



RAPPORT FINAL DE PSC : THÉORIE DE TEICHMÜLLER

Tuteur : Carlos Matheus SANTOS SILVA

2 mai 2020

Hamza BENABBES-TAARJI, Julien BREMONT, Tao HSU,
Simon JOUVESHOMME, Bianca MORENO



TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	3
2	Bases de Topologie Différentielle	4
2.1	Surfaces de Riemann	4
2.2	Revêtements	6
2.3	Genre	7
2.4	Formes Différentielles	12
2.5	Groupe fondamental, homologie et cohomologie	14
2.5.1	Groupe fondamental	14
2.5.2	Homologie simpliciale	17
2.5.3	Cohomologie	18
2.5.4	Intégration dans les surfaces de Riemann	19
3	Surfaces de translations	21
3.1	Définitions et premières propriétés	21
3.1.1	Définitions	21
3.1.2	Genre d'une surface de translation	23
3.1.3	Billards	24
3.2	Surfaces à petits carreaux	25
3.2.1	Définitions	25
4	Théorie de Teichmüller	30
4.1	Espaces de Teichmüller et espaces de modules	30
4.2	Des aspects dynamiques	31
4.2.1	Les actions du groupe $GL_2^+(\mathbb{R})$ et de certains sous-groupes	31
4.2.2	L'involution hyperelliptique	34
4.2.3	Les flots	35
4.3	Préliminaires à la démonstration du théorème	36
4.3.1	Sur la décomposition en cylindres dans $\mathcal{H}(2)$	37
4.3.2	Lien avec l'involution hyperelliptique	38
4.3.3	Calcul de l'invariant pour les surfaces primitives à un cylindre	40
4.4	Preuve du théorème	41
5	La théorie de Teichmüller dans d'autres problèmes mathématiques	47
5.1	Classification de réseaux en géométrie hyperbolique complexe	47
5.2	Problème de Novikov	48
6	Conclusion	51

1

INTRODUCTION

Nous avons rassemblé quelques notions élémentaires des théories que nous traitons pour exposer un socle de connaissances nécessaires à la compréhension de certains résultats en théorie de Teichmüller, et notamment dans certains de ses aspects dynamiques.

Nous avons commencé par l'essentiel des connaissances de base pour assimiler les notions principales de la théorie de Teichmüller, puis nous avons exposé les résultats principaux de l'article [3] (qui sont l'objet véritable de notre PSC). Les obstacles que nous avons rencontrés sont tant d'ordre techniques que conceptuels, sachant que le sujet nécessite beaucoup de connaissances préalables et fait appel à des concepts très abstraits : nous avons donc essayé d'être clairs, concis et d'utiliser beaucoup d'exemples et d'images pour faciliter la lecture des élèves qui découvriront peut-être le sujet de PSC avec ce rapport dans les prochaines années.

Le plan retenu est le suivant :

- Le premier chapitre introduit les notions de base nécessaires à la définition des objets décrits dans les sections suivantes.
- Le second chapitre introduit la notion centrale des surfaces de translation. C'est l'objet d'étude du PSC.
- Le troisième chapitre introduit un certain nombre d'outils que l'on utilisera pour étudier ces surfaces.
- Le quatrième chapitre traite des résultats de l'article de P.Hubert et S.Lelièvre sur les disques de Teichmüller dans $\mathcal{H}(2)$.
- Le dernier chapitre évoque des exemples d'utilisation des outils de la théorie de Teichmüller.

2

BASES DE TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE

Nous présentons ici plusieurs résultats de base de topologie différentielle, utiles dans la définition des concepts liés à la théorie de Teichmüller.

2.1 SURFACES DE RIEMANN

Définition 2.1 (Carte). Soit X un espace topologique. Une carte sur X est un homéomorphisme $\phi : U \rightarrow U'$, où $U \subset X$ est ouvert dans X et $U' \subset \mathbb{C}$. On dit que la carte ϕ est centrée en $p \in U$ si $\phi(p) = 0$.

Définition 2.2 (Cartes compatibles). Deux cartes $\phi : U \rightarrow U'$ et $\psi : V \rightarrow V'$ sont compatibles si

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

est holomorphe. On dit que $\phi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \phi^{-1}$ sont des fonctions de transition.

Définition 2.3 (Atlas). Un atlas \mathcal{A} sur X est une collection $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de cartes compatibles par paires dont les domaines recouvrent X . C'est-à-dire que

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Un atlas \mathcal{A} est dit *maximal* s'il n'est pas contenu dans un atlas plus grand. En d'autres termes, si \mathcal{A}' est un autre atlas contenant \mathcal{A} , alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Définition 2.4 (Surface de Riemann). Une surface de Riemann est un espace topologique séparé et connexe X , avec un atlas (au sens des définitions ci-dessus : les cartes sont à valeurs dans \mathbb{C}) maximal.

Définition 2.5 (Applications holomorphes). On dit qu'une application $f : W \rightarrow Y$, où $W \subset X$, est holomorphe en $p \in W$ si pour toutes les cartes $\varphi : U \rightarrow U'$, avec $p \in U$, et $\psi : V \rightarrow V'$, avec $f(p) \in V$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe en $\varphi(p)$. On dit qu'une application est holomorphe sur un ensemble si elle est holomorphe en chaque élément de cet ensemble.

On notera l'ensemble des applications holomorphes de $W \subset X$ dans Y comme suit : $\mathcal{H}ol(W, Y)$.

Les applications holomorphes ainsi définies se comportent comme prévu et on peut généraliser plusieurs théorèmes classiques sur les fonctions holomorphes dans le plan complexe.

Proposition 2.1. Soient X, Y, Z des surfaces de Riemann.

- Si $f : X \rightarrow Y$ est holomorphe alors f est \mathcal{C}^∞ .
- Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont holomorphes, alors la composition $g \circ f : X \rightarrow Z$ est également holomorphe.

Théorème 2.1 (Théorème de l'application ouverte). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe non-constante entre des surfaces de Riemann. Alors f est une application ouverte.*

Démonstration. En reprenant les notations de la définition 2.5, on peut appliquer le théorème de l'application ouverte des fonctions holomorphes usuelles à $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Par composition à gauche par ψ^{-1} , on obtient encore une application ouverte sachant ψ continue. Par ailleurs, ϕ étant un homéomorphisme, on a que $f \circ \phi^{-1}$ est ouverte si et seulement si f l'est, d'où f ouverte. \square

Théorème 2.2. *Soit $f : X \rightarrow Y$, une application holomorphe et bijective. Alors, f^{-1} est holomorphe (ie f est biholomorphe).*

Démonstration. En reprenant encore les notations de la définition 2.5, il suffit d'appliquer le principe du prolongement analytique des fonctions holomorphes usuelles à $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et de rappeler que ψ et ϕ sont bijectives. \square

Théorème 2.3 (Principe du prolongement analytique). *Soient f et g deux applications holomorphes entre les surfaces de Riemann X et Y . Si $f = g$ sur un sous-ensemble de X admettant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur tout X .*

Le théorème suivant est important à noter dans le contexte des surfaces de Riemann compactes car il permet de définir l'essentiel de ce qui suivra.

Théorème 2.4. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann compactes. Alors f est surjective.*

Démonstration. f étant non constante et X étant ouvert dans X , $f(X)$ est ouvert par théorème de l'application ouverte. Par ailleurs, X est compact donc $f(X)$ est compact dans Y sachant f continue. Y étant séparée, $f(X)$ est donc fermé dans Y . Y étant connexe on a finalement $f(X) = Y$. \square

On a une classification simple des surfaces de Riemann simplement connexes donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.5 (Théorème d'uniformisation (Poincaré - Koebe)). *Soit X une surface de Riemann simplement connexe. Alors X est biholomorphe à l'une des trois surfaces suivantes :*

- Le plan complexe \mathbb{C} ;
- Le disque unité \mathbb{D} ouvert ;
- La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

2.2 REVÊTEMENTS

Définition 2.6. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p : Y \rightarrow X$ est appelée revêtement si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dans X dont la pré-image :

$$p^{-1}(U) = \coprod_{j \in J} V_j$$

consiste en une union d'ouverts $V_j \subset Y$ disjoints deux à deux tels que chaque application restreinte :

$$p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$$

soit un homéomorphisme.

On appelle X la base du revêtement p .

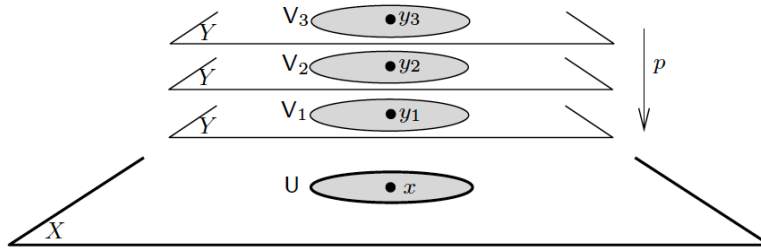


FIGURE 1 –

Exemple 2.1. L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$ tel que $\exp(a) = b$. Comme l'exponentielle est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_0 de a et un voisinage ouvert U de b tels que $\exp|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme. On a donc,

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \text{ où } V_n = 2i\pi n + V_0.$$

Les V_n sont deux à deux disjoints pour V_0 assez petit, et $\exp|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.6. Soient X et Y deux espaces topologiques séparés avec X connexe et soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement. Alors pour toute paire de points quelconques $x_1, x_2 \in X$, les deux fibres $p^{-1}(x_1)$ et $p^{-1}(x_2)$ ont même cardinal. En particulier, si Y est non vide, alors p est forcément surjective.

Démonstration. Soit n le cardinal d'une fibre quelconque, et $A = \{x \in X, |p^{-1}(x)| = n\}$. Montrons que A est ouvert et fermé dans X . Si $x \in A$, soit $U \subset X$ un voisinage de x tel que $p^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^n V_i$ où les $V_i \subset Y$ sont homéomorphes via p à U : il y a bien n tels ouverts car

$x \in A$ et chaque V_i contient un unique élément de $p^{-1}(x)$. Alors pour tout $y \in U$, on a que le cardinal de la fibre $p^{-1}(y)$ vaut n , nombre des V_i . Donc A est ouvert. On montre de façon similaire que A est fermé, en montrant que le complémentaire est ouvert. Comme A est non vide et que X est connexe, $A = X$. \square

Le cardinal commun des fibres $p^{-1}(x)$ lorsque x parcourt X est parfois appelé le nombre de feuillets ou degré du revêtement p .

On donne maintenant la notion de revêtement ramifié.

Définition 2.7. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques localement compacts est dite propre si la pré-image $f^{-1}(L)$ de tout compact $L \subset Y$ est un aussi sous-ensemble compact de X .

On a qu'un espace topologique localement compact est un espace séparé dans lequel tout point possède un voisinage qui est compact.

Théorème 2.7. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f : Y \rightarrow X$ une application holomorphe propre non constante. Alors il existe un entier naturel n tel que f prend exactement n fois toute valeur $x \in X$ en comptant les multiplicités, à savoir :

$$n = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \text{mult}_y(f) \text{ pour tout } x \in X.$$

n est en fait le degré de f .

Rappelons qu'en tout point $y \in Y$, l'application f se ramène dans un bon système de cartes locales à une simple puissance $z \mapsto z^{k_y}$, pour un certain entier k_y qui est la multiplicité locale avec laquelle f prend la valeur $f(y) \in X$ au point y . On note cela comme $\text{mult}_y(f)$.

Définition 2.8. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante. Un point $y \in Y$ est appelé point de branchement ou point de ramification de p s'il n'existe pas de voisinage V de y tel que la restriction $p|_V$ soit injective. Une telle application p est dite non ramifiée s'il elle n'a aucun point de branchement dans Y .

Définition 2.9. Une application holomorphe propre non constante entre deux surfaces de Riemann sera appelée un revêtement ramifié holomorphe, dont le nombre de feuillets (ou le degré) est donné par $n = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \text{mult}_y(f)$ pour tout $x \in X$. Lorsqu'il n'y a pas de points de branchement, on dit que l'application est non ramifiée.

2.3 GENRE

L'un des principaux objectifs de notre étude est de trouver des relations d'équivalence adéquates aux surfaces de Riemann compactes, puis de décrire les classes d'équivalence. Une première tentative, plus superficielle, consisterait à dire que deux surfaces de Riemann sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme (c'est-à-dire une bijection continue dont la réciproque

est aussi continue) entre elles. C'est cette approche que l'on adoptera dans cette section. Un objet essentiel sera le polygone défini ci-dessous.

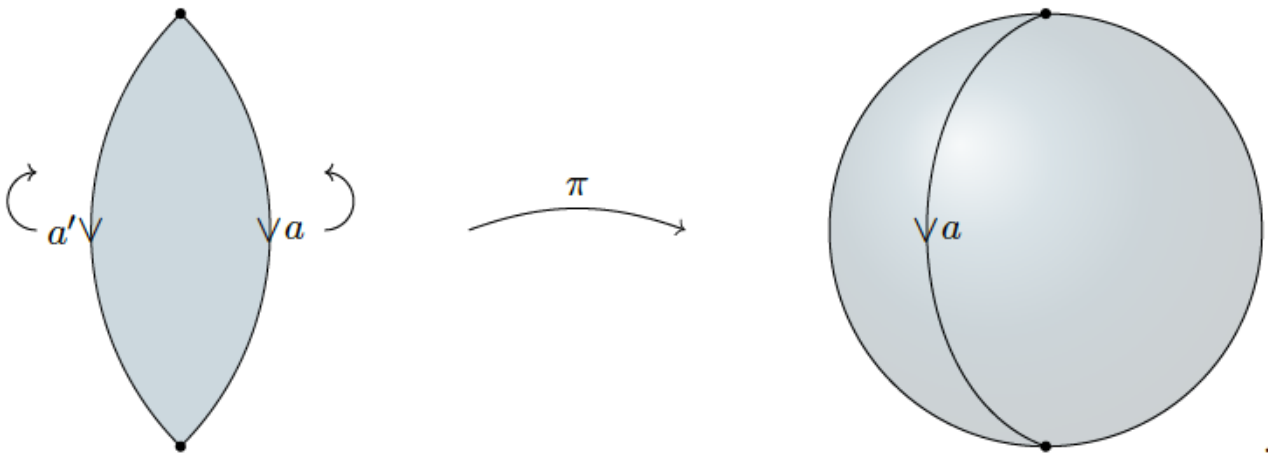
Définition 2.10. Soit $g \geq 0$ un entier. Pour $g \geq 1$, on définit F_g comme le polygone dont les arêtes sont nommées

$$a_1, b_1, a'_1, b'_1, \dots, a_g, b_g, a'_g, b'_g$$

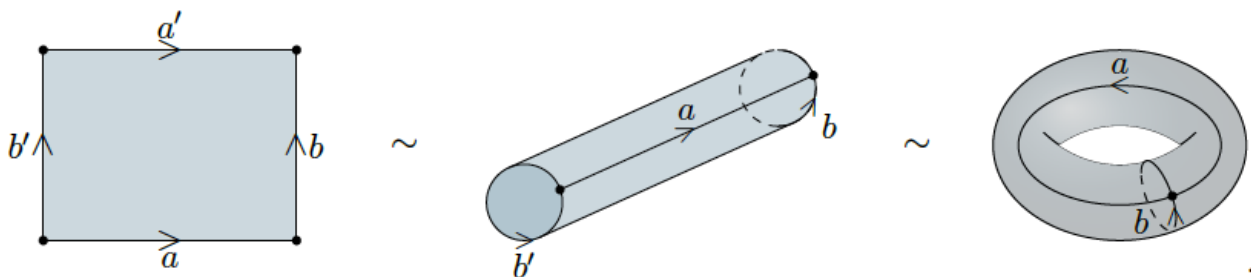
Les arêtes a_i, b_i sont parcourues dans le sens anti-horaire et les arêtes a'_i, b'_i dans le sens horaire. Pour $g = 0$, on définit F_0 comme le polygone à deux arêtes a, a' .

Enfin, on note $|F_g|$ la surface (topologique) obtenue en identifiant a_i avec a'_i et b_i avec b'_i en tenant compte de leurs orientations respectives.

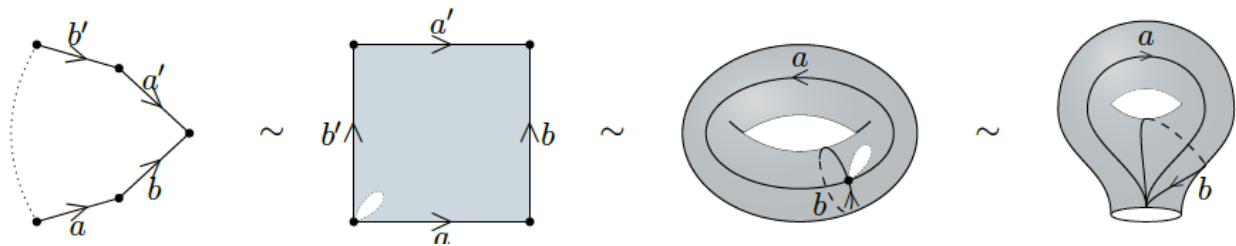
Pour comprendre les surfaces $|F_g|$, on va les "construire". Premièrement, si $g = 0$, la surface obtenue en identifiant les arêtes est la sphère de Riemann :



Pour $g = 1$, on obtient un tore :



Pour $g = 2$, on se rend compte que la transformation $g \mapsto g + 1$ équivaut à mettre une anse sur la surface $|F_g|$.



On conclut que $|F_g|$ est une sphère avec g anses. De manière équivalente, pour $g = 0$, $|F_g|$ est une sphère et, pour $g \geq 1$, un tore avec g trous.

L'importance de ces surfaces réside dans le fait que toute surface de Riemann compacte est homéomorphe à $|F_g|$ pour un certain entier $g \geq 0$. De plus, deux de ces surfaces sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même g .

Théorème 2.8. *Soit X une surface de Riemann compacte. Alors, il existe un unique entier $g \geq 0$ tel que X soit homéomorphe à $|F_g|$. On dit que cet entier g est le genre de X . Enfin, deux surfaces ont le même genre si et seulement si elles sont homéomorphes.*
(La démonstration de ce théorème est donnée plus loin dans le rapport)

Ce théorème résout notre problème décrit au début de la section. Si l'on considère deux surfaces de Riemann compactes comme équivalentes si elles sont homéomorphes, alors l'ensemble des classes d'équivalence se rapporte exactement à l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Cette classification, bien que simple, est trop faible : elle ignore complètement la structure complexe des surfaces de Riemann. Dans le chapitre suivant, on dira que deux surfaces de Riemann avec le même genre g sont équivalentes si elles sont biholomorphes. L'ensemble des classes d'équivalence est l'espace de modules \mathcal{M}_g , dont la géométrie sera étudiée. On verra que si $g = 0$, il n'y a qu'une surface de Riemann à biholomorphisme près : la sphère de Riemann. Pour $g = 1$, toute surface est biholomorphe à un tore complexe et si $g > 1$, l'ensemble des classes d'équivalence est continu et de dimension $3g - 3$ sur \mathbb{C} .

Pour déterminer le genre d'une surface, on peut utiliser certains outils fondamentaux de la topologie algébrique. Parmi ceux-ci, la caractéristique d'Euler, ou encore le groupe fondamentale (sur lequel on s'attardera à la section suivante). L'accent sera mis principalement sur le développement de l'intuition de ces outils plutôt que sur le lien logique entre les résultats. Pour cette raison, plusieurs énoncés seront omis. Le lecteur intéressé peut trouver les démonstrations dans [7].

Définition 2.11 (triangulation). Soit X une surface de Riemann compacte. Une triangulation de X est une décomposition de X en sous-ensembles fermés, chacun homéomorphe à un triangle, de sorte que deux triangles quelconques soient disjoints, ou ne se rencontrent qu'à un seul sommet ou le long d'une seule arête.

Un corollaire du théorème 1.4 est le fait que chaque surface compacte de Riemann possède une triangulation finie, car, par homéomorphisme, il suffit de trianguler $|F_g|$, et il est clair que cette surface est triangulable.

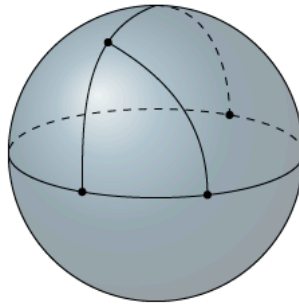
Proposition 2.2. *Toute surface de Riemann compacte admet une triangulation finie.*

Les triangulations sont importantes car elles permettent de définir la caractéristique d'Euler d'une surface compacte de Riemann.

Définition 2.12 (Caractéristique d'Euler). Étant donné une triangulation de X , avec v sommets, a arêtes et t triangles. La caractéristique d'Euler de X est le nombre entier $\chi(X) = v - a + t$.

Un fait topologique important est que la caractéristique d'Euler est indépendante de la triangulation choisie, ce qui justifie notre notation qui ne la prend pas en compte.

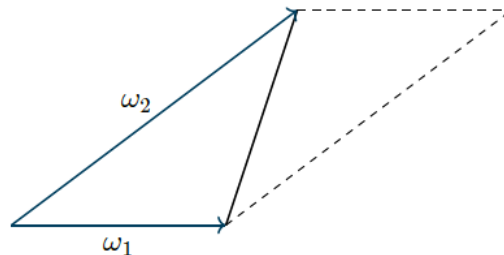
Exemple 2.2. *La sphère de Riemann a caractéristique d'Euler 2. Pour montrer cela, on observe la triangulation ci-dessous qui a 4 sommets, 6 arêtes et 4 triangles (d'où, $\chi(\hat{\mathbb{C}}) = 4 - 6 + 4 = 2$).*



Pour calculer la caractéristique d'Euler d'un tore complexe, on pourrait afficher une triangulation explicite d'un tore. Cependant, il est plus facile de voir cela en utilisant son parallélogramme fondamental.

Exemple 2.3. *Les tores complexes ont caractéristique d'Euler 0. Étant donné un tore complexe \mathbb{C}/Λ , où Λ est le réseau engendré par les vecteurs ω_1, ω_2 , on peut calculer sa caractéristique d'Euler en triangulant son parallélogramme fondamental. Pour cela, on dessine une diagonale de ω_1 à ω_2 comme ci-dessous. On a $v = 1$ car tout point du réseau est équivalent à 0, $a = 3$ car les arêtes opposées du parallélogramme sont équivalentes et $t = 2$. Alors, $\chi(\mathbb{C}/\Lambda) = 1 - 3 + 2 = 0$.*

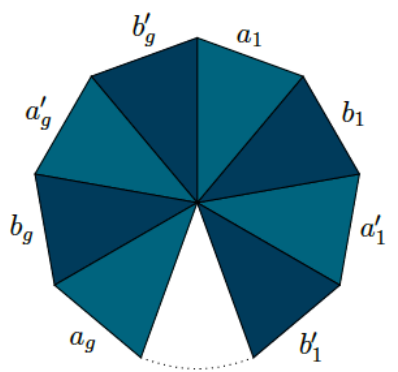
En fait, comme on l'a dit plus tôt, on peut généraliser cette méthode pour trouver la caractéristique d'Euler de toute surface de Riemann compacte !



Théorème 2.9. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Alors la caractéristique d'Euler de X est*

$$\chi(X) = 2 - 2g$$

Démonstration. Si $g \geq 1$, il suffit de trianguler le polygone F_g :



Cette triangulation a $4g$ arêtes internes, qui correspondent à $4g$ arêtes sur X . Cependant, des $4g$ arêtes latérales, seules $2g$ sont distinctes sur X . Tous les, $4g$ triangles de F_g deviennent des triangles distincts dans X . Enfin, comme tous les sommets latéraux sont identifiés, la triangulation de X n'a que 2 sommets. On en déduit que $\chi(X) = 2 - (4g + 2g) + 4g = 2 - 2g$. Puisque le théorème est trivialement vrai dans le cas $g = 0$, le résultat suit. \square

Le fait que le degré soit constant pour un revêtement, combinée à la théorie de la caractéristique d'Euler, nous donne une formule importante reliant les genres du domaine et de l'image avec le degré et la multiplicité du revêtement.

Théorème 2.10 (Riemann-Hurwitz). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement holomorphe entre des surfaces de Riemann compactes de genres respectifs g et g' . Alors,*

$$2g - 2 = \deg(f)(2g' - 2) + \sum_{p \in X} (Mult_p(f) - 1)$$

⚡ Notez que, puisque f est une application entre des surfaces de Riemann compactes, l'ensemble des points de ramification de f est fini et donc la somme qui apparaît dans la formule de Riemann-Hurwitz l'est également.

Démonstration. Prenons une triangulation de Y , de sorte que chaque point de branchement de f soit un sommet. Supposons qu'il y ait v sommets, a arêtes et t triangles. Soulevons cette triangulation à X via l'application f et supposons qu'il y ait v' sommets, a' arêtes et t' triangles sur X . Notez que chaque point de ramification de f est un sommet sur X . Puisque les points de ramification sont les sommets des triangles, $t' = \deg(f)t$ et $a' = \deg(f)a$. On peut compter le nombre d'images réciproques d'un point $y \in Y$ quelconque comme

$$|f^{-1}(y)| = \sum_{p \in f^{-1}(y)} 1 = \deg(f) - \sum_{p \in f^{-1}(y)} (Mult_p(f) - 1)$$

Par conséquent, le nombre total de sommets de X est

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{y \in Y, y \text{ sommet}} [\deg(f) - \sum_{p \in f^{-1}(y)} (\text{Mult}_p(f) - 1)] \\ &= \deg(f)v - \sum_{y \in Y, y \text{ sommet}} \sum_{p \in f^{-1}(y)} (\text{Mult}_p(f) - 1) \end{aligned}$$

Soit $v' = \deg(f)v - \sum_{p \in X, p \text{ sommet}} (\text{Mult}_p(f) - 1)$, et on en déduit que :

$$2g - 2 = -\chi(X) = -v' + a' - t' = -\deg(f)v + \sum_{p \in X, p \text{ sommet}} (\text{Mult}_p(f) - 1) + \deg(f)a - \deg(f)t$$

Et donc finalement :

$$2g - 2 = -\deg(f)\chi(X) + \sum_{p \in X, p \text{ sommet}} (\text{Mult}_p(f) - 1) = \deg(f)(2g' - 2) + \sum_{p \in X, p \text{ sommet}} (\text{Mult}_p(f) - 1)$$

□

Outre le fait que la formule de Riemann-Hurwitz est très pratique pour calculer le genre de certaines surfaces, elle a le corollaire suivant d'une grande utilité.

Proposition 2.3. *En utilisant la notation du théorème précédent, on a :*

1. *On a toujours $g \geq g'$. En particulier, si $g = 0$ alors $g' = 0$.*
2. *Si $g' = 0$ et $g > 0$, alors f est ramifié.*
3. *Si $g' = 1$, f n'est pas ramifié si et seulement si $g = 1$*
4. *Si f n'est pas ramifié et $g' > 1$, alors soit $g = g'$ et $\deg(f) = 1$, soit $g > g'$.*

Dans plusieurs situations, il est utile de « percer » les surfaces de Riemann pour qu'elles « se comportent mieux ». Plus précisément, si X est une surface de Riemann compacte, on considère $X \setminus P$, où P est un ensemble discret (généralement donné par les points de ramification d'un certain revêtement). Bien entendu, $X \setminus P$ est un sous-ensemble ouvert de X et constitue donc une surface de Riemann en soi. On dira que les surfaces de Riemann ainsi obtenues sont des *surfaces de Riemann perforées*.

2.4 FORMES DIFFÉRENTIELLES

Définition 2.13. Une 1-forme holomorphe dans $V \subset \mathbb{C}$ est une expression ω de la forme

$$\omega = f dz$$

où f est une fonction holomorphe en V .

Ce qu'on appelle dz est l'identité sur le plan tangent au point z considéré.

On peut aussi écrire la définition d'une 1-forme (non nécessairement holomorphe) sur $Y \subset X$ surface de Riemann comme une application

$$\omega : Y \rightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^* X$$

avec pour tout $a \in Y$, $\omega(a) \in T_a^* X$ l'ensemble des formes \mathbb{C} -linéaires sur le plan tangent en a à X . $\bigcup_{a \in Y} T_a^* X$ est appelé *fibré tangent* associé à Y .

On appelle souvent une 1-forme holomorphe une *différentielle abélienne*.

Définition 2.14. Une 1-forme C^∞ dans $V \subset \mathbb{C}$ est une expression ω de la forme

$$\omega = f(z)dz + g(z)d\bar{z}$$

où f et g sont des fonctions C^∞ en V .

On dira qu'une 1-forme ω dans V est de type $(1, 0)$ lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $\omega = f(z)dz$ et qu'elle est de type $(0, 1)$ lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $\omega = g(z)d\bar{z}$. En notant $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué par les 1-formes C^∞ , par $\mathcal{E}^{(1, 0)}$ celui constitué par les 1-formes de type $(1, 0)$ et $\mathcal{E}^{(0, 1)}$ celui constitué par les 1-formes de type $(0, 1)$, on a que : $\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{(1, 0)} \oplus \mathcal{E}^{(0, 1)}$

On va maintenant définir la notion de produit extérieur, ce qui va nous permettre d'introduire la notion de 2-forme C^∞ et d'autres notions dans des sections suivantes.

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif \mathbb{K} , et soit m un entier naturel. Notre motivation derrière la définition du produit extérieur est la volonté de traiter des fonctions multilinéaires alternées de E^m « comme si » elles étaient linéaires. Autrement dit, nous voulons un nouveau \mathbb{K} -espace vectoriel $\Lambda^m E$ et une fonction multilinéaire alternée η telle que pour tout espace vectoriel G , et pour toute application multilinéaire alternée ϕ de $\Lambda^m E$ dans G , il existe une unique application linéaire $\bar{\phi}$ de $\Lambda^m E$ dans G telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} E^m & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \eta \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi} & \\ \Lambda^m E & & \end{array}$$

Pour $x, y \in E$, on notera $x \wedge y$ au lieu de $\eta(x, y)$.

Théorème 2.11. *Le produit extérieur existe, et, si E est de dimension finie n , alors $\dim(\Lambda^m E) = \binom{n}{m}$.*

Démonstration. On va traiter le cas $m = 2$, la généralisation au cas m quelconque étant identique mais un peu plus lourde en notations donc peut-être moins claire.

Soit $\{e_i : i \in I\}$ une base de E . Pour chaque paire (e_i, e_j) avec $i, j \in I$, on définit un symbole purement formel $e_i \wedge e_j$ avec la convention $e_i \wedge e_i = 0$ $\wedge^2 E$ et on définit $\wedge^2 E$ comme l'espace engendré par les $e_i \wedge e_j$ (qui forment un ensemble de vecteurs qui ne sont néanmoins pas linéairement indépendants).

Puisque η doit être bilinéaire alternée, elle est déterminée par ses valeurs en les (e_i, e_j) . On définit alors η comme étant l'unique fonction bilinéaire alternée telle que $\eta(e_i, e_j) = e_i \wedge e_j$ pour tout $i, j \in I$.

Enfin, si $\phi : E \times E \rightarrow G$ est une fonction bilinéaire alternée quelconque, on définit $\bar{\phi}$ comme l'unique application linéaire telle que $\bar{\phi}(e_i \wedge e_j) = \phi(e_i, e_j)$ pour tout $i, j \in I$.

Pour ce qui est de la dimension, si $I = \{1, \dots, n\}$ il est facile de se convaincre que $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ est une base de $\wedge^m E$.

□

Définition 2.15. Une 2-forme C^∞ dans $V \subset \mathbb{C}$ est une expression ω de la forme

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z}$$

où f est une fonction C^∞ en V .

2.5 GROUPE FONDAMENTAL, HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE

2.5.1 • GROUPE FONDAMENTAL

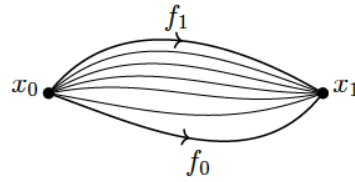
La topologie algébrique est l'étude des règles reliant les espaces topologiques aux objets d'une catégorie algébrique donnée \mathbf{C} telles que les morphismes dans \mathbf{Top} (les applications continues), la catégorie des espaces topologiques, soient liés aux morphismes de \mathbf{C} (les homomorphismes), en préservant les notions de composition et d'isomorphisme. Ces règles sont connues sous le nom de foncteurs. Dans cette section, on étudiera l'un des principaux foncteurs de la topologie algébrique : le groupe fondamental. On verra cet objet dans le contexte des surfaces de Riemann, mais il existe avec ou sans modification dans les espaces topologiques généraux.

Définition 2.16 (Homotopie). Soit X une surface de Riemann. Une homotopie de chemins dans X est une famille $f_t : X \rightarrow Y$, $0 \leq t \leq 1$ de chemins de $[0, 1] \rightarrow X$, telle que :

- Les points $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont indépendants de t .
- L'application $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ qui à (s, t) associe $f_t(s)$ est continue.

Lorsque deux chemins f_0 et f_1 sont reliés par une homotopie f_t , on dit qu'ils sont homotopes.

L'homotopie est une formalisation de la notion intuitive de déformation continue d'un chemin.



Théorème 2.12. *Supposons X un espace topologique et $a, b \in X$. Alors, la notion d'homotopie est une relation d'équivalence pour l'ensemble des courbes de a à b .*

Définition 2.17. Soit X un espace topologique. Supposons a, b and c en X , $u : I \rightarrow X$ une courbe de a jusqu'à b et $v : I \rightarrow X$ une courbe de b jusqu'à c .

— Le produit de courbes $u \cdot v : I \rightarrow X$ de a jusqu'à c est défini par

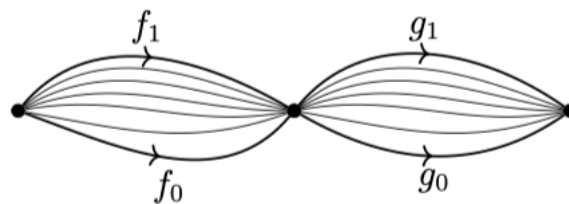
$$(u \cdot v)(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

— La courbe inverse $u^- : I \rightarrow X$ de a jusqu'à b est défini par

$$u^-(t) := u(1 - t) \quad \forall t \in I$$

On peut interpréter les produit de courbes $u \cdot v$ comme la courbe que trace les points de la courbe u et après ceux de la courbe v mais à une vitesse deux fois plus élevée. La courbe u^- passe par les points de u mais dans la direction contraire.

Notons que si $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ sont deux courbes de a jusqu'à b homotopes, et $g_0, g_1 : I \rightarrow X$ sont deux courbes de b jusqu'à c aussi homotopes, alors $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$. De même pour $f_0^- \sim f_1^-$.



Une courbe $u : I \rightarrow X$, où X est un espace topologique, est appelée un *lacet* si $u(0) = u(1)$.

Théorème 2.13. *Supposons X un espace topologique et $a \in X$. L'ensemble $\pi_1(X, a)$ de classes d'homotopie des lacets en X avec point initial et final en a forment un groupe sous l'opération de produit de courbes. On appelle ce groupe le **groupe fondamental** de X avec point de base a .*

Pour tout lacet u , on note $[u]$ sa classe d'équivalence. L'opération du groupe $\pi_1(X, a)$ est $[u] \cdot [v] = [u \cdot v]$.

Supposons maintenant que a et b sont deux points de X reliés par une courbe w . On définit

$$f : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$$

$$f([u]) := [w^- \cdot u \cdot w]$$

Cette application est un isomorphisme. Alors, pour un espace topologique X connexe par arcs le groupe fondamental est indépendant du point de base, et on peut le noter seulement comme $\pi_1(X)$ au lieu de $\pi_1(X, a)$.

Néanmoins, l'isomorphisme $\pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ dépend de la courbe w . Si w_1 est une autre courbe reliant a et b et $f_1 : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ est défini par

$$f_1([u]) := [w_1^- \cdot u \cdot w_1],$$

alors l'automorphisme

$$f := f_1^{-1} \circ f : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$$

satisfait $F([u]) = [w_1 \cdot w^- \cdot u \cdot w \cdot w_1^-]$, c'est-à-dire que, $\forall \alpha \in \pi_1(X, a)$,

$$F(\alpha) = \gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}$$

où γ est la classe d'homotopie du lacet $w_1 \cdot w^-$. Alors, si $\pi_1(X, a)$ est abélien, on a que $\pi_1(X, a)$ et $\pi_1(X, b)$ sont canoniquement isomorphes.

Exemple 2.4 (Groupe fondamental d'une surface de genre g). *Pour calculer le groupe fondamental d'une surface de Riemann X de genre g , considérons le polygone F_g . Puisque tous les sommets de F_g sont équivalents, les arêtes $a_1, b_1, a'_1, b'_1, \dots, a_g, b_g, a'_g, b'_g$ de F_g forment des lacets dans X . Aussi, on sait que a_i et a'_i ont une orientation opposée et que en parcourant tous les arêtes, on revient au point d'origine. On conclut que $\pi_1(X)$ est le groupe engendré par $2g$ éléments $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ satisfaisant la relation $[A_1, B_1], \dots, [A_g, B_g] = e$, où $[A_i, B_i] = A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$ est le commutateur de A_i et B_i .*

Supposons $\phi : X \rightarrow Y$ une application continue entre des surfaces de Riemann telle que $\phi(x_0) = y_0$. Alors ϕ induit un homomorphisme $\phi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, défini en composant les lacets $f : I \rightarrow X$ basés en x_0 avec ϕ , c'est-à-dire, $\phi_*([f]) := [\phi \circ f]$. Les deux propriétés fondamentales de l'homomorphisme induit sont :

— Si $\psi : X \rightarrow Y$ et $\phi : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues telles que $\psi(x_0) = y_0$ et $\phi(y_0) = z_0$, alors $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$;

— $id_{\pi_1(X, x_0)} = (id_X)_*$.

Une application immédiate de ces propriétés est le fait fondamental que si ϕ est un homéomorphisme, alors ϕ_* est un isomorphisme de groupes. C'est ce qui fournit la grande utilité de la topologie algébrique. Montrer que deux espaces topologiques sont homéomorphes est généralement simple : il suffit d'afficher un homéomorphisme. Par contre, il est difficile de montrer que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes. Cependant, on a maintenant un

moyen systématique de procéder : si les groupes fondamentaux de deux espaces topologiques sont différents, ils ne sont pas homéomorphes !

Cette observation donne directement la démonstration du théorème 2.8 qui était laissée en suspens.

2.5.2 • HOMOLOGIE SIMPLICIALE

Pour n un entier naturel, on appelle p -simplexe de \mathbb{R}^n tout élément $(s_0, \dots, s_p) \in (\mathbb{R}^n)^{p+1}$ tel que la famille $(s_i - s_0)_{i>0}$ soit libre. C'est une généralisation du triangle et du tétraèdre. On notera $[s_0, \dots, s_p]$ le simplexe associé à la permutation (s_0, \dots, s_p) de ses sommets. On prendra garde à l'orientation : ainsi si ϕ est une permutation des sommets, on aura $[\phi(s_0), \dots, \phi(s_p)] = (-1)^{\text{signature}(\phi)}[s_0, \dots, s_p]$.

Définition 2.18 (Complexe simplicial). Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble de simplexes tel que :

- Si $s \in K$ et t est une face de s , alors $t \in K$
- Si $s, t \in K$, alors $s \cap t$ est soit vide, soit a une face commune à s et t

On dit que K est un complexe simplicial.

On pensera à une collection de triangles pour imaginer ces objets.

Définition 2.19 (p -chaîne). Soit K un complexe simplicial. On note $C_p(K)$ le groupe libre engendré par les p -simplexes de K , c'est-à-dire les combinaisons linéaires formelles dans \mathbb{Z} de p -simplexes de K . Les éléments de $C_p(K)$ sont appelés p -chaînes.

Définition 2.20 (Opérateur bord). On définit l'opérateur bord $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ par sa valeur sur les p -simplexes de K , puis par \mathbb{Z} -linéarité sur tout $C_p(K)$. Si $\sigma = (s_0, \dots, s_p)$ est un tel simplexe, le bord de σ est alors défini par

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_p]$$

La propriété fondamentale est que le bord d'un bord est nul : on traduit ceci par $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Ainsi, dans la suite

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

on a que $\text{Im}(\partial_{p+1})$ est un sous-groupe de $\ker(\partial_p)$, distingué dans ce dernier car les groupes en jeu sont abéliens. On définit alors le n -ième groupe d'homologie de K :

Définition 2.21 (Groupe d'homologie). Le n -ième groupe d'homologie de K est le groupe quotient

$$H_n(K) = \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

Tout l'intérêt de ces concepts réside dans le fait que les groupes d'homologie ne dépendent pas de K mais de l'espace "ambiant" : ainsi, on peut définir les groupes d'homologie d'espaces triangulables, tels les surfaces de Riemann.

Pour le premier groupe d'homologie d'une surface de Riemann, on obtient :

Théorème 2.14. *Si X est une surface de Riemann, alors*

$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

C'est donc à isomorphisme près l'abélianisé du groupe fondamental de la surface X .

Croquis de la démonstration. L'idée principale de la démonstration de ce théorème est de fixer un point $x_0 \in X$ et de voir les lacets dans $\pi_1(X, x_0)$ comme des cycles dans $\ker \partial_1$. On obtient ainsi un homéomorphisme $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Ce morphisme est surjectif et a pour noyau le sous-groupe dérivé de $\pi_1(X, x_0)$. Le résultat découle alors du premier théorème d'isomorphisme. \square

Ce formalisme va par ailleurs nous aider à bien définir l'intégration dans les surfaces de Riemann.

2.5.3 • COHOMOLOGIE

Définition 2.22 (Dérivée extérieure). La dérivée extérieure d est un opérateur linéaire qui à une fonction $f \in C^\infty$ associe la 1-forme

$$df := \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

à une 1-forme $C^\infty \omega = f dz + g d\bar{z}$ associe

$$d\omega := \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}$$

à une 2-forme C^∞ associe 0.

D'après le théorème de Schwartz, $d(df) = 0$. De manière générale on a toujours $d^2 f = 0$.

Le lecteur attentif a peut-être vu que l'équation définissant $d\omega$ ressemble aux équations de Cauchy-Riemann. En fait, la dérivée extérieure d'une 1-forme holomorphe est nulle.

Les 1-formes C^∞ dont la dérivée extérieure est nulle vont nous intéresser dans la suite.

Définition 2.23 (1-formes exactes et fermées). Une 1-forme $C^\infty \omega$ est *fermée* si sa dérivée extérieure est nulle et elle est *exacte* si elle s'écrit comme la dérivée extérieure d'une 0-forme C^∞ .

L'opérateur de bord ∂ et la dérivée extérieure sont similaires à bien des égards : les deux agissent sur des espaces différents de telle sorte que d^2 et ∂^2 sont égaux à l'opérateur nul. On va maintenant faire une construction analogue à l'homologie en utilisant la dérivée extérieure. Comme précédemment, il sera utile de distinguer les trois dérivées extérieures : $\mathcal{E}^{(0)}(X) \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^{(2)}(X) \xrightarrow{d^2} 0$, où $\mathcal{E}^{(k)}(X)$ est le \mathcal{C} -espace vectoriel constitué par les k -formes C^∞ avec la convention qu'une 0-forme C^∞ est simplement une fonction C^∞ . Notez que l'ordre des flèches est inversé par rapport au cas d'homologie, ce qui motive le préfixe « co- » dans la définition suivante.

Définition 2.24 (Cohomologie de Rham). Soit X une surface de Riemann. On définit la *cohomologie de Rham* de X comme étant le \mathcal{C} -espace vectoriel

$$H^1(X) := \frac{\ker d_1}{\operatorname{Im} d_0} = \frac{1 - \text{formes fermées}}{1 - \text{formes exactes}}$$

2.5.4 • INTÉGRATION DANS LES SURFACES DE RIEMANN

Nous nous contentons ici de définir les notions d'intégrale de chemin pour les formes holomorphes car se sont les formes qui vont nous intéresser plus loin pour définir les outils de la théorie de Teichmüller.

Définition 2.25 (Intégrale sur un chemin). Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin différentiable dans une surface de Riemann X et $\omega = f dz$ une forme holomorphe sur X . Si l'image de γ est contenue dans le domaine d'une seule carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$, on définit l'intégrale de ω sur γ par :

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ \phi_\alpha} f_\alpha dz$$

Si l'image de γ n'est pas contenue dans aucune carte, on divise le segment $[0, 1] = [0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_n, 1]$ de sorte que les restrictions $[a_i, a_{i+1}]$ aient des images suffisamment petites. L'intégrale d'une 1-forme méromorphe est définie d'une manière analogue, il faut juste que le chemin n'intersecte pas les pôles de f .

On peut vérifier que la définition fournie ne dépend pas de la carte choisie en observant que pour $\omega = f dz$ une forme holomorphe, on a pour toute paire $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ et $z \in \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$f_\beta(z) = f_\alpha(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(z))(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})'(z)$$

On vérifie aussi aisément que l'intégrale ainsi définie est indépendante de la subdivision $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$ de $[0, 1]$ choisie.

Plus généralement, on peut envisager des combinaisons linéaires formelles de chemins avec des coefficients entiers. C'est-à-dire des objets du type :

$$\gamma := \sum_{i=1}^n c_i \gamma_i$$

où $c_i \in \mathbb{Z}$ et où les γ_i sont des chemins (on observe que c'est une généralisation des 1-chaînes définies précédemment). L'intégrale sur le chemin γ ainsi défini est définie par linéarité :

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^n c_i \int_{\gamma_i} \omega$$

Définition 2.26 (Intégrale sur une surface). Soit D un fermé triangulable d'une surface de Riemann X et $\eta = f dz \wedge d\bar{z}$ une 2-forme C^∞ . Si D est contenu dans le domaine d'une seule carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$, on définit l'intégrale de η sur D par :

$$\int_D \eta := \int_{\phi_\alpha(D)} f dz \wedge d\bar{z} = -2i \int_{\phi_\alpha(D)} f(x + iy, x - iy) dx dy$$

où la dernière intégrale est une intégrale de surface usuelle. Si D n'est pas contenu dans le domaine d'une carte, on le triangule jusqu'à que chaque triangle soit contenu dans le domaine d'une carte.

On peut étendre la définition de l'intégrale sur une surface par linéarité sur les 2-chaînes (ou plutôt leur images par les cartes de X , on conservera néanmoins l'abus de notation). On peut désormais formuler le théorème de Stokes :

Théorème 2.15 (Théorème de Stokes). *Soit D une 2-chaîne d'une surface de Riemann X et ω une 1-forme C^∞ sur X . Alors,*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de supposer que D est un triangle inclus dans le domaine d'une carte. Dans ce cas, le théorème devient simplement le théorème de Green dans \mathbb{R}^2 . \square

Proposition 2.4. *Soient γ_0 et γ_1 des chemins homotopes sur une surface de Riemann X . Alors, si ω est une forme fermée (ce qui est en particulier le cas des 1-formes holomorphes) on a :*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Démonstration. Soit $F : I \times I \rightarrow X$ l'application associée à l'homotopie reliant γ_0 et γ_1 . Alors, si D est l'image de F , D est triangulable et $\partial D = \gamma_1 \gamma_0$. Le théorème de Stokes implique donc que

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0$$

puisque ω est fermée. \square

3

SURFACES DE TRANSLATIONS

3.1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

3.1.1 • DÉFINITIONS

Les surfaces de translation peuvent être vues comme des différentielles abéliennes sur des surfaces de Riemann. Elles apparaissent spontanément dans l'étude de nombreux systèmes dynamiques et, par ailleurs, on les étudie souvent de paire avec tous les objets introduits dans la théorie de Teichmüller. Il existe différentes manières de voir cet objet, dont certaines très intuitives qui font qu'il est facile de travailler avec des surfaces de translations pour certains problèmes où l'on pourra facilement les représenter par exemple.

Définition 3.1 (Première définition d'une surface de translation). Une surface de translation (X, ω) est la donnée d'une surface de Riemann X compacte et d'une différentielle abélienne ω . On notera $H^{1,0}(X)$ le \mathbf{C} -espace vectoriel des différentielles abéliennes sur X .

Théorème 3.1. Soit X de genre g , alors $\dim_{\mathbf{C}} H^{1,0}(X) = g$ et, si $g > 0$, toute différentielle abélienne sur X a $2g - 2$ zéros comptés avec multiplicité.

Le résultat suivant est très utile pour se représenter les surfaces de translation.

Proposition 3.1. Soit (X, ω) une surface de translation. À chaque point où ω ne s'annule pas, il existe une coordonnée locale z de X centrée en ce point pour laquelle $\omega = dz$. À chaque point où ω admet un zéro d'ordre k , il existe une coordonnée locale z de X centrée en ce point pour laquelle $\omega = z^k dz$.

Démonstration. On choisit de travailler avec la coordonnée locale w et on suppose que ω admet un zéro d'ordre k en $w = 0$. On peut alors écrire $\omega = w^k g(w)$ où g est une 1-forme holomorphe ne s'annulant pas en $w = 0$. On note que

$$w \mapsto \int_0^w g(t) t^k dt$$

admet un zéro d'ordre $k + 1$ en $w = 0$, de sorte qu'il existe une coordonnée locale z vérifiant :

$$z^{k+1} = (k + 1) \int_0^w g(t) t^k dt$$

. En différentiant de part et d'autre on obtient bien : $\omega = z^k dz$. □

Pour un point p où ω est non nulle, on se donne une coordonnée locale z comme on a vu ci-dessus. Ce choix est unique si $z(p) = 0$, sinon si on prend une autre fonction holomorphe f quelconque avec $df = dz$, alors $f(z) = z + C$ pour une constante C . On justifie ainsi la terminologie de "surface de translation" :

Proposition 3.2. $X - \Sigma$ admet un Atlas des cartes dont les fonctions de transition sont des translations.

Cet Atlas est obtenu par toutes les coordonnées locales z telles que $dz = \omega$.

On gagne que $X - \Sigma$ a une structure de variété plate, car les translations préservent la métrique euclidienne en \mathbb{C} (une variété plate ressemble « localement » à l'espace euclidien en termes de distances et d'angles).

On appelle maintenant *singularités* de (X, ω) les zéros de ω . La singularité est d'ordre k si l'exposant correspondant dans l'écriture de $\omega = z^k dz$ au voisinage de la singularité.

La notion de Pullback (ou tiré-en-arrière) est importante pour bien voir ce qui arrive à la métrique de la surface de translation proche d'un point de singularité.

Supposons que $f : M \rightarrow N$ soit holomorphe et non-constante entre deux surfaces. Il est possible d'en tirer un moyen canonique d'envoyer des formes différentielles de N à M . C'est ce qu'on nomme le tiré-en-arrière :

Définition 3.2 (tiré-en-arrière ou Pullback d'une forme différentielle par f). Soit ω une 1-forme holomorphe sur N . Alors la 1-forme holomorphe $f^*\omega$ sur M définie pour $y \in M, u \in T_y M$ par :

$$(f^*\omega)_y(u) := \omega_{f(y)}(d_y f(u))$$

est appelée tiré-en-arrière de ω par f .

On peut aussi donner une autre définition d'une surface de translation, la plus intuitive et celle qu'on utilisera ensuite, en termes de polygones. Pour l'introduire, on revient à la notion de triangulation. Les surfaces de translation ont la propriété suivante qui va nous être utile :

Lemme 3.1. *Toute surface de translation peut être triangulée.*

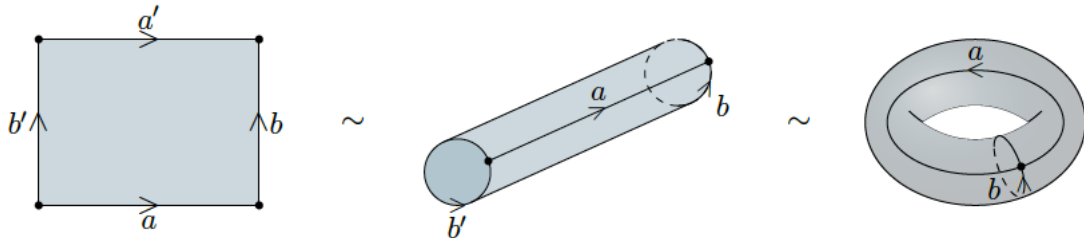
Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition 2.2. □

Définition 3.3. Une surface de translation est une union finie de polygones en \mathbb{C} , avec le choix d'appariement de côtés opposés parallèles. Deux de ces collections de polygones sont considérées comme la même surface de translation si l'une peut être coupée en morceaux le long de lignes droites et que ces morceaux peuvent être translatés et recollés pour former l'autre collection de polygones. Lorsqu'un polygone est coupé en deux, les deux nouvelles composantes doivent être appariées, et deux polygones peuvent être collés ensemble le long d'une paire d'arêtes seulement si ces arêtes sont appariées.

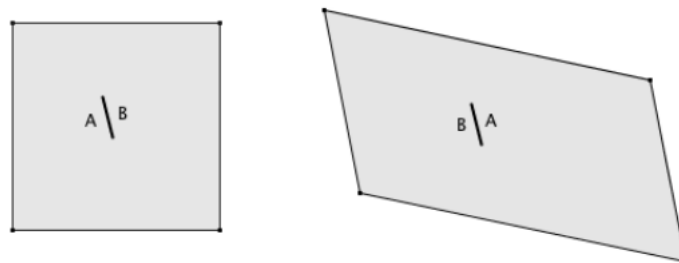
Cette définition est équivalente à la deuxième car le lemme dit que chaque surface de translation peut être triangulée. Si on coupe la triangulation en chaque segment de ligne droite (au sens géodésique, ce que l'on appelle plus loin connexion en selle) allant d'une singularité à une autre, sans aucune singularité à l'intérieur du segment, on obtient une collection de polygones avec une identification entre les arêtes.

De l'autre côté, si on a une collection des polygones comme dans la définition 3.4, alors les paires d'arêtes sont identifiées par translations. Dans l'intérieur de chaque polygone la coordonnée z de \mathbb{C} peut être utilisée (le polygone étant dans \mathbb{C}). Après avoir identifié des paires d'arêtes, certains des sommets deviendront des points de singularités. Le point principal est que l'angle total autour de ces singularités est un multiple entier de 2π .

Exemple 3.1. *Le tore $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$ est une surface de translation.*



Exemple 3.2 (Le tore fendu). *Pour construire le tore fendu, qui est une surface de translation un peu particulière que l'on évoquera plus tard, on démarre avec deux surfaces de translation de genre 1 puis on identifie les côtés des segments que l'on y a "découpés" comme dans la figure suivante :*



3.1.2 • GENRE D'UNE SURFACE DE TRANSLATION

Calculer le genre d'une telle surface peut se faire aisément avec la formule de Riemann-Hurwitz et la définition à l'aide de polygones. Connaître l'ordre d'annulation en un zéro x de la différentielle ω associée à la surface X consiste à tourner autour de x et de compter le nombre de tours. Il sera de la forme $2\pi(\kappa + 1)$, avec κ entier positif qui n'est autre que l'ordre de ce zéro.

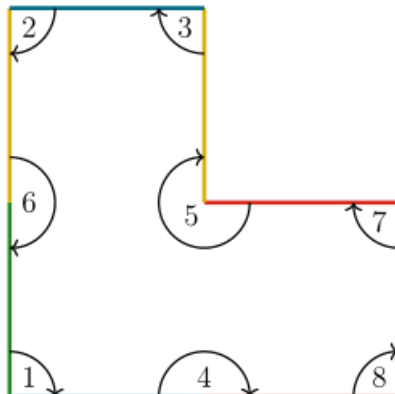


FIGURE 2 – Illustration de ce principe : On a ici un seul zéro de la différentielle, car dans ce cas particulier tous les sommets sont équivalents. On compte un angle de 6π : on a donc un seul zéro d'ordre 2, et le genre vérifie $2g - 2 = 2$ soit $g = 2$.

3.1.3 • BILLARDS

Une des motivations originales à l'introduction de la notion de surfaces de translation est l'étude de *billards rationnels*. Pour les introduire, commençons par nous donner un polygone P dans \mathbb{C} dont tous les angles sont commensurables avec π (i.e en rapport rationnel avec π). Soit H le sous-groupe de $O(2)$ engendré par les réflexions par les arêtes du polygone P (on remarque que c'est un sous-groupe fini). On considère l'ensemble $\{hP | h \in H\}$ où hP est éventuellement translaté de sorte que l'ensemble ne contienne que des polygones disjoints. On identifie qui plus est les arêtes par paires : si $h'P$ est issue de la réflexion de hP par une arête de hP , cette arête est identifiée à l'arête correspondante de $h'P$.

Exemple 3.3. Les deux figures suivantes sont des exemples de la construction de billards décrite dans le paragraphe précédent appliquée à un carré et à un triangle rectangle de plus petit angle $\pi/8$:

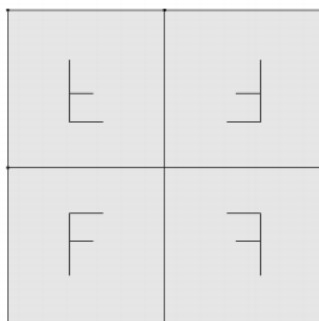
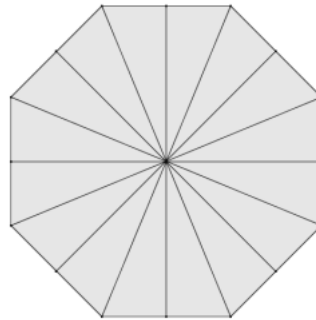


FIGURE 3 – Le carré en bas à gauche a été décoré de la lettre F pour illustrer la manière dont opèrent les réflexions.



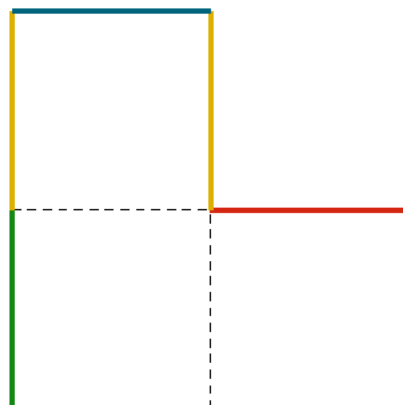
3.2 SURFACES À PETITS CARREAUX

3.2.1 • DÉFINITIONS

Tout comme dans la section précédente, il va exister plusieurs approches à la notion de surface à petits carreaux. Encore une fois, cela va permettre dans la suite d'utiliser un large panel d'outils mathématiques pour étudier ces surfaces. Commençons par une définition intuitive qui fait écho à la dernière définition donnée d'une surface de translation.

Définition 3.4. Une surface à petits carreaux est une surface de Riemann obtenue à partir d'une collection finie de carrés unitaires de \mathbb{R}^2 après l'identification des paires de côtés parallèles «opposés» par translations.

Exemple 3.4. La figure ci-dessous est un exemple facile qui permet de se figurer la définition précédente. Les côtés identifiés ont les mêmes couleurs dans le dessin.

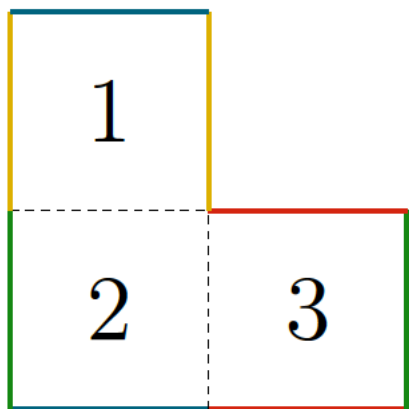


Cette définition a le mérite de bien se prêter à la visualisation. Néanmoins, nous utiliserons plus souvent les deux définitions suivantes :

Définition 3.5. Une surface à petits carreaux est une paire de permutations $(d, s) \in S_n \times S_n$ (d pour "à droite" et s pour "au-dessus") agissant transitivement (pour obtenir la connexité) sur $\{1, \dots, n\}$.

Comme on peut numéroté les carrés de plusieurs façons différentes, deux paires (d, s) et (d_0, s_0) génèrent la même surface si et seulement s'il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $(d_0, s_0) = (\sigma d \sigma^{-1}, \sigma s \sigma^{-1})$.

Exemple 3.5. Avec l'exemple précédent, repris ci-dessous, le carré à droite de 1 est lui-même, et le carré au-dessus est 2. C'est-à-dire que $d(1) = 1$ et $s(1) = 2$. Pareillement, $d(2) = 3$, $s(2) = 1$, $d(3) = 2$ et $s(3) = 3$.



On peut également définir ces surfaces à l'aide des revêtements adaptés.

Définition 3.6. On appelle *revêtement de translation* entre deux surfaces de translation (X, ω) et (Y, ω') un revêtement ramifié $p : X \rightarrow Y$ tel que $p^* \omega' = \omega$.

Définition 3.7. Une surface à petits carreaux est un (l'image d'un) revêtement de translation de $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i])$ avec un seul point de branchement : l'origine du tore.

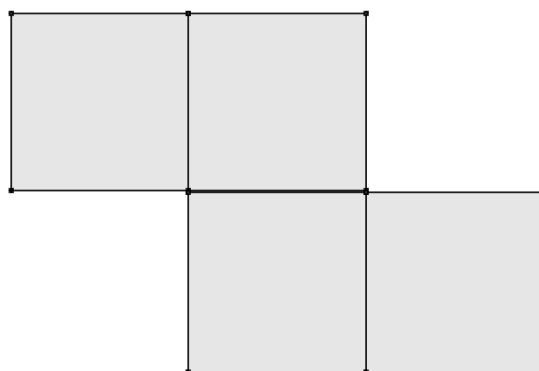


FIGURE 4 – Une surface à petits carreaux de genre 2 et avec 2 singularités coniques. Les côtés opposés qui ne sont pas communs à deux carrés sont identifiés.

Sur l'exemple mentionné plus haut, tous les sommets ne sont pas identifiés comme dans le cas du tore. On peut avoir des surfaces à petits carreaux -donc, a fortiori, de translation- avec autant de singularités que l'on souhaite, pourvu que la formule de Riemann-Hurwitz soit satisfaite.

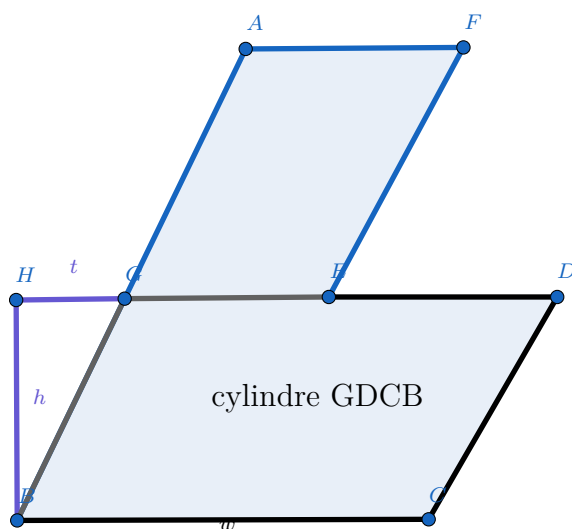


FIGURE 5 – Un cylindre dans une surface de translation

Définition 3.8. Une connexion en selle est une géodésique -comprendre un segment tracé sur les polygones définissant la surface- liant deux zéros de la différentielle. L'intégrale de la forme différentielle ω le long d'une connexion en selle est appelée un *vecteur de connexion*. On définit alors le *réseau des périodes* de ω , noté $\Lambda(\omega)$, comme étant le réseau de \mathbb{C} engendré par les vecteurs de connexion.

Définition 3.9. Un cylindre est une collection maximale de connexions en selle dans (X, ω) . On introduit son twist t , sa hauteur h et sa largeur w comme sur la figure 5.

On a alors des résultats permettant de caractériser les surfaces à petits carreaux par rapport aux surfaces de translation :

Lemme 3.2. Une surface de translation (X, ω) est à petits carreaux si et seulement si $\Lambda(\omega)$ est un sous-réseau de $\mathbb{Z}[i]$ de rang 2. De plus, si le nombre de carreaux n de X est premier et que le genre g est supérieur ou égal à 2, alors $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}[i]$.

Dans le cas où $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}[i]$, on dit que la surface est *primitive*. Cette notion sera primordiale dans la suite.

Démonstration. Pour la première partie du lemme, il suffit de montrer que l'on a un revêtement de translation du tore plat si $\Lambda(\omega)$ est un sous-réseau de $\mathbb{Z}[i]$ de rang 2. Quitte à composer avec le revêtement $\mathbb{R}^2/\Lambda(\omega) \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, on peut supposer $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}^2$. Soit alors, avec $z_0 \in X$ un zéro de ω ,

$$f : z \in (X, \omega) \mapsto \int_{z_0}^z \omega \mod \mathbb{Z}^2 \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

Cette fonction est bien définie puisque ω est holomorphe, et f l'est donc aussi. De plus, elle est surjective, donc c'est un revêtement ; et les zéros de ω sont envoyés par f à l'origine par hypothèse. Enfin, si $P \neq 0$ sur le tore à l'arrivée, ce n'est pas un point de branchement car $P = f(z)$ pour un $z \in X$ non zéro de ω . Donc f est un revêtement de translation du tore plat : X est bien à petits carreaux. Pour la deuxième partie du lemme, on remarque que n , nombre de carreaux dans X , s'écrit $n = d \times [\Lambda(\omega) : \mathbb{Z}^2]$ avec d le degré du revêtement de translation, et l'autre terme du produit l'indice de $\Lambda(\omega)$ comme sous-réseau de \mathbb{Z}^2 . Cette identité se comprend ainsi : il y a d pré-images pour chaque $P \neq 0$ dans le tore plat, et chacun de ces points est contenu dans un unique "carré étiré" de X , contenant $[\Lambda(\omega) : \mathbb{Z}^2]$ petits carrés de X . Puisque n est premier, si on a $d \geq 2$, ce qui est le cas si X est de genre $g \geq 2$, on en déduit que $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}^2$. \square

Dans la figure 7, on a tracé 3 connexions en selle. En effet, A, B, C, D sont tous identifiés au même point, unique zéro de la différentielle abélienne ω . Les vecteurs de connexion associés se calculent en calculant l'intégrale de la forme différentielle (ici, dz) le long des connexions. Le long de c_1 on trouve $\int_{c_1} dz = i$, puis on trouve 1 pour c_2 et enfin $1 + i$ pour c_3 . On en déduit que $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}[i]$ comme prévu.

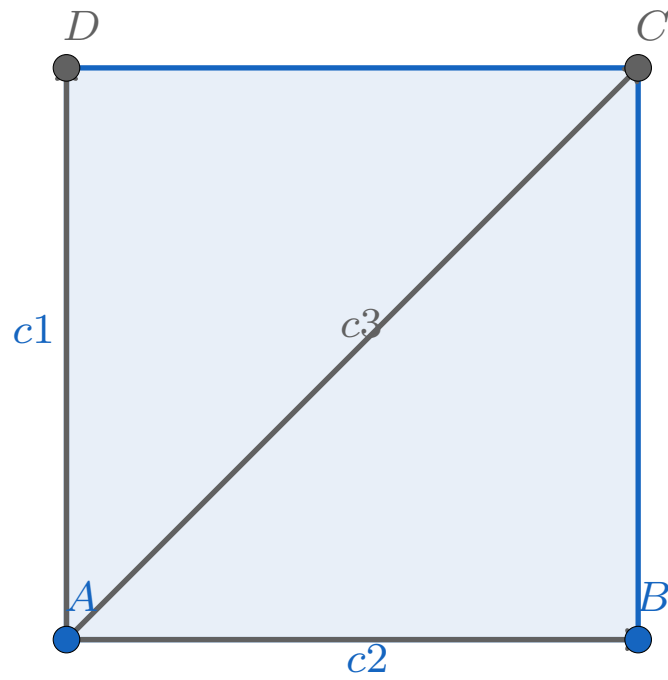


FIGURE 6 – Tore plat et trois connexions en selle

4

THÉORIE DE TEICHMÜLLER

4.1 ESPACES DE TEICHMÜLLER ET ESPACES DE MODULES

La théorie de Teichmüller est, de manière générale, l'étude des collections de surfaces de Riemann. Étant donné un genre g , on aimerait paramétrer les différentes structures complexes pouvant être placées sur une surface topologique de genre g . L'espace de modules de surfaces de genre g , \mathcal{M}_g , est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence biholomorphe de surfaces de genre g . Nous allons le formaliser.

Soit S une surface de genre g . On considère les paires (X, f) , où X est une surface de Riemann de genre g et $f : S \rightarrow X$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation. On dit qu'un difféomorphisme $f : S \rightarrow X$ préservant l'orientation est un marquage et que (X, f) est une surface de Riemann marquée. Deux paires (X, f) et (Y, g) sont équivalents si $g \circ f^{-1}$ est homotope à un biholomorphisme. On note par $[X, f]$ la classe d'équivalence de (X, f) .

Définition 4.1 (Espace de Teichmüller). Soit S une surface de genre g . On définit l'espace de Teichmüller de S comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des surfaces de Riemann marquées (X, f) , où $f : S \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. On note cet espace $\mathcal{T}(S)$.

Dans la définition ci-dessus, $\mathcal{T}(S)$ ne dépend que de g .

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ est par ailleurs doté d'une action canonique. Considérons le groupe $Mod(S)$, appelé en anglais « Mapping Class Group », constitué de tous les difféomorphismes préservant l'orientation modulo homotopie. Un élément $[h] \in Mod(S)$ agit sur $\mathcal{T}(S)$ par $[h].[X, f] = [X, f \circ h^{-1}]$. Puisque deux éléments de $\mathcal{T}(S)$ sont dans la même orbite de $Mod(S)$ exactement quand leurs marquages sont équivalents, deux éléments de l'espace des orbites $\mathcal{T}(S)/Mod(S)$ sont égaux si et seulement si les surfaces de Riemann sont biholomorphes.

Définition 4.2. On définit \mathcal{M}_g l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g comme étant égal à $\mathcal{T}(S)/Mod(S)$ où S une surface de genre g .

Proposition 4.1. Les deux espaces $\mathcal{T}(S)$ et \mathcal{M}_g peuvent être vus comme ouverts de \mathbb{C}^{3g-3} , pour $g > 1$. De plus, $\mathcal{T}(S)$ a une structure de variété complexe de dimension $3g - 3$. D'autre part, \mathcal{M}_g n'est pas une variété car il présente des singularités.

Dorénavant on étudiera une variante de l'espace des modules des surfaces compactes. Au lieu de considérer les paires (X, f) , où f est un difféomorphisme préservant l'orientation, considérons les paires (X, ω) , où ω est une différentielle abélienne.

On note \mathcal{L}_g l'ensemble des paires (X, ω) où X désigne une surface de Riemann de genre g et ω une différentielle abélienne sur X . Si S est une surface de genre g , le groupe $Mod(S)$ agit

sur \mathcal{L}_g de façon naturelle. Un élément $[h] \in \text{Mod}(S)$ agit sur une surface de Riemann X de la façon suivante : si $\{\phi_\alpha | \alpha \in A\}$ est l'atlas maximal sur X , on définit $[h].X$ comme la surface de Riemann qui a la même surface topologique sous-jacente mais $\{h \circ \phi_\alpha | \alpha \in A\}$ comme atlas. Enfin, l'action de $\text{Mod}(S)$ sur \mathcal{L}_g est donnée, si $h^*\omega' = \omega$, par

$$[h].(X, \omega) := ([h].X, \omega')$$

On définit ainsi l'espace de modules des différentielles abéliennes.

Définition 4.3. L'espace de modules des différentielles abéliennes est l'espace quotient $\mathcal{L}_g/\text{Mod}(S)$. On le dénote par \mathcal{H}_g .

Étant donné une différentielle abélienne ω sur une surface de Riemann X , la formule de Riemann-Hurwitz implique que la somme des ordres des zéros de ω vaut $2g - 2$. En écrivant ces valeurs par ordre décroissant, on obtient une liste $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ des ordres des zéros de ω . Alors pour chaque liste $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ telle que $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$, on définit $\mathcal{L}(\kappa)$ comme étant le sous-ensemble de \mathcal{L}_g consistant en toutes les différentielles abéliennes dont la liste des ordres des zéros coïncide avec κ . On peut montrer que si h est un difféomorphisme préservant l'orientation, alors $h^*\omega$ et ω ont les mêmes ordres des zéros. Cela nous permet de passer au quotient.

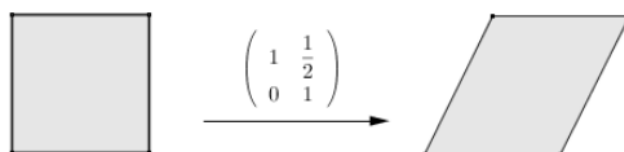
Définition 4.4. Soit $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ une liste telle que $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2$. On dénote l'espace des orbites $\mathcal{L}(\kappa)/\text{Mod}(S)$ par $\mathcal{H}(\kappa)$. On dit que les sous-ensembles $\mathcal{H}(\kappa)$ sont des strates de l'espace de modules des différentielles abéliennes.

$$\text{Par définition, } \mathcal{H}_g = \coprod_{\kappa_1 + \dots + \kappa_n = 2g - 2} \mathcal{H}(\kappa_1, \dots, \kappa_n) .$$

4.2 DES ASPECTS DYNAMIQUES

4.2.1 • LES ACTIONS DU GROUPE $GL_2^+(\mathbb{R})$ ET DE CERTAINS SOUS-GROUPES

Il y a une action canonique de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur chaque strate. Cette action est induite de l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 . Si $A \in GL_2^+(\mathbb{R})$ et (X, ω) une surface de translation vue comme une collection de polygones, alors $A.(X, \omega)$ est la surface de translation obtenue en faisant agir A sur les polygones définissant (X, ω) comme dans l'exemple de la figure suivante.



Plus formellement, si (U_i, f_i) définit la structure de translation sur X - c'est-à-dire, si les U_i forment un atlas de X et les f_i sont les formes locales de ω dans les U_i - alors si ω' est la forme différentielle ayant pour expression locale les $A \circ f_i$,

$$A \cdot (X, \omega) := (A \cdot X, \omega')$$

On s'intéresse dans la suite à l'action de $SL_2(\mathbb{R})$, puisque ses éléments préservent l'aire de la surface, donc le nombre de carreaux. Restreignons encore plus l'action avec le lemme suivant.

Lemme 4.1. *La $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbite d'une surface à n petits carreaux primitive est l'ensemble des surfaces à n petits carreaux primitives de sa $SL_2(\mathbb{R})$ - orbite.*

Démonstration. $SL_2(\mathbb{Z})$ préserve $\mathbb{Z}^2 = \Lambda(\omega)$ si (X, ω) est primitive à petits carreaux. Pour l'autre inclusion, si $(Y, \omega') = A \cdot (X, \omega)$ est primitive à n petits carreaux pour un certain $A \in SL_2(\mathbb{R})$, alors $\Lambda(\omega') = A \cdot \Lambda(\omega)$ implique que A préserve \mathbb{Z}^2 , donc que $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. \square

Introduisons alors le terme privilégié pour qualifier ces orbites :

Définition 4.5. Un disque de Teichmüller est une orbite fermée de $SL_2(\mathbb{R})$ sur \mathcal{H}_g .

Le lemme ci-dessus implique que, pour les surfaces primitives à petits carreaux, il est préférable d'étudier les $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites plutôt que les disques de Teichmüller. Bien entendu, à cet effet, on étudiera les actions des générateurs standards de $SL_2(\mathbb{Z})$, que l'on notera ici

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

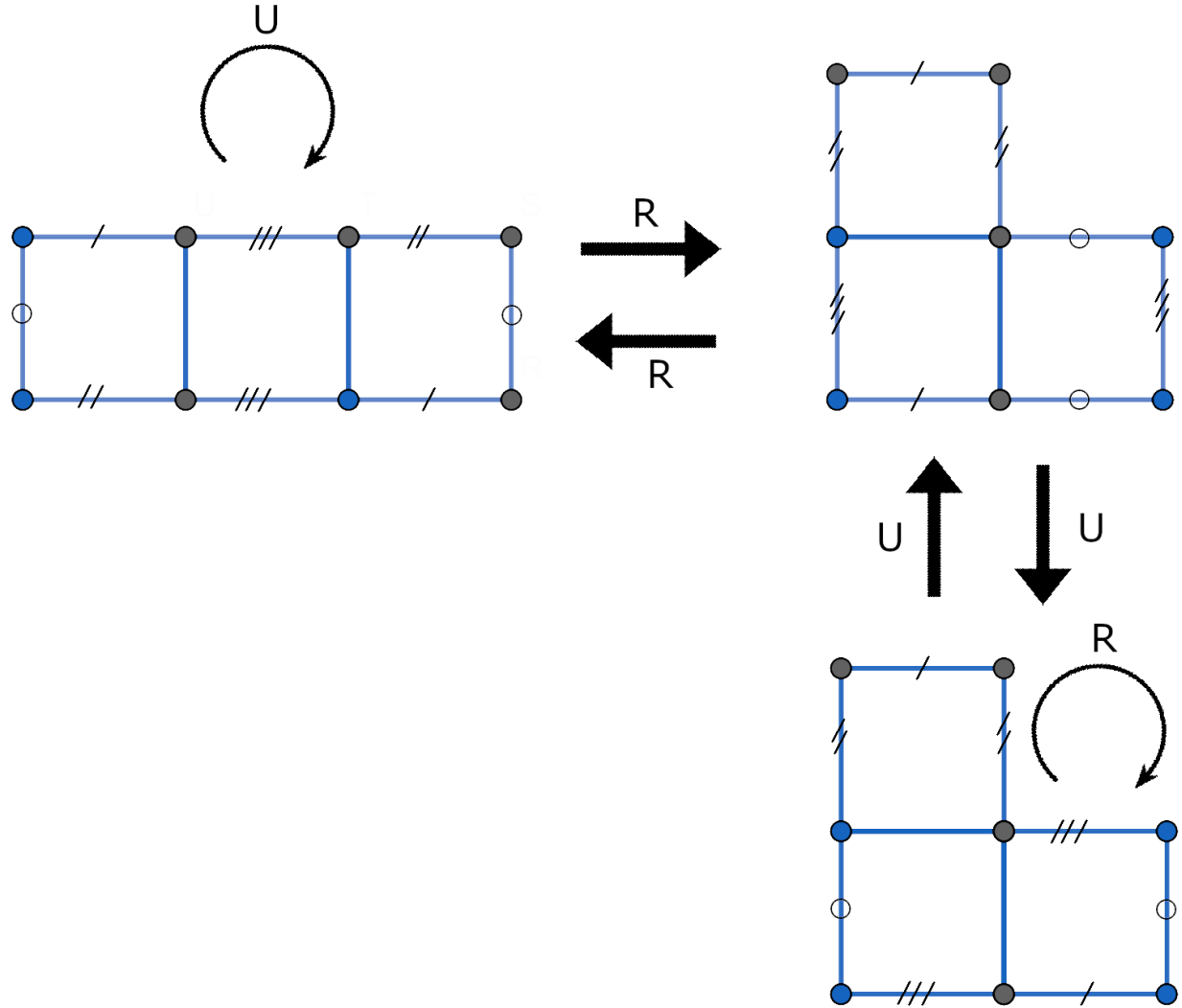


FIGURE 7 – Un exemple d'orbite simple d'une surface à petits carreaux

Un objet algébrique de premier plan associé à une surface de translation est son *groupe de Veech* :

Définition 4.6. Le groupe de Veech de la surface de translation (X, ω) est le stabilisateur de (X, ω) pour l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'espace de modules des différentielles abéliennes \mathcal{H}_g . On le note $V(X, \omega)$.

Proposition 4.2. Le stabilisateur de $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$ sous l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ est $SL_2(\mathbb{Z})$. Le stabilisateur d'une surface à petits carreaux est un sous-groupe de $GL_2^+(\mathbb{R})$ d'indice fini.

Dans la suite, nous allons travailler avec une définition un peu simplifiée des disques de Teichmüller pour faciliter l'intuition. Pour plus de détails cf.[4]

4.2.2 • L'INVOLUTION HYPERELLIPTIQUE

Nous allons introduire également la notion d'*involution hyperelliptique* dans la mesure où elle sera utilisée plus tard et sera le prétexte entre temps à de belles illustrations.

Définition 4.7. Une involution hyperelliptique sur une surface de Riemann X est une involution holomorphe avec $2g + 2$ points fixes (on les appelle les *points de Weierstrass*). C'est le plus grand nombre de points fixes possible pour une involution non triviale : il y a le plus de symétries possible.

Sur le tore plat $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$, cette involution est simplement $-Id$, et ses $2 \times 1 + 2 = 4$ points fixes sont $\{0, i/2, 1/2, (1+i)/2\}$.

Théorème 4.1. *Toute surface de Riemann de genres 1 et 2 admet une involution hyperelliptique.*

Ce résultat peut aider dans l'étude du nombre de surfaces à petits carreaux sur une strate, ce qu'on évoque ailleurs. Donnons une petite illustration d'utilisation de cet objet :

Supposons que l'on dispose d'un parallélogramme dont les angles sont commensurables avec π et dont les côtés sont identifiés de sorte que l'on obtienne une surface de translation T . Un vieil exercice d'olympiade russe propose de déterminer quel est le nombre de points minimal à placer sur ce parallélogramme pour qu'il n'existe pas de chemin fermé $\gamma : S^1 \rightarrow T$ sur cette surface qui ne croise pas ces points. D'après le théorème précédent, on dispose d'une involution hyperelliptique i sur T avec $i(\gamma) = \gamma$ or, il y a forcément un point fixé par i sur le cercle, d'où le nombre de point minimal étant le nombre de point fixes de i , à savoir : 4.

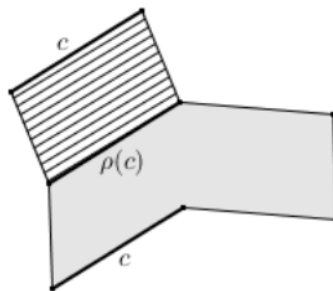
C'est ce même genre d'argument que donne le théorème précédent et qui assure aussi qu'il ne peut y avoir plus de trois cylindres distincts sur une surface de genre 2.

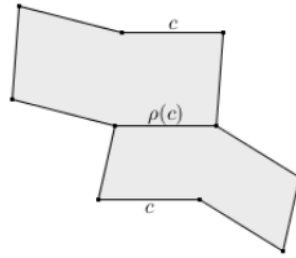
Théorème 4.2. *Toute surface de translation dans $\mathcal{H}(2)$ peut être obtenue en recollant un cylindre et un tore fendu comme dans la figure suivante. Toute surface de translation dans $\mathcal{H}(1,1)$ est obtenue à partir d'un tore fendu comme dans la figure qui suit.*

La démonstration de ce théorème se base sur le petit lemme suivant :

Lemme 4.2. *Pour toute surface de translation de genre 2, il existe au moins une géodésique c , liant une singularité à une singularité, qui ne soit pas fixée par l'involution hyperelliptique ρ .*

Démonstration. Commençons par trianguler la surface. Si ρ fixait toutes les connexions en selle de cette triangulation, alors elle enverrait chaque triangle sur lui-même, or, aucun triangle n'est symétrique par la rotation d'angle π qu'imposerait ρ , absurde. \square





4.2.3 • LES FLOTS

Une notion importante, notamment reliée aux billards, est celle de flot sur les surfaces de translation.

Définition 4.8. On note $F_\theta : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto F_\theta(t) \in X$ le flot de direction θ sur la surface de translation (X, ω) . Intuitivement, le paramètre θ donne la direction initiale du flot, qui a pour origine un point sur la surface qui n'est pas une singularité, et la variable t est celle du temps, la vitesse étant unitaire.

On peut obtenir pour tout $t > 0$ une application $\phi_t^\theta : (X, \omega) \setminus B_t \rightarrow (X, \omega)$, où B_t est l'ensemble des points dont le flot de direction θ rencontrent une singularité au bout d'un temps au plus t . B_t est une union de segments tels que ceux de la figure suivante.

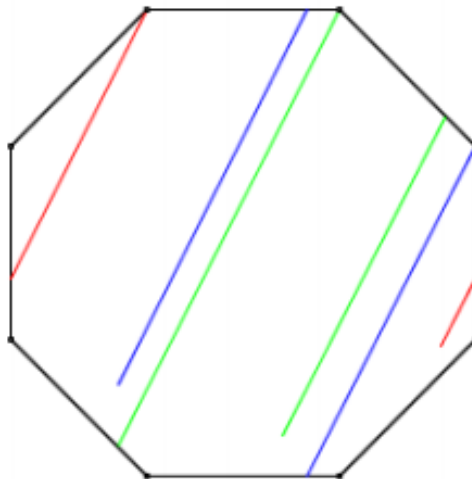
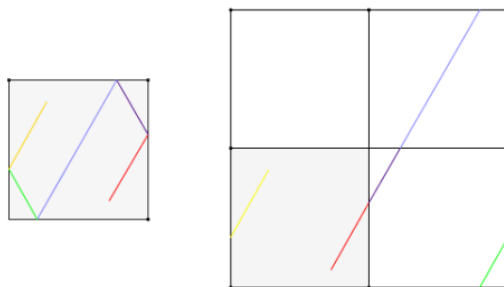


FIGURE 8 – Cette figure illustre trois flots de même direction rencontrant des singularités en temps fini.

En notant $B = \cup_t B_t$, (qui est dense mais de mesure nulle), on préfère parfois travailler avec des *flots de lignes droites* définis pour tout $t > 0$ en prenant des points de départs dans $(X, \omega) \setminus B$.

Une des raisons qui a initialement rendu les flots intéressants à introduire est l'étude des billards rationnels. En effet, de la même manière qu'on peut "déplier" un polygone en billard, les trajectoires sur les billards s'y "déplient" aussi en flots comme dans la figure suivante :



Définition 4.9. Un flot $\mathbb{R}^+ \rightarrow X$ est dit *minimal* si son image est dense dans X .

On peut d'ores et déjà évoquer quelques propriétés intéressantes avec les notions introduites, comme par exemple :

Proposition 4.3. *Après avoir retiré toute connexion en selle dans une direction donnée sur une surface (X, ω) , chaque composante connexe obtenue définie soit un cylindre soit un flot minimal dans cette direction.*

Comme l'ensemble des connexions en selle est dénombrable, on déduit de cette proposition cette autre proposition intéressante :

Proposition 4.4. *Sur toute surface de translation (X, ω) , le flot est minimal hormis dans un ensemble dénombrable de directions.*

Toutes les notions introduites vont constituer le socle de compréhension de la démonstration du résultat suivant (théorème 4.3) obtenu par P.Hubert et S.Lelièvre dans [3]. Ce résultat est le résultat central de ce PSC dans l'étude de l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}(2)$.

Théorème 4.3 (Hubert-Lelièvre, 2006). *Pour tout nombre premier $n \geq 5$, les $SL_2(\mathbb{R})$ -orbites de surfaces à n petits carreaux forment deux disques de Teichmüller.*

4.3 PRÉLIMINAIRES À LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

La démonstration du théorème repose entre autres sur un invariant de la $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbite d'une surface primitive à petits carreaux : le nombre de points de Weierstrass entiers sur la surface, entier signifiant "sur un sommet des carrés formant la surface". On appelle ce nombre $\mathcal{W}(X, \omega)$ si (X, ω) est la surface en question.

Lemme 4.3. *Si (X, ω) est primitive, $\mathcal{W}(X, \omega)$ est invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Ce lemme est immédiat, car dans le cas où X est primitive, $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}^2$ et $SL_2(\mathbb{Z})$ préserve \mathbb{Z}^2 .

Définition 4.10. Dans le cadre des surfaces à petits carreaux, on définit les *pointes* de la surface à petits carreaux (X, ω) comme ses U -orbites dans $SL_2(\mathbb{Z}) \cdot (X, \omega)$

Nous allons maintenant exposer une méthode pour calculer $\mathcal{W}(X, \omega)$.

4.3.1 • SUR LA DÉCOMPOSITION EN CYLINDRES DANS $\mathcal{H}(2)$

Remarquons tout d'abord qu'on ne peut plus utiliser notre représentation usuelle des surfaces de translation pour celles qui n'ont qu'un cylindre : en effet, avec cette représentation, on ne trouve que des surfaces de genre 1 biholomorphes au tore plat ! Une bonne façon de les représenter consiste à lier les connexions en selle du côté haut du cylindre à celles du bas dans l'ordre cyclique inverse.

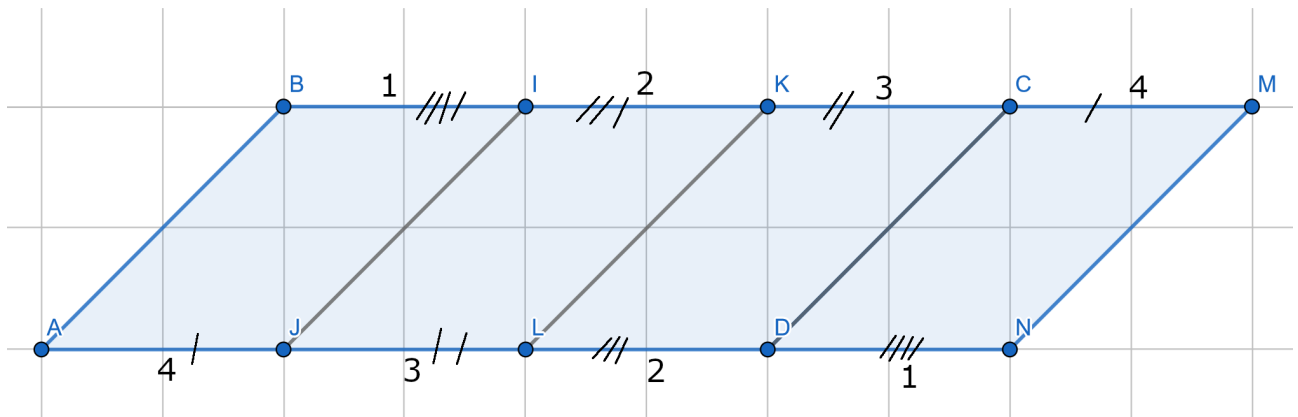


FIGURE 9 – Voici une surface à un cylindre, appartenant à $\mathcal{H}(1, 1)$

On peut alors vérifier qu'une surface de $\mathcal{H}(2)$ a nécessairement un nombre impair de connexions en selle horizontales. En effet, sinon, on observerait une autre singularité de la différentielle abélienne lorsqu'on tourne autour d'une singularité, puisqu'on ne tournerait pas autour de chaque sommet - on le vérifie aisément sur la figure 10 plus haut, cette surface a plus d'une singularité conique.

De cette conclusion, on déduit qu'il n'y a que 3 connexions en selle : un autre nombre donnerait une singularité d'ordre différent de 2. Ainsi, toutes les surfaces à un cylindre de $\mathcal{H}(2)$ sont similaires à la surface suivante :

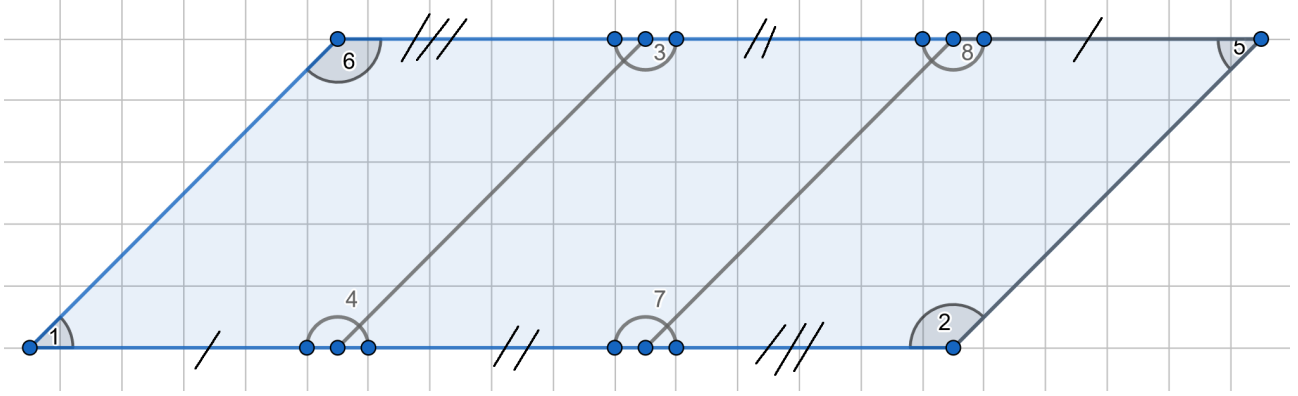


FIGURE 10 – Une surface de $\mathcal{H}(2)$, dont on a tourné autour de la singularité : on trouve bien un angle conique de 6π

On observe que pour des surfaces primitives à un cylindre, la hauteur du cylindre est de 1, donc la somme des longueurs des connexions horizontales vaut le nombre de carrés.

Pour les surfaces à 2 cylindres, un exemple a déjà été donné plus haut avec la surface "en L". On ne change pas leur représentation.

Pour la suite, on ajoutera une remarque importante sur les surfaces à 2 cylindres.

Lemme 4.4. Soit X une surface à n carreaux de $\mathcal{H}(2)$ primitive et à deux cylindres avec des paramètres h_i , w_i , et t_i ($i = 1, 2$). Alors le cardinal de sa U -orbite (aussi appelé la largeur de sa pointe) est :

$$lp(X) = \frac{w_1}{w_1 \wedge h_1} \vee \frac{w_2}{w_2 \wedge h_2} (= \frac{w_1}{w_1 \wedge h_1} \times \frac{w_2}{w_2 \wedge h_2} \text{ pour } n \text{ premier})$$

La surface X' avec $h'_i = h_i$, $w'_i = x_i$, et $t'_i = t_i \bmod(w_i \wedge h_i)$ est une représentante "canonique" de la U -orbite de X . Chaque surface a une unique représentante de la sorte avec $0 \leq t < w_i \wedge h_i$.

Démonstration. On note que $U^k.X$ a les paramètres w_i , h_i , et $t_i + kh_i \bmod(w_i)$. Pour que $U^k.X$ coïncide avec X il faut donc avoir k multiple de $\frac{w_i}{w_i \wedge h_i}$ ($i = 1, 2$). La largeur de la pointe de X est le plus petit entier strictement positif k vérifiant cette condition, à savoir : $lp(X) = \frac{w_1}{w_1 \wedge h_1} \vee \frac{w_2}{w_2 \wedge h_2}$. La seconde partie du lemme est une application directe du théorème des restes chinois. \square

4.3.2 • LIEN AVEC L'INVOLUTION HYPERELLIPTIQUE

Analysons l'effet de l'involution sur un cylindre qui consiste à le renverser, comme montré plus bas.

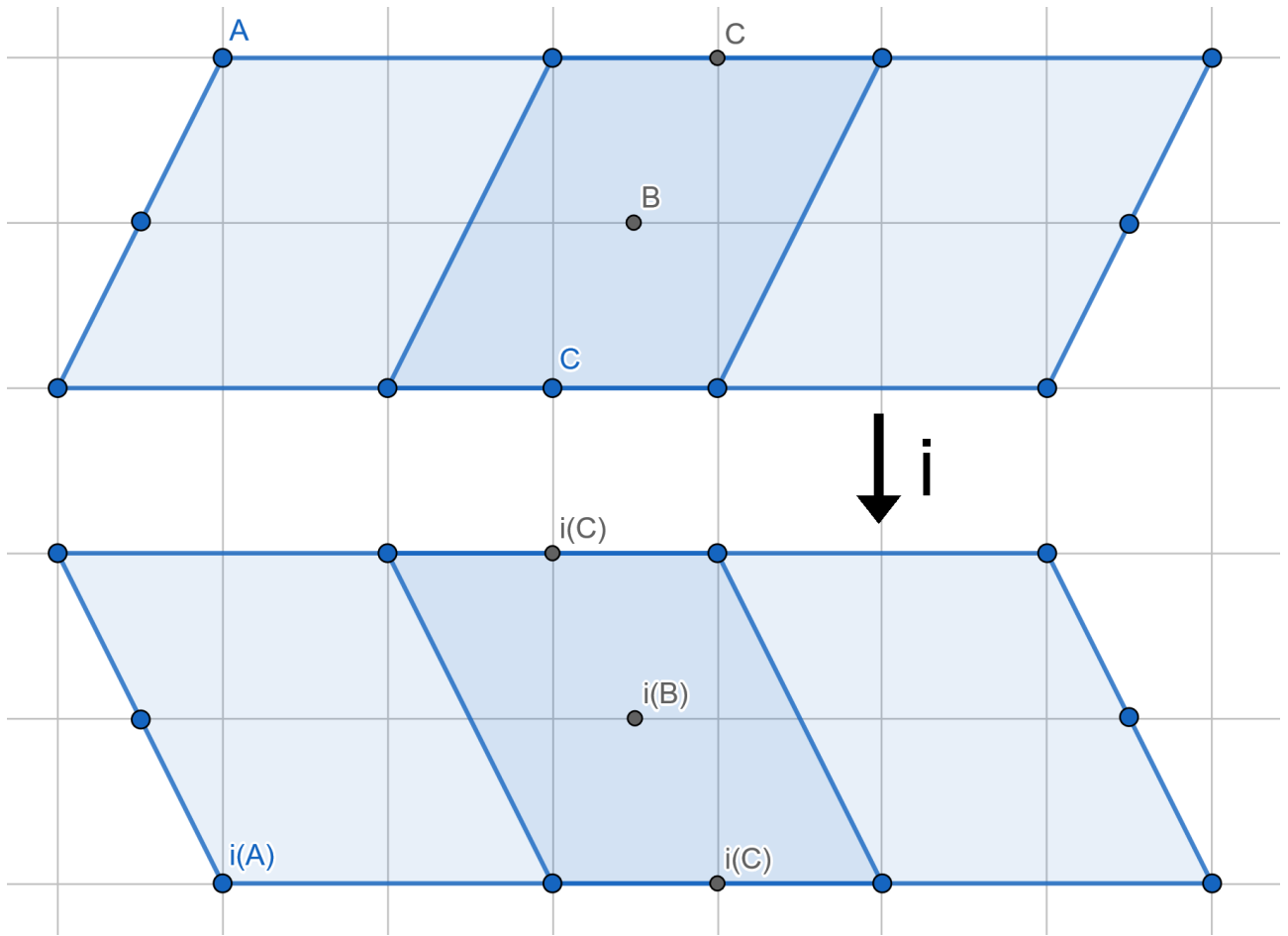


FIGURE 11 – Application de l'involution $(x, y) \mapsto (x, -y)$ sur une surface de $\mathcal{H}(2)$ à un cylindre

On identifie alors facilement les points fixes de l'involution : hormis la singularité que l'on retrouve à chaque sommet, ce sont les milieux des connexions en selle horizontales (ici, il y en a 3), et il y a deux points antipodaux sur le cercle tracé sur le cylindre se trouvant à mi-hauteur de ce dernier, cercle qu'on appellera *cercle principal*. On en compte donc $1 + 3 + 2 = 6 = 2g + 2$, ce qui est le nombre maximal de points fixes pour une involution non triviale : notre involution est donc l'involution hyperelliptique. On en déduit la proposition en analysant le cas des surfaces à deux cylindres :

Proposition 4.5. *L'involution hyperelliptique sur les surfaces de $\mathcal{H}(2)$ renverse les cylindres composant les surfaces. De plus, les points de Weierstrass sont :*

1. *La singularité*
2. *Sur le cercle principal de chaque cylindre : il y a deux points de Weierstrass antipodaux*
3. *Les milieux des connexions en selle qui bordent un cylindre à la fois par le haut et par le bas*

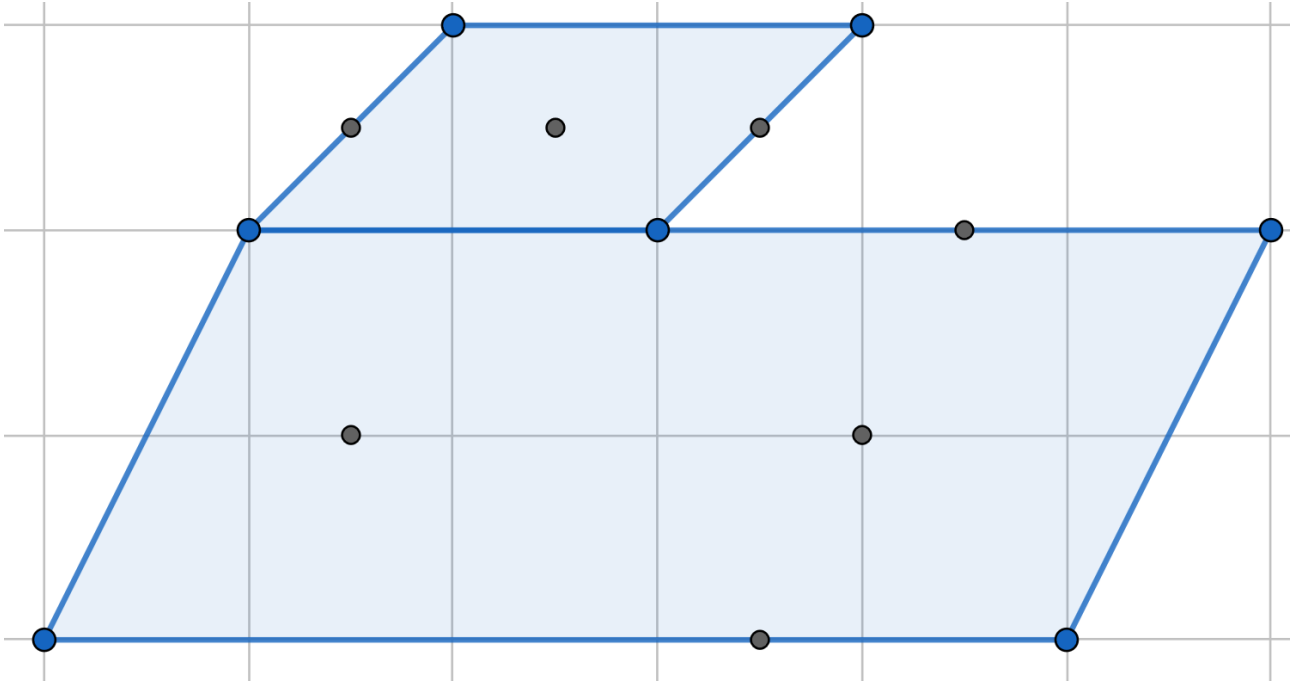


FIGURE 12 – Points de Weierstrass, marqués en noir, sauf la singularité, sur une surface à deux cylindres. On remarque que tous les milieux de connexions en selle n'en sont pas

Il s'agit maintenant de compter les points entiers de Weierstrass pour calculer notre invariant. On se contente du cas à un cylindre, seul cas intéressant pour la preuve du théorème.

4.3.3 • CALCUL DE L'INVARIANT POUR LES SURFACES PRIMITIVES À UN CYLINDRE

On considère ici une surface à un cylindre de hauteur 1 avec un nombre impair de carreaux (la surface est primitive).

Les observations précédentes ont montré que les connexions en selle et le cercle principal sont envoyés sur eux-mêmes sous l'action de l'involution hyperelliptique, avec une orientation renversée. On peut alors en déduire les faits suivants :

- Si la longueur d'une connexion en selle est paire, alors son point milieu est un point entier de Weierstrass.
- La hauteur étant impaire, aucun des points de Weierstrass du cercle principal n'est entier.

Ainsi, puisque n est impair, les longueurs des 3 connexions en selle sont soit toutes impaires, soit l'une est impaire et les autres paires. Pour synthétiser :

Proposition 4.6. *Si toutes les longueurs des connexions en selle sont impaires, il y a 1 point entier de Weierstrass, c'est la singularité. Si deux d'elles sont paires, l'autre impaire, il y a 3 points entiers de Weierstrass. Pour $n \geq 5$, les deux cas se produisent.*

4.4 PREUVE DU THÉORÈME

Ayant acquis une meilleure compréhension des surfaces à petits carreaux de $\mathcal{H}(2)$ et de leur décomposition en cylindres, nous pouvons prouver le théorème qui énonce qu'il n'y a que 2 $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites pour les surfaces primitives à n petits carreaux. En particulier, les surfaces pour lesquelles n est premier correspondent à ce cas, mais ce ne sont pas les seules. Exposons le plan d'attaque, en détaillant les preuves lorsque cela paraît utile.

Nous exposons tout d'abord une réduction du problème aux orbites de surfaces à un cylindre.

Proposition 4.7. *Toute $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbite d'une surface à petits carreaux primitive de $\mathcal{H}(2)$ avec un nombre premier de carreaux contient une surface à un cylindre.*

Ce résultat nous permet donc de nous concentrer exclusivement sur ces dernières surfaces. Pour cela, nous devons disposer d'une façon adaptée pour les représenter.

Définition 4.11. La surface (a, b, c, t) pour a, b, c, t positifs tels que $a + b + c = n$, nombre de carreaux, est la surface à un cylindre dont les connexions en selle sont de longueur a, b, c dans l'ordre cyclique, le paramètre de twist valant t et la hauteur valant 1.

On peut omettre le paramètre de twist si on quotiente par $\langle U \rangle \subset SL_2(\mathbb{Z})$, comme montré plus loin. On appelle alors une surface (a, b, c) de type A si a, b, c sont impairs, et de type B si deux sont pairs et l'autre impair. Ces distinctions seront utiles dans la suite.

Pour démontrer la proposition 4.7, nous allons commencer par démontrer le lemme clé suivant.

Lemme 4.5. *Une surface à 2 cylindres de hauteur 2 qui a un nombre premier n de carreaux admet une direction à un cylindre.*

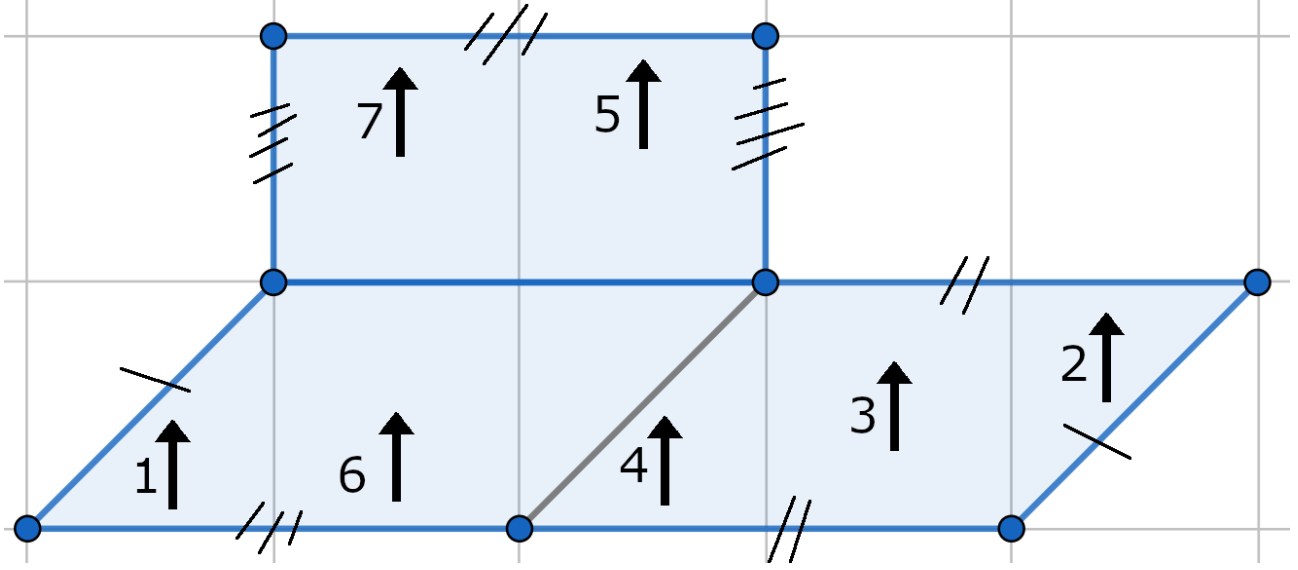


FIGURE 13 – Illustration du lemme : le flot vertical convient

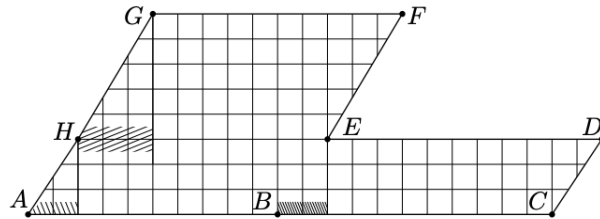
Démonstration. Suivons la figure ci-dessus pour construire notre preuve du lemme. Notons $h_i = 1, w_i, t_i$ respectivement la hauteur, la largeur et le twist du cylindre i , où 1 correspond au cylindre du bas. Pour nous ramener au cas où $t_1 = 1$ et $t_2 = 0$, on va itérer U sur la surface. En effet, la surface $S' = U^k \cdot S$ admet $h'_i = h_i = 1, w'_i = w_i, t'_i = t_i + k \pmod{w_i}$. Ici, $n = w_1 + w_2$ est premier, donc $w_1 \wedge w_2 = 1$: le théorème des restes chinois permet donc de trouver k tel que $S' = U^k \cdot S$ a $t'_1 = 1$ et $t'_2 = 0$. Ceci fait, il nous suffit de considérer le flot vertical dans $U^k \cdot S$: c'est notre direction à un cylindre. \square

Démonstration de la proposition 4.7. Soit X une surface à petits carreaux primitive de $\mathcal{H}(2)$ avec deux cylindres (si elle en a un il n'y a rien à montrer) et un nombre premier de carreaux. Nous allons montrer le résultat en procédant par récurrence sur la hauteur de la surface X : étant donnée une surface à deux cylindres, nous allons montrer que sa $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbite contient une surface de hauteur strictement inférieure à celle de X .

En faisant agir U on peut prendre la représentante "canonique" de X telle que définie dans le lemme 4.4, on va donc supposer $t_i < w_i$ ($i = 1, 2$).

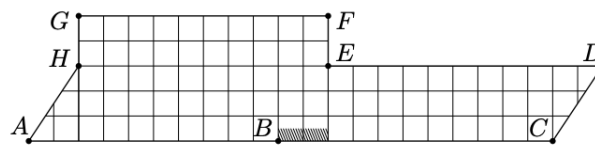
On va effectuer une disjonction du problème en quatre cas suivants quels twists sont nuls.

Cas 1 : Les deux twists sont non-nuls.



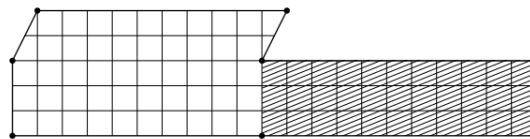
Appliquons R à X , si l'on obtient alors une surface à un cylindre, nous avons terminé, sinon, R étant une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ on obtient une surface avec deux cylindres qui sont les cylindres verticaux de X . Le cylindre vertical à droite de A aura une hauteur au plus égale à t_2 (l'indice 2 correspond au cylindre du bas et l'indice 1 à celui du haut), il en va de même pour le cylindre vertical à droite de B . Pour celui à droite de H , la hauteur sera au plus t_1 . Ainsi, la somme des hauteurs des deux cylindres est au plus égale à $t_1 + t_2 < h_1 + h_2$, ce qui donne le résultat voulu dans ce premier cas.

Cas 2 : Le twist du cylindre d'en haut est nul et celui du bas non.



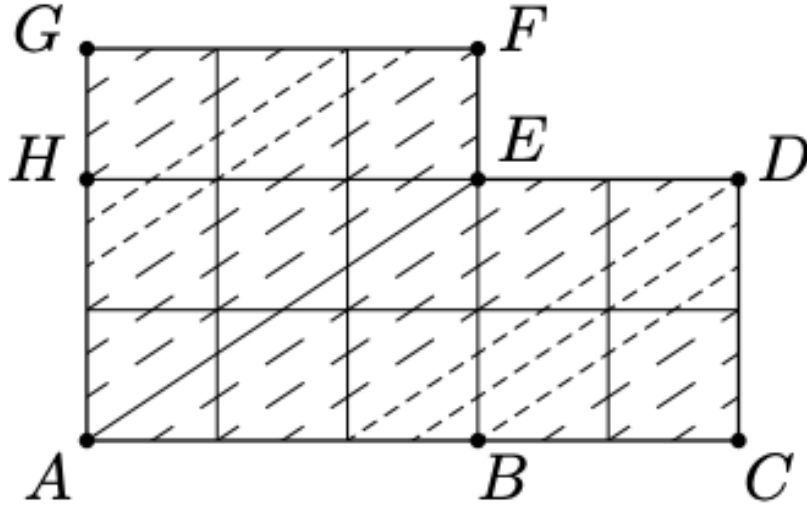
Dans ce cas, le même cylindre vertical est à la droite de A et H . Si la connexion en selle partant vers le bas en H se termine en B alors il n'y a qu'un seul cylindre vertical (un cylindre horizontal après l'action de R); sinon, la connexion en selle coupe nécessairement la partie hachée à droite de B , il y a donc au plus deux cylindres verticaux et la somme de leur hauteur est au plus t_2 qui est bien inférieur à h_2 .

Cas 3 : Le twist du cylindre d'en bas est nul et celui du haut non.



$R.X$ a deux cylindres : un cylindre en haut avec un twist nul (correspondant à la partie hachée dans la figure ci-dessus), et un cylindre en bas de hauteur au plus égale à $t_1 (< h_1)$. La surface dans la même U -orbite avec le plus petit twist positif a aussi un twist nul pour le cylindre du haut : si le twist du bas est également nul, on se réfère au cas 4, sinon, on se réfère au cas 2.

Cas 4 : Les deux twists sont nuls.



Dans ce cas on peut passer directement à une surface à un cylindre en prenant le cylindre défini par la collection des géodésiques régulières fermées dans la direction de la diagonale du rectangle de base de X (comme dans la figure ci-dessus). En effet, on peut aussi définir un cylindre comme une connexion maximale de géodésiques régulières fermées dans (X, ω) . \square

Il reste maintenant à lier les différentes surfaces à un cylindre entre elles : nous allons montrer que les $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites se décomposent en celles des surfaces de types A et B . Cela prouvera le théorème, puisque les surfaces A et B sont dans des orbites disjointes, car leur nombre de points entiers de Weierstrass sont différents.

La première étape consiste à prouver que toute surface à un cylindre peut se ramener à une surface de type $(1, a, b)$. Le lemme suivant est la clé du résultat.

Lemme 4.6. *Toute surface primitive à un cylindre possède dans son orbite une surface de type $(\delta, k\delta, \gamma)$, où $\delta | a \wedge b$.*

En effet, les longueurs des connexions en selle horizontales sont premières entre elles, car la surface est primitive à un cylindre : $\Lambda(\omega) = \mathbb{Z}[i]$, et c'est un fait connu que le sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par des éléments a_1, \dots, a_n n'est \mathbb{Z} entier que si les a_i sont premiers entre eux. On a donc $\gamma \wedge \delta = 1$, il suffit alors d'appliquer le lemme une deuxième fois avec $a = \gamma, b = \delta$ pour obtenir une surface $(1, x, y)$. C'est une sorte de "division euclidienne" de notre surface.

Démonstration. Considérons la surface S à un cylindre de type (a, b, c) avec des connexions en selle de longueurs, dans l'ordre cyclique, a, b, c en bas, et b, a, c en haut : les autres cas sont similaires. Alors, $S' = R \cdot S$ a deux cylindres : celui du haut a une hauteur c , celui du bas une hauteur $d = a \wedge b$ et une largeur $(a + b)/d$ avec un certain twist t : on vérifie ceci facilement à la main, et les valeurs des longueurs se déduisent de $a + b + c = n$. Alors la direction $(1 + t, d)$ est une direction à un cylindre $(\delta, k\delta, \gamma)$ si on choisit $\delta = (1 + t) \wedge d$. Enfin, en appliquant une matrice bien choisie de $SL_2(\mathbb{Z})$, on ramène cette direction à la direction horizontale (c'est un fait bien connu), ce qui conclut : les longueurs des connexions en selle dans cette nouvelle surface sont

le nombre de points entiers touchés par celles-ci dans la surface originale. Un exemple parlant est montré plus bas.

□

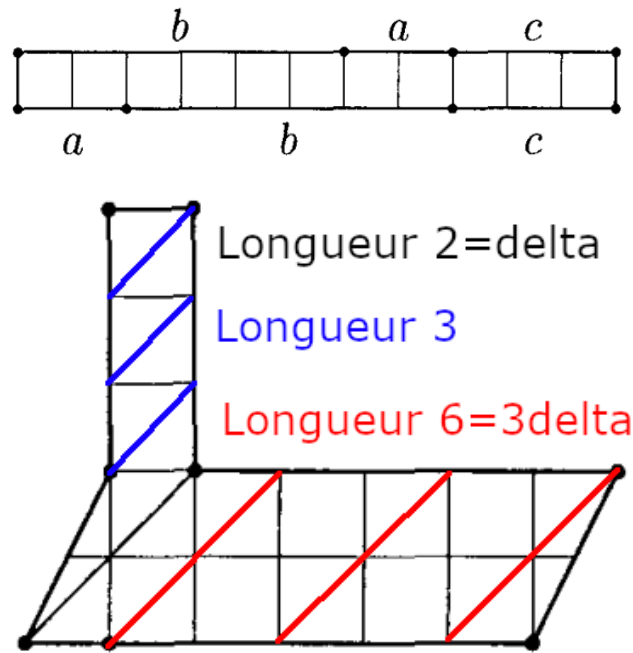


FIGURE 14 – Illustration de la manipulation effectuée : ici $\delta = 2, \gamma = 3, k = 3$

Il nous reste à exhiber un représentant important de chaque classe à lier à une surface de type $(1, x, y)$.

Proposition 4.8. *Les surfaces de type A, qu'on a ramenées à des surfaces $(1, b, c)$ avec b et c impairs, ont dans leur orbite une surface $(1, 1, n - 2)$. Les surfaces de type B, ramenées à des surfaces $(1, 2b, 2c)$, ont dans leur orbite une surface $(1, 2, n - 3)$. Ainsi, il y a moins de deux $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites de surfaces primitives à petits carreaux.*

Démonstration. On peut supposer que l'on a affaire à la surface en L de la figure plus bas, quitte à prendre l'image par R . Alors, en appliquant U^2 le twist passe à 0, puis en appliquant R on trouve la surface à deux cylindres ci-dessous, dont on peut encore supposer les twists nuls. Alors la direction diagonale dans cette surface donne une direction à un cylindre $(1, 1, n - 2)$ comme montré plus bas. Enfin, en procédant comme dans la démonstration précédente pour changer de direction, on s'est bien ramenés à une surface $(1, 1, n - 2)$. Le cas du type B est discuté dans [3] et est bien plus technique.

□

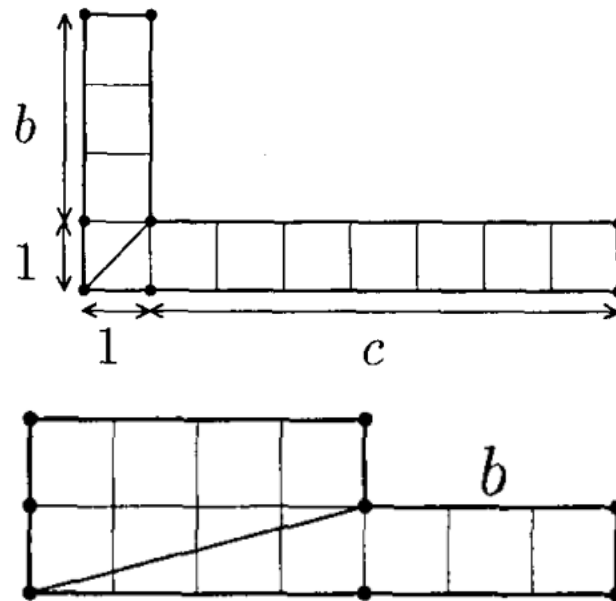


FIGURE 15 – La surface originale puis déformée et sa direction diagonale

Toutes ces réductions permettent finalement de prouver le théorème 4.3 : si $n \geq 5$ est premier, il y a exactement deux orbites, puisque celles définies par A et B sont disjointes, le nombre de points entiers de Weierstrass valant 1 sur A et 3 sur B .

5

LA THÉORIE DE TEICHMÜLLER DANS D'AUTRES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

5.1 CLASSIFICATION DE RÉSEAUX EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE COMPLEXE

En géométrie il est parfois important de bien connaître les groupes d'isométries. Dans le cas particulier de la géométrie hyperbolique complexe, on est amenés à nous intéresser à $PU(n, 1)$, le groupe des isométries holomorphes du n -espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Lorsqu'on s'intéresse aux réseaux de $PU(n, 1)$ (i.e les sous-groupes discrets de co-volume fini en l'occurrence pour la mesure de Haar sur $PU(n, 1)$) une question naturelle est celle de leur construction : à partir d'un de ces réseaux, peut-on obtenir tous les autres ? Pour répondre à cette question, on peut introduire une relation d'équivalence entre les réseaux. Une des solutions part du constat que si Γ est un réseau de $PU(n, 1)$, alors pour tout $g_0 \in PU(n, 1)$, $g_0\Gamma g_0^{-1}$ en est également un.

Définition 5.1 (Relation de commensurabilité). On dit que deux réseaux Γ et Γ' sont commensurables s'il existe $g \in PU(n, 1)$ tel que $\Gamma \cap g\Gamma'g^{-1}$ soit un sous-groupe d'indice fini de Γ et de $g\Gamma'g^{-1}$.

P. Deligne et G. Mostow fournissent en 1993 15 familles d'exemples de réseaux de $PU(2, 1)$ non-commensurables au réseau arithmétique $PU_{\mathbb{Z}}(2, 1)$. Pour savoir si ces 15 familles de réseaux sont commensurables entre elles A. Kappes et M. Möller choisissent, dans leur articles cité plus bas, des invariants par commensurabilité. L'invariant de compacité par passage au quotient par un réseau et l'invariant sur le corps des traces d'un réseau permettent à eux deux de classer ces 15 familles un nombre de classes de commensurabilité compris entre 7 et 9 inclus. Pour conclure sur le nombre de classes (qui est 9), A. Kappes et M. Möller introduisent un invariant supplémentaire issu précisément de considérations dynamiques dans les espaces de Teichmüller : le spectre d'exposants de Lyapunov.

Définition 5.2 (Exposant de Lyapunov dans les systèmes dynamiques). Soit $f : M \rightarrow M$ avec M une variété lisse et $(D_af)_{a \in M}$ une famille de matrices. On pose $A(x) = D_x f$. S'il existe un vecteur v et un réel λ bien défini par $\frac{1}{n} \log \|(A(f^n(x)) \dots A(f(x))A(x)) \cdot v\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$, alors on appelle le réel λ un exposant de Lyapunov de ce système dynamique. L'ensemble des vecteurs v associés à λ est un espace d'Oseledets.

Les exposants de Lyapunov interviennent en fait dans l'étude de systèmes dynamiques en théorie de Teichmüller notamment dans des situations similaires à l'exemple illustré suivant. En itérant le procédé illustré n fois on obtient un lacet $\gamma_n \in H_1(S, \mathbb{Z})$ et on peut voir apparaître un exposant de Lyapunov λ quand on observe $\|\gamma_n\| \sim e^{\lambda n}$.

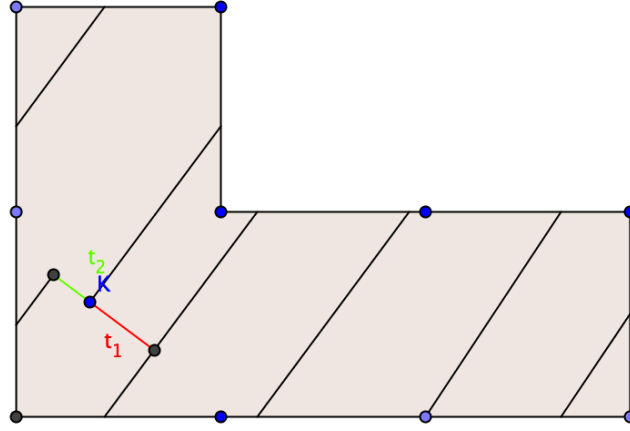
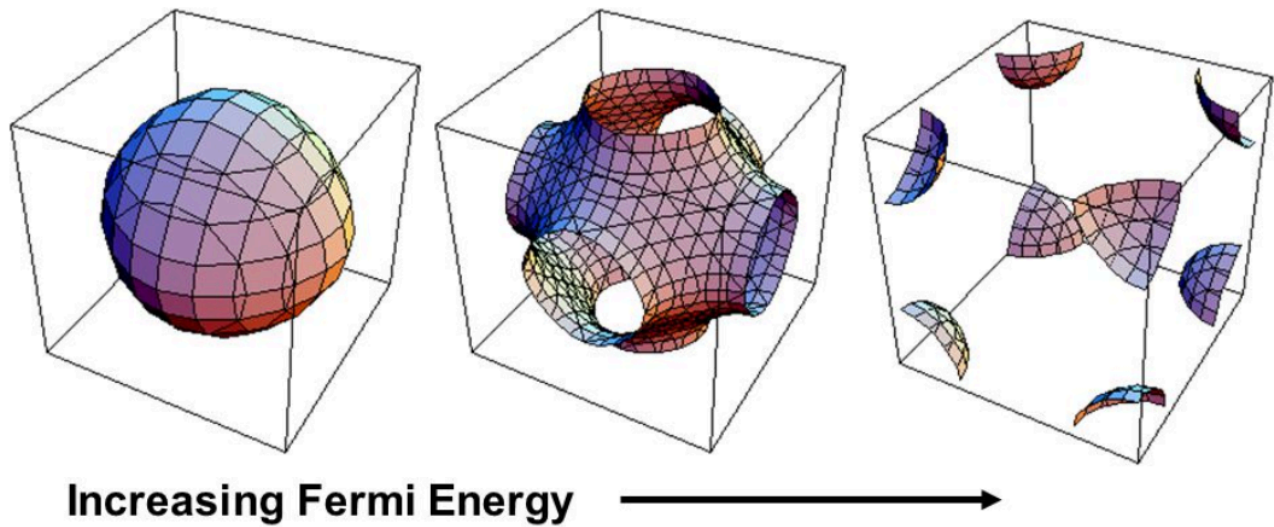


FIGURE 16 – On part d’un flot démarrant en k , après un premier ”tour”, on boucle avec t_1 pour obtenir un premier lacet γ_1 , puis, on prolonge encore le flot jusqu’à avoir fait un deuxième ”tour” se terminant plus près de k , on boucle alors avec t_2 pour obtenir γ_2 et on itère de la même manière pour obtenir la suite (γ_n) .

5.2 PROBLÈME DE NOVIKOV



Dans un modèle semi-classique à la limite des températures nulles dans un mono-cristal, les électrons occupent une partie de l’espace appelée surface de Fermi. C’est la surface d’énergie E_F la plus basse pour les électrons, qu’on peut aussi décrire dans l’espace des vecteurs d’ondes comme une sphère de rayon $\frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar}$. Les mono-cristaux étant triplement périodiques (i.e périodique en 3D), on pourra se placer directement dans $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.



<http://home.cc.umanitoba.ca/~loly/fermiarticle.html>

FIGURE 17 – Surfaces de Fermi pour une maille cubique pour une énergie E_F croissante

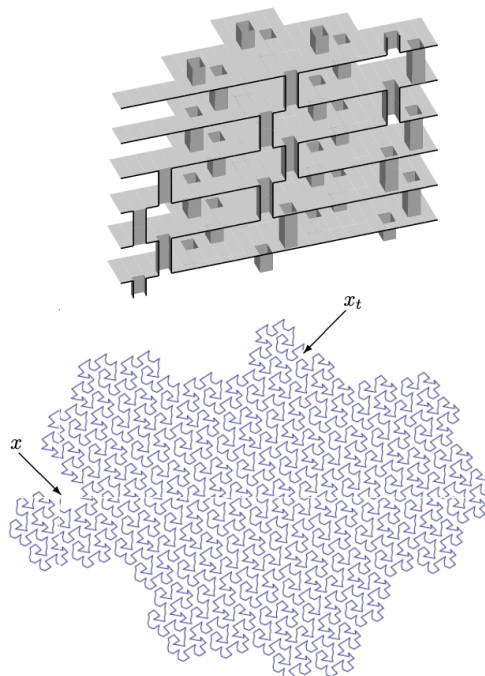


FIGURE 18 – Représentation d'une trajectoire possible après section par un hyperplan

On considère le champ B uniforme comme une famille d'hyperplans orthogonaux à \vec{B} où les électrons se déplacent. Plus précisément, les électrons se déplacent à l'intersection de ces hyperplans et des surface de Fermi. Une questions qui se pose alors dans l'étude dynamique de ce problème est celle du taux de diffusion des électrons : que peut-on dire de $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(d(x_t, x))}{\log(t)}$ où x_t est la position d'un électron au temps t et $x = x_0$ (problème de Novikov). Le formalisme de Teichmüller permet d'introduire des exposants de Lyapunov liés à un ensemble issu de l'induction de Rauzy-Veech (un outil qui voit le jour dans l'étude des surfaces de translation, comme on peut le voir de manière élémentaire dans le cours de juin 2018 de P.Hubert à l'institut Fourier : www.youtube.com/watch?v=v5eEYrQxhyQ) : le joint de Rauzy. Avila, Hubert et Skripchenko lient ces exposants de Lyapunov au taux de diffusion (théorème 30 dans [9]), ce qui leur permet de donner un résultat sur la question du taux de diffusion dans le théorème suivant.

Théorème 5.1 (Avila, Hubert, Skripchenko).

$$\frac{1}{2} < \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(d(x_t, x))}{\log(t)} < 1$$

pour presque toute trajectoire possible.

6

CONCLUSION

Pour conclure, ce PSC ne nous a pas seulement fait découvrir un domaine des mathématiques en plein développement, il nous a aussi permis de découvrir un peu l'univers de la recherche fondamentale en mathématiques et les difficultés que l'on y rencontre parfois (inexistence d'un ouvrage de référence par exemple).

Les deux principales difficultés que nous avons rencontrées lors de notre PSC sont l'organisation efficace du travail en groupe, et la difficulté qu'ont les non-initiés à découvrir un nouveau domaine scientifique. Nous avons compris, au fur et à mesure que l'année avançait, que le meilleur moyen de découvrir un nouveau domaine est incontestablement de discuter avec des gens qui le connaissent bien.

Nous tenons à remercier chaleureusement le Dr Siva Santos, qui a été notre tuteur tout au long de cette année, et dont l'aide a toujours été aussi précieuse qu'efficace.

Nous remercions également Dr Fresán pour avoir supervisé notre PSC.

RÉFÉRENCES

- [1] O.BAKKACHA, G.RIBEIRO, M.TYSON et H.VIEIRA : Volumes de masur-veech des espaces de modules. 2017.
- [2] O. FORSTER : Lectures on riemann surfaces. *Springer*, 1981.
- [3] P.HUBERT et S.LELIÈVRE : Prime arithmetic teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel journal of mathematics*, 2006.
- [4] J.LEE : Introduction to topological manifolds, vol. 202. *Springer Science and Business Media*, 2010.
- [5] S.LELIÈVRE : Surfaces de veech arithmétiques en genre deux : disques de teichmüller, groupes de veech et constantes de siegel-veech. *Université Rennes 1*, 2004.
- [6] R.Sá EARP et E.TOUBIANA : Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de riemann. *Cassini*, 2009.
- [7] A.WRIGHT : Translation surfaces and their orbit closures : an introduction for a broad audience. *arXiv :1411.1827v1*, 2014.
- [8] A.KAPPES et M.MÖLLER : Lyapunov spectrum of ball quotients with applications to commensurability questions. *arXiv :1207.5433*, 2015.
- [9] A.AVILA, A.SKIPCHENKO et P.HUBERT : Diffusion for chaotic plane sections of 3-periodic surfaces. *arXiv :1412.7913v3*, 2016.
- [10] C.FAVRE : Surfaces de riemann et théorie des revêtements. *Éditions de l'École Polytechnique*.