Resolução das atividades complementares

TERCEIRÃO FTD 4

Matemática

M20 — Geometria Analítica: Circunferência

p. 31

1 (Uneb-BA) A condição para que a equação $x^2 + 4x + y^2 - 6y = m^2 - 29$ represente uma circunferência é:

a) $-1 < m < 1$ ou $0 < m < 3$
b) $-3 \leqslant m \leqslant 3$
c) $-2 \leqslant m \leqslant 2$
d) $m < -4$ ou $m > 4$
e) $-2 < m < -1$ ou $1 < m < 2$

Resolução:

$x^2 + 4x + y^2 - 6y = m^2 - 29$

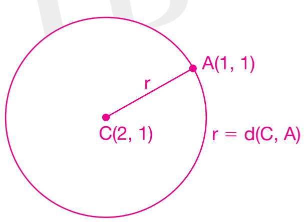
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = m^2 - 29 + 4 + 9$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = m^2 - 16$

$m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m < -4$ ou $m > 4$

2 (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1). $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Resolução:



Cálculo do raio:

$r = d(C, A)$

$r = \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 1)^2} \Rightarrow r = 1$

Equação da circunferência:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

3 (UERN) A circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ limita um círculo cuja área é igual a:

a) 6π
b) 8π
c) 9π
d) 12π
e) 16π

Resolução:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 = 4 + 1$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

Daí, temos que: $r = 3$

Então: $S = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 \therefore S = 9\pi$

4 (UFV-MG) A distância do centro da circunferência, de equação $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$, ao ponto (3, 4) é:

a) 5
b) 1
c) 3
d) $\sqrt{41}$
e) $\sqrt{17}$

Resolução:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 4 + 16 - 11$

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9 \therefore C(2, 4)$ e $r = 3$; $P(3, 4)$

$d(C, P) = \sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2}$

$d(C, P) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (4 - 4)^2} = 1$

5 (UECE) Sejam M(7, −2) e N(5, 4). Se C_1 é uma circunferência que tem o segmento $\overline{MN}$ como um diâmetro, então a equação de C_1 é:

a) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 27 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 27 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 27 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 27 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 12x + 2y - 27 = 0$

Resolução:

$d(M, N) = \sqrt{(5 - 7)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} \Rightarrow r = \sqrt{10}$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{7 + 5}{2} = 6 \\ b &= \frac{2 + 4}{2} = 1 \end{aligned}\right\} C(6, 1)$$

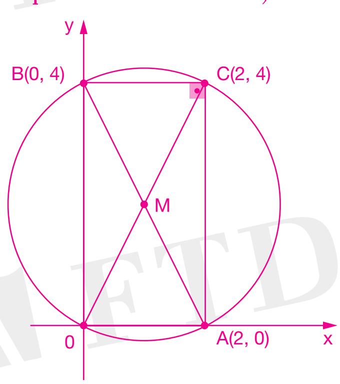
$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 2y + 27 = 0$

6 (Fuvest-SP) Uma circunferência passa pelos pontos (2, 0), (2, 4) e (0, 4). Logo, a distância do centro dessa circunferência à origem é:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{4}$
d) $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{6}$

Resolução:

A partir do enunciado, temos:



O centro da circunferência é o ponto *M* médio de $\overline{AB}$, isto é, M(1, 2).

A distância do ponto M(1, 2) a origem é:

$d = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

7 (Vunesp-SP) Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais desse quadrado. $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$

Resolução:

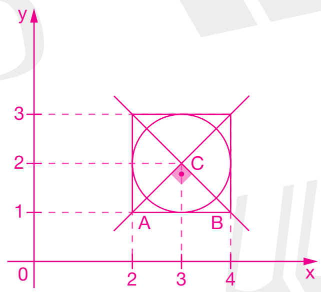
A equação reduzida da circunferência é:

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 4y = -12$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -12 + 9 + 4$

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Assim, o centro é C(3, 2) e o raio é r = 1.



Da figura, temos:
A(2, 1) e B(4, 1)

Coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AC}$: $m_{AC} = \dfrac{2 - 1}{3 - 2} = 1$

Equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$: $y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \therefore x - y - 1 = 0$

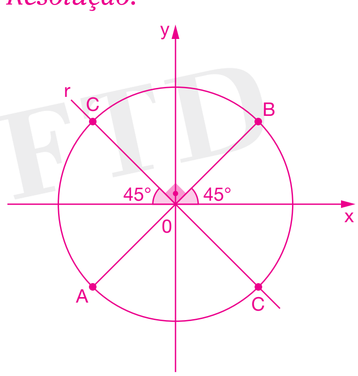
Coeficiente angular de $\overleftrightarrow{BC}$: $m_{BC} = \dfrac{2 - 1}{3 - 4} = -1$

Equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$: $y - 1 = -1(x - 4) \therefore x + y - 5 = 0$

8 (MACK-SP) *A* e *B* são pontos da reta $x - y = 0$ e também vértices de um triângulo isósceles inscrito na curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$. A soma das coordenadas do terceiro vértice do triângulo é:

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) 4
d) $4\sqrt{2}$
e) 0

Resolução:



A curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma circunferência de centro (0, 0) e raio 2.

Os vértices *A* e *B* estão na reta $x - y = 0$, ou seja, na reta suporte das bissetrizes do primeiro e terceiro quadrantes.

A reta *r* é a reta suporte das bissetrizes do segundo e quarto quadrantes, e sua equação é $x + y = 0$.

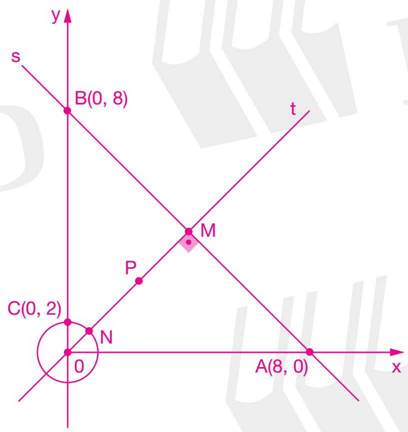
O terceiro vértice do triângulo isósceles é a intersecção da reta *r*, mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a circunferência. Portanto, sendo (x, y) as coordenadas do terceiro vértice, temos que $x + y = 0$.

9 (Fuvest-SP) Sendo *C* a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e *s* a reta $x + y = 8$.

a) Determine uma equação da reta perpendicular a *s* e que passa pelo centro de *C*. $y = x$

b) Dentre os pontos eqüidistantes de *C* e *s*, determine aquele que está mais próximo de *s*. $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$

Resolução:



$m_s = \frac{0 - 8}{8 - 0} = -1$

a) Como $t \perp s$, temos: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_t \cdot (-1) = -1$

$m_t = 1$

Se $(0, 0) \in t$, temos: $y - 0 = 1(x - 0)$

$y = x$ (equação da reta *t*)

b) Pela definição de distância, devemos ter *P* pertencente a *t*. Então, $P(x, x) \in t$. Como $d(P, s) = d(P, C)$, então *P* é o ponto médio de $\overline{MN}$. *M* é ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow M(4, 4)$.

$\{N\} = C \cap t \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow N(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Logo, $P\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$

10 (Unicamp-SP) Os ciclistas *A* e *B* partem do ponto $P(-1, 1)$ no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista *A* segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista *B*, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o quilômetro. Pergunta-se:

a) Quais as coordenadas do ponto *Q*, distinto de *P*, onde haverá cruzamento das duas trajetórias? $(7, 7)$

b) Se a velocidade do ciclista *A* for 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista *B* para que cheguem no mesmo instante ao ponto *Q*? 10π km/h

Resolução:

A: $4y - 3x - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{3x + 7}{4}$ (reta *s*)

B: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \Rightarrow C = (3, 4)$ e $C \in s$

a) *A* em *B* $\rightarrow$

$\rightarrow x^2 + \left(\frac{3x + 7}{4}\right)^2 - 6x - 8\left(\frac{3x + 7}{4}\right) = 0$

$x^2 - 6x - 7 = 0$

$x' = 7 \qquad x'' = -1$

$y' = 7 \qquad y'' = 1$

$Q(7, 7)$ ou $Q'(-1, 1)$. Como Q' é ponto de partida, então $Q(7, 7)$.

b) $d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(-1 - 7)^2 + (1 - 7)^2} =$

$= \sqrt{64 + 36} = 10$

A: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow 20 = \frac{10}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ h

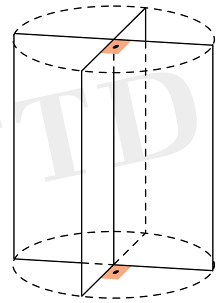
B: $r = 5$, pois $r = \frac{1}{2}$ PQ

d = distância percorrida por *B*

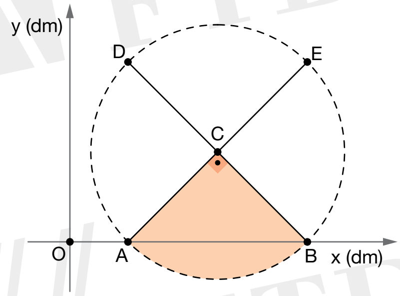
$d = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \qquad d = 5\pi$ km

$v = \frac{d}{t} \Rightarrow \frac{5\pi}{\frac{1}{2}} = 10\pi$ km/h

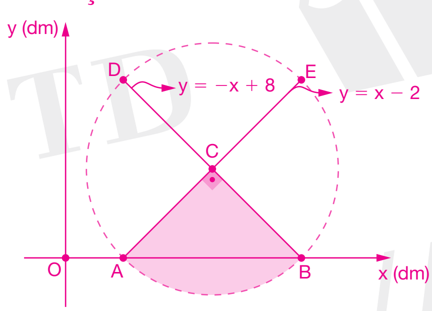
11 (UFPel-RS) Uma porta giratória de uma joalheria nos dá a idéia de dois planos, perpendiculares entre si, girando em torno da reta de intersecção desses planos, a qual coincide com o eixo do cilindro de revolução.



A figura abaixo é uma adaptação da área do piso ocupada pela referida porta ao sistema ortogonal cartesiano. Determine a área (colorida na figura) destinada ao acesso a essa joalheria, sendo r: $y = x - 2$ a reta suporte do segmento $\overline{AE}$; s: $y = -x + 8$ a reta suporte do segmento $\overline{BD}$ e C o centro da circunferência que contém os pontos A, B, D e E. $\frac{9\pi}{2}$ dm^2



Resolução:



O ponto C é a intersecção das retas:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 8 \end{cases} \Rightarrow x - 2 = -x + 8 \therefore x = 5$$

Se $x = 5$, então $y = 5 - 2 = 3$. Logo, $C(5, 3)$.

Os pontos A e B são as intersecções das retas com o eixo x $(y = 0)$. Logo:

$y = x - 2 \Rightarrow 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \therefore A(2, 0)$

$y = -x + 8 \Rightarrow 0 = -x + 8 \Rightarrow x = 8 \therefore B(8, 0)$

A distância entre C e A é o raio da circunferência:

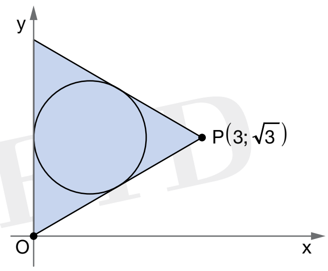
$$d(C, A) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{18} \therefore r = 3\sqrt{2} \text{ dm}$$

A área colorida vale:

$$S = \frac{\pi r^2}{4} \Rightarrow S = \frac{\pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2}{4} \therefore S = \frac{9\pi}{2} \text{ dm}^2$$

12 (UFF-RJ) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo eqüilátero da figura.

$x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}\,y + 3 = 0$



Resolução:

Vamos calcular o lado do triângulo eqüilátero:

$O(0, 0) \qquad P(3, \sqrt{3})$

$\ell = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow \ell = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

O ponto $Q(0, 2\sqrt{3})$

Vamos achar o ponto médio de $\overline{OQ}$:

$P_M = \left(\frac{0}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = (0, \sqrt{3})$

Seja *h* a altura do triângulo OPQ:

$d(P, P_M) = h = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 3$

O raio da circunferência inscrita é $\frac{1}{3}$ h.

$\frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \therefore r = 1$

$r = 1 \qquad C(1, \sqrt{3})$

$(x - 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 1$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}\,y + 3 = 0$

p. 37

13 (MACK-SP) Se P(a, b) é ponto da reta $y = x - 1$ e é interno à curva $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$, então, necessariamente:

a) $3\sqrt{2} < a < 5\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2} < a < 4$

c) $4 < a < 3\sqrt{2}$

d) $3 < a < 5$

e) $2 < a < 4$

Resolução:

A curva $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ é uma circunferência de centro C(3, 4) e raio 2.

Se P(a, b) é ponto da reta $y = x - 1$, então $b = a - 1$.

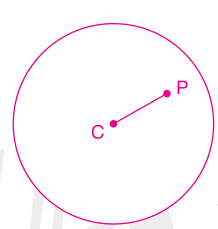
Logo, o ponto *P* é da forma $P(a, a - 1)$.

Se *P* é interno à circunferência, a distância de *P* até o centro da circunferência é menor que o raio.

$PC < 2$

$\sqrt{(a - 3)^2 + (a - 1 - 4)^2} < 2$

$a^2 - 8a + 15 < 0$



Resolvendo-se essa inequação, resulta: $3 < a < 5$

14 (Unicamp-SP) Uma reta intersecciona nos pontos A(3, 4) e B(−4, 3) uma circunferência centrada na origem.

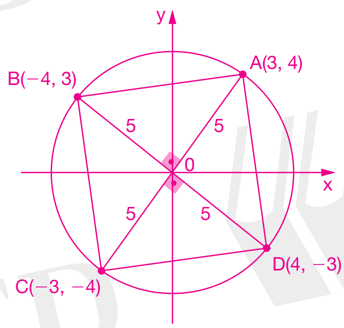
a) Qual é o raio dessa circunferência? 5

b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos *A* e *B* e seus simétricos em relação à origem. 50

Resolução:

a) Uma equação para essa circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, onde *r* é o raio.
Como o ponto A(3, 4) pertence a essa circunferência, temos que: $3^2 + 4^2 = r^2 \therefore r = 5$.

b) Sendo *C* e *D* os pontos simétricos de *A* e *B* em relação à origem, respectivamente, temos:
$x_C = -x_A = -3$ e $y_C = -y_A = -4 \therefore C(-3, -4)$
$x_D = -x_B = 4$ e $y_D = -y_B = -3 \therefore D(4, -3)$



$$m_{AC} = \frac{4 - (-4)}{3 - (-3)} = \frac{4}{3} \qquad m_{BD} = \frac{3 - (-3)}{-4 - 4} = -\frac{3}{4}$$

Como $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$, os diâmetros AC e BD são perpendiculares entre si.

A área *S* do quadrilátero ABCD é a soma das áreas dos triângulos ABD e CBD. Logo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \therefore S = 50$$

p. 38

15 (FGV-SP)

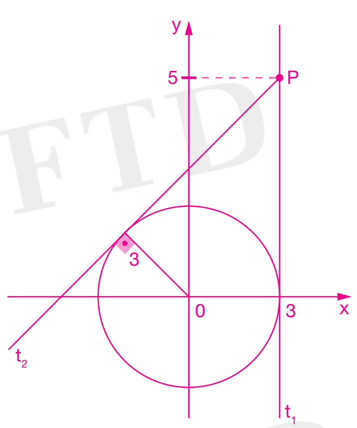
a) No plano cartesiano, considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(3, \sqrt{3})$.
Verificar se *P* é interior, exterior ou pertencente à circunferência. pertencente

b) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ e o ponto P(3, 5), obtenha as equações das retas tangentes à circunferência, passando por *P*. $x - 3 = 0$ e $8x - 15y + 51 = 0$

Resolução:

a) Substituindo as coordenadas de *P* na equação da circunferência, obtemos $3^2 + (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 = 0$, que é uma sentença verdadeira. Logo, o ponto *P* pertence à circunferência.

b) A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ tem centro (0, 0) e raio 3.
Do enunciado, temos a figura na qual t_1 e t_2 são as retas tangentes.



- Uma equação da reta (t_1) é $x - 3 = 0$.
- Sendo *m* o coeficiente angular da reta (t_2), sua equação é da forma $y - 5 = m(x - 3)$, ou seja, $mx - y + 5 - 3m = 0$.
- A distância do centro (0, 0) da circunferência à reta (t_2) $mx - y + 5 - 3m = 0$ é igual a 3. Logo:
$$\frac{|m \cdot 0 - 0 + 5 - 3m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$
- Elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação, temos:
$$25 - 30m + 9m^2 = 9m^2 + 9 \therefore m = \frac{8}{15}$$

Portanto, uma equação da reta (t_2) é $y - 5 = \frac{8}{15}(x - 3)$, ou seja, $8x - 15y + 51 = 0$.

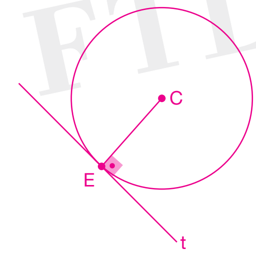
16 (UEM-PR) A equação da reta tangente à circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ no ponto (6, 6) é:

a) $3y - 4x + 6 = 0$
b) $4y + 3x - 42 = 0$
c) $4y + 3x - 6 = 0$
d) $4y - 3y - 6 = 0$
e) $3y + 4x - 42 = 0$

Resolução:

$$m_{\overline{CE}} = \frac{6 - 2}{6 - 3} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_t \cdot m_{\overline{CE}} = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{3}{4}$$

$$y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 6) \Rightarrow 4y - 24 = -3x + 18 \Rightarrow 4y + 3x - 42 = 0$$



17 (Fuvest-SP) A reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ é tangente a uma circunferência de centro (2, 0). Calcule o raio da circunferência. $r = 1$

Resolução:

$$d(P, r) = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 - 0\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{1 + \frac{3}{9}}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = 1 \therefore r = 1$$

18 (UFOP-MG) Determine a equação da circunferência tangente ao eixo Ox, cujo centro é a intersecção das retas: r: $y = x + 5$ e t: $y = -2x + 8$. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 36$

Resolução:

$$r \cap t: x + 5 = -2x + 8 \Rightarrow x = 1 \qquad \therefore C(1, 6)$$
$$y = 1 + 5 = 6$$

Como a circunferência é tangente ao eixo Ox:

$d(C, Ox) = r$

Equação de reta do eixo *x*: $y = 0 \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

$$d(C, Ox) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 6$$

$\therefore$ $r = 6$ e a equação da circunferência pode ser escrita como: $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

19 (PUC-SP) São dados os pontos A(−1, 2), B(0, 3) e C(m, −1).

a) Determine o número real *m*, não-nulo, de modo que a circunferência de centro *C* e raio $2\sqrt{2}$ seja tangente à reta determinada pelos pontos *A* e *B*. −8

b) Qual a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$? $x + y - 2 = 0$

Resolução:

a) $$\overleftrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3 - 3x + y = 0$$
$$-x + y - 3 = 0$$

Distância do ponto C(m, −1) à reta:

$-x + y - 3 = 0$ é $2\sqrt{2}$

$$2\sqrt{2} = \frac{|-m - 1 - 3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4 = |-m - 4|$$

$$(-m - 4) = \pm 4 \Rightarrow -m - 4 = +4 \Rightarrow m = -8$$

$$-m - 4 = -4 \Rightarrow m = 0 \text{ (não serve)}$$

b) $$P_{\text{médio}}(AB) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

Equação da mediatriz:

$y = x + 3 \quad m = 1 \quad m' = -1$

$$y - \frac{5}{2} = -1\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - \frac{5}{2} = -x - \frac{1}{2}$$

$$y + x - 2 = 0$$

20 (UFPR) Considerando, no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 25 = 0$ e a reta de equação $2x + y + 8 = 0$:

a) obtenha a equação da reta que contém o centro da circunferência e é paralela à reta dada; $y = -2x$

b) calcule as coordenadas do ponto de intersecção da reta dada com a reta tangente à circunferência no ponto P(1, 4). $\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$

Resolução:

$\lambda: x^2 + y^2 + 6x - 12y + 25 = 0 \qquad s: 2x + y + 8 = 0$

$m = -2$

$C(-3, 6)$ e $r = 2\sqrt{5}$

a) $y - 6 = -2(x + 3) \Rightarrow y - 6 = -2x - 6 \Rightarrow y = -2x$

b) P(1, 4)

$\lambda: x^2 + y^2 + 6x - 12y + 25 = 0$

$P \in \lambda$, pois $1^2 + 4^2 + 6 \cdot 1 - 12 \cdot 4 + 25 = 0$.

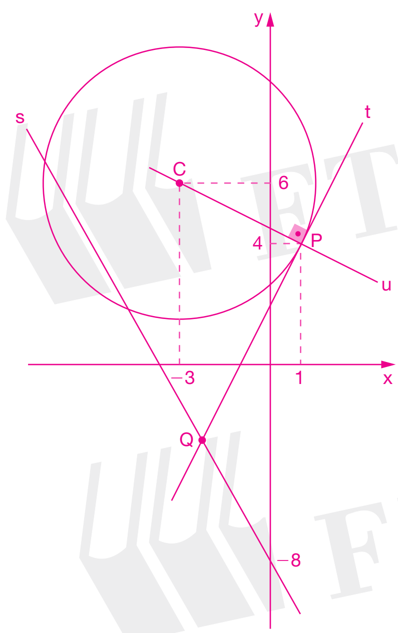
$m_u = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_t = 2$, pois $t \perp u$.

$t: y - 4 = 2(x - 1)$, ou seja, $y = 2x + 2$.

Substituindo na equação de *s*:

$2x + (2x + 2) + 8 = 0 \therefore x = -\frac{5}{2}$ e $y = -3$

$Q = \left(-\frac{5}{2}, -3\right)$

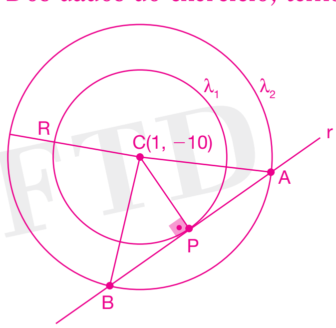


21 (UFPE) A reta *r* de equação $3x - 4y + 17 = 0$ é tangente à circunferência λ_1 de centro no ponto $(1, -10)$. A reta *r* determina, na circunferência λ_2 concêntrica com λ_1, uma corda de 18 cm de comprimento. Podemos afirmar que o raio de λ_2 mede:

a) 13 cm
b) 12 cm
c) 14 cm
d) 15 cm
e) 8 cm

Resolução:

Dos dados do exercício, temos:



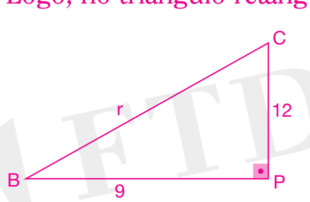
Cálculo do raio da circunferência λ_1:

$R = d(P, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-10) + 17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|60|}{5} = \frac{60}{5} = 12$

Se $AB = 18$ e *P* é ponto médio de AB, temos:

$AP = PB = \frac{18}{2} = 9$

Logo, no triângulo retângulo CPB, temos:



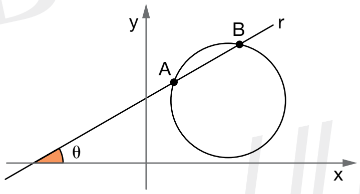
Aplicando Pitágoras, temos:

$r^2 = 9^2 + 12^2$

$r^2 = 81 + 144$

$\therefore r = 15$ cm

22 (UFMG) Observe a figura:



Nessa figura, a reta *r* determina uma corda $\overline{AB}$, de comprimento $4\sqrt{6}$, na circunferência de equação $x^2 - 18x + y^2 - 16y + 96 = 0$. Além disso, a reta *r* faz com o eixo *x* um ângulo θ tal que $\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$ e intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada positiva. Determine a equação da reta *r*. $3x - 4y + 30 = 0$

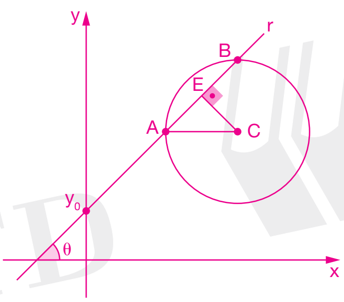
Resolução:

Reescrevendo a equação da circunferência, temos:

$x^2 - 18x + 81 + y^2 - 16y + 64 = 81 + 64 - 96$

$(x - 9)^2 + (y - 8)^2 = 49$

O centro é C(9, 8) e o raio é $r = 7$.



$AB = 4\sqrt{6}$

$AE = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{6}$; $AC = r = 7$

Aplicando o teorema de Pitágoras no △AEC, temos:

$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2}$

$d(C, r) = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} \Rightarrow d(C, r) = 5 \quad \text{(I)}$

Equação da reta *r*: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Lembrando que $m = \text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$, e tomando o ponto $X(0, y_0)$, temos:

$y - y_0 = \frac{3}{4}x \Rightarrow 3x - 4y + 4y_0 = 0 \quad \text{(II)}$

$\therefore\ a = 3$; $b = -4$ e $c = 4y_0$

$$d(C, r) = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 8 + 4y_0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$d(C, r) = \frac{|-5 + 4y_0|}{5} \quad \text{(III)}$$

(I) = (III): $|4y_0 - 5| = 25$

$4y_0 - 5 = 25$	$4y_0 - 5 = -25$
$y_0 = \frac{15}{2}$	$y_0 = -5$
	Não serve, pois $y_0 > 0$.

Substituindo y_0 em (II), temos:

$3x - 4y + 4 \cdot \left(\frac{15}{2}\right) = 0 \Rightarrow 3x - 4y + 30 = 0$

23 (UFPB) A reta $2\sqrt{3}\,x - 6y + 2\sqrt{3} = 0$ tangencia a circunferência de centro no ponto $P_0 = (1, 0)$. Encontre o ponto de tangência. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Resolução:

Seja *s*: $\sqrt{3}\,x - 3y + \sqrt{3} = 0 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -3 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \quad P_0 = (1, 0)$

Se *s* tangencia a circunferência λ, então: $d(P_0, s) = r$

$$d(P_0, s) = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 - 3 \cdot 0 + \sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 9}} = 1 \Rightarrow r = 1$$

A equação de λ é, portanto: $(x - 1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{(I)}$

O ponto de tangência obedece a ambas as equações, a de *s* e a de λ. Logo:

$$3y = \sqrt{3}(x + 1) \Rightarrow y^2 = \frac{(x + 1)^2}{3} \quad \text{(II)}$$

$$\text{(II) em (I): } (x - 1)^2 + \frac{(x + 1)^2}{3} = 1$$

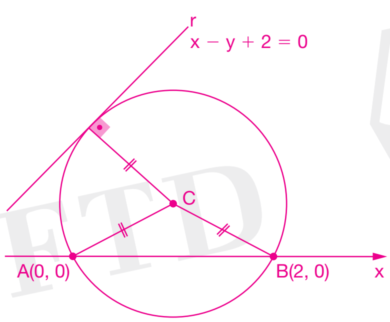
$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \therefore P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

24 (Fuvest-SP) Considere as circunferências que passam pelos pontos (0, 0) e (2, 0) e que são tangentes à reta $y = x + 2$.

a) Determine as coordenadas dos centros dessas circunferências. (1, 1) e (1, −7)

b) Determine os raios dessas circunferências. $\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

Resolução:



a) Os centros *C* de tais circunferências pertencem à reta *r*, mediatriz de $\overline{AB}$, cujos pontos têm abscissa igual a 1 e são, portanto, da forma C(1, a).

Sendo *C* eqüidistante do ponto *A* e da reta *r*, tem-se a equação:

$$\sqrt{(1 - 0)^2 + (a - 0)^2} = \frac{|1 - a + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$ cujas raízes são 1 e −7.

Logo, os centros são C(1, 1) e C(1, −7).

b) Sendo AC o raio de uma circunferência, temos:

$C(1, 1) \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$

$C(1, -7) \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 + 7)^2} = 5\sqrt{2}$

Logo, os raios são $\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$.

25 (Esam-RN) A equação da circunferência com centro no ponto $(-8, 3)$, tangente externamente à circunferência $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 64$, é:

a) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 5$

b) $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$

c) $(x + 8)^2 + (y + 3)^2 = 25$

d) $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 25$

e) $(x + 8)^2 + (y + 3)^2 = 5$

Resolução:

$\lambda_1: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 64 \quad \left| \begin{array}{l} C_1(4, -2);\ r_1 = 8 \\ C_2(-8, 3) \to \text{dado} \end{array} \right.$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(4 + 8)^2 + (-2 - 3)^2} = 13$

$r_2 = 13 - 8 = 5$

$\lambda_2: (x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$

26 (Unicamp-SP)

a) Identifique as circunferências de equações $x^2 + y^2 = x$ e $x^2 + y^2 = y$, calculando o raio e o centro delas. Esboce seus gráficos.

b) Determine os pontos de intersecção dessas circunferências e mostre que as retas a elas tangentes em cada um desses pontos são perpendiculares entre si. $A(0, 0)$; $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Resolução:

a) $\lambda: x^2 + y^2 = x$

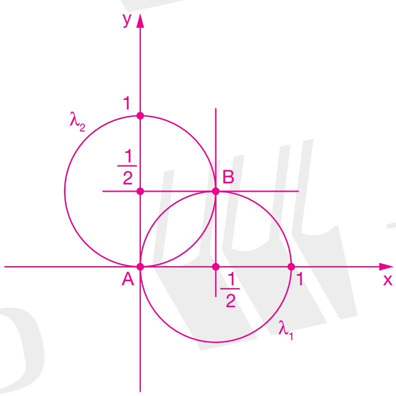
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$C_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad r = \frac{1}{2}$

$\lambda_2: x^2 + y^2 = y$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$C_2\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad r_2 = \frac{1}{2}$



b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) e (II), vem: $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$

Substituindo em (I), temos: $x^2 + x^2 - x = 0 \Rightarrow 2x^2 - x = 0$

$x' = 0 \qquad x'' = \frac{1}{2} \qquad A(0, 0); B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- Retas tangentes

  Em $A(0, 0)$: eixos *x* e *y*.

  Em $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: reta $y = \frac{1}{2}$ (horizontal) e $x = \frac{1}{2}$ (vertical).

  Nesses pontos, as retas tangentes são perpendiculares entre si.

27 (UFPel-RS) Determinar a equação geral da circunferência concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ e tangente ao eixo das ordenadas. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

Resolução:

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

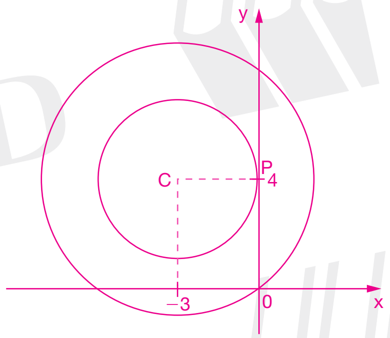
$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

$C(-3, 4) \qquad r = 5 \qquad P(0, 4)$

$r' = d(C, P) = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

$C_1 = (-3, 4) \qquad r' = 3$

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$



28 (UFSC) Determine o raio da circunferência C_1, cujo centro é o ponto de intersecção da reta *r* de equação $x - y - 1 = 0$ com a reta *s* de equação $2x - y + 1 = 0$, sabendo que C_1 é tangente exteriormente à circunferência C_2 de equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$. 3

Resolução:

Dados:

r: $x - y - 1 = 0$ e s: $2x - y + 1 = 0$

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = -3$$

$$\lambda_1: \begin{cases} C_1(-2, -3) \\ r_1 = ? \end{cases} \qquad \lambda_2: x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0 \begin{cases} C_2(6, 3) \\ r_2 = 7 \end{cases}$$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$

$r_1 + r_2 = 10 \qquad r_1 = 3$

29 (UFSM-RS) Dada a circunferência β: $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, então a circunferência α, que é concêntrica à circunferência β e tangente à reta r: $x + y = 0$, é:

a) $x^2 + (y + 2)^2 = 4$

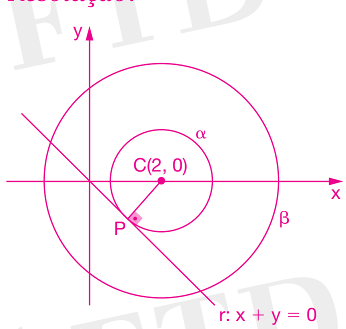
b) $y^2 - 4x + y^2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$

e) $(x + 2)^2 + y^2 = 2$

Resolução:



β: $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 12 + 4$

$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$

Logo, $C(2, 0)$ e $r_\beta = 4$.

O raio da circunferência α é a distância de *C* à reta *r*.

$$r_\alpha = d(C, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Portanto, a equação da circunferência α é: $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$

Em questões como a 30, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

30 (UFPE) As circunferências α: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ e β se interceptam somente no ponto A(3, 0). Sabendo que AP é um diâmetro de α e que β passa pelo ponto médio de CP, em que *C* é o centro de α, então:

(01) o eixo dos *x* é tangente a β.

(02) o centro de β é o ponto $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

(04) o raio de β é $\frac{3}{2}$.

(08) β intercepta o eixo dos *y*.

(16) β passa pelo ponto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

$1 + 2 + 4 + 16 = 23$

Resolução:

De acordo com os dados, temos:

$\alpha: = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \therefore C(3, 2)$ e $r = 2$

$\overline{AP}$ é um diâmetro de α, logo, P(3, 4).

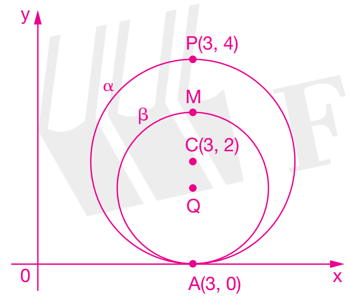
M é ponto médio de $\overline{CP}$.

$x_m = 3$ e $y_m = 3 \therefore M(3, 3)$

Seja *Q* o centro de β:

$$x_Q = \frac{3 + 3}{2} = 3;\ y_Q = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2} \therefore Q\left(3, \frac{3}{2}\right) \text{ e } r_1 = \frac{3}{2}$$

$$\beta: (x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$



(01) Correta.

A distância do centro de β ao eixo *x* é igual ao raio de β. Daí, concluímos que β é tangente ao eixo *x*.

(02) Correta.

O centro de β é o ponto $Q\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

(04) Correta.

O raio de β é $\frac{3}{2}$.

(08) Falsa.

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \text{(I)} \\ x = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), vem: $y^2 - 3y + 9 = 0$

A equação não tem solução em $\mathbb{R}$ e β não intercepta o eixo dos *y*.

(16) Correta.

$$\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

Logo, β passa por $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

São corretas as afirmativas 1, 2, 4 e 16, somando 23.