2, consideramos perturbações radiais dessas configurações de equilíbrio para encontrarmos os modos radiais de oscilação desses objetos.

### 4.1 Configuração de Equilíbrio

#### 4.1.1 Equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

Para encontrarmos as configurações de equilíbrio, vamos assumir que o espaço-tempo é esfericamente simétrico e estático, e que o conteúdo de matéria é dado por um fluido perfeito.

Utilizando a função de massa  $m(r)$  dada pela equação 3.29 e substituindo  $e^{-2\lambda}$  por  $m$  nas componentes do tensor de Einstein 3.25 e 3.26, obtemos<sup>1</sup>

$$G_{00} = \frac{2}{r^2} e^{2\Phi} m' \quad (4.1)$$

$$G_{11} = -\frac{2}{r^3} \frac{m}{1-2m/r} + \frac{2}{r} \Phi'. \quad (4.2)$$

Sabendo que  $u^\mu = (e^{-\Phi}, 0, 0, 0)$ <sup>2</sup>, podemos obter as respectivas componentes do tensor de energia-momento através da equação 3.11:

<sup>1</sup>Lembrando que estão sendo utilizadas unidades naturais, em que  $c = G = 1$ .

<sup>2</sup>Como o fluido é estático, ou seja,  $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$ , basta utilizar a propriedade 3.12,  $u_\mu u^\mu = (u^0)^2 g_{00} = (u_0)^2 g^{00} = -1$  para encontrar tanto  $u^0$  quanto  $u_0$ .

$$T_{00} = \epsilon e^{2\Phi} \quad (4.3)$$

$$T_{11} = p e^{2\lambda} = \frac{p}{1 - 2m/r} \quad (4.4)$$

Utilizando as equações de Einstein 3.18, a componente 00 pode ser escrita como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad (4.5)$$

e, da componente 11, obtemos

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}. \quad (4.6)$$

Para conseguirmos a última equação necessária para a descrição das configurações de equilíbrio, precisamos utilizar a componente radial da lei de conservação do tensor de energia-momento 3.16,

$$\begin{aligned} \nabla_0 T^{01} + \nabla_1 T^{11} + \nabla_2 T^{21} + \nabla_3 T^{31} &= 0 \\ e^{-2\lambda} \Phi'(p + \epsilon) + p' e^{-2\lambda} + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Com isso, obtemos a equação que faltava:

$$\frac{dp}{dr} = -(\epsilon + p) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (4.7)$$

As equações 4.5, 4.6 e 4.7, também conhecidas como as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [3], determinam as configurações de equilíbrio hidrostático e a integração dessas equações determina a estrutura das estrelas relativísticas e sua relação massa-raio.

Observe que as equações 2.21 são recuperadas quando  $p \ll \epsilon$  e  $m \ll r$ , sendo que a densidade de energia entra no lugar da densidade de massa. No entanto, a equação 4.5 não dá a  $m$  a interpretação de energia contida numa esfera de raio  $r$  no caso relativístico, pois nesse caso, o elemento de volume próprio não seria  $4\pi r^2 dr$  mas sim  $4\pi r^2 e^\lambda dr$ .

#### 4.1.2 Solução com densidade constante

Analogamente ao caso Newtoniano, vamos considerar configurações com densidade (agora de energia!) constante  $\epsilon = \epsilon_{cte}$ . Neste caso, obtemos

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \epsilon_{cte}. \quad (4.8)$$

Como a densidade não depende do raio, podemos integrar 4.7 exatamente, resultando em

$$p(r) = \epsilon_{cte} \left( \frac{\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}}{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3} - 3\sqrt{1 - 2M/R}} \right). \quad (4.9)$$

Portanto, a pressão central  $p_c$  necessária para o equilíbrio de uma estrela com densidade constante

é dada por

$$p_c = \epsilon_{cte} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - 1} \right). \quad (4.10)$$

Nas Figuras 4.1 e 4.2 podemos ver a comparação entre as soluções para estrelas relativísticas (em azul) e Newtonianas (em cinza e tracejado) para  $M/R = 0.44$ . Para  $M/R \rightarrow 0$ , recuperamos o resultado Newtoniano, mas no caso relativístico,  $p_c \rightarrow \infty$  quando  $M/R = 4/9$  e, por isso, quanto mais nos aproximamos desse valor, mais a pressão das estrelas relativísticas se difere do caso Newtoniano (ver Figura 4.2). Isso nos sugere que, na Relatividade Geral, estrelas com densidade de energia uniforme e com massa maior que  $4R/9$  simplesmente não podem existir, pois, nesses casos, seria necessário uma pressão infinita para suportá-las em uma configuração estática, caso contrário elas colapsariam. De fato, se assumirmos apenas que a densidade é positiva e uma função monotonicamente decrescente de  $r$ , então é possível mostrar que, para estrelas com raio  $R$  fixo, a massa máxima é exatamente  $4R/9$  [17]!

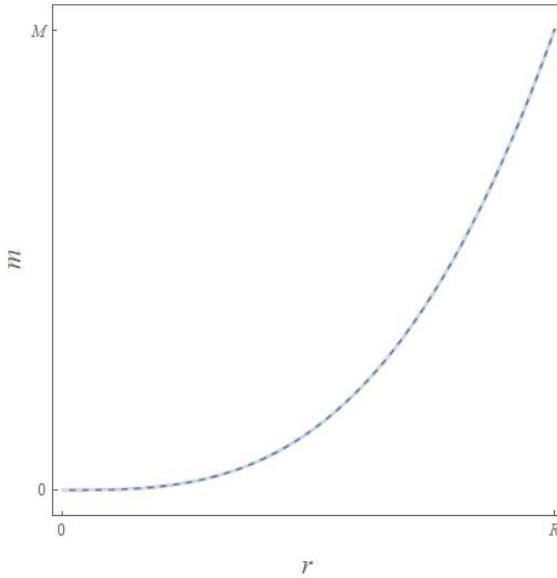


Figura 4.1: Variação de  $m$  em função de  $r$  para estrelas relativísticas (em azul) e Newtonianas (em cinza tracejado) com  $M/R = 0.44$ .

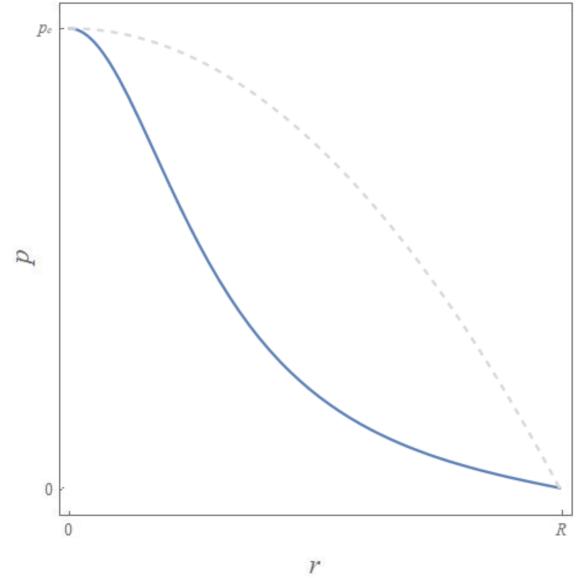


Figura 4.2: Variação de  $p$  em função de  $r$  para estrelas relativísticas (em azul) e Newtonianas (em cinza tracejado) com  $M/R = 0.44$ .

## 4.2 Estrelas de Nêutrons

As estrelas de nêutrons possuem esse nome por conta da predominância de nêutrons em seu interior, após a eliminação mútua de elétrons e prótons por decaimento beta inverso. Com densidades comparáveis aos valores nucleares, essas estrelas possuem cerca de  $10^{57}$  bárions, mantidos juntos pela auto-gravidade [10], um raio de cerca de 10 km e podem chegar a massas de até 2 vezes a massa solar.

Sua estrutura interna é descrita pela equação de estado (EOS). A EOS condensa as propriedades microscópicas relevantes, que estão conectadas às propriedades macroscópicas da estrela de nêutrons através das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [3].

Acredita-se que estrelas de nêutrons e buracos negros se originem de estrelas como o Sol, porém mais massivas. No entanto, a linha divisória entre as estrelas que formam estrelas de nêutrons e as que formam buracos negros é muito incerta, já que os estágios finais da evolução de estrelas massivas são pouco compreendidos.

Estrelas de nêutrons podem ser observadas vários comprimentos de onda. Em especial, podem ser observadas como fontes de rádio pulsantes (os *pulsares*): até agora, mais de 2.500 pulsares já foram descobertos na nossa galáxia. Outras vezes, estrelas de nêutrons podem ser observadas em raios-X, devido à emissão térmica de suas superfícies, ou podem ser fontes intensas de raios gama [7, 10].

#### 4.2.1 Equação de Estado Politrópica por Partes

Até então, temos três equações diferenciais 4.5, 4.6 e 4.7 para quatro incógnitas,  $m$ ,  $\Phi$ ,  $p$  e  $\epsilon$ . A equação de estado (EOS) cumpre justamente o papel de fornecer uma relação entre  $p$  e  $\epsilon$  e nos permitir fechar o sistema.

A pressão  $p$  da EOS é especificada como uma função da densidade de massa de repouso  $\rho$  (essa densidade de massa  $\rho = m_b n$  é proporcional à densidade de número bariônico  $n$ , onde  $m_b = 1.66 \times 10^{-24} g$  é a massa média de repouso bariônica). Neste trabalho, não usaremos EOSs calculadas a partir de primeiros princípios em física nuclear, mas modelos fenomenológicos, que podem ser ajustados a equações de estado mais realistas. A EOS proposta em [12] parte da forma

$$p(\rho) = K\rho^\Gamma, \quad (4.11)$$

onde  $\Gamma$  é o índice adiabático.

A densidade de energia  $\epsilon$  como função de  $\rho$  é determinada através da primeira lei da termodinâmica,

$$d\frac{\epsilon}{\rho} = -pd\frac{1}{\rho}. \quad (4.12)$$

Integrando a equação 4.12, com  $p$  dado pela equação 4.11, obtemos

$$\frac{\epsilon}{\rho} = (1 + a) + \frac{1}{\Gamma - 1}K\rho^{\Gamma-1}, \quad (4.13)$$

onde  $a$  é uma constante e o limite  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\rho} = 1$  implica em  $a = 0$ .

Seguindo [12], usaremos EOSs politrópicas por partes acima de uma densidade  $\rho_0$ , satisfazendo as equações 4.11 e 4.12 em uma sequência de intervalos de densidade, cada um com seu próprio  $K_i$  e  $\Gamma_i$ : Uma EOS é politrópica por partes para  $\rho \geq \rho_0$  se, para um conjunto de densidades de divisão  $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots$ , a pressão e densidade de energia forem contínuas em toda parte e satisfizerem

$$p(\rho) = K_i \rho^{\Gamma_i}, \quad d\frac{\epsilon}{\rho} = -pd\frac{1}{\rho}, \quad \rho_{i-1} < \rho < \rho_i. \quad (4.14)$$

Então, para  $\Gamma \neq 1$

$$\epsilon(\rho) = (1 + a_i)\rho + \frac{K_i}{\Gamma_i - 1}\rho^{\Gamma_i}, \quad (4.15)$$

com

$$a_i = \frac{\epsilon(\rho_{i-1})}{\rho_{i-1}} - 1 - \frac{K_i}{\Gamma_i - 1} \rho_{i-1}^{\Gamma_i - 1}. \quad (4.16)$$

Cada segmento de uma EOS politrópica por partes é especificado por três parâmetros: a densidade inicial, o coeficiente  $K_i$  e o índice adiabático  $\Gamma_i$ . No entanto, quando a EOS de menor densidade já for especificada até o  $\rho_i$  escolhido, a continuidade da pressão restringe  $K_{i+1}$  ao valor

$$K_{i+1} = \frac{p(\rho_i)}{\rho_i^{\Gamma_i + 1}}. \quad (4.17)$$

Assim, cada região adicional requer apenas dois parâmetros adicionais,  $\rho_i$  e  $\Gamma_{i+1}$ . Além disso, se a densidade inicial de um intervalo for escolhida para ser um valor fixo para a parametrização, especificar a EOS no intervalo de densidade requer apenas um único parâmetro adicional.

### Implementação numérica

Para implementarmos a EOS numericamente, primeiramente precisamos ajustar as suas regiões fixas. Segundo [12], um bom ajuste com um número mínimo de parâmetros é encontrado para três regiões com uma divisão entre a primeira e a segunda região fixada em  $\rho_1 = 10^{14.7} g/cm^3$  e uma entre a segunda e a terceira fixada em  $\rho_2 = 10^{15.0} g/cm^3$ .

A EOS é especificada escolhendo os índices adiabáticos  $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$  em cada região, e a pressão  $p_1$  na primeira densidade de divisão,  $p_1 = p_1(\rho_1)$  (ver Figura 4.3).

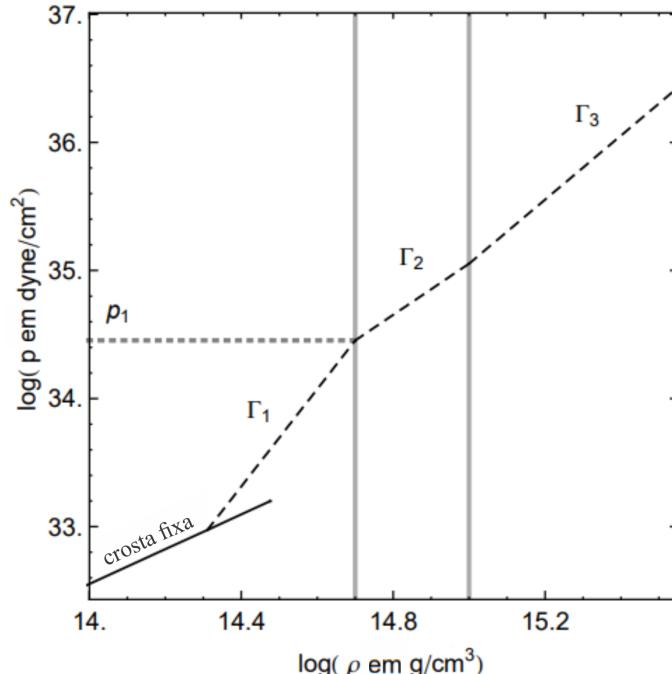


Figura 4.3: O ajuste da região fixa é parametrizado por índices adiabáticos  $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$  e pela pressão  $p_1$  na primeira densidade de divisão. Retirado da Ref. [12].

Na crosta fixa, temos uma forma analítica de uma EOS de baixa densidade (SLy, por exemplo), que corresponde de maneira muito próxima a seus valores tabelados. Em [12], a pressão  $p(\rho)$  para SLy é descrita entre  $\rho = 10^3 g/cm^3$  e  $\rho = 10^{14} g/cm^3$  por quatro regiões politrópicas. A aproximação politrópica por partes da EOS SLy é definida pelos valores de  $K_i$ ,  $\Gamma_i$  e  $\rho_i$  listados na Tabela 4.1.

$K_i/c^2$	$\Gamma_i$	$\rho_i$
6.80110e-09	1.58425	2.44034e+07
1.06186e-06	1.28733	3.78358e+11
5.32697e+01	0.62223	2.62780e+12
3.99874e-08	1.35692	—

Tabela 4.1: Representação analítica de  $p(\rho)$  para a EOS SLy abaixo da densidade nuclear [12].  $K_i$  é representado nas unidades cgs para as quais o valor correspondente de  $p$  está em unidades de  $dyne/cm^2$ ,  $\Gamma_i$  é adimensional e  $\rho_i$  está em  $g/cm^3$ .

Já para os parâmetros para a EOS de alta densidade, com aproximação politrópica de três regiões ( $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ), foram escolhidas as EOSs que possuíam  $v_{s,max} \leq c = 1$  e  $M_{max} \geq 1.900 M_\odot$  (massas solares) presentes em [12]. Tais EOSs estão listadas na Tabela 4.2 com seus respectivos valores de  $\log(p_1)$  e  $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ .

EOS	$\log(p_1)$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$v_{s,max}$	%	$M_{max}$	%
SLy	34.384	3.005	2.988	2.851	0.989	1.41	2.049	0.02
BBB2	34.331	3.418	2.835	2.832	0.914	7.75	1.918	0.10
ENG	34.437	3.514	3.130	3.168	1.000	10.71	2.240	-0.05
MPA1	34.495	3.446	3.572	2.887	0.994	4.91	2.461	-0.16
MS1	34.858	3.224	3.033	1.325	0.888	12.44	2.767	-0.54
MS1b	34.855	3.456	3.011	1.425	0.889	11.38	2.776	-1.03
GNH3	34.648	2.664	2.194	2.304	0.750	2.04	1.962	0.13
H4	34.669	2.909	2.246	2.144	0.685	4.52	2.032	-0.85
ALF2	34.616	4.070	2.411	1.890	0.642	1.50	2.086	-5.26
ALF4	34.314	3.009	3.438	1.803	0.685	14.78	1.943	-0.93

Tabela 4.2: Os parâmetros que fornecem o melhor ajuste às EOSs candidatas, bem como o residual [12].  $p_1$  está em unidade de  $dyne/cm^2$ .  $v_{s,max}$  é a velocidade adiabática máxima do som abaixo da densidade central da estrela de nêutrons de massa máxima.  $M_{max}$  é a massa máxima de massa de uma configuração sem rotação.

Derivando a EOS politrópica por partes, obtemos

$$\frac{dp}{dr} = [K_i \Gamma_i \rho(r)^{\Gamma_i - 1}]^{-1} \frac{dp}{dr}. \quad (4.18)$$

Com os valores de  $K_i$ ,  $\Gamma_i$  e  $\rho_i$  em mãos, podemos obter os valores de  $p_i$  e os valores  $a_i$  através das equações 4.11 e 4.16, respectivamente e, desta forma, reescrever as equações de TOV 4.5, 4.6 e a equação 4.18 com o auxílio da equação 4.7 para determinada densidade central  $\rho_c$  da seguinte maneira:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \left[ (1 + a_i)\rho(r) + \frac{K_i\rho(r)^{\Gamma_i}}{\Gamma_i - 1} \right] \quad (4.19)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{4\pi K_i \rho(r)^{\Gamma_i} r^3 + m(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (4.20)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{(1 + a_i)\rho(r) + (K_i\rho(r)^{\Gamma_i})/(\Gamma_i - 1) + K_i\rho(r)^{\Gamma_i}}{K_i\Gamma_i\rho(r)^{\Gamma_i-1}} \frac{d\Phi}{dr} \quad (4.21)$$

onde  $i \rightarrow i - 1$  sempre que  $\rho(r)$  for igual a  $\rho_{i-1}$  e, com isso, obter  $m(r)$ ,  $\Phi(r)$ ,  $\rho(r)$  e, consequentemente,  $p(r)$ ,  $\epsilon(r)$  ou qualquer outra combinação dessas grandezas.

Quando a pressão  $p \rightarrow 0$  (o que, neste caso, implica em  $\rho \rightarrow 0$ ), encontramos a borda da estrela e definimos o raio  $R$  como o raio da estrela e  $m(R) = M$  com sua massa, assim como no caso Newtoniano. A massa máxima  $M_{max}$  de uma determinada EOS é dada pelo valor máximo de  $M$  dentre todas as densidades centrais.

Para  $r > R$ , a métrica da estrela passa a ser dada pela métrica de Schwarzschild, já que não há mais fluidos em seu exterior. Assim, no caso de  $\Phi(r)$ , precisamos impor que a solução seja compatível com a solução da métrica de Schwarzschild dada pela equação 3.30, ou seja,

$$\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right). \quad (4.22)$$

Na prática, é possível evoluir a equação 4.20 com uma condição arbitrária em  $r = 0$  e ajustá-la posteriormente, somando uma constante adequada.

## Curvas Massa-Raio

Resolvendo as equações 4.19, 4.20 e 4.21 numericamente segundo o procedimento descrito anteriormente para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$  (onde  $\rho_{nuc} = 2.7 \times 10^{14} g/cm^3$  é uma densidade nuclear típica), obtivemos as Figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7<sup>3</sup>. Todas essas figuras possuem marcações dos raios de transição  $r_{tr}$  referentes às densidades de massa de transição  $\rho_i$  para facilitar a distinção de cada região da EOS.

A Figura 4.4 mostra a variação do índice  $i$  com relação ao raio da estrela. Neste caso,  $\rho_c$  começa na 7<sup>a</sup> região e, como era de se esperar,  $i \rightarrow i - 1$  sempre que  $r = r_{tr}$ ; as Figuras 4.5 4.6 mostram a variação da massa  $m$  e da densidade de massa  $\rho$  com relação ao raio da estrela, respectivamente. Como

<sup>3</sup>Utilizamos o Wolfram Mathematica [13] para realizar todos os cálculos numéricos desta monografia. O código completo encontra-se no Apêndice (Capítulo 7).

esperado, a massa aumenta e  $\rho$  diminui conforme o raio vai aumentando e  $\rho$  tende a 0 quando  $r = R$ ; por fim, a Figura 4.7 mostra a variação de  $\Phi$  com relação ao raio da estrela<sup>4</sup>.

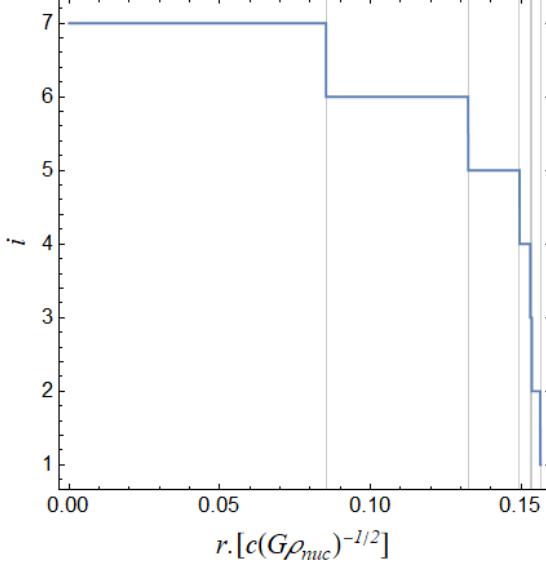


Figura 4.4: Variação de  $i$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$ .

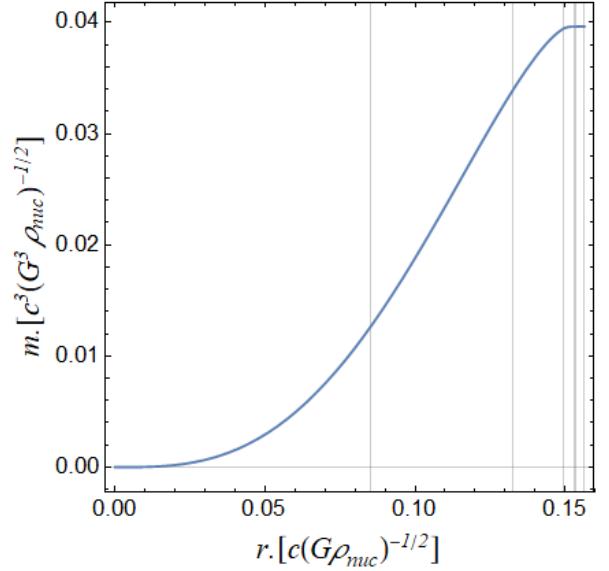


Figura 4.5: Variação de  $m$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$ .

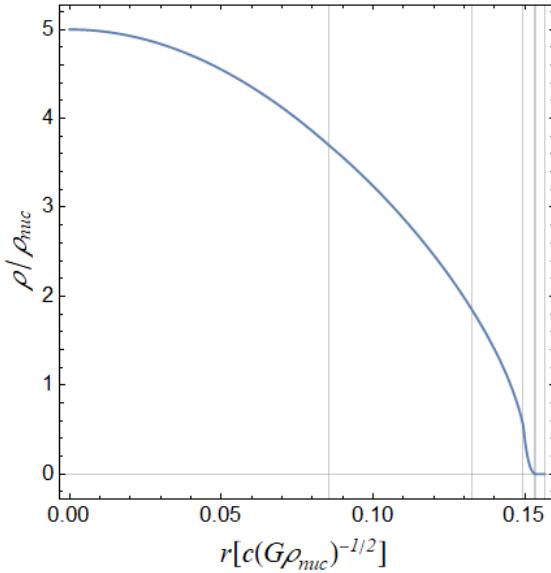


Figura 4.6: Variação de  $\rho$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$ .

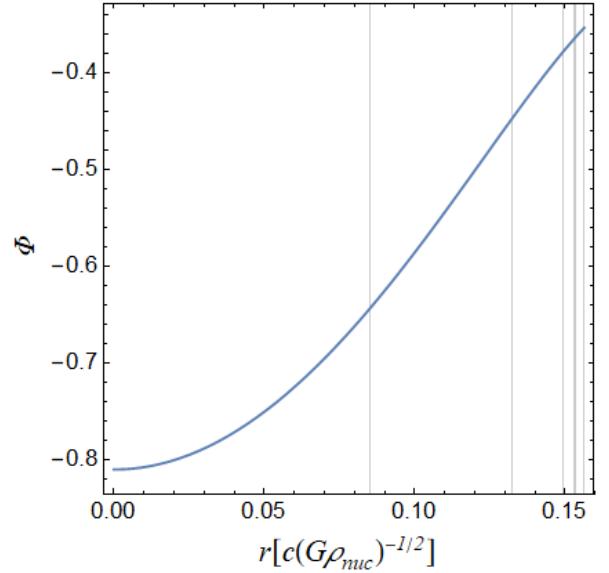


Figura 4.7: Variação de  $\Phi$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$ .

A Figura 4.8 mostra o gráfico de  $M = m(R)$  (em massas solares ( $M_\odot$ )) para cada  $\rho_c/\rho_{nuc}$  variando de 1.0 a 11.0 em passos de 0.2 de todas as EOSs da Tabela 4.2.

<sup>4</sup>Todas combinações escolhidas nos gráficos são adimensionais.

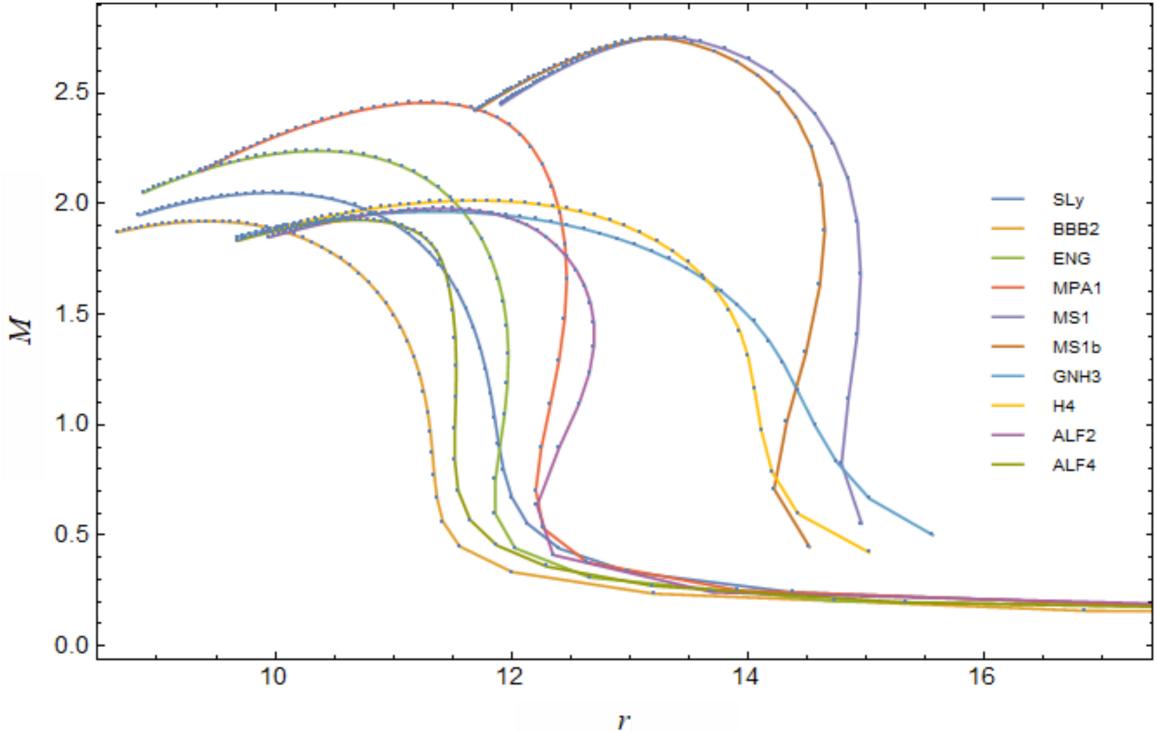


Figura 4.8: Variação da massa  $M$  (em  $M_{\odot}$ ) em função de  $r$  (em km) para as EOSs da Tabela 4.2 com  $\rho_c/\rho_{nuc}$  variando de 1.0 a 11.0 em passos de 0.2.

Os valores de  $M_{max}$  foram obtidos a partir deste gráfico e se encontram na Tabela 4.3, juntamente com os valores de  $M_{max}$  da literatura presentes na Tabela 4.2 e o residual desses valores. Podemos ver o quanto próximos os valores obtidos neste projeto estão dos valores da literatura levando em conta o residual.

EOS	$M_{max}^{literatura}$	%	$M_{max}^{obtido}$	%
SLy	2.049	0.02	2.049	-0.00
BBB2	1.918	0.10	1.920	-0.10
ENG	2.240	-0.05	2.238	0.09
MPA1	2.461	-0.16	2.456	0.20
MS1	2.767	-0.54	2.753	0.51
MS1b	2.776	-1.03	2.746	1.08
GNH3	1.962	0.13	1.963	-0.05
H4	2.032	-0.85	2.014	0.89
ALF2	2.086	-5.26	1.976	5.27
ALF4	1.943	-9.83	1.925	0.93

Tabela 4.3: Comparação entre as  $M_{max}$  da Ref. [12], encontradas na Tabela 4.2 e as obtidas no projeto, ambas em  $M_{\odot}$ , e seus respectivos residuais.

### 4.2.2 Perturbações Radiais

Como vimos na Seção 4.2.1, resolvendo as equações de TOV, é possível calcular propriedades de equilíbrio de estrelas de nêutrons, como suas massas e raios. O próximo passo é considerar perturbações radiais dessas configurações de equilíbrio e encontrar os modos radiais de oscilação desses objetos.

No caso das estrelas de nêutrons esfericamente simétricas com a métrica descrita pela equação 3.23, para perturbações radiais ( $\vec{r} = r$ ) Eulerianas, temos [10, 16]

$$\lambda(t, r) = \lambda_0(r) + \delta\lambda(r, t) = \lambda_0 + \delta\lambda \quad (4.23)$$

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(r) + \delta\Phi(r, t) = \Phi_0 + \delta\Phi \quad (4.24)$$

$$p(t, r) = p_0(r) + \delta p(r, t) = p_0 + \delta p \quad (4.25)$$

$$\epsilon(t, r) = \epsilon_0(r) + \delta\epsilon(r, t) = \epsilon_0 + \delta\epsilon \quad (4.26)$$

Para obter as equações que governam as oscilações radiais, tanto as variáveis de fluido quanto as de espaço-tempo são perturbadas de tal maneira que a simetria esférica do corpo de fundo não é violada.

Assim, como no caso Newtoniano, a velocidade do elemento de fluido  $v$  é dada pela derivada temporal do vetor deslocamento  $\vec{\xi} = \xi_r \hat{r} \equiv \xi^5$ ,

$$v = \partial_t \xi = \dot{\xi}. \quad (4.27)$$

Como o deslocamento é radial,  $u^1 = (v u^0)$  e  $u^2 = u^3 = 0$ . Utilizando a equação 3.12, obtemos

$$u^1 = e^{-\Phi_0} v, \quad u_1 = g_{11} u^1 = e^{2\lambda_0 - \Phi_0} v \quad (4.28)$$

$$u^0 = e^{-\Phi_0}, \quad u_0 = g_{00} u^0 = -e^{\Phi_0} \quad (4.29)$$

e, consequentemente, através das equações 3.11 e 3.14 do tensor de energia-momento, obtemos as seguintes componentes não nulas:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p_0 + \delta p \quad (4.30)$$

$$T_0^0 = -(\epsilon_0 + \delta\epsilon) \quad (4.31)$$

$$T_0^1 = (p_0 + \epsilon_0) u^1 u_0 = -(p_0 + \epsilon_0) v \quad (4.32)$$

$$T_1^0 = (p_0 + \epsilon_0) u^0 u_1 = e^{2(\lambda_0 - \Phi_0)} (p_0 + \epsilon_0) v \quad (4.33)$$

Do tensor de Ricci 3.20 temos que

$$R_0^1 = -\frac{2}{r} e^{-2\lambda} \partial_t \lambda = -\frac{2}{r} e^{-2\lambda_0} \partial_t \delta\lambda \quad (4.34)$$

em primeira ordem.

---

<sup>5</sup>Lembrando que  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Através das equações de Einstein, temos que  $R_0{}^1 = -8\pi T_0{}^1$ , que pode ser escrito como

$$\partial_t(\delta\lambda) = -4\pi r e^{2\lambda_0} (p_0 + \epsilon_0)v \quad (4.35)$$

logo,

$$\delta\lambda = -4\pi r e^{2\lambda_0} (p_0 + \epsilon_0)\xi = -(\Phi'_0 + \lambda'_0)\xi. \quad (4.36)$$

Com a definição 3.29, podemos utilizar 4.36 para relacionar  $\delta m$  com  $\delta\lambda$ . As componentes 00 e 11 do tensor de Einstein ainda são dadas por 3.25 e 3.26, bastando considerar  $m = m(r, t)$  e  $\Phi = \Phi(t, r)$ . Com isso, as equações 4.5 e 4.6 continuam válidas. Expandindo essas equações em primeira ordem nas variáveis perturbativas, usando a equação 4.36 e a primeira lei 4.12<sup>6</sup>, encontramos

$$\delta\epsilon = -\epsilon'_0\xi - \frac{1}{r^2}(p_0 + \epsilon_0)e^{\Phi_0}(r^2e^{-\Phi_0}\xi)' \quad (4.37)$$

$$\delta p = -p'_0\xi - \frac{1}{r^2}\Gamma_1 p_0 e^{\Phi_0}(r^2e^{-\Phi_0}\xi)' \quad (4.38)$$

$$(p_0 + \epsilon_0)(\delta\Phi)' = [\delta p - (p_0 + \epsilon_0)(2\Phi'_0 + 1/r)\xi](\Phi_0 + \lambda_0)' \quad (4.39)$$

Para encontrar as equações que governam as oscilações radiais, vamos utilizar a conservação de energia-momento 3.16:

$$\nabla_\mu T_1{}^\mu = \nabla_0 T_1{}^0 + \nabla_1 T_1{}^1 = 0. \quad (4.40)$$

Com a expressão explícita para os símbolos de Christoffel 3.17, podemos escrever 4.40 como

$$\partial_t T_1{}^0 + \partial_r T_1{}^1 + T_1{}^0 \partial_t (\lambda + \Phi) + (T_1{}^1 - T_0{}^0)\Phi' + \frac{2}{r}(T_1{}^1 - \delta p) = 0. \quad (4.41)$$

Utilizando as equações 4.30 - 4.33, podemos escrever 4.41 da seguinte forma:

$$e^{2(\lambda_0 - \Phi_0)}(p_0 + \epsilon_0)\frac{d}{dt}v + (\delta p)' + (p_0 + \epsilon_0)(\delta\Phi)' + (\delta p + \delta\epsilon)\Phi'_0 = 0. \quad (4.42)$$

Assumindo que a perturbação tem uma dependência harmônica no tempo,

$$\xi(t, r) = \xi(r)e^{-i\omega t}, \quad (4.43)$$

onde  $\omega$  é a frequência característica, podemos reescrever a equação 4.42 (com o auxílio da equação 4.39) como sendo

$$\omega^2 e^{2(\lambda_0 - \Phi_0)}(p_0 + \epsilon_0)\xi = (\delta p)' + (\lambda_0 + 2\phi_0)'\delta p + \Phi'_0\delta\epsilon - (p_0 + \epsilon_0)(2\Phi'_0 + 1/r)(\Phi'_0 + \lambda'_0)\xi. \quad (4.44)$$

---

<sup>6</sup>Da primeira lei, segue que  $\delta\epsilon = (\epsilon + p)\delta\rho/\rho$ . Usando a definição 2.16 para  $\Gamma_1$ , temos que  $\delta p = \Gamma_1(p/\rho)\delta\rho$ . Note que, para uma equação de estado politrópica, equação 4.11,  $\Gamma_1$  se reduz a  $\Gamma$ .

Substituindo as equações 4.37 e 4.38 na equação 4.44, ficamos com

$$\begin{aligned} \omega^2 e^{2(\lambda_0 - \Phi_0)} (p_0 + \epsilon_0) \xi &= - (\xi p'_0)' - (\lambda_0 + 2\phi_0)' p'_0 \xi - (p_0 + \epsilon_0)(2\Phi'_0 + 1/r)(\Phi'_0 + \lambda'_0) \xi \\ &\quad - \Phi'_0 \{[(p_0 + \epsilon_0)\xi]' + 2(p_0 + \epsilon_0)\xi/r\} \\ &\quad - e^{-(\lambda_0 + 2\Phi_0)} \frac{d}{dr} \left[ e^{(\lambda_0 + 3\Phi_0)} \frac{\Gamma_1 p_0}{r^2} (r^2 e^{-\Phi_0} \xi)' \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Definindo as seguintes variáveis,

$$\zeta = r^2 e^{-\Phi_0} \xi \quad (4.46)$$

$$r^2 W = (p_0 + \epsilon_0) e^{(3\lambda_0 + \Phi_0)} \quad (4.47)$$

$$r^2 P = \Gamma_1 p_0 e^{(\lambda_0 + 3\Phi_0)} \quad (4.48)$$

$$r^2 Q = e^{(\lambda_0 + 3\Phi_0)} (p_0 + \epsilon_0) \left[ (\Phi'_0)^2 + \frac{4\Phi'_0}{r} - 8\pi e^{2\lambda} p_0 \right], \quad (4.49)$$

obtemos a seguinte equação descrevendo a oscilação radial:

$$\frac{d}{dr} \left( P \frac{d\zeta}{dr} \right) + (Q + \omega^2 W) \zeta = 0. \quad (4.50)$$

### Condições de Contorno

Para as condições de contorno, temos:

$$\xi(0) = 0 \rightarrow \zeta \propto r^3 \text{ se } r \rightarrow 0 \quad (4.51)$$

$$\xi(R) \text{ e } \xi'(R) \text{ finitos,} \quad (4.52)$$

ou seja, o deslocamento no centro da estrela deve ser nulo e, na superfície, assim como no caso Newtoniano,  $\Delta p$  deve ser nulo, o que é satisfeito desde que  $\xi(R)$  e sua derivada sejam regulares.

Para encontrarmos uma expressão explícita para  $\xi'(R)$ , podemos utilizar que  $\Gamma_1 = \gamma$  e  $\Gamma'_1 = 0$  nas proximidades de  $r = R$  para uma equação de estado politrópica, assim,

$$\begin{aligned} \xi'' + \frac{\xi'}{2r} \left[ 5 + \frac{\epsilon_0}{p_0} - e^{2\lambda_0} \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{p_0} \right) \right] - \xi \frac{e^{-2\Phi_0}}{4r^2 \gamma} \left[ e^{2\Phi_0} \left( 7 + 10\gamma + (7 - 5\gamma) \frac{\epsilon_0}{p_0} \right) \right. \\ \left. - e^{(4\lambda_0 + 2\Phi_0)} (1 + 8\pi r^2 p_0) \left( 8\pi r^2 p_0 + (1 + \gamma) \frac{\epsilon_0}{p_0} + 1 + 2\gamma - 8\pi r^2 (\gamma - 1) \epsilon_0 \right) \right. \\ \left. + 2e^{2\lambda_0} \left( -2r^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{p_0} \right) - e^{2\Phi_0} (3 + 4\pi r^2 p_0) \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{p_0} (1 - \gamma) \right) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Como  $p_0(R) = 0$ , a parte irregular da equação acima é

$$\frac{\epsilon_0}{p_0} \left[ \frac{\xi'}{2R}(1 - e^{2\lambda_0}) - \frac{\xi e^{-2\Phi_0}}{4R^2\gamma} \left( e^{2\Phi_0}(7 - 5\gamma) - e^{(4\lambda_0+2\Phi_0)}(1 + \gamma) + 2e^{2\lambda_0}(-2R^2\omega^2 - 3e^{2\Phi_0}(1 - \gamma)) \right) \right]$$

que deve ser nula para que a equação tenha solução finita em  $r = R$ . Assim, a condição de contorno explícita para  $\xi'(R)$  é dada por

$$\xi'(R) = \frac{\xi(R)}{\gamma R} \left[ \frac{M(7 - 5\gamma) + 2R(\gamma - 2)}{2M - R} + \frac{R^3}{M} \omega^2 e^{-2\Phi_0(R)} \right], \quad (4.53)$$

onde  $e^{2\Phi(R)} \equiv 1 - 2M/R$ .

Em termos de  $\zeta$ ,

$$\zeta'(R) = \frac{\zeta(R)}{\gamma} \left[ \frac{4}{R} + \frac{M}{R(R - 2M)} + \frac{R^2}{M} \omega^2 e^{-2\Phi_0(R)} \right]. \quad (4.54)$$

Além das condições de contorno em  $r = 0$  e  $r = R$  discutidas até agora, é preciso impor uma condição adicional quando a EOS é politrópica por partes. Na junção das regiões da EOS politrópica por partes ( $r = r_{tr}$ ), sabemos que  $\Gamma_1$  é descontínuo e  $\Gamma'_1 \propto \delta(r - r_i)$ , logo,  $\zeta'$  será descontínuo. O salto na derivada pode ser calculado integrando a equação 4.50 de  $r_i - h$  a  $r_i + h$  e tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$ :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{r_i-h}^{r_i+h} \left[ \frac{d}{dr} \left( P \frac{d\zeta}{dr} \right) + (Q + \omega^2 W) \zeta \right] dr. \quad (4.55)$$

Como  $(Q + \omega^2 W) \zeta$  é contínuo, a integral desse termo se anula no limite  $h \rightarrow 0$  e não precisamos nos preocupar com essa parte, assim

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{r_i-h}^{r_i+h} d \left( P \frac{d\zeta}{dr} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ P^+ \frac{d\zeta}{dr} \Big|_{r_i+h} - P^- \frac{d\zeta}{dr} \Big|_{r_i-h} \right] \\ 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r_i^2} \Gamma_1^+ p_i e^{(\lambda_0(r_i) + \Phi_0(r_i))} \zeta'_+ - \frac{1}{r_i^2} \Gamma_1^- p_i e^{(\lambda_0(r_i) + \Phi_0(r_i))} \zeta'_- \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

Com isso, concluímos que, na junção das regiões,

$$\Gamma_1^+ \zeta'_+ = \Gamma_1^- \zeta'_-. \quad (4.57)$$

## Implementação numérica

Para encontrarmos as frequências  $\omega$ , podemos resolver a equação 4.50 em duas partes: uma com  $r$  variando de  $r \rightarrow 0$  a  $R/2$  e outra com  $r$  variando de  $R/2$  a  $R$ , para diversos valores de  $\omega$ . Sempre que  $\zeta'(R/2)/\zeta(R/2)$  da primeira parte for igual ao  $\zeta'(R/2)/\zeta(R/2)$  da segunda, temos uma frequência característica.

Para cada EOS e densidade central, temos infinitas frequências características, sendo  $\omega_0$  a frequência característica do modo fundamental,  $\omega_1$  a frequência característica do primeiro estado excitado,  $\omega_2$  a frequência característica do segundo estado excitado, e assim sucessivamente. As frequências características podem ser facilmente identificadas pela quantidade de raízes (ou nós)  $n$  da função  $\zeta(r)$ , ou seja, para  $\omega_0$ ,  $\zeta(r)$  não possui raízes ( $n = 0$ ), para  $\omega_1$ ,  $\zeta(r)$  possui 1 raiz ( $n = 1$ ), e assim por diante.

Com isso em mente, para encontrarmos as frequências características numericamente, foi necessário encontrar as grandezas físicas para cada densidade central  $\rho_c$  de cada EOS segundo a seção 4.2.1 e resolver a equação diferencial 4.50 com suas condições de contorno para uma gama de  $\omega$  diferentes a fim de encontrar  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , que satisfazem a condição descrita no primeiro parágrafo desta seção.

Realizando o procedimento descrito em 4.2.2 para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$ , encontramos  $f_0 = \omega_0/2\pi = 3.3632$  kHz,  $f_1 = \omega_1/2\pi = 10.2210$  kHz e  $f_2 = \omega_2/2\pi = 15.3841$  kHz. A Figura 4.9 mostra a variação de  $\zeta$  com relação à coordenada radial para  $f = f_0$ , a Figura 4.10 para  $f = f_1$ , a Figura 4.11 para  $f = f_2$  e a Figura 4.12 para  $f = 17.0000$  kHz. Podemos observar que a autofunção representada na Figura 4.9 não possui nós ( $n = 0$ ), na Figura 4.10 possui apenas um nó ( $n = 1$ ) e na Figura 4.11 possui dois nós ( $n = 2$ ), como era de se esperar. Além disso, a Figura 4.12 possui um “bico” em  $R/2$ , isso ocorre porque o  $f = 17.0000$  kHz não é uma frequência característica, ou seja,  $\zeta'(R/2)/\zeta(R/2)$  da primeira parte é diferente do  $\zeta'(R/2)/\zeta(R/2)$  da segunda.

Todas essas figuras possuem marcações dos raios de transição  $r_{tr}$  para facilitar a distinção de cada região da EOS, além da marcação de  $R/2$  em laranja para podermos observar a junção das duas partes da equação 4.50.

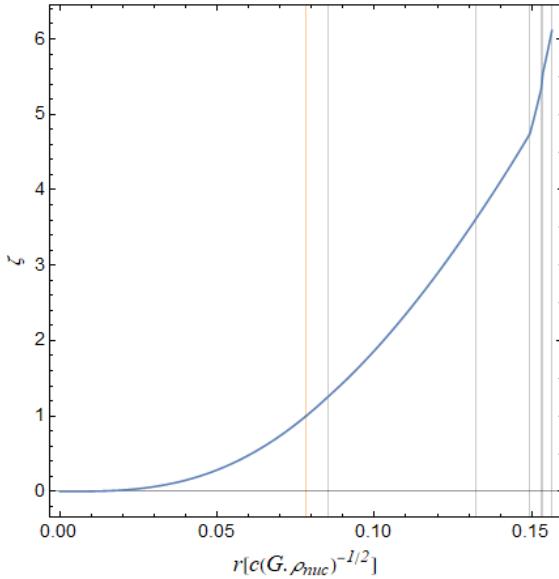


Figura 4.9: Variação de  $\zeta$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$  e  $f = f_0$ .

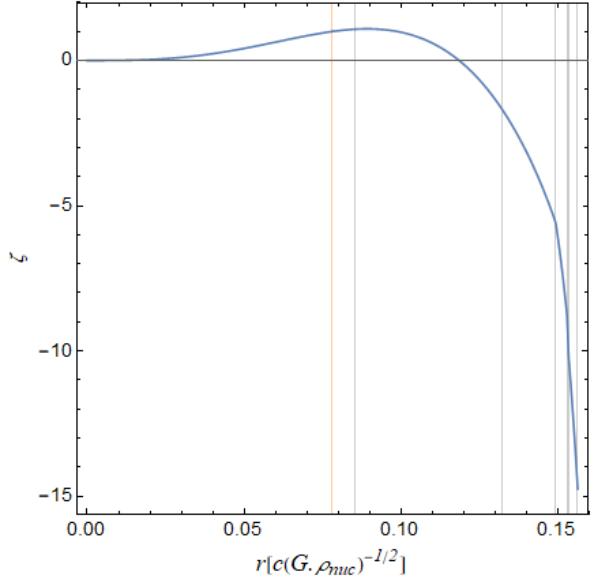


Figura 4.10: Variação de  $\zeta$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$  e  $f = f_1$ .

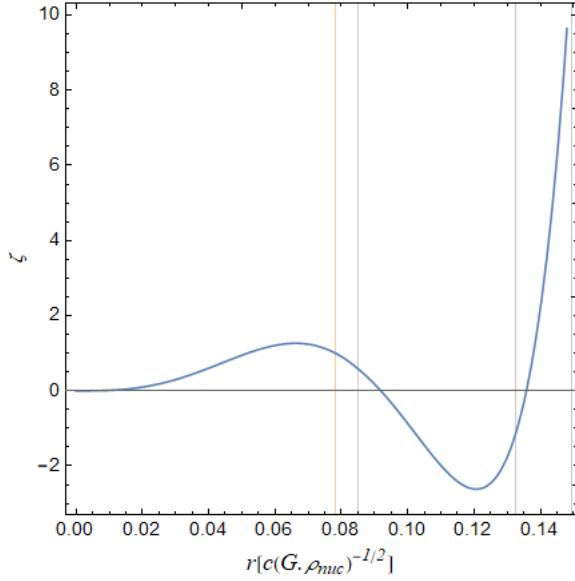


Figura 4.11: Variação de  $\zeta$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$  e  $f = f_2$ .

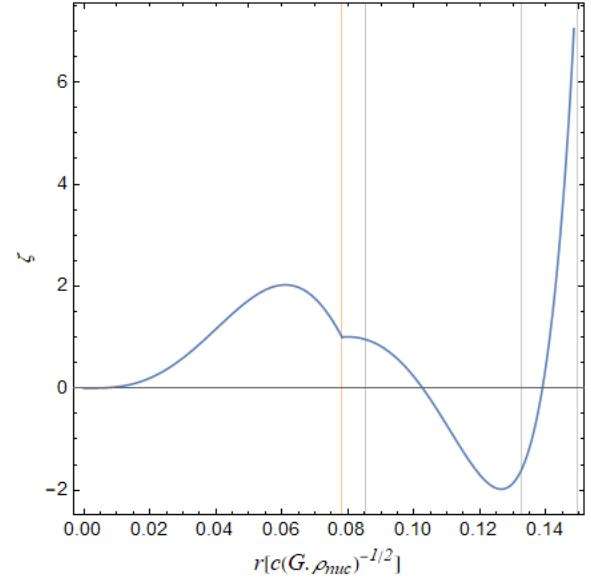


Figura 4.12: Variação de  $\zeta$  em função de  $r$  para a EOS SLy com  $\rho_c/\rho_{nuc} = 5$  e  $f = 17.0000$  kHz.

A Figura 4.13 apresenta as frequências características reais  $f = \omega/2\pi$  (em kHz) em função da massa  $M$  (em  $M_\odot$ ) para  $n = 0, 1$  e  $2$  com  $\rho_c/\rho_{nuc}$  variando de 1.50 a 11.00 em passos de 0.25 das EOSs da Tabela 4.2.

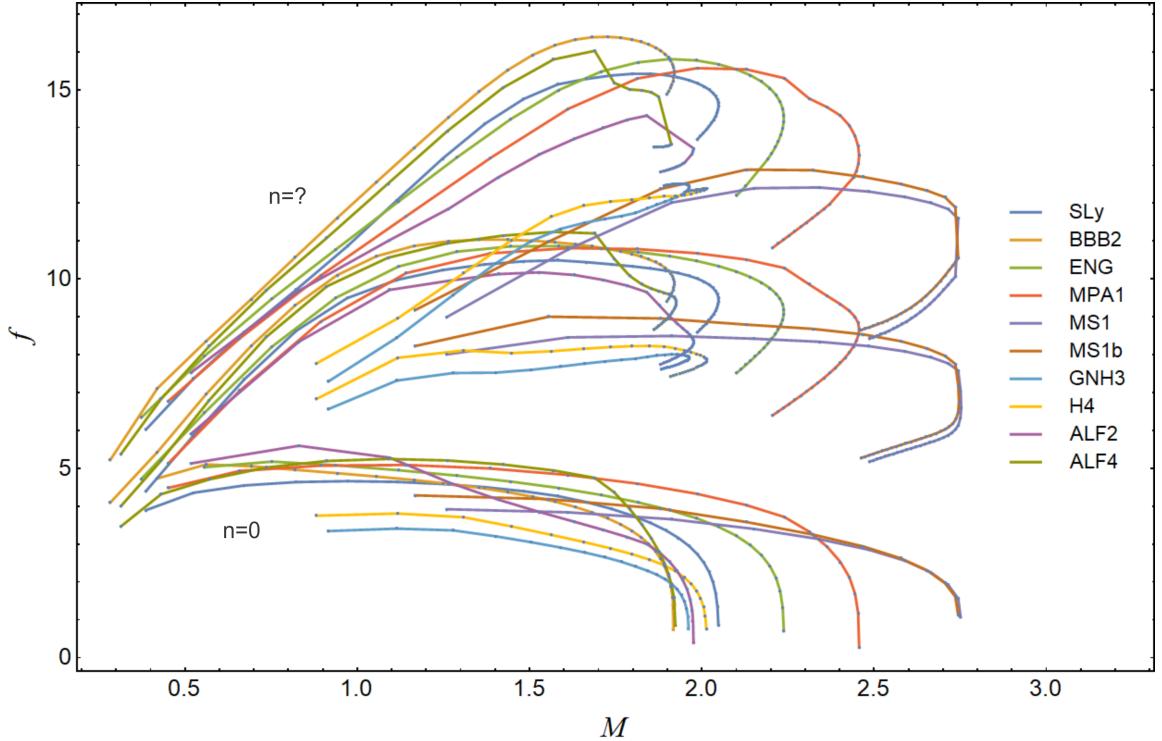


Figura 4.13: Variação das frequências características  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  (em kHz) em função de  $M$  (em  $M_\odot$ ) para as EOSs da Tabela 4.2 com  $\rho_c/\rho_{nuc}$  variando de 1.50 a 11.00 em passos de 0.25.

Para  $n = 0$ , a partir de certo valor de  $\rho_c/\rho_{nuc}$ ,  $f$  passa a assumir valores imaginários (ou seja, obtemos valores de  $\omega_0^2 < 0$ ). As configurações com  $\omega_0 = 0$  correspondem àquelas com a massa máxima,  $M_{max}$ , de cada EOS, como podemos observar na figura. De fato, existem teoremas (*turning point theorems*) que estabelecem que, em cada ponto de inflexão num diagrama massa-raio, um modo dinâmico da estrela tem sua estabilidade alterada [10].

Podemos notar que é possível distinguir as frequências características fundamentais ( $n = 0$ ) das de estados excitados ( $n \geq 1$ ) na Figura 4.13 mas não há como distinguir claramente quais são do primeiro ( $n = 1$ ) ou do segundo ( $n = 2$ ) estado excitado.

Para conseguirmos realizar esta distinção com mais facilidade, ou seja, para aumentar o espaçamento entre esses estados, podemos renormalizar as frequências características utilizando combinações dos valores do raio  $R$  e massa  $M$  correspondentes a cada uma dessas frequências, como é o caso da Figura 4.14.

A Figura 4.14 apresenta as mesmas frequências características reais  $f$  utilizadas na Figura 4.13, mas renormalizadas por  $\sqrt{R^3/GM}$  (em s). Podemos notar que o espaçamento entre os estados é muito maior neste caso do que sem a renormalização, principalmente antes da massa máxima  $M_{max}$  ser atingida, o que permite distinguir com muito mais facilidade em que estado aquela determinada frequência está.

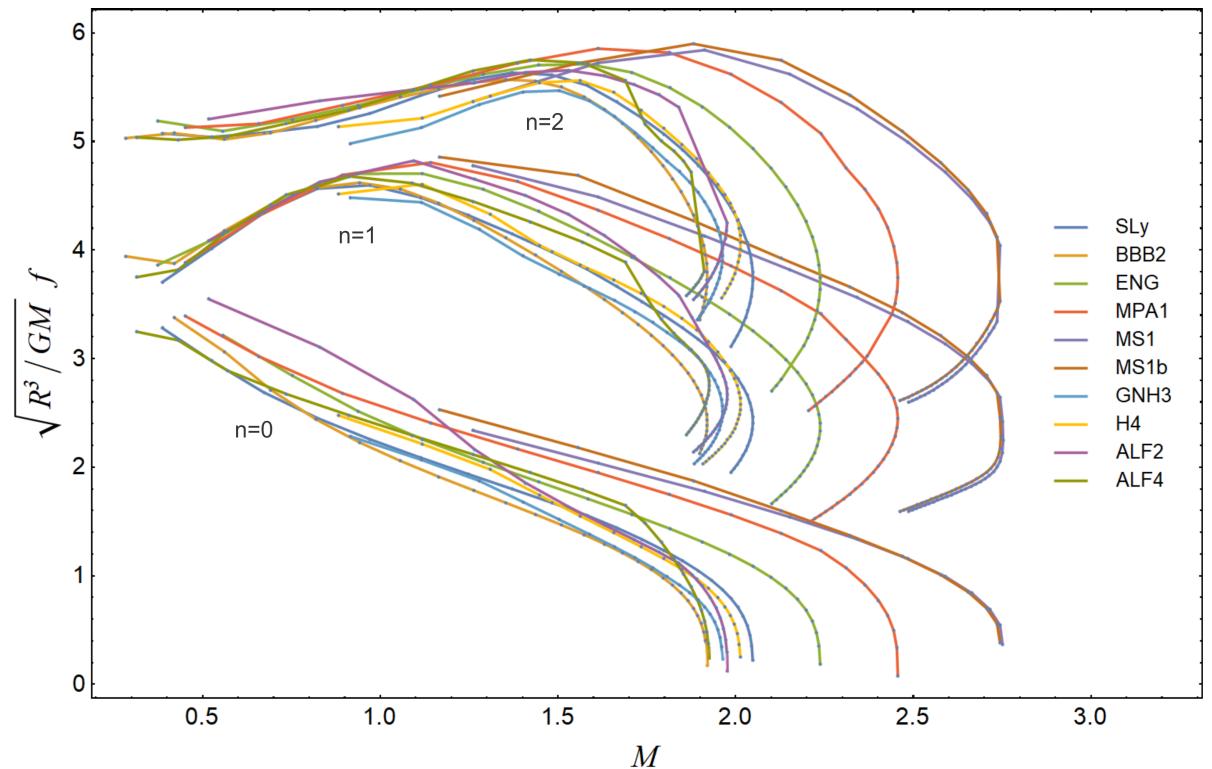


Figura 4.14: Variação das frequências características  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  (em kHz) renormalizadas por  $\sqrt{R^3/GM}$  (em ms) em função de  $M$  (em  $M_\odot$ ) para as EOSs da Tabela 4.2 com  $\rho_c/\rho_{nuc}$  variando de 1.50 a 11.00 em passos de 0.25.

# Capítulo 5

## Buracos Negros

Neste capítulo, apresentaremos a geometria de Schwarzschild e os modos de oscilação de buracos negros de Schwarzschild, gerados por uma pequena perturbação gravitacional axial. Logo após, apresentaremos um método semianalítico de calcular as frequências características, conhecido como método WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin) e encontraremos algumas dessas frequências. A seção 5.1 apresenta a métrica de Schwarzschild, suas peculiaridades e como são definidos os buracos negros. A seção 5.2 desenvolve uma teoria de perturbação que envolve perturbações diretamente na métrica do sistema em equilíbrio e como manipulá-las de forma que elas se pareçam com a equação de Schrödinger unidimensional para barreiras de potencial e, com isso, aplicar o método WKB na seção 5.3 para encontrar as frequências características.

### 5.1 Buracos Negros de Schwarzschild

A geometria de Schwarzschild é a geometria de um espaço-tempo vazio fora de uma fonte de curvatura esfericamente simétrica e estática. Ela foi descoberta por Karl Schwarzschild, um físico alemão que resolveu as equações de Einstein em 1916. Esta geometria é determinada pelo parâmetro  $M$  e tem o elemento de linha dado pela equação 3.31.

Explicitamente, a métrica  $g_{\mu\nu}$  é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - 2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Esta métrica possui singularidades em  $r = 0$  e  $r = 2M$ . A primeira é uma singularidade do espaço-tempo de fato, enquanto a segunda é uma singularidade do sistema de coordenadas. Na verdade,  $r = 2M$  é conhecido como raio de Schwarzschild. Dentro deste raio, se mandamos dois raios de luz, um direcionado radialmente para dentro e outro para fora, vemos que os dois se movem em direção a  $r = 0$ , e, se mandarmos um raio de luz exatamente em  $r = 2M$ , esta luz fica estacionária.

Vemos então que a superfície com  $r = 2M$ , que determina o *horizonte de eventos* da geometria de Schwarzschild, divide o espaço-tempo em uma região externa, em que a luz pode ir para o infinito, e uma região interna, em que a gravidade é tão intensa que a luz não escapa. Isso é o que define um buraco negro!

Com isso, podemos observar que a singularidade  $r = 0$  é o destino de tudo o que está dentro do horizonte de eventos de um buraco negro, logo, no espaço-tempo de Schwarzschild,  $r = 0$  não é um lugar no espaço e sim um *instante no tempo*.

Vamos ver agora o que acontece quando é causada uma pequena perturbação nessa métrica.

## 5.2 Equações de Perturbação

Para encontrarmos a equação de perturbação, seguiremos os passos de Regge e Wheeler, que podem ser conferidos de forma mais detalhada em [20]. Neste caso, não usaremos perturbações em quantidades materiais mas sim perturbações diretamente na métrica do buraco negro já que estamos lidando com uma métrica no vácuo, onde não há fluidos.

Supondo uma métrica conhecida  $\overset{0}{g}_{\mu\nu}$ , acrescentamos uma pequena perturbação denotada por  $h_{\mu\nu}$ <sup>1</sup>. Assim, a métrica desse novo sistema é descrita por

$$g_{\mu\nu} = \overset{0}{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

Sabendo que a métrica de fundo satisfaz as equações de Einstein, podemos calcular o tensor de Ricci até primeira ordem em  $h$  utilizando esta métrica da seguinte forma. Em primeiro lugar, como

$$h^{\mu\nu} = \overset{0}{g}^{\mu\rho} \overset{0}{g}^{\gamma\nu} h_{\gamma\rho}, \quad (5.3)$$

segue que a métrica inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} = \overset{0}{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.4)$$

Tendo a métrica e a métrica inversa, podemos escrever os símbolos Christoffel com a perturbação da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \mathcal{O}(h^2), \quad (5.5)$$

onde  $\overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  são os valores de  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  com  $h_{\mu\nu} = 0$  e

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \overset{0}{g}^{\lambda\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) - \overset{0}{g}^{\lambda\rho} \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma h_{\rho\gamma}, \quad (5.6)$$

que pode ser escrito como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \overset{0}{g}^{\lambda\rho} (\nabla_\mu h_{\rho\nu} + \nabla_\nu h_{\rho\mu} - \nabla_\rho h_{\mu\nu}). \quad (5.7)$$

---

<sup>1</sup>Como pequena perturbação, entenda  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , para uma noção apropriada da norma.

Assim, podemos então concluir que o tensor de Ricci com a perturbação é dado por

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\rho}^\gamma \overset{0}{\Gamma}_{\nu\gamma}^\rho + \overset{0}{\Gamma}_{\mu\rho}^\gamma \delta \Gamma_{\nu\gamma}^\rho - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \overset{0}{\Gamma}_{\rho\gamma}^\rho - \overset{0}{\Gamma}_{\mu\nu}^\gamma \delta \Gamma_{\rho\gamma}^\rho \\ &= \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \nabla_\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Observe que, no vácuo, as equações de perturbação da métrica se reduzem a

$$\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (5.9)$$

Quando a métrica de fundo é dada pela métrica de Schwarzschild,  $\overset{0}{R}_{\mu\nu} = 0$ , então a equação 5.9 indica que o espaço perturbado também não possui matéria distribuída.

Se colocarmos 5.7 em 5.8, obteremos equações diferenciais de segunda ordem para  $h_{\mu\nu}$  com a condição 5.9. Essas equações poderão ser reduzidas a uma única equação tipo Schrödinger, que pode ser tratada a partir de métodos usuais em Mecânica Quântica.

Por conta da simetria esférica da métrica e da invariância por rotações, é natural supor que a parte angular (em  $\theta$  e  $\varphi$ ) das equações que governam as perturbações pode ser desacoplada da parte radial  $r$  e temporal  $t$ .

A abordagem usada por Regge e Wheeler parte do entendimento de como cada parte de  $h$  se transforma por rotações: para uma rotação em torno da origem, os termos  $h_{00}$ ,  $h_{01} = h_{10}$  e  $h_{11}$  se transformam como escalares ( $E$ ), os pares  $(h_{02}, h_{03}) = (h_{20}, h_{30})$  e  $(h_{12}, h_{13}) = (h_{21}, h_{31})$  se transformam como vetores ( $V$ ) e os termos  $h_{22}$ ,  $h_{23} = h_{32}$  e  $h_{33}$  como um tensor simétrico  $2 \times 2$  ( $T$ ), como podemos visualizar melhor em 5.10.

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boxed{E} & \boxed{E} & \boxed{V} & \boxed{V} \\ \boxed{E} & \boxed{E} & \boxed{V} & \boxed{V} \\ \boxed{V} & \boxed{V} & \boxed{T} & \boxed{T} \\ \boxed{V} & \boxed{V} & \boxed{T} & \boxed{T} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Como sabemos, uma função (escalar) que permanece inalterada sob uma inversão espacial é considerada par, e se ela muda de sinal, tem paridade ímpar. Analogamente, na teoria da perturbação relativística, as funções que adquirem um fator  $(-1)^l$  (onde  $l$  é o número quântico associado ao momento angular) sob inversões espaciais são frequentemente chamadas de pares (ou polares) e aquelas com um fator  $(-1)^{l-1}$ , de ímpares (ou axiais). Vamos utilizar os termos polares e axiais daqui em diante. Em particular, como a métrica não perturbada é invariante por inversão espacial, esperamos que as equações de perturbação não misturem contribuições polares e axiais.

Com base nas observações acima, Regge e Wheeler sugerem uma decomposição da perturbação métrica em termos de funções construídas a partir de harmônicos esféricos, escrevendo a perturbação axial como

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0 \sin^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} & h_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} \\ 0 & 0 & -h_1 \sin^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} & h_1 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} \\ * & * & h_2 \sin^{-1} \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm} & \frac{1}{2} h_2 \left( \sin^{-1} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) Y_{lm} \\ * & * & * & -h_2 \left( \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

e a perturbação polar da forma

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\overset{\circ}{g}_{00} H_0 Y_{lm} & H_1 Y_{lm} & h_0 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & h_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} \\ H_1 Y_{lm} & \overset{\circ}{g}_{11} H_2 Y_{lm} & h_1 \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm} & h_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} \\ * & * & \overset{\circ}{g}_{22} \left( K + G \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) Y_{lm} & \overset{\circ}{g}_{22} G \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} - \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{lm} \\ * & * & * & \overset{\circ}{g}_{33} \left( K + G \sin^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

onde \* indica termos que podem ser encontrados pela simetria  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ . As funções  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $G$  e  $K$  dependem de  $r$  e  $t$  os harmônicos esféricos  $Y_{lm}$  dependem de  $\theta$  e  $\varphi$ .

Essa decomposição automaticamente garante o desacoplamento das variáveis angulares quando esse ansatz é inserido nas equações de campo!

Com uma transformação de calibre conveniente, Regge e Wheeler simplificam as equações de modo que a perturbação axial com momento angular total  $l$  e projeção  $m = 0$  passa a ser dada por

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r, t) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r, t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \quad (5.13)$$

e a perturbação polar, dada por

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\overset{\circ}{g}_{00} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{\circ}{g}_{11} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{g}_{22} K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overset{\circ}{g}_{33} K \end{pmatrix} P_l(\cos \theta). \quad (5.14)$$

Para os modos axiais de perturbação, utilizando como métrica de fundo o buraco negro de Schwarzschild, podemos combinar 5.9 com a definição

$$\Psi(r, t) \equiv \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{h_1(r, t)}{r}, \quad (5.15)$$

o que resulta na equação

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - V_{ef}(x)\Psi = 0, \quad (5.16)$$

onde  $x(r) = r + 2M \log(\frac{r}{2M} - 1)$  é chamada de coordenada tartaruga (*tortoise coordinate*).

O potencial efetivo  $V_{ef}(x)$ , também conhecido como potencial de Regge-Wheeler, é dado por

$$V_{ef}(x) = V_{RW}(x) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\beta M}{r^3} \right], \quad (5.17)$$

onde  $r = r(x)$  e  $\beta = 1 - s^2$ , sendo  $s \in \{0, 1, 2\}$  o spin da perturbação. No caso de uma perturbação gravitacional,  $s = 2$  e, consequentemente,  $\beta = -3$ .

Para os modos polares de perturbação, temos o mesmo resultado para a equação de perturbação final 5.16. Neste caso, o potencial efetivo  $V_{ef}(x)$ , conhecido como potencial de Zerilli, é dado por<sup>2</sup>

$$V_{ef}(x) = V_Z(x) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[ \frac{72M^3}{r^5 \lambda^2} + \frac{12M}{r^3 \lambda^2} n \left(1 - \frac{3M}{r}\right) + \frac{n l (l+1)}{r^2 \lambda} \right], \quad (5.18)$$

onde  $\lambda = l(l+1) - 2 + 6M/r$ ,  $n = (l-1)(l+2)$  e  $r = r(x)$ .

Podemos ver na Figura 5.1 que, embora as fórmulas 5.17 e 5.18 sejam bem diferentes, ambos os potenciais são muito parecidos e se tornam cada vez mais próximos quanto maior é o momento angular.

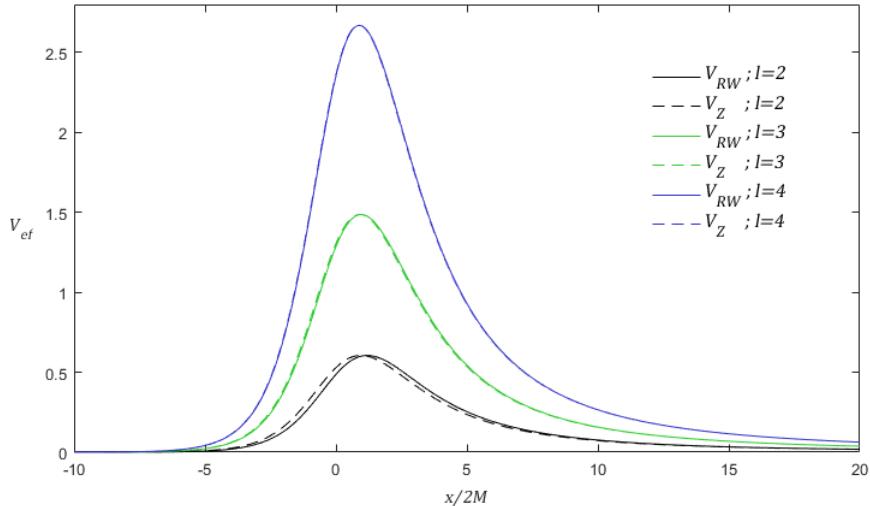


Figura 5.1: Potenciais de Regge-Wheeler e Zerilli para  $l = 2, 3$  e  $4$ .

Com isso, chegamos à conclusão de que o estudo da estabilidade da métrica, que é feito com perturbações de uma matriz, pode ser reduzido simplesmente a uma equação de perturbação para um campo escalar  $\Psi$ . Novamente, se supomos uma dependência temporal do tipo  $\Psi(x, t) = e^{i\omega t} \psi(x)$ , podemos reescrever a equação 5.16 como uma equação diferencial ordinária na coordenada radial:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + (\omega^2 - V_{ef}(x)) \psi(x) = 0. \quad (5.19)$$

---

<sup>2</sup>A dedução desta equação se encontra em [22].

Uma perturbação geral pode então ser representada como uma combinação de Fourier dessas soluções. Tanto os potenciais de Regge-Wheeler quanto os de Zerilli são positivos em todo o espaço (como pode ser observado na Figura 5.1), tendendo a zero no horizonte de eventos ( $r \rightarrow 2M$  ou  $x \rightarrow -\infty$ ) e no infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$  ou  $x \rightarrow \infty$ ). Por conta disso, eles não permitem estados ligados: não podemos impor como condições de contorno que as soluções tendam a zero quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Quando  $|x|$  tende a infinito, as soluções da equação 5.19 tendem a uma combinação de ondas esféricicas *de entrada* e *de saída* do buraco negro (entendemos ondas *de saída* como sendo ondas se movendo para longe da barreira de potencial). Como condição de contorno, vamos impor que não haja ondas vindas do infinito espacial, ou seja, que a perturbação seja gerada apenas nas vizinhanças do buraco negro; além disso, impomos que não haja ondas vindas do horizonte de eventos (já que nada pode sair de lá). Portanto, temos que as soluções devem se assemelhar às soluções *de saída*, ou seja,

$$\psi(x) \simeq e^{i\omega x} \text{ para } x \rightarrow -\infty \quad \text{e} \quad \psi(x) \simeq e^{-i\omega x} \text{ para } x \rightarrow +\infty. \quad (5.20)$$

As frequências que permitem soluções da equação 5.19 juntamente com as condições de contorno 5.20 acima são as frequências características e as soluções construídas a partir delas são os modos quasinormais. A frequência desses modos é tipicamente complexa, sendo que modos estáveis possuem  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

Para analisar as perturbações de objetos compactos em termos de suas frequências características e modos associados é necessário um pouco de cautela. Se repararmos, o modo que as condições de contorno 5.20 definem os modos de oscilação faz com que modos estáveis, com  $\text{Im}(\omega) > 0$ , divirjam exponencialmente em direção ao infinito e ao horizonte de eventos, isso faz com que a solução que procuramos, que está crescendo exponencialmente, possa estar contaminada por traços de uma solução que diminui exponencialmente à medida que nos aproximamos dos limites. Com isso, as condições 5.20 não descrevem as soluções desejadas em nenhum ponto do espaço especificamente mas sim o comportamento limite à medida que nos aproximamos do infinito ou do horizonte de eventos.

Também encontramos um problema se tentarmos determinar como esses modos quasinormais são excitados por alguma perturbação inicial. Se supomos que nos foi dada alguma perturbação inicial de um buraco negro como uma função do espaço, essa perturbação inicial deve ser limitada em todo o espaço. É provável que seja impossível representar esses dados iniciais como uma soma de modos quasinormais que divergem perto do horizonte do buraco negro e em direção ao infinito espacial, ao contrário de situações que envolvem uma decomposição em modos normais.

Com relação a estabilidade, Vishveshwara [24] mostrou que a equação 5.19 mais as condições de contorno 5.20 não podem ter soluções onde a frequência  $\omega$  tenha uma parte imaginária negativa, pois estas corresponderiam a um estado ligado, que não pode existir devido à forma dos potenciais. Wald [23] concluiu que as perturbações lineares da métrica de Schwarzschild devem permanecer uniformemente limitadas para todo o tempo.

Para encontrar as frequências dos modos quasinormais, utilizaremos o método WKB apresentado a seguir.

### 5.3 Método WKB

Para encontrar as frequências características, Schutz e Will [25] decidiram aplicar o método WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin) devido à semelhança da equação

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + Q(x)\psi(x) = 0 \quad (5.21)$$

com a equação de Schrödinger unidimensional para barreiras de potencial, onde  $-Q(x) = (2m/\hbar^2)[V(x) - E]$ .

No nosso caso, a equação 5.19 pode ser escrita como sendo a equação 5.21 com  $Q(x) = \omega^2 - V_{ef}(x)$ . Supomos que a função  $-Q(x)$  tenda a um valor constante em  $x = \pm\infty$  (não necessariamente a mesma constante em  $x = -\infty$  e  $x = +\infty$ ) e tenha um máximo na vizinhança de  $x = 0$ .

A aproximação WKB é comumente usada em problemas de espalhamento em Mecânica Quântica, quando queremos estimar a amplitude das ondas refletida e transmitida a partir da incidência de uma dada função de onda sobre uma barreira de potencial. Nesse problema de “ponto de virada de segunda ordem”, a aproximação do WKB leva a magnitudes iguais para as duas ondas de saída. O nosso problema, porém, é um pouco diferente, devido às condições de contorno de “saída”, que impõem que não existe onda incidente. Nesse caso, os pontos de virada são, em geral, muito próximos para permitir a aplicação do método WKB. Em [25], Schutz e Will apresentam uma modificação do método WKB adequada a este caso.

Vamos identificar como  $x_1$  e  $x_2$  os pontos de virada,  $x_0$  o máximo de  $-Q(x)$  e a Região III como sendo a região com  $x < x_1$ , Região II sendo a região entre  $x_1$  e  $x_2$  e a Região I sendo a região com  $x > x_2$ , como ilustra a Figura 5.2.

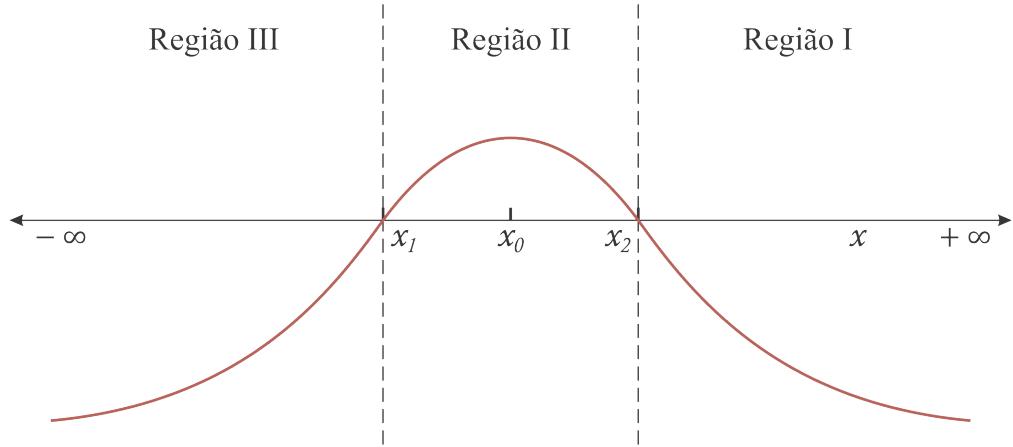


Figura 5.2: Esquema da função  $-Q(x)$ .

A modificação envolve combinar duas soluções WKB em ambos os pontos de virada  $x_1$  e  $x_2$  simultaneamente. Fora desses pontos (Regiões I e III), as funções WKB são dadas por

$$\psi_I(x) \simeq Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} \quad (5.22)$$

$$\psi_{III}(x) \simeq Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_x^{x_1} \sqrt{Q(t)} dt \right\} \quad (5.23)$$

Na Região II a função  $Q(x)$  pode ser aproximada por uma parábola, já que  $x_1$  e  $x_2$  estão muito próximos, ou seja,  $x_0 \ll |Q(\pm\infty)|$ . Assim  $Q$  terá a forma

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + \mathcal{O}(x - x_0)^3, \quad (5.24)$$

onde  $Q_0 \equiv Q(x_0) < 0$  e  $Q_0'' = d^2Q/dx^2|_{x_0} > 0$ .

A solução  $\psi(x)$  da equação 5.21 com  $Q(x)$  dado por 5.24 é dada por funções parabólicas cilíndricas, cuja expressão assintótica só se encaixa com 5.22 e 5.23 se [25]

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.25)$$

Utilizando 5.17 na equação 5.19 e tomando  $M = 1$ , temos

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \left\{ \sigma^2 - \left( 1 - \frac{2}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6}{r^3} \right] \right\} \psi(x) = 0 \quad (5.26)$$

onde  $\sigma = M\omega$ .

Como  $Q$  é o termo entre chaves e sabendo que  $dr/dx = 1 - (2/r)$ , temos

$$Q'(x) = \left( 1 - \frac{2}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^3} \left( 2 - \frac{6}{r} \right) - \frac{6}{r^4} \left( 3 - \frac{8}{r} \right) \right] \quad (5.27)$$

$$Q''(x) = \left( 1 - \frac{2}{r} \right) \left[ -\frac{l(l+1)}{r^4} \left( 6 - \frac{40}{r} + \frac{60}{r^2} \right) + \frac{6}{r^5} \left( 12 - \frac{70}{r} + \frac{96}{r^2} \right) \right] \quad (5.28)$$

Os gráficos de  $Q'$  e  $Q''$  para  $l = 2, 3, 4$  e  $n = 0$  podem ser visualizados nas Figuras 5.3 e 5.4, respectivamente. Observe que  $Q' = 0$  corresponde ao valor de  $x_0$  e  $Q'' = 0$  corresponde aos valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

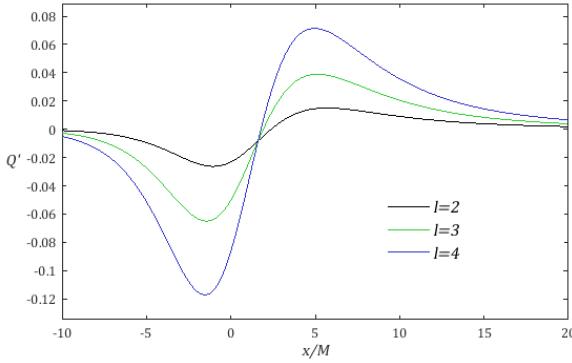


Figura 5.3: Gráfico de  $Q'$  vs  $x/M$ .

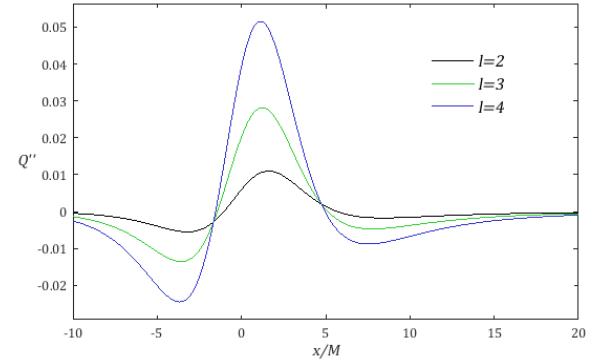


Figura 5.4: Gráfico de  $Q''$  vs  $x/M$ .

O pico de  $-Q$  ocorre em  $x_0$ . Assim, da equação 5.25, temos

$$\sigma^2 = \left( 1 - \frac{2}{r_0} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r_0^2} - \frac{6}{r_0^3} \right] + i\sqrt{2Q_0''} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.29)$$

Utilizando o método WKB de Schutz e Will, podemos encontrar  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  igualando 5.27 e 5.28 a zero,  $r_0$  através da definição da coordenada tartaruga avaliada em  $x_0$  e  $Q''_0$  através de 5.28 avaliado em  $x_0$ . O resultado pode ser visto na Tabela 5.1.

$l$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$r_0$	$Q''_0$
2	2.3894	-1.0497	5.6942	3.2808	0.0099
3	1.9215	-1.4369	5.1362	3.1061	0.0259
4	1.7831	-1.5394	4.9615	3.0575	0.0477

Tabela 5.1: Valores de  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $r_0$  e  $Q''_0$  referentes a [25].

A usando os valores de  $r_0$  e  $Q''_0$  da Tabela 5.1, podemos encontrar  $\sigma^2$  através de 5.29. Para  $n = 0$ , que corresponde ao modo fundamental, obtemos

$$\sigma_{l=2}^2(x) = 0.1513 + i 0.0704 \implies \sigma_{l=2}(x) = 0.3988 + i 0.0883$$

$$\sigma_{l=3}^2(x) = 0.3716 + i 0.1138 \implies \sigma_{l=3}(x) = 0.6166 + i 0.0923$$

$$\sigma_{l=4}^2(x) = 0.6674 + i 0.1545 \implies \sigma_{l=4}(x) = 0.8223 + i 0.0939$$

Esse é exatamente o resultado obtido por Schutz e Will em [25] (vide Tabela 5.2). Observe que estes resultados estão de acordo com os critérios de estabilidade citados no final da seção anterior.

$l$	Re $M\sigma$			Im $M\sigma$		
	WKB	Numérico	%	WKB	Numérico	%
2	0.3988	0.3737	7.0	0.0883	0.0889	0.7
3	0.6166	0.5994	2.9	0.0923	0.0927	0.4
4	0.8223	0.8092	1.6	0.0939	0.0941	0.2

Tabela 5.2: Valores de  $M\sigma$  obtidos pelo método WKB e numericamente, retirados de [25].

O método WKB aproxima bem o  $\sigma$  no modo fundamental. Para  $n \geq 1$ , os valores se distinguem bastante do esperado, provavelmente devido à aproximação parabólica. Outras abordagens do método WKB citadas em [6] o levam para ordens maiores usando melhores aproximações.

Os resultados apresentados acima estão em unidades naturais ( $c = G = 1$ ). Para converter as frequências para kHz, basta multiplicá-las por  $c^3/(2\pi G)$ . Portanto, um buraco negro de uma massa solar ( $1M_\odot$ ) teria o modo fundamental ( $n = 0$ ) quadrupolar ( $l = 2$ ) com uma frequência de aproximadamente 12 kHz e um tempo de decaimento de cerca de 0.35 ms. Tanto a frequência quanto o inverso do tempo de decaimento são inversamente proporcionais à massa.

É interessante que o primeiro evento de fusão de buracos negros detectado pelo LIGO [26] teve um sinal suficientemente forte para que se pudesse estimar a frequência e o tempo de decaimento do modo fundamental quadrupolar do buraco negro final, de massa cerca de 62 vezes a massa solar. Para um buraco negro de Schwarzschild com essa massa, esperaríamos uma frequência de cerca de  $12 \text{ kHz}/62 \approx 195 \text{ Hz}$ . Embora esse resultado desconsidere a forte rotação do buraco negro final formado, é da mesma ordem de grandeza daquele observado pelo LIGO (ver Figura 5.5) [27].

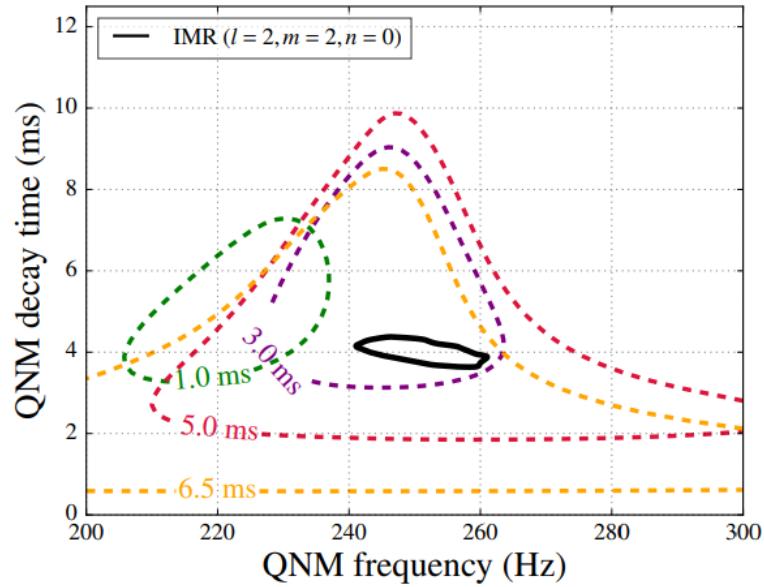


Figura 5.5: Retirado da Ref. [27] para fins de comparação. A linha sólida preta mostra a região confiável de 90% para a frequência e tempo de decaimento do modo quasinormal (QNM) com  $l = 2, m = 2, n = 0$  (ou seja, o menos amortecido).

Essa detecção fornece uma forte evidência de que o objeto observado se assemelha aos buracos negros previstos pela Relatividade Geral.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho, partindo das equações da hidrodinâmica e da gravitação, encontramos a equação que governa as oscilações radiais em uma estrela esférica Newtoniana a partir de uma perturbação radial em sua configuração de equilíbrio e constatamos que, para a solução com densidade constante, as frequências  $\omega$  de fato obedecem as condições esperadas em um problema de Sturm-Liouville.

Para as estrelas de nêutrons, a partir de uma equação de estado politrópica por partes, juntamente com as equações de Tolman-Oppenheimer-Volkof, pudemos obter suas propriedades macroscópicas, resumidas na relação massa-raio e, a partir dela, observar que os valores da massa máxima  $M_{max}$  obtidos numericamente para as EOSs escolhidas estavam de acordo com os resultados previstos na teoria. Além disso, realizando o mesmo procedimento feito para as estrelas Newtonianas, deduzimos a equação que governa as oscilações radiais para as estrelas de nêutrons e, a partir dela, encontramos as frequências características dos modos radiais  $\omega$  e o número de nós  $n$  relacionado a cada uma delas numericamente.

Vimos ainda que as equações básicas descrevendo as perturbações de buracos negros de Schwarzschild podem ser reduzidas a uma única equação diferencial ordinária de segunda ordem equivalente à equação de Schrödinger unidimensional. Ao utilizar o método WKB, obtivemos valores bem próximos dos valores numéricos conhecidos. Tais frequências estão de acordo com os resultados esperados para a estabilidade de buracos negros e, a partir delas, podemos estimar os modos quasinormais axiais dos buracos negros de Schwarzschild e estimar parâmetros físicos desses buracos negros.

# Capítulo 7

## Apêndice: Código do *Mathematica*

Neste capítulo, apresentamos o código utilizado para obter os resultados do Capítulo 4. De 7.1 a 7.3, seguimos os passos descritos na seção 4.2.1 e 7.4 e 7.5 seguem os passos da seção 4.2.2.

Em 7.1, temos os valores de algumas constantes e as EOSs da Tabela 4.2. Em 7.2 são definidos os parâmetros de cada região politrópica. As equações de TOV são resolvidas em 7.3, já a equação de perturbação é resolvida em 7.4. O procedimento para encontrar as frequências características e seu determinado estado está descrito em 7.5.

### 7.1 EOSs

```
c = 2.99792458*^10;(*cgs*)
G = 6.67408*^-8;(*cgs*)
MSun = 1.9884754153381435*^33 ;(*cgs*)
\[Rho]0 = 2.7*^14;(*cgs; gauge density*)

table = {{SLy, 34.384, 3.005, 2.988, 2.851, 0.0020},
         {BBB2, 34.331, 3.418, 2.835, 2.832, 0.0055},
         {ENG, 34.437, 3.514, 3.130, 3.168, 0.015},
         {MPA1, 34.495, 3.446, 3.572, 2.887, 0.0081},
         {MS1, 34.858, 3.224, 3.033, 1.325, 0.019},
         {MS1b, 34.855, 3.456, 3.011, 1.425, 0.015},
         {GNH3, 34.648, 2.664, 2.194, 2.304, 0.0045},
         {H4, 34.669, 2.909, 2.246, 2.144, 0.0028},
         {ALF2, 34.616, 4.070, 2.411, 1.890, 0.043},
         {ALF4, 34.314, 3.009, 3.438, 1.803, 0.023}};
```

## 7.2 Parâmetros

```

DefEOS[EOSname_] := Module[{EOS},
  EOS = Cases[table, x_ /; x[[1]] == EOSname][[1]];

  p1 = 10^EOS[[2]];
  \[CapitalGamma]1 = EOS[[3]];
  \[CapitalGamma]2 = EOS[[4]];
  \[CapitalGamma]3 = EOS[[5]];

  \[Rho]i = {2.44034*^07, 3.78358*^11, 2.62780*^12}/\[Rho]0;
  \[CapitalGamma]i = {1.58425, 1.28733, 0.62223, 1.35692};
  Ki = {6.80110*^-09, 1.06186*^-06, 5.32697*^+01,
    3.99874*^-08}*\[Rho]0^(\[CapitalGamma]i - 1);

  \[Rho]1 = 10^14.7/\[Rho]0;
  \[Rho]2 = 10^15.0/\[Rho]0;
  p1a = p1/(\[Rho]0*c^2);
  \[Rho]cr = (p1a/(Ki[[
    4])*\[Rho]1^\[CapitalGamma]1))^(1/(\[CapitalGamma]i[[
    4]) - \[CapitalGamma]1));

  \[Rho]list = Flatten[{\[Rho]i, \[Rho]cr, \[Rho]1, \[Rho]2, 10^18}];
  \[CapitalGamma]list =
    Flatten[{\[CapitalGamma]i, \[CapitalGamma]1, \[CapitalGamma]2, \
\[CapitalGamma]3}];

  Klist =
    Flatten[{Ki, p1a/\[Rho]1^\[CapitalGamma]1,
      p1a/\[Rho]1^\[CapitalGamma]2,
      p1a*((\[Rho]2/\[Rho]1)^\[CapitalGamma]2)/\[Rho]2^\[CapitalGamma]1
    }];

  plist[\[Rho]_] := Klist*\[Rho]^\[CapitalGamma]list;

  \[Rho]_ := Position[\[Rho]list - \[Rho],
    First@Cases[\[Rho]list - \[Rho], x_ /; x > 0][[1, 1]];

  a[1] = 0;
  a[i_] := ((1 + a[i - 1])*\[Rho]list[[i - 1]] +
    Klist[[i - 1]]/(\[CapitalGamma]list[[i - 1]] - 1)*\[Rho]list[[i - 1]]^
    \[CapitalGamma]list[[i - 1]])/\[Rho]list[[i - 1]] -
    
```

```

1 - Klist[[i]]/(\[CapitalGamma]list[[i]] - 1)*\[Rho]list[[
i - 1]]^(\[CapitalGamma]list[[i]] - 1);
alist =
Flatten[{1 + a[1], 1 + a[2], 1 + a[3], 1 + a[4], 1 + a[5],
1 + a[6], 1 + a[7]}];

alistB[n_?NumberQ] := alist[[Round@n]];
\[CapitalGamma]listB[n_?NumberQ] := \[CapitalGamma]list[[Round@n]];
KlistB[n_?NumberQ] := Klist[[Round@n]];
\[Rho]listB[n_?NumberQ] :=
Flatten[{10^-14, \[Rho]list}[[Round@n]]];

```

### 7.3 Equações de TOV

```

TOV[\[Rho]c_, EOS_] :=
Module[{}, DefEOS[EOS]; Clear[R, M, cte]; rtr = {};
sol = NDSolve[{m'[r] ==
4*Pi*r^2*(\[Rho][r]*alistB[n[r]] + (
KlistB[n[r]]*\[Rho][r]^\[CapitalGamma]listB[
n[r]])/(\[CapitalGamma]listB[n[r]] - 1)), \[Phi]'[r] == (
4*Pi*KlistB[n[r]]*(\[Rho][r])^\[CapitalGamma]listB[n[r]]*r^3 +
m[r])/(r*(r - 2*m[r])), \[Rho]'[
r] == -((\[Rho][r]*alistB[n[r]] + (
KlistB[n[r]]*\[Rho][r]^\[CapitalGamma]listB[
n[r]])/(\[CapitalGamma]listB[n[r]] - 1) +
KlistB[n[r]]*\[Rho][r]^\[CapitalGamma]listB[n[r]])/(
KlistB[n[r]]*\[CapitalGamma]listB[n[r]]*\[Rho][
r]^(\[CapitalGamma]listB[n[r]] - 1)))*\[Phi]'[r],
m[10^-15] == 0, \[Phi][10^-15] == 1, \[Rho][10^-15] == \[Rho]c,
n[10^-15] == X[\[Rho]c],
WhenEvent[Re[\[Rho][r]] == \[Rho]listB[n[r]] && n[r] > 1,
rtr = Flatten[{rtr, r}]; n[r] -> n[r] - 1],
WhenEvent[Re[\[Rho][r]] == 1*^-15, R = r; M = Re[m[r]];
cte = (1/2)*Log[1 - 2*m[r]/r] - \[Phi][r];
"StopIntegration"]}, {m, \[Phi], \[Rho], n}, {r, 10^-15, 2},
DiscreteVariables -> n, AccuracyGoal -> 15, PrecisionGoal -> 15,
WorkingPrecision -> 25]];

nsol[r_] := Re[n[r]] /. sol[[1]];
msol[r_] := Re[m[r]] /. sol[[1]];
\[Phi]sol[r_] := Re[\[Phi][r]] /. sol[[1]];

```

```
\[Rho]sol[r_] := Re[\[Rho][r]] /. sol[[1]];
psol[r_] :=
  KlistB[nsol[r]]*(\[Rho]sol[r])^\[CapitalGamma]listB[nsol[r]];

\[Epsilon]sol[r_] := \[Rho]sol[r]*alistB[nsol[r]] +
  psol[r]/(\[CapitalGamma]listB[nsol[r]] - 1);
\[CapitalGamma]sol[r_] := \[CapitalGamma]listB[nsol[r]];
```

## 7.4 Perturbação

```
Perturb[\[Omega]_?NumberQ] := Module[{\[Delta] = 10^-10},
  Clear[solint, solext];
  solint = NDSolve[{\[Zeta]'[
    r] + (msol[r]/(
      r^2*(1 - 2*msol[r]/r))*(1 - \[Epsilon]sol[r]/psol[r]) - 2/
      r + (8*Pi*r*psol[r])/(1 - 2*msol[r]/r))*\[Zeta]', [r] + (
      1 + \[Epsilon]sol[r]/psol[r])/\[CapitalGamma]sol[
      r]*(((2*msol[r])/(r^2*(1 - 2*msol[r]/r)) + (8*Pi*r*psol[r])/(1 -
      2*msol[r]/r))^2/4 + (4*msol[r])/(
      r^3*(1 - 2*msol[r]/r)) + (8*Pi*psol[r])/(1 -
      2*msol[r]/r) + \[Omega]^2*(1 - 2*msol[r]/r)^-1/
      Exp[2*(\[Phi]sol[r] + Re[cte])])*\[Zeta], [r] ==
      0, \[Zeta][10^-8] == 10^-24, \[Zeta]', [10^-8] == 3*10^-16,
  WhenEvent[
    Evaluate@
    Table[r == N@rtr[[k]], {k, 1, Length@rtr}], \[Zeta]', [
      r] \[Rightarrow] \[Zeta]', [
      r]*\[CapitalGamma]sol[r - \[Delta]]/\[CapitalGamma]sol[
      r + \[Delta]]]}, \[Zeta], {r, 10^-8, R/2},
  AccuracyGoal \[Rightarrow] 13, PrecisionGoal \[Rightarrow] 13, WorkingPrecision \[Rightarrow] 24,
  MaxSteps \[Rightarrow] 100000];
  solext =
  NDSolve[{\[Zeta]', [
    r] + (msol[r]/(
      r^2*(1 - 2*msol[r]/r))*(1 - \[Epsilon]sol[r]/psol[r]) - 2/
      r + (8*Pi*r*psol[r])/(1 - 2*msol[r]/r))*\[Zeta]', [r] + (
      1 + \[Epsilon]sol[r]/psol[r])/\[CapitalGamma]sol[
      r]*(((2*msol[r])/(r^2*(1 - 2*msol[r]/r)) + (8*Pi*r*psol[r])/(1 -
      2*msol[r]/r))^2/4 + (4*msol[r])/(
      r^3*(1 - 2*msol[r]/r)) + (8*Pi*psol[r])/(1 -
      2*msol[r]/r) + \[Omega]^2*(1 - 2*msol[r]/r)^-1/
```

```

Exp[2*(\[Phi] sol[r] + Re[cte])]*\[Zeta][r] ==
0, \[Zeta][R] == 1, \[Zeta]'[R] ==
Re[1/\[CapitalGamma] sol[
R]*(4/R + M/(R*(R - 2*M)) + \[Omega]^2/(1 - 2*M/R)*R^2/M)],
WhenEvent[
Evaluate@
Table[r == N@rtr[[k]], {k, 1, Length@rtr}], \[Zeta]'[
r] -> \[Zeta]'[
r]*\[CapitalGamma] sol[r + \[Delta]]/\[CapitalGamma] sol[
r - \[Delta]]], \[Zeta], {r, R, R/2}, AccuracyGoal -> 13,
PrecisionGoal -> 13, WorkingPrecision -> 24, MaxSteps -> 100000];

((\[Zeta]'[R/2]/\[Zeta][R/2]) /.
solint[[1]]) - ((\[Zeta]'[R/2]/\[Zeta][R/2]) /. solext[[1]])]

```

## 7.5 Frequências Características

```

flist = {{"EOS", "\[Rho]c", "R", "M", "\[Omega]", "n"}};
Dynamic[MatrixForm[flist]]
Do[Do[
EOS = table[[i]][[1]];
TOV[\[Rho]c, EOS];
j = 0.1;
nn = 0;
s\[Omega]1 = Sign[Perturb[j]];
If[s\[Omega]1 < 0, \[Alpha] = 0;
While[\[Alpha] == 0, j = j + If[\[Rho]c <= 2.25, 0.2, 0.5];
s\[Omega]2 = Sign[Perturb[j I]];
If[(s\[Omega]1 < s\[Omega]2),
root = \[Omega] /.
FindRoot[
Perturb[\[Omega] I], {\[Omega],
j - If[\[Rho]c <= 2.25, 0.2, 0.5], j}];
flist = Append[
flist, {EOS, \[Rho]c, R, M, root I, 0}]; \[Alpha] = 1];
s\[Omega]1 = s\[Omega]2; j = 0.1; s\[Omega]1 = Sign[Perturb[j]]];
While[nn < 2, j = j + If[\[Rho]c <= 2.25, 0.2, 0.5];
s\[Omega]2 = Sign[Perturb[j]];
If[(s\[Omega]1 > s\[Omega]2),
root = \[Omega] /.
FindRoot[

```

```
Perturb[\[Omega]], {\[Omega],
j - If[\[Rho]c <= 2.25, 0.2, 0.5], j}]; Perturb[root];
tb = Join[
Table[{r, (\[Zeta][r] /. solint[[1]])/(\[Zeta][R/2] /.
solint[[1]])}, {r, 1.*^-5, R/2, R/50}],
Table[{r, (\[Zeta][r] /. solext[[1]])/(\[Zeta][R/2] /.
solext[[1]])}, {r, R/2, R, R/50.}]]; nn = 0;
Do[If[Sign[tb[[k, 2]]] != Sign[tb[[k + 1, 2]]], nn = nn + 1], {k,
50}]; If[nn <= 2,
flist = Append[flist, {EOS, \[Rho]c, R, M, root, nn}]];
s\[Omega]1 = s\[Omega]2, {\[Rho]c, 1.5, 10, 0.25}], {i, 1,
Length[table]}]

Export["finallist.dat", flist]
```

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Christensen-Dalsgaard, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, 5<sup>a</sup> Ed. (2003).
- [2] H. Shapley, *On the Nature and Cause of Cepheid Variation*, Astrophysical J. **40**, 448 - 465 (1914).
- [3] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev. **55**, 374-381 (1939).
- [4] The LIGO Scientific Collaboration, The Virgo Collaboration, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017).
- [5] K. D. Kokkotas, B. G. Schmidt, *Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*, Living Rev. Relativity **2** (1999) 2.
- [6] H. P. Nollert, *Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars*, Class. Quantum Grav. **16** R159 (1999).
- [7] F. Ozel, P. Freire, *Masses, Radii, and Equation of State of Neutron Stars*, Ann.Rev.Astron.Astrophys. **54**, 401-440 (2016).
- [8] C. Markakis, J. S. Read, et al, *Neutron star equation of state via gravitational wave observations*, J. Phys.: Conf. Ser. **189** 012024 (2009)
- [9] The LIGO Scientific Collaboration, The Virgo Collaboration, *GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State*, Phys. Rev. Lett. **121**, 161101 (2018)
- [10] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA (2004)
- [11] J.P. Cox, R. T. Giuli, *Principles of Stellar Structure*, New York: Gordon and Breach (1968)
- [12] J. S. Read, B. D. Lackey, Benjamin J. Owen, and John L. Friedman, *Constraints on a phenomenologically parameterized neutron-star equation of state*, Phys. Rev. D **79**:124032 (2009)
- [13] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 12.0, Champaign, IL (2019)
- [14] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press **2<sup>a</sup>** ed., ISBN: 9780511984181 (2009)
- [15] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, Toronto, London, Part I (1953)

- [16] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State*, W. H. Freeman and Company (1973)
- [17] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, ISBN: 9780226870335 (1984)
- [18] R. F. P. Mendes, N. Ortiz, *New class of quasinormal modes of neutron stars in scalar-tensor gravity*, Phys. Rev. Lett. **120**, 201104 (2018)
- [19] E. Berti, V. Cardoso, A. O Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes*, Class. Quantum Grav. **26** 163001 (2009).
- [20] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys. Rev. **108** 1063-1069 (1957).
- [21] T. Regge, *On the Properties of Spin 2 Particles*, Il Nuovo Cimento **5** 325-336 (1957).
- [22] F. J. Zerilli, *Effective Potential for Even Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations*, Phys. Rev. Lett. **24** 737-738 (1970).
- [23] R. M. Wald, *Note on the Stability of the Schwarzschild Metric*, J. Math. Phys. **20** 1056 (1979).
- [24] C. V. Vishveshwara, *Stability of the Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. D **1** 2870 (1970).
- [25] B. F. Schutz, C. M. Will, *Black Hole Normal Modes: A Semianalytic Approach*, Astrophys. J. **291** L33-L36 (1985).
- [26] The LIGO Scientific Collaboration, The Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [27] The LIGO Scientific Collaboration, The Virgo Collaboration, *Tests of General Relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016).